随机过程B

平稳过程

陈　昱

cyu@ustc.edu.cn

东区管理科研楼 1003

63602243

2020 年 2 月

随机过程有限维分布族

- **定义(有限维分布族)**：随机过程的一维分布，二维分布，...，n维分布，等等，其全体

$$\mathcal{F} = \{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) : \forall t_1,\ldots t_n \in T, \forall n = 1,2,\ldots\}$$

称为随机过程$\{X(t)\}$的有限维分布族，其中

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1,\ldots,X_{t_n} \leq x_n).$$

- 有限维分布族的性质
  1. 对称性：对次序交换保持一致
  2. 相容性：对取边缘分布保持一致

Kolmogorov's consistency theorem

- **定理(柯尔莫哥洛夫相容性定理)**: 设分布函数族

  $$\mathcal{F} = \{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) : \forall t_1,\ldots t_n \in T, \forall n = 1,2,\ldots\}$$

  满足上述的对称性和相容性，则必存在一个随机过程$\{X(t)\}$使得上述分布族恰好是它的有限维分布族.

对随机过程$\{X(t), t \in T\}$,

- 过程的一维分布函数为

$$F_t(x) = \mathrm{P}\left(X(t) \leq x\right), \forall t \in T.$$

- 过程的一维均值函数为

$$\mu_X(t) = EX(t).$$

- 过程的方差函数为

$$\sigma_X^2(t) = Var[X(t)].$$

对随机过程$\{X(t), t \in T\}$,

- $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = \mathrm{P}\left(X(t_1) \le x_1,\ X(t_2) \le x_2\right), \forall t_1, t_2 \in T.$$

  这也就是过程在 t_1, t_2 两不同时刻值的联合二维分布，记作 $F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$

- 过程的自相关函数

$$r_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)].$$

- 过程的协方差函数为

$$R_X(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2)) = E\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))\}$$

自相关函数和协方差函数性质

对随机过程$\{X(t), t \in T\}$的$r_X(t_1, t_2)$ 和 $R_X(t_1, t_2)$, 有

- 对称性:

$$r_X(s,t) = r_X(t,s) \qquad R_X(s,t) = R_X(t,s)$$

- 非负定性, 任何 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 及任意实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 我们恒有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r_X(t_i, t_j) \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j R_X(t_i, t_j) \geq 0$$

因为协方差运算有线性性质, 由

$$\begin{aligned} 0 \leq Var\left(\sum_{i=1}^{n} b_j X(t_j)\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} b_i X(t_i), \sum_{j=1}^{n} b_j X(t_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j R_X(t_i, t_j) \end{aligned}$$

平稳过程定义

随机向量同分布是指其联合分布函数相同。时间序列$\{X(t)\}$与$\{X(t)\}$ 同分布，当且仅当$\forall n \in \mathbb{N}_+$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ 与$(Y(t_1), \dots, Y(t_n))^T$同分布.

- **定义(严平稳过程)**: 如果时间序列$\{X(t)\}$ 对$\forall n \in \mathbb{N}_+$, $t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$,

  $$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T \text{ 和} (X(t_1+k), \dots, X(t_n+k))^T \text{ 同分布.}$$

  即分布平移不变，称时间序列$\{X(t)\}$为严平稳时间序列.

  1. $n = 1$, 则对所有的k, X_{t_k}都同分布.
  2. $n = 2$, 则对所有的k, (X_{k+t_1}, X_{k+t_2})的分布与k无关.

严平稳

- **严平稳过程性质**：如果时间序列$\{X(t)\}$严平稳时间序列，对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,定义

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\},$$

则$\{Y(t)\}$仍是严平稳时间序列.

1. $\{Y(t)\}$是$\{X(t)\}$的滑动平均序列，则严平稳保持.

