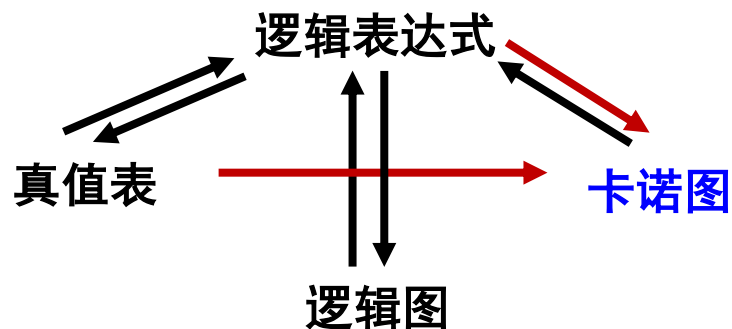


4.1 多变量卡诺图



本节中的几个问题

- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图

基于卡诺图的逻辑运算

多变量卡诺图

变量积

原变量为1, 反变量为0

- 卡诺图单元格对应的最小项按格雷码摆放
- 任何两个相邻单元格对应的最小项只有一个变量取值不同

1. 两变量卡诺图

$$F=f(AB)$$

$$00 - \bar{A}\bar{B} - 0$$

$$01 - \bar{A}B - 1$$

$$11 - AB - 2$$

$$10 - A\bar{B} - 3$$

相邻只变一个

	\bar{B}	B
\bar{A}	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

(a)

	B	0	1
A	0	0 0 0	0 1 1
	1	1 0 2	1 1 3

(b)

	B	0	1
A	0	0	1
	1	2	3



多变量卡诺图

2. 三变量卡诺图

$$F = f(ABC)$$

一位 A

A	BC 两位格雷码			
	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

(这里 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, 即 0 开始)

↓

000 — $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ — 0

100 — $A\bar{B}\bar{C}$ — 4

101 — $A\bar{B}C$ — 5

111 — ABC — 7

110 — $AB\bar{C}$ — 6

⋮



多变量卡诺图

3. 四变量卡诺图

$$F=f(ABCD)$$

两位格密码

		CD			
两位格密码	AB	00	01	11	10
	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10



多变量卡诺图

4. 五变量卡诺图

$$F = f(ABCDE)$$

三位格雷码

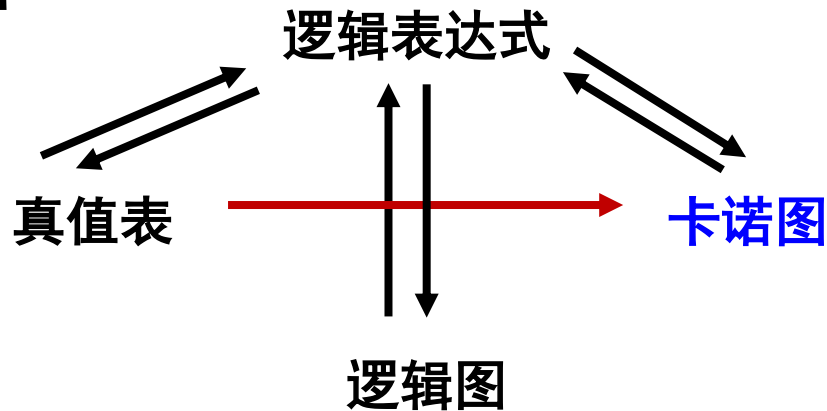
AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20



① 已知真值表→卡诺图

真值表 (格雷码)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



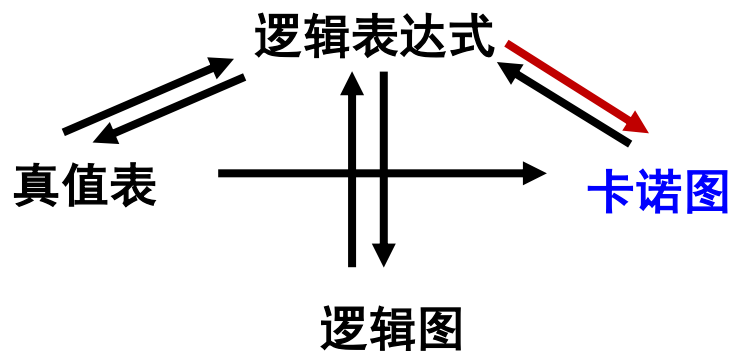
非常好写

000 → 0.

格雷码组合.

