Contents

Matematika Minimum

Pitoyo Hartono

School of Engineering, Chukyo University
Nagoya, Japan

Pendahuluan

> Speak the truth, write with clarity, and defend it to your very end.
>
> Ludwig Boltzmann

> Otak, ada untuk dipakai, bukan untuk diirit. Dan menghapal tanpa mengerti adalah tindakan untuk mengirit otak yang mungkin menghasilkan ijasah tapi tidak lebih.
>
> Pitoyo Hartono

Buku kecil ini saya tulis bermula dari keprihatinan saya terhadap mutu pendidikan matematika di Indonesia. Sepuluh tahun ini saya berinteraksi dengan banyak peneliti dan dosen di Indonesia, kebanyakan dari universitas ternama. Dua tahun terakhir saya juga berkesempatan untuk mengajar secara online di beberapa SMA. Dari interaksi ini saya mempunyai impresi bahwa rata-rata kemampuan berlogika (dan tentunya saja) bermatematika mereka sangat parah. Mereka adalah orang-orang yang cerdas, dan ini juga bukan salah mereka. Masalah terbesar ada di kurikulum matematika yang sangat mengandalkan hapalan. Kebanyakan dari mereka menghapal proses cara menyelesaikan soal tanpa mengerti makna dari apa yang mereka kerjakan. Pendidikan menjadi "alat" untuk lulus, mendapat ijasah dan gelar, bukan alat untuk berpikir, tidak juga menjadi alat untuk mengembangkan imajinasi yang berujung pada inovasi. Bayangkan, negara sebesar Indonesia yang telah merdeka lebih dari 3/4 abad, universitas-universitas terbaiknya masih berkutat di level antah berantah di tingkat Asia sekalipun. Ini harus berhenti.

Buku kecil ini saya beri judul "Matematika minimum", karena yang ingin saya ajarkan di sini adalah matematika bukan sebagai ilmu yang "wah", tapi matematika sebagai pengetahuan dasar bagi orang yang setidaknya telah menamatkan jenjang pendidikan menengah. Ini matematika yang menjadi landasan untuk berpikir secara sistematis. Karena itu buku ini saya mulai dari Logika Matematika, karena ini yang akan melandasi bukan saja untuk jenjang matematika selanjutnya, tapi untuk berpikir dan berargumen secara terdidik.

Buku ini saya tujukan untuk pembaca-pembaca setingkat SMA, dan tingkat-tingkat awal universitas, dari berbagai bidang. Karena di bidang apapun mereka berkutat, mereka perlu berpikir dan berargumen secara sistematis. Buku ini saya tulis dengan "gaya" mengajar saya. Kalau saya ada di depan kelas, yang akan saya katakan pada anak-anak didik saya kira-kira sama dengan isi buku ini.

Saya tidak tahu apakah ini akan berguna untuk mengkoreksi cara belajar matematika di Indonesia. Tapi kalau tidak dimulai sekarang, kapan lagi ?

Nagoya, pertengahan Juli 2022.
P. Hartono

Notasi dan lain-lain

Ada beberapa notasi yang sering dipakai dalam buku ini, ini notasi-notasi yang sering muncul dalam buku atau makalah ilmiah. Notasi-notasi ini akan bertambah seiring dengan bertambahnya bab dalam buku ini.

- e.g.: exampli gratia yang berarti "sebagai contoh"
- Eq.: equation yang berarti persamaan atau pertidaksamaan
- s.t.: such that yang berarti "dengan demikian"
- i.e.: id est yang berarti "dengan kata lain"
- Q.E.D.: Quod Erat Demonstrandum yang berarti "dengan ini terbukti"
- e.t.c.: et cetera yang berarti "dan lain-lain" atau "dan yang serupa"
- advanced: meskipun buku ini ditujukan pada pembaca tingkat SMA atau universitas awal, ada beberapa contoh soal yang diperuntukkan pembaca yang telah menyelesaikan kelas matematika dasar di universitas (sekitar semester 1-2). Soal-soal semacam ini membutuhkan sedikit pengetahuan dasar matematika di luar jangkauan buku ini.

- **Review**: ini bukan notasi matematika. Ini saya maksudkan sebagai tanda. Tanda untuk berhenti sejenak, menata pikiran dan sekali lagi menilik apa yang sudah dipelajari. Ini juga kesempatan untuk mempertanyakan pengertian kita. Biasakanlah untuk tidak "memanjakan diri" dengan merasa cepat mengerti. Biasakanlah untuk mengajukan pertanyaan kritis pada diri sendiri. Jangan menipu diri sendiri dengan berpura-pura mengerti.

  Buku ini bukan novel apalagi komik yang bisa dibaca dengan sepintas. Mungkin untuk beberapa bagian perlu membaca beberapa kali sebelum mengerti. Kalau dengan membaca sekali belum mengerti, bacalah dua kali, dan seterusnya. Saya juga sengaja tidak memberi jawaban pada soal-soal latihan di buku ini. Kalau pembaca tidak yakin akan kebenaran jawaban yang dibuatnya sendiri, itu artinya belum mengerti. Ulangilah belajar. Satu hal lagi, dalam matematika tidak ada yang namanya "setengah mengerti", itu artinya tidak mengerti, karena itu kalau pembaca merasa setengah mengerti, ulangilah belajar.

Chapter 1

Logika Proposisional

> The scientist does not study nature because it is useful. He studies it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not worth living.
>
> Henri Poincare

1.1 Definisi Proposisi

Kalau pada aljabar, geometri, trigonometri dan bidang-bidang matematika lainnya, obyek dari manipulasi (di sini, manipulasi tidak mempunyai konotasi yang buruk, tapi berarti proses hitung) adalah angka, bentuk (seperti persegi tiga, bujursangkar dll), atau variabel, dalam logika proposisional adalah proposisi. Karena itu sangat penting untuk mendifinisikan proposisi.

Proposisi adalah statement yang "nilainya" bisa ditentukan secara definitif. Ada dua kemungkinan nilai proposisi, "betul (true)" yang dilambangkan dengan T atau 1, atau "salah (false)" yang dilambangkan dengan F atau 0.

e.g. Statement: "Jakarta adalah kota yang indah" bukan proposisi. Karena tidak ada definisi definitif tentang apa itu "kota yang indah". Untuk sebagian orang mungkin Jakarta adalah kota yang indah, untuk orang lain bukan.

Statement: "Populasi Jakarta lebih dari 10 juta orang". Ini adalah proposisi, karena dengan mudah kita bisa melihat data dari lembaga sensus misalnya. Kalau ternyata, populasi Jakarta 12 juta orang, maka proposisi ini bernilai benar (1), dan kalau ternyata populasi Jakarta dibawah atau sama dengan 10 juta orang, maka proposisi ini bernilai salah (0).

Statement: "Si A orang yang keren", bukan proposisi, karena tidak ada definisi yg jelas tentang apa itu keren. Tetapi statement: "Tinggi si A lebih dari dari 170 cm" adalah proposisi, karena kita dengan mudah bisa mengukur tinggi badan si A.

Statement: "Surabaya adalah ibukota Indonesia" adalah proposisi yang nilainya salah (0).

Proposisi biasanya di lambangkan dengan huruf kecil, p, q, r dan sebagainya. Misalnya:

p : saya makan sate

dan nilainya biasanya sering dilambangkan dengan $val(p)$, atau secara langsung $p = 1$ kalau ternyata saya benar-benar makan sate, dan $p = 0$ kalau ternyata saya tidak makan sate.

Review:

- definisi proposisi
- proposisi mempunyai satu dari dua kemungkinan nilai, benar (1) atau salah (0)
- buatlah beberapa contoh statement yang merupakan proposisi dan statement yang bukan.

1.2 Compound dan operasi hitung

Di dalam aritmatika kita mengenal beberapa operasi untuk menggabungkan dua atau lebih angka menjadi angka yg baru. Misalnya penjumlahan yang dilambangkan dengan $+$, pengurangan yang dilambangkan dengan $-$, perkalian yang dilambangkan dengan $\times$, pembagian yang dilambangkan dengan $\div$, modulus yang dilambangkan dengan $mod()$ dan sebagainya.

Dalam logika proposisionalpun ada beberapa operasi untuk menggabungkan beberapa proposisi menjadi proposisi baru yang disebut compound proposition (proposisi majemuk). Di sini kita perlu untuk menerima bahwa compound proposition ini juga proposisi yang mempunyai nilai 1 atau 0.

e.g. dari dua proposisi, p: saya makan sate, dan q: saya makan soto, kita bisa membuat proposisi baru seperti, "saya makan sate dan soto", "saya makan sate atau soto", "saya makan sate tapi tidak makan soto", "kalau saya makan sate saya tidak makan soto" dan sebagainya.

Nilai dari proposisi majemuk ini ditentukan oleh nilai dari komponen proposisi awalnya dan operasinya. Misalnya, nilai dari proposisi saya makan sate dan soto, tergantung dari nilai proposisi saya makan sate, dan nilai proposisi saya makan soto serta aturan dari operasi "dan".

1.2.1 Conjuction: "and", "dan"

Operasi conjuction menggabung dua proposisi p dan q dengan "dan". Operasi ini dilambangkan dengan,

$$p \wedge q \tag{1.1}$$

dan dibaca "p **dan** q", "p **and** q".

e.g. p: saya makan sate, q: saya makan soto, maka $p \wedge q$: saya makan sate dan soto.

Karena $p \wedge q$ ini juga sebuah proposisi, maka proposisi baru ini harus mempunyai nilai. Nilai proposisi baru ini ditentukan oleh nilai mula p, nilai mula q, dan aturan dari operasi conjuction $\wedge$, seperti ditunjukkan pada tabel 1.1

Dalam mempelajari logika matematika, kita harus membiasakan diri untuk membaca tabel semacam ini.

Table 1.1: Truth table for conjuction

	p	q	$p \wedge q$
case 1	0	0	0
case 2	0	1	0
case 3	1	0	0
case 4	1	1	1

Tabel 1.1 menunjukkan bahwa ada 4 macam kasus yang mungkin terjadi dari kombinasi benar/tidaknya proposisi p dan q.

- case 1: di sini bisa dilihat bahwa nilai $p \wedge q$ 0 kalau nilai p dan q keduanya 0. Artinya, misalnya ada seorang yang mengeluarkan proposisi: "Saya makan sate dan soto", proposisi itu salah (orang itu berbohong), kalau dia ternyata tidak makan sate dan tidak juga makan soto.

- case 2: nilai $p \wedge q$ 0, kalau nilai p 0 dan q 1. Artinya proposisi: "Saya makan sate dan soto" tidak benar kalau saya hanya makan soto tapi tidak makan sate.

- case 3: nilai $p \wedge q$ tentunya juga 0, waktu p 1 dan q 0. Artinya proposisi: "Saya makan sate dan soto" tidak benar kalau saya hanya makan sate tapi tidak makan soto.

- case 4: proposisi ini baru benar kalau p dan q kedua nya bernilai 1. Artinya proposisi: "Saya makan sate dan soto" baru bernilai benar kalau saya makan sate dan saya makan soto.

Cepatnya, conjunction memberi arti untuk kata "**dan**" secara logika. Proposisi "A dan B (apapun A dan B ini)" baru bernilai benar kalau kedua A dan B terjadi. Selain itu, proposisi majemuk ini salah.

Dalam komunikasi sehari-hari kata "dan" ini juga bisa disubstitusi dengan "tapi". Misalnya, p: saya makan sate, q: saya tidak makan soto, maka akan terdengar janggal kalau $p \wedge q$ dibaca: saya makan sate dan saya tidak makan soto. Proposisi ini lebih wajar untuk dibaca: Saya makan sate tapi tidak makan soto. Di sini kita perlu mengerti bahwa "tapi" dan "dan" dalam logika mempunyai arti yang sama, hanya kata "tapi" digunakan untuk menggabungkan dua proposisi yang nampak nya bertentangan.

Tabel 1.1 disebut truth table (tabel kebenaran). Tabel kebenaran semacam ini digunakan untuk menunjukkan kebenaran/kesalahan satu proposisi majemuk berdasarkan elemen proposisi asal nya dan aturan dari operasi untuk menggabungkan proposisi-proposisi asal tersebut.

1.2.2 Disjunction: "or", "atau"

Operasi disjunction menggabung dua proposisi p, q dengan "**atau**". Operasi ini dilambangkan dengan

$$p \vee q \tag{1.2}$$

, dan dibaca "p **atau** q", "p **or** q".

Meminjam contoh di atas, $p \vee q$ dibaca: "Saya makan sate atau soto", dan kebenaran proposisi ini diatur dalam tabel 1.5.

Table 1.2: Truth table for disjunction

	p	q	$p \vee q$
case 1	0	0	0
case 2	0	1	1
case 3	1	0	1
case 4	1	1	1

Untuk proposisi: "Saya makan sate atau soto", tabel ini menunjukkan kalau ada 4 kemungkinan kasus yang terjadi.

- case 1: di sini bisa dilihat bahwa nilai $p \vee q$ 0 kalau nilai p dan q keduanya 0. Artinya, proposisi: "Saya makan sate atau soto" salah, kalau saya ternyata tidak makan sate dan tidak juga makan soto.

- case 2: nilai $p \vee q$ 1, kalau nilai p 0 dan q 1. Artinya proposisi: "Saya makan sate atau soto" benar kalau saya hanya makan soto walaupun saya tidak makan soto.

- case 3: nilai $p \vee q$ tentunya juga 1, waktu p 1 dan q 0. Artinya proposisi: "Saya makan sate atau soto" benar kalau saya hanya makan sate walaupun tidak makan soto.

- case 4: proposisi ini juga benar kalau p dan q kedua nya bernilai 1. Artinya proposisi: "Saya makan sate dan soto" bernilai benar kalau saya makan kedua-duanya.

Cepatnya, disjunction makna logika bagi kata "atau". Proposisi "A atau B (apapun A dan B ini)" baru salah waktu kedua A dan B salah, selain itu proposisi majemuk ini benar.

1.2.3 Negation: "not", "bukan", "tidak"

Kalau dua operasi sebelumnya menggabungkan 2 proposisi dasar menjadi proposisi baru, negation tidak menggabungkan proposisi tapi "menyanggah" proposisi awal dan dilambangkan dengan,

$$\neg p \tag{1.3}$$

atau

$$\bar{p}$$

dan dibaca "**bukan** p", "**not** p".

Truth table untuk operasi ini ditunjukkan di tabel berikut.

Table 1.3: Truth table for negation

	p	$\neg p$
case 1	0	1
case 2	1	0

Sebagai contoh, ada dua kemungkinan yang bisa terjadi untuk proposisi p: Saya makan sate.

- Case 1: Kalau p bernilai 0 yang artinya saya tidak makan sate, maka negasi p yang berbunyi, saya makan sate benar sehingga bernilai 1.
- Case 2: kalau p bernilai 1 yang artinya saya makan sate, makan negasi p yang berbunyi saya tidak makan sate salah sehingga bernilai 0.

Suatu proposisi yang dinegasikan dua kali (atau genap kali) nilainya sama dengan prosisi awalnya.Ini Bisa dibuktikan dengan dengan truth table bahwa $\neg(\neg p) \equiv p$. Secara intuitif dengan mudah kita bisa mengerti bahwa "tidak betul saya tidak makan sate ($\neg\neg p$)", bernilai sama dengan "saya makan sate (p)".

Table 1.4: Truth table for double negation

	p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
case 1	0	1	0
case 2	1	0	1

Review:

- cara membaca truth table.
- makna dari "dan", "atau", serta beda keduanya secara logika.
- makna dari "tidak", secara logika. Dua kali negasi akan mengembalikan ke proposisi semula.
- berhati-hatilah dalam menggunakan kata "dan", "atau" dalam percakapan seharihari.

1.2.4 Equivalance, tautology dan contradiction

Masih ada satu operasi lagi yang harus diterangkan, tapi untuk sementara untuk kelancaran alur belajar, penjelasan untuk operasi baru ini dikesampingkan.

Dua proposisi majemuk p dan q bernilai sama (equivalent) kalau keduanya mempunyai nilai yg sama pada semua semua komposisi nilai proposisi dasarnya, dan dilambangkan dengan $p \equiv q$.

Table 1.5: Truth table: example of equivalence 1

	p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
case 1	0	0	0	0
case 2	0	1	0	0
case 3	1	0	0	0
case 4	1	1	1	1

e.g. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ yang dibuktikan dengan truth table di bawah.

Ini artinya, proposisi "saya makan sate dan soto" sama nilainya dengan "saya makan soto dan sate".

Hukum De Morgan (De Morgan's law)

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

  Formula di atas bukan sesuatu yang harus dihapal, tetapi sesuatu yang harus dimengerti artinya dan dibuktikan kebenarannya. Pertama, apa arti formula logika di atas ? Persamaan di atas menyatakan bahwa: kalau kita menyangkal satu proposisi yang bunyinya: "p **dan** q" maka sanggahan kita akan berbunyi, "bukan p **atau** bukan q". Sanggahan dari "saya makan sate **dan** soto" berbunyi, "saya tidak makan sate **atau** saya tidak makan soto". Untuk menyanggah proposisi awal cukup bagi kita untuk tidak makan salah satunya. Sanggahan ini belum tentu berarti bahwa kita tidak makan kedua-duanya. Hal ini harus dibuktikan dengan truth table.

  Table 1.6: Truth table: De Morgan(1)

	p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
case 1	0	0	0	1	1	1	1
case 2	0	1	0	1	1	0	1
case 3	1	0	0	1	0	1	1
case 4	1	1	1	0	0	0	0

  Seperti sudah tertulis di atas, negasi ini tidak berbunyi: "Saya tidak makan keduanya" yang dilambangkan dengan $\neg p \wedge \neg q$, dan dapat dibuktikan dengan truth table berikut yang menunjukkan bahwa $\neg(p \wedge q)$ tidak sama dengan $\neg p \wedge \neg q$.

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

  Hukum De Morgan kedua ini juga bukan untuk dihapal tapi dimengerti artinya. Hukum ini menyatakan bahwa: negasi dari proposisi "p **atau** q", berbunyi "bukan p **dan** bukan q". Jadi sangkalan dari "saya makan sate atau soto" berbunyi "saya tidak makan keduanya". Ini perlu dibuktikan dengan truth table di bawah.

Table 1.7: Truth table: Wrong equivalence for De Morgan's law(1)

	p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
case 1	0	0	0	1	1	1	1
case 2	0	1	0	1	1	0	0
case 3	1	0	0	1	0	1	0
case 4	1	1	1	0	0	0	0

Table 1.8: Truth table: De Morgan(2)

	p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
case 1	0	0	0	1	1	1	1
case 2	0	1	1	0	1	0	0
case 3	1	0	1	0	0	1	0
case 4	1	1	1	0	0	0	0

Negasi proposisi ini tidak berbunyi: "Saya tidak makan sate atau saya tidak makan soto" yang dapat dibuktikan dengan truth table dibawah, dimana bisa kita lihat bahwa $\neg(p \vee q)$ tidak sama dengan $\neg p \vee \neg q$,

Table 1.9: Truth table: Wrong equivalence for De Morgan's law(2)

	p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
case 1	0	0	0	1	1	1	1
case 2	0	1	0	0	1	0	1
case 3	1	0	0	0	0	1	1
case 4	1	1	1	0	0	0	0

Hukum De Morgan memberi aturan logika tentang negasi (penyangkalan) proposisi majemuk yang dihubungkan dengan "dan" serta "atau". Kita perlu sangat berhati-hati dalam menyangkal proposisi. Sebelum menyangkal, kita perlu tahu bagaimana "bunyi" dari hasil sangkalan tersebut. Sering perdebatan sangat cepat turun kelas menjadi debat kusir yang tidak logis, karena pendebat asal menyangkal tanpa mengerti apa bunyi sangkalannya secara logika.

Contoh berikut tentang equivalency adalah berlakunya hukum asosiatif dalam proposisi majemuk yang melibatkan tiga proposisi awal p, q dan r sebagi berikut.

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \tag{1.4}$$

Sama seperti pada aritmatika dasar, ( ) digunakan untuk menggambarkan prioritas operasi hitung. Formula di atas menyatakan bahwa untuk tiga proposisi yang dihubungkan dengan dua ”dan”, misalnya saya makan sate, soto dan gado-gado, prioritas operasi ”dan” ini tidak mengubah arti. Ini bisa dibuktikan dengan truth table di bawah.

Table 1.10: Truth table: Associative law

	p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
case 1	0	0	0	0	0	0	0
case 2	0	0	1	0	0	0	0
case 3	0	1	0	0	0	0	0
case 4	0	1	1	1	0	0	0
case 5	1	0	0	0	0	0	0
case 6	1	0	1	0	0	0	0
case 7	1	1	0	0	0	1	0
case 8	1	1	1	1	1	1	1

Contoh berikut adalah hukum distribusi sebagai berikut.

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \tag{1.5}$$

Misalnya ”saya makan sate dan soto atau saya makan gado-gado” mempunyai arti yang sama dengan ”saya makan sate atau gado-gado dan saya makan soto atau gado-gado”.

Table 1.11: Truth table: Distributive law

	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
case 1	0	0	0	0	0	0	0	0
case 2	0	0	1	0	1	1	1	1
case 3	0	1	0	0	0	0	1	0
case 4	0	1	1	0	1	1	1	1
case 5	1	0	0	0	0	1	0	0
case 6	1	0	1	0	1	1	1	1
case 7	1	1	0	1	1	1	1	1
case 8	1	1	1	1	1	1	1	1

Tautology dalam logika didefinisikan sebagai proposisi yang nilainya selalu 1 (benar). Perlu dimengerti bahwa tautology dalam logika berbeda dengan tautology dalam ilmu bahasa. Satu contoh tautology $p \vee \neg p$ yang dapat ditunjukkan dengan tabel di bawah.

Table 1.12: Example of tautology(1)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
case 1	0	1	1
case 2	1	0	1

Dalam contoh sehari-hari proposisi semacam: "Saya makan sate atau tidak makan sate" tidak mungkin salah, karena kalau "saya makan sate" nilainya benar, maka "saya tidak makan sate" nilainya salah, dan menggabungkan keduanya dengan "atau" akan menghasilkan nilai benar, begitu pula sebaliknya.

Contoh lain dari tautology misalnya $p \vee 1$, dimana "1" melambangkan proposisi yang nilainya pasti benar, seperti "besok pagi matahari terbit dari timur". Truth table dari $p \vee 1$ sebagai berikut.

Table 1.13: Example of tautology(2)

	p	1	$p \vee 1$
case 1	0	1	1
case 2	1	1	1

Jadi proposisi "saya makan sate atau besok matahari terbit dari timur" nilainya selalu benar.

Contradiction (kontradiksi) dalam logika didefinisikan sebagai proposisi yang nilainya selalu salah. Misalnya: $p \wedge \neg p$ yang nilainya ditunjukkan dengan truth table di bawah.

Table 1.14: Example of contradiction

	p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
case 1	0	1	0
case 2	1	0	0

Dalam contoh nyata, proposisi: "Saya makan sate sekaligus tidak makan sate", tidak mungkin benar, karena kalau "saya makan sate" benar, maka "saya tidak makan sate" harus salah dan menggabungkan keduanya dengan "dan" menghasilkan proposisi dengan nilai salah. Begitu pula sebaliknya.

Contoh lain dari contradiction misalnya $p \wedge 0$, dimana 0 melambangkan proposisi yang pasti salah, seperti: "besok matahari terbit dari barat" yang truth tablenya sebagai berikut.

Table 1.15: Example of contradiction(2)

	p	0	$p \wedge 0$
case 1	0	0	0
case 2	1	0	0

Review:

- Arti dari equivalency: kapan dua proposisi bernilai sama?
- cara menggunakan truth table untuk menentukan equivalency dua proposisi
- Arti dari hukum De Morgan: hati-hati dalam menyangkal
- Arti dari tautology dan contradiction

Soal Latihan

Buktikan formula logika berikut.

1. $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
2. $\neg(p \vee (q \wedge r)) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$
3. $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ adalah tautology.
4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ adalah contradiction.
5. $p \vee 0 \equiv p$
6. $p \wedge 1 \equiv p$
7. $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$
8. $\neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

1.2.5 Conditional Statement

Operasi yang perlu dimengerti setelah conjunction, disjunction, negation adalah conditional statement. Banyak pelajar yang mulai kesulitan memahami logika dari sini, sehingga arti dari operasi ini harus dipahami dengan sangat berhati-hati. Conditional stament juga sebuah operasi logika yang menggabungkan proposisi p dengan proposisi q menjadi satu proposisi majemuk. Operasi ini dilambangkan dengan

$$p \rightarrow q \tag{1.6}$$

dan dibaca "**kalau** p **maka** q atau "**if** p **then** q".

Misalnya, p: turun hujan, q: sekolah pulang awal, $p \rightarrow q$: kalau turun hujan, sekolah pulang awal. Truth table untuk operasi logika ini ditunjukkan di tabel dibawah.

Table 1.16: Truth table for conditional statement

	p	q	$p \rightarrow q$
case 1	0	0	1
case 2	0	1	1
case 3	1	0	0
case 4	1	1	1

Arti truth table ini bisa diterangkan dari contoh riil di atas. Untuk proposisi: kalau hujan turun, sekolah pulang awal, ada 4 kemungkinan.

1. case 1: nilai $p = 0$, yang berarti hujan tidak turun, dan nilai $q = 0$ yang berarti sekolah tidak pulang awal. Pada waktu itu nilai $(p \to q) = 1$. Ini artinya, kalau seorang guru mengatakan pada murid-muridnya, "kalau turun hujan maka sekolah pulang awal", dan yang terjadi tidak hujan dan sekolah tidak pulang awal, guru itu tidak melanggar proposisinya (tidak bohong).

2. case 2: masih memakai contoh di atas, guru itu juga tidak melanggar proposisinya waktu yang terjadi hujan tidak turun ($p = 0$) tapi sekolah pulang cepat ($q = 1$).

   Case 1 dan case 2 ini agak membingungkan bagi pelajar pemula logika. Tapi ingat, proposisi ini mengatakan tentang apa yang terjadi kalau turun hujan. Proposisi ini tidak mengatakan apa-apa tentang apa yang terjadi kalau tidak turun hujan. Sehingga, pada waktu hujan tidak turun, apapun yang terjadi tidak membuat proposisi ini salah secara logika.

3. case 3: ini satu-satunya kondisi di mana guru yang mengeluarkan proposisi ini berbohong. Ini kondisi dimana hujan turun ($p = 1$) tapi sekolah tidak pulang awal ($q = 0$).

4. case 4: ini kondisi terjelas, di mana hujan turun ($p = 1$) dan sekolah pulang awal ($q = 1$) yang tentu saja membuat proposisi guru itu benar.

Nilai dari conditional statement dapat diilustrasikan dengan diagram dibawah. Dalam diagram ini, satu titik yang berada dalam lingkup lingkaran p menandakan kondisi dimana $p = 1$, dan yang di luar lingkaran menandakan kondisi di mana $p = 0$, begitu pula dengan lingkaran q.Keempat nilai proposisi $p \to q$ pada tabel 1.16, dilambangkan dengan titik biru waktu bernilai 1 dan titik merah waktu bernilai 0.

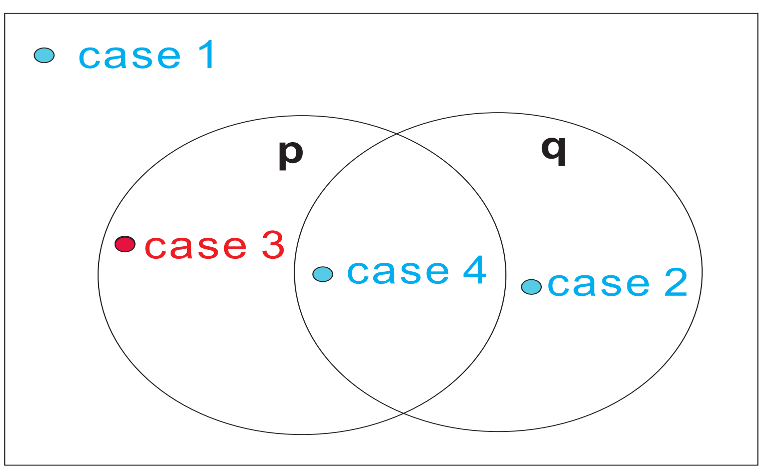


Figure 1.1: Venn Diagram for Conditional Statement

Beberapa sifat penting $p \to q$ yang perlu dimengerti (bukan dihapal).

1. Proposisi ini mempunyai equivalency yang tidak intuitif sebagai berikut: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, tapi bisa dibuktikan dengan truth table berikut. Dengan contoh di atas, proposisi "kalau hujan, sekolah pulang awal" bernilai sama dengan proposisi "tidak hujan atau sekolah pulang awal".

   Untuk contoh yang lebih intuitif, proposisi "kalau tidak belajar (p), maka tidak lulus (q)" bernilai sama dengan proposisi: "belajar ($\neg p$) atau tidak lulus (q).

   Table 1.17: Equivalency for conditional statement

	p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
case 1	0	0	1	1	1
case 2	0	1	1	1	1
case 3	1	0	0	0	0
case 4	1	1	1	0	1

2. $q \rightarrow p$ disebut **converse** dari $p \rightarrow q$, dan juga sebaliknya. Dengan contoh yang sama, "kalau sekolah pulang awal maka turun hujan" adalah converse dari "kalau hujan maka sekolah pulang awal". Kedua proposisi ini tidak equivalent seperti ditunjukkan di tabel berikut.

   Table 1.18: Truth table for converse

	p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
case 1	0	0	1	1
case 2	0	1	1	0
case 3	1	0	0	1
case 4	1	1	1	1

3. $\neg p \rightarrow \neg q$ disebut **inverse** dari $p \rightarrow q$, dan begitu juga sebaliknya. Dengan contoh yang sama, "kalau tidak hujan maka sekolah tidak pulang awal" adalah inverse dari "kalau hujan sekolah pulang awal".

   Berhati-hatilah dalam mengartikan suatu proposisi, andaikata "kalau hujan sekolah pulang awal" benar, tidak menjamin bahwa "kalau sekolah pulang awal maka disimpulkan bahwa turun hujan" benar, karena keduanya merupakan proposisi yang bernilai tidak sama.

Table 1.19: Truth table for inverse

	p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$
case 1	0	0	1	1	1	1
case 2	0	1	1	1	0	0
case 3	1	0	0	0	1	1
case 4	1	1	1	0	0	1

Dapat dilihat dari truth table di atas bahwa sebuah proposisi dan inversenya tidak sama.

Dengan contoh yang sama truth table di atas menunjukkan bahwa, kalaupun proposisi "kalau hujan sekolah pulang awal" benar, tidak menjamin kebenaran proposisi "kalau tidak hujan sekolah tidak pulang awal", karena kedua proposisi ini tidak sama. Banyak orang yang melakukan kesalahan logika dengan menganggap sama suatu proposisi dan inversenya.

4. $\neg q \to \neg p$ disebut **contrapositive** dari $p \to q$ dan truth table nya sebagai berikut.

Table 1.20: Truth table for contrapositive

	p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
case 1	0	0	1	1	1	1
case 2	0	1	1	0	1	1
case 3	1	0	0	1	0	0
case 4	1	1	1	0	0	1

Truth table di atas menunjukkan bahwa suatu proposisi equivalent dengan contrapositivenya. Jadi, "kalau hujan, sekolah pulang awal" dan "kalau sekolah tidak pulang awal artinya tidak hujan" adalah dua proposisi yang sama.

Equivalency antara $p \to q$ dengan contrapositivenya, $\neg q \to \neg p$ juga dengan mudah dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(p \to q) &\equiv (\neg p \vee q)\\ &\equiv (q \vee \neg p)\\ &\equiv (\neg q \to \neg p) \qquad (1.7)\end{aligned}$$

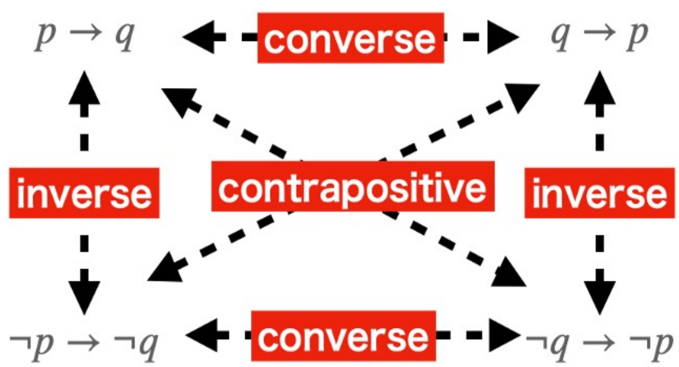


Figure 1.2: inverse, converse dan contrapositive

Hubungan antara proposisi $p \to q$ dengan converse, inverse dan contrapositive-nya digambarkan di Fig. 1.2.

5. apa negasi dari $(p \to q)$? Sulit untuk secara langsung "membahasakan" sangkalan dari $(p \to q)$. Tapi kita sudah membuktikan bahwa $(p \to q)$ sama dengan $(\neg p \vee q)$. Sehingga, menegasikan (menyangkal) $(\neg p \vee q)$ sama artinya dengan menegasikan $(p \to q)$.

   Negasi dari $(\neg p \vee q)$ bisa dilakukan dengan hukum De Morgan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \\ &\equiv p \wedge \neg q \end{aligned} \tag{1.8}$$

   Sehingga negasi dari "kalau hujan maka sekolah pulang awal" adalah "hujan (p) tapi$(\wedge)$ sekolah tidak pulang awal $(\neg q)$. Tidak masalah dalam membahasakan negasi ini kalau kita mengganti kata "tapi" dengan "dan". Intinya dua kejadian "hujan" dan "sekolah tidak pulang awal" terjadi sekaligus.

   Review:

   - arti dari conditional statement. Kapan proposisi "kalau *** maka ***" mempunyai nilai benar dan kapan bernilai salah.
   - arti dari converse, inverse, dan contrapositive. Berbeda atau samakah ketiga proposisi ini dengan proposisi awalnya? Jelaskan.
   - apa negasi dari conditional statement? Jelaskan.

1.3 Implication, Sufficient Condition dan Necessary Condition

Seperti sudah diterangkan di atas bahwa $(p \to q)$ adalah proposisi yang bisa mempunyai nilai benar (1) atau pun salah (0). Tapi ada situasi dimana $(p \to q)$ ini adalah tautology, seperti ditunjukkan dengan truth table di bawah, di mana case 3 yang menyebabkan $(p \to q)$ bernilai 0 tidak terjadi.

Table 1.21: Truth table for implication

	p	q	$p \to q$
case 1	0	0	1
case 2	0	1	1
[redacted]			
case 4	1	1	1

Situasi dimana $(p \to q)$ adalah tautology, dilambangkan dengan

$$(p \to q) \equiv 1$$

atau

$$(p \Rightarrow q) \tag{1.9}$$

dan dibaca "p **implies** q" atau "p **berimplikasi** q".

Hubungan p dan q semacam ini disebut implication (implikasi) dan dapat digambarkan dengan diagram di bawah. Bisa dilihat di sini bahwa case 3 di mana satu titik berada dalam p tapi di luar q tidak dapat terjadi di sini. Bandingkan dengan diagram 1.1 untuk mengerti beda $p \to q$ dan $p \Rightarrow q$

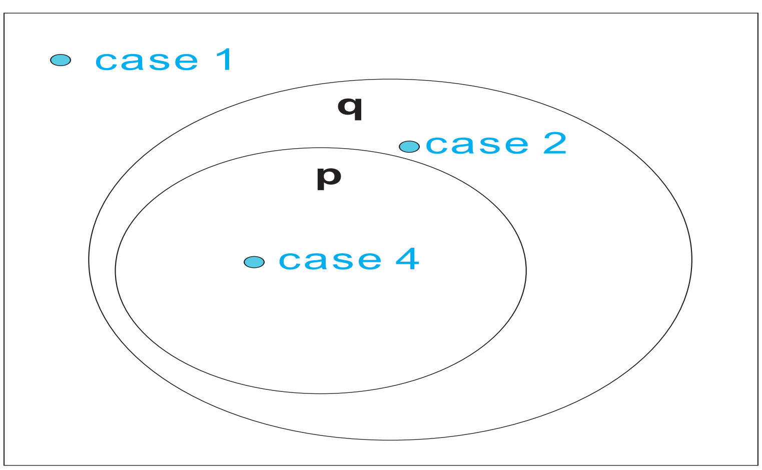


Figure 1.3: Venn Diagram for Implication

Catatan: Perlu diketahui kalau kebanyakan buku matematika tidak membedakan antara $\rightarrow$ dan $\Rightarrow$ dan mengartikan $(p \rightarrow q)$ sebagai $(p \Rightarrow q)$. Tapi di buku ini keduanya dibedakan untuk mempermudah pembaca yang baru memulai belajar tentang logika matematika.

