随机过程B

陈昱
cyu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

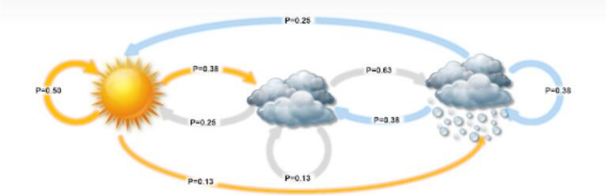
2022 年 2 月

第 3 章　　Markov 过程

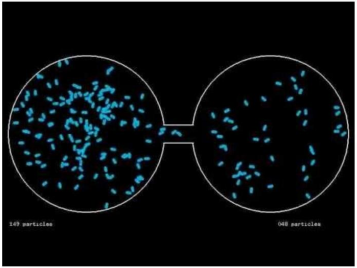
- 马尔可夫链的定义及例子
- 马尔可夫链的状态及分类
- 马尔可夫链的极限性质
- 连续时间马尔可夫链

Markov 过程应用

1. 天气预报

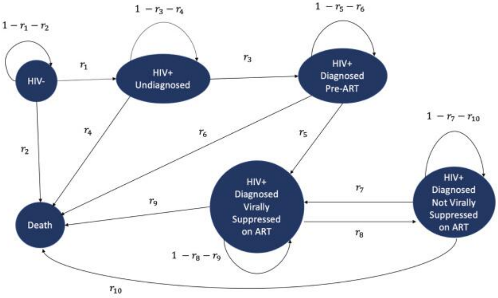


2. 分子扩散模型(Ehrenfest扩散模型)



Markov 过程应用

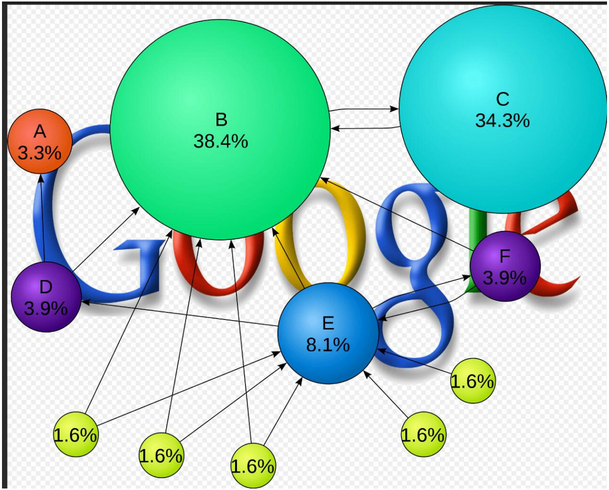
3. 病情预测



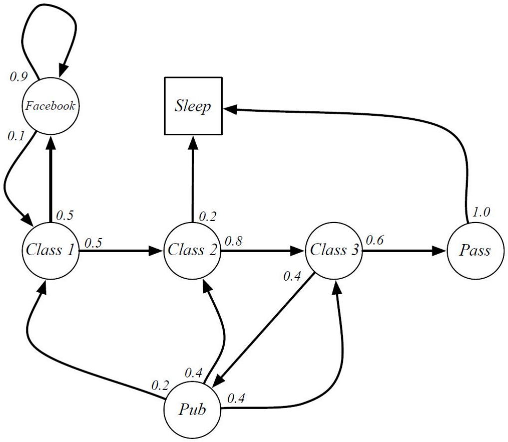
Download : Download high-res image (348KB)   Download : Download full-size image

Fig. 2. HIV Transmission Markov Model.

4. PageRank算法（计算互联网网页重要度的算法）



5. 学习过程


0.9
Facebook
0.1
Sleep
0.5
0.2
1.0
Class 1
0.5
Class 2
0.8
Class 3
0.6
Pass
0.4
0.4
0.2
Pub
0.4

过程 $\{X(t), t \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}$, 状态空间 S.