		BC			
A		00	01	11	10
		0	0	1	0
	1	0	1	1	1





		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

标准与或式 $F = \sum m(3, 5, 6, 7)$ 011 101 110 111 填1, 剩下0

标准或与式 $F = \prod M(0, 1, 2, 4)$ 000 001 010 100 填0, 剩下1

② 已知标准与或式

③ 已知标准或与式

真值表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1 ✓
1	0	0	0
1	0	1	1 ✓
1	1	0	1 ✓
1	1	1	1 ✓



填写卡诺图

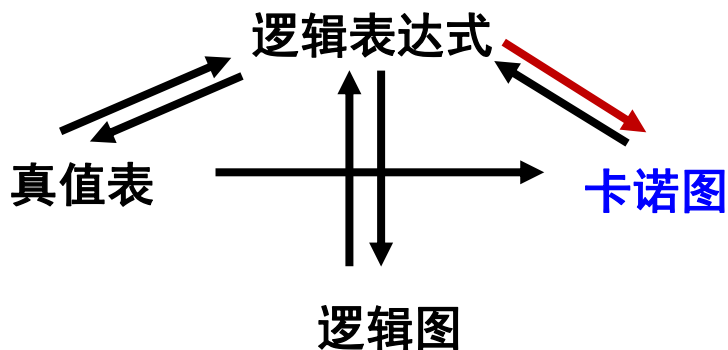
非标准

$$F = AB + BC + AC \quad \text{补项 还原成最简项之和}$$

$$= AB(C + \bar{C}) + BC(A + \bar{A}) + AC(B + \bar{B})$$

$$= \overset{111}{ABC} + \overset{110}{AB\bar{C}} + \overset{111}{ABC} + \overset{011}{\bar{A}BC} + \overset{111}{ABC} + \overset{101}{A\bar{B}C}$$

7 6 7 3 7 5



		BC			
A		00	01	11	10
	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1



例 $F = \overline{(A \oplus B)(C+D)}$ 又一个非标准 复杂，先化简

$$= \overline{(A \oplus B)} + \overline{(C+D)} = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{C}\bar{D} \quad \text{补项}$$

$\bar{A}\bar{B}$ 缺CD

$$= \underline{0000} + \underline{0001} + \underline{0010} + \underline{0011}$$

直接补上00.01.10.11

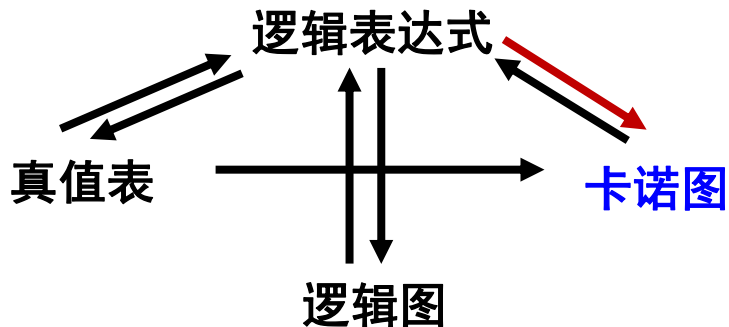
AB

$$= \underline{1100} + \underline{1101} + \underline{1110} + \underline{1111}$$

$\bar{C}\bar{D}$ 缺AB

$$= \underline{0000} + \underline{0100} + \underline{1000} + \underline{1100}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0



填写卡诺图

例 $F = A \oplus C \cdot \bar{B} (A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D})$

$$= \overline{A \oplus C} + \bar{B} (A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D})$$

$$= A \odot C + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

$$= AC + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

法1: $= \underline{1010} + \underline{1011} + \underline{1110} + \underline{1111} + \underline{0000} + \underline{0001} + \underline{0100} + \underline{0101} + 1000 + 0010$

缺B D
AC
 $\bar{A}\bar{C}$

法2: AC是图中蓝色块

$\bar{A}\bar{C}$ 是黄色块

填充1, 剩下都是0



基于卡诺图的逻辑运算

两个逻辑函数(卡诺图)

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0

+

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	1
0	0	0	1	0
1	1	0	0	1

=

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

=

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	0
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0

=

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1

或运算

与运算

\oplus 异或运算

对应的小方格进行逻辑运算

基于卡诺图的逻辑运算

AB		F			
C		00	01	11	10
0			1	1	
1		1	1		



AB		$X \cdot F$ X与F相与			
C		00	01	11	10
0			X	X	
1		X	X		

BC		F			
A		00	01	11	10
0		0	1	1	1
1		0	1	1	0



BC		\bar{F} 非F			
A		00	01	11	10
0		1	0	0	0
1		1	0	0	1

对应的小方格进行逻辑运算



4.2 卡诺图化简法

如何从卡诺图中读取——

- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)