Waktu $(p \Rightarrow q)$ terpenuhi, p disebut **sufficient condition** (syarat cukup) untuk q, dan q disebut **necessary condition** (syarat perlu) untuk p. Kedua syarat ini perlu dimengerti dan bukan dihapal. Beda kedua syarat ini bisa diterangkan sebagai berikut.

1. Sufficient Condition Dari tabel dibawah, waktu $(p \Rightarrow q)$ terpenuhi, agar q terpenuhi (nilainya benar atau 1, lihat kotak hijau terbawah dalam tabel dibawah), sudah cukup (sufficient) kalau p terpenuhi (nilainya 1) (lihat kotak kuning), dikatakan "cukup" karena p **tidak harus** bernilai 1 agar q bernilai 1 (lihat kotak abu-abu).

   Table 1.22: $p \Rightarrow q$ (sufficient condition)

	p	q	$p \rightarrow q$
case 1	0	0	1
case 2	0	1	1
[redacted]			
case 4	1	1	1

2. Necessary Condition Dari tabel dibawah, waktu $(p \Rightarrow q)$ terpenuhi, agar p bernilai 1 (lihat kotak hijau), q harus bernilai 1 (lihat kotak kuning). Di tabel ini tidak ada baris yang menyandingkan $p = 1$ dengan $q = 0$.

   Table 1.23: $p \Rightarrow q$ (necessary condition)

	p	q	$p \rightarrow q$
case 1	0	0	1
case 2	0	1	1
[redacted]			
case 4	1	1	1

Untuk memperjelas hubungan antara syarat cukup dan syarat perlu, pelajari contoh-contoh dibawah ini.

e.g. 1: $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$
Di sini, $x = 2$ adalah sufficient condition (syarat cukup) untuk $x^2 = 4$. Artinya, agar $x^2 = 4$ sudah cukup kalau $x = 2$, tapi tidak mutlak (contohnya, $x = -2$ pun bisa memenuhi $x^2 = 4$). Sedangkan $x^2 = 4$ adalah necessary condition (syarat perlu) agar

$x = 2$, karena tidak ada nilai dari x^2 selain 4 yang dapat menjadikan $x = 2$.

e.g. 2: Waktu proposisi: "kalau hujan, sekolah pulang awal" adalah sebuah tautology, "hujan" adalah syarat cukup agar "sekolah pulang awal", artinya agar "sekolah pulang awal" hujan tidak mutlak terjadi, tapi terjadinya hujan sudah cukup untuk membuat "sekolah pulang awal". Sebaliknya, "sekolah pulang awal" adalah syarat perlu untuk terjadinya "hujan". Sampai di sini pasti banyak pembaca yang bingung karena sepintas dipulangkannya sekolah lebih cepat dari biasa akan mendatangkan hujan (bagaikan ilmu klenik). Tapi ingat yang diterangkan di sini adalah struktur logika dan bukan hubungan sebab-akibat fisika. Artinya, kebenaran proposisi "kalau hujan, sekolah pulang awal" membawa implikasi logis bahwa kejadian "hujan" harus selalu disandingkan dengan kejadian "sekolah pulang awal". Cepatnya, kalau proposisi ini benar, tidak ada kasus dimana turun hujan tetapi sekolah tidak pulang awal. Sekali lagi ini tidak berarti bahwa tindakan memulangakn murid lebih awal akan mendatangkan hujan. Bedakan antara struktur logika dan hubungan sebab-akibat. Kegagalan untuk membedakan kedua hal ini akan mengakibatkan kesalahan logika yang diteruskan dengan ketidakmampuan berargumen dengan logis.

e.g. 3: buktikan bahwa $(p \wedge q) \Rightarrow p$. Ini sangat intuitif, misalnya p: saya makan sate, q: saya makan soto maka tentu proposisi: "kalau saya makan sate dan soto maka saya makan sate" selalu benar. Tapi bukti matematika atau logika tidak bisa dilakukan dengan mengatakan "itu kan intuitive" atau "jelas begitu". Itu bukan bukti tapi perasaan, dan perasaan dan logika tidak selalu seiring. Karena itu harus ada bukti yang definitif secara logika. Sesuai definisi dari operasi $\Rightarrow$, ini bisa dibuktikan dengan menunjukkan bahwa $(p \wedge q) \rightarrow p$ adalah tautology dengan truth table di bawah.

Table 1.24: truth table $(p \wedge q) \rightarrow p$

	p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
case 1	0	0	0	1
case 2	0	1	0	1
case 3	1	0	0	1
case 4	1	1	1	1

Dapat dilihat dari tabel di atas bahwa $(p \wedge q) \rightarrow p$ selalu bernilai 1 (tautology) sehingga bisa kita ekspresikan dengan $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

Jadi disini "makan sate dan soto" adalah syarat cukup untuk "makan sate". Hubungan ini jelas karena sudah "cukup" bagi kita kalau kita untuk makan kedua-duanya, agar terjadinya salah satunya terpenuhi. Tapi "makan sate" adalah syarat perlu bagi terjadinya "makan sate dan soto". Tidak bisa tidak, "makan sate" perlu terjadi agar "makan sate dan soto" terjadi.

Tentu saja setelah kita terbiasa dengan manipulasi formula logika, kita ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p \\
&\equiv \neg p \vee \neg q \vee p \\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee \neg q \\
&\equiv 1 \vee \neg q \\
&\equiv 1
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Setiap langkah hitung di atas sudah dibuktikan di subsection-subsection sebelumnya, sehingga tidak ada yang perlu dihapal di sini. Sekali lagi jangan menghapal tapi mengertilah. Menghapal tidak membuat orang untuk mengerti,

Tentu saja $(p \wedge q) \Rightarrow q$ juga berlaku. Buktikanlah !

e.g. 4: apakah $(p \vee q) \Rightarrow p$? Secara intuitif tidak. Karena "saya makan sate atau soto" tidak berarti bahwa saya memakan keduanya, cukup salah satunya, sehingga proposisi "kalau saya makan sate atau soto maka saya makan sate" tidak selalu benar (bukan tautology), sehingga kita tidak dapat menulis $(p \vee q) \Rightarrow p$. Tapi sekali lagi, ini perlu dibuktikan secara definitif.

Table 1.25: truth table $(p \vee q) \to p$

	p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \to p$
case 1	0	0	0	1
case 2	0	1	1	0
case 3	1	0	1	1
case 4	1	1	1	1

Dari tabel di atas jelas bahwa $(p \vee q) \to p$ tidak selalu bernilai satu (bukan tautology) sehingga kita tidak bisa menulis $(p \vee q) \Rightarrow p$. Hal ini juga bisa dibuktikan dengan manipulasi formula dibawah.

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \to p &\equiv \neg(p \vee q) \vee p \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee p \\
&\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \\
&\equiv 1 \wedge (\neg q \vee p) \\
&\equiv (\neg q \vee p)
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Kita tahu bahwa $(\neg q \vee p)$ tidak selalu bernilai 1, sehingga kita tidak dapat menulis $(p \vee q) \Rightarrow p$. Artinya "makan sate atau soto" **bukan** syarat cukup untuk "makan sate", dan "makan sate" **bukan** syarat perlu untuk "makan sate atau soto".

Review:

- arti dari conditional statement
- arti dari converse, inverse dan contrapositive
- mengapa $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$? dan contohnya dalam kehidupan sehari-hari
- mengapa $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$? dan contohnya dalam kehidupan sehari-hari
- beda antara $p \to q$ dan $p \Rightarrow q$.
- arti syarat cukup, syarat perlu dan bedanya.

Soal Latihan

Buktikan formula di bawah ini (no. 1 - 8).

1. $p \Rightarrow (p \vee q)$
2. $\neg((p \wedge q) \to r) \equiv p \wedge q \wedge \neg r$
3. $\neg(p \to (q \vee r)) \equiv p \wedge \neg q \wedge \neg r$
4. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$
5. $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$
6. $(p \wedge q) \to (p \to q)$ adalah tautology
7. $(p \vee q) \to (p \to q) \equiv \neg p \vee q$
8. $q \to (p \to q)$ adalah tautology
9. ekpresikan dengan jelas negasi dari proposisi: ”pada hari libur saya pergi ke mall atau istirahat di rumah”.
10. expresikan dengan jelas negasi dari proposisi: ”kalau kita berolah raga dan makan dengan baik, kita akan sehat”.
11. expresikan dengan jelas negasi dari proposisi: ”pada hari Senin dan Selasa kita belajar fisika atau matematika”.
12. proposisi $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ditulis dengan $p \leftrightarrow q$ (atau $q \leftrightarrow p$). Buat truth table untuk proposisi $p \leftrightarrow q$ dan perhatikan kapan proposisi ini benar dan kapan salah.

1.3.1 If and only if, equivalence

Waktu dua implikasi $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$ terpenuhi, hal ini bisa diekspresikan dengan:

$$p \iff q \tag{1.12}$$

Formula di atas dibaca ”p **if and only if** q” atau ”q if and only if p”, dan kadang-kadang diekspresikan dengan ”p **iff** q” (”iff” bukan salah cetak, bedakan ini dengan ”if”). Dalam bahasa Indonesia ini diekspresikan dengan ”p **jika dan hanya jika** q” atau ”q jika dan hanya jika p”.

Table 1.26: truth table $p \iff q$

	p	q	$p \to q$	$q \to p$
case 1	0	0	1	1
[redacted]				
case 4	1	1	1	1

Karena syarat agar $p \iff q$ terjadi adalah $p \Rightarrow q$, yg artinya case 3 tidak terjadi, dan $q \Rightarrow p$ yang artinya case 2 tidak terjadi, maka tabel di atas hanya menyisakan case 1 dan case 4. Bisa dilihat di sini bahwa syarat ini menyisakan kondisi di mana nilai p selalu sama dengan nilai q. Sehingga ekpresi $p \iff q$ sama artinya dengan ekspresi equivalency $p \equiv q$. Cepatnya, dengan mengatakan $p \iff q$ kita mengatakan ”p senilai dengan q”. Kalau dibeberapa bab di atas kita mendefinisikan equivalency dua proposisi dengan melihat sama/tidaknya truth table mereka, di sini kita mendefinisikan equivalency dengan lebih jelas.

e.q.1: $p : x = 2$, $q : 2x = 4$. Kita tahu banwa $p \Rightarrow q$ benar karena $x = 2$ menjadi sufficient condition bagi $2x = 4$ dan $2x = 4$ adalah necessary condition bagi $x = 2$. Begitupun $q \Rightarrow p$ karena $2x = 4$ adalah sufficient condition bagi $x = 2$, sekaligus $x = 2$ adalah necessary condition bagi $2x = 4$. Sehingga di sini $x = 2 \iff 2x = 4$ berlaku. Ini artinya, mengatakan $x = 2$ sama saja dengan mengatakan $2x = 4$. Kedua persamaan ini selalu bisa saling menggantikan (mensubstitusi).

e.g.2: $p : x = 2$, $q : x^2 = 4$. Kita tahu bahwa $p \Rightarrow q$ benar. Tapi bagaimana dengan $q \Rightarrow p$? Ini tidak benar, karena $x = 2$ **bukan necessary condition** untuk $x^2 = 4$ karena untuk menjadi $x^2 = 4$ tidak perlu terjadi $x = 2$ ($x = -2$ pun bisa menjadikan $x - 2 = 4$). Sehingga kita **tidak** bisa menulis $x = 2 \iff x^2 = 4$. Keduanya 2 persamaan yang tidak mempunyai arti yang sama. Kita tidak bisa saling mensubstitusi $x = 2$ dengan $x^2 = 4$. Dari sini, dalam bermatematika dan berlogika, pembaca harus sangat berhati-hati dalam menulis tanda panah, karena itu ada artinya. Ini adalah bagian dari ”tatabahasa” dari logika dan matematika. Seperti dalam bahasa, kesalahan tatabahasa akan menyebabkan terjadinya kesalahan penyampaian informasi.

e.g.3: bagaimana dengan $p \iff q$ dimana p : *manusia*, q : *mamalia* ? Kita tahu bahwa $p \Rightarrow q$ berlaku, karena ”manusia” adalah sufficient condidtion dari ”mamalia”, dan "mamalia" adalah necessary condition untuk menjadi "manusia". Tapi $q \Rightarrow p$ tidak benar, karena "manusia" bukan necessary condition untuk menjadi "mamalia". Sehingga kita **tidak** bisa menulis $p \iff q$. Manusia dan mamalia bukan 2 hal yang sama.

Review:

- sekali lagi tinjaulah pengertian tentang arti dari **sufficient condition** dan **necessary condtion**.
- apa arti dari "iff" ?
- pikirkan beberapa contoh riil dimana $p \iff q$ berlaku dan dimana $p \iff q$ tidak berlaku. Memikirkan contoh nyata adalah cara yang baik untuk menguji pengertian kita tentang suatu teori. Biasakanlah melakukan hal ini.

Soal Latihan

1. bisakah kita menulis $x = 0 \iff sin(x) = 0$? Jelaskan !
2. bisakah kita menulis $x = 1 \iff log(x) = 0$? Jelaskan !
3. bisakah kita menulis $x = 0 \iff e^x = 1$? Jelaskan !
4. bisakah kita menulis: jumlah dua bilang ganjil $\iff$ bilang genap ? Jelaskan.
5. buktikan waktu $p \iff q$, $\neg p \equiv \neg q$
6. buktikan jika $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow r$ maka $p \Rightarrow r$. Ini inituitif dalam contoh sehari-hari. Misalnya, "kalau hujan sekolah pulang cepat" dan "waktu sekolah pulang cepat banyak murid main game di rumah", maka "waktu hujan banyak murid main game di rumah". Ini adalah "syllogism" yang akan diterangkan pada chapter berikut.

Chapter 2

Argumen, fallacy dan struktur bukti matematika

> Your mind is like water, when it is agitated it becomes difficult to see but if you allow it to settle, the answer becomes clear.
>
> Grand Master Oogway (Kung Fu Panda)

2.1 Argument

Di Chapter 1 kita telah belajar tentang proposisi, proposisi majemuk dan nilainya. Di bab ini kita akan belajar tentang argumen.

Argument (argumen, penalaran) adalah proses untuk menarik kesimpulan dari sekumpulan informasi (proposisi).

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q \tag{2.1}$$

Disini, p_1 sampai p_n disebut premises (asumsi), dan q adalah conclusion (kesimpulan), sedangkan $\vdash$ melambangkan logical consequence (konsekwensi logika).

Formula 2.1 dibaca p_1 dan p_2 dan $\ldots$ p_n membuktikan q (p_1 and p_2 and $\ldots$ p_n entail (prove) q).

Ini artinya, dari n buah proposisi yang kita namai p_1 sampai p_n, kita menarik kesimpulan q. Tentu saja cara menarik kesimpulan ini bisa benar, dan bisa salah. Yang menentukan kebenaran atau kesalahan proses menarik kesimpulan ini adalah isi dari p_1 sampai p_n dan isi dari kesimpulan q.

Kalau formula di bawah berlaku, argumen (cara menarik kesimpulan) $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \vdash q$ valid (benar, sahih), selain itu argumen ini disebut fallacy (kesalahan logika).

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q \tag{2.2}$$

e.g.1: $(p \to q), p \vdash q$ adalah argumen yang valid. Untuk membuktikan validitas argumen ini cukup kita tunjukkan bahwa $((p \to q) \wedge p) \to q$ adalah tautology.

Table 2.1: validity: $(p \to q), p \vdash q$

	p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((\text{p} \to q) \wedge p) \to q$
case 1	0	0	1	0	1
case 2	0	1	1	0	1
case 3	1	0	0	0	1
case 4	1	1	1	1	1

Dari tabel 2.1, kita lihat bahwa $((p \to q) \wedge p) \to q$ adalah tautology, sehingga kita bisa menyimpulakan bahwa argumen $(p \to q), p \vdash q$ valid. Contoh riil dari argumen ini, p: hari ini hujan, q: sekolah pulang awal, sehingga $p \to q$ berbunyi: kalau hari ni hujan maka sekolah pulang awal. Di sini dua premis, $p \to q$ dan p, yang berarti kita mengasumsikan bahwa kedua proposisi "kalau hari ini hujan sekolah pulang awal" dan "hari ini hujan" benar, dari situ kesimpulan kita bisa menarik kesimpulan bahwa "sekolah pulang awal". Argumen ini disebut **Modus Ponens**, dan merupakan argumen yang paling intuitif. Kita juga bisa membuktikan bahwa Modus Ponens ini valid dengan melakukan manipulasi formula sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
((p \to q) \wedge p) \to q &\equiv \neg((p \to q) \wedge p) \vee q \\
&\equiv \neg(p \to q) \vee \neg p \vee q \\
&\equiv \neg(p \to q) \vee (p \to q) \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

e.g.2: $(p \to q), \neg q \vdash \neg p$ adalah argumen yang valid.

Table 2.2: validity: $(p \to q), \neg q \vdash \neg p$

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
case 1	0	0	1	1	1	1	1
case 2	0	1	1	0	1	0	1
case 3	1	0	0	1	0	0	1
case 4	1	1	0	0	1	0	1

Dari tabel di atas bisa dilihat bahwa $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$ adalah tautology, sehingga argumen $(p \to q), \neg q \vdash \neg p$, valid. Contoh riil cara beragumen ini, misalnya ada seorang guru yang mengeluarkan proposisi: "kalau hari ini hujan sekolah pulang awal", dan ternyata hari ini sekolah tidak pulang awal. Dari kedua hal ini, valid (sahih) bagi kita untuk menarik kesimpulan bahwa hari ini tidak hujan. Contoh lain, Dari dua proposisi: "kalau seorang pelajar giat belajar maka dia akan naik kelas", dan "seorang pelajar tidak naik kelas", valid bagi kita untuk menyimpulkan bahwa "pelajar itu tidak belajar giat". Proses berargumen ini disebut **Modus Tollens**.

Di atas kesahihan modus tollens dibuktikan dengan tabel 2.2. Tapi tentu saja ini bisa dibuktikan juga dengan manipulasi formula logika sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p &\equiv \neg((p \to q) \wedge \neg q) \vee \neg p \\
&\equiv \neg(p \to q) \vee q \vee \neg p \\
&\equiv \neg(p \to q) \vee (\neg p \vee q) \\
&\equiv \neg(p \to q) \vee (p \to q) \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

e.g.3: $(p \to q), (q \to r) \vdash (p \to r)$ adalah argumen yang valid.

Ke-valid-an argumen ini bisa dibuktikan dengan tabel 2.3. Pembuktian melalui manipulasi formula diserahkan pada pembaca (sedikit rumit tapi tidak sulit). Proses argumen ini disebut **syllogism**. Ini salah satu cara menarik kesimpulan yang sangat sering digunakan, karena intuitif. Satu contoh riil, dari dua prosisi: "kalau hujan (p), sekolah pulang awal (q)", dan "kalau sekolah pulang awal (q), banyak murid main game (r)", sahih untuk menarik kesimpulan: "kalau hujan(p), banyak murid main game (q")."

Table 2.3: validity: $(p \to q), (q \to r) \vdash (p \to r)$

	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
case 1	0	0	0	1	1	1	1	1
case 2	0	0	1	1	1	1	1	1
case 3	0	1	0	1	0	0	1	1
case 4	0	1	1	1	1	1	1	1
case 5	1	0	0	0	1	0	0	1
case 6	1	0	1	0	1	0	1	1
case 7	1	1	0	1	0	0	0	1
case 8	1	1	1	1	1	1	1	1

Review:

- Apa itu argumen, dan kapan suatu argumen valid ?
- Tinjaulah arti modus ponens dan validitasnya. Buatlah beberapa contoh riil kesimpulan yang dapat ditarik dengan modus ponens.
- Tinjaulah arti modus tollens dan validitasnya. Buatlah beberapa contoh riil kesimpulan yang dapat ditarik dengan modus tollens.
- Tinjaulah arti syllogism dan validitasnya. Buatlah beberapa contoh riil kesimpulan yang dapat ditarik dengan syllogism.

Soal Latihan

1. buktikan bahwa syllogism adalah argumen yang valid dengan manipulasi formula

2. valid-kah argumen-argumen di bawah ini ? Kalau valid pikirkan satu contoh riil dari cara berargumen ini. Kalau tidak pikirkan satu contoh yang intuitif untuk menunjukkan ketidak-valid-an argumen ini.

   (a) $p \vdash (p \vee q)$
   (b) $(p \vee q) \vdash p$
   (c) $(p \rightarrow q), (q \rightarrow p), q \vdash p$
   (d) $(p \vee q), (r \rightarrow \neg q) \vdash (r \rightarrow \neg p)$
   (e) $(\neg p \rightarrow q), q \vdash p$
   (f) $(p \rightarrow r), (q \rightarrow r), (p \vee q) \vdash r$
   (e) $((p \vee q) \rightarrow r), \neg r \vdash \neg p$
   (f) $(p \rightarrow q), (r \rightarrow \neg q) \vdash (p \rightarrow \neg r)$

2.2 Fallacy (kesalahan logika)

Argumen $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ yang tidak valid, disebut **fallacy**. Fallacy adalah kesalahan dalam proses logika.

e.g. 1: $(p \vee q), p \vdash q$ adalah sebuah fallacy, yang dapat dibuktikan dengan tabel di bawah.

Table 2.4: validity: $(p \vee q), p \vdash q$

	p	q	p $\vee q$	(p $\vee q) \wedge p$	((p $\vee q) \wedge p) \rightarrow q$
case 1	0	0	0	0	1
case 2	0	1	1	0	1
case 3	1	0	1	1	0
case 4	1	1	1	1	1

Tabel ini menunjukkan bahwa $((p \vee q) \wedge p) \rightarrow q$ bukan tautology, sehingga argumen $(p \vee q), p \vdash q$ adalah sebuah fallacy. Contoh nyatanya: dari dua argumen, "saya makan sate (p) dan soto (q)", serta "saya makan sate (p), kita tidak bisa menarik kesimpulan kalau "saya makan soto (q).

e.g.2: argumen $(p \rightarrow q), q \vdash p$ adalah fallacy, yang bisa dibuktikan dengan tabel di bawah yang menunjukkan kalau $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ bukan tautology.

Table 2.5: validity: $(p \rightarrow q), q \vdash p$

	p	q	p $\rightarrow q$	(p $\rightarrow q) \wedge q$	((p $\rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
case 1	0	0	1	0	1
case 2	0	1	1	1	0
case 3	1	0	0	0	1
case 4	1	1	1	1	1

Contoh nyatanya, dari dua proposisi "kalau hujan (p) sekolah pulang awal (q)", dan "hari ini sekolah pulang awal (q)", kita tidak dapat menarik kesimpulan bahwa "hari ini hujan(p)". Fallacy ini disebut **affirming the consequence** dan merupakan salah satu fallacy yang sering sekali terjadi.

e.g.3: argumen $p \vee q, p \vdash \neg q$ adalah fallacy. Pembaca bisa membuktikan ini dengan mudah menggunakan truth table. Bukti dengan manipulasi formula sebagai berikut.

$$\begin{aligned} ((p \vee q) \wedge p) \rightarrow \neg q &\equiv \neg((p \vee q) \wedge p) \vee \neg q \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee \neg p \vee \neg q \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dan kita tahu bahwa formula akhir di atas bukan tautology sehingga argumen $p \vee q, p \vdash \neg q$ adalah fallacy. Fallacy ini dinamai **affirming the disjunction**.

Contoh nyatanya, dari proposisi: "saya makan sate (p) atau soto (q)" dan "saya makan sate (p)", kita tidak bisa menarik kesimpulan kalau "saya tidak makan soto ($\neg q$)".

e.g.4: argumen $\neg(p \wedge q), \neg p \vdash \neg q$ adalah sebuah fallacy. Pembaca bisa dengan mudah membuktikan kalau argumen ini sebuah fallacy dengan truth table. Bukti dengan manipulasi formula sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (\neg(p \wedge q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q &\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg p) \vee \neg q \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (p \vee \neg q) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee \neg(\neg p \wedge q) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kita bisa dapat dengan mudah melihat dari baris terakhir kalau proposisi ini bukan tautology, sehingga argumen $\neg(p \wedge q), \neg p \vdash \neg q$ adalah fallacy. Fallacy ini dinamai **denying a conjunct**. Contoh nyatanya, dari proposisi "Tidak benar kalau saya makan sate dan soto ($\neg(p \wedge q)$)" dan "saya tidak makan sate ($\neg p$)", kita tidak bisa menarik kesimpulan kalau "saya tidak makan soto ($\neg q$)".

e.g.5: argumen $(p \rightarrow q) \vdash (\neg p \rightarrow \neg q)$ adalah sebuah fallacy yang dapat dengan mudah dibuktikan dengan truth table. Bukti dengan manipulasi formula sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q) &\equiv \neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow \neg q) \\ &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dengan mudah kita tahu kalau proposisi di baris terakhir bukan tautology, sehingga argumen $(p \rightarrow q) \vdash (\neg p \rightarrow \neg q)$ adalah sebuah fallacy. Contoh nyatanya, dari proposisi "Kalau hari ini hujan (p sekolah pulang awal (q)", kita tidak bisa mengambil kesimpulan bahwa "kalau hari ini tidak hujan ($\neg p$) maka sekolah tidak pulang awal ($\neg q$)". Ini kesalahan logika yang dinamai **negative antecedent and consequence** dan sering sekali terjadi.

Review:

- apa definisi fallacy ? bagaimana membuktikan bahwa suatu argumen adalah sebuah fallacy ?
- mengapa affirming the consequence, affirming the disjunction, denying a conjunct, negative antecedent and consequence merupakan fallacy, dan pikirkan satu contoh nyata bagi masing-masing fallacy tersebut.

2.2.1 Not even wrong

Kalimat "not even wrong" biasanya diasosiasikan dengan fisikawan Wolfgang Pauli. Ini untuk menggambarkan pseudoscience, teori-teori yang nilainya "sampah", bukan hanya salah tapi tidak bernilai untuk dinilai salah sekalipun. Argumen bumi datar dengan segala macam justifikasinya adalah contoh nyatanya. Dalam logika juga ada banyak fallacy yang "not even wrong", kesalahan-kesalahan pikir yang muncul dari kebodohan dan ketidakmampuan atau ketidakmauan untuk berusaha untuk berlogika dengan baik. Fallacy-fallacy seperti ini ada diluar logika formal dan tidak berharga untuk diverifikasi secara matematis. Beberapa diantaranya:

- Ad hominem: cara menyerang argumen dengan tidak menunjukkan di mana kesalahan argumen tersebut tapi dengan menyerang orang yang mengeluarkan argumen tersebut. Misalnya: "argumenmu pasti salah karena kamu bodoh !". Ingat bahwa kepintaran atau kebodohan seseorang tidak menjadikan argumennya benar atau salah. Nilai argumen ada di argumen itu sendiri bukan pada si pembawa pesan. Ad hominem disingkat dari argumentum ad hominem yang artinya argumen pada seseorang.
- Tu quoque: ini juga satu bentuk dari ad hominen. Tu quoque sendiri berarti "kamu juga". Misalnya, A memperingatkan B: "jangan memotong antrian karena itu melanggar peraturan", dan B membantah: "Kenapa nggak boleh, tadi juga ada orang yang memotong antrian !". Ini justifikasi suatu argumen atau perbuatan dengan argumen bahwa ada orang lain yang juga melakukannnya. Suatu kesalahan tidak menjadi lebih benar karena dilakukan oleh berapa orangpun.
- Argumentum ad ignorantiam (appeal to ignorance): ini juga suatu fallacy yang sangat sering terjadi dalam debat sehari-hari. Ini adalah kesalahan pikiran dimana suatu proposisi pasti benar karena tidak ada yang bisa membuktikan kalau itu salah. Misalnya, A: "tuyul itu ada", B: "buktikan !", A: "kamu bisa buktikan kalau tuyul nggak ada ? Kalau nggak bisa artinya tuyul itu ada". Argumen yang dikeluarkan oleh A adalah fallacy, dia tidak bisa menjustifikasi argumennya dengan menunjukkan ketidakmampuan orang lain untuk membuktikan negasi dari argumennya. Beban untuk membuktikan ada di pembawa pesan.
- Argumentum ab auctoritate (argument from authority): kesalahan logika berdasarkan ide bahwa sebuah proposisi yang dikeluarkan seseorang yang memiliki otoritas di bidangnya, pasti benar. Misalnya, A: "karena itu dikatakan oleh seorang ulama,

itu pasti benar". Ini fallacy, karena kebenaran atau ketidakbenaran suatu proposisi tidak tergantung pada siapa yang mengucapkan proposisi itu tapi pada nilai proposisi itu sendiri. Fallacy ini kebalikan dari Ad hominem.

- Post Hoc Ergo Propter Hoc (post hoc): ini kesalahan logika bahwa karena kejadian A terjadi sebelum kejadian B, maka kejadian A adalah sebab dari kejadian B. Misalnya: "karena setiap hari ayam berkokok sebelum matahari terbit, maka matahari terbit karena ayam berkokok". Contoh lain: "karena banyak yang minum miras di daerah itu maka terjadi bencana".

- Straw man: cepatnya ini adalah "memelintir" argumen seseorang lalu menyerang argumen awal berdasarkan pelintirannya. Misalnya: "Teori evolusi Darwin pasti salah, karena mengatakan bahwa kita berevolusi dari monyet, sedangkan tidak pernah ada bukti bahwa monyet bisa sedikit demi sedikit berubah menjadi manusia". Ini fallacy, karena teori evolusi Darwin tidak pernah berproposisi bahwa kita berubah dari monyet. Yang dinyatakan dalam teori evolusi adalah kita memiliki kesamaan nenek moyang dengan monyet, sesuatu yang sama sekali berbeda dengan "plintiran" dalam argumen ini.

Masih banyak sekali fallacy-fallacy semacam ini. Tapi karena fallacy-fallacy ini masuk dalam golongan "not even wrong", di buku ini fallacy-fallacy seperti ini tidak akan dibahas lebih lanjut. Ingat Einstein pernah mengatakan: "Two things are infinite: the universe and human stupidity, and I'm not sure about the universe".

2.3 Bukti Matematika

Tujuan utama dari matematika bukan untuk menghitung tapi untuk menghasilkan teori yang nantinya dipakai untuk menghitung. Teori baru tercipta berangkat dari axioma (proposisi awal yang diasumsikan benar sehingga tidak perlu dibuktikan) atau teori yang sudah terbuktikan yang lalu diolah dengan argumen yang valid.

Misalnya, buktikan pertidaksamaan di Eq. 2.6 di mana x dan y adalah bilangan riil.

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{2.6}$$

Di sini kita asumsikan bahwa teori binomial sudah terbukti, sehingga, kita tahu bahwa $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Dengan memanfaatkan persamaan ini, kita bisa melakukan manipulasi secara sebagai berikut.

$$(x+y)^2 - (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - (|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|),$$

dan karena, $x^2 = |x|^2$ dan $y^2 = |y|^2$, Eq. 2.6 dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$(x+y)^2 - (|x| + |y|)^2 = 2(xy - |x||y|) \leqslant 0$$

Selanjutnnya, karena $x \leqslant |x|$ dan $y \leqslant |y|$, kita bisa mendapatkan pertidaksamaan dibawah yang membuktikan teori semula.

$$(x+y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$$

Lalu, mengambil akar dari pertidaksamaan ini menghasilkan,

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \ \ (Q.E.D.)$$

Ini adalah bukti langsung yang tidak membutuhkan proses logika yang rumit. Sayangnya, tidak semua, atau mungkin sedikit sekali teori yang dapat dibuktikan secara langsung seperti ini. Kebanyakan teori membutuhkan manipulasi logika untuk dibuktikan.

Satu contoh tentang teori yang nampak mudah untuk dibuktikan secara langsung, tapi ternyata tidak demikian.

Buktikan bahwa bila n^2 bilangan genap, maka n juga genap di mana n adalah bilangan natural.

Ini tampak mudah, tapi tidak demikian. Untuk membuktikan ini secara langsung, kita perlu untuk menghitung akar ($\sqrt{}$) dari n. Tapi di sini kita perlu secara umum memberi garansi bahwa akar suatu bilangan genap adalah bilangan genap. Ini tidak terlalu mudah untuk dilakukan (silahkan pembaca mencoba). Bukti ini tidak sama dengan membuktikan proposisi:

Kalau n bilangan genap, maka n^2 juga genap,

yang mudah sekali untuk dilakukan, ingat bahwa $(q \rightarrow p) \vdash (p \rightarrow q)$ bukan argumen yang valid.

2.3.1 Proof by contrapositive

Proof by contrapositive berangkat dari kenyataan bahwa $(\neg q \rightarrow \neg p) \vdash (p \rightarrow q)$ adalah argumen yang valid. Ini bisa dibuktikan dengan manipulasi formula sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg q \rightarrow \neg p) \vee (p \rightarrow q) \\
&\equiv \neg(q \vee \neg p) \vee (p \rightarrow q) \\
&\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (p \rightarrow q) \\
&\equiv \neg(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q) \\
&\equiv 1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Argumen ini digunakan untuk membuktikan proposisi $p \rightarrow q$, tapi pembuktian secara langsung sulit dilakukan. Manipulasi formula 2.7 menunjukkan bahwa kalau kita bisa membuktikan proposisi $\neg q \rightarrow \neg p$ maka proposisi $p \rightarrow p$ juga terbukti. Meminjam contoh di atas:

e.g.1: Buktikan bahwa bila n^2 bilangan genap, maka n juga genap di mana n adalah bilangan bulat.

Pertama-tama, kita perlu untuk mengekspresikan teori ini dalam notasi logika yang kita kenal. Di sini, p: n^2 bilangan genap, dan q: n bilangan genap. Dan teori yang ingin dibuktikan bisa ditulis sebagai proposisi $p \rightarrow q$. Dengan menggunakan proof by contrapositive, kita tahu bahwa kita tidak perlu membuktikan proposisi ini secara langsung tapi cukup membuktikan $\neg q \to \neg p$ yang mungkin jauh lebih mudah untuk dibuktikan.

Di sini karena $\neg q$: n adalah bilangan ganjil, dan $\neg p$: n^2 adalah bilang ganjil, cukup bagi kita untuk menunjukkan bahwa pangkat dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil secara langsung sebagai berikut:

proof: $n = 2k+1$, di mana k adalah bilangan bulat positif (ingat kalau k bilangan bulat $2k$ pasti genap sehingga $2k+1$ pasti ganjil). Lalu kita bisa melakukan manipulasi secara langsung,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Kita tahu bahwa $2(2k^2 + 2k)$ pasti genap, sehingga $2(2k^2 + 2k) + 1$ pasti ganjil.

Sehingga proposisi ($\neg q \to \neg p$ terbukti dan ini membuktikan tidak secara langsung bahwa $p \to q$. Dengan contoh ini kita tahu proof by contrapositive ini efisien pada waktu kita ingin membuktikan proposisi $p \to q$, tapi lebih mudah untuk membuktikan $\neg q \to \neg p$.

e.g.2: buktikan bila $x^2 + y^2 \leqslant 1$ maka $x \leqslant 1$

Proposisi di atas juga tidak mudah untuk dibuktikan secara langsung.

Di sini, p: $x^2 + y^2 \leqslant 1$ dan q: $x \leqslant 1$. Dan karena bukti secara langsung sukar dilakukan, kita mencoba membuktikan $\neg q \to \neg p$. Di sini, $\neg q$: $x > 1$ dan $x^2 + y^2 > 1$.

Kita mulai dari $x > 1$, dan maka $x^2 > 1$. Kalau $x^2 > 1$ maka $x^2 + y^2 > 1$, karena apapun nilai y, $y^2 \geqslant 0$, sehingga $\neg q \to \neg p$ terbukti, yang berarti proposisi awal terbukti.

e.g.3: buktikan bila $x + y + z < 0$ maka setidaknya salah satu dari ketiga variabel x, y, z bernilai negatif.

