



2.9 静电能

- 真空中点电荷间的相互作用能
- 连续电荷分布的静电能
- 电荷体系在外电场中的静电能
- 电场的能量和能量密度

能量的基本概念

一、引入的目的：

1. 能量是物质的共同属性，是物质运动的普遍量度；
2. 能量守恒定律是最有意义最有用的发现之一；
3. 便于研究不同形式能量的转换。

二、特点：

1. 是状态的单值函数，属于整个系统；
2. 能量差才有意义；
3. 用做功来量度能量。

三、描述的方法：

要引入状态参量，规定零点能，然后用做功来计算能量。



定义

对于一个带电系统而言，其带电过程总伴随着电荷相对运动。在这个过程中，外力必须克服电荷间的相互作用而作功。外界作功所消耗的能量将转换为带电系统的能量，该能量定义为带电系统的静电能。显然，静电能应由系统的电荷分布决定。

点电荷在外电场中的电势能就是静电能。

§ 2.9.1 真空中点电荷间的相互作用能

- 设想空间中有多个点电荷，其带电量用 q_i 表示，相应的位置用 \mathbf{r}_i 表示，任意两个点电荷间的距离可以由 $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ 给出，所谓点电荷之间的相互作用能，指的是与点电荷间的相对位置有关的静电能。
- 状态参量取为 \mathbf{r}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$)， $r_{ij} \rightarrow \infty$ 时，它们之间的静电相互作用消失，很自然地取这时的相互作用能为零。
- 我们用一种类似于数学归纳法的办法来计算由 N 个点电荷组成的静电体系的静电能。

两个点电荷时

- 一个点电荷 q 在电场 U 中的电势能 $W=qU$
- 设电场 U 是由另一个点电荷 Q 产生的，于是点电荷 q 具有的电势能可以写作

$$W = qU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

- 同样地，上式也表示了 Q 在 q 的电场中的电势能；这电势能 W 属于点电荷 q 与 Q 组成的系统。

- 当两个点电荷分别为 q_1 和 q_2 时，静电能为：

$$W_{12} = q_2 U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{12}},$$

同样地，

$$W_{21} = q_1 U_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = W_{12},$$

可将两个点电荷的静电能记为 W_2 ，为方便写成：

$$W_2 = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2}(q_2 U_{12} + q_1 U_{21}),$$

- 三个点电荷的静电能记为 W_3 ，便为：

$$W_3 = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})$$

■ 于是可写成:

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32}) \\ &= \frac{1}{2} (q_2 \underline{U_{12}} + q_1 \underline{U_{21}} + q_3 \underline{U_{13}} + q_1 \underline{U_{31}} + q_3 \underline{U_{23}} + q_2 \underline{U_{32}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i U_i, \quad \text{其中} \quad U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 U_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_j}{r_{ji}}, \end{aligned}$$

■ U 代入 W :

$$W_3 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{q_i q_j}{r_{ji}},$$

对N个点电荷系统:

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i, \text{其中 } U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{r_{ji}}$$

同理, 将 U 代入 W 得:

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{i=1}^N q_i U_{ji} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ji}}.$$

对N+1个点电荷系统, 可证 (略):

$$W_{N+1} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{q_i q_j}{r_{ji}} \stackrel{\text{记为}}{=} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{q_i q_j}{r_{ji}}.$$

§ 2.9.2 连续电荷分布的静电能

首先讨论空间只有自由电荷的情形，这意味着电场空间中只允许导体和介电常量恒等于 ϵ_0 的物体（包括真空）存在。

1. 先考虑体电荷分布的情况，电荷密度设为 $\rho_e(\mathbf{r})$ 。将该体电荷无限分割并把每一小部分当作点电荷处理，则由前式可推得：

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U_1(\mathbf{r}) dV, \quad (2.1)$$

$U_1(\mathbf{r})$ 表示除 $\rho_e(\mathbf{r})dV$ 外其余所有电荷在 \mathbf{r} 处产生的电势。

■ 分析 $U_1(\mathbf{r})$ 和总电势 $U(\mathbf{r})$ 的关系。设 dV 为一球体元，由第一章1.5.5节例1.11的结果，取 $R_1 = 0$ ， $R_2 = a$ 。可求得电荷密度为 ρ_e 、半径为 a 的均匀带电球体在球内产生的电势为：

$$U' = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2),$$

它在球心处取极大值 $U'_m = \rho_e a^2 / 2\epsilon_0$ ，故当 $a \rightarrow 0$ 时有 $U'_m \rightarrow 0$ 即 $U' \rightarrow 0$ 。于是， $U_1(\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r})$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV. \quad (2.2)$$