- **Markov 性质**: 具有马尔科夫性质的状态满足下面公式:

$$P(S_{t+1} \mid S_t) = P(S_{t+1} \mid S_1, \ldots, S_t)$$

- **离散MC**: 对 $\forall\, t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $t_i, t \in T$, $x_i \in S$, $B \in \mathcal{B}(S)$,

$$\mathrm{P}\left(X(t) \in B \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_n) = x_n\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_n) = x_n\right).$$

- **时间齐次性**: 对 $\forall\, t_0 < t$, $t_0, t \in T$, $x \in S$, $B \in \mathcal{B}(S)$,

$$\mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_0) = x\right) \text{ 与 } t_0 \text{ 无关，只依赖于 } t - t_0.$$

- **分类**: 根据 T 与 S “离散” 与 “连续” 进行分类

研究离散时间离散状态时间齐次的马氏链 (Markov Chain, 记为 MC) $\{X_n, n \in T\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 或有限状态.

- 局部历史和全部历史的马氏性
- 一步转移概率:

$$P_{ij} = \mathrm{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right) = \mathrm{P}\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right), \quad \forall\, i, j, n$$

- 一步转移概率矩阵:

$$\boldsymbol{P} = \left(P_{ij}\right)_{S \times S}$$

注

$\{X_n, n \geq 0\}$ 概率规律由 X_0 分布和转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 唯一确定.

当然在此我们把过程留在原地也看成是一种“转移”，即从 i 转移到 i。通常把 P_{ij} 排成一个无穷维的方阵。记作 **P**, 称为一步转移概率矩阵,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & & & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

1, $P_{ij} \geq 0 (\forall i, j \geq 0)$
2, $\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1 (i = 0, 1, 2, \cdots)$

即这个矩阵每一行和为1, 每一个元素均为非负。

矩阵的第 $i+1$ 行就是给定 $X_n = i$ 时，X_{n+1} 的条件概率分布。
当 Markov 链的状态总数是有限时，则 **P** 就是有限阶的方阵，其阶数正好是状态空间中状态的总数。

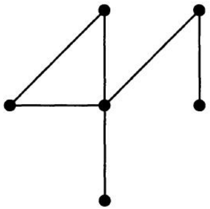
定义：转移图

转移图是一个有向图$G=(V,E)V=S$，S是Markov链的状态空间，E定义如下

$$E=\left\{\overrightarrow{ij} \mid i,j\in S, p_{ij}>0\right\}$$

例子：图上随机游走

考虑如下一个图$G=(V,E).V=S$， S是Markov链的状态空间，



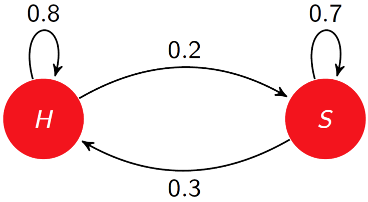
即顶点即为Markov链所处的状态，定义转移概率如下

$$p\left(v_i,v_j\right)=1/d\left(v_i\right),\quad v_i\sim v_j$$

其中$d\left(v_i\right)$ 为顶点v_i的度(无向图), [if $d\left(v_i\right)=0$, we let $p\left(v_i,v_i\right)=1$].

- 例: 每一天的心情两种，happy ($X_n = 0$) or sad ($X_n = 1$)
  $\Rightarrow$ 明天的心情只会被今天的心情所影响
- 我们用一Markov Chain来刻画，

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

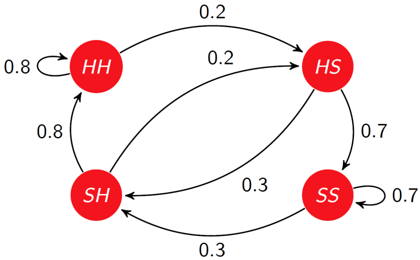


- Inertia (惯性) $\Rightarrow$ 今天开心或者悲伤，明天很有可能继续
- But when sad, a little less likely so ($P_{00} > P_{11}$)

- 例: 明天的心情会被今天和昨天两天的心情所影响
  $\Rightarrow$ 如果用上一个例子的状态，这就不是一个Markov chain。

- 我们定义double states(两天的状态), HH (Happy-Happy), HS (Happy-Sad), SH, SS, 这可以用一Markov Chain来刻画，

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



由当前事件和独立序列生成的马氏链

定理： 假设$Y_{\mathrm{N}} = Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ 是$i.i.d.$ 且独立于X_0. 考虑随机过程$X_{\mathrm{N}} = X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 满足

$$X_n = f\left(X_{n-1}, Y_n\right), \quad n \geq 1$$

则X_{N} 是Markov chain, 其转移概率为

$$P_{ij} = \mathrm{P}\left(f\left(i, Y_1\right) = j\right).$$

- 这是识别马尔可夫链非常有用的一个结论.
- 随机游动时, $f(x, y) = x + y$.