4.2 卡诺图化简法

化简方法 {

- 代数法
- 卡诺图法

■ 图形法化简逻辑函数

$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + ABC = BC(\bar{A} + A) = BC$$

BC		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	0

相邻性

4.2 卡诺图化简法

如何从卡诺图中读取——



- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)

1. 如何从卡诺图读最简与或式

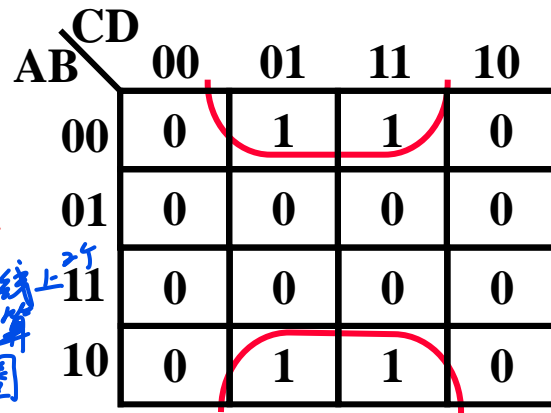
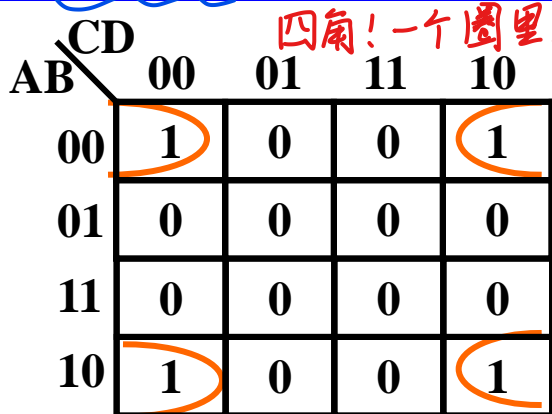
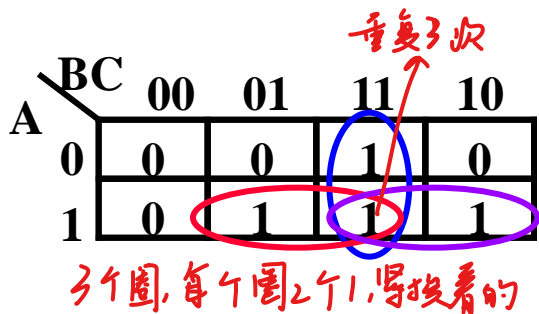
Step ①: 画圈

- 将**相邻**为**1**的小方格圈在一起 (小方格的个数必须为 **2^m** , $m=0,1,2,\dots$) 1, 2, 4, 8, 16, ...
- 圈里面**1**的个数**越多越好** 有4个就不圈2个
有2个就不圈1个
- 小方格可以**重复**使用



判断相邻

相邻——从位置上看： 紧挨着的、行列首尾的、对称的
(本质上：满足格雷码特点)



1. 如何从卡诺图读最简与或式

Step ②：每个圈代表一个与项

观察每个圈 左侧 } 变量取值不同——消去
上方 } 变量取值相同保留

1: 原变量
0: 反变量

ABC, 圈中A取值不同, 消去

BC

A \ BC	00	01	11	10
	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AC

AB

B取值不同.

C取值不同

$\bar{B}\bar{D}$

A, C 取值相同.

B, D 取值都为0.

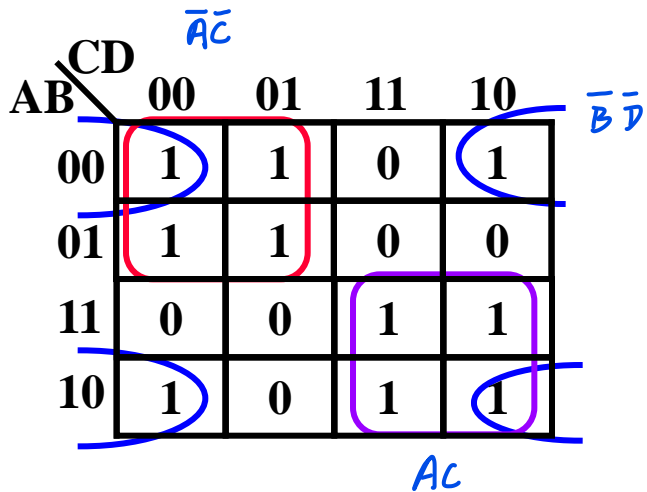
AB \ CD	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$\bar{B}\bar{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

