

全同粒子

粒子的全同性

玻色-爱因斯坦凝聚

氦原子的能级

全同粒子

◆ 多电子原子中，电子不可区分的，是全同的

◆ 经典物理学中的“全同”

相同的粒子可标记，可跟踪

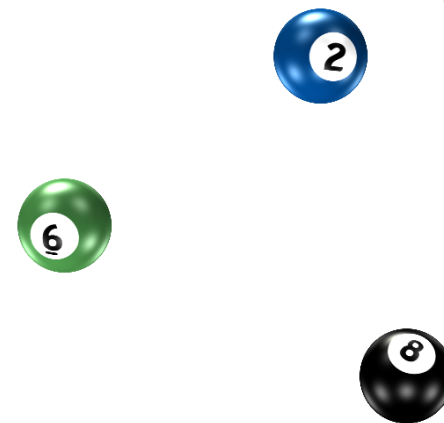
◆ 量子力学中的全同

不可编号，不可标记

不可能测出任何区别

这不是实验技术的困难，而是原理上的不可行

• 22:14:42



2粒子的波函数 (1)

令两粒子波函数为 $\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t)$

波函数为 $\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t)$ 与 $\psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t)$ ，没有任何可测量的区别

假设1：波函数 $\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t)$ 与 $\psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t)$ 是两个不同维度的矢量，但不存在任何物理量解除简并

在物理学中谈论

存在但是对外界没有任何影响的事物

很不自然，不可接受

假设2：两组参数交换后，代表同一个量子态

$$\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t) \equiv C \psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t) \checkmark$$

2粒子的波函数 (2)

$$\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t) \equiv C\psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t), \forall \alpha_1, \alpha_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$$\Leftrightarrow \psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t) = C\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t), \forall \alpha_1, \alpha_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t) &= C\psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t) \\ &= C^2\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t), \forall \alpha_1, \alpha_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2 \end{aligned}$$

$$(C^2 - 1)\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t) = 0, \forall \alpha_1, \alpha_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow C^2 - 1 = 0 \Rightarrow C = \pm 1$$

2粒子的波函数 (3)

$C = 1$, 波函数对称

$$\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t) = \psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t), \forall \alpha_1, \alpha_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$C = -1$, 波函数反对称

$$\psi(\alpha_1, \vec{r}_1; \alpha_2, \vec{r}_2; t) = -\psi(\alpha_2, \vec{r}_2; \alpha_1, \vec{r}_1; t), \forall \alpha_1, \alpha_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

2个全同粒子的波函数 (4)

- ◆ 波函数要么对称，要么反对称
- ◆ 波函数不可能是对称和反对称的混合
- ◆ 由叠加原理，自然界中的双电子（双 π 介子等）系统的波函数只可能是反对称的（或对称的），由实验确定。否则叠加原理会给出非物理的状态。

3个全同粒子的波函数 (1)

全对称

$$\begin{aligned}\psi(1,2,3) &= \psi(2,1,3) = \psi(1,3,2) = \psi(3,2,1) \\ &= \psi(2,3,1) = \psi(3,1,2)\end{aligned}$$

反对称

$$\begin{aligned}\psi(1,2,3) &= -\psi(2,1,3) = -\psi(1,3,2) = -\psi(3,2,1) \\ &= \psi(2,3,1) = \psi(3,1,2)\end{aligned}$$

3个全同粒子的波函数 (2)

混合对称：12交换对称、13交换反称？

✗

反设

$$\psi(1,2,3) = \psi(2,1,3), \psi(1,2,3) = -\psi(3,2,1)$$

考虑23的交换，可以有两种方式实现：

$$\psi(1,2,3) = \psi(2,1,3) = -\psi(3,1,2) = -\psi(1,3,2)$$

$$\psi(1,2,3) = -\psi(3,2,1) = -\psi(2,3,1) = +\psi(1,3,2)$$

矛盾。

多个全同粒子的波函数

◆ 同上的推理，只有两种可能：全对称、全反对称

◆ 考虑描述整个宇宙的波函数 $\psi(1,2,\dots,N,\dots,t)$,

前N个变量表示所有的某种全同粒子，则此波函数关于这些变量全对称，或者全反对称，由实验确定

回顾：量子力学的基本假设

- ① 每一个可观测量 A ，对应物理状态空间的一个自伴算符 \hat{A} 。
- ② 观测物理量 A 的结果，只能是算符 \hat{A} 的本征值之一。
- ③ 如果波函数展开为