证明：先证Y_{n+1}与$X_0, X_1, \ldots, X_n$相互独立.
$X_1 = f(X_0, Y_1)$, Y_2与X_0, Y_1独立, 所以Y_2与X_1, X_0独立. 同理

$$X_2 = f(X_1, Y_2) = f(f(X_0, Y_1), Y_2),$$

所以Y_3与X_2, X_1, X_0独立。归纳假设可知Y_{n+1}与$X_0, X_1, \ldots, X_n$相互独立。所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(f\left(X_n, Y_{n+1}\right) = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(f\left(i_n, Y_{n+1}\right) = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n\right) = P\left(f\left(i_n, Y_{n+1}\right) = i_{n+1}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right)
\end{aligned}$$

例((s, S)存储问题)： 设一家电视机商店最多可存放S台电视机.开始时商店进货进足S台电视机.若在第n个月中顾客欲购的电视机台数(需求量)为ξ_n,第n个月底盘点时所剩的电视机台数记为X_n. 盘点后决定是否进货. 决策的方法如下:若$X_n \leqslant s$, 就立即进货至S台, 若$X_n > s$, 则不进货.假设$\{\xi_n, n \geqslant 1\}$为i.i.d. 随机变量序列,其共同分布为$\{q_k, k \geqslant 0\}$. 这时$\{X_n, n \geqslant 0\}$是马尔可夫链. 事实上, 我们有

$$X_0 = S,$$

$$X_n = \begin{cases} \max(0, X_{n-1} - \xi_n), & \text{当} s < X_{n-1} \leqslant S, \\ \max(0, S - \xi_n), & \text{当} X_{n-1} \leqslant s, \end{cases} \qquad n \geqslant 1.$$

X_n是一个状态空间为$\{0, 1, \ldots, S\}$的MC，转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_s, & j = 0, i \leqslant s, \\ \alpha_i, & j = 0, i > s, \\ q_{s-j}, & 0 < j \leqslant S, i \leqslant s, \\ q_{i-j}, & 0 < j \leqslant i, i > s, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中$\alpha_i = \sum_{j=i}^{\infty} q_j$.

- 例【独立和序列】 一般随机游动过程 $\{S_n, n \geq 0\}$, 其中 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ iid,

$$\mathrm{P}(X_1 = j) = \alpha_j, \quad j \in \mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

显然，$\{S_n, n \geq 0\}$ 为一个 MC, 转移概率

$$P_{ij} = \alpha_{j-i}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{Z}.$$

若

$$\mathrm{P}(X_1 = j) = \alpha_j, \quad j \in \mathbb{Z} \equiv \{0, 1, 2, \ldots\},$$

此时$\{S_n, n \geq 0\}$ 为一个 MC, 转移概率为

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_{j-i}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$$

例： (1)无限制的随机游走. 设有一质点在数轴上随机游动，每单位时间向左或向右移动一个单位，或者原地不动. 向左的概率为q, 向右的概率为p, 不动的概率为r, Z_n记此离散分布. X_n表示n时刻质点的位置，则$\{X_n, n \geq 0\}$是一Markov链. ($X_0 = a$)

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$$

- $p = q = 1/2$, 简单对称随机游动
- $p + q = 1, 0 < p < 1$, 简单随机游动

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ r & j = i \\ q & j = i-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