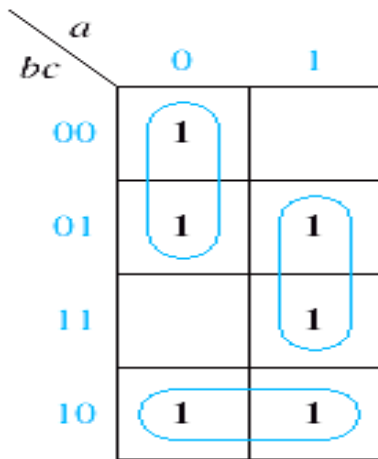
1. 如何从卡诺图读最简与或式

Step ③: 将所有的与项相加

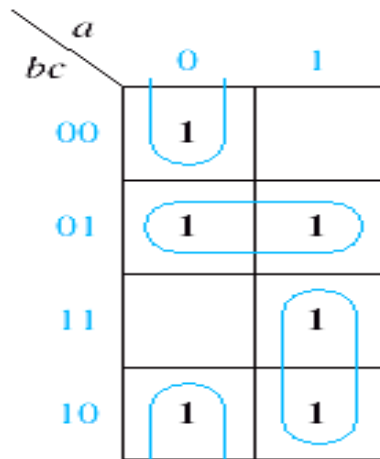


$$F = \bar{A}\bar{C} + AC + \bar{B}\bar{D}$$

1. 如何从卡诺图读最简与或式



$$F = a'b' + bc' + ac$$



$$F = a'c' + b'c + ab$$

与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式不一定是唯一的.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

4.2 卡诺图化简法

如何从卡诺图中读取——

- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)



2. 如何从卡诺图读最简或与式

Step ①: 画圈

- a). 将相邻为0的小方格圈在一起 (小方格的个数必须为 2^m , $m=0,1,2,\dots$)
- b). 圈里面0的个数越多越好
- c). 小方格可以重复使用



相邻——从位置上看：紧挨着的、行列首尾的、对称的
(本质上：满足格雷码特点)

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	1
1	1	0	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

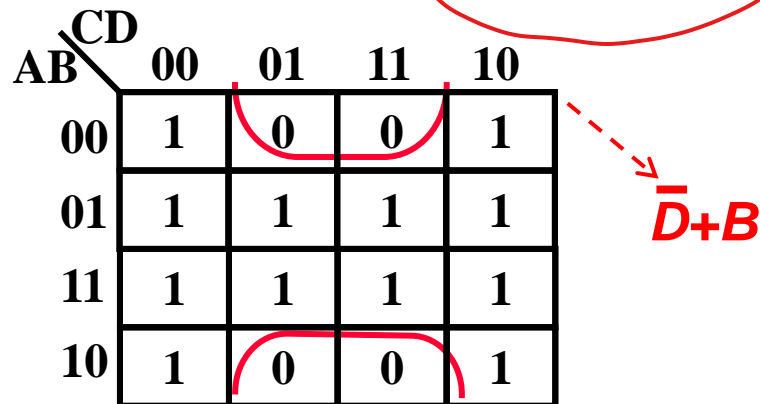
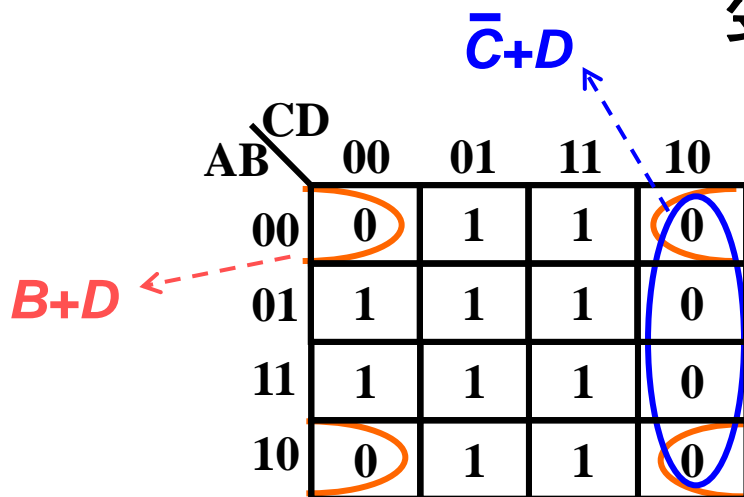
2. 如何从卡诺图读最简或与式