Secara intuitif, kita tahu bahwa proposisi ini benar. Tapi membuktikan secara langsung tidak terlalu mudah, kita harus setidaknya memikirkan komposisi positif, negatif dari ketiga variabel ini. Tapi ini dapat dengan sangat mudah dibuktikan dengan proof by contrapositive.

proof: Kita mulai dengan proposisi p: $x + y + z < 0$ dan q: setidaknya salah satu dari ketiga variabel x, y, z bernilai negatif. Proposisi q ini dapat juga kita baca "dari tiga variabel ini ada yang bernilai negatif". Merubah "bunyi" dari proposisi seperti ini penting agar mudah untuk menegasikannya. Sehingga, $\neg q$: "dari tiga variabel ini **tidak** ada yang bernilai negatif", atau "semua variabel bernilai positif atau nol". Negasi $\neg p$: $x+y+z \geqslant 0$. Dengan proof by contrapositive cukup menunujukkan bahwa kalau semua variabel positive atau nol, maka jumlah variabel-variabel ini juga positif atau nol.

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant$$
$$x + y + z \geqslant 0,$$

dan ini membuktikan proposisi awal.

e.g.4: untuk bilangan natural n, waktu dibagi 4, n menyisakan 2 atau 3, maka n bukan perfect square (perfect square adalah pangkat 2 dari bilangan bulat. Contoh perfect square: 1, 4, 9, 16, 25 dsb).

Proposisi sangat sulit untuk dibuktikan secara langsung, tapi sangat mudah untuk dibuktikan dengan proof by contrapositive.

Di sini, p: n menyisakan 2 atau 3 waktu dibagi 4, dan q: n bukan perfect square.

Cukup bagi kita untuk membuktikan jika n adalah perfect square, maka jika dibagi 4 n **tidak** menyisakan 2 atau 3.

Kita tahu bahwa ada 4 kemungkinan "sisa" bilangan bulat jika dibagi 4: 0, 1, 2 atau 3, sehingga "tidak menyisakan 2 atau tiga" di atas berarti menyisakan 0 atau 1.

proof: Pembuktian ini berangkat dari $\neg q$: n adalah perfect square sehingga $n = k^2$ untuk k bilangan bulat.

Ada kemungkinan nilai untuk k waktu dibagi 4:

- case 1: k habis dibagi 4, yang artinya k adalah kelipatan 4, sehingga bisa kitu tulis $k = 4m$ di mana m adalah bilangan bulat. sehingga,
  $n = k^2 = (4m)^2 = 16m^2 = 4(4m^2)$
  Untuk case 1 ini bisa kita lihat bahwa n adalah kelipatan 4.

- case 2: k menyisakan 1 sewaktu dibagi 4, sehingga bisa ditulis $k = 4m + 1$ untuk m bilangan bulat. sehingga,
  $n = k^2 = (4m + 1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 4(4m^2 + 2m) + 1$
  Untuk case 2 ini bisa kita lihat bahwa n akan menyisakan 1 jika dibagi 4.

- case 3: k menyisakan 2 sewaktu dibagi 4, sehingga bisa ditulis $k = 4m + 2$ untuk m bilangan bulat. sehingga,
  $n = k^2 = (4m + 2)^2 = 16m^2 + 16m + 4 = 4(4m^2 + 4m + 1)$
  Untuk case 3 ini bisa kita lihat bahwa n adalah kelipatan 4.

- case 4: k menyisakan 3 sewaktu dibagi 4, sehingga bisa ditulis $k = 4m + 3$ untuk m bilangan bulat. sehingga,
  $n = k^2 = (4m+3)^2 = 16m^2+24m+9 = (16m^2+24m+8)+1 = 4(4m^2+6m+2)+1$
  Untuk case 4 ini bisa kita lihat bahwa n akan menyisakan 1 jika dibagi 4..

Tidak ada kemungkinan lain selain 4 kemungkinan di atas, sehingga kita bisa menarik kesimpulan bahwa jika n adalah perfect square, n tidak akan menyisakan 2 atau 3 sewaktu dibagi 4, dan dengan ini kita membuktikan $\neg q \rightarrow \neg p$ dan secara tidak langsung membuktikan $p \rightarrow q$

2.3.2 Reductio ad absurdum, proof by contradiction

Reductio ad absurdum berangkat dari kenyataan bahwa $(\neg p \rightarrow q), \neg q \vdash p$ adalah argumen yang valid. Ini bisa dibuktikan dengan manipulasi formula sebagai berikut.

$$\begin{aligned}((\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow p &\equiv \neg(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee p \\ &\equiv \neg(\neg p \rightarrow q) \vee q \vee p \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv 1\end{aligned}$$

Di sini proposisi yang ingin kita bukitakan adalah p (bukan $p \rightarrow q$), tapi sering kali kita tidak bisa membuktikan kebenaran proposisi p secara langsung. Reductio ad absurdum menawarkan pembuktian secara tidak langsung dengan pertama-tama menegasikan apa yang ingin kita buktikan, jadi kita asumsikan di sini kalau $(\neg p)$ benar. Berangkat dari $\neg p$ kita harus memikirkan implikasi jika $\neg p$ benar (necessary condition untuk $\neg p$), sebut saja q, sehingga $\neg p \rightarrow q$ adalah sebuah tautology (Perlu dimengerti bahwa implikasi q ini harus kita pikirkan sendiri dan tidak tersurat dalam prosisi awal yang ingin kita buktikan). Tapi kalau ternyata dalam kenyataan atau dalam manipulasi formula selanjutnya $\neg q$ yang benar, terjadi kontradiksi di sini karena sangat absurd kalau q sekaligus $\neg q$ benar. Karena itu bisa disimpulakan bahwa asumsi awal kalau $\neg p$ tidak benar, yang membuktikan kalau p benar.

Reductio ad absurdum adalah teknik berargumen yang sangat solid dan sangat sering digunakan dalam bermatematika dan berargumen sehari-hari. Banyak teori matematika yang lahir dari cara berargumen ini. Tapi bagi pemula, reductio ad absurdum tidak mudah untuk dimengerti. Ini hanya dapat dimengerti dengan latihan menggunakannya.

e.g.1: Buktikan kalau jumlah molekul air pada tubuh kita terbatas. Di sini proposisi yang ingin kita buktikan adalah p: jumlah molekul air pada tubuh kita terbatas.

proof: Pertama kita asumsikan kalau $\neg p$: jumlah molekul air pada tubuh kita tak terbatas. Setelahnya, kalau benar ini terjadi, apa implikasinya (q) ? Dengan sedikit pengetahuan umum kimia kita tahu bahwa 1 mole air (H_2O) beratnya sekitar 18 gram. Karena dalam 1 mole terdapat 6.022×10^{23} (bilangan Avogadro), kita bisa menghitung bahwa berat dari 1 molekul air sekitar 3 $\times 10^{-23}$ gram. Ini sangat ringan, tetapi kalau ada tak terhingga molekul air dalam tubuh kita, berat 1 molekul air ini harus dikalikan denggan tak terhingga, sehingga berat tubuh kita akan menjadi tak terhingga. Ini implikasi (q), dari asumsi kita bahwa ada tak terhingga molekul air dalam tubuh kita $(\neg p)$. Tapi kita tahu bahwa berat tubuh kita terhinnga $(\neg q)$, sehingga terjadi kontradiksi yang absurd. Dengan demikian kita tahu bahwa asumsi $(\neg p)$ tidak mungkin benar, dan dengan demikian kita membuktikan bahwa proposisi p: jumlah molekul air pada tubuh kita terbatas, benar. (Q.E.D.).

e.g.2: Jika ada 13 orang di satu ruangan, maka setidaknya 2 dari mereka berulangtahun pada bulan yang sama.

proof: Proposisi yang ingin kita buktikan, p: jika ada 13 orang maka setidaknya 2 dari mereka berulangtahun pada bulan yang sama. Untuk membuktikan ini kita mulai dari asumsi $\neg p$: tidak ada orang yang berulang tahun pada bulan yang sama pada 13 orang. Ini menimbulkan implikasi, q: perlu ada 13 bulan. Kita tahu di sini bahwa proposisi, $\neg p \rightarrow q$ benar. Tapi dalam kenyataannya dalam setahun hanya ada 12 bulan, sehingga proposisi $\neg q$: tidak ada 13 bulan dalam setahun, benar. Di sini terjadi kontradiksi karena tidak mungkin q sekaligus $\neg q$ benar, dan dengan begitu membuktikan bahwa proposisi awal p jika ada 13 orang maka setidaknya 2 dari mereka berulangtahun pada bulan yang sama, benar. (Q.E.D.).

e.g.3: Ada tak terhingga banyaknya bilangan prima.

Ini soal yang tampaknya mudah, tapi tidak ada cara untuk membuktikannya secara langsung. Menjejer 100 milyar bilang prima-pun tidak membuktikan ini, karena mungkin saja banyaknya bilangan prima tepat 100 milyar sehingga bukan tak terhingga. Bukti proposisi ini dengan menggunakan reductio ad absurdum telah dilakukan oleh Euclid lebih dari 2 milenia yang lalu.

proof: Kita mulai dengan proposisi yang ingin kita buktikan, p: ada tak terhingga bilangan prima. Untuk menerapkan reductio ad absurdum mengasumsikan bahwa negasi p, $\neg p$: bilangan prima jumlahnya terbatas, benar. Implikasi kalau jumlah bilang prima terbatas adalah q: ada N bilangan prima. Mungkin N ini besar sekali misalnya 100 milyar, tapi tidak lebih dari itu. Lalu apa yang terjadi kalau hanya ada N bilangan prima ? Kita bisa menjejerkan bilanga prima tersebut mulai dari yang terkecil sampai yang terbesar sebagai berikut.

$$a_1, a_2.a_3, \ldots, a_N$$

Di sini, $a_1 = 2$ adalah bilangan prima pertama, $a_2 = 3$ adalah bilangan prima kedua, $a_3 = 5$ adalah bilangan prima ke tiga, dan seterusnya sampai bilangan prima ke N. Selanjutnya kita bisa membuat bilangan baru, b sebagai berikut,

$$b = (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_N) + 1$$

Di sini kita tahu bahwa $b > a_N$, sehingga kalau b ini prima, maka dia harus dijejer setelah a_N. Masalahnya, prima-kah b ? Dengan mudah kita lihat bahwa b adalah bilangan prima, karena waktu dibagi dengan bilangan prima apapun, b akan menyisakan 1 (tidak habis dibagi oleh bilangan prima yang lain). b hanya habis dibagi oleh 1 dan dirinya sendiri, sehingga b adalah bilangan prima. Di sini terjadi suatu kontradiksi, karena kita mengasumsikan (dengan $\neg p$), bahwa hanya ada N buah bilangan prima, tapi ternyata ada bilangan prima lain selain $a_1, a_2 \ldots a_N$ ini, sehingga asumsi kita pasti salah, dan kalau $\neg p$ tidak benar, maka p harus benar. Dengan ini kita membuktikan bahwa ada tak terhingga bilanga prima (Q.E.D.).

e.g.4: $\sqrt{2}$ adalah bilang irasional.

Definisi bilangan irasional adalah bilangan yang bukan bilangan rasional. Sedangkan bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$, di mana a dan $b \neq 0$ adalah bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor yang sama kecuali

1 tentunya (irreducible fraction). Contoh bilangan rasional, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{11}{7}$ dan sebagainya. Kata "rasional" pada bilangan rasional bukan berarti "masuk akal", tapi berarti bilangan yang dapat diekspresikan dengan rasio (pembagian).

proof(a): Proposisi yang ingin dibuktikan di sini adalah p: $\sqrt{2}$ adalah bilang irasional. Kita harus mulai dengan negasinya, $\neg p$: $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional. Implikasinya, q: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ di mana a dan $b \neq 0$ adalah bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor yang sama. Dan dari sini,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dari Eq. 2.8 kita tahu bahwa a^2 adalah bilangan genap. Dan dalam contoh pertama pada 2.3.1, kita sudah membuktikan bahwa kalau a^2 genap, maka a juga genap, sehingga $a = 2c$ di mana c adalah bilangan bulat, sehingga

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 \\ 2b^2 &= (2c)^2 = 4c^2 \\ \Rightarrow b^2 &= 2c^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dari Eq. 2.9, kita tahu bahwa b^2 adalah bilangan genap, sehingga b juga genap.

Dari proses hitung di atas kita menyimpulkan kalau a dan b keduanya genap. Tapi kesimpulan ini kontradiktif, karena kita mengasumsikan bahwa a dan b tidak mempunyai faktor pembagi yang sama kecuali 1, sedangkan keduanya genap sehingga memiliki faktor bersama 2. Dengan kontradiksi ini kita bisa menyimpulkan bahwa asumsi $\neg p$: $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional tidak mungkin benar, yang artinya proposisi p: $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional terbukti. (Q.E.D.).

proof(b): Bukti ke dua ini mungkin lebih intuitif. Kita mulai dari $\neg p$: $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional, yang implikasinya ditunjukkan oleh Eq. 2.8. Lalu kita lanjutkan dengan memikirkan faktorisasi prima dari a (misalnya: kalau $a = 9$, maka faktor primanya adalah 3 dan 3, kalau $a = 60$ maka faktor primanya adalah 2, 2, 3, 5). Bisa kita lihat bahwa berapa pun jumlah faktor prima dari a, jumlah faktor prima dari a^2 adalah 2 kali lipatnya, sehingga a^2 mempunyai faktor prima yang jumlahnya genap. Dengan alur pikir yang sama, b^2 juga mengandung faktor prima yang jumlahnya genap, sehingga $2b^2$ mengandung faktor prima yang jumlahnya ganjil (jumlah faktor prima $b^2 + 1, karena 2 adalah bilang prima$. Di sini terjadi kontradiksi karena bagian kiri persamaan mengandung faktor prima yang jumlahnya ganjil, sedangkan bagian kanan persamaan mengandung faktor prima yang jumlahnya genap, sehingga asumsi $\neg p$ tidak mungkin benar, yang membuktikan kalau p benar. (Q.E.D.).

e.g.5: untuk n bilangan bulat positif, $\sqrt{n^2 + 1}$ adalah bilangan irasional.

proof: Sebelum masuk ke reductio ad absurdum, kita lihat bahwa,

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} \\ \Rightarrow n < \sqrt{n^2+1} < (n+1)\end{aligned} \qquad (2.10)$$

Karena $\sqrt{n^2+1}$ ada di antara dua bilangan bulat yang berurutan n dan $n+1$, maka $\sqrt{n^2+1}$ pasti bukan bilangan bulat.

Selanjutnya, kita ingin membuktikan proposi p: $\sqrt{n^2+1}$ adalah bilangan irasional untuk n bilangan bulat positif. Kita mulai dengan negasinya $\neg p$: $\sqrt{n^2+1}$ adalah bilangan rasional, yang implikasinya, q: $\sqrt{n^2+1} = \frac{a}{b}$ di mana a dan $b \neq 0$ adalah bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor yang sama, sehingga,

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} &= \frac{a}{b} \\ n^2+1 &= \frac{a^2}{b^2},\end{aligned} \qquad (2.11)$$

karena n^2+1 adalah bilangan bulat, serta a dan b tidak mempunyai faktor yang sama, sehingga Eg. 2.11 hanya bisa terjadi kalau $b = 1$. Karena kita asumsikan bahwa $\sqrt{n^2+1} = \frac{a}{b}$, utk $b = 1$ maka $\sqrt{n^2+1} = a$ dan karena a adalah bilangan bulat maka $\sqrt{n^2+1}$ adalah bilangan bulat. Kesimpulan ini kontradiktif dengan kesimpulan dari Eq. 2.10 bahwa $\sqrt{n^2+1}$ bukan bilangan bulat, sehingga bisa disimpulakan bahwa asumsi $\neg p$: $\sqrt{n^2+1}$ adalah bilangan rasional tidak benar, yang membuktikan bahwa $\sqrt{n^2+1}$ adalah bilanga irasional. (Q.E.D.).

e.g.6: untuk bilangan prima p, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$ bukan bilangan bulat.

proof: di sini proposisi yang ingin kita buktikan adalah p: untuk bilangan prima p, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$ bukan bilangan bulat. Untuk menerapkan reductio ad absurdum, kita perlu memikirkan negasinya, $\neg p$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$ adalah bilangan bulat, kita sebut saja n.

$$n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$$

Mengalikan persamaan ini dengan $(p-1)! = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1)$, kita akan mendapatkan persamaan berikut,

$$n \times (p-1)! = (p-1)!(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}) + \frac{(p-1)!}{p}, \qquad (2.12)$$

Di sini bisa kilta lihat bahwa sebelah kiri persamaan ini adalah bilangan bulat. Dan di sebelah kanan, $(p-1)!(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1})$ juga bilangan bulat. Tetapi, $\frac{(p-1)!}{p}$ bukan bilangan bulat, karena,

$$\frac{(p-1)!}{p} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \frac{p-1}{p} \qquad (2.13)$$

Di sini terjadi kontradiksi yang absurd karena sebelah kiri persamaan menghasilkan bilangan bulat, tapi di sebelah kanan menghasilkan bilangan yang tidak bulat, sehingga asumsi bahwa $\neg p$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$ bilangan bulat tidak benar, yang berarti bahwa proposisi awal p terbukti. (Q.E.D.).

e.g.7: Contoh ini diambil dari soal logika yang terkenal, **Knight and Knave**. Ada sebuah desa di mana semua penduduknya bergolongan ksatria atau penipu. Ksatria selalu berkata jujur, dan penipu selalu berbohong. Suatu hari anda berada di desa itu dan bertemu dua orang, sebut saja A dan B. A berkata pada anda "saya adalah seorang penipu tapi B adalah seorang ksatria". Gunakan reductio ad absurdum untuk menentukan golongan kedua orang tersebut.

proof: Ada banyak cara sistematis untuk menyelesaikan soal ini. Tapi dengan reductio ad absurdum ini terselesaikan dengan sangat mudah. Pertama, apa yang dikatakan oleh A kita tulis dengan notasi logika $\neg p_1 \wedge p_2$, dimana p_1: A adalah seorang ksatria dan p_2: B adalah seorang ksatria. Untuk mengadopsi reductio ad absurdum, kita asumsikan kalau A adalah seorang ksatria. Tapi di sini terjadi kontradiksi karena seorang ksatria tidak pernah berbohong sehingga tidak mungkin A mengeluarkan proposisi "saya seorang penipu tapi B adalah seorang ksatria". Dengan begitu asumsi kita kalau A adalah seorang ksatria salah, yang artinya A adalah seorang penipu. Dan kalau A adalah penipu, maka proposisi $\neg p_1 \wedge p_2$ tidak mungkin benar, yang artinya negasinya, yang dapat ditulis dengan $p_1 \vee \neg p_2$ benar. Negasi ini berbunyi, "saya adalah seorang ksatria atau B adalah penipu", dan karena kita tahu kalau A adalah seorang penipu, satu-satunya pilihan agar negasi ini benar adalah kalau B adalah seorang penipu. Bisa kita simpulkan secara sistematis bahwa A dan B keduanya penipu. (Q.E.D.).

advance

e.g.8: buktikan bahwa $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ (Napier's constant) adalah bilangan irasional. Contoh soal ini untuk pembaca yang telah menyelesaikan kelas dasar kalkulus tingkat universitas (sekitar semester akhir semester pertama) dan sudah mengerti tentang konsep Taylor Expansion dan residuenya.

Kita tahu bahwa MacLaurin series dari e^x adalah:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}$$

Di sini R_{n+1} adalah residue dari series ini yang bisa ditulis sebagai berikut,

$$R_{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \; (0 < \theta < 1)$$

Untuk $x = 1$, kita mendapatkan,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \; (0 < \theta < 1)$$

Mengalikan persamaan ini dengan $(n+1)!$ menghasilkan,

$$n! \times e = n! \times (2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}) + \frac{e^{\theta}}{n+1} \; (0 < \theta < 1) \tag{2.14}$$

Untuk menerapkan reductio ad absurdum kita asumsikan bahwa e adalah bilangan rasional, sehingga $e = \frac{a}{b}$ di mana a dan b adalah bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor pembagi yang sama, sehingga sebelah kanan dari Eq. 2.14, $\frac{a}{b} \times n!$ adalah bilangan bulat kalau $b \leqslant n$, dan tentu saja $n! \times (2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!})$ juga bilangan bulat. Kerena $0.1cm(0 < \theta < 1)$, kita tahu bahwa,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{e^{\theta}}{n+1} < \frac{e}{n+1}$$

Dan kerena $e < 3$, Eq. 2.15 bisa kita tulis sebagai berikut,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{e^{\theta}}{n+1} < \frac{3}{n+1},$$

dan untuk $n \geqslant 2$, tidak ada bilangan bulat antara $\frac{1}{n+1}$ dan $\frac{3}{n+1}$ maka untuk $n = \max 2, b$, Eq. 2.14 kontradiktif, karena sebelah kiri persamaan menghasilkan bilangan bulat sebelah kanan tidak. Ini menunjukan bahwa asumsi e adalah bilangan rasional salah, sehingga membuktikan proposisi awal bahwa e adalah bilangan irasional. (Q.E.D.).

Review:

- Mengapa proof by contrapositive adalah argumen yang valid ? Pikirkan satu contoh soal yang sulit untuk dibuktikan secara langsung tapi mudah dibuktikan dengan argumen ini.
- Mengapa reductio ad absurdum adalah argumen yang valid ? Pikirkan satu contoh soal yang sulit untuk dibuktikan secara langsung tapi mudah dibuktikan dengan argumen ini.
- Jelaskan bahwa kita tidak dapat membuktikan $p \to q$ dengan membuktikan $q \to p$.
- Jelaskan bahwa kita tidak dapat membuktikan $p \to q$ dengan membuktikan $\neg p \to \neg q$.
- Dari contoh-contoh di atas mulai mengertilah bahwa matematika bukan melulu mempersoalkan proses hitung, tapi proses berpikir secara sistematis.

Soal Latihan

1. buktikan bahwa argumen $(\neg q \to \neg p) \vdash (p \to q)$ valid dengan menggunakan truth table.
2. buktikan bahwa argumen $(\neg p \to q), \neg q \vdash p$ valid dengan menggunakan truth table.
3. buktikan kalau n^2 ganjil maka n juga ganjil untuk n bilangan bulat.
4. untuk 2 bilangan bulat positif m, dan n, bukutikan bahwa $m^2 + n^2$ ganjil maka $m \times n$, genap.

5. untuk bilangan bulat positif m, dan n, buktikan jika n^2 adalah kelipantan bilangan prima, maka n juga kelipatan bilangan prima.
6. buktikan bila $x^2 + y^2 \leqslant 1$ maka $x \leqslant 1$ dengan reductio ad absurdum.
7. buktikan dengan reductio ad absurdum bahwa jika p bilangan prima, maka $\log p$ adalah bilangan irasional.
8. buktikan dengan reductio ad absurdum bahwa Monas tidak memuat 8 juta orang.
9. buktikan jika p bilangan prima, $\sqrt{p}$ adalah bilangan irasional.
10. buktikan jika n^2 adalah kelipatan dari bilangan prima p, maka n juga kelipatan dari p, untuk n bilangan natural.
11. buktikan bahwa untuk bilangan prima p, $\log_{10} p$ adalah bilangan irasional.
12. kita telah membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional. Dengan menggunakan pengetahuan ini, buktikan untuk 2 bilangan rasional x dan y, $x + y\sqrt{2} = 0$ hanya berlaku jika $x = y = 0$.
13. untuk bilangan natural n, setidaknya salah satu dari $\sqrt{n}$ atau $\sqrt{n+1}$ adalah bilangan irasional.
14. untuk bilangan natural x, y dan z, buktikan bahwa jika, xyz, $x + y + z$ dan $xy + xz + yz$ semuanya genap, maka x, y dan z juga genap semua.
15. varian dari contoh 7. Kalau A mengatakan "setidaknya satu diantara kita adalah penipu", tentukan golongan mereka berdua.
16. varian lain dari contoh 7. A mengatakan "kami berdua penipu" dan B mengatakan "hanya satu diantara kami yang ksatria". Tentukan golongan mereka berdua.

Chapter 3

First order logic

> The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge.
>
> Stephen Hawking

First order logic (predicate logic), lahir karena keterbatasan logika proposisi yang sudah kita pelajari.

Pikirkan proposisi, p: semua manusia akan mati, dan q: Socrates adalah manusia. Dari ini sangat masuk akal kalau kita menarik kesimpulan, r: Socrates akan mati. Tapi kita tahu, bahwa argumen $p, q \vdash r$ tidak valid, karena tidak jaminan bahwa proposisi: $(p \wedge q) \rightarrow r$ adalah toutology. Hal ini terjadi karena tidak ada cara pada logika proposisi yang menghubungkan "semua orang" dan "Socrates", sehingga proposisi "semua orang akan mati", dan "socrates akan mati" harus diperlakukan sebagai dua proposisi yang tidak berhubungan.

Ketiakmampuan menghubungkan sesuatu yang umum (misalnya, "semua orang", atau "ada orang"), dan sesuatu yang spesifik (di sini "Socrates") sangat membatasi kemampuan berekspresi logika proposisi. Hal ini "dikoreksi" dengan First Order Logic (Predicate Logic). Alasan, sistem logika ini disebut "First order" akan diterangkan di akhir chapter ini karena ada juga sistem logika yang disebut Second Order Logic.

3.1 Himpunan dan notasi dasarnya

Teori dasar himpunan akan dibahas pada chapter berikut, tapi untuk menerangkan first order logic, sangat perlu untuk mengenal notasi dasar himpunan.

Definisi dari himpunan adalah kumpulan dari sesuatu yang anggotanya dapat ditentukan secara definitif (definisi yang lebih lengkap dengan contohnya akan diberikan pada chapter berikut). Notasi himpunan biasanya ditulis dengan huruf besar, seperti $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Di sini, a_1 adalah anggota atau komponen dari himpunan A, dan ditulis $a_1 \in A$, begitu pula $a_2, a_3, \ldots a_n$. Di sini b **bukan** anggota dari himpunan A, yang ditulis dengan $b \notin A$. Misalnya jika N adalah himpunan bilangan natural maka $5 \in N$ tetapi $\frac{1}{2} \notin N$.

3.2 First order logic: membaca dan menulis

Di chapter ini akan dibahas dua notasi baru yang diperlukan untuk mengekspresikan proposisi dalam first order logic, cara membaca proposisi dengan notasi-notasi tersebut dan setelahnya cara menulis proposisi yang sistematis.

3.2.1 Propositional Function, fungsi proposisi

Kalau pada logika proposisi obyek dari logika adalah proposisi, pada first order logic (predicate logic) obyeknya adalah sesuatu yang disebut **propositional function** (fungsi proposisi) atau **predicate**.

Fungsi proposisi ini ditulis dengan notasi sebagai berikut:

$P(x)$, $x \in X$

Contohnya: $P(x)$: x makan sate dan X adalah himpunan semua umat manusia yang masih hidup. Misalnya x=Joko, maka $P(Joko)$ dibaca "Joko makan sate".

Harus dimengerti bahwa $P(x)$ adalah fungsi proposisi tapi bukan proposisi, karena definisi proposisi adalah statement yang benar/tidaknya dapat ditentukan secara definitif, sedangkan nilai $P(x)$ tidak dapat ditentukan sebelum variabel x ditentukan. Jadi, $P(x)$ bukan sebuah proposisi, tapi $P(Joko)$ adalah proposisi.

Jumlah variabel dari fungsi proposisi ini tidak terbatas hanya satu, misalnya:

$P(x, y)$: x dan y adalah saudara kandung.

$P(x, y, z)$: x dan y bertanding badminton pada hari z di mana $x \in X$, $y \in X$, $z \in D$ (X adalah himpunan seluruh manusia yang masih hidup dan $D = \{Senin, Selasa, \ldots, Minggu\}$).

Negasi dari fungsi proposisi ini ditulis $\neg P(x)$, dan dengan contoh di atas

- $\neg P(x)$: x tidak makan sate
- $\neg P(x, y)$: x dan y bukan saudara kandung
- $\neg P(x, y, z)$: x dan y tidak bertanding badminton pada hari z

Perlu dimengerti bahwa dalam menegasikan fungsi proposisi yang dinegasikan bukan variabelnya tapi predicate-nya. Contoh negasi yang **salah** dengan menggunakan fungsi proposisi di atas:

- $\neg P(x)$: *bukan* x yang makan sate
- $\neg P(x, y)$: x dan *seseorang yang bukan* y adalah saudara kandung
- $\neg P(x, y, z)$: x dan y bertanding badminton bukan pada hari z

3.2.2 Universal Quantifier

Universal quantifier yang dinotasikan dengan $\forall$ untuk melambangkan konsep "**semua**". Lambang ini ditulis dengan huruf A(all) yang dibalik.

$\forall x \in X\ P(x)$ dibaca, **semua** x memenuhi $P(x)$.

Misalnya X adalah himpunan murid suatu sekolah (sebut saja SMA Antahberantah), dan $P(x)$ adalah fungsi proposisi: x makan sate. Maka $\forall x \in X\ P(x)$ dibaca "semua murid SMA Antahberantah, makan sate". Sering juga, penulisan disingkat $\forall x\ P(x)$ kalau X jelas dari konteks diskusi.

Definisi formal dari $\forall x \in X\ P(x)$ sebagai berikut.

Untuk $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

$$\forall x \in X\ P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \tag{3.1}$$

Misalnya: $P(x)$: x makan sate dan $X = \{Joko, Bowo, Harto, Wati\}$ adalah himpunan anak-anak yang tinggal di suatu rusun A. Maka $\forall x \in P(x)$ dibaca "semua anak di rusun A makan sate" yang menurut definisi di Eq. 3.1 equivalent dengan proposisi: $P(Joko) \wedge P(Bowo) \wedge P(Harto) \wedge P(Wati)$ yang tentunya dibaca: "Joko makan sate dan Bowo makan sate dan Harto makan sate dan Wati makan sate". Proposisi $\forall x P(x)$ ini bernilai 1 kalau $P(Joko) \equiv 1$, $P(Bowo) \equiv 1$, $P(Harto) \equiv 1$ dan $P(Wati) \equiv 1$, atau semua anak anggota himpunan X makan sate. Proposisi ini bernilai 0 kalau setidaknya salah satu dari anak-anak ini tidak makan sate.

Beberapa contoh lain,

e.g.1: $P(x)$: gunung x lebih tinggi dari Mt. Everest, dan X adalah himpunan gunung di seluruh Indonesia, maka $\forall x \in X\ P(x)$, dapat dibaca "Seluruh gunung di Indonesia lebih tinggi dari Mt. Everest" yang tentu saja nilainya 0.

e.g.2: Jika $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil, maka proposisi $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \times 1 = x)$ bernilai 1, karena benar bahwa untuk setiap bilangan riil x, x dikalikan 1 akan menghasilkan x itu sendiri.

e.g.3: Jika $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil, maka proposisi $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \times \frac{1}{x} = 1)$ bernilai 0, karena ada bilangan riil x di mana $x \times \frac{1}{x} \neq 1$, yaitu $x = 0$.

e.g.4: Jika $P(x)$: x seorang pria, X adalah himpunan seluruh orang yang pernah menjadi presiden RI, maka proposisi $\forall x \in X\ P(x)$ dibaca seluruh orang yang pernah menjadi presiden RI adalah pria, yang tentu nilainya 0 karena pernah ada presiden RI yang wanita.

3.2.3 Existential Quantifier

Existensial quantifier yang dinotasikan dengan$\exists$ melambangkan konsep "**ada**" atau "**setidaknya satu**".

$\exists x \in X\ P(x)$ dibaca, "ada x (diantara X) yang $P(x)$" atau "setidaknya satu dari X adalah $P(x)$".

Definisi formal dari $\exists x \in X\ P(x)$ sebagai berikut,

Untuk $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

$$\exists x \in X\ P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \ldots \vee P(x_n) \tag{3.2}$$

Misalnya X adalah himpunan murid suatu sekolah (sebut saja SMA Antahberantah), dan $P(x)$ adalah fungsi proposisi: x tidak naik kelas. Maka $\exists x \in X\ P(x)$ dapat dibaca "Ada murid SMA Antahberantah yang tidak naik kelas", atau "Setidaknya satu dari murid SMA Antahberantah tidak naik kelas", yang menurut definisi Eq. 3.2, equivalent dengan proposisi: $P(Joko) \vee P(Bowo) \vee P(Harto) \vee P(Wati)$ yang tentunya dibaca: "Joko tidak naik kelas atau Bowo tidak naik kelas atau Harto tidak naik kelas atau Wati tidak naik kelas".

Beberapa contoh lain,

e.g.1: $P(x)$: gunung x lebih tinggi dari Mt. Everest, dan X adalah himpunan gunung di seluruh Indonesia, maka $\exists x \in X\ P(x)$, dapat dibaca "Ada gunung di Indonesia yang lebih tinggi dari Mt. Everest" yang nilainya 0.

e.g.2: Jika $P(x)$: x seorang pria, X adalah himpunan seluruh orang yang pernah menjadi presiden RI, maka proposisi $\exists x \in X\ P(x)$ dibaca "ada pria yang pernah menjadi presiden RI", yang tentu nilainya 1, karena beberapa presiden RI pria.

e.g.3: Jika $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil, maka proposisi $\exists x \in \mathbb{R}\ (5 \times x = 1)$ bernilai 1, karena ada bilangan riil x di mana $5 \times x = 1$, yaitu $x = \frac{1}{5}$.

e.g.4: Jika $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan natural, maka proposisi $\exists x \in \mathbb{N}\ (5 \times x = 1)$ bernilai 0, karena tidak ada bilangan natural x di mana $5 \times x = 1$.

3.2.4 Negasi dan proposisi dengan beberapa quantifier

Apa negasi dari $\forall x\ P(x)$? Ini tampaknya rumit, tapi karena dari definisi formal $\forall x\ P(x)$ dan hukum De Morgan, negasi dari proposisi ini bisa didaptkan secara sistematis sebagai berikut. Jika $x \in X = \{x_1, x_2, x_3. \ldots, x_n\}$

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x\ P(x)) &= \neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots \wedge P(x_n)) \\
&= (\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \neg P(x_3) \vee \ldots \vee \neg P(x_n) \\
&= \exists x\ \neg P(x) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Dari Eq. 3.3 bisa disimpulkan bahwa negasi dari "semua ..." equivalent dengan "ada yang tidak...". Tentu saja ini intuitif, karena negasi dari "semua..." adalah "tidak benar kalau semua..." yang tentu saja dengan kata lain "ada yang tidak...".

e.g.1: X adalah himpunan murid suatu SMA Antahberantah sebagai berikut $X = \{$Joko, Bowo, Harto, Wati $\}$ dan $P(x)$: x naik kelas. Proposisi $\forall x\ P(x)$ dibaca "semua murid SMA Antahberantah naik kelas". Negasinya tentu saja: "tidak semua murid SMA Antahberantah naik kelas" yang dari Eq. 3.3 equivalent dengan, "Ada murid SMA Antahberantah yang **tidak** naik kelas", karena negasi ini equivalent dengan "Joko tidak naik kelas atau Bowo tidak naik kelas atau Harto tidak naik kelas atau Wati tidak naik kelas".

e.g.2: Jika $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $\forall x \in Z\ (\frac{x}{x} = 1)$ dibaca, "Untuk semua bilangan bulat x, $\frac{x}{x}$ adalah 1. Negasinya berbunyi: "Tidak untuk semua bilangan bulat x, $\frac{x}{x} = 1$", yang equivalent dengan "ada bilangan bulat x yang tidak memenuhi $\frac{x}{x} = 1$ yang dalam notasi matematika ditulis $\exists x \in Z\ (\frac{x}{x} \neq 1)$

Negasi dari $\exists x\ P(x)$ juga bisa diturunkan dengan proses yang sama sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \neg(\exists x\ P(x)) &= \neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \ldots \vee P(x_n)) \\ &= \neg P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \\ &= \forall x\ \neg P(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dari Eq. 3.4 bisa disimpulkan bahwa negasi dari "ada yang ..." equivalent dengan "semua tidak ...". Ini juga intuitif karena negasi dari "ada yang..." adalah "tidak ada yang..." yang tentu saja equivalent dengan "semua tidak...".

e.g. 4: Meminjam contoh dari contoh 1. di atas, proposisi $\exists x\ P(x)$ bunyinya: "ada murid SMA Antahberantah yang naik kelas". Tentu saja negasi dari proposisi ini adalah "tidak ada murid SMA Antahberantah yang naik kelas" yang tentu saja equivalent dengan "semua murid SMA Antahberantah **tidak** naik kelas". Eq. 3.4 mengekspresikan ini dengan, "Joko tidak naik kelas dan Bowo tidak naik kelas dan Harto tidak naik kelas serta Wati tidak naik kelas.

e.g.5: Jika $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil, maka negasi dari proposisi $\exists x \in \mathbb{R}(x^2 + 1 = 0)$ ("ada bilangan riil yang memenuhi persamaan $(x^2 + 1 = 0)$"), adalah $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 + 1 \neq 0)$ yang dibaca, "semua bilangan riil tidak memenuhi persamaan $(x^2 + 1 = 0)$.