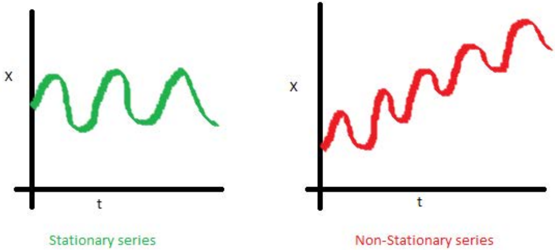
宽平稳过程定义

- **定义(平稳过程)**：如果时间序列$\{X(t)\}$ 对$\forall n \in \mathbb{N}$, 满足
  1. 对所有的$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
  2. 对所有的$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
  3. 对所有的$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,

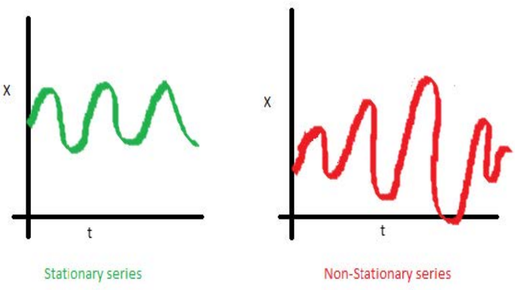
  则称$\{X(t)\}$ 是宽平稳时间序列, 简称为平稳序列 或平稳列.
  称实数列$\{\gamma_t\}$ 为$\{X(t)\}$ 的自协方差函数.
- 性质
  1. 期望、方差与t无关
  2. 时间平移不影响两时刻的相关系数
  3. 又称平稳序列为二阶矩平稳序列, 还称为平稳列或弱平稳列
  4. $H = \{Y, EY^2 \leq \infty\}$是一个线性空间, 定义内积为$(X, Y) = EXY$, 是个完备的内积空间（Hilbert空间）. 这样对于二阶矩过程$X(t)$, 可以看出Hilbert空间的一条曲线, 平稳过程则是Hilbert空间的一个圆($EX_tX_t = R(0) = c$). 即$X(t)$的端点都在以原点为圆心半径为$\sqrt{c}$的球面上.

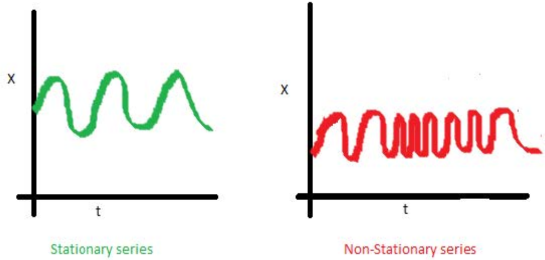
- 严平稳与平稳过程的关系
    1. 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
    2. 宽平稳一般不是严平稳。
    3. 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
    4. 平稳序列宽平稳序列弱平稳序列。

平稳过程图



平稳过程方差齐性




X
t
Stationary series
X
t
Non-Stationary series

- 自协方差函数性质
  1. 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$
  2. 非负定性: $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \text{非负定}$$

  3. 有界性: $|\gamma_k| \leq \gamma_0$对$\forall k \in \mathbb{Z}$

任何满足上述三个性质的实数列都被称为非负定序列. 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列. 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

- 矩阵Γ_n的元素通项是

$$\Gamma_n = \left(\gamma_{|i-j|}\right)_{i=1,2,\ldots,n,j=1,2,\ldots,n}$$

记

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

则$\Gamma_n = \mathrm{Var}(\boldsymbol{X})$.

- 定理 一个定义在整值点上的函数是某个**平稳过程的协方差函数**的$\Leftrightarrow$ 该函数是**偶函数**且是**非负定**的。
  - 例: 验证某个矩阵是非负定的, 只需看它是不是平稳列的协方差函数, $A = (\cos(i-j)\omega)_{n\times n}$是非负定阵.

- 因为Γ_n是协方差阵，所以非负定。事实上，设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)^T$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^T \Gamma_n \boldsymbol{\alpha} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{X} \boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \geq 0$$

- Γ_n 退化(不满秩) 当且仅当存在使得$\boldsymbol{\alpha} \neq 0$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = 0.$$

这时称随机变量$X_1, \ldots, X_n$是线性相关的。即$X_1, \ldots, X_n$的非零线性组合是退化随机变量。如果$X_1, \ldots, X_n$线性相关，则$m \geq n$ 时，$X_1, \ldots, X_n$ 线性相关。

自相关系数ACF

- **自相关系数定义AutoCorrelation Function**平稳序列$\{X_t\}$的h阶自相关系数

$$\begin{aligned}\rho_X(h) &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{Cov(X_{t+h}, X_t)}{Cov(X_t, X_t)} \\ &= Corr(X_{t+h}, X_t)\end{aligned}$$

1. 平稳序列的线性变换还是平稳的. 例如: $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$
2. 调和平稳序列, 设a, b 是常数, $U \sim U(-\pi, \pi)$, 则

$$X_t = b\cos(at + U), \quad t \in \mathbb{Z}$$

是平稳序列, 称为调和平稳列.

$$\begin{aligned} EX_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\ du = 0, \\ E(X_tX_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\ du \\ &= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a), \end{aligned}$$

这个平稳序列的观测样本和自协方差函数都是以a 为角频率, 以$2\pi/a$ 为周期的函数.