2. 对面电荷分布的情形，设面电荷密度为 $\sigma_e(\mathbf{r})$ 。类似，将面电荷无限分割为圆状面电荷元 $\sigma_e(\mathbf{r})dS$ ，它在自身产生的电势不会大于 $\sigma_e a / 2\epsilon_0$ （ a 为面元半径，见第一章**1.5.5节例1.10**），该电势随 $dS \rightarrow 0$ （ $a \rightarrow 0$ ）而趋于零。

于是， $U_1(\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r})$ ，其静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dS \quad (2.3)$$

3. 线电荷分布的情况，不能将静电能写为：

$$W_e = \frac{1}{2} \int_L \lambda_e(l) U(l) dl \quad \text{或} \quad W_e = \frac{1}{2} \int_L \lambda_e(l) U_1(l) dl$$

因为 $\lambda_e(l) dl$ 在自身所在处产生的电势不仅不趋于零，而且会按 $\ln r$ (r 为离线元 dl 的垂直距离) 趋于无穷。进一步，可证 $U_1(l)$ 也会趋于无穷大。

这在物理上意味着：要把电荷从极端分散状态压缩到一条几何线上，外界需要作无穷大的功。这显然是办不到的。因此，在计算静电能时，无论线径怎样小的带电体均不能当作线电荷处理。

4. 多个带电体组成的系统的静电能。设有 N 个**带电体**，体积分别为 V_1, V_2, \dots, V_N 。可将空间的**总电势** $U(\mathbf{r})$ 分为两部分

$$U(\mathbf{r}) = U_i(\mathbf{r}) + U^{(i)}(\mathbf{r}),$$

式中 $U_i(\mathbf{r})$ 表示除第 i 个带电体外其余所有带电体在 \mathbf{r} 处产生的电势， $U^{(i)}(\mathbf{r})$ 则表示第 i 个带电体在 \mathbf{r} 处产生的电势。按照前述结论，可得：

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) [U_i(\mathbf{r}) + U^{(i)}(\mathbf{r})] dV \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U^{(i)}(\mathbf{r}) dV + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dV, \end{aligned}$$

可写成:

$$W_e = W_{\text{自}} + W_{\text{互}},$$

其中,

$$W_{\text{自}} = \sum_{i=1}^N W_{\text{自}}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U^{(i)}(\mathbf{r}) dV, \text{ 叫自能}$$

$$W_{\text{互}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dV. \text{ 叫互能}$$

点电荷间、线电荷间可以计算互能。但是，不能计算点电荷、线电荷的自能（为无穷大）。

【例1】 求体电荷密度为 ρ_e 、半径为 R 的均匀带电球的静电能（带电体的介电常量设为 ε_0 ）。

【解】 以球心为原点，取球坐标 (r, θ, φ) 。根据第一章1.5.5节例1.11的结果取 $R_1 = 0$, $R_2 = R$ ，可得：

于是，积分得：
$$U(r) = \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{r \leq R} \rho_e \cdot \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi \rho_e^2 R^5}{15\varepsilon_0}.$$

当 ρ_e 固定时， W_e 将随 $R \rightarrow 0$ 而趋于零。

如果用总电量 $q = 4\pi R^3 \rho_e / 3$ 表示，上述结果可写成：

$$W_e = \frac{3}{5} \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \right).$$

这时若固定 q ，令 $R \rightarrow 0$ ，则

$W_e \rightarrow \infty$ ，即点电荷的自能发散。

5. 对带电导体，静电能公式可进一步简化。


导体的特点是电荷分布在外表面，整个导体是等势体。当求 N 个带电导体组成的体系的静电能时，应用前式可得如下结果：

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \sigma_e U dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i \iint_{S_i} \sigma_e dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i,$$

式中 q_i 和 U_i 为第 i 个导体的电量和电势。

【例2】 一孤立带电导体球电量为 q ，半径为 R ，求其静电能。

【解】 对孤立导体球有 $U = q/C$ ， $C = 4\pi\epsilon_0 R$ 。
应用上式得：


$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right).$$

- 与例1的结果比较可知，对电量及半径相同的带电球，其静电自能与电荷分布有关。电荷集中分布于球面比均匀分布于整个球体的自能要小。

■ 如果假设电子的能量 $W = mc^2$ 全部来自静电自能 W_e ，并取 $W_e \approx e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_e)$ ，则可求得电子的半径：

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

r_e 称为电子的经典半径。当然，电子的实际半径比 r_e 要小得多，因此不能作以上假设。

[例3] 求平行板电容器的静电能公式。

[解] 极板间的均匀各向同性电介质的介电常量为 ϵ 极板面积为 S ，两极板间的间距为 d 。接通电源后，极板带电分别为 Q_1 和 Q_2 ，且 $Q_2 = -Q_1 = Q$ ；两极板电势分别为 U_1 和 U_2 ，电势差为 $U = U_2 - U_1$ 。