Quantifier memungkinkan kita untuk mengekspresikan berbagai macam proposisi secara elegan. Tentu mengekspresikan proposisi kadang2 diperlukan beberapa quantifier. Tidak ada batasan jumlah quantifier dari sebuah proposisi.

Misalnya, e.g.6: $X = \{$Joko, Bowo, Harto, Wati $\}$ adalah himpunan murid dari SMA Antahberantah, $Y = \{$matematika, fisika, kimia $\}$ adalah himpunan mata pelajaran di SMA tersebut, dan $p(x, y)$: x lulus mata pelajaran y, maka:

1. $\forall y \in Y P(Joko, y)$: Joko lulus semua mata pelajaran.

2. $\forall y \in Y \neg P(Bowo, y)$: Bowo tidak lulus semua mata pelajaran.

3. $\exists y \in Y \neg P(Wati, y)$: ada mata pelajaran yang Wati tidak lulus.

4. $\forall x \in X P(x, matematika)$: semua murid lulus mata pelajaran matematika.

5. $\exists x \in X\ \neg P(x, fisika)$: ada murid yang tidak lulus mata pelajaran fisika.

e.g.7: meminjam dari contoh 6,

$\forall x \forall y\ P(x, y)$ (untuk memudahkan penulisan himpunan X dan Y tidak ditulis, ini sering dilakukan kalau konteks proposisi ini sudah jelas). Membaca proposisi dengan beberapa quantifier sama dengan membaca kalimat dalam bahasa Indonesia. Proposisi ini harus dibaca dari kiri ke kanan. Karena itu, secara sistematis proposisi ini dibaca, "utk semua x (yang dalam konteks ini murid) dan setiap y (yang dalam hal ini berarti mata pelajaran) berlaku P(x,y)", dan dalam bahasa Indonesia sehari-hari ini diekspresikan dengan: "**semua murid lulus dalam semua mata pelajaran**". Arti proposisi ini dapat diperjelas dengan manipulasi formula sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\forall x \forall y P(x, y) &\equiv \forall x\ (P(x, matematika) \wedge P(x, fisika) \wedge P(x, kimia)) \\
&\equiv (P(Joko, matematika) \wedge P(Joko, fisika) \wedge P(Joko, kimia)) \wedge \\
&\quad (P(Bowo, matematika) \wedge P(Bowo, fisika) \wedge P(Bowo, kimia)) \wedge \\
&\quad (P(Harto, matematika) \wedge P(Harto, fisika) \wedge P(Harto, kimia)) \wedge \\
&\quad (P(Wati, matematika) \wedge P(Wati, fisika) \wedge P(Wati, kimia))
\end{aligned}$$

e.g.8: bagaimana dengan $\forall x \exists y P(x, y)$? Proposisi ini perlu secara sistematis dibaca dari kiri ke kanan dengan "untuk semua x ada y yang memenuhi $P(x, y)$, dan dari contoh di atas ini dapat diterjemahkan kedalam bahasa Indonesia sebagai: "**Semua murid lulus setidaknya satu mata pelajaran**". Dengan manipulasi formula proposisi ini dapat diterangkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\forall x \exists y P(x, y) &\equiv \forall x (P(x, matematika) \vee P(x, fisika) \vee P(x, kimia)) \\
&\equiv (P(Joko, matematika) \vee P(Joko, fisika) \vee P(Joko, kimia)) \wedge \\
&\quad (P(Bowo, matematika) \vee P(Bowo, fisika) \vee P(Bowo, kimia)) \wedge \\
&\quad (P(Harto, matematika) \vee P(Harto, fisika) \vee P(Harto, kimia)) \wedge \\
&\quad (P(Wati, matematika) \vee P(Wati, fisika) \vee P(Wati, kimia))
\end{aligned}$$

e.g.9: dari contoh sebelumnya kita sudah dapat membaca proposisi $\forall x \exists y P(x, y)$. Samakah ini dengan proposisi $\exists y \forall x P(x, y)$? Proposisi ini juga harus dengan berhati-hati dibaca secara sistematis dari kiri ke kanan dengan: "ada y yang untuk semua x berlaku $P(x, y)$, dan dengan contoh sebelumnya dapat diekspresikan dalam bahasa Indonesia dengan: "**ada mata pelajaran di mana semua murid lulus**". Dengan ini secara kita tahu bahwa membalik urutan quantifier merubah arti proposisi. $\exists y \forall x P(x, y)$ sama sekali berbeda dengan $\forall x \exists y P(x, y)$.Dengan manipulasi formula proposisi ini bisa diterangkan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\exists y \forall x P(x,y) &\equiv \exists y(P(Joko,y) \wedge P(Bowo,y) \wedge P(Harto,y) \wedge P(Wati,y)) \\
&\equiv (P(Joko,mat) \wedge P(Bowo,mat) \wedge P(Harto,mat) \wedge P(Wati,mat)) \vee \\
&\quad\; (P(Joko,fisika) \wedge P(Bowo,fisika) \wedge P(Harto,fisika) \wedge P(Wati,fisika)) \vee \\
&\quad\; (P(Joko,kimia) \wedge P(Bowo,kimia) \wedge P(Harto,kimia) \wedge P(Wati,kimia))
\end{aligned}
$$

Bukti bahwa $\exists y \forall x P(x,y) \neq \forall x \exists y P(x,y)$ secara umum sebagai berikut. Jika $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan $Y = y_1, y_2, \ldots, y_m$, maka,

$$
\begin{aligned}
\exists y \forall x P(x,y) &\equiv \exists y(P(x_1,y) \wedge P(x_2,y) \wedge \ldots \wedge P(x_n,y)) \\
&\equiv (P(x_1,y_1) \wedge P(x_2,y_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n,y_1)) \vee \\
&\quad\; (P(x_1,y_2) \wedge P(x_2,y_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n,y_2)) \vee \\
&\quad\; \vdots \\
&\quad\; (P(x_1,y_m) \wedge P(x_2,y_m) \wedge \ldots \wedge P(x_n,y_m))
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Eq. 3.5, masih dapat diteruskan sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
\exists y \forall x P(x,y) &\equiv (P(x_1,y_1) \vee P(x_1,y_2) \vee \ldots \vee P(x_1,y_m)) \wedge \\
&\quad\; (P(x_2,y_1) \vee P(x_2,y_2) \vee \ldots \vee P(x_2,y_m)) \vee \\
&\quad\; \vdots \\
&\quad\; (P(x_n,y_1) \vee P(x_n,y_2) \vee \ldots \vee P(x_n,y_m)) \wedge Q
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Pada Eq. 3.6, Q adalah komponen silang pada formula di Eq. 3.5, sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
Q &\equiv (P(x_1,y_1) \vee P(x_2,y_2) \vee \ldots) \wedge \\
&\quad\; (P(x_2,y_1) \vee P(x_1,y_2) \vee \ldots) \wedge \\
&\quad\; \vdots \\
&\quad\; (P(x_n,y_1) \vee P(x_1,y_2) \vee \ldots)
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

sehingga Eq. 3.6 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\exists y \forall x P(x,y) \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge Q$$

dan karena nilai $\exists y \forall x P(x,y)$ dipengaruhi oleh nilai Q, bisa disimpulakan bahwa,

$$\exists y \forall x P(x,y) \not\equiv \forall x \exists y P(x,y) \tag{3.8}$$

(Q.E.D).

e.g.10: buktikan bahwa $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$
Untuk $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

$$
\begin{aligned}
\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) &\equiv ((P(x_1) \lor P(x_2) \lor \ldots P(x_n)) \lor \\
& \quad ((Q(x_1) \lor Q(x_2) \lor \ldots Q(x_n)) \\
&\equiv (P(x_1) \lor Q(x_1)) \lor (P(x_2) \lor Q(x_2)) \lor \ldots \lor (P(x_n) \lor Q(x_n)) \\
&\equiv \exists x (P(x) \lor Q(x))
\end{aligned}
$$

(Q.E.D.)

e,g.11: buktikan bahwa $\exists x P(x) \land \exists x Q(x) \not\equiv \exists x (P(x) \land Q(x)$

e.g.12: buktikan bahwa $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ adalah tautology. Secara intuitif kita tahu kalau proposisi ini tautology. Dengan contoh riil X adalah himpunan SMA Antahberantah, dan $P(x)$: x naik kelas. Di sini sangat mudah untuk menarik kesimpulan, bahwa "kalau semua murid naik kelas, maka ada murid yang naik kelas" adalah tautology. Tapi sekali lagi, intuisi bukan bukti matematis. Karena itu soal ini harus dibuktikan secara definitif.

$$
\begin{aligned}
\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) &\equiv \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x P(x) \\
&\equiv \exists x \neg P(x) \lor \exists x P(x) \\
&\equiv \exists x (\neg P(x) \lor P(x)) \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

(Q.E.D.)

e.g.12: buktikan bahwa $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ adalah tautology.

Review:

- sekali lagi pikirkan arti dari universal quantifier $\forall$ dan existensial quantifier $\exists$. Penting untuk mengerti artinya dan bukan menghapal.
- sekali lagi buktikan bahwa $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$ dan pikirkan artinya.
- sekali lagi buktikan bahwa $lnot(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$ dan pikirkan artinya.
- konfirmasi sekali lagi manipulasi formula di Eq.3.6 dengan menggunakan contoh riil dari contoh 6.

Kalau selama ini kita telah belajar untuk membaca formula logika secara sistematis, kita juga perlu bisa untuk menulis formula logika yang sebisa mungkin mudah untuk dibaca oleh orang lain. Kemampuan untuk menuliskan formula logika dengan baik, sama dengan kemampuan berbahasa di mana sangat penting untuk mengekspresikan sesuatu agar pendengar atau pembaca kita menangkap maksud kita dengan jelas. Masih sama dengan kemampuan berbahasa, formula logika yang baik harus diekspresikan dengan sesingkat mungkin, tapi tidak lebih singkat dari yang diperlukan. Dalam matematika ekspresi semacam ini disebut ekspresi yang elegan.

e.g.13: ekspresikan proposisi: ”semua murid SMA Antahberantah mempunyai buku tulis”. Di sini ada dua hal yang perlu diekspresikan, yang pertama seseorang adalah murid SMA Antahberantah dan yang kedua adalah seseorang mempunyai buku tulis. Karena tidak ada batasan apa-apa kita bisa menganggap kalau himpunan yang kita pikirkan adalah himpunan seluruh manusia, yang kita notasikan dengan M. Dalam soal ini, kita juga harus mengekspresikan ”semua”, sehingga kita kita harus menggunakan notasi $\forall$.

Untuk mempermudah penulisan prosisi: ”semua murid SMA Antahberantah mempunyai buku tulis”, kita dapat mengatakan ”kalau seseorang adalah murid SMA Antahberantah, maka dia mempunyai buku tulis. Sehingga, kalau $P(x)$: x adalah murid SMA Antahberantah, dan $Q(x)$: x mempunyai buku tulis, maka proposisi di atas dapat ditulis dengan:

$$\forall x \in H(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Terangkan mengapa prosisi ini tidak dapat ditulis dengan,

$$\forall x \in H(P(x) \wedge Q(x))$$

Proposisi ini jauh lebih mudah ditulis kalau kita hanya memikirkan himpunan murid SMA Antahberantah, A. Proposisi ini dapat ditulis dengan:

$$\forall x \in A \; Q(x)$$

Contoh di atas memberi ilustrasi, bahwa formula logika pun mirip dengan bahasa yang kita gunakan sehari-hari, banyak cara untuk mengekspresikan sesuatu yang sama. Yang penting adalah cara penyampaian agar pembaca mudah menangkap apa yang ingin diekspresikan. Sangat esensial untuk mendefinisikan dengan jelas fungsi proposisi yang memungkinkan kita untuk mengekspresikan proposisi logika yang kita tuju. Untuk itu kita perlu mempunyai kerapihan pikiran yang hanya dapat didapatkan dari banyak berlatih.

e.g.14: ekpresikan ”semua murid SMA Antahberantah mempunyai teman baik”. Di sini ada dua hal penting yang harus diespresikan. Pertama, seseorang adalah murid dari SMA Antahberantah, dan kedua, orang tersebut mempunyai teman baik. Satu hal lagi, berkaitan dengan hal kedua di atas, agar proposisi ini berlaku, setidaknya perlu adanya 2 orang, sehingga perlu ada fungsi proposisi dengan 2 variabel.

Kita bisa mulai dari himpunan semua manusia H, dan $P(x)$: x adalah murid SMA Antahberantah, dan $Q(x, y)$: y adalah teman baik dari x.

Proposisi ini dapat kita ekspresikan dengan: ”untuk **semua** orang, kalau dia adalah murid dari SMA Antahberantah, maka **ada** setidaknya seorang yang menjadi teman baiknya. Sehingga proposisi ini bisa diekspresikan dengan sebagai berikut.

$$\forall x \in H \; (P(x) \rightarrow \exists y \in H \; Q(x, y)$$

Atau, karena x dan y sama-sama anggota dari himpunan H, proposisi logika ini bisa disingkat menjadi,

$$\forall x \exists y\ (P(x) \rightarrow Q(x, y))$$

e.g.15: bagaimana dengan "semua orang punya teman baik". Tentu ini lebih mudah dari contoh sebelumnya, karena syarat bahwa seseorang itu murid SMA Antahberantah tidak ada. Ini dapat dieskpresikan sebagai berikut.

$$\forall x \exists y\ Q(x, y)$$

e.g.16: ekspresikan "semua murid SMA Antahberantah mempunyai hanya seorang teman baik". Syarat "hanya seorang" di sini membuat proposisi ini sulit di ekspresikan dengan formula logika karena tidak dapat hanya diekspresikan dengan simbol *exists* yang mengandung arti "ada" atau "setidaknya seorang".

Di sini "hanya seorang" dapat diekspresikan dengan "kalau y adalah teman baik x, maka orang-orang selain y (misalnya z), bukan teman baik x, sehingga.

$$\forall x \in H\ \exists y \in H(P(x) \rightarrow (Q(x, y) \wedge (\forall z \in H(z \neq y) \rightarrow \neg Q(x, z))))$$

Karena semua adalah komponen dari himpunan H, maka formula di atas dapat diringkas menjadi sebagai berikut.

$$\forall x\ \exists y\ (P(x) \rightarrow (Q(x, y) \wedge (\forall z(z \neq y) \rightarrow \neg Q(x, z))))$$

Soal Latihan

1. Dalam $\varepsilon - \delta$ theorem, definisi formal $\lim_{x \to a}$ f(x)=b ditulis sebagai berikut
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.$\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
   Bacalah definisi ini dengan seksama, dan pahami artinya.

2. Tentukan benar tidaknya proposisi di contoh 5 dan negasinya.

3. Buat satu contoh nyata yang intuitif untuk menerangkan contoh 10.

4. Buat satu contoh nyata yang intuitif untuk menerangkan contoh 11.

5. Jika $a \in X$, buktikan bahwa $\forall x \in X P(x) \rightarrow P(a)$ adalah tautology.

6. Jika $a \in X$, buktikan bahwa $\exists x \in X P(x) \rightarrow P(a)$ bukan tautology.

7. Buktikan bahwa $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x))$, serta satu contoh nyatanya yang intuitif.

8. Buktikan bahwa $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \not\equiv \forall x(P(x) \vee Q(x))$, serta satu contoh nyatanya yang intuitif.

9. Buktikan bahwa $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ bukan tautology, dan tunjukkan satu contoh yang intuitif.

10. Meminjam himpunan dari contoh 6, ekspresikan "Hanya Bowo yang tidak lulus matematika".

11. Meminjam himpunan dari contoh 6, ekspresikan "Semua murid SMA Antahberantah selain Wati lulus setidaknya satu mata pelajaran".

12. Ekspresikan negasi dari contoh 13, jelaskan kesimpulan itu.

13. Ekspresikan negasi dari contoh 14, jelaskan kesimpulan itu.

14. Ekspresikan "ada murid SMA Antahberantah yang berteman baik dengan semua murid SMA Antahberantah.

15. Kalau $Q(x, y, z)$: x belajar mata pelajaran y pada hari z di mana x adalah komponen dari himpunan seluruh murid SMA Antahberantah, y adalah komponen dari himpunan semua mata pelajaran di SMA Antahberantah, dan z adalah nama hari, ekspresikan:

    - ada hari di mana seluruh murid SMA Antahberantah belajar setidaknya satu mata pelajaran.
    - ada mata pelajaran yang dipelajari setiap hari oleh seluruh siswa SMA Antahberantah.
    - ada murid SMA Antahberantah yang tidak belajar apapun setiap hari.
    - tidak ada pelajaran yang dipelajari oleh semua murid SMA Antahberantah setiap hari.
    - hanya ada satu mata pelajaran yang setiap hari dipelajari oleh seluruh murid SMA Antahberantah.

16. Ekspresikan negasi dari contoh 15 dan jelaskan kesimpulan itu.

3.3 Penutup

Di chapter 1 sampai 3, telah dibahas tentang **dasar** dari logika. Sejauh ini kita sudah belajar mengenai logika proposisi serta operandnya, argumen dan validitasnya, serta logika predikat sebagai ekstensi dari logika proposisi untuk mengekspresikan proposisi logika yang tidak terekpresikan dengan logika prosisi. Apa yang sudah kita pelajari di sini adalah sesuatu yang sangat mendasar untuk apa yang disebut formal logic (logika formal). Sekali lagi, kita baru mempelajari dasar dari logika yang masih sangat dangkal dibandingkan cangkupan logika. Dasar ini dapat menjadi modal yang kuat untuk mempelajari logika dan ilmu-ilmu relevan yang lebih dalam.

Pada Chapter 3 kemampuan berekspresi kita dalam berlogika bertambah dengan menggunakan quantifier. Tapi di sini kita hanya meng-kuantisasi variabel dari suatu fungsi logika, sedangkan fungsi logikanya sendiri tidak ter-kuantisasi. Dengan keterbatasan ini kita tidak bisa mengekspresikan prosisi yang misalnya berbunyi "Ada suatu fungsi di mana untuk semua x....". Kita membutuhkan ekstensi logika baru untuk menghilangkan keterbatasan ini, **Second order logic**, yang ada di luar jangkauan Matematika Minimum ini.

Logika yang kita pelajari di sini juga akan menjadi modal kita untuk mempelajari aljabar "digital" dengan variabel $0, 1$, yang disebut **Boolean Algebra**. Boolean algebra ini akan menjadi dasar untuk mempelajari **digital circuit**, rangkain (elektro) digital yang komponennya adalah fungsi logika. Semua alat elektronika masa ini dibuat berdasarkan digital circuit ini. Boolean Algebra juga sangat relevan dengan teknik programming, apapun programming language yang digunakan.

Beberapa tahun terakhir ini terjadi lonjakan aplikasi **Artificial Intelligence, AI** pada berbagai macam bidang. AI modern praktis sinonim dengan Neural Networks (jaringan saraf buatan), tapi tidak selalu demikian. AI klasik (**Symbollic AI**) adalah implementasi logika di atas komputer. Tujuan AI klasik adalah membuat komputer yang dapat melakukan prosedur logika seperti manusia. Di bidang AI, akhir-akhir mulai banyak ide untuk menggabungkan AI klasik dengan AI modern, sehingga kemampuan berlogika masih sangat relevan dalam bidang ini.

Akhir kata, sejauh kita perlu berinteraksi dengan orang lain, atau pun mesin semacam komputer, kita perlu semacam **rules of engagment** (aturan bermain), dan "rules" itu tidak lain adalah logika.

Chapter 4

Teori Dasar Himpunan

The essence of mathematics is in its freedom.

Georg Cantor

4.1 Definisi, Ekspresi dan Notasi

Sebelum mempelajari teori himpunan, perlu untuk mendefinisikan apa itu himpunan. Himpunan adalah kumpulan sesuatu. Tapi ada syarat lain, "sesuatu" itu harus memenuhi satu syarat yang definitif. Artinya, kalau kita memilih "sesuatu" secara acak, kita bisa secara definitif menentukan apakah sesuatu itu bisa kita masukkan ke dalam himpunan yang kita maksudkan atau tidak.

Misalnya, kumpulan gunung yg tinggi bukan himpunan, karena kita tidak mendefinsikan apa itu "gunung tinggi", sehingga kalau kita memilih satu gunung secara acak kita tidak bisa menentukan apakah gunung itu bisa kita masukkan dalam himpunan itu atau tidak. Sebaliknya, kumpulan gunung yang tingginya lebih dari 3000 m adalah himpunan, karena kalau kita memilih satu gunung secara acak, kita bisa menentukan secara definitif apakah gunung itu bisa menjadi anggota himpunan kita atau tidak.

Contoh lain, kumpulan orang kaya, bukan himpunan, tapi kumpulan orang yang berharta di atas Rp. 5 milyar adalah himpunan. Kumpulan bilangan prima adalah himpunan, begitupula dengan kumpulan bilangan genap.

Dalam matematika, biasanya himpunan disimbulkan dengan huruf besar, dan ada beberapa himpunan baku.

1. $\mathbb{N}$: himpunan seluruh bilangan natural
2. $\mathbb{R}$: himpunan seluruh bilangan riil
3. $\mathbb{Z}$: himpunan seluruh bilangan bulat
4. $\mathbb{Q}$: himpunan seluruh bilangan rasional
5. $\mathbb{C}$: himpunan seluruh bilangan kompleks

Ada beberapa tatacara untuk mengekspresikan himpuna, elemennya dan bagian dari himpunan yang perlu diketahui sebelum mempelajari teori himpunan lebih dalam.

1. **elemen**: elemen adalah sesuatu yang menjadi anggota dari suatu himpunan. Misalnya Bromo adalah element dari himpunan gunang yang ada di Indonesia, atau 1 adalah element dari himpunan bilangan bulat. Hal ini diekspresikan dengan simbol $\in$. Dengan contoh di atas, kalau M adalah himpunan gunung di Indonesia maka $Bromo \in M$, atau $1 \in Z$. Sebaliknya, "bukan elemen" dilambangkan dengan $\notin$. Misalnya, "Kilimanjaro bukan elemen himpunan gunung di Indonesia" diekspresikan dengan $Kilimanjaro \notin M$, juga $\frac{2}{3} \notin Z$.

2. **notasi himpunan**: ada dua cara untuk mengekspresikan himpunan.

   - **Notasi Eksplisit**: Notasi eksplisit adalah cara mengekspresikan suatu himpunan dengan menuliskan semua elemennya, misalnya
     $A = \{$Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu, Minggu$\}$, untuk mengekspresikan himpunan nama hari dalam satu minggu. Kalaupun tidak ditulis semua, ini satu cara untuk agar pembaca dapat dengan mudah "menebak" elemen yang tidak ditulis, misalnya, $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$. Himpunan yang banyak elemennya tak terhingga juga bisa diekspresikan dengan cara ini, misalnya, himpunan bilangan natural, $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, himpunan bilangan bulat, $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, himpunan bilangan ganjil positif, $O_+ = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dan sebagainya. Ekspresi ini mudah untuk dituliskan tapi tidak selalu mudah untuk dimanupulasi secara matematis, karena itu kita butuh ekspresi yang lainnya.

   - **Notasi implisit** Notasi implisit adalah cara untuk mengekspresikan himpunan dengan lebih efisien dibandingkan notasi eksplisit. Kalau pada notasi eksplisit elemen dari himpunan perlu ditulis, pada notasi implisit, cukup aturan atau formula yang menjadi agar "sesuatu" menjadi elemen dari himpunan tersebut.

     Secara umum notasi implisit ditulis sebagai berikut:

     $$A = \{x|P(x)\} \tag{4.1}$$

     Ini dibaca: himpunan A beranggota x yang memenuhi syarat (proposisi) $P(x)$. Perhatikan pada notasi implisit yang ditulis adalah syaratnya, bukan elemennya sendiri seperti pada notasi eksplisit.

     e.g.1: $A = \{x \in R|x^2 - 1 = 0\}$, yang artinya: A adalah himpunan bilangan riil yang memenuhi syarat $x^2 - 1 = 0$. Tentu himpunan ini bisa ditulis secara eksplisit dengan $A = \{-1, 1\}$.

     Notasi implisit bisa juga ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

     $$A = \{P(x)|x \in B\} \tag{4.2}$$

     Ini dibaca; himpunan A berangotakan $P(x)$ dimana x adalah anggota himpunan B (bedakan ini dengan definisi di Eq. 4.1.

     e.g.2: $A = \{2x - 1|x \in N\}$, yang artinya: A adalah himpunan yang anggotan adalah bilangan $2x - 1$, di mana x adalah bilangan natural. Tentu saja secara eksplisit ini bisa ditulis $A = \{1, 3, 5, \cdots\}$ (himpunan bilangan ganjil positif).

Untuk lebih memperjelas beda dari dua notasi implisit ini, kalau $y \in \{x|P(x)\}$, maka $\exists x(x = y \wedge P(x) \equiv 1)$ dan kalau $y \in \{P(x)|x \in B\}$, maka $\exists x(y = P(x))$.

Dalam bermatematika sangat penting untuk pertama-tama bisa membaca dan mengartikan notasi dengan benar, setelah itu dapat mengekspresikan sesuatu yang kita maksud dengan notasi yang bukan saja benar tapi elegan (tidak panjang, bertele-tele). Definisi explisit di atas juga sekali lagi menekankan perlunya kemampuan untuk membaca dan menulis ekspresi logika.

3. **Null Set, Empty Set (himpunan kosong),** $\emptyset$: Null set adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota, misalnya himpunan manusia yang tingginya lebih dari 3 meter, himpunan gunung di Indonesia yang lebih tinggi dari Mt. Everest, himpunan bilangan riil x, yang memenuhi persamaan $x^2 = -1$.

4. **Universal Set,** U: adalah "semesta" dari himpunan yang menjadi perhatian. Misalnya kalau $A = \{Joko, Wati, Rudy\}$ maka universal setnya adalah "seluruh penduduk Indonesia", atau "seluruh umat manusia". Kalau $B = \{2, 3, -5, 10\}$, maka universal setnya adalah seluruh bilangan bulat, atau bisa juga seluruh bilangan riil.

Review:

- Apa definisi himpunan
- Arti dari notasi eksplisit dan notasi implisit, cara membacanya dan cara menulisnya.
- Arti dari Null Set
- Arti dari Universal Set

4.2 Operasi Himpunan

- **Union** ($\cup$): operasi ini menggabungkan dua himpunan A dan B yang didefinisikan sebagai berikut:

$$A \cup B \equiv \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\} \tag{4.3}$$

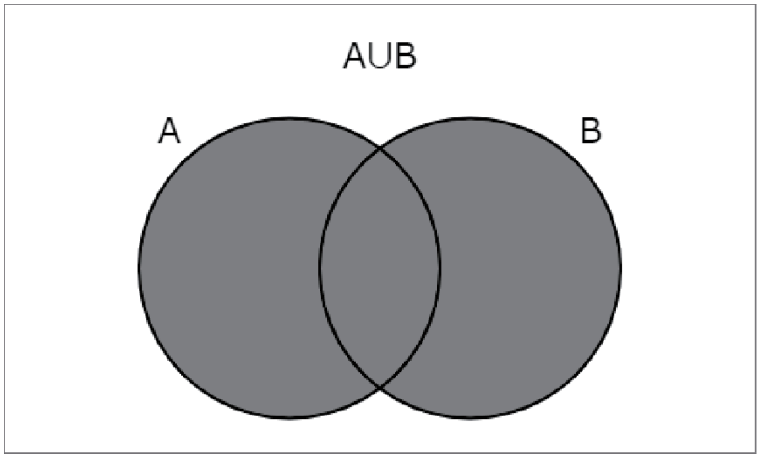


Figure 4.1: diagram Venn dari Union

Setelah mempelajari logika dasar, tidak sulit untuk mengerti definisi di Eq. 4.4. Elemen dari $A \cup B$ adalah elemen A atau elemen B. cepatnya elemen dari $A \cup B$ adalah gabungan dari elemen himpunan A dan elemen himpunan B.

Operasi union ini bisa digambarkan dengan diagram Venn di Fig. 4.4. Diagram Venn sering digunakan utk mem-visualisasi operasi himpunan. Lingkaran di kiri gambar ini menggambarkan himpunan A dan lingkaran di kanan menggambarkan himpunan B. Bagian yang berwarna gelap menunjukkan himpunan baru hasil dari $A \cup B$, sedangkan persegi panjang menggambarkan universal set dari himpunan A dan himpunan B.

e.g.1: Jika $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, -5, 10\}$, maka $A \cup B = \{1, 2, 3, -5, 10\}$

e.g.2: Jika $A = \{Joko, Wati, Rudy\}$, $B = \{Bowo, Rudy, Harto\}$ maka $A \cup B = \{Joko, Wati, Rudy, Bowo, Harto\}$.

- **Intersection** ($\cap$): operasi ini menggabungkan dua himpunan A dan B yang didefinisikan sebagai berikut:

$$A \cap B \equiv \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (4.4)$$

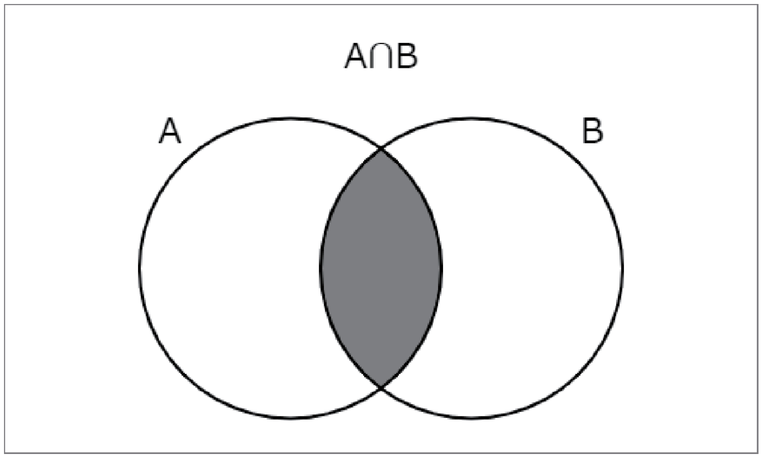


Figure 4.2: diagram Venn dari intersection

Dari definisi di Eq.4.4 dan dari diagram Venn di Fig. 4.2 jelas bahwa $A \cap B$ menghasilkan irisan dari himpunan A dan himpunan B, yang berarti kumpulan elemen yang ada di A sekaligus ada di B.

e.g.1: Jika $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, -5, 10\}$, maka $A \cap B = \{2, 3\}$

e.g.2: Jika $A = \{Joko, Wati, Rudy\}$, $B = \{Bowo, Rudy, Harto\}$ maka $A \cap B = \{Rudy\}$.

e.g.3: Jika $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, maka $A \cap B = \varnothing$

- **Complement** (A^c,$\bar{A}$): operasi ini terhadap satu himpunan A, yang bisa diartikan "bukan A", atau elemen selain elemen A, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\} \tag{4.5}$$

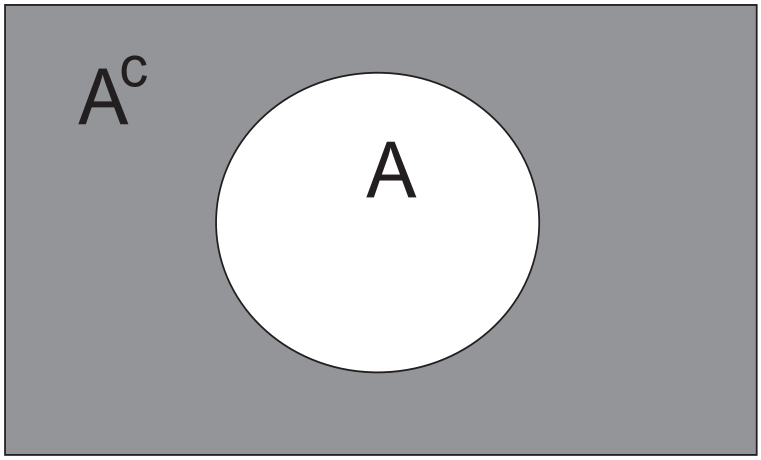


Figure 4.3: diagram Venn dari complement

Diagram Venn complement ditunjukkan di Fig. 4.3.

e.g.1: Jika $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 4\}$ maka $\bar{A} = \{2, 5\}$

- **Difference** ($A - B$, $A \backslash B$): operasi ini menghasilkan beda antara himpunan A dan himpunan B. Hasil dari operasi ini adalah himpunan yang beranggotakan elemen himpunan A yang bukan elemen himpunan B, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \tag{4.6}$$

e.g.1: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, maka $A - B = |\{1, 4\}$ dan $B - A = 6$.

Diagram Venn dari $A - B$ dan $B - A$ sebagai berikut.

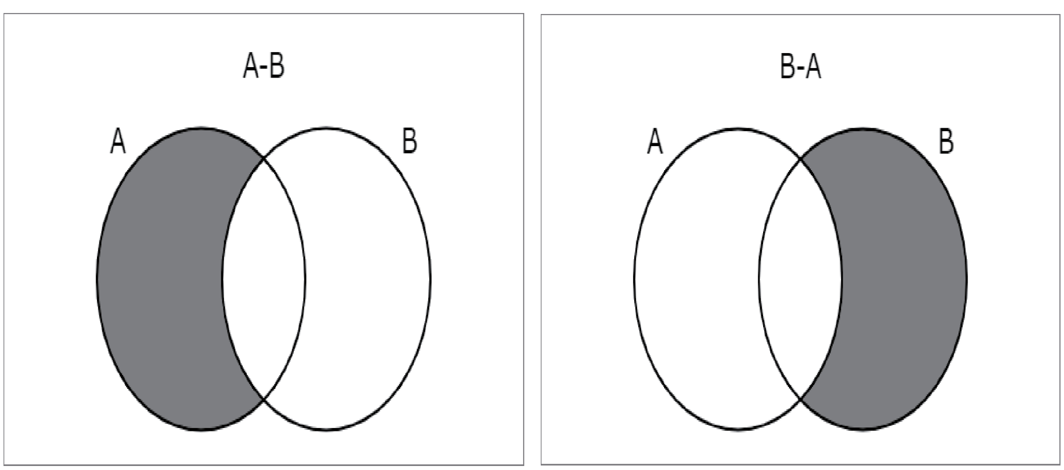


Figure 4.4: Diagram Venn dari difference

Dari definisi difference pada Eq. 4.6 dan definisi complement pada Eq. 4.7, tidak sukar untuk melihat hubungan antara complement dan difference sebagai berikut.

$$\bar{A} = U - A \tag{4.7}$$

- **Direct Product**
  Direct product antara himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \times B$, dan didefinisikan sebagai berikut.

  $$A \times B = \{(a, b) | (a \in A) \wedge (b \in B)\} \tag{4.8}$$

  (a, b) disebut ordered pair. Contoh ordered pair adalah koordinat cartesian.

  e.g.1 Jika $A = \{1, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
  e.g.2 Untuk himpunan A, dan himpunan B di atas,
  $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

  Perhatikan bahwa $A \times B \neq B \times A$.

  Direct product ini sangat penting untuk mendefinisikan konsep relasi dan fungsi.