白噪声序列

- **定义(白噪声, White Noise)**: 设$\{\varepsilon_t\}$是一平稳列. 如果对任意的$s,t\in\mathbb{N}$, 有

$$E\varepsilon_t=\mu,$$
$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_s)=\begin{cases}\sigma^2, & t=s\\ 0, & t\neq s\end{cases}=\sigma^2\delta_{t-s},$$

则称随机变量序列$\{\varepsilon_t\}$ 是一个白噪声序列, 记做$WN(\mu,\sigma^2)$.

1. 一般地假定$\mu=0$. 如果$\mu=0$, 称$\{\varepsilon_t\}$为零均值白噪声。白噪声的另一种定义要求零均值, 本书中用到的白噪声一般都是零均值的。
2. 当$\mu=0,\sigma^2=1$ 时, 称$\{\varepsilon_t\}$ 为标准白噪声。
3. 当ε_t服从正态分布时, 称是正态白噪声或高斯白噪声。正态白噪声总是独立白噪声。

这是服从Poisson独立白噪声的例子。

例： 如果连续时的随机过程$\{N(t): t \in [0, \infty)\}$满足

1. $N(0) = 0$, 且对任何$s \geq 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}, (\lambda > 0,)$$

2. $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n > 1$ 和$0 = t_0 < \ldots < t_n$, 随机变量$N(t_j) - N(t_{j-1}), j = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立,

则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的Poisson 过程.

注： $EN(t) = \lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

令

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$E\varepsilon_n = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_n) = \lambda$, $\{\varepsilon_n\}$是独立白噪声，称为Poisson白噪声.

这是一种更典型的随机过程。

如果连续时的随机过程$\{B(t) : t \in [0, \infty)\}$ 是一个标准布朗运动.
定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

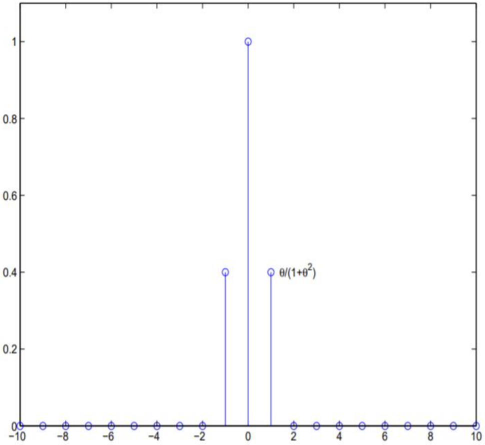
3. **(MA(1) 过程: Moving Average)**

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

平稳性:

$$\begin{aligned}
EX_t &= 0, \\
\gamma_X(t+h, t) &= E(X_{t+h}X_t) \\
&= E[(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\
&= \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & \mathit{if} \quad h = 0 \\ \sigma^2\theta, & \mathit{if} \quad h \pm 1 \\ 0, & \mathit{if} \quad |h| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

MA(1) 过程的ACF图



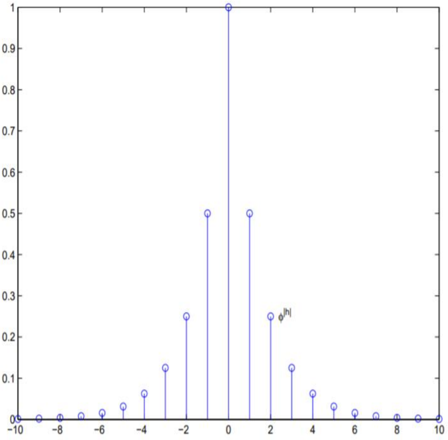
4. **(AR(1) 过程AutoRegressive:)**

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

假定$\{X_t\}$是平稳的和$|\phi| < 1$. 则有

$$\begin{aligned}
EX_t &= \phi EX_{t-1} = 0, \\
EX_t^2 &= \phi^2 EX_{t-1}^2 + \sigma^2 = \sigma^2/(1-\phi^2)], \\
\gamma_X(t+h, t) &= E(X_{t+h}X_t) \\
&= E[(\phi X_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h-1})X_t \\
&= \phi\gamma_X(h-1) \\
&= \phi^{|h|}\gamma_X(0) = \frac{\phi^{|h|}\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