Step ② : 每个圈代表一个和项

观察每个圈 左侧 } 变量取值不同——消去
上方 } 变量取值相同保留

变量取值相同保留

0: 原变量
1: 反变量



2. 如何从卡诺图读最简或与式

Step ③: 将所有的和项相乘

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

$$F = (A + C) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) \cdot (B + D)$$



4.2 卡诺图化简法

如何从卡诺图中读取——

- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)



3. 如何从卡诺图读最简与或非式

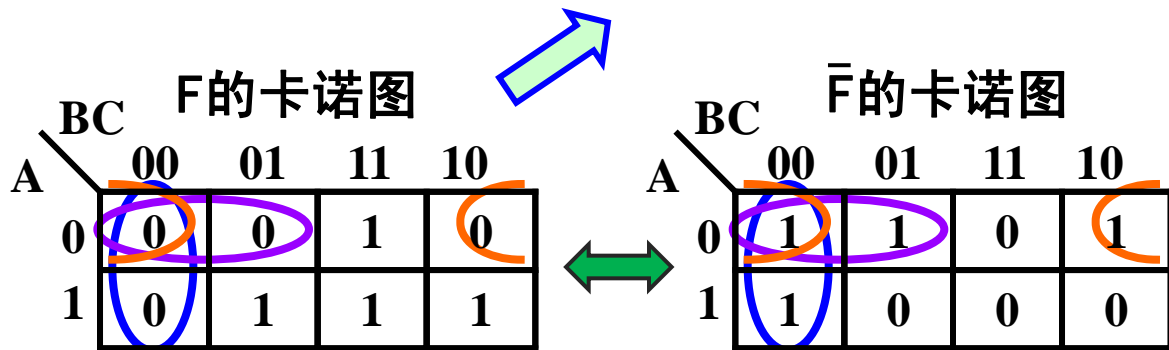
Step ①: 读 \bar{F} 的与或式

\bar{F} 的与或式 $\xrightarrow{\text{求反}}$ F 的与或非式.

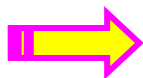
方法: 在 F 的卡诺图中圈0 (或者在 F' 的卡诺图中圈1)

Step ②: 对 \bar{F} 求反

$$F = (A+B)(B+C)(A+C)$$



$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$$



$$F = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}}$$

带无关项的卡诺图化简

- 无关项：不存在的或无意义的取值组合
- 卡诺图化简时对无关项的处理：
 - 根据需要无关项可“1”可“0”
 - 满足圈中“1”（或“0”）的数量最多的前提下，尽量利用无关项

例：某单位三八节包场看电影，规定电影票只发给本单位的女职工，写出满足上述条件的逻辑表达式

A=1:本单位 B=1:女职工 C=1:有电影票

变：或式
卡诺图尽量少
多的是冗余项

		BC			
A		00	01	11	10
	0	0	×	×	0
	1	0	×	1	0

A和B都是什么花里胡哨

最简与或式

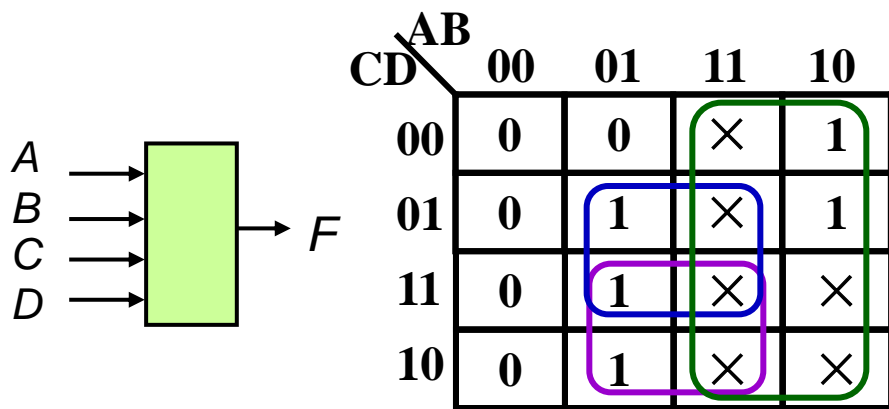


$$F = C$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	×
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	0
1	0	1	×
1	1	0	0
1	1	1	1