- **Cardinality** ($|A|$, $n(A)$, card(A), $\sharp A$): operasi ini menghasilkan jumlah elemen yang dipunyai himpunan A.

  e.g.1: $A = \{1, 2, 9, 10\}$, $n(A) = 4$

  e.g.2: $n(\varnothing) = 0$

  Ada beberapa teori (sifat) dasar dari cardinality yang peting.

  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ yang bisa diterangkan sebagai berikut:

  $|A \cup B|$ bisa dianggap sebagai "luas" dari himpunan $A \cap B$ seperti yang digambarkan pada diagram Venn pada Fig. 4.1. Tapi luas ini tidak sama dengan jumlah dari masing-masing luas himpunan tersebut ($|A| + |B|$), karena dengan penjumlahan ini ada area yang dijumlahkan dua kali, yaitu area intersection dari kedua himpunan tersebut ($A \cap B$), seperti yang ditunjukkan diagram Venn pada Fig. 4.2. Sehingga arena ini harus diambil dari $|A| + |B|$ untuk menghitung $|A \cup B|$.

  $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ yang bisa diterangkan sebagai berikut: $|A - B|$ adalah luas himpunan A yang bukan bagian dari himpunan B seperti ditunjukkan pada diagram Venn di gambar di kiri Fig. 4.4. Tentu saja luas ini adalah luar dari himpunan A dikurangi luas area dari himpunan A yang juga bagian dari himpunan B yaitu $|A \cap B|$.

  Di sini, cardinality adalah operasi untuk menghitung jumlah elemen suatu himpunan yang terbatas, tapi nantinya cardinality juga digunakan untuk menggambarkan besarnya himpunan yang elemennya tak terbatas. Di beberapa Bab berikut, akan dibahas tentang ada banyak jenis "tak terhingga".

Dalam menghitung cardinality ada teori yang sangat berguna: **Inclusion-Exclusion Principle** yang digunakan untuk menghitung cardinality dari union n himpunan $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots A_n|$ yang sering diekpresikan dengan $|\bigcup_{i=i}^{n} A_i|$.

Inclusion-Exclusion Principle menyatakan bahwa,

$$|\bigcup_{i=i}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}| \tag{4.9}$$

Inclusion-Exclusion Principle ini dibuktikan pada Appendix buku ini.

Secara intuitif, kalau waktu menghitung cardinality dari union n buah himpunan yang mungkin saling beririsan (bisa juga tidak), pertama-tama kita harus menghitung jumlah dari cardinality semua himpunan. Tapi karena intersection dua himpunan adalah himpunan bagian dari dua himpunan yang beririsan, cardinality dari irisan tersebut terjumlah dua kali sehangga harus dikurangkan dari jumlah cardinality tadi. Proses penjumlahan dan pengeruangan ini tidak bisa berhenti di sini, karena intersection dari dua himpunan, mengandung juga intersection dengan himpuan ketiga, sehingga pengurangan tadi terlalu banyak, sehingga kita perlu menambahkan cardinality dari intersection tiga himpunan tersebut, dan seterusnya, sampai dengan intersection semua himpunan. Ini adalah makna dari $(-1)^{k+1}$ di Eq. 4.9.

4.3 Subset, Himpunan Bagian

Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B, jika proposisi di bawah terpenuhi.

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \tag{4.10}$$

Hal ini dinotasikan dengan,

$$A \subseteq B \tag{4.11}$$

Definisi pada Eq.4.11 menunjukkan bahwa jika A adalah himpunan bagian dari B, maka setiap elemen A harus juga menjadi elemen B, sehingga kondisi ini bisa digambarkan dengan diagram Venn berikut.

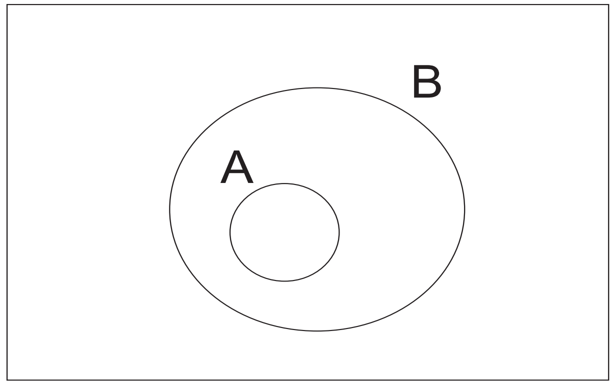


Figure 4.5: Diagram Venn untuk himpunan bagian

Definisi himpunan bagian di Eq. 4.11 mendefinikan equivalency dua himpunan.

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \tag{4.12}$$

Ini dapat diperjelas dengan menulis ulang bagian kanan dari proposisi di atas sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \\
&\quad \equiv \ \forall x((x \in A) \to (x \in B)) \wedge \forall x((x \in B) \to (x \in A)) \\
&\quad \equiv \ \forall x\{((x \in A) \to (x \in B)) \wedge ((x \in B) \to (x \in A))\} \\
&\quad \equiv \ \forall x\{((x \notin A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \notin B) \vee (x \in A))\} \\
&\quad \equiv \ \forall x\{((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Tidak sulit untuk mengartikan proposisi di Eq. 4.12 dan 4.13: A dan B adalah himpunan yang sama kalau untuk segala "sesuatu", "seuatu" itu sekaligus tidak menjadi elemen keduanya atau "sesuatu" itu sekaligus menjadi elemen dari keduanya.

Definisi equivalency dua himpunan di atas akan menjadi dasar bagi beberapa teori mengenai himpunan.

Jika kondisi $(A \subseteq B)$ tetapi $(A \neq B)$ terpenuhi, maka himpunan A disebut proper subset dari himpunan B yang dilambangkan dengan $A \subset B$.

Beberapa proposisi terkait himpunan:

- $A \subseteq A$ Proposisi ini intuitif tetapi harus dibuktikan.
  proof:

$$\begin{aligned}
&\forall x((x \in A) \to (x \in A)) \\
&\quad \equiv \ \forall x((x \notin A) \vee (x \in A)) \\
&\quad \equiv \ 1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

- $\emptyset \subseteq A$ Proposisi ini menyatakan bahwa himpunan kosong adalah himpunan bagian dari himpunan apapun. Ini sangat tidak intuitif, tapi bisa dibuktikan sebagai berikut.

  proof:
  Bukti dapat dimulai dengan menulis ulang proposisi ini sebagai berikut:

  $\forall x((x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A))$

  Ini akan dibuktikan dengan reductio ad absurdum (proof by contradiction) yang sudah dipelajari.

  Bukti ini dimulai dengan menegasikan proposi yang akan dibuktikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\neg[\forall x((x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A))] \\ &\equiv \ \exists x \neg[x((x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A))] \\ &\equiv \ \exists x \neg[(x \notin emptyset) \vee (x \in A)] \qquad (4.15) \\ &\equiv \ \exists x((x \in \emptyset) \wedge (x \notin A)) \end{aligned} \qquad (4.16)$$

  Proposisi terakhir menyatakan bahwa ada "sesuatu" yg menjadi elemen dari himpunan kosong tapi bukan elemen dari himpunan A. Proposisi ini tidak mungkin benar, karena himpunan kosong tidak mempunyai elemen. Karena negasi dari proposisi awal kontradiktif, proposisi awal itu pasti benar. Q.E.D.

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  proof:

$$\begin{aligned} &x \in (A \cap (B \cup C)) \\ &\rightarrow \ (x \in A) \wedge x \in (B \cup C) \\ &\rightarrow \ (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\ &\rightarrow \ ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\ &\rightarrow \ (x \in (A \wedge B) \vee (x \in (A \wedge C)) \\ &\rightarrow \ x \in ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \end{aligned}$$

  Dari sini bisa ditarik kesempulan bahwa $(A \wedge (B \vee C)) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$, yang baru menyelesaikan setengah dari bukti ini.

  Bukti ini dilanjutkan dengan:

$$\begin{aligned} &x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &\rightarrow \ ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\ &\rightarrow \ (x \in A) \wedge ((x \in B)) \vee (x \in C)) \\ &\rightarrow \ (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \\ &\rightarrow \ x \in (A \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Dari sini bisa ditarik kesumputan bahwa $((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subseteq (A \cap (B \cup C)$.

Dan akhirnya dari dua kesimpulan diatas bisa disimpulkan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (Q.E.D.).

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  proof:

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cup B)^c \\
& \quad \rightarrow \quad \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \\
& \quad \rightarrow \quad \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\
& \quad \rightarrow \quad (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\
& \quad \rightarrow \quad (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\
& \quad \rightarrow \quad x \in (A^c \cap B^c)
\end{aligned}
$$

Dari sini bisa disimpulkan bahwa $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$, dan dengan demikian menyelesaikan setengah dari bukti proposisi di atas. Selanjutnya:

$$
\begin{aligned}
& x \in (A^c \cap B^c) \\
& \quad \rightarrow \quad x \in (U - (A \cup B)) \\
& \quad \rightarrow \quad x \in (A \cup B)^c
\end{aligned}
$$

Dari sini bisa disimpulkan bahwa $(A^c \cap B^c) \subseteq (A \cup B)^c$.
Dan dua kesimpulan diatas membuktikan bahwa $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$. (Q.E.D.).
Ini adalah salah satu formula untuk De Morgan's law (Mirip dengan De Morgan's Law pada logika proposisi). (Formula lainnya akan diberikan di latihan).

4.3.1 Power Set, $\mathcal{P}()$

Ada satu lagi operasi hitung yang perlu dibahwas. Ini belum dibahas dengan operasi-operasi lain di atas, karena untuk membahas ini perlu terlebih dahulu mengerti tentang himpunan bagian. Power set dari himpunan $|A|$, ditulis dengan $\mathcal{P}(A)$ atau 2^A, didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\} \tag{4.17}$$

Singkatnya, $\mathcal{P}(A)$, adalah himpunan yang elemenya adalah semua himpunan bagian dari himpunan A. Jadi, power set adalah himpunan dari himpunan.

e.g.1: Jika $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Power Set dari himpunan A, juga dinotasikan dengan 2^A, karena jika $|A| = n$, maka $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Ini bisa dilihat dari contoh di atas. Bukti matematis dari hal ini akan diterangkan setelah mempelajari teori permutasi di Chapter berikut.

Soal Latihan

Untuk himpunan A, B, C dan D, selesaikan soal di bawah.

1. Buktikan bahwa $A \cap B = B \cap A$ dan $A \cup B = B \cup A$
2. Buktikan bahwa $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. Buktikan bahwa $A \cup \varnothing = A$ dan $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. Buktikan bahwa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Hukum De Morgan).
5. Buktikan bahwa $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$
6. Buktikan bahwa $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
7. Buktikan bahwa $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cup B \cup C|$
8. Buktikan bahwa $|(A \cup B) - C| = |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cup B \cup C|$
9. Buktikan bahwa $|(A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$
10. Hitung $|A^c \cap B^c|$, jika $|U| = 80$, $|A| = 43$, $|B| = 28$ dan $|A \cap B| = 16$.
11. Jika $U = \{x \in N | 1 \leqslant x \leqslant 200\}$, $A = \{x \in U | x \bmod 5 = 0\}$ dan $B = \{x \in U | x \bmod 7 = 0\}$, hitung $|A^c \cap B^c\}$. ($x \bmod y$ di sini adalah sisa x dibagi y).
12. 100 orang murid mengikuti ujian 3 mata pelajaran: matematika, fisika dan kimia. Jumlah siswa yang lulus matematika 86 orang, yang lulus fisika 92 orang dan yang lulus kimia 78 orang. Dari sini, jumlah siswa yang lulus matematika dan fisika 84 orang, yang lulus matematika dan kimia 70 orang dan yang lulus fisika dan kimia 73 orang. Ada 3 orang murid yang tidak lulus ketiga-tiganya. Hitung jumlah murid yang lulus ketiganya.
13. U adalah universal set, dan $A \subset U$, $B \subset U$. Jika $|A| = 85$, $|B| = 73$, hitung minimum dari $A \cap B$ dan mininum dari $A - B$.
14. Ada n lembar kartu, masing-masing tercetak 1 angka $1, 2, \cdots n$. Jika kartu ini dijajarkan secara random, hitung banyaknya komposisi di mana setidaknya ada satu kartu dengan angka k berada pada urutan ke k dalam jajaran kartu-kartu tersebut. (untukk menyelesaikan soal ini, dibutuhkan pengetahunan tentang permutasi dan kombinasi yang akan dibahas pada chapter berikut).

4.3.2 Countable Set (Denumerable Set)

Kita tahu bahwa himpunan bilangan natural, $\mathbb{N}$, mempunyai elemen yang banyaknya tak terhingga. Kita juga tahu bahwa himpunan bilangan genap positif, sebut saja, E_+, juga mempunyai elemen yang tak terhingga banyaknya. Tapi apakah kedua "tak terhingga" ini sama besarnya ? Secara intuitif kita mungkin mengatakan bahwa bilangan natural terdiri dari bilangan genap positif dan bilangan ganjil positif, sehingga tidak mungkin $|N| = |E_+|$. Tapi benarkah demikian ? Dapatkah kita membuktikannya secara matematis ? Bagimana dengan himpunan bilangan riil, R yang besarnya juga tidak berhingga. Samakah tak terhingga R, dengan tak terhingga N ?

Akan ada banyak intuisi yang meleset waktu kita berargumen tentang himpunan yang besarnya tak terhingga.

Section ini akan menerangkan cara untuk "mengukur" tak terhingga.

Cara untuk mengukur tak terhingga ini diperkenalkan oleh seorang matematikawan besar, Georg Cantor (1845-1918) pada akhir abad 19. Karena pikiran-pikiran barunya yang mondobrak norma-norma matematika yang ada, banyak sekali resistensi yang dialami oleh Cantor, bukan hanya dari komunitas matematika, tapi juga dari komunitas filosofi dan juta teologi. Pada abad 20, teori himpunan yang diperkenalkan oleh Cantor menjadi fondasi terdasar matematika.

Pemikiran baru tentang himpunan ini dimulai dari pertanyaan yang sangat sederhana: "Bagaimana cara membandingkan besar dua himpunan ?". Tentu saja cara yang termudah adalah menghitung banyaknya elemen kedua himpunan tersebut dan membandingkan keduanya. Kalau elemen himpunan A lebih banyak dari elemen himpunan B, maka dapat disimpulkan A lebih besar dari B. Tapi, mari sejenak kita berimajinasi bahwa "tugas" untuk membandingkan besar dua himpunan ini diserahkan pada seorang anak kecil yang tidak bisa menghitung lebih dari 10, sedangkan elemen dari himpunan-himpunan tersebut sangat banyak. Meskipun anak kecil ini tidak mengenal konsep bilangan yang lebih besar dari 10, tapi kalau dia sedikit pandai, tugas ini bisa "diakali".

Untuk gampangnya, anggap saja ada dua keranjang besar, keranjang A berisi banyak buah jeruk, sedangkan keranjang B berisi banyak buah apel.

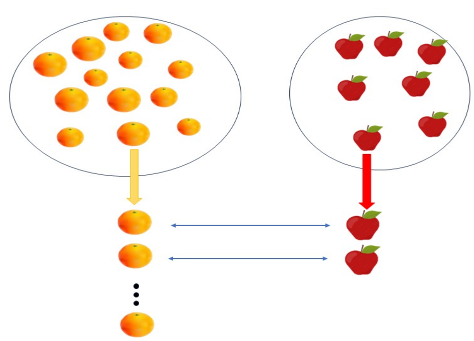


Figure 4.6: Membandingkan besar dua himpunan

Anak kecil ini mengakali tugasnya seperti ditunjukkan di Fig. 4.6. Anak ini mengambil satu jeruk dari keranjang A dan memasangkannya dengan satu apel dari keranjang B, lalu mengambil jeruk lain dan memasangkannya dengan apel yang lain. Ini dilakukannya terus menerus sampai salah satu atau kedua isi keranjang itu kosong. Kalau misalnya ada jeruk yang tidak mempunyai pasangan, artinya himpunan A lebih besar daripada himpunan B, dan kalau ada apel yang tidak mempunyai pasangan, artinya himpunan B lebih besar dari himpunan A.

Dari konsep menghitung di atas, **countable set** adalah himpunan yang setiap elemennya dapat dipasangkan dengan satu bilangan natural. "Dapat dipasangkan" disini berarti ada cara sistematis untuk memasangkan elemen-elemen tersebut dengan bilangan natural. Karena himpunan bilangan natural $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ maka "memasangkan" elemen dengan satu bilangan natural sama artinya dengan "me-nomeri" elemen-elemen tersebut, sehingga himpunan seperti ini disebut juga **Denumerable Set**, himpunan yang dapat di-nomeri. Karena ada tak terhingga bilangan natural, maka himpunan yang setiap elemennya mempunyai pasangan bilangan natural, disebut juga **Countably Infinite Set**, yang tentu saja banyak elemennya sama dengan bilangan natural, tak terhingga.

Dari sini, cardinality dari bilangan natural, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (baca Aleph-Null), akan menjadi standard bagi himpunan tak terhingga lainnya.

Dari sini akan muncul pertanyaan: apakah semua tak terhingga sama besarnya ? Misalnya apakah kita bisa mengatakan bahwa besarnya bilangan riil $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$? Bagaimana dengan himpunan bilangan genap positif ? Atau bilangan rasional ?

Kita mulai dengan yang kelihatannya gampang. Apakah besarnya himpunan bilangan genap positif, di sini untuk gampangnya kita tulis $E_+ = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, sama dengan bilangan natural ? Secara intuitif kebanyakan orang akan mengatakan tidak, sebab bilangan natural terdiri dari bilangan genap positif dan bilangan ganjil positif, sehingga besarnya himpunan bilangan natural dua kali lebih besar daripada himpunan bilangan genap positif.

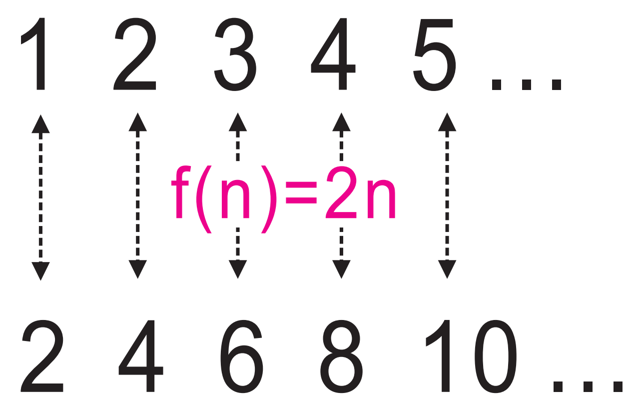


Figure 4.7: Cardinality of Even Set

Dengan cara yang sama, kita bisa mendemonstrasikan kalau besar himpunan bilangan ganjil positif juga $aleph_0$. Ini tentu saja sangat tidak intuitif, karena gabungan himpunan bilangan genap positif dan himpunan ganjil positif yang masing-masing cardinalitynya $\aleph_0$, menghasilkan himpunan bilangan natural yang cardinalitynya juga $\aleph_0$. Hal seperti ini akan terjadi pada himpunan yang elemennya terbatas. Elemen yang tak terhingga menghasilkan implikasi yang aneh seperti ini.

Dengan cara seperti yang ditunjukkan pada Fig. 4.6 kita bisa membandingkan besar kedua himpunan ini. Dengan cara ini, kita tahu bahwa jika kita bisa memasangkan setiap bilangan genap dengan satu bilangan natural secara sistematis kita bisa menarik kesimpulan bahwa besar himpunan genap sama dengan besar bilangan natural. Di sini, "memasangkan secara sistematis" berarti ada prosedur matematis atau fungsi yang memproyeksikan bilangan natural menjadi bilangan genap pasangannya (atau sebaliknya). Dengan mudah kita bisa melihat bahwa untuk setiap bilangan natural

n, fungsi $f(n) = 2n$, "memasangkannya dengan satu bilangan genap seperti yang digambarkan pada Fig. 4.7. Fungsi ini menunjukkan adanya cara sistematis untuk memasangkan semua elemen dua himpunan ini, sehingga bisa diambil kesimpulan bahwa $|E_+| = |N| = \aleph_0$.

Bagaimana dengan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$? Apakah $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$? Secara intuitif jelas tidak karena $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

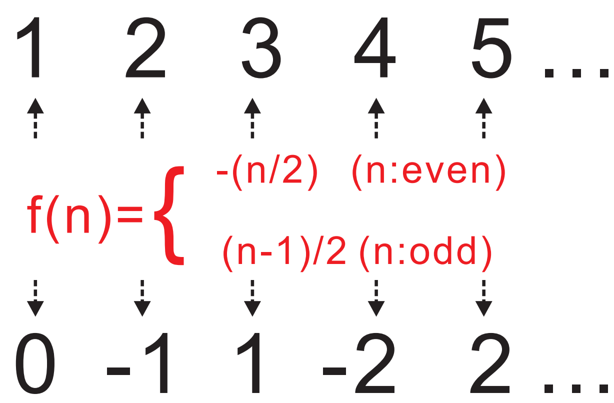


Figure 4.8: Cardinality of set of whole numbers

Untuk mengetahui apakah $|Z| = \aleph_0$ cukup mencari fungsi yang bisa menyandingkan setiap bilangan natural dengan bilangan bulat. Salah satu contohnya diberikan pada Fig. 4.8, yang menyandingkan bilangan natural n dengan bilangan bulat $-\frac{n}{2}$ kalau n genap, dan menyandingkannya dengan bilangan bulat $\frac{n-1}{2}$ kalau n ganjil. Dengan demikikian karena setiap bilangan genap mempunyai pasangan bilangan natural, maka terbukti kalau $|Z| = \aleph_0$.

Cantor tidak berhenti di sini. Dia mengatakan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in N, q \in \mathbb{N}, p, q : \mathit{coprimes}\}$ juga denumerable set. Dia memulai dengan membuat tabel pecahan seperti pada Fig. 4.9. Kolom pada tabel ini menunjukkan pembilang dari bilangan rasional yang berada pada kolom yang sama, dan barisnya menunjukkan penyebutnya. Dia juga menghapus pecahan yang pembilang dan penyebutnya bukan coprime (pada Fig. 4.9 digambarkan dengan titik merah. Tidak sulit untuk melihat bahwa semua bilangan rasional akan tercangkup pada tabel ini, sehingga kalau kita bisa mengurutkan bilangan rasional ini secara sistematis (dengan kata lain memasangkan semua pecahan dalam tabel ini masing-masing dengan satu bilangan natural), maka kita bisa menyimpulkan kalau $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Dan ternyata ada cara sistematis untuk mengurutkan para pecehan ini seperti pada gambar dibawah. Dengan cara semacam ini Cantor menyandingkan bilangan natural 1 dengan $\frac{1}{1}$, 2 dengan $\frac{2}{1}$, 3 dengan $\frac{1}{2}$, 4 dengan $\frac{1}{3}$, 5 dengan $\frac{3}{1}$ dan seterusnya.

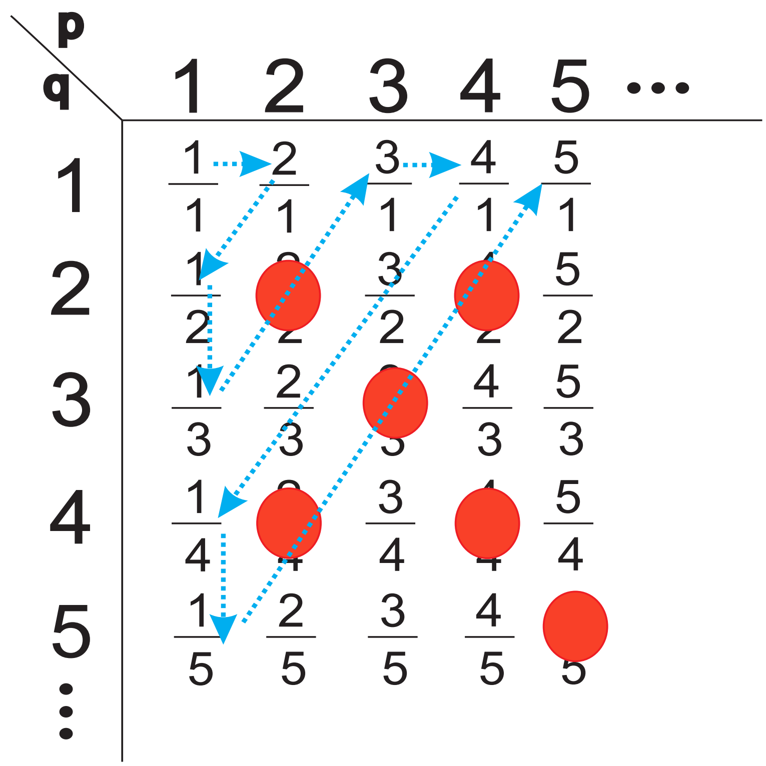


Figure 4.9: Tabel bilangan rasional

Karena semua bilangan rasional mempunyai pasangan bilangan natural, maka dapat disimpulkan (meskipun "kejadian" ini sangat tidak intuitif) bahwa $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

4.3.3 Cantor's Diagonal Argument

Sampai di sini, cerita tentang himpunan yang besarnya tak terhingga ini "damai-damai" saja. Karena sejauh ini semua himpunan tak terhinnga besarnya sama, yaitu $\aleph_0$, sehingga terkesan bahwa hanya ada satu macam tak terhingga. Tapi bernarkah demikian ?

Bagaimana dengan himpunan bilangan riil, $\mathbb{R}$? Apakah $|R| = \aleph_0$. Dari pengalaman di atas, sangat sulit untuk percaya pada intuisi dalam menentukan besarnya himpunan tak terhingga. Cantor mempunyai intuisi bahwa $|R| \neq \aleph_0$.

Untuk membuktikannya, dia mulai dengan memikirkan himpunan bilangan riil antara 0 dan 1, sebut saja $R_0 = \{x|0 < x < 1, x \in R\}$, dan membuktikan dengan reductio ad absurdum bahwa $|R_0| \neq \aleph_0$.

Untuk memulai bukti ini, dia menegasikan hipotesisnya, dan memulai dari asumsi kalau $|R_0| = \aleph_0$. Kalau asumsi ini benar, semua bilangan elemen dari himpunan R_0 ini akan mempunyai pasangan bilangan natural, atau cepatnya kita bisa menjajarkan semua elemen R_0 secara sistematis, seperti Fig. 4.10 di bawah.

Figure 4.10: Cantor's Diagonal Argument

Kalau asumsi bahwa $|R_0| = \aleph_0$ benar, maka seluruh bilangan riil antara 0 dan 1 akan termuat pada tabel di atas. Hal ini akan diuji dengan melihat apakah, satu bilangan $b = 0.b_1b_2b_3 \cdots b_k \cdots$ dimana nilai b_j didefinisikan pada Eq. juga termuat di dalam tabel ini.

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{kk} = 0, \\ 0 & \text{if } a_{kk} \neq 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Singkatnya, Eq. 4.18 menerangkan bahwa nilai desimal ke k dari bilangan baru ini akan bergantung dari nilai desimal ke k dari elemen R_0 yang berpasangan dengan bilangan natural k, a_{kk}. Kalau a_{kk} kebetulan bernilai 0, maka b_j akan bernilai 1, dan kalau $a_{kk} \neq 0$, maka $b_k = 0$. Di sini jelas bahwa $\forall k(b_k \neq a_{kk})$. Hal ini membawa implikasi yang sangat penting. Karena, $b \neq 0.a_{11}a_{12}a_{13} \cdots$ karena desimal pertamanya beda, $b \neq 0.a_{21}a_{22}a_{23} \cdots$ karena desimal keduanya beda, dan $\forall k b \neq 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3} \cdots$ karena desimal ke k-nya berbeda, yang berarti bahwa b tidak termuat dalam tabel di atas. Ini kontradiktif dengan asumsi bahwa semua bilangan riil antara 0 dan 1 termuat dalam tabel, yang berarti asumsi itu tidak mungkin benar dan dengan begitu R_0 bukan denumerable set, atau $|R_0| \neq \aleph_0$. Jelas di sini bahwa $|R_0| > \aleph_0$ karena ada elemen R_0 yang tidak mempunyai pasangan bilangan natural. Kesimpulan bahwa "tak terhingga" tidak tunggal bukan hanya menggoncang dunia matematika, tapi juga filsafat dan merambat pula ke teologi. Tekanan dari berbagai macam pihak menyebabkan depresi berat bagi Cantor hingga akhir hayatnya. Bukti yang sangat elegan diatas disebut **Cantor's diagonal argument**.

Selanjutnya, kalau ada fungsi yg memasangkan setiap elemen R_0 ke elemen R maka kita bisa menarik kesimpulan bahwa $|R_0| = |R|$. Dan ternyata ada beberapa fungsi untuk melakukan hal ini. Salah satu contohnya sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{1-2x}{x(x-1)}(x \in R_0) \tag{4.19}$$

Dari grafik fungsi $f(x)$ ini di bawah, jelas terlihat bahwa fungsi ini memasangkan semua elemen R_0 dengan elemen R.

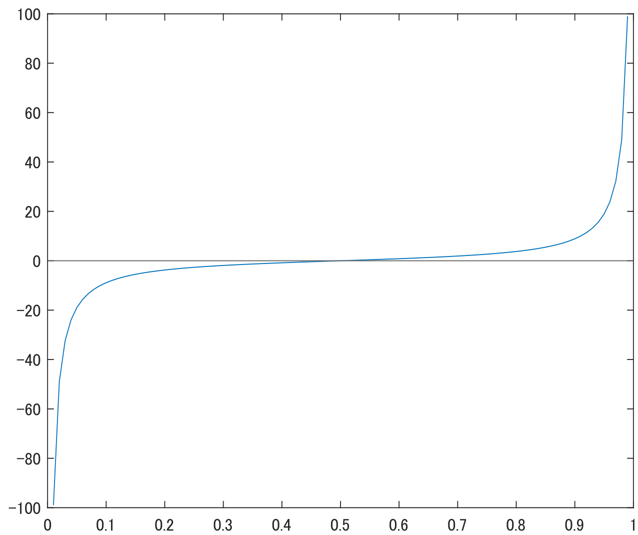


Figure 4.11: $f(x) = \frac{1-2x}{x(x-1)}$

Cardinality dari himpunan bilangan riil, $|\mathbb{R}|$ di definisikan sebagai $\aleph$. Selanjutnya bisa disimpulkan bahwa $\aleph > \aleph_0$.

Selanjutnya, apakah $|\mathbb{P}(N)| = \aleph_0$? Untuk menjawab pertanyaan ini, ingat bahwa $\mathcal{P}(N) = \{B|B \subset N\}$. Dan kita bisa mengekspresikan semua himpunan bagian N dengan desimal 0. yang lalu diikuti dengan deret 1 dan 0, di mana jika bilangan natural k menjadi elemen dari himpunan bagian ini, bilangan ke k dari deret ini 1, dan 0 jika k bukan elemen dari himpunan bagian itu. Misalnya $\{1, 2\}$ diekspresikan dengan $0.110\cdots$, $\{2, 4, 5\}$ diekspresikan dengan $0.010110\cdots$, dan sebagainya. Kita bisa membuat tabel serupa dengan dengan tabel di Fig. 4.10. Kalau kita asumsikan bahwa $|\mathcal{P}(N)| = \aleph_0$, maka semua himpunan bagian N akan ada di tabel ini. Tapi dengan Cantor's Diagonal Argument kita tahu bahwa ada himpunan bagian yang tidak termasuk dalam tabel ini, dan dengan begitu kita tahu bahwa asumsi semula tidak benar, yang artinya $|\mathcal{P}(N)| \neq \aleph_0$. Lalu berapa besar $|\mathcal{P}(N)|$? Hal ini bisa "diakali" dengan merubah deret binary menjadi bilangan 10-an, dan dengan demikian mengekspresikan himpunan bagian dengan bilangan riil x, di mana $0 \leqslant x < 1$. Dan kita tahu kalau $|\{x|0 \leqslant x < 1\}| = \aleph$, kita bisa menarik kesimpulan bahwa $|\mathcal{P}(N)| = |R| = \aleph$. $\aleph$ ini adalah besar himpunan bilangan tak terhingga setelah himpunan bilangan natural. Matematika tidak bisa membuktikan ada atau tidaknya tak terhingga lain antara $\aleph_0$ dan $\aleph$. Tapi setidaknya kita tahu bahwa $|N| < |\mathcal{P}(N)|$ dan dari sini dapat dengan mudah mengambil kesimpulan bahwa $|\mathcal{P}(N)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))|$ dan seterusnya, yang artinya kita selalu bisa "menciptakan" tak terhingga baru dengan melakukan operase Power set. Hal ini mengimplikasikan kalau ada tak terhingga macam tak terhingga, suatu konsep yang merevolusi matematika di awal abad 20.

4.4 Konsep Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

Untuk himpunan A,

- $m = \min(A) \iff (m \in A \wedge \forall x \in A(m \leqslant x))$
  e.g.1: $A = \{x|0 \leqslant x \leqslant 10\}$, maka $1 = \min(A)$ karena $(1 \in A) \wedge \forall x \in A(1 \leqslant x)$

- $M = \max(A) \iff (M \in A \wedge \forall x \in A(M \geqslant x))$
  e.g.2: $A = \{x|0 \leqslant x \leqslant 10\}$, maka $10 = \max(A)$ karena $(10 \in A) \wedge \forall x \in A(10 \geqslant x)$

Konsep minimum dan maximum dari suatu himpunan ini sangat mudah dimengerti. Singkatnya minimum dari suatu himpunan adalah elemen terkecil dari himpunan tersebut, sedangkan maximumnya adalah elemen terbesar dari himpunan itu.

Tetapi tidak semua himpunan mempunyai min atau max.
Misalnya untuk $A = \{x|0 < x < 10\}$, $1 \neq min(A)$ karena $1 \notin A$ dan begitu pula $10 \neq \max(A)$, karena $10 \notin A$. Himpunan A ini tidak mempunyai min dan max tapi mempunyai apa yang disebut sup (**supremum**) dan inf (**infimum**) yang akan diterangkan di bawah.

Jika untuk himpunan A, ada $s \in R$ di mana $\forall x \in A(s \geqslant x)$, maka s disebut **upper bound** dari A. Jadi untuk contoh himpunan A di atas, 10 adalah upper bound A, begitu pula 10.1, 10.52, 11, 10000 dan lain - lain. Himpunan ini mempunyai upper bound yang tak terhingga banyaknya. Kita mendefinisikan himpunan X yang elemennya adalah upper bound dari A, sebagai berikut.

$$X = \{a|\forall x \in A(a < x)\} \tag{4.20}$$

Pada contoh di atas $X = \{a|a \geqslant 10\}$.

Setelah mendefinisikan himpunan X yang berisi upper bound dari A, supremum dari himpunan A didefinisikan sebagai berikut.

$$\sup(A) = min(X) \tag{4.21}$$

Untuk contoh di atas $\sup(A) = 10$ karena 10 adalah upper bound dari A dan tidak ada upperbound lain yang lebih kecil dari 10. Jika himpunan A tidak mempunyai upper bound, maka $\sup(A) = \infty$. Misanya, $\sup(N) = \infty$.

Selanjutnya, jika untuk himpunan A, ada $i \in R$ di mana $\forall x \in A(i \leqslant x)$, maka i disebut **lower bound** dari A. Untuk contoh diatas, 1 adalah lower bound dari A, begitu pula 0.29, -3, -58, -10000 dan seterusnya. Himpunan ini juga mempunyai lower bound yang tak terhingga banyaknya. Kita bisa mendefinisikan himpunan Y yang elemennya adalah lower bound dari A, sebagai berikut:

$$Y = \{i|\forall x \in A(i > x)\} \tag{4.22}$$

Pada contoh diatas $Y = \{i|i \leqslant 1\}$.

Setelah mendefinisikan himpunan Y yang berisi lower bound dari A, infimum dari himpunan A didefinisikan sebagai berikut.

$$\inf(A) = \max(Y) \tag{4.23}$$

Untuk contoh diatas $\inf(A) = 1$ karena 1 adalah lower bound terbesar dari A. Jika himpunan A tidak mempunyai lower bound, maka $\inf(A) = -\infty$. Misalnya $\inf(R) = -\infty$.