AR(1) 过程的ACF图



例题：设 $A_0, A_1, \cdots, A_m$; $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 为两两不相关的随机变量，且 $EA_i = EB_j$, $EA_i^2 = EB_i^2 = \sigma_i^2$,$0 \le i \le m$, $0 \le j \le m$，记 $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_m$ 为 $[0, \pi]$ 中不同的频率。定义

$$X_t = \Sigma_{k=0}^m (A_k \cos t\omega + B_k \sin t\omega)$$

则显然有 $EX_t = 0$。利用诸 A_i, B_j 不相关，可知

$$EX_{t+\tau}X_t = \Sigma_{k=0}^m \sigma_k^2 \cos \tau\omega_k \tag{1}$$

仅与 τ 有关，故 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程。

▶注意到 $A_k \cos t\omega_k$ 和 $B_k \sin t\omega_k$ 表示圆频率为 ω_k 而随机振幅为 A_k 和 B_k 的简谐振动在时刻 t 时质点的位置。因此可见，当振动的随机振幅两两不相关时，经叠加而生成的过程仍为平稳过程。

例：滑动平均序列： 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 为一列不相关的有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量。设 $a_1, \cdots, a_k$ 为任意 k 个实数。考虑由下式定义的序列：

$$X_n = a_1\varepsilon_n + a_2\varepsilon_{n-1} + \cdots + a_k\varepsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

我们有

$$EX_n = m(a_1 + \cdots + a_k)$$

记 $\xi_j = \varepsilon_j - m$，则由 ε_j 的两两不相关知协方差函数

$$\begin{aligned}
& R(n+\tau, n) \\
= \; & E[(X_n - m(a_1 + \cdots + a_k))(X_{n+\tau} - m(a_1 + \cdots + a_k))] \\
= \; & E(a_1\xi_n + a_2\xi_{n-1} + \cdots + a_k\xi_{n-k+1}) \\
& \cdot(a_1\xi_{n+\tau} + a_2\xi_{n+\tau-1} + \cdots + a_k\xi_{n+\tau-k+1}) \\
= \; & \begin{cases} \sigma^2(a_k a_{k-\tau} + \cdots + a_{\tau+1}a_1) & , \quad 若 \quad 0 \le \tau \le k-1, \\ 0 & , \quad 若 \quad \tau \ge k, \end{cases}
\end{aligned}$$

即协方差函数仅与时间间隔 τ 有关，故 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为平稳过程。

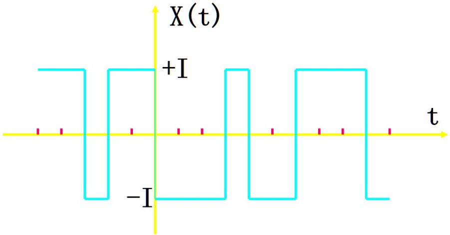
例：（随机电报信号）设信号流 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 为一随机过程，且对每个 t 有

$$P(X(t)=I)=P(X(t)=-I)=\frac{1}{2},$$

而在 $[t,t+\tau]$ 时间内正负号变化的次数 N 服从速率为 λ 的 Poisson 过程，即

$$P(N(\tau)=k)=e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k/k!,\quad \lambda>0,$$

试讨论信号流的平稳性。



解 显然,$EX(t)=0,\ t\geq 0$。为计算协方差函数，设 $\tau\geq 0$ 。注意到 $X(t+\tau)$ 与 $X(t)$ 的乘积只能取 I^2 和 $-I^2$ 两个值，故

$$
\begin{aligned}
EX(t+\tau)X(t) = I^2\cdot P\,(\text{信号在}\,[t,t+\tau]\,\text{内变号偶数次}) \\
-I^2\cdot P\,(\text{信号在}\,[t,t+\tau]\,\text{内变号奇数次})
\end{aligned}
$$

但

$$
\begin{aligned}
&P\,(\text{信号在}\,[t,t+\tau]\,\text{内变号偶数次}) \\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}P(N(t+\tau)-N(t)=2k) \\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^{2k}/(2k)! = e^{-\lambda\tau}\cosh(\lambda\tau) \\
&P\,(\text{信号在}\,[t,t+\tau]\,\text{内变号奇数次}) \\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}P\,(N(t+\tau)-N(t)=2k+1) \\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^{2k+1}/(2k+1)! = e^{-\lambda\tau}\sinh(\lambda\tau)
\end{aligned}
$$