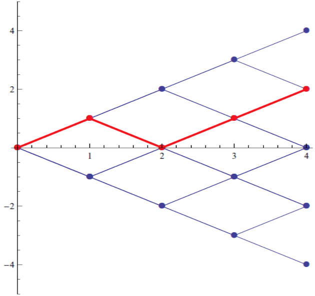


图. 简单随机游走的样本路径

对于马尔科夫链，我们经常会画出其状态转移图，例如下图是简单随机游走的状态转移图

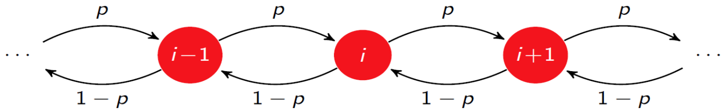


图. 简单随机游走的状态转移图

对一般的MC，

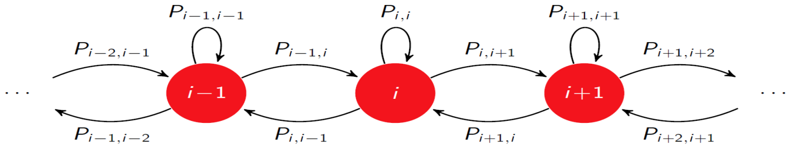


图. 状态转移图

例： (2)带吸收壁的随机游走. 将(1)中的随机游动限制在0和J(吸收态absorbing)之间，即$S=\{0,1,\dots,J\}$上。质点移动到0和J上后就永远停留在该位置了. 即

$$P_{00}=1=P_{JJ},$$

其余同(1). 这时候就称为带两个吸收壁的随机游动, 是一个有限状态的马尔可夫链.

$$X_{n+1}=\max(0,\min(X_n+Z_{n+1},J))$$

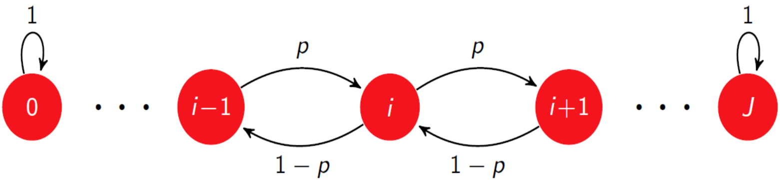
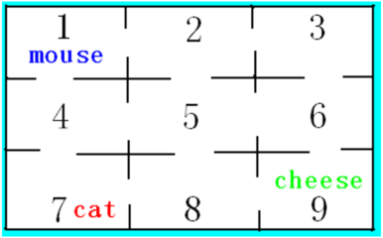


图. 状态转移图

下图为一个迷宫，其中房间9放有一块奶酪,而房间7里隐藏着一只猫．现有一只老鼠从房间1出发．假设老鼠没有任何信息，即：当老鼠在一个给定房间时，它进入相邻房间的概率为$1/k$，其中k表示与该给定房间相邻的房间个数．假设一旦老鼠进入奶酪或猫所在的房间，则永远停留在该房间．



设Xn表示老鼠在n次变换房间之后所在房间号，则随机过程$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$是一个以$S = \{1, 2, \dots, 9\}$为状态空间的Markov链，并且初始概率向量为$S(0) = (1, 0, \dots, 0)$，转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

赌徒输光问题 赌徒甲有资本a元，赌徒乙有资本b元，两人进行赌博，每赌一局输者给赢者1元，没有和局，直赌至两人中有一人输光为止。设在每一局中，甲获胜的概率为p，乙获胜的概率为q，求甲输光的概率。

这个问题实质上是带有两个吸收壁的随机游动。

解： 从甲的角度看，X_n表示手里持有的资本, $X_0 = a$, 每次移动一格，向左（输1元）或向右（赢1元）. 一旦达到0（甲输光）或达到$c = a + b$(乙输光）这个游动就停止。这是一个带两个吸收壁（0和c)的随机游动。现在的问题是求质点从a出发到达0状态先于到达c状态的概率。

这是一个Markov链, 具有马氏性，以此来递推。设$0 \le j \le c$, 设u_j为质点从j出发到达0状态先于c. 于是得到递推式

$$u_j = u_{j+1}p + u_{j-1}q$$

边界条件为

$$u_0 = 1, \quad u_c = 0.$$

要求u_a, 先求u_j. 把上式移动一下变为

$$u_j - u_{j+1} = \left(\frac{q}{p}\right)(u_{j-1} - u_j)$$

令$r=q/p$,

$$u_j-u_{j+1}=r\left(u_{j-1}-u_j\right)=r^2\left(u_{j-2}-u_{j-1}\right)=r^j(u_1-u_0)$$

当$r\neq 1$, 有

$$1=u_0-u_c=\sum_{j=0}^{c-1}\left(u_j-u_{j+1}\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{c-1}r^j(u_1-u_0)=\frac{1-r^c}{1-r}(u_1-u_0).$$