$$\psi \equiv \sum_a c_a \psi_a$$

其中 ψ_a 是 \hat{A} 的归一化本征态，那么物理量 A 的测量值取 a 的概率是 $|c_a|^2$ 。

- ④ 测量即制备：如果测量 A 所得的值是 a ，那么在刚完成测量之后，系统的状态是 ψ_a 。
- ⑤ 波函数随时间的演化满足薛定谔方程
- ⑥ 全同粒子的假设

在量子场论中，由因果性可推出 自旋统计定理spin-statistic theorem

自旋为整数的全同粒子

波函数交换全对称

满足玻色-爱因斯坦统计

称为玻色子boson

自旋为半奇数的全同粒子

波函数交换全反对称

满足费米-狄拉克统计

称为费米子fermion

经典粒子服从麦克斯韦-玻尔兹曼统计

电子自旋 $1/2$ ，是费米子，总波函数反对称（Pauli不相容原理）

电子是“唯一”的，遍布宇宙的是它的化身

宏观的客体，如人，是粒子运动的集体模式
类比：水-漩涡

复合粒子的统计性质：

奇数个费米子组成的系统是费米子；

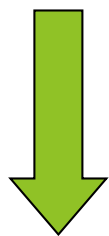
偶数个费米子组成的系统是玻色子。

例：He ($2e^-+2p+2n$) 原子是玻色子



两电子体系的总波函数

$$\psi \sim f(t)u(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(S, M_S)$$



ψ 在 $1 \leftrightarrow 2$ 交换下必须反对称

$$\begin{cases} u(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(0,0) & u(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \text{ 在 } 1 \leftrightarrow 2 \text{ 交换对称} \\ u(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(1, M_S) & u(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \text{ 在 } 1 \leftrightarrow 2 \text{ 交换反对称} \end{cases}$$

交换“力”

双电子的**空间波函数**，在零级近似下，可以分离变量

$$u(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \sim u_a(\vec{r}_1)u_b(\vec{r}_2)$$

零级近似的一般解

$$u(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = c_1 u_a(\vec{r}_1)u_b(\vec{r}_2) + c_2 u_b(\vec{r}_1)u_a(\vec{r}_2) + \dots$$

对称解

$$u_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_a(\vec{r}_1)u_b(\vec{r}_2) + u_a(\vec{r}_2)u_b(\vec{r}_1))$$

反对称解

$$u_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_a(\vec{r}_1)u_b(\vec{r}_2) - u_a(\vec{r}_2)u_b(\vec{r}_1))$$

$S = 0$ 的单态，**自旋波函数反对称**，**空间波函数对称**

$$u_S(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \sqrt{2}u_a(\vec{r}_1)u_b(\vec{r}_1)$$

几率密度增大1倍，相互“吸引”

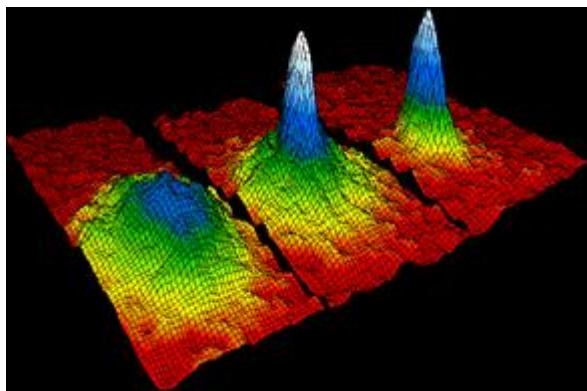
$S = 1$ 的三重态，**自旋波函数对称**，**空间波函数反对称**

$$u_A(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = 0$$

两个电子相互“排斥”