所以

$$EX(t+\tau)X(t) = I^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}(-\lambda\tau)^k/k! = I^2 e^{-2\lambda\tau},$$

当 $\tau < 0$ 时，考虑 $[t+\tau, t]$ 内信号变化次数，同样可得

$$EX(t+\tau)X(t) = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$$

即协方差函数只与时间间隔 τ 有关，因此随机电报信号流是平稳过程。

还可以考虑复平稳过程。其定义类似，差别一是把 $X(t)$ 改为复值，二是把协方差函数定义为

$$E(X(t)-m)\cdot\overline{(X(s)-m)}$$

这儿 $\overline{X}$ 表示 X 的共轭。

Example

（周期振动）设 $X(t)=X\cdot f(t)$，其中 X 为实随机变量，满足 $EX=0$, $EX^2=\sigma^2$, $f(t)$ 为一个非随机的复值函数。考虑复值过程 $\{X(t), -\infty<t<\infty\}$。试证明 $\{X(t)\}$ 为平稳过程的充分必要条件是 $f(t)=Ce^{j(\lambda t+\theta)}$，其中 $j=\sqrt{-1}$, C, λ, θ 为常数。

证 由 $EX=0$ 知 $EX(t)=0, -\infty<t<\infty$。如果 $f(t)=Ce^{j(\lambda t+\theta)}$，则

$$\begin{aligned} EX(t+\tau)\overline{X(t)} &= EX^2C^2e^{j(\lambda(t+\tau)+\theta)}e^{-j(\lambda t+\theta)} \\ &= \sigma^2C^2e^{j\lambda\tau} \end{aligned}$$

故 Y 为平稳过程。反之，设 $X(t)$ 是一个平稳过程，则

$$R(\tau)=EX(t+\tau)\overline{X(t)}=EX^2f(t+\tau)\overline{f(t)}=\sigma^2f(t+\tau)\overline{f(t)},$$

即 $f(t+\tau)\overline{f(t)}$ 与 t 无关。

取 $\tau=0$，我们有

$$|f(t)|^2 = C^2 = R(0).$$

故 $f(t)=Ce^{j\psi(t)}$，这儿 $\psi(t)$ 为一实数，由此

$$f(t+\tau)\overline{f(t)} = C^2 e^{j(\psi(t+\tau)-\psi(t))}$$

与 t 无关，因此

$$\frac{d(\psi(t+\tau)-\psi(t))}{dt}=0$$

即 $\dfrac{d\psi(t+\tau)}{dt}=\dfrac{d\psi(t)}{dt}$ 对一切 t 均成立。因而 $\psi'(t)$ 为一常数，记为 λ。则 $\psi(t)=\lambda t+\theta$，因而有

$$f(t)=Ce^{j(\lambda t+\theta)}.$$

遍历性

时间序列一般只有一条轨道。要用时间序列$\{X_t\}$ 的一次实现$x_1, x_2, \ldots$推断$\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$ 的统计性质. 这样我们必须对时间序列要提出要求, 遍历性就是可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质的一种要求。

如果严平稳序列是遍历的, 从它的一次实现$x_1, x_2, \ldots$ 就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, ..., x_m) \\ = \quad & P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_m \le x_m), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.

在应用工作中一下定理非常有用，但它的证明超出了本课关心的范围。

- 遍历性定理：如果$\{X_t\}$ 是严平稳遍历序列，则有如下的结果：
  1. 强大数律：如果$E|X_1| < \infty$，则
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t = EX_1, a.s..$$
  2. 对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$，
  $$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m}),\ t \in \mathbb{Z}\},$$
  仍是严平稳遍历时间序列.