■ 分析电容器充电过程，电源对电容器做功，使电源能量转化为电容器的静电能。在 q 由 0 增至 Q 的过程中，电源做功为：

$$A' = \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} Q^2.$$

则

$$W_e = A' = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} Q U,$$

或写成：

$$W_e = \frac{1}{2} Q (U_2 - U_1) = \frac{1}{2} (Q_1 U_1 + Q_2 U_2).$$

这与前面的普适公式的结果一致。

***6.**简单介绍**空间存在电介质**的情形，我们限于线性无损耗介质。对于这种情形，随着自由电荷的搬运和电场的建立，介质将会产生极化并出现极化电荷。

一种简单而自然的办法是把极化电荷和自由电荷同等看待，将看成是**总电荷密度** $\rho_e(\mathbf{r})$ ，即自由电荷密度 $\rho_{e0}(\mathbf{r})$ 和极化电荷密度 $\rho'_e(\mathbf{r})$ 之和，然后按前式定义系统的能量，即：

$$W_{e0} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_{e0}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho'_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV$$

式中 V_0 和 V' 分别表示自由电荷和极化电荷所在的空间区域。我们将上面定义的能量记为 W_{e0} ，并把它称作系统的“**宏观静电能**”，它**可以理解为**在建立宏观电荷分布 $\rho_{e0}(\mathbf{r})$ 和 $\rho'_e(\mathbf{r})$ 过程中系统所贮存的静电能。 19

*■从另一个角度来分析，系统的能量 W_e 应等于在建立该指定状态过程中外界对系统所作的功 A' ，即：

$$W_e = A'.$$

W_{e0} 是否等于 W_e 呢？ 否

理由在于，在介质中建立电场时，外界不仅要克服宏观电荷（包括自由电荷和极化电荷）之间的静电力做功，而且要克服分子内部（对位移极化情形）或分子之间（对取向极化情形）的相互作用做功。第一部分功转化为系统的宏观静电能 W_{e0} ；第二部分功称为“极化功”，它使介质极化。

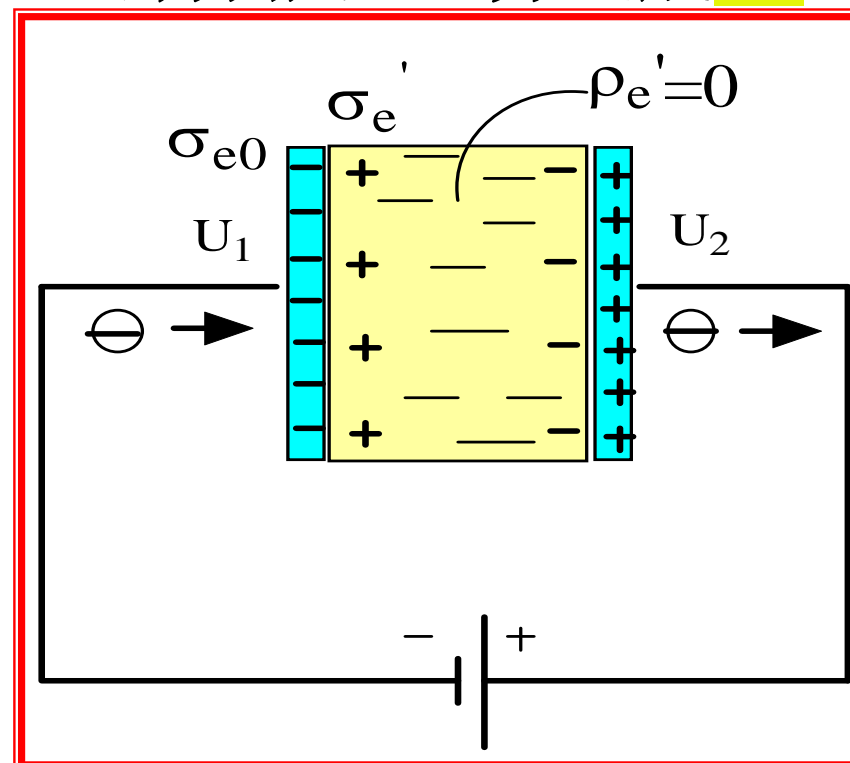
对线性无损耗介质，通过极化功转换到介质的能量称为极化能，记为 $W_{\text{极}}$ 。所以： $W_e = W_{e0} + W_{\text{极}}.$

***【例如】** 填充了均匀介质的平行板电容器（见右下图），极板自由面电荷 σ_{e0} 和介质极化面电荷 σ'_e 对宏观静电能 W_{e0} 都有贡献；而介质体内 $\rho'_e = 0$ ，虽然对 W_{e0} 无贡献，但介质内部那些因极化发生变形或改变排列状态的原子、分子也贮存了一部分能量，并造成 σ'_e ，它们相当于极化能 $W_{\text{极}}$ 。