交换效应造成的吸引、排斥，是量子效应

玻色-爱因斯坦凝聚BEC



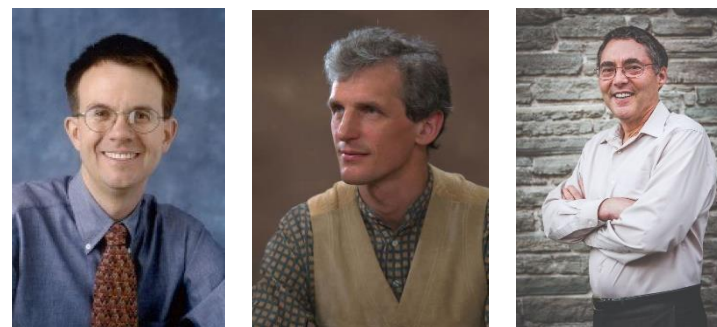
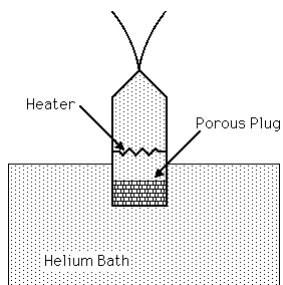
铷原子170nK

玻色-爱因斯坦凝聚时的粒子速度分布

左：发生前；

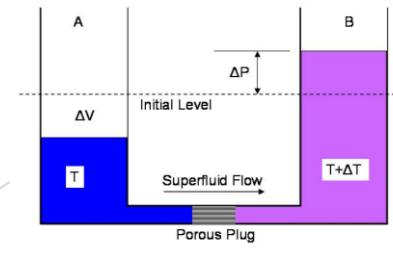
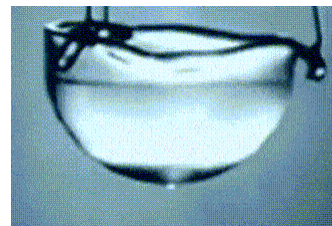
中：发生后；

右：继续降温后



Eric A.Cornell, Wolfgang Ketterle, Carl E. Wieman
2001 Nobel prize in Physics

Bose凝聚 超导，超流（宏观量子效应）



交换效应对He原子能级的影响

基态1s1s

$$n_1 = n_2 = 1, l_1 = l_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0$$

两个电子的单电子波函数相同, 不存在反对称的空间波函数 u_A , 只能取

$$u_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = u_{100}(\vec{r}_1)u_{100}(\vec{r}_2)$$

空间波函数对称 \Rightarrow 自旋波函数只能反对称 $\Rightarrow S = 0$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \Rightarrow L = 0$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow J = 0$$

氦原子基态只有单态 $^{2S+1}L_J = {}^1S_0$

单态能级 > 相应的三态能级

零级近似下，忽略两电子之间的库伦排斥能

$$H' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

电子各自独立运动，总自旋的单态singlet和三态triplet
能量相同

能级的一级修正：

单态：自旋波函数反对称，空间波函数对称，
两个电子靠近，能级升高较多

三态：自旋波函数对称，空间波函数反对称，
两个电子远离，能级升高较少

多电子原子*

- ◆ $\text{He} = \text{He}^{++} + 2\text{e}^-$ ，最简单的多电子原子
- ◆ 多体问题无论在经典力学还是量子力学中都无法严格求解，只能用近似方法
- ◆ 量子力学中基本粒子具有全同性
- ◆ 理论计算的方法：平均场近似 + 微扰论 + Pauli不相容原理

He原子的光谱

- ◆ 1868年，太阳日珥光谱中观测到光谱587.5nm，发现新元素He
- ◆ 和氢原子不同，He光谱分成两套：一套全是单线；另一套有复杂结构，为三线
- ◆ 起初称为“正氦”（三线）、“仲氦”
- ◆ 后发现元素周期表中的第2族元素Be, Mg, Ca, Sr等的光谱与氦类似
- ◆ 来自电子的自旋耦合效应 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \vec{0} \oplus \vec{1}$; $2S + 1 = 1, 3$

氦原子的能级

- ◆ 有两套能级，分别是单态singlet和三态triplet结构，**两套能级之间没有跃迁**
- ◆ 基态和第一激发态的能量差很大 $\sim 19.8\text{eV}$
- ◆ 三重态的能级总低于相应的单态能级
- ◆ $n = 1$ 的能级不存在三重态
- ◆ 两个第一激发态 2^1S_0 和 2^3S_1 都是亚稳态， 2^1S_0 寿命 19.5ms