例子1： 对严平稳遍历时间序列$\{X_t\}$, 定义

$$Y_t = I[X(t+t_1) \le y_1, X(t+t_2) \le y_2, \cdots, X(t+t_m) \le y_m], \quad t \in \mathbb{Z}.$$

这里$I[A]$是事件A的示性函数. 如果$\{X_t\}$是遍历的, 由遍历性定理的第2条知道$\{Y_t\}$ 也是遍历的, 并且有界. 利用遍历性定理的第1条(强大数律)得到

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t = EY_0 \\ = & P(X(t_1) \le y_1, X(t_2) \le y_2, \cdots, X(t_m) \le y_m), \ a.s.. \end{aligned}$$

这个例子说明, 在几乎必然的意义下, $\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

例子2： 对严平稳遍历时间序列$\{X_t\}$, 则$\{X_t X_{t+k}, t \geq 1\}$ 也是严平稳遍历的序列。当$EX_t^2 < \infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t+k} = EX_1 X_{k+1}, a.s..$$

对平稳过程加上什么条件后，对时间的平均值可以等于过程的均值？这一问题称为平稳过程的遍历性（Ergodic）问题。这是平稳过程研究中的一个重要课题，其重要性可以从如下粗略的分析中看出。

对平稳过程 X, 重要的是确定它的均值 m 以及协方差函数 $R(\tau)$，由于 $EX(t)=m$，为估计 m，我们必须对随机过程 X 作大量观察，以 $X_i(t)$ 记第 i 次观察中时刻 t 的值，$i=1,2,\cdots,n$，则大数律告诉我们可以用

$$\hat{m}_n=\frac{1}{n}(X_1(t)+\cdots+X_n(t))$$

来估计。同样，为了估计协方差函数也可以用

$$\hat{R}_n(\tau)=\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^{n}(X_k(t+\tau)-\hat{m}_n)(X_k(t)-\hat{m}_n)$$

来估计。

但对随机过程作多次观察一般来说很难做到。比较容易的是作了一次观察，获得一条样本路径

但对于平稳过程，只要加上一些很一般的条件，比如观察的时间足够长，就可以从一次观察中获得 m 和 $R(\tau)$ 的较好的估计。这就是有名的遍历性定理。为导出这一定理，我们需要如下的定义。这儿的极限是均方极限

定义： 设 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为一平稳序列，若

$$\overline{X} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} X(k) \overset{L_2}{=} m \tag{2}$$

则称 X 的均值有遍历性。如果

$$\hat{R}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=1}^{n} (X(k+\tau) - \hat{m}_n)(X(k) - \hat{m}_n) \overset{L_2}{=} R(\tau) \tag{3}$$

则称 X 的协方差函数有遍历性。

遍历性又称各态历经性。直观上可以这样理解：
考虑只有有限个状态的平稳序列 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$，其状态 $E = \{e_1, \cdots, e_b\}$。则 $m = EX_n$ 是各个状态的加权平均。若令

$$A_N = \{X_n, X_n : -N \le n \le N\},$$

则遍历性告诉我们，对几乎每个样本，当 N 很大时,A_N 中的元素历经 E 中各个状态，而且当 $N \to \infty$ 时，A_N 中的元素为状态 e_i 的频率趋于 p_i，从而对 A_N 中元素的平均

$$\overline{X}_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X_n$$

趋于过程均值

$$m = \sum_{i=1}^{b} p_i e_i.$$

平稳过程均值的遍历性问题。

均值遍历性定理:

设 $X=\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为平稳序列，其协方差函数为 $R(\tau)$，则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0$$

推论： 对平稳序列而言，若 $R(\tau)\to 0(\tau\to\infty)$，则均值遍历性成立。

$$E(\bar{X}_N-\mu)^2 = E\Big[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(X_k-\mu)\Big]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2}E\Big[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(X_k-\mu)(X_j-\mu)\Big] = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{k-j} \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1-j}^{N-j}\gamma_m \qquad (\text{令}\, m=k-j) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{m=-N+1}^{N-1}\ \sum_{j=\max(1-m,1)}^{\min(N-m,N)}\gamma_m = \frac{1}{N^2}\sum_{m=-N+1}^{N-1}(N-|m|)\gamma_m \\
&\leq \frac{2}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}(N-m)\gamma_m
\end{aligned}$$

改写一下求和式

$$\sum_{m=0}^{N-1}(N-m)\gamma_m = S_0 + S_1 + \cdots + S_{N-1}$$

其中

$$S_j = \sum_{k=0}^{j}\gamma_k.$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{2}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}(N-m)\gamma_m\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{2}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}S_m \overset{Stolz}{=} \lim_{N\to\infty}\frac{2S_{N-1}}{2N-1} \to 0\end{aligned}$$

即 $\bar{X}_N$ 均方收敛到 μ.