而

$$u_j=u_j-u_c=\sum_{i=j}^{c-1}\left(u_i-u_{i+1}\right)=\sum_{i=j}^{c-1}r^i(u_1-u_0)$$
$$=r^j\left(1+r+\cdots+r^{c-j-1}\right)(u_1-u_0)=\frac{r^j-r^c}{1-r}(u_1-u_0)$$

于是得到

$$u_j = \frac{r^j - r^c}{1 - r^c},$$

从而

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{r^a - r^c}{1 - r^c} \\ &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^c\right) \Big/ \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^c\right) \end{aligned}$$

若$r = 1$时

$$u_0 - u_c = 1 = c(u_1 - u_0), \quad c = a + b$$

由上式

$$u_j - u_{j-1} = u_{j-1} - u_{j-2} = \cdots = u_1 - u_0 = \frac{1}{c},$$

从而$u_j = u_j - u_c = \sum_{i=j}^{c-1}(u_i - u_{i+1}) = (c - j)\frac{1}{c}$, 于是

$$u_a = \frac{b}{a + b}.$$

(续)

- 引理 3.1.1 设 $\{S_n, n \geq 0\}$ 为简单随机游动, 则对任意 $i \neq 0$,

$$\mathrm{P}\left(S_n = i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) = \frac{p^i}{p^i + q^i}. \qquad (*.1)$$

证明: 约定 $i_0 = 0$, 定义 $j = \max\{k: \ i_k = 0, 1 \leq k \leq n\}$.

- 事件 $\{S_n = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_j| = 0\}$ 对应的路径向右跳 $\frac{1}{2}(n-j+i)$ 步, 向左跳 $\frac{1}{2}(n-j-i)$ 步;
- 事件 $\{S_n = -i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_j| = 0\}$ 对应的路径向右跳 $\frac{1}{2}(n-j-i)$ 步, 向左跳 $\frac{1}{2}(n-j+i)$ 步.

于是 $(*.1)$ 左边等于

$$\mathrm{P}\left(S_n = i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_j| = 0\right) = \frac{p^i}{p^i + q^i}.$$

(续) 证明 $\{|S_n|, n \geq 0\}$ 为一个 MC.

证明： 对 $\forall\, i \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(|S_{n+1}| = i+1 \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) \\
&\quad = \mathrm{P}\left(|S_{n+1}| = i+1 \,\middle|\, S_n = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) \\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(S_n = i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) \\
&\qquad + \mathrm{P}\left(|S_{n+1}| = i+1 \,\middle|\, S_n = -i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) \\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(S_n = -i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) \\
&\quad = p \cdot \frac{p^i}{p^i + q^i} + q \cdot \frac{q^i}{p^i + q^i}.
\end{aligned}
$$

于是，转移概率为: $P_{01} = 1$, $P_{ij} = 0, \forall\, |i-j| > 1$, 且

$$
P_{i,i+1} = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i} = 1 - P_{i,i-1}. \qquad \blacksquare
$$

顾客进入一个服务系统, 只有一个服务员, 如果发现服务员空着即刻得到服务, 如果有顾客在接受服务就排队等候. 假设相继来到的顾客服务时间序列为独立同分布的序列， 分布为$Exp(\lambda)$, 每个顾客的服务时间的分布也相同, 来到过程和服务时间都是相互独立的。该排队系统记为$M/G/1$.

$$\underbrace{M}_{\text{指数分布}} \quad / \quad \underbrace{G}_{\text{一般非指数分布}} \quad / \quad \underbrace{1}_{\text{1个服务员}}$$

若以$X(t)$记在t时刻系统中的顾客数, 不具有马氏性, 因为此时等待下一个来到时间(前一个顾客来了多久）, 还有就是服务中的顾客剩余服务时间都有关系, 除非是指数分布. 来到间隔是指数分布， 我们不关心前一个到达系统的顾客已经到达多久(指数分布无记忆性), 但是我们关心服务的顾客已经服务了多久.