一定的电场对应于一定的介质极化状态。与此相应，宏观静电能与极化能存在着密切的关系。习惯上定义系统的静电能为：

$$W_e = W_{e0} + W_{\text{极}}.$$

在这种定义下，外界做功正好等于系统静电能的变化。



电容器充电时电源做功₁

*■例3启发我们，系统的静电能可用自由电荷与总电势来表达。可以一般地证明为：

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_{e0}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV.$$

物理解释：上式表示，外界在移动自由电荷过程中克服静电力做功，即对电场做功，转化为系统的静电能。
注意： $U(\mathbf{r})$ 为总电势，自由电荷和极化电荷对它都有贡献。

又可推出极化能的表达式：

$$W_{\text{极}} = W_e - W_{e0} = -\frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho'_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV.$$

式中右边的**负号**正好表示系统（即电场）对极化电荷做功，而不是外界克服静电力做功。

§ 2.9.3 电荷体系在外电场中的静电能

- 当已知外场 U 时，点电荷 q 在 U 中的电势能可以直接计算： $W_e = qU$.

W_e 是 q 在外场 U 中的静电能，属于相互作用能。

- 当电荷体系为 N 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_N 构成的点电荷系统时，它在外电场 U 中的静电能为：

$$W_e = \sum_{i=1}^N q_i U(\mathbf{r}_i),$$

- 电荷密度为 $\rho_e(\mathbf{r})$ 、体积为 V 的带电体，在外电场 U 中的静电能应为：

$$W_e = \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV.$$

【例4】 求电偶极子在外电场中的静电能公式。

【解】 设电偶极子的电偶极矩为 $\mathbf{p} = q \mathbf{l}$ ，则由上式可算得它在外电场 \mathbf{E} 中的静电能为：

$$W_e = -qU_- + qU_+ = q(U_+ - U_-) = q\mathbf{l} \cdot \nabla U,$$

即

$$W_e = \mathbf{p} \cdot \nabla U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

这也是电偶极子 \mathbf{p} 在外场 \mathbf{E} 中的电势能。

§ 2.9.4 电场的能量和能量密度

■ 静电能贮存在哪里？

前面导出的静电能公式都与电荷相联系。这给人一种印象，似乎静电能只贮存在电荷上，而电荷周围的空间——存在电场，其静电能为零！这是早期“**超距作用**”的观点。

■ 其后人们发现能量应当贮存在电场中，电相互作用是通过电场传递，同时应传递能量，这就是“**近距作用**”的观点。直到**电磁波（电磁场在空间的传播）传递能量被证实**后，才被广泛采纳。

为与近距作用观点一致，下面我们设法将有关**静电能的公式用电场强度表示**出来。

先从平行板电容器的静电能公式入手：

前面已得

$$W_e = \frac{1}{2}QU,$$

设电容器极板间填满均匀线性各向同性介质，则有 $Q = \sigma_{e0}S = DS$ 和 $U = Ed$ ，从而上述静电能公式可改用电场强度表示：

$$W_e = \frac{1}{2}DSEd = \frac{1}{2}DEV, \quad (4.1)$$

式中 $V = Sd$ 为两极板间的体积，即电场空间的体积。定义单位体积的静电能为**电能密度**，则有：

$$w_e = \frac{1}{2}DE \quad (4.2)$$

写成矢量式如下，对**线性无损耗介质**都适用：


$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3)$$

式（**4.3**）表明，原认为局限于极板表面电荷之中的**静电能**，**实际上**是以电能密度**贮存于电场之中**。当空间电场不均匀时，总静电能应为：

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (4.4)$$

这样定义的静电能密度和静电能计入了介质的极化能，它**要求介质是线性无损耗的**。

【例5】 从电场的能量公式（**4.4**）出发，重新计算孤立带电导体球（电量为 q ，半径为 R ）的静电能。

【解】 由高斯定理可求得该导体球的电场强度大小为：

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r \geq R); \quad E = 0, \quad (r < R)$$

于是：

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}, \quad (r \geq R)$$

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

上述结果与例2所得结果一致。这说明，在静电场范围内，式（**2.3**）和式（**4.4**）完全等效。

最后我们由式 (4.4) 进一步定义宏观静电能 W_{e0} 和介质极化能 $W_{\text{极}}$ 。将 $D = \varepsilon_0 E + P$ 代入式 (4.4) 得：

$$W_e = W_{e0} + W_{\text{极}}. \quad (4.5)$$

式中：

$$W_{e0} = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon_0 E^2 dV, \quad (4.6)$$

$$W_{\text{极}} = \frac{1}{2} \iiint P \cdot E dV. \quad (4.7)$$

在静电学范围内， $\varepsilon_0 E^2 / 2$ 为宏观静电能密度，

$P \cdot E / 2$ 为极化能密度，二者之和等于静电能密度：

$$w_e = D \cdot E / 2$$