Review:

- terangkan arti $\min(A), \max(A)$
- terangkan arti upper bound dan lower bound dari suatu himpunan.
- apa beda $\max(A)$ dan $\sup(A)$?
- apa beda $\min(A)$ dan $\inf(A)$?
- pikirkan contoh himpunan A, di mana $\max(A) \neq \sup(A)$

Selanjutnya: **teori 1**

$$M = \sup(A) \iff$$

1. M adalah upper bound dari A
2. $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A(x > M - \epsilon)$

proof:
Karena $M = \sup(A)$ maka M adalah upperbound terkecil dari A, dengan begitu proposisi 1. di atas benar. Karena M adalah upper bound terkecil dari A, artinya sesuatu yang kurang dari M, termasuk $M - \epsilon$ bukan upper bound dari A, yang artinya ada elemen A yang lebih besar dari $M - \epsilon$ yang diformulasikan dengan proposisi 2. di atas.

Sebaliknya, kalau kedua proposisi di atas benar, maka M adalah upper bound dari A, tapi sesuatu yang kurang dari M, misalnya $M - \epsilon$ bukan upper bound dari A. Karena $\epsilon > 0$ dapat diambil sekecil apapun, artinya M adalah upper bound terkecil dari A, atau $M = \sup(A)$.

Kedua argumen di atas menunjukkan bahwa $M = sup(A)$ dan gabungan dari kedua proposisi di atas equivalent.

Berikut: **teori 2**

$$m = \inf(A) \iff$$

1. m adalah lower bound dari A
2. $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A(x < m + \epsilon)$

proof:

Karena $m = inf(A)$ maka m adalah upper bound terbesar dari A, dengan begitu proposisi 1. di atas benar. Karena m adalah upper bound terbesar, artinya sesuatu yang lebih besar dari m, termasuk $m + \epsilon$ bukan lower bound dari A, yang artinya ada elemen A yang lebih kecil dari $m + \epsilon$ yang diformulasikan dengan proposisi 2. di atas.

Sebaliknya, kalau kedua proposisi di atas benar, maka m adalah lower bound, sedangkan sesuatu yang lebih besar dari m, misalnya $m + \epsilon$ bukan lower bound. Karena $\epsilon > 0$ dapat diambil sekecil apapun, artinya m adalah lower bound terbesar dari A, atau $m = inf(A)$.

Dengan ini, terbukti bahwa $m = inf(A)$ dan gabungan dari kedua proposisi di atas equivalent.

Ada beberapa proposisi penting terkait *sup* dan *inf* yang harus dibuktikan.

- $M = \max(A) \Rightarrow M = \sup(A)$
  proof:
  Karena M adalah elemen terbesar dari A, $\forall > 0 M - \epsilon$ bukan $max(A)$, yang artinaya $x \in A(x > M - \epsilon)$ (perhatikan bahwa setidaknya M sendiri memenuhi proposisi ini). Karena M adalah juga upper bound dari A, maka berdarkan teori 1 di atas, $M = sup(A)$. (Q.E.D.).

- Untuk $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ dan $A \subseteq B$, buktikan:

  1. $\sup(A) \leqslant \sup(B)$
     proof:
     Jika $a \in A$ dan $b \in B$, karena $A \subseteq B$ maka $\forall a \in B$, sehingga $\forall a \in A(a \leqslant \sup(B)$. Ini berarti $\sup(B)$ adalah upper bound dari A. Karena $\sup(A)$ adalah upper bound minimum dari A, maka $\sup(A) \leqslant \sup(B)$. (Q.E.D.).
  2. $\inf(A) \geqslant \inf(B)$
     proof:
     Jika $a \in A$ dan $b \in B$, karena $A \subseteq B$ maka $\forall a \in B$, sehingga $\forall a \in A(a \geqslant \inf(B)$. Ini berarti $\inf(B)$ adalah lower bound dari A. Karena $\inf(A)$ adalah lower bound maximum dari A, maka $\inf(A) \geqslant \inf(B)$. (Q.E.D.).

- Untuk $c \in \mathbb{R}$ dan $A \subseteq \mathbb{R}$, $cA = \{y | y = cx \wedge x \in A\}$ maka,
  jika $c > 0$,

  1. $\sup(cA) = c \sup(A)$
     proof:
     Untuk $M = \sup(A)$, $\forall x \in A(M \geqslant x)$, dan karena $c > 0$ maka $\forall x \in A(cM \geqslant cx)$, yang berarti bahwa cM adalah upper bound dari himpunan cA. Selanjutnya, karena $M = \sup(A)$ maka $\forall \epsilon > 0 \exists x(M - \epsilon < x)$, dan karena $c > 0$, $\forall \epsilon_1 \exists x(CM - \epsilon_1) < cx$ $(\epsilon_1 = c\epsilon)$. Karena itu $CM = \sup(cA)$, jadi $\sup(cA) = c \sup(A)$.(Q.E.D.).

2. $\inf(cA) = c\inf(A)$

   proof:
   Untuk $m = \inf(A)$, $\forall x \in A(m \leqslant x)$, dan karena $c > 0$ maka $forallx \in A(cm \leqslant cx)$, yang berarti bahwa cm adalah lower bound dari himpunan cA. Selanjutnya, karena $m = \inf(A)$ maka $\forall\epsilon > 0\exists x(m + \epsilon > x)$, dan karena $c > 0$, $\forall\epsilon_1\exists x(cm + \epsilon_1) > cx$ $(\epsilon_1 = c\epsilon)$. Karena itu $cm = \inf(cA)$, jadi $\inf(cA) = c\inf(A)$. (Q.E.D.).

jika $c < 0$

1. $\sup(cA) = c\inf(A)$

   proof:
   Untuk $m = \inf(A)$, $\forall x \in A(m \leqslant x)$, dan karena $c < 0$ maka $\forall x \in A(cm \geqslant cx)$, yang berarti bahwa cm adalah upper bound dari cA. Selanjutnya, karena $\forall\epsilon > 0\exists xinA(m + \epsilon > x)$ dan karena $c < 0$, $\forall\epsilon_1\exists x \in A(cm - \epsilon_1 < cx)(\epsilon_1 = -c\epsilon)$. Karena itu $cm = \sup(cA)$, jadi $c\inf(A) = \sup(cA)$. (Q.E.D.).

2. $\inf(cA) = c\sup(A)$

   proof:
   Untuk $M = \sup(A)$, $\forall x \in A(M \geqslant x)$, dan karena $c < 0$ maka $\forall x \in A(cM \leqslant cx)$, yang berarti bahwa cM adalah lower bound dari cA. Selanjutnya, karena $\forall\epsilon > 0\exists x(M - \epsilon < x)$ dan karena $c < 0$, $forall\epsilon_1\exists x(cM + \epsilon_1 > cx(\epsilon_1 = -c\epsilon)$. Karena itu $cM = \inf(cA)$, jadi $c\sup(A) = \inf(cA)$. (Q.E.D.).

- Untuk $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, jika $sup(A)$ dan $sup(B)$ ada, buktikan proposisi di bawah.

  1. $\sup(A \cup B) \geqslant \sup(A)$

     proof:
     Karena $\forall x \in (A \cup B)(\sup(A \cup B) \geqslant x)$, maka $\forall x \in A(\sup(A \cup B) \geqslant x)$ yang artinya $\sup(A \cup B)$ adalah upper bound dari A. Dan karena $\sup(A)$ adalah upper bound minimum dari A, maka $\sup(A \cup B) \geqslant \sup(A)$. (Q.E.D.).

  2. $sup(A \cup B) = \max(\{\sup(A), \sup(B)\})$

     proof:
     Meneruskan bukti di atas, dengan logika yang sama $sup(A \cup B) \geqslant \sup(B)$. Jika $\sup(A) \geqslant \sup(B)$, maka $\sup(A \cup B) \geqslant \sup(A) \geqslant \sup(B)$, dan jika $\sup(B) \geqslant \sup(A)$, maka $\sup(A \cup B) \geqslant \sup(B) \geqslant \sup(A)$, sehingga bisa disimpulkan bahwa $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\{\sup(A), \sup(B)\}$

     Selanjutnya, untuk $c \in (A \cup B)$, jika $c \in A$, maka $c \leqslant \sup(A) \leqslant \max(\{\sup(A), \sup(B)\})$. Dan jika $c \in B$, maka $c \leqslant \sup(A) \leqslant \max(\{\sup(A), \sup(B)\})$. Dan jika $c \in B$, maka $c \leqslant \sup(B) \leqslant \max(\{\sup(A), \sup(B)\})$, sehingga $c \leqslant max(\{\sup(A), \sup(B)\})$. Sehingga $\max(\{\sup(A), \sup(B)\})$ adalah upper bound dari AB, dan bisa disimpulkan bahwa $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\{\sup(A), \sup(B)\})$.

     Dari dua kesimpulan di atas, tidak bisa tidak $\sup(A \cup B) = \max(\{\sup(A), \sup(B)\})$. (Q.E.D.).

3. $sup(A \cap B) \leqslant \min(\{\sup(A), \sup(B)\})$

   proof:

   Karena $(A \cap B) \subseteq A$, $\sup(A)$ adalah upper bound dari $(A \cap B)$, dan karena $\sup(A \cap B)$ adalah upper bound minimum dari $(A \cap B)$, maka $\sup(A) \geqslant \sup(A \cap B)$. Dengan logika yang sama, $\sup(B) \geqslant \sup(A \cap B)$. Jika $\sup(A) \geqslant \sup(B)$ maka $\sup(A) \geqslant \sup(B) \geqslant \sup(A \cap B)$, dan jika $\sup(B) \geqslant \sup(A)$, maka $\sup(B) \geqslant \sup(A) \geqslant \sup(A \cap B)$, sehingga $\min(\{\sup(A), \sup(B)\} \geqslant \sup(A \cap B)$. (Q.E.D.).

- Untuk $A + B = \{x + y | (x \in A) \wedge (y \in B)\}$, buktikan bahwa $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$

  proof:

  Karena $\forall x \in A(\sup(A) \geqslant x)$ dan $\forall y \in B(\sup(B) \geqslant y)$ maka $\forall x \in A \forall y((\sup(A) + \sup(B)) \geqslant x + y)$. Ini menunukkan bahwa $\sup(A) + \sup(B)$ adalah upper bound dari $A+B$. Dan karena upper bound minimum dari $A+B$ adalah $\sup(A+B)$, bisa disimpulkan bahwa $\sup(A) + \sup(B) \geqslant \sup(A + B)$. Selanjutanya, karena $\forall \epsilon_a > 0 \exists x \in A(\sup(A) - \epsilon_a < x)$ dan $\forall \epsilon_b > 0 \exists y \in B(\sup(B) - \epsilon_b < y)$ maka $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A \exists y \in B(\sup(A)+\sup(B)-\epsilon) < x+y)$ $(\epsilon = \epsilon_a + \epsilon_b)$, dan $\forall x \forall x(x+y \leqslant \sup(A+B)$, maka $(\sup(A) + \sup(B) - \epsilon) \leqslant \sup(A + B)$. Dan karena $\epsilon > 0$ bisa ditentukan sekecil mungkin, maka bisa disimpulkan bahwa $(\sup(A) + \sup(B)) \leqslant \sup(A + B)$. Dari dua kesimpulan di atas, hanya $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$ yang bisa terjadi. (Q.E.D.).

Soal Latihan

Untuk himpunan $(A \subseteq \mathbb{R}) \wedge (A \neq \emptyset)$, $(B \subseteq \mathbb{R}) \wedge (B \neq \emptyset)$, serta sup dan inf kedua himpunan ini ada,

1. buktikan $m = \min(A) \Rightarrow m = \inf(A)$
2. $\sup(\{0\}) = 0$ dan $\inf(\{0\} = 0)$
3. untuk $k \in \mathbb{R}$ dan jika $\sup(A)$ ada, $\sup(\{k + x | x \in A\}) = k + \sup(A)$
4. buktikan $\inf(A \cup B) \leqslant \inf(A)$
5. bukitkan $\inf(A \cup B) = \min(\{\inf(A), \inf(B)\})$
6. untuk $A, B\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$ jika $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$ dan $\inf(B)$ ada, buktikan:
   (a) $\sup(A) \sup(B) = \sup(AB)$
   (b) $\inf(A) \inf(A) = \inf(AB)$
7. untuk $C = \{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ tentukan $\sup(C)$ dan $\inf(C)$, beserta buktinya.
8. untuk $C = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ tentukan $\sup(C)$ dan $\inf(C)$, beserta buktinya.

Chapter 5

Teori Permutasi dan Kombinasi: Cara Menghitung

> The essence of a college education is not the learning of many facts but the training of the mind to think
>
> Albert Einstein

Di chapter ini yang akan hal yang akan dipelajari sangat sederhana: cara menghitung pola yang dihasilkan dari pilihan yang acak (random). Ini akan berguna untuk bukan saja untuk menghitung berbagai macam hal, seperti probabilitas munculnya sebuah pola, menghitung resiko terjadinya sesuatu, menghitung waktu atau prosedur yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masalah dan lain-lain.

Pertama, di sini penting untuk mendefinisikan operasi hitung **factorial**. Untuk $n \in \mathbb{N}$, factorial n, diekspresikan sebagai $n!$ dan didefinsikan sebagai berikut.

Untuk $n \in \mathbb{N}$,

1. $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$
2. $n! = n(n-1)!$
3. $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$

Dari definisi pertama $1! = 1$, karena itu dari definisi kedua $1! = 1 \times 0!$. Tentu saja kedua definisi ini harus membawa hasil yang sama, karena itu $1 \times 0! = 1$, sehingga $0! = 1$.

Definisi ketiga adalah definisi factorial berdasarkan fungsi Gamma, $\Gamma(n)$ yang akan dibuktikan sebagai berikut.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1, \tag{5.1}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \\
&= -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \\
&= 0 + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \\
&= n\Gamma(n) \\
&= n\times(n-1)\Gamma(n-1) = n\times(n-1)\times(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times\Gamma(1) \\
&= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1 = n! \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Konsep penting di chapter ini yang harus dimengerti adalah sampling. Sampling adalah perbuatan untuk mengambil sample atau contoh dari sederet benda yang ada secara acak. Misalnya, mengambil satu kartu dari tumpukan 52 kartu secara acak. Atau memilih satu orang dari anggota kelas secara acak. Fokus kita di chapter ini adalah menghitung kemungkinan "pola" yang muncul dari tindakan mengambil sample yang acak ini. Hasil dari perhitungan jumlah pola akan tergantung dari cara mengambil sample dan cara mengartikan pola yang muncul.

5.1 Sampling without replacements

Cara mengambil sample pertama yang dipelajari di sini adalah **sampling without replacement** atau cara mengambil sample tanpa mengembalikan. Pada contoh di Fig. 5.1, atau n lembar kartu, dan pada masing-masing kartu tertulis angka 1 sampai n. Kita mengambil satu secara acak (misalnya dengan menutup mata), dan misalnya kartu yang kita ambil bernomor 2. Di sini kartu bernomor dua ini tidak kita kembalikan pada tumpukan kartu tersebut, sehingga kalau setelahnya kita mengambil kartu lain secara acak, kartu bernomor 2 ini tidak akan muncul lagi. Pada cara sampling seperti ini, kartu yang kebetulan terambil hanya dapat muncul sekali. Contoh lain, misalnya kita memilih ketua kelas dan wakilnya dengan diundi secara acak, setelah kita memilih seseorang menjadi ketua kelas, orang tersebut tidak bisa terpilih menjadi wakil ketua kelas.

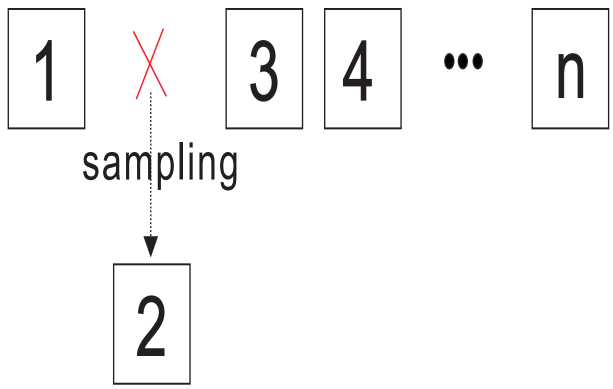


Figure 5.1: Sampling without replacement

1. Permutasi
   Permutasi adalah pola yang muncul setelah dilakukannya sampling. Pada permutasi, urutuan munculnya sesuatu sangat penting. Anggap saja kita akan memilih ketua kelas dan wakilnya dengan undian. Orang yang terpilih pada sampling pertama ditetapkan sebagai ketua kelas, dan orang yang terpilih pada sampling kedua ditetapkan sebagai wakilnya. Anggap A muncul pertama, B muncul kedua. Permutasi menghitung A-B dan B-A sebagai dua pola yang berbeda, meskipun orangnya sama. Jadi di sini urutan munculnya sample berpengaruh pada jumlah pola yang akan dihitung. Untuk memberi ilustrasi, anggap ada himpunan $X = \{A, B, C\}$ yang berisi tiga orang A, B dan C. Di sini kalau kita memilih dua secara acak dan menghitung permutasinya, maka akan kita dapatkan:

   (a) pasangan A, B
   (b) pasangan B, A
   (c) pasangan A, C
   (d) pasangan C, A
   (e) pasangan B, C
   (f) pasangan C, B

   Di sini kita katakan ada 6 permutasi yang mungkin muncul. Untuk memberi ilustrasi yang lebih jelas, pembaca dapat menghitung jumlah permutasi kalau $X = \{A, B, C, D\}$ dan kita akan mengambil dua orang secara acak. Bagaimana kalau kita mengambil tiga orang secara acak. Mungkin para pembaca mulai kesulitan kalau diminta untuk mengambil tiga orang dari himpunan 5 orang. Karena itu kita perlu menghitung jumlah permutasi ini dengan lebih sistematis. Jika ada n pilihan, dan kita mengambil secara acak $r \leqslant n$, maka jumlah permutasi yang muncul diekspresikan dengan ${}_nP_r$, dan dihitung seperti formula di bawah.

   $$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{5.3} $$

   Tentu saja formula ini tidak turun dari langit, dan karena itu harus dibuktikan. Pertama, perhatikan bahwa pada waktu kita mengambil sample pertama, masih ada n sample yang menungkin untuk diambil, tapi pada waktu kita mengambil sample kedua, kemungkinan ini berkurang satu (karena sudah diambil untuk sample pertama), jadi kemungkinan yang tersisa adalah $n-1$, begitu pula seterusnya, sehingga pada waktu kita mengambil sample ke r, kemungkinan yang tersisa adalah $n-(r-1)=n-r+1$. Karena itu jumlah permutasi yang dapat terjadi adalah,

$$_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-r+1) \tag{5.4}$$

Di sini tampak bahwa Eq. 5.3 dan Eq. 5.4 berbeda, tapi dengan sedikit manipulasi matematika, kita bisa dapatkan.

$$\begin{aligned} _nP_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-r+1) \times \frac{(n-r) \times (n-r-1) \times \cdots 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \cdots 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Dengan ini, kita bisa menjawab pertanyaan, jumlah permutasi yang mungkin timbul waktu kita memilih 3 orang di antara lima orang secara acak adalah $5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ pasangan.

2. Kombinasi

   Mirip dengan permutasi, kombinasi adalah pola yang muncul setelah dilakukan sampling. Yang berbeda dengan permutasi adalah intepretasi dari pola itu. Kalau pada permutasi mementingkan urutan dari munculnya sesuatu, pada kombinasi urutan diabaikan. Anggap kita akan memilih dua orang untuk satu pasang ganda putri badminton. Anggap saja ada tiga orang pemain dalam himpunan $X = A, B, C$ dan kita bisa memilih dua orang dari ketiga pemain ini secara acak, dengan melakukan sampling without replacement, maka kemungkinan pasangan yang kita dapat adalah:

   (a) pasangan A,B (atau B,A)
   (b) pasangan A,C (atau C,A)
   (c) pasangan B,C (atau C,B)

   Di sini bisa dilihat bahwa urutan muncul tidak penting. Sejauh dua orang yang sama berpasangan, maka walaupun urutan dibalik, itu tetap pasangan yang sama. Bedakan dengan permutasi yang menghasilkan 6 pasangan, kombinasi ini hanya menghasilkan 3 pasangan dari himpunan yang sama. Tentunya ini karena, ada beberapa pasangan yang hanya dihitung sekali dalam kombinasi. Untuk latihan berpikir, berapa kombinasi ganda putri yang dapat terbentuk kalau ada 4 pemain putri ? Bagaimana kalau ada 5 pemain ?

   Secara umum, kombinasi yang mungkin terjadi jika kita mengambil secara acak r dari n pilihan yang ada diekspresikan sebagai $_nC_r$, dan didefinisikan sebagai berikut.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{5.5} $$

Tentu formula ini juga harus dibuktikan. Pertama-tama kalau kita tahu bahwa permutasi yang bisa dihasilkan dengan memilih r dari n adalah ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, tapi di sini kita tahu bahwa permutasi dengan komponen yang sama tapi urutan yang berbeda hanya boleh dihitung sekali. Di sini tidak sulit untuk melihat bahwa kalau kita punya r komponen, maka ada $r!$ cara untuk mengurutkannya (misalnya A, B, C, bisa diurutkan sebagai ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA), sehingga kombinasi yang mungkin terjadi, adalah ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Dengan ini dengan mudah kita dapat menghitung bahwa jumlah pasangan ganda putri yang mungkin terbentuk dari 5 pemain putri adalah ${}_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$ pasang.

5.2 Sampling with replacements

Di sini kita mempelajari cara mengambil sample yang berbeda. Kalau sebelumnya sample yang terambil tidak dikembalikan, pada sampling with replacements sample yang sekali terambil dikembalikan dan ada kemungkinan akan terambil lagi. Misalnya ada 10 kartu, dan pada masing-masing kartu tercetak satu angka, dari 0 sampai 9. Misalnya kita mengambil kartu secara acak, dan mendapatkan kartu 6, setelah itu kartu ini dikembalikan, sehingga ada kemungkinan terambil kembali pada kali berikut. Kalau kita berhenti melakukan 2 kali sampling ada kemungkinan kita mendapatkan angka 66. Hal ini tidak mungkin terjadi dengan sampling without replacement.

Kalau kita melakukan 4 kali sampling dengan cara ini, berapa macam angka 4 digit yang mungkin muncul ?

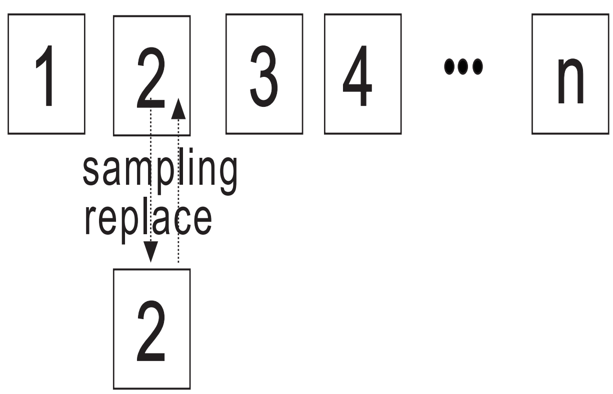


Figure 5.2: Sampling with replacement

1. Permutasi

   Jumlah permutasi yang bisa muncul jika kita mengambil secara acak r dari n pilihan yang ada, diekspresikan sebagai ${}_n\Pi_r$, dan dihitung sebagai berikut.

$$ {}_n\Pi_r = n^r \tag{5.6} $$

Tentu saja ini harus dibuktikan. Pilihan untuk sampling pertama ada n, begitu pula unutk sampling kedua, karena sampel pertama dikembalikan, dan selanjutnya. Karena itu pilihan yang mungkin terjadi untuk r kali sampling adalah perkalian n sebanyak r kali atau n^r. Jadi kalau kita mengambil sample 4 kali dari kartu yang masing-masing bertuliskan angka 0 sampai 9, permutasi yang mungkin terjadi adalah $10^4 = 10000$. Tentu saja ini sangat intuitif karena kita akan mendapatkan bilangan antara 0000 sampai 9999 yang jumlahnya 10000.

2. Kombinasi

   Pada waktu menghitung permutasi, urutan sample yang muncul harus diperhatikan. Lalu pada waktu menghitung kombinasi dengan sampling with eplacement, apa yang harus diperhatikan ? Sama seperti pada sampling without replacement yang penting adalah jenis sample yang muncul. Bedanya pada sample with replacement, satu jenis sample bisa muncul berkali-kali. Sehingga pada saat menghitung kombinasi di sini yang penting adalah menghitung pola dengan memperhatikan berapa kali tiap sample muncul. Untuk mempermudah masalah, anggap ada tiga bola masing-masing berwarna merah, hijau dan biru. Jika kita mengambil satu kali secara acak, ada tiga pola yang mungkin muncul: satu bola merah, satu bola hijau atau satu bola biru. Bagaimana kalau kita mengambil dua kali secara acak ? Di sini ada 6 pola yang mungkin muncul, 2 merah, 2 hijau, 2 biru, 1 merah 1 hijau, 1 merah 1 biru, 1 hijau 1 biru. Bagaimana kalau kita mengambil tiga kali secara acak ? Bagaimana kalau empat ? Menghitung pola ini tidak terlalu gampang. Kita butuh cara menghitung pola ini secara lebih sistematis.

   Jumlah kombinasi yang mungkin muncul dengan sampling with replacement sebanyak r kali dari n macam benda (misalnya bola dengan n warna) diekspresikan sebagai ${}_nH_r$ dan dihitung sebagai berikut.

$$ {}_nH_r = {}_{r+n-1}C_{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} \tag{5.7} $$

   Tentu formula di atas tidak muncul dari langit dan harus dibuktikan.

   Untuk memberi ilustrasi, anggap kita punya ada 3 macam warna bola dan kita melakukan sampling with replacement sebanyak 4 kali. Setiap kali kita mendapat bola dengan warna tertentu, kita menggambar lingkaran pada kolom tabel untuk warna tersebut. Contoh pada Fig. 5.3, dari sampling with replacement ini, bola merah 2 kali muncul, biru sekali muncul dan hitam juga sekali muncul. Untuk memisahkan ketiga kolom warna ini kita butuh 2 sekat.

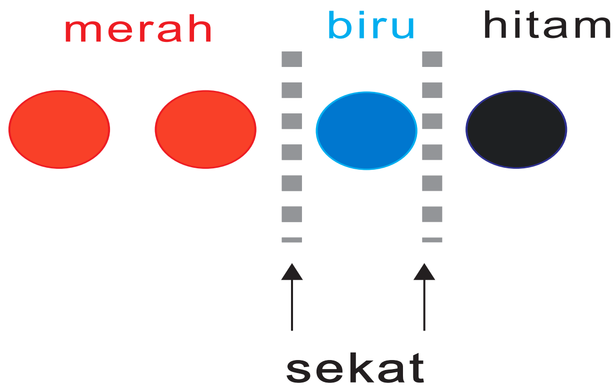


Figure 5.3: Combination with replacement: posisi sekat

Posisi kedua sekat ini menunjukkan permutasi yang bisa kita dapat dengan melakukan sampling with replacement ini. Beberapa contoh posisi sekat ditunjukkan Fig. 5.4.

Cepatnya dengan menggeser sekat ini, kita bisa mengekpresikan semua kombinasi yang mungkin terjadi dari 4 kali sampling with replacement di atas. Dari sini tidak sulit menarik kesimpulan bahwa kalau posisi sekat ini bisa mengekspresikan semua kombinasi yang bisa terjadi, maka jumlah kombinasi yang bisa terjadi sama dengan banyaknya kombinasi posisi sekat yang mungkin terjadi. Untuk contoh ini, bisa dilihat bahwa ada 4 bola dan 2 sekat, sehingga ada 6 posisi. Dari 6 posisi ini 2 posisi harus diisi oleh sekat, sehingga kombinasi posisi sekat yang mungkin adalah ${}_6C_2 = 15$, yang juga merupakan jumlah kombinasi bola yang kita dapat dari sampling with replacement 3 jenis bola.

Secara umum, dengan alur logika yang sama, kalau kita punya n macam benda, kita butuh $n-1$ sekat untuk membuat tabel utk menghitung kemunculan setiap benda tersebut dengan sampling with replacement. Kalau kita melakukan sampling with replacement sebanyak r kali, maka kita akan punya $r+n-1$ posisi, dan dari posisi-posisi itu $n-1$ harus diisi oleh sekat. Karena itu kombinasi posisi sekat yang bisa terjadi adalah ${}_{(r+n-1)}C_{n-1}$. (Q.E.D.).

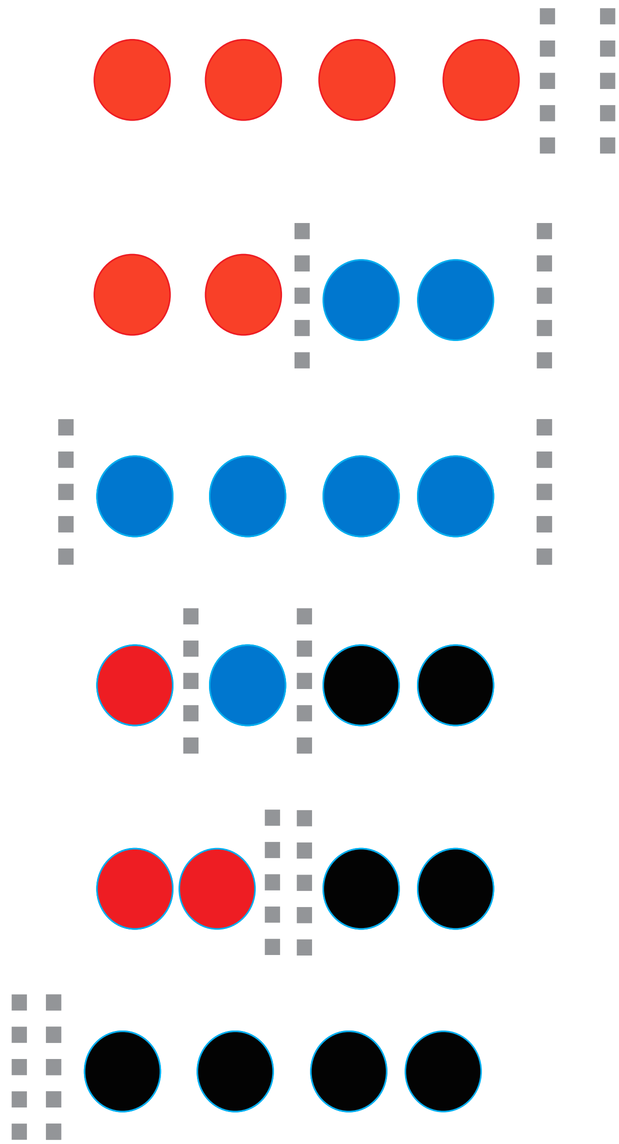


Figure 5.4: Combination with replacement

5.3 Permutation with Repetition

Permutation with repetition adalah permutasi di mana ada beberapa benda yang tidak dapat dibedakan. Misalnya kita punya tiga bola berwarna merah, satu bola berwarna biru dan satu bola lagi berwarna hitam. Berapa banyak permutasi yang bisa kita dapatkan dengan menjejer kelima bola tersebut ? Kalau ketiga bola merah bisa dibedakan satu dengan yang lain, maka kita dapatkan tentu $5! = 120$ permutasi. Tapi ingat bahwa ketiga bola merah ini tidak bisa dibedakan satu dengan yang lain. Sehingga, seperti diilustrasikan pada Fig. 5.5, menukar posisi bola merah dengan bola merah yang lain, akan menghasilkan pola yang sama. Ini berbeda kalau kita menukar posisi bola merah dengan bola biru misalnya, seperti yang diilustrasikan pada Fig. 5.6, yang tentunya akan menghasilkan pola yang berbeda.

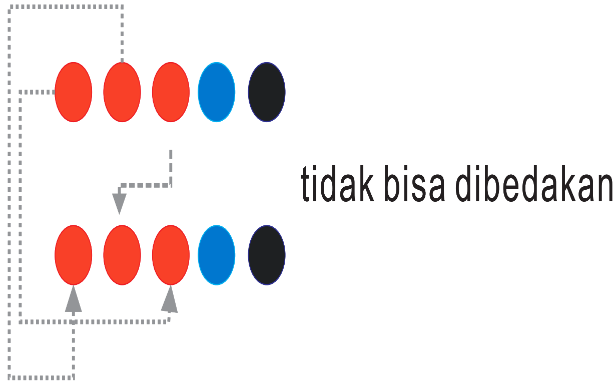


Figure 5.5: Repetitive Permuatation(sama)

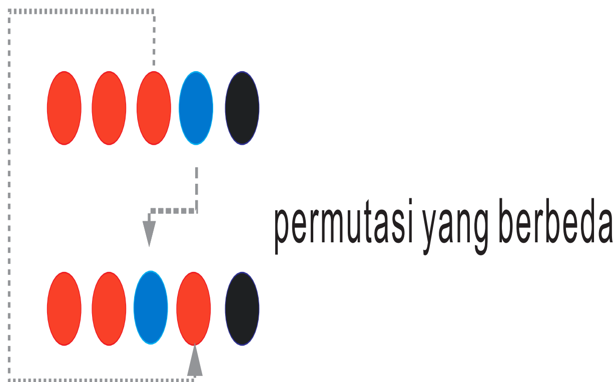


Figure 5.6: Repetitive Permuatation (beda)

Pada contoh ini, dengan jelas kita lihat bahwa permutasi ketiga bola merah, tidak mengubah pola keseluruhan dari permutasi ke lima bola tersebut. Karena ada $3! = 6$ permutasi bola merah, maka permutasi kelima bola bola ini adalah $\frac{5!}{3!} = 20$, yang jauh lebih sedikit dari jumlah permutasi awal, 120.

Secara umum, permutasi dari n benda yang terdiri dari repetisi s jenis benda, yang masing-masing jumlahnya adalah $r_1, r_2, \cdots, r_s$, di mana $\sum_{i=1}^{s} r_i = n$, adalah

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_s!} \tag{5.8}$$

Tidak sulit membuktikan formula di atas, karena kita tahu bahwa ada $r_1!$ untuk jenis benda pertama, $r_2!$ untuk jenis benda kedua dan seterusnya, dan permutasi jika benda-benda tersebut bisa dibedakan adalah $n!$, sehingga permutasi dengan repetisi dapat dihitung dengan formula di Eq. 5.8.

e.g.1: Hitung permutasi yang mungkin terjadi (permutasi dengan mengubah posisi huruf dalam suatu kata disebut anagram) untuk kata "JAKARTA".

Kata "JAKARTA" mengandung 7 huruf, tetapi ada 3 huruf "A" yang tidak dapat dibedakan satu dengan yang lain, sehingga menukar posisi satu huruf "A" dengan huruf

"A" yang lain tidak merubah anagram yang terjadi. 4 huruf lain, hanya ada masing-masing satu. Sehingga permutasi yang mungkin terjadi adalah $\frac{7!}{3!1!1!1!1!} = 840$.

e.g.2: Anda punya 2 onde-onde, 3 klepon, 1 lapis. Hitung permutasi dari urutan anda memakan jajan pasar tersebut.

Anda punya 6 jajan pasar, kalau semua jajan pasar ini berbeda, anda punya $6! = 720$ urutan yang berbeda untuk memakan jajan-jajan ini. Tapi menukar urutan makan onde-onde dengan onde-onde yang lain, tidak akan merubah permutasi, begitu pula menukar urutan makan klepon dengan klepon yang lain. Karena itu permutasi yang mungkin terjadi adalah $\frac{6!}{2!3!1!} = 60$.

5.3.1 Teori Binomial

Teori binomial menyatakan bahwa, untuk $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$,

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i a_1^{n-i} a_2^i \tag{5.9}$$

Tentu ini perlu dibuktikan.

proof:
Untuk himpunan $A = \{a_1, a_2\}$, dan direct product sebagai berikut.

$$\overbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}^{n} = \{\underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_1)}_{n}, \underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_2)}_{n}, \cdots, \underbrace{(a_2, a_2, \cdots, a_2)}_{n}\} \tag{5.10}$$

Sekarang kita hitung, ada berapa elemen dari himpunan di atas yang terdiri dari n a_1. Jelas bahwa hanya ada 1 elemen demikian. Ini akan menjadi koefisien dari $a_1^n a_2^0$. Angka 1 ini tidak muncul dari langit, tapi dengan pengetahuan permutation with repetition, kita tahu bahwa a_1 yang sama muncul n kali sedangkan a_2 muncul 0 kali. Sehingga banyaknya permutasi yang mungkin terjadi adalah $\frac{n!}{n!0!} = 1$. Alur logika yang sama bisa diterapkan untuk menghitung koefisien $a_1^0 a_2^n$.

