1. 设原信号采样后的信号为 $f_s(t)$，采样周期为T.

$$F_s(\omega)=\mathcal{F}[f_s(t)]=\mathcal{F}[f(t)\cdot p(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega-k\omega_0)$$

$$F_s(\omega)=DTFT[f_s(t)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-jk\omega T}$$

$$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-jk\omega T}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega-k\omega_0)$$

当 $\omega=0$ 时，即 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(-k\omega_0)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)$

等价于 $T\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_0)$.

2. (a) $DTFT[x(n)*x^*(-n)]=\cancel{x(n)\cdot x^*(-n)}\ DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x^*(-n)]$

$$=X(\omega)\cdot X^*(\omega)=|X(\omega)|^2$$

(b) $\cancel{DTFT[x(2n+1)]}=DTFT[x(2n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n)e^{-j\omega n}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)+(-1)^n x(n)]e^{-j\omega\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{j\pi n-j\omega\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}X\left(\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{2}X\left(\frac{\omega}{2}-\pi\right)$$

(~~c~~) $DTFT[x(2n+1)]=e^{j\omega}DTFT[x(2n)]=\frac{1}{2}e^{j\omega}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right)+X\left(\frac{\omega}{2}-\pi\right)\right]$

(c) $DTFT[x(n)-x(n-2)]=DTFT[x(n)]-e^{-j2\omega}DTFT[x(n)]=(1-e^{-2j\omega})X(\omega)$.

(d) $DTFT[x(n)*x(n-1)]=DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x(n-1)]=e^{-j\omega}X^2(\omega)$.

3. $DTFT[y(n)]=Y(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)e^{-jn\omega}$.

$\because$ 当 $n=kL\ (k\in Z)$ 时，$y(n)$ 有值且为 $x(\frac{n}{L})$.

$$\therefore Y(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(kL)e^{-jkL\omega}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-jk\omega L}=X(L\omega).$$