带无关项的卡诺图化简

例：输入信号X为8421BCD码，设计组合逻辑电路，当 $X \geq 5$ ，输出 $F=1$ 。X用ABCD表示

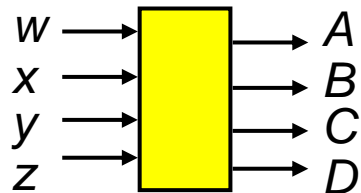


$$F = A + BD + BC$$

	A B C D	F	A B C D	F
0	0 0 0 0	0	1 0 0 0	1
1	0 0 0 1	0	1 0 0 1	1
2	0 0 1 0	0	1 0 1 0	×
3	0 0 1 1	0	1 0 1 1	×
4	0 1 0 0	0	1 1 0 0	×
5	0 1 0 1	1	1 1 0 1	×
6	0 1 1 0	1	1 1 1 0	×
7	0 1 1 1	1	1 1 1 1	×

带无关项的卡诺图化简

例：设计一个能将4位二进制数转换为余3码的电路。



四个输出
四个卡诺图

二进制数 W X Y Z	余三码 A B C D	二进制数 W X Y Z	余三码 A B C D
0 0 0 0	0 0 1 1	8 1 0 0 0	1 0 1 1
1 0 0 0 1	0 1 0 0	9 1 0 0 1	1 1 0 0
2 0 0 1 0	0 1 0 1	1 0 1 0	×
3 0 0 1 1	0 1 1 0	1 0 1 1	×
4 0 1 0 0	0 1 1 1	1 1 0 0	×
5 0 1 0 1	1 0 0 0	1 1 0 1	×
6 0 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1 0	×
7 0 1 1 1	1 0 1 0	1 1 1 1	×

带无关项的卡诺图化简

A:

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$A = W + XZ + XY$$

B:

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	0	0
11	×	×	×	×
10	0	1	×	×

$$B = \bar{X}\bar{Z} + \bar{X}Y + X\bar{Y}\bar{Z}$$

带无关项的卡诺图化简

C:

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$C = \bar{Y}\bar{Z} + YZ$$

D:

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$D = \bar{Z}$$

更多变量的卡诺图化简

* 展开定理

一个 n 变量的逻辑函数可以对变量 x_i 展开为两个 $n-1$ 变量的逻辑函数

$$1. \quad f(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

$$= x_i \cdot f(x_1 x_2 \dots 1 \dots x_n) + \bar{x}_i \cdot f(x_1 x_2 \dots 0 \dots x_n)$$

.....对 x_i 展开为与或式

$$2. \quad f(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

$$= [\bar{x}_i + f(x_1 x_2 \dots 0 \dots x_n)] \cdot [x_i + f(x_1 x_2 \dots 1 \dots x_n)]$$

.....对 x_i 展开为或与式

更多变量的卡诺图化简

$$F = f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$$

$X_2X_3 \backslash X_4X_5$					
		00	01	11	10
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

$$x_1 = 0$$

$X_4X_5 \backslash X_2X_3$					
		00	01	11	10
00	16	17	19	18	
01	20	21	23	22	
11	28	29	31	30	
10	24	25	27	26	

$$x_1 = 1$$



化简: $F(ABCDE) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 16, 20, 22, 28, 30, 31)$

		x_4x_5			
		00	01	11	10
$x_1 = 0$	x_2x_3	00	01	11	10
	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$X_4X_5 \backslash X_2X_3$		$x_1 = 1$			
		00	01	11	10
X_2X_3	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$A = 0$

$BC \backslash DE$		00	01	11	10
		00	01	11	10
$A = 0$	00	1	1	0	0
	01	1	1	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	1	0

$BC \backslash DE$		DE			
		00	01	11	10
BC	00	1	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	1	1
	10	0	0	0	0

$A = 1$

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{D}\bar{E} + ABCD + \bar{A}B\bar{C}DE + C\bar{E}$$

这就是蓝色圈

更多变量的卡诺图化简

不过是分块！

ABC \ DEF								
	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1	0	0	1	1	0	0	1
001	0	1	1	0	0	0	0	0
011	0	0	0	1	0	0	0	1
010	1	0	0	1	1	0	0	1
110	1	0	0	1	1	0	1	1
111	0	1	1	0	0	0	0	0
101	0	1	1	0	0	0	0	0
100	1	0	0	1	1	0	0	1

$$F = C'F' + B'CD'F + ACD'F + A'BD'EF' + A'BDE'F' + ABC'DE'$$