Lalu bagaimana dengen koefisien untuk $a_1^{n-1} a_2^1$? Kita bisa menghitung koefisien ini dengan menghitung banyaknya elemen dari himpunan di atas yang terdiri dari $n - 1$ a_1 dan 1 a_2 dengan menghitung permutasinya: $\frac{n!}{(n-1)!1!} = n$.

Secara umum, koefisien dari $a_1^(n-i)a_2^i(0 \leqslant j \leqslant n)$, bisa didapat dengan menghitung permutasi elemen dari himpunan di atas yang terdiri dari $n - i$ a_1 dan i a_2, bisa didapat dengan menghitung permutasinya: $\frac{n!}{(n-i)!i!}$. Perhatikan bahwa jumlah permutasi ini sama dengan ${}_nC_i$, sehingga membuktikan Eq. 5.9.

e.g.1: tentukan koefisien dari x^8 untuk $(x^2 + x)^5$.

x^8 hanya bisa terjadi kalau ada 3 buah x^2 dan 2 buah x, sehingga jumlah permutasinya adalah $\frac{5!}{3!2!} = 10$, dan ini adalah koefisien dari x^8.

e.g.2: di chapter sebelumnya, kita belum membuktikan bahwa untuk himpunan A, jika $|A| = n$, maka $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Proposisi ini belum bisa dibuktikan pada chapter sebelumnya, karena memerlukan pengetahuan tentang teori binomial.

proof:
Untuk $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\underbrace{\varnothing}_{0\ elemen}, \underbrace{\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_n\}}_{1\ elemen}, \underbrace{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\},\ \cdots \{a_{n-1}, a_n\}}_{2\ elemen}, \cdots, \underbrace{\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}_{n\ elemen}\}$$

Sangat jelas bahwa himpunan bagian $\mathcal{P}(A)$ yang mempunyai 0 elemen ada ${}_nC_0 = 1$, yang mempunyai 1 elemen ada ${}_nC_1 = n$, dan seterusnya, sampai dengan jumlah himpunan bagian yang mempunyai n elemen, ${}_nC_n = 1$. Secara umum, banyaknya himpunan bagian yang mempunyai i elemen adalah ${}_nC_i$. Sehingga

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \tag{5.11}$$

Perhatikan Eq. 5.11 ini sama persis dengan Eq. 5.9 jika kita mensubstitusi $a_1 = 1$ dan $a_2 = 1$, sehingga,

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i 1^{n-j} 1^j = (1+1)^n = 2^n \tag{5.12}$$

(Q.E.D.)

5.3.2 Teori Multinomial

Teori multinomial menyatakan bahwa untuk $a_i \in \mathbb{R}(i = \{1, 2, \cdots, k\}), n \in \mathbb{N}$,

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k)^n = \sum_{r_1 + \cdots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!} a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k} \tag{5.13}$$

Pada Eq. 5.13, $\sum_{r_1+\cdots+r_k=n}$ didefinisikan sebagai jumlah kombinasi dari k bilangan bulat positif, $r_1, r_2, \cdots r_k$, di mana $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$. Perhatikan di sini, jika $k = 2$, teori multinomial akan equivalent dengan teori binomial.

Misalnya untuk $k = 3$, $n = 3$, maka teori multinomial ini akan menghasilkan,

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + a_3)^3 &= \sum_{r_1+r_2+r_3=3} a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \\
&= \frac{3!}{3!0!0!} a_1^3 a_2^0 a_1^0 + \frac{3!}{2!1!0!} a_1^2 a_2^1 a_3^0 + \frac{3!}{2!0!1!} a_1^2 a_2^0 a_3^1 + \\
&\quad \frac{3!}{1!2!0!} a_1^1 a_2^2 a_3^0 + \frac{3!}{1!0!2!} a_1^1 a_2^0 a_3^2 + \frac{3!}{1!1!1!} a_1^1 a_2^1 a_3^1 + \\
&\quad \frac{3!}{0!3!0!} a_1^0 a_2^3 a_3^0 + \frac{3!}{0!2!1!} a_1^0 a_2^2 a_3^1 + \frac{3!}{0!1!2!} a_1^0 a_2^1 a_3^2 + \\
&\quad \frac{3!}{0!0!3!} a_1^0 a_2^0 a_3^3 \\
&= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1^2 a_2 + 3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2 + 3a_1 a_3^2 + \\
&\quad 3a_2^2 a_3 + 3a_2 a_3^2 + 6a_1 a_2 a_3
\end{aligned}$$

Tentu ini juga perlu dibuktikan. Tetapi dengan adanya bukti tentang teori binomial di atas, pembuktikan dari teori multinomial ini sangat intuitif.

proof:
Untuk himpunan $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, dan direct product sebagai berikut.

$$\overbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}^{n} = \{\underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_1)}_{n}, \underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_2)}_{n}, \underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_2, a_1)}_{n}, \cdots, \underbrace{(a_k, a_k, \cdots, a_k)}_{n}\} \tag{5.14}$$

Dengan permutation with repetition kita tahu bahwa ada $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k}$ permutasi untuk untuk himpunan bagian yang mempunyai r_1 buah a_1, r_2 buah $a_2 \cdots r_k$ buah a_k di mana $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$. Sama dengan pembuktian teori binomial, jumlah permutasi ini adalah koefisien dari $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_k^{r_k}$, dan ini membuktikan teori multinomial pada Eq. 5.13.

Review

- Terangkan beda sampling with replacement dan sampling without replacement. Beri beberapa contoh nyata untuk menerangkan bedanya.
- Terangkan beda permutasi dan kombinasi. Pikirkan beberapa contoh nyata untuk menerangkan bedanya.
- Terangkan beda permutasi dan permutasi repetitif (Permutation with Repetition). Pikirkan beberapa contoh untuk menerangkan beda keduanya.
- Terangkan arti teori binomial dan buktikan teori ini.
- Terangkan arti teori multinomial dan buktikan teori ini.

Soal Latihan

1. ada berapa cara membagi 10 mangga untuk 4 orang ?
2. ada berapa cara membagi 10 mangga untuk 4 orang, kalau setiap orang dijamin mendapat setidaknya 1 mangga ?
3. ada berapa cara membagi 10 mangga untuk tiga orang, jika salah satu orang dijamin mendapat setidaknya 1 mangga, dan 2 orang lainnya dijamin setidaknya mendapat 2 dan 3 mangga ?
4. untuk $(x^2 + 2x + 1)^5$, hitung koefisien x^8.
5. untuk $(2x^3 + x + 3)^6$, hitung koefisieen x^10.
6. ada berapa cara untuk membagi 4 bola yang masing-masing berlainan warnanya, kedalam 2 kotak, jika kedua kotak itu tidak dapat dibedakan ? Ada berapa cara untuk 4 bola yang sama jika kedua kotak tersebut dapat dibedakan ?

7. ada berapa cara untuk membagi 4 bola yang masing-masing berlainan warnanya, kedalam 3 kotak, jika kedua kotak itu tidak dapat dibedakan ? Ada berapa cara untuk 4 bola di atas jika ketiga kotak tersebut dapat dibedakan ?

8. ada berapa macam kata yang dapat dirangakai dari 9 huruf, A, A, B, B, B, C, C, C, C ? Ada berapa kata di mana 3 huruf B muncul bersebelahan. Dan berapa jumlah kata di mana kedua huruf A tidak muncul bersebelahan ?

9. ada berapa permutasi untuk menjejerkan 6 huruf: H, I, T, U, N, G ? Kalau huruf-huruf ini dijejerkan dengan urutan alphabet, kata "HITUNG" muncul di urutan ke berapa ?

10. dari 8 huruf: R, E, M, P, E, Y, E, K, berapa kata dapat dirangkai di mana 2 huruf E tidak muncul bersebelahan ?

11. dari 9 huruf: I, N, D, O, N, E, S, I, A, dapat membentuk berapa kata ? Dan hitung jumlah kata-kata di mana tidak ada huruf yang sama bersebelahan.

12. banyangkan ada seorang salesman yang harus menjajakan dagangannya dari kota ke kota dengan aturan sebagai berikut:

    - ada N kota yang harus dikunjunginya, masing-masing HANYA sekali.
    - dia bisa memilih kota pertamanya secara acak. antara dua kota manapun diketehui
    - pada akhir perjalanannya dia harus kembali ke kota tempatnya memulai perjalanannya (kota tersebut dikunjunginya dua kali).

    Hitung ada berapa rute yang mungkin ditempuhnya (Rute di sini adalah urutan salesman ini mengunjungi N kota ini).

    Hitung ada berapa macam panjang rute yang bisa terjadi ?

    (Catatan: kalau persoalan ini diubah menjadi persoalan memilih rute terpendek, maka soal ini disebut Travelling Salesman Problem (TSP), salah satu problem optimasi yang terkenal.)

Chapter 6

Bilangan Natural dan Axioma Peano

> That which is provable ought not to be believed in science without proof.
>
> Richard Dedekind

Di chapter ini kita akan mempelajari tentang bilangan natural dan operasi aritmatika dasar, penjumlahan dan perkalian atas bilangan natural.

Selama berabad-abad manusia melakukan penjumalahan, misalnya seseorang yang mempunyai seekor kambing, lalu membeli seekor kambing baru akan mempunyai total 2 ekor kambing. Konsep "satu" atau "penjumlahan" dimengerti oleh manusia dari pengalaman hidup sehari-hari dan juga konsensus tidak tertulis dengan orang-orang lain. Dari kecil kita juga diharuskan menerima kalau 1+1=2. Tapi apa yang mendasari pemikiran ini? Pada geometri ada axioma-axioma yang mendasari teori-teori turunannya. Tapi sampai pada akhir abad 19, tidak ada konsep yang menerangkan dengan jelas, apa itu "1", apa itu "+", mengapa "1+1=2" dan sebagainya. Ini menyebabkan, aritmatika tidak sepadan dengan geometri sebagai ilmu.

Giuseppe Peano (1858-1932) membangun fondasi matematika dengan memformulasi dari dasar definisi bilangan natural dan aritmatika atas bilangan natural. Dia memformulasi axioma tentang bilangan natural yang menjadi dasar bagi teori operasi di atas bilangan natural. Dengan ini Peano "menaikkan" level aritmatika menjadi setingkat dengan geometri. Dia memulai dengan Axioma Peano (kadang-kadang disebut axioma Dedekind-Peano).

Chapter ini tidak terlalu "minimum", dalam arti, isi dari chapter ini menghubungkan matematika prosedural dengan matematika yang abstrak yang mungkin tidak diperlukan dalam kehidupan sehari-hari, meskipun ini penting untuk menghubungkan matematika tingkat SMA ke tingkat universitas.

Sebelum menerangkan isi dari axioma Peano, perlu dimengerti arti dari terminologi berikut.

- **axioma**: proposisi yang tidak perlu dibuktikan. Ini adalah "aturan dasar" yang mendasari proposisi-proposisi lain.
- **lemma**: teori "perantara" yang dibutuhkan di tengah-tengah pembuktikan teori

teori lain.

- **teori**: proposisi yang harus dibuktikan dengan axioma sebagai asumsi dan proses argumen yang valid.

- **definisi**: penjelasan tentang arti dari suatu terminologi (kata-kata).

6.1 Axioma Peano

Sebelum masuk ke axioma Peono, mari kita setuju bahwa ada himpunan yang berisi bilangan yang kita gunakan untuk menghitung sesuatu, namakan himpunan itu $\mathbb{N}$.

Axioma Peano

1. (P-1): $0 \in \mathbb{N}$
   (Awalnya dalam Axioma pertama ini Peano menuliskan $1 \in \mathbb{N}$, tapi dikemudian hari mennganti 1 dengan 0. Pada masa sekarang dalam buku matematika, ada yang menggunakan 0 adapula 1. Ini tidak terlalu signifikan, tapi dalam buku ini kita menggunakan 0. Baik 0 ataupun 1 adalah satu-satunya bilangan yang muncul dalam axioma Peano).

2. (P-2): $\forall x \in \mathbb{N}(S(x) \in \mathbb{N})$
   Axioma menyatakan bahwa ada fungsi $S(x)$ yang juga menghasilkan elemen himpunan bilangan natural, $S(x)$ ini disebut successor function. $S(x)$ disebut successor (elemen berikut) dari x

3. (P-3): $\forall x \in \mathbb{N}(S(x) \neq 0)$
   Axioma ini menyatakan bahwa tidak ada elemen dari bilangan natural yang menghasilkan successor 0, atau 0 tidak mempunyai pendahulu.

4. (P-4): $\forall x, y \in \mathbb{N}((S(x) = S(y)) \implies (x = y))$
   Axioma ini menyatakan bahwa elemen yang berbeda akan menghasilkan successor yang berbeda.

5. (P-5): $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}(((0 \in \mathbb{E}) \wedge (x \in \mathbb{E})) \implies (S(x) \in \mathbb{E})) \implies \mathbb{E} = \mathbb{N})$ Axioma ini mendasari konsep induksi matematika. Axioma ini menyatakan bahwa untuk suatu himpunan, jika 0 adalah elemen dari himpunan itu dan jika proposisi berikut berlaku:

   jika n merupakan elemen himpunan itu maka $S(n)$ juga elemen himpunan tersebut

   maka himpunan tersebut adalah $\mathbb{N}$

Untuk operasi penjumlahan Peano mendefinisikan axioma berikut.

1. (a-1): $\forall x \in \mathbb{N}(x + 0 = x)$

2. (a-2): $\forall x, y \in \mathbb{N}(x + S(y) = S(x + y))$

Sedangakan untuk perkalian Peano mendefinisikan axioma berikut.

1. (m-1): $\forall x \in \mathbb{N}(x \cdot 0 = 0)$
2. (m-2): $\forall x, y \in \mathbb{N}(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

Axioma-axioma di atas adalah "aturan dasar" bilangan natural dan operasi penjumlahan dan perkalian di atasnya yang tidak perlu dibuktikan. Aturan-aturan (teori-teori lain) harus seperti hukum komutatif, asosiatif dan distributif dan seterusnya harus dibuktikan dari axioma-axioma tersebut.

Lemma 1 (L-1): jika $S(0) = 1$, buktikan $\forall x \in \mathbb{N}(x + 1 = S(x))$

proof:

$$\begin{aligned} x + 1 &= x + S(0) \\ &= S(x + 0) \quad (dari\ a - 2) \\ &= S(x) \quad (a - 1) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 2 (L-2): buktikan $\forall x \in \mathbb{N}(x + 0 = 0 + x)$

proof:

Pembuktikan dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$0 + 0 = 0 + 0$$

- asumsi induksi: untuk $x = n$, berlaku,

$$n + 0 = 0 + n$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned} S(n) + 0 &= S(n) \quad (dari\ a - 1) \\ &= S(n + 0) \quad (a - 1) \\ &= S(0 + n) \quad (asumsi) \\ &= 0 + S(n) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 3 (L-3): buktikan $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \cdot 1 = x)$

proof:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= x \cdot S(0) \\ &= x \cdot 0 + x \quad (dari\ m-2) \\ &= 0 + x \quad (m-1) \\ &= x + 0 \quad (L-2) \\ &= x \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 4 (L-4): buktikan $\forall x \in \mathbb{N}\ (1 \cdot x = x)$

proof:

Pembuktikan dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, $1 \cdot 0 = 0$ (dari m-1)
- asumsi induksi: untuk $x = n$, berlaku,

$$1 \cdot n = n$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned} 1 \cdot S(n) &= (1 \cdot n) + 1 \quad (m-2) \\ &= n + 1 \quad (asumsi) \\ &= S(n) \quad (L-1) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teori 1 (T-1): buktikan sifat asosiatif penjumlahan:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ ((x + y) + z = x + (y + z))$$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $z = 0$,

$$\begin{aligned} (x + y) + 0 &= x + y \quad (dari\ a-1) \\ &= x + (y + 0) \quad (a-1) \end{aligned}$$

Karena itu (T-1) berlaku.

- asumsi induksi: untuk $x = n$, berlaku $(x + y) + n = x + (y + n)$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned}(x+y)+S(n) &= S((x+y)+n) \quad (dari\ a-2)\\ &= S(x+(y+n)) \quad (asumsi)\\ &= x+S(y+n) \quad (a-2)\\ &= x+(y+S(n)) \quad (a-2)\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 6 (L-6): buktikan $\forall x \in \mathbb{N}\ (1+x = x+1)$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$,

  $$1+0 = 0+1 \quad (dariL-2)$$

  Karena itu, (L-6) berlaku.

- asumsi induksi: untuk $x = n$, berlaku $1+n = n+1$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned}1+S(n) &= S(1+n) \quad (dari\ a-2)\\ &= S(n+1) \quad (asumsi)\\ &= n+S(1) \quad (a-2)\\ &= n+(1+1) \quad (L-1)\\ &= (n+1)+1 \quad (T-1)\\ &= S(n)+1 \quad (L-1)\end{aligned}$$

Q.E.D.

Teori 2 (T-2): buktikan sifat komutatif penjumlahan:

$$x+y = y+x$$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $y = 0$,

  $$x+0 = 0+x\ (dari\ L-2)$$

- asumsi induksi: untuk $y = n$, berlaku $x+n = n+x$ untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned}x+S(n) &= S(x+n) \quad (dari\ a-2)\\ &= S(n+x) \quad (asumsi)\\ &= n+S(x) \quad (a-2)\\ &= n+(x+1) \quad (a-2)\\ &= n+(1+x) \quad (L-6)\\ &= (n+1)+x \quad (T-1)\\ &= S(n)+x \quad (L-1)\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma (L-7): buktikan $\forall x \mathbb{N}\ (x \cdot 1 = x)$

proof:

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= x \cdot S(0) \\
&= x \cdot 0 + x \quad (dari\ m-2) \\
&= 0 + x \quad (m-1) \\
&= x + 0 \quad (L-2) \\
&= x \quad (a-1)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Q.E.D.

Teori (T-3): buktikan sifat distributif perkalian:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ ((x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $z = 0$, teori ini berlaku karena,

$$\begin{aligned}
(x+y) \cdot 0 &= 0 \quad (dari\ m-1) \\
&= = 0 + 0 \quad (a-1) \\
&= x \cdot 0 + y \cdot 0 \quad (m-1)
\end{aligned}$$

- asumi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$(x+y) \cdot n = x \cdot n + y \cdot n$$

- untuk $z = S(n)$,

$$\begin{aligned}
(x+y) \cdot S(n) &= (x+y) \cdot n + (x+y) \quad (dari\ m-2) \\
&= (x \cdot n + y \cdot n) + (x+y) \quad (asumsi) \\
&= x \cdot n + (y \cdot n + (x+y)) \quad (T-1) \\
&= x \cdot n + (y \cdot n + (y+x) \quad (T-2) \\
&= x \cdot n + ((y \cdot n + y) + x) \quad (T-1) \\
&= x \cdot n + (y \cdot S(n) + x) \quad (m-2) \\
&= x \cdot n + (x + y \cdot S(n)) \quad (T-2) \\
&= (x \cdot n + x) + y \cdot S(n) \quad (T-1) \\
&= x \cdot S(n) + y \cdot S(n) \quad (m-2)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma (L-8): buktikan $0 \cdot x = x \cdot 0$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 0$$

- asumsi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$0 \cdot n = n \cdot 0$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned} 0 \cdot S(n) &= 0 \cdot n + 0 \quad (dari\ m-2) \\ &= n \cdot 0 + 0 \quad (asumsi) \\ &= n \cdot 0 + 1 \cdot 0 \quad (m-1) \\ &= (n+1) \cdot 0 \quad (T-3) \\ &= S(n) \cdot 0 \quad (L-1) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma (L-9): buktikan $1 \cdot x = x \cdot 1$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \quad (dari\ L-8)$$

- asumsi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$1 \cdot n = n \cdot 1$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned} 1 \cdot S(n) &= 1 \cdot n + 1 \quad (dari\ m-2) \\ &= n \cdot 1 + 1 \quad (asumsi) \\ &= n \cdot 1 + 1.1 \quad (L-7) \\ &= (n+1) \cdot 1 \quad (T-3) \\ &= S(n) \cdot 1 \quad (L-1) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teori (T-4): buktikan sifat distributif perkalian:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$\begin{aligned}
0 \cdot (y + z) &= (y + z) \cdot 0 \quad (dari\ L - 8) && (6.2)\\
&= 0 \quad (m - 1)\\
&= 0 + 0 \quad (a - 1)\\
&= y \cdot 0 + z \cdot 0 \quad (m - 1)\\
&= 0 \cdot y + 0 \cdot z \quad (L - 8) && (6.3)
\end{aligned}$$

- asumsi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$n \cdot (y + z) = n \cdot y + n \cdot z$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned}
S(n) \cdot (y + z) &= (n + 1) \cdot (y + z) \quad (dari\ L - 1)\\
&= n \cdot (y + z) + 1 \cdot (y + z) \quad (L - 3)\\
&= n \cdot y + n \cdot z + 1 \cdot (y + z) \quad (asumsi)\\
&= n \cdot y + n \cdot z + (y + z) \cdot 1 \quad (L - 9)\\
&= n \cdot y + n \cdot z + (y \cdot 1 + z \cdot 1) \quad (T - 3)\\
&= n \cdot y + n \cdot z + (z \cdot 1 + y \cdot 1) \quad (T - 2)\\
&= n \cdot y + n \cdot z + (z \cdot 1 + y \cdot 1) \quad (T - 2)\\
&= n \cdot y + n \cdot z + (1 \cdot z + 1 \cdot y) \quad (L - 9)\\
&= n \cdot y + (n \cdot z + 1 \cdot z) + 1 \cdot y \quad (T - 1)\\
&= n \cdot y + 1 \cdot y + (n \cdot z + 1 \cdot z) \quad (T - 2)\\
&= (n + 1) \cdot y + (n + 1) \cdot z \quad (T - 3)\\
&= S(n) \cdot y + S(n) \cdot z \quad (L - 1)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Teori (T-5): buktikan sifat komutatif perkalian:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}\ (x \cdot y = y \cdot x)$$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$0 \cdot y = y \cdot 0 \quad (dari\ L-8)$$

- asumsi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$n \cdot y = y \cdot n$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned} S(n) \cdot y &= (n+1) \cdot y \quad (dari\ L-1) \\ &= n \cdot y + 1 \cdot y \quad (T-3) \\ &= y \cdot n + 1 \cdot y \quad (asumsi) \\ &= y \cdot n + y \cdot 1 \quad (L-9) \\ &= y \cdot (n+1) \quad (T-4) \\ &= y \cdot S(n) \quad (L-1) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teori (T-6): buktikan sifat asosiatif perkalian:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $z = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot 0 &= 0 \quad (dari\ m-1) \\ &= x \cdot 0 \quad (m-1) \\ &= x \cdot (y \cdot 0) \quad (m-1) \end{aligned}$$

- asumsi induksi, untuk $z = n$, berlaku:

$$(x \cdot y) \cdot n = x \cdot (y \cdot n)$$

- untuk $z = S(n)$,

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot S(n) &= (x \cdot y) \cdot (n+1) \quad (dari\ L-1) \\ &= (x \cdot y) \cdot n + (x \cdot y) \cdot 1 \quad (T-4) \\ &= x \cdot (y \cdot n) + (x \cdot y) \cdot 1 \quad (asumsi) \\ &= x \cdot (y \cdot n) + x \cdot y \quad (L-7) \\ &= x \cdot (y \cdot n + y) \quad (T-4) \\ &= x \cdot (y \cdot (n+1)) \quad (T-4) \\ &= x \cdot (y \cdot S(n)) \quad (L-1) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Q.E.D.

6.2 Ordering on N

Setelah membahas tentang axioma Peano dan membuktikan sifat komutatif, distributif dan asosiatif dari penjumlahan dan perkalian, di sini akan dibahas tentang sesuatu yang disebut Ordering on $\mathbb{N}$. Ini adalah tentang "urutan" yang terjadi dalam himpunan bilangan natural. Gampangnya, di sini diberikan definisi tentang, "lebih kecil" dan "lebih kecil atau sama dengan" dalam himpunan bilangan natural.

Definisi (D-1):

- kita mengatakan $x < y$ (x lebih kecil dari x) kalau $\exists (k \neq 0) \in \mathbb{N}\ (y = x + k)$
- kita mengatakan $x \leqslant y$ (x lebih kecil atau sama dengan y) kalau $\exists k \in \mathbb{N}\ (y = x+k)$

Note: "Lebih besar" dan "lebih besar sama dengan" tidak perlu di definisikan. Karena $y > x$ sama artinya dengan $x < y$, dan $y \geqslant x$, sama artinya dengan $x \leqslant y$.

Lemma (L-10): buktikan untuk $x, y, z \in \mathbb{N}$, $(x \leqslant y) \wedge (y < z) \implies (x < z)$

proof:

karena $x \leqslant y$, maka $\exists k \in \mathbb{N}\ (y = x + k)$, dan karena $(y < z)$, maka $\exists (l \neq 0) \in \mathbb{N}\ (z = y + l)$, sehingga,

$$\begin{aligned}
(y < z) &\implies \exists k \exists (l \neq 0) \in \mathbb{N}\ ((x + k) + l < z) \\
&\implies \exists k \exists (k \neq 0) \in \mathbb{N}\ (x + (k + l) = z) \\
&\implies x < z
\end{aligned}$$

Ini karena, jika $k = 0$ maka $(k + l) = (l + k) = l \in \mathbb{N}$ (dari T-2 dan a-1), dan jika $k \neq 0$ maka $(l + k) \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Lemma (L-11): buktikan untuk $x, y, z \in \mathbb{N}$, $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \implies (x \leqslant z)$

proof:

karena $x \leqslant y$, maka $\exists k \in \mathbb{N}\ (y = x+k)$, dan karena $(y \leqslant z)$, maka $\exists l \in \mathbb{N}\ (z = y+l)$, sehingga,

$$\begin{aligned}
(y \leqslant z) &\implies \exists k \exists l \in \mathbb{N}\ ((x + k) + l < z) \\
&\implies \exists k \exists l \in \mathbb{N}\ (x + (k + l) = z) \\
&\implies x \leqslant z
\end{aligned}$$

Ini karena untuk $(k = 0) \wedge (l = 0) \implies (k + l) = 0$, sehingga $x + (k + l) = x + 0 = x = z$.

Lemma (L-12): buktikan $\forall x \in \mathbb{N}\ (S(x) \neq x)$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 0$, lemma ini berlaku karena:

$$\forall x \in \mathbb{N}(0 \neq S(x)) \quad (dari\ P - 3)$$

- asumsi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$S(n) \neq n$$

- untuk $x = S(n)$,

$$S(S(n)) \neq S(n) \quad (dari\ asumsi)$$

Q.E.D.

Lemma (L-13): buktikan $\forall x \forall (k \neq 0) \in \mathbb{N}\ (x \neq x + k)$

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- untuk $x = 1$, lemma ini berlaku karena:

$$1 + k = k + 1 = S(k) \quad (dari\ T - 2, L - 1)$$

  Dan karena $k \neq 0$, maka $1 \neq S(k) = n + k$

- asumsi induksi, untuk $x = n$, berlaku:

$$n \neq n + k$$

- untuk $x = S(n)$,

$$\begin{aligned} S(n) + k &= k + S(n) \quad (dari\ T - 2) \\ &= S(k + n) \quad (a - 2) \\ &= S(n + k) \quad (T - 2) \\ &\neq S(n) \quad (asumsi) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teori (T-7): Well ordering of $\mathbb{N}$: untuk $\forall x, y \in \mathbb{N}$, hanya tepatnya satu diantara tiga proposisi di bawah yang berlaku berlaku.

1. $x < y$

2. $x = y$

3. $y < x$

Cepatnya teori menyatakan "ketunggalan" proposisi, yang artinya kalau salah satu dari tiga proposisi di atas berlaku, dua yang lainnya tidak mungkin berlaku.

proof:

Jika $x < y$,

$$\exists(k \neq 0) \in \mathbb{N}(y = x + k) \; (definisi)$$

karena $k \neq 0$,

$$y = x + k \neq x \quad (dari \; L - 13)$$

Sehingga, $x = y$ tidak berlaku.

Reductio ad absurdum akan digunakan untuk membuktikan bahwa $y < x$ tidak berlaku. Asumsikan kalau $y < x$ berlaku, sehingga,

$$\exists(l \neq 0)(x = y + l) \; (definisi)$$

karena $\exists(k \neq 0) \in \mathbb{N} \; (y = x + k)$, sehingga,

$$\begin{aligned} \exists(k \neq 0)\exists(l \neq 0)(x &= (x + k) + l) \\ \exists(k \neq 0)\exists(l \neq 0)(x &= x + (k + l)) \; (dari \; T - 1) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$x = x + (k + l)$ hanya berkalu kalau $(k = 0) \wedge (l = 0)$, sedangkan dari proposisi di atas $(k \neq 0) \wedge (l \neq 0)$, sehingga asusmsi ini membawa implikasi yang kontradiktif, karena dari (L-12) $x \neq x + (k + l)$. Dengan reductio ad absurdum valid untuk disimpulkan bahwa $y < x$ tidak benar. Dengan demikian terbukti jika $x < y$ berlaku, maka $x = y$ dan $y < x$ tidak berlaku.

Jika $x = y$, asumsikan kalau $x < y$, sehingga

$$\exists(k \neq 0) \in \mathbb{N} \; (y = x + k) \; (dari \; definisi) \tag{6.6}$$

karena $x = y$, maka

$$\exists(k \neq 0) \in \mathbb{N} \; (x = x + k) \tag{6.7}$$

Sedangkan dari (L-12) untuk $\forall(k \neq 0)\mathbb{N} \; (x \neq x + k)$, sehingga terjadi kontradiktsi. Dengan reductio ad absurdum valid untuk disimpulkan bahwa asumsi $x < y$ tidak mungkin benar.

Berikutnya asumsikan kalau $y < x$, sehingga

$$\exists(k \neq 0) \in \mathbb{N}\ (x = y + k)\ (dari\ definisi) \tag{6.8}$$

karena $x = y$, maka

$$\exists(k \neq 0) \in \mathbb{N}\ (y = y + k) \tag{6.9}$$

Dari (L-12) untuk $\forall(k \neq 0)\mathbb{N}\ (y \neq y + k)$, sehingga terjadi kontradiksi. Dengan reductio ad absurdum valid untuk disimpulkan bahwa asumsi $y < x$ tidak mungkin benar.

Dengan demikian terbukti jika $x = y$ berlaku, maka $x < y$ dan $y < x$ tidak berlaku.

"Ketunggalan" dari $y < x$, bisa dibuktikan dengan cara yang sama.

Definisi (D-2):
Untuk himpunan $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$ elemen $m \in \mathbb{N}$ di sebut the least elemen (elemen terkecil) kalau:

$$\forall n \in \mathbb{S}\ (m \leqslant n)$$

Lemma (L-14): untuk $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$ kalau $\mathbb{S}$ mempunyai elemen terkecil, elemen terkecil itu unique (ini ekspresi matematika untuk mengekspresikan "hanya satu", "satu-satunya" atau "tunggal".

proof:

Asumsikan ada 2 elemen terkecil, m_1 dan m_2. Dari definisi, harus berlaku, $m_1 \leqslant m_2$ sekaligus $m_2 \leqslant m_1$. Dari (T-7) ini hanya bisa terjadi kalau $m_1 = m_2$, yang berarti bahwa elemen terkecil ini unique.

Lemma (L-15): setiap $\mathbb{S} \subset \mathbb{N}$, kalau $|\mathbb{S}| \neq \varnothing$, maka $\mathbb{S}$ mempunyai elemen terkecil.

proof:
Pembuktian dengan induksi matematika:

- jika $|\mathbb{S}_1| = 1$ dan elemen tunggalnya m_1. lemma ini berlaku karena karena $m_1 \leqslant m_1$ maka n adalah elemen terkecilnya.
- asumsi induksi, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$ dimana $|\mathbb{S}_K| = K$, mempunyai elemen terkecil m_K.

- untuk $\mathbb{S}_{K+1} \subseteq \mathbb{N}$ dimana $|\mathbb{S}_{K+1}| = K + 1$, himpunan ini bisa ditulis sebagai berikut.
$$\mathbb{S}_{K+1} = \mathbb{S}_K \cup \{n_{K+1}\}$$
Dari asumsi, m_K adalah elemen terkecil $\mathbb{S}_K$, dan dari (T-7) ada tiga kemungkinan hubungan antara m_K dan elemen baru n_{K+1}. Kalau $m_K < n_{K+1}$ maka m_K adalah elemen terkecil dari $\mathbb{S}_{K+1}$. Kalau $m_K = n_{K+1}$ maka m_K tetap elemen terkecil dari $\mathbb{S}_{K+1}$. Kalau $n_{K+1} < m_K$ maka n_{K+1} adalah elemen terkecil dari $\mathbb{S}_{K+1}$. Apapun yang terjadi dari ketiga kemungkinan di atas, tetap ada satu elemen terkecil.

Q.E.D.

Soal Latihan

1. jika $S(0) = 1$ dan $S(S(0)) = 2$, buktikan bahwa $1 + 1 = 2$.
2. jika $S(0) = 1, S(1) = 2, S(2) = 3$, buktikan bahwa $2 \cdot 2 = S(3)$.
3. untuk $\forall(x \neq 0)\exists y\ (x = S(y))$.
4. untuk $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, buktikan $(x < y) \implies (x + z < y + z)$.

Chapter 7

Mapping dan Fungsi

Knowledge isn't free. You have to pay attention

Richard Feynman

Pada chapter ini akan dibahas konsep Fungsi (Function). Kita akan mulai dari notasi suatu konsep yang disebut mapping sebagai berikut.

$$f : X \to Y \tag{7.1}$$

Dalam notasi di atas, X dan Y adalah dua himpunan yang bisa berbeda ataupun sama, sedangkan f adalah "aturan" yang menghubungkan kedua himpunan ini. Notasi di atas dibaca: "f maps X to Y (f memetakan X pada (ke) Y).

Kalau notasi di atas menggambarkan hubungan antara dua himpunan, f ini juga dapat dieskpresikan sebagai "aturan" yang menghubungkan element dari kedua himpunan di atas. Kalau $x \in X$ dan $y \in Y$, maka hubungan keduanya dapat ditulis dengan notasi sebagai berikut.

$$f : x \longmapsto y \tag{7.2}$$

atau

$$y = f(x) \tag{7.3}$$

Bedakan $\to$ yang menghubungkan himpunan dengan himpunan, dan $\mapsto$ yang menghubungkan dua element dari himpunan yang berbeda ataupun sama.

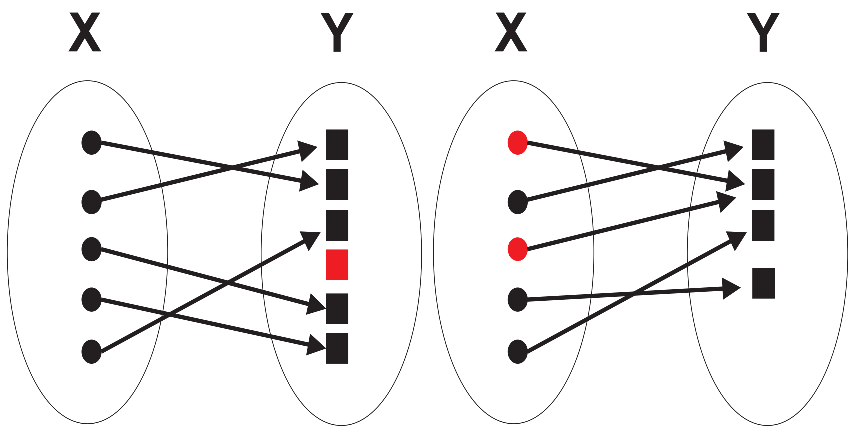
Jika "aturan" ini memenuhi beberapa syarat, f in disebut **mapping**. Agar f bisa disebut mapping, ada 2 aturan yang harus dipatuhi.

1. Semua element X harus mempunyai pasangan yang merupakan element Y.
2. Semua element X hanya bisa mempunyai tepatnya satu pasangan yang merupakan element Y.