先考虑平稳过程均值的遍历性问题。

Theorem (均值遍历性定理)

(i)设 $X=\{X_n,\ n=0,\pm1,\cdots\}$ 为平稳序列，其协方差函数为 $R(\tau)$，则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0$$

(ii) 若 $X=\{X(t),\ -\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程，则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau=0.$$

证　由于离散场合和连续时间场合证明思路相同，首先计算 $\overline{X}$ 的均值和方差。记

$$\overline{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt,$$

则

$$E\overline{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} EX(t)dt = m,$$

下面计算 $\overline{X}_T$ 的方差，如图 4.1,

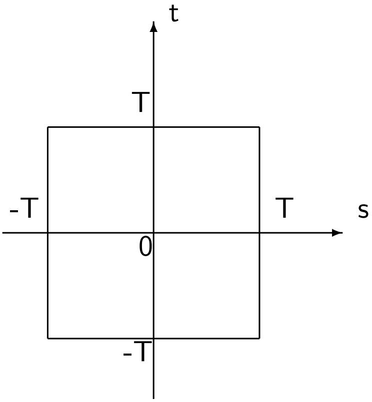


图 4.1

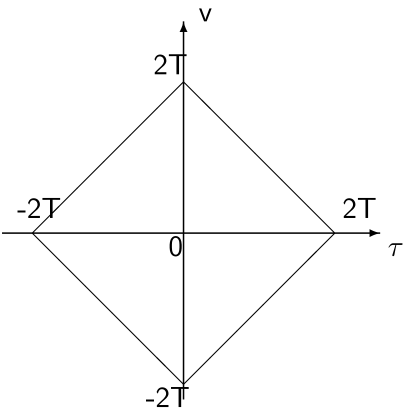


图 4.2

$$
\begin{aligned}
Var(\overline{X}_T) &= E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt]^2 - \frac{1}{4T^2}E[\int_{-T}^{T} EX(t)dt]^2 \\
&= \frac{1}{4T^2}\int\int_{-T}^{T} E[(X(t)-m)(X(s)-m)]dtds \\
&= \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t-s)dtds. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

作积分变换$\begin{cases} \tau = t - s \\ v = t + s \end{cases}$，则变换的Jacobi行列式为:

$$
J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \tau} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}
$$

积分区域变换为 $D = \{-2T \le \tau \pm v \le 2T\}$（如图 4.2）

注意到 $R(\tau)$ 是偶函数, 故 (4.12) 等于

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{4T^2}\cdot\frac{1}{2}\int\int_D R(\tau)d\tau dv \\
= \quad & \frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T-|\tau|}^{2T+|\tau|} R(\tau)\frac{1}{2}d\tau dv \\
= \quad & \frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T} R(\tau)(2T-|\tau|)d\tau \\
= \quad & \frac{1}{2T^2}\int_{0}^{2T} R(\tau)(2T-\tau)d\tau \\
= \quad & \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} R(\tau)(1-\frac{\tau}{2T})d\tau,
\end{aligned}
$$

遍历性定理

- 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| < \infty$，则均值遍历性成立。

  这是由于当 $0 \leq \tau \leq 2T$ 时，$|(1 - \frac{\tau}{2T})R(\tau)| \leq |R(\tau)|$，

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^{2T}(1-\tau/2T)R(\tau)d\tau\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^{2T}|R(\tau)|d\tau \leq \frac{1}{T}\int_0^{\infty}|R(\tau)|d\tau \to 0$$

- 对平稳序列而言，若 $R(\tau) \to 0 (\tau \to \infty)$，则均值遍历性成立。

协方差遍历性

关于协方差函数 $R(\tau)$ 的遍历性定理，我们可以考虑随机过程

$$Y_\tau = \{Y_\tau(t), -\infty < t < \infty\},$$

其中 $Y_\tau(t) = (X(t+\tau) - m)(X(t) - m)$, 则 $EY_\tau(t) = R(\tau)$. 由定理 4.1 的证明过程知道，均值有遍历性等价于 $Var(\overline{X}_T) \to 0$, $T \to \infty$。因此可以类推协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性等价于

$$Var(\overline{Y}_\tau^T(t) \to 0, \ T \to \infty$$

其中

$$\overline{Y}_\tau^T(t) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y_\tau(t)dt,$$

把 $Var(\overline{Y}_\tau^T(t))$ 写开, 便得到协方差遍历性定理.