Kedua syarat di atas dapat dirangkum menjadi proposisi di bawah.

$$\forall x, z \in X, \exists y \in Y \ \ ((y = f(x)) \wedge (f(x) \neq f(z)) \implies (x \neq z)) \tag{7.4}$$

Untuk memperjelas konsep mapping ini, ilustrasi di bawah memberi dua contoh mapping.



(a) contoh 1 (b) contoh 2

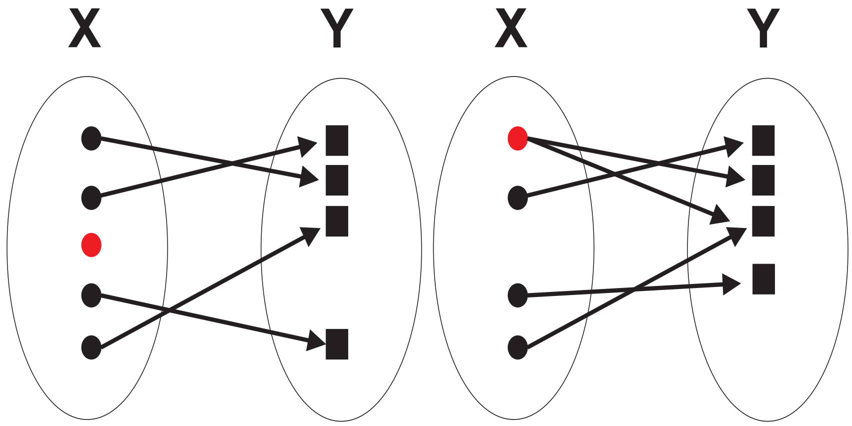
Figure 7.1: Mapping

Figure 7.1a adalah contoh mapping. Hubuangan antara X dan Y ini memenuhi syarat mappping, karena semua element X mempunyai pasangan yang merupankan element Y. Element ■ pada himpunan Y tidak mempunyai pasangan, tapi kedua syarat di atas hanya mengharuskan semua element X mempunyai pasangan, tapi tidak mengharuskan semua element Y untuk mempunyai pasangan.

Figure 7.1 juga contoh dari mapping. Hubungan antara X dan Y ini memenuhi syarat mapping, karena semua element X mempunyai pasangan yang merupakan element Y. Dua element X yang digambarkan dengan ● mempunyai pasangan yang sama. Ini tidak menjadi masalah, karena kedua syarat di atas tidak melarang dua elememt X yang berbeda mempunyai pasangan yang sama.

Untuk lebih memperjelas definisi mapping, ilustrasi di bawah menggambarkan hubungan yang bukan mapping.

Figure 7.2a satu bukan mapping, karena ada satu element X yang digambarkan dengan ● yang tidak mempunyai pasangan. Sedangkan Fig. 7.2b juga bukan mapping karena ● mempunyai 2 pasangan.



(a) contoh 1 (b) contoh 2

Figure 7.2: Bukan Mapping

Untuk mapping $f : X \to Y$, X disebut **domain** dari f, sedangkan Y disebut **codomain** dari f. Himpunan di bawah disebut **range** atau **Image** dari X, dan diekpresikan dengan $Imagef$ atau Imf (bedakan Im sebagai notasi dari imaginary part dari sebuah bilangan complex (yang ada di luar lingkup matematika minimum, dan sebagai notasi dari image).

$$Im\ f = \{f(x) | x \in X\} \tag{7.5}$$

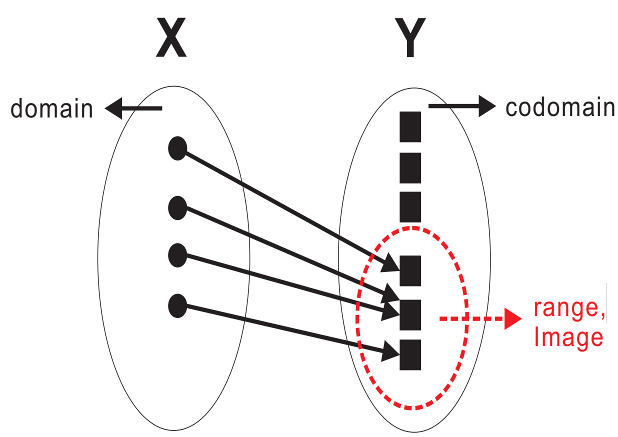


Figure 7.3: Domain, Codomain and Image

e.g.1: $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, di mana himpunan $\mathbb{Z}_+$ adalah bilangan bulat positif, dan $f(x) = x \bmod 2$. Di sini domain dari mapping f adalah himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{Z}+ = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, dan codomain f juga $\mathbb{Z}+$, sedangkan $Im\ = 5\{0, 1\}$. Dari sini bisa dilihat bahwa $Image$ tidak selalu sama dengan dengan codomainnya.

e.g.2: kita tidak bisa menulis $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kalau $f(x) = \frac{1}{x}$, karena satu element dari X, $x = 0$ tidak mempunyai pasangan, karena $\frac{1}{0}$ tidak terdefinisikan. Kita bisa menulis

$f : \mathbb{N}_{-0} \to$ N, kalau $\mathbb{N}_{-0} = \mathbb{N} - \{0\}$.

e.g.3: mapping tidak selalu harus ditulis dalam formula matematika. Contoh dibawah adalah menu makanan dan harganya di suatu restoran

Table 7.1: Menu

	gado-gado	nasi goreng	sate ayam	rendang
harga	50000	80000	80000	100000

Jika X = {gado-gado,nasi goreng, sate ayam, rendang} menu ini adalah mapping, $f : X \to \mathbb{Z}_+$ di mana $Imagef = \{50000, 80000, 100000\}$.

Tidak ada yang membedakan secara spesifik antara **function**(**fungsi**), tetapi ada semacam kebiasaan dalam matematika untuk mendefinisikan fungsi sebagai mapping di mana domain dan codomainnya adalah bilangan. Ini berarti fungsi adalah semacam satu bentuk dari mapping. Tapi sekali lagi ini hanya "kebiasaan" dan tidak selalu demikian.

Secara umum, kata mapping sama artinya (interchangable) dengan fungsi.

7.1 Jenis Mapping

1. Injective Mapping (**Injection**)
   Injection adalah mapping, $f : X \to Y$, di mana setiap element X mempunyai pasangan yang berbeda. Hal ini dapat diekspresikan dengan proposisi di bawah. Ilustrasi injection diberikan di Fig. 7.4.

   $f : X \to Y$ disebut Injection jika, proposisi di bawah terpenuhi.

$$\forall x, \forall z \in X \ \ ((x \neq z) \implies (f(x) \neq f(z))) \tag{7.6}$$

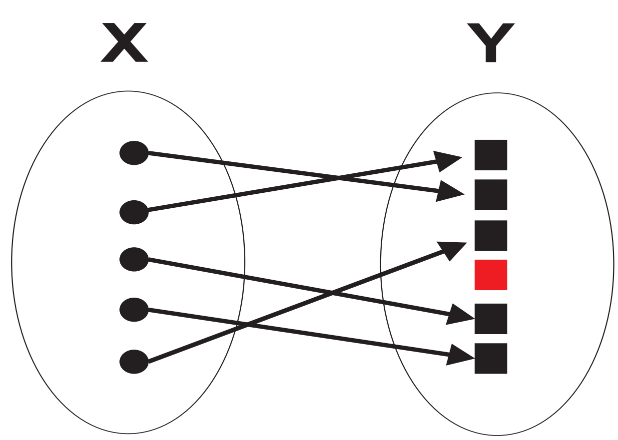


Figure 7.4: Contoh Injection

Contoh injection dalam kehidupan sehari-hari misalnya, hubungan antara seorang mahasiswa/i dengan nomor induk mahasiswanya (NIM) dalam suatu universitas, di mana setiap mahasiswa/i mempunyai satu NIM yang berbeda dengan mahasiswa/i lain. Perhatikan di sini bahwa tidak menjadi masalah kalau ada NIM yang kosong, misalnya karena mahasiswa/i tersangkut mengundurkan diri. Yang tidak boleh terjadi dalam injection ini adalah seorang mahasiswa/i memiliki lebih dari satu NIM pada universitas yang sama.

Contoh mapping yang bukan injection ada di Tabel 7.1 di mana dua masakan, nasi goreng dan sate ayam, mempunyai harga yang sama.

Jika $f : X$, dan $|X| = m$ serta $|Y| = n$, maka injection yang bisa terjadi untuk menghubungkan kedua himpunan ini adalah $(n - (m - 1))$. Ini sangat mudah dibuktikan: element pertama dari X mempunyai kemungkinan dipasangkan dengan n element dari Y, element kedua mempunyai kemungkinan untuk dipasangkan dengan $n-1$ element dari Y dan seterusnya sampai element ke m yang mempunyai kemungkinan untuk dipasangkan dengan $(n-(m-1))$ element dari X. Total komposisi yang bisa terjadi adalah:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

2. Surjective Mapping (**Surjection**, **Onto**) Mapping $f : X \to Y$ disebut Surjection jika, seluruh element Y mempunyai pasangan. sehingga $Image f = Y$. Hal ini dapat diekspresikan dengan proposisi berikut.

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; (y = f(x)) \tag{7.7}$$

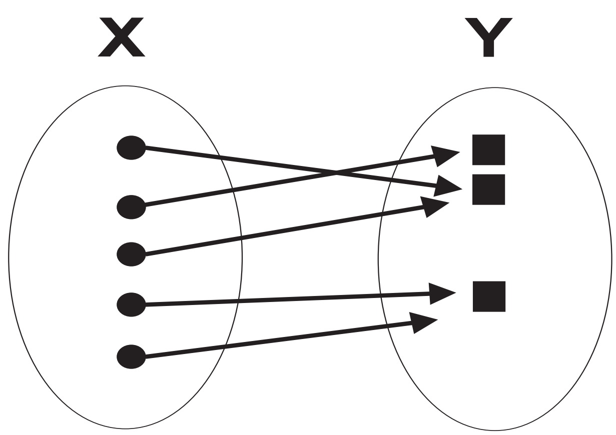


Figure 7.5: Contoh Surjection

Contoh surjection diilustrasikan dalam Fig. 7.5.

Contoh surjection dalam kehidupan sehari-hari misalnya, pembagian m orang menjadi n $(m \geqslant n)$ grup di mana setiap grup harus beranggota lebih dari seorang.

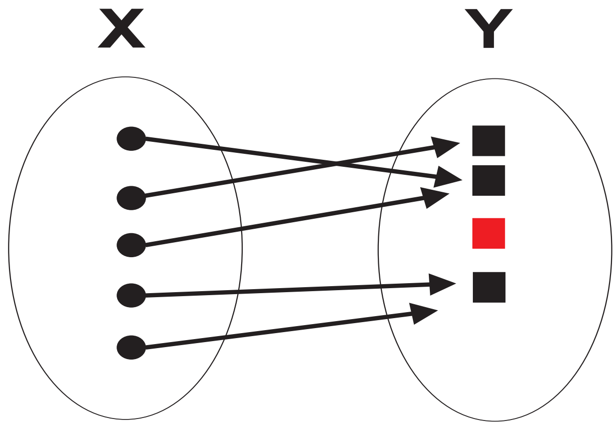


Figure 7.6: Contoh Mapping yang bukan Surjection

Contoh mapping yang tidak memenuhi syarat pada prosisi pada Eq. 7.7 dapat diilustrasikan dalam Fig. 7.6, di mana salah satu element Y, ■ tidak mempunyai pasangan.

Menghitung jumlah surjection yang mungkin terjadi dari X, di mana $|X| = m$, dan Y di mana $|Y| = n$ sedkit lebih sulit dari menghitung jumlah injection. Yang pertama harus diperhatikan adalah syarat di proposisi 7.7 mengharuskan $m \geqslant n$. Ada beberapa cara untuk menghitung jumlah surjection. Cara yang paling intuitif, adalah menghitung jumlah mapping dari X ke Y yang dapat terjadi, lalu menguranginya dengan mapping yang bukan surjection.

Menghitung jumlah mapping yang dapat terjadi antara kedua himpunan ini tidak sulit. Element pertama dari X dapat dipasangkan dengan salah satu dari n element dari Y, jadi ada n pilihan. Jadi jumlah komposisi yang mungkin untuk terjadinya mapping adalah $\underbrace{n \times n \times \cdot\cdot \times n}_{m} = n^m$.

Setelah itu perlu dihitung jumlah komposisi mapping dari X ke Y yang tidak memenuhi syarat surjection. Syarat surjection tidak terpenuhi kalau ada setidaknya satu dari element Y yang tidak mempunyai pasangan. Jumlah komposi di mana element ke $k(k = 1 \cdots n)$ dari Y tidak mempunyai pasangan adalah $(n-1)^m$, dan ada ${}_nC_1$ macam kombinasi semacam ini, sehingga jumlah totalnya adalah ${}_nC_1(n-1)^m$. Selanjutnya jumlah komposisi di mana, element i dan j tidak mempunyai pasangan adalah $(n-2)^m$, dan ada ${}_nC_2$ komposisi semacam ini, sehingga jumlah totalnya, ${}_nC_2(n-2)^m$. Ini berlanjut sampai komposisi di mana $n-1$ element Y tidak mempunyai pasangan yang jumlah totalnya ${}_nC_{(n-1)}(n-(n-1))^m$. Dari Inclusion-Exclusion Principle yang sudah diterangkan pada Eq. 4.9 pada Chapter 4, jumlah komposisi yang tidak memunuhi syarat surjection adalah:

$$ {}_nC_1(n-1)^m -_n C_2(n-2)^m +_n C_3(n-3)^m - \cdots + (-1)^n {}_nC_{n-1}(1)^m, \qquad (7.8) $$

sehingga, jumlah surjection adalah,

$$n^m - ({}_nC_1(n-1)^m - {}_nC_2(n-2)^m + {}_nC_3(n-3)^m - \cdots + (-1)^n\,{}_nC_{n-1}(1)^m) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,{}_nC_k(n-k)^m \tag{7.9}$$

Untuk sedikit merapikan notasi, untuk $j = (n-k)$, Eq.7.9 bisa diekpresikan sebagai berikut.

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\,{}_nC_{(n-j)}j^m \tag{7.10}$$

3. Bijective Mapping (**Bijection**) $f : X \to Y$ disebut Bijection jika kedua proposisi 7.6 dan 7.7 terpenuhi. Tentu saja bijection hanya bisa terjadi terjadi jika $|X| = |Y|$.

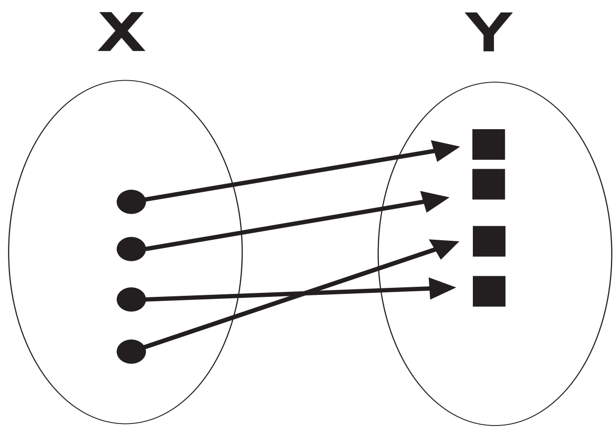


Figure 7.7: Contoh Bijection

Contoh bijection bisa dilihat dari Fig. 7.7. Contoh bijection dalam kehidupan sehari-hari misalnya seseorang dengan sidik jarinya. Semua cara untuk mengidentifikasikan seseorang berdasarkan sesuatu (misalnya sidik jari atau pola pada matanya dsb) bergantung pada hubungan bijection.

Bijection yang dapat terjadi jika $|X| = |Y| = n$ adalah $n!$. Karena, element pertama X dapat dipasangkan dengan n element Y, sedangkan element kedua X dapat dipasangkan dengan $n-1$ element Y, dan seterusnya, sampai element ke n dari X yang hanya dapat dipasangkan dengan 1 element Y yang tersisa, sehingga jumlah bijection yang mungkin terjadi adalah $n \times n-1 \times n-2 \times \cdots 1 = n!$.

Satu contoh bijection adalah mapping $f : X \to Y$ di mana $\forall x \in X(f(x) = x)$, mapping ini disebut **identitiy mapping** on X dan dinotasikan dengan id_X atau $\mathbb{1}_X$.

7.2 Composite Mapping

Composite Mapping adalah mapping beruntun yang terdiri dari dua atau lebih mapping. Misalnya, untuk $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$, maka composite mapping $g \circ f$ adalah mapping baru dengan domain X dan codomain Z yang didefinisikan sebagai berikut.

$$g \circ f : X \to Z \tag{7.11}$$

dan

$$g \circ f : x \mapsto z \tag{7.12}$$

atau

$$z = g(f(x)) \tag{7.13}$$

untuk $x \in X$, dan $z \in Z$.

Tidak sulit untuk melihat bahwa yang dilakukan composite mapping $g \circ f$ ini adalah pertama-tama memetakan X ke Y yang disusul dengan pemetaan Y ke Z. Hubungan f dan g ini dapat diilustrasikan dengan Fig. 7.8.

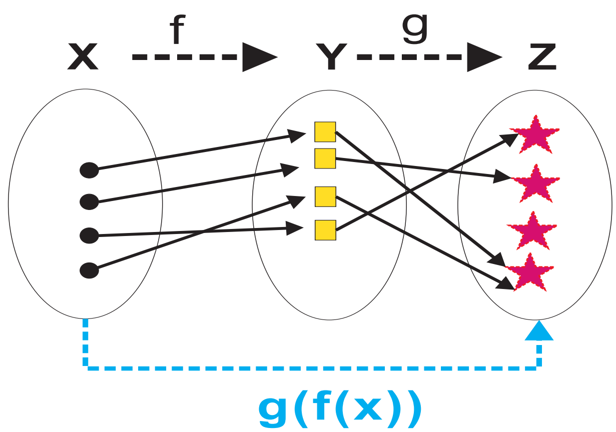


Figure 7.8: Contoh Composite Mapping

e.g.1 Untuk $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 + 1$, maka,

$$g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$$

dan

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 + 3 = x^2 + 4$$

e.g.2 Untuk $f(x) = x^2$ dan $g(x) = e^x$, maka,

$$g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2}$$

dan

$$f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$$

7.3 Inverse Mapping

Untuk $f : X \to Y$ dan $g : Y \to X$, jika mapping f dan g, jika,

$$g \circ f = id_X, \quad (7.14)$$
$$f \circ g = id_Y \quad (7.15)$$

maka, g disebut inverse dari f dan diekspresikan dengan $g = f^{-1}$, serta f disebut inverse dari g dan diekspresikan dengan $f = g^{-1}$. Hubungan mapping f dan g ini dapat diilustrasikan dengan Fig. 7.9 di bawah.

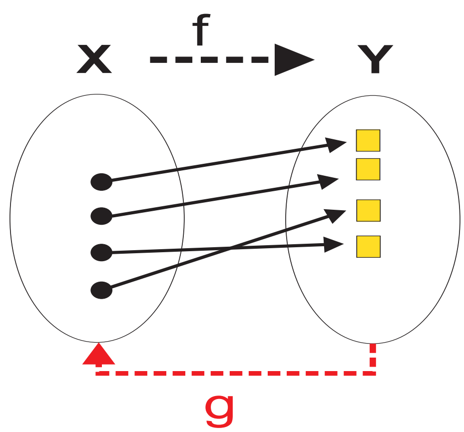


Figure 7.9: Contoh inverse Mapping

e,g.1 Untuk $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di mana $f(x) = x^2 + 1$ dan : $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$ cari $g = f^{-1}$.

Dalam soal ini, karena $y = x^2 + 1$, maka,

$$x^2 = y - 1$$
$$x = \sqrt{y-1}$$

sehingga $g = f^{-1} = \sqrt{y-1}$. Karena y ini hanya nama variabel yang dapat dilambangkan dengan apapun, tidak ada masalah kalau inverse mapping ini diekspresikan dengan $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Tidak semua mapping mempunyai inverse mapping. Misalnya:

e.g.2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = e^x$. Di sini kita tidak bisa menulis $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ karena $\exists x \in \mathbb{R}$ di mana $f^{-1}(x)$ tak terdefinisikan, yaitu $x \leqslant 0$, sehingga f^{-1} bukan sebuah mapping.

Secara umum proposisi dibawah berlaku:
$f : X \to Y$ mempunyai inverse $\iff f : X \to Y$ adalah bijection.
Tentu ini harus dibuktikan.

proof:
Pertama, buktikan bahwa $f : X \to Y$ mempunyai inverse $\implies f : X \to Y$ adalah bijection.
Banyak cara untuk membuktikannya, tapi di sini akan dilakukan dengan Proof by contrapositive sebagai berikut.
Untuk membuktikan proposisi di atas cukup untuk membuktikan contrapositivenya yang berbunyi:
$f : X \to Y$ **bukan** bijection $\implies f : X \to Y$ **tidak** mempunyai inverse

karena $f : X \to Y$ bukan bijection, ada dua kemungkinan:

1. $f : X \to Y$ injection.

   Karena $f : X \to Y$ injection bisa terjadi bahwa $\exists y \forall x (y \neq f(x)).Kalauiniterjadi\mathrm{f}^{-1} : Y \to X$ bukan sebuah mapping karena ada elemen Y yang tidak mempunyai pasangan, sehingga $f : X \to Y$ tidak mempunyai inverse.

2. $f : X \to Y$ injection. Karena $f : X \to Y$ surjection tidak menutup kemungkinan terjadinya $x_1, x_2 \in X((x_1 \neq x_2) \wedge (y = f(x_1) = f(x_2)))$. Kalau ini terjadi $f^{-1} : Y \to X$ bukan sebuah mapping karena ada elemen Y yang mempunyai lebih dari satu pasangan, sehingga $f : X \to Y$ tidak mempunyai inverse.

Dengan ini proposisi $f : X \to Y$ **bukan** bijection $\implies f : X \to Y$ **tidak** mempunyai inverse, terbukti. Dan dengan itu contraposisinya: $f : X \to Y$ mempunyai inverse $\implies f : X \to Y$ adalah bijection juga terbukti.

Selanjutnya, buktikan bahwa $\implies f : X \to Y$ adalah bijection $\implies f : X \to Y$ mempunyai inverse.
Strategi yang dipakai di sini sama dengan di atas, proof by contrapositive.
Buktikan bahwa $\implies f : X \to Y$ **tidak** mempunyai inverse $\implies f : X \to Y$ **bukan** bijection
Karena f tidak memp;unyai inverse, maka ada dua kemungkinan yang dapat terjadi.

1. $\exists y \forall x (x \neq f^{-1}(y))$. Jika hal ini terjadi f^{-1} bukan fungsi karena ada elemen Y yang tidak berpasangan.

2. $\exists y((x_1 \neq x_2) \wedge x_1 = f^{-1}(y) \wedge x_2 = f^{-1}(x_2)$. Jika hal ini terjadi f^{-1} bukan fungsi karena ada elemen Y yang mempunyai lebih dari satu pasangan.

Dengan demikian prososisi $f : X \to Y$ **tidak** mempunyai inverse $\implies f : X \to Y$ **bukan** bijection yang sekaligus membuktikan contrapositive nya: $\implies f : X \to Y$ adalah bijection $\implies f : X \to Y$ mempunyai inverse.
Kedua bukti ini membuktikan proposisi semula: $f : X \to Y$ mempunyai inverse $\iff f : X \to Y$ adalah bijection.

Review:

- terangkan konsep mapping dengan kata-kata sendiri
- terangkan arti domain, codomain dan range dengan kata-kata sendiri
- terangkan beda antara codomain dan range dengan kata-kata sendiri
- terangkan beda antara injection, surjection dan bijection
- beri contoh injection, surjection dan bijection dalam kehidupan sehari-hari
- terangkan mengapa Inclusion-Exclusion Principle diperlukan untuk menghitung jumlah surjection
- pastikan bahwa Eq. 7.9 dan Eq. 7.10 sama
- terangkan mengapa kita tidak dapat menuliskan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalau $f(x) = tan(x)$, dan apa domain yang valid untuk fungsi ini?
- terangkan tentang arti dari id_X.
- terangkan bahwa secara umum $g \circ f \neq f \circ g$
- terangkan tentang arti inverse.
- sekali lagi jelaskan bahwa: jika dan hanya jika mapping f mempunyai inverse maka f adalah bijection.

Soal Latihan

1. berikan beberapa contoh untuk injection, surjection, bijection dalam kehidupan sehari-hari.
2. hitung ada berapa cara untuk mewariskan m buah permata yang berbeda pada n orang.
3. hitung ada berapa cara untuk mewariskan m buah permata yang berbeda pada pada n orang jika setidaknya setiap orang mendapat setidaknya 1 permata.
4. buktikan bahwa Eq. 7.9 bisa diekspresikan dengan Eq. 7.10.
5. berikan satu contoh $f(x)$ dan $g(x)$ di mana $g \circ f = f \circ g$.
6. kalau $\arcsin x$ adalah inverse dari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di mana $f(x) = \sin x$, apa domain and range dari fungsi ini? Dan kalau $\arcsin x = \theta$, ekspresikan $\cos\theta$ dan $\tan\theta$ dengan x.

Penutup

> Nothing is final.
>
> Qian Xuesen

> What we call the beginning is often the end. And to make an end is to make a beginning. The end is where we start from.
>
> T.S. Eliot

Dalam menulis buku ada dua hal yang sangat penting: **apa yang ingin ditulis** dan **siapa pembaca yang dituju**. Tema buku ini sudah saya jelaskan pada pembukaan. Tapi lalu siapa target buku ini? Menentukan target pembaca bagi buku bertema matematika tidak selalu gampang. Banyak hal yang harus dipertimbangakan, misalnya: level pengetahuan dasar, level keingintahuan, serta level "endurance" pembaca dalam menghadapi kesulitan. Kalau ada 100 orang maka akan ada 100 macam komposisi level yang berbeda. Tentu saya tidak bisa menulis buku yang cocok untuk setiap orang. Karena itu saya berfokus untuk menerangkan isi buku ini pada satu orang yang paling saya kenal: **saya sendiri**. Dalam menulis buku ini saya membayangkan strategi apa yang harus saya kembangkan untuk menerangkan isi Matematika Minimum ini pada seorang murid SMA, Pitoyo Hartono, lebih dari 30 tahun yang lalu. Pada saat itu, saya seorang murid SMA dengan pengetahuan dasar dan kecerdasan yang rata-rata saja. Yang mungkin lebih dibandingkan banyak anak SMA lain, adalah keingintahuan saya dalam matematika, dan ketidaksukaan saya untuk menghapal rumus, atau prosedur untuk menyelesaikan soal tanpa tahu artinya secara mendalam. Sewaktu SMA saya lebih senang mendapat nilai yang jelek daripada mengaplikasikan rumus ataupun prosedur untuk menyelesaikan soal secara membabi-buta. Saya lebih senang menjawab: saya tidak tahu, karena itu kondisi sebenarnya, daripada pura-pura bisa padahal hanya hapal. Saya baru bisa bernapas bebas setelah masuk universitas, fakultas teknik fisika Waseda University di Tokyo, di mana menghapal rumus tidak punya nilai apa-apa. Di universitas ini saya diajarkan bahwa matematika bukan "alat" untuk menghitung, tapi alat untuk berpikir. Di jaman ini, prosedur menghitung akan dengan sangat mudah tergantikan oleh komputer, dan akhir-akhir ini AI, sehingga ini bukan tugas utama manusia. Tugas utama manusia adalah berpikir, dan untuk bisa berpikir secara sistematis kita butuh "alat", dan itulah matematika. Karena itu buku ini saya mulai dengan **Logika Matematika** yang akan menjadi dasar untuk bermatematika dan yang lebih penting lagi, untuk berpikir. Buku ini saya tujukan bukan saja untuk anak-anak SMA yang akan meneruskan pendidikannya ke bidang-bidang ilmu pengetahuan alam yang perlu menggunakan matematika sebagai bahasa, tapi bagi semua orang yang ingin tahu tentang apa itu matematika, untuk orang-orang yang ingin belajar tidak untuk lulus ujian tapi untuk membangun dasar berpikir. Syarat utama untuk mempelajari buku ini ada dua, dua hal yang dipunyai oleh versi SMA saya: ingin tahu dan kemauan untuk bersusah-susah sampai rasa keingintahuan itu terpenuhi.

Setelah target pembaca jelas, tugas saya hanya menulis dengan gaya mengajar pada diri saya sendiri. Dalam menulis buku ini saya melakukan simulasi bahwa saya versi sekarang berada di depan kelas, berhadapan dengan saya versi SMA, dan menerangkan satu persatu isi buku ini. Apa yang saya rasakan sulit dipahami pada saat SMA kemungkinan besar akan juga sulit di pahami oleh orang-orang yang berkempuan rata-rata. Karena itu saya berusaha untuk menerangkan tema-tema seperti itu dengan lebih "rapi", dan dengan mengalokasikan lebih banyak waktu dan halaman. Sebagai manusia yang lemah, kadang-kadang terjangkit kemalasan pada saya untuk menerangkan sesuatu secara sistematis dengan sabar dan lalu berdalih: "masa gitu aja nggak ngerti?". Di saat-saat seperti itu saya berhenti sebentar dan mencoba bertanya pada diri sendiri: "dengan cara menjeleskan seperti itu, bisakan versi SMA saya mengerti?". Kalau jawabannya "tidak", saya akan merubah strategi mengajar dan menulis ulang tentang tema itu. Saya tidak bisa menipu diri saya sendiri. Mungkin karena itu, butuh 2.5 tahun untuk menulis buku yang tebalnya cuma lebih sedikit dari 100 halaman. Dua setangah tahun ini merupakan proses belajar untuk saya: belajar untuk melihat kembali dasar-dasar matematika dari dua kacamata: kacamata seorang pengajar dan kacamata seorang pelajar. Mengajar adalah proses untuk membuat orang yang semula tidak mengerti menjadi mengerti. Ini tidak ada artinya kalau yang diajar tetap tidak mengerti. Beberapa kali saya hampir berhenti di tengah jalan, karena toh buku ini tidak akan diterbitkan secara konvensional sehingga kalaupun buku ini tidak ada, tidak ada satu pihakpun yang dirugikan. Motivasi untuk tidak berhenti cuma satu: konsistensi. Bagaimana saya bisa mendidik murid-murid saya agar selalu konsisten dalam berpikir secara sistematis kalau saya sendiri tidak konsisten dalam melakukan apa yang sudah saya mulai?

Buku ini hanya "menggores lapisan-lapisan terluar" dari matematika. Sesuai judulnya ini adalah Matematika Minimum, pengetahuan sangat dasar yang sepantasnya dimiliki oleh orang-orang yang setidaknya sudah menamatkan pendidikan menengahnya dan sedang memulai pendidikan tingkat universitasnya. Mengerti tentang seluruh isi buku ini sama sekali tidak equivalent dengan mengerti tentang matematika, sangat jauh dari itu. Tapi setidaknya pengetahuan dari buku ini akan berguna untuk meneruskan belajar bermatematika selanjutnya. Untuk orang-orang yang tidak meneruskan pendidikan matematika di tingkat universitas, saya harap buku ini berguna untuk belajar untuk melatih cara pikir. Saya juga akan sangat bahagia kalau buku ini menjadi satu contoh untuk menjadi bahan pikir tentang **apa arti belajar**.

Nagoya, awal musim gugur 2024

P. Hartono

Acknoledgement

Saya mengucapkan banyak terimakasih untuk teman seangkatan di SMA saya, Edmond Budi Prasetyo. Edmond dengan sangat sabar dan teliti membaca, menyediakan waktu untuk menyelesaikan soal dan merevisi buku ini. Tanpa bantuan Edmond di bab-bab awal mungkin saya tidak dapat melanjutkan buku ini. Terimakasih.

Bibliography

[1] Elliott Mandelson, Number Systems and the Foundations of Analysis, Dover Publications, Mineola, NY, 2008.

[2] James R. Bush, Discrete Mathematics Workbook, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, 2003.

[3] Peter Smith, An Introduction to Formal Logic, Cambridge Univerity Press, Cambridge, 2003.

[4] Kazuhisa Todayama, Learning Logic through Building It (in Japanese), The Nagoya University Press, Nagoya, 2000.

[5] Raymond M. Smullyan, First-Order Logic, Dover Publications, Mineola, NY, 1995.

[6] Graham Priest, Logic: A Very Short Introduction, Oxford University Press, Oxford, 2017.

[7] Masanori Shibata and Yura Asada, Discrete Mathematics for Computer Science (in Japanese), Corona Publishing, Tokyo, 1995.

[8] Hiroaki Nishioka, Elementary Combinatorial Mathematics (in Japanese), Corona Publishing, Tokyo, 1999.

[9] Hajime Nobuhara, Introduction to Discrete Mathematics through Illustrated Explanations and Applications Example (in Japanese), Kyoritsu Publishing, Tokyo, 2022.

[10] Michael Spivak, Calculus (third edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[11] Ali Almossawi, An Illustrated Book of Bad Arguments, The Experiment, LLC, New York, NY, 2013.

[12] Kazuhisa Makino, Discrete Mathematics (in Japanese), Maruzen Publishing, Tokyo, 2019.

.1 Appendix:Inclusion-Exclusion Principle

Untuk himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_n$ buktikan bahwa persamaan di bawah berlaku.

$$|\bigcup_{i=i}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}|$$

proof
Pembuktian dengan induksi matematika:

1. untuk $n = 2$, Eq. 17 telah ditunjukkan pada Chapter 4.
2. asumsi induksi, Eq. 17 berlaku untuk $n = m$.
3. untuk $n = m + 1$,

$$|\bigcup_{i=i}^{m+1} A_i| = |(\bigcup_{i=i}^{m} A_i) \cup A_{m+1}| \tag{17}$$

Di sini, jika $(\bigcup_{i=i}^{m} A_i) = B$, maka Eq. 17 dapat di tulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=i}^{m+1} A_i| &= |B \cup A_{m+1}| \\ &= |B| + |A_{m+1}| - |B \cap A_{m+1}| \end{aligned} \tag{18}$$

Di sini,

$$\begin{aligned} B \cap A_{m+1} &= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1} \\ &= (A_1 \cap A_{m+1}) \cup (A_2 \cap A_{m+1}) \cup \cdots \cup (A_m \cap A_{m+1}) \end{aligned} \tag{19}$$

maka dari asumsi induksi,

$$\begin{aligned} |B \cap A_{m+1}| &= |\bigcup_{i=i}^{m}(A_i \cap A_{m+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |(A_{i_1} \cap A_{m+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{m+1}) \\ &\quad \cap \cdots (A_{i_k} \cap A_{m+1})| \end{aligned} \tag{20}$$

karena

$$|B| = |\bigcup_{i=i}^{m} A_i| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}|$$

maka Eq. 18 dapat ditulis sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
|\bigcup_{i=i}^{m+1} A_i| &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}| \\
&\quad +|A_{m+1}| + \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |(A_{i_1} \cap A_{m+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{m+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_k} \cap A_{m+1})|
\end{aligned} \tag{21}
$$

dan dengan demikian

$$
|\bigcup_{i=i}^{m+1} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}|
$$

(Q.E.D.)

Penulis

Pitoyo Hartono lahir di Surabaya pada Mei 1969. Menyelesaikan pendidikan menengah di SMA Pangudi Luhur Jakarta pada 1988. Menyelesaikan bachelor's degree di Dept. of Applied Physics, School of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo pada 1993. Menyelesaikan master degree di Dept. of Pure and Applied Physics pada universitas yang sama pada 1995. Bekerja sebagai Software Engineer di Hitachi Ltd, Yokohama. Menyelesaikan doctoral degree di Dept. Dept. of Pure and Applied Physics di Waseda University pada 2002. Bekerja sebagai research associate di Advancde Research Institute for Science and Engineering, Waseda University antara 2021-2005. Bekerja sebagai Associate Professor di Future University Hakodate, Hakodate City antara 2005-2010, dan sebagai Full Professor di School of Engineering Chukyo University, Nagoya mulai 2010. Antara 2014-2024 menjadi salah satu leaders di Gundam Global Challenge. Melakukan penelitian pada bidang teori dan aplikasi machine learning, robotics dan smart interface.