Theorem

（协方差函数遍历性定理）设 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程， $Y_\tau = \{Y_\tau(t), -\infty < t < \infty\}$ 其中 Y_τ 由上面所定义，则对给定的 τ, X 的协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} (1 - \frac{\tau_1}{2T})(B(\tau_1) - R^2(\tau))d\tau_1 = 0,$$

其中

$$B(\tau_1) = EX(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t).$$

协方差遍历性

关于协方差函数的遍历性，由于牵涉到过程的四阶矩，一般很难验证。但对于 Gauss 过程来说，问题要简单得多，比如我们有如下的结果。

Theorem

设 $X=\{X_n,\ n=0,\pm1,\cdots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 平稳过程，如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)=0$$

则 Gauss 过程的协方差函数有遍历性。

遍历性例子

例 设 $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, $\omega \neq 0$, 则

$$X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$$

的均值有遍历性。

证 首先

$$EX(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta)d\theta = 0,$$

其协方差函数为

$$\begin{aligned} EX(t+\tau)X(t) &= Ea^2\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)\cos(\omega t+\Theta) \\ &= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos((t+\tau)\omega+\theta)\cos(t\omega+\theta)d\theta \\ &= \frac{a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos((2t+\tau)\omega+2\theta)+\cos\tau\omega]d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\tau\omega, \end{aligned}$$

故 X 为平稳的。

由于

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\tau/2T)R(\tau)d\tau = \frac{a^2}{2T}\int_0^{2T}(1-\tau/2T)\cos\omega\tau d\tau$$
$$= \frac{a^2}{2T}\cdot\frac{\sin(2T\omega)}{\omega} - \frac{a^2}{4T^2}\int_0^{2T}\tau\cos\omega\tau d\tau, \tag{5}$$

由分部积分知

$$\left|\int_0^{2T}\tau\cos\omega\tau d\tau\right| = \left|\frac{1}{\omega}[2T\sin(2T\omega) - \frac{1}{\omega}(1-\cos(2T\omega))]\right| \le \frac{2T}{\omega},$$

把此结果代入 (4.13) 式，即知

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau \to 0 \quad (T\to\infty).$$

故由定理 4.1 知遍历性成立

时间平均性

$$
\begin{aligned}
\langle X(t)\rangle &= \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t\\
&= \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+\Theta)\mathrm{d}t\\
&= \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{a}{2T}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\Theta)\mid_{-T}^{T}\\
&= \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{a}{2T\omega}(\sin(\omega T+\Theta)-\sin(-\omega T+\Theta))\\
&\le \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{a}{\omega T}=0
\end{aligned}
$$

协方差遍历性

$$
\begin{aligned}
\langle\overline{X(t)}X(t+\tau)\rangle &= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2\mathrm{T}+\infty}\int_{-T}^{T}\overline{X(t)}X(t+\tau)\mathrm{d}t \\
&= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)\mathrm{d}t \\
&= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{a^2}{2T}\cdot\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}(\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)+\cos\omega t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega t
\end{aligned}
$$

Example

设随机变量序列 $\{X_n,\ n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 满足

$$X_n = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos n\omega_k + B_k \sin n\omega_k),$$

其中 $A_1, \cdots, A_m; B_1, \cdots, B_m$ 是均值为 0 且两两不相关的随机变量，又 $EA_k^2 = EB_k^2 = \sigma_k^2$, $1 \le k \le m$, $0 < \omega_k < 2\pi$，试考察其均值的遍历性。

解 与例 4.6 类似，可以算得

$$EX_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$
$$R(\tau) = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \cos \tau\omega_k,$$

由三角求和公式 $\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\left|\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau)\right| &= \frac{1}{N}\left|\sum_{\tau=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \cos \tau\omega_k\right| \\
&\le \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \left|\sum_{\tau=0}^{N-1} \cos \tau\omega_k\right| = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \left|\frac{\sin(N-1/2)\omega_k}{2\sin(\omega_k/2)} - \frac{1}{2}\right| \\
&\le \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \frac{1}{\sin(\omega_k/2)} \to 0
\end{aligned}$$

故平稳序列 X 的均值有遍历性。

Example

研究例 4.8 中的随机电报信号的均值有否遍历性。

解 由例 4.8 知 $R(\tau)=I^2e^{-2\lambda|\tau|}$，其中 $\lambda>0$，由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)d\tau=2I^2\int_0^{\infty}e^{-2\lambda\tau}d\tau=\frac{I^2}{\lambda}<\infty,$$

由定理 4.1 的推论立得随机电报信号的均值有遍历性。

和差化积

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

积化和差

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$$