记X_n: 第n个顾客走后剩下的顾客数.
记Y_n: 第$n+1$个顾客接受服务的期间来到的顾客数.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n, & X_n > 0 \\ Y_n, & X_n = 0 \end{cases}$$

Y_n分布不依赖于n，为

$$P\{Y_n = k\} = P_k,\ k = 0, 1, \cdots,\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1,$$

并且 Y_n 是相互独立的. 则此时 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一 Markov 链。其转移概率阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

- n 步转移概率：

$$P_{ij}^{n} = \mathrm{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right), \quad \forall\, i, j$$

- n-步转移概率矩阵：

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \left(P_{ij}^{n}\right)_{S\times S}$$

- Chapman-Kolmogorov 方程： 对 $\forall\, m, n \geq 0$,

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}, \quad \forall\, i, j,$$

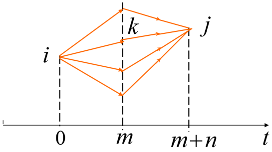
即 $\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)}\boldsymbol{P}^{(n)}$, 其中约定 $P_{ik}^{0} = \delta_{ik}$. 因此,

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P}^{n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

证明：

由齐次马氏链的定义，令

$$P_{ij}^{m+n} = \mathrm{P}\left[X_{n+m} = j | X_0 = i\right]$$



利用全概率公式，对第m步取条件

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{m+n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left[X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i\right] \mathrm{P}\left[X_m = k | X_0 = i\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left[X_{m+n} = j | X_m = k\right] \mathrm{P}\left[X_m = k | X_0 = i\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_{kj}^{n} P_{ik}^{m}
\end{aligned}$$

性质： 一个马尔可夫链的特性完全由它的一步转移概率矩阵及其初始分布向量决定. 且

$$\pi(n+1)=\pi(n)\boldsymbol{P},\quad \pi(n)=\pi(0)\boldsymbol{P}^{n}$$

证明： 记

$$\pi_i(n)=P\left(X_n=i\right),n\geq 0.$$

则$(\pi_1(0),\pi_2(0),\cdots,\pi_i(0),\cdots)$为马尔科夫链的初始分布向量. 事实上：

$$\begin{aligned}
& P\left(X_0=i_0,X_1=i,\cdots,X_n=i_n\right) \\
= \quad & P\left(X_0=i_0\right)P\left(X_1=i_1|X_0=i_0\right)P\left(X_2=i_2|X_0=i_0,X_1=i_1\right)\cdots\times \\
& \quad P\left(X_n=i_n|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\right) \\
= \quad & P\left(X_0=i_0\right)P\left(X_1=i_1|X_0=i_0\right)P\left(X_2=i_2|X_1=i_1\right)\cdots\times \\
& \quad P\left(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}\right) \\
= \quad & \pi_{i_0}(0)P_{i_0i_1}P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}$$

例子

- 考虑一个三状态的Markov链$\{X_n\}$, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中$p, q, r > 0, p + q + r = 1$. 这一Markov链从状态1出发, 一旦进入状态0或2就被吸收了. 求:

1) 过程从状态1出发被状态0吸收的概率

2) 需要多长时间过程会进入吸收状态

解: 令

$$T = \min\{n \geq 0 | X_n = 0 \text{ or } 2\}$$

$$u = P\{X_T = 0 | X_0 = 1\}$$
$$v = E\{T | X_0 = 1\}$$

例子

而如果 $X_1 = 2$ 也有 $T = 1$ 但 $X_T = 2$；只有当 $X_1 = 1$ 时过程才回到 X_0 所处的状态 1 并重新开始转移。因此由全概率公式我们有

$$
\begin{aligned}
u &= P\{X_T = 0|X_0 = 1\} \\
&= \sum_{k=0}^{2} P\{X_T = 0|X_0 = 1, X_1 = k\}P\{X_1 = k|X_0 = 1\} \\
&= \sum_{k=0}^{2} P\{X_T = 0|X_1 = k\}P\{X_1 = k|X_0 = 1\} \\
&= 1 \cdot p + u \cdot q + 0 \cdot r = p + qu
\end{aligned}
$$

于是解出 $u = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p+r}$。

例子

类似地可以建立关于 v 的方程，求出最终被吸收的平均时间：

$$\begin{aligned} v &= E\{T|X_0 = 1\} \\ &= \sum_{k=0}^{2} E\{T|X_0 = 1, X_1 = k\}P\{X_1 = k|X_0 = 1\} \\ &= \sum_{k=0}^{2} E\{T|X_1 = k\}P\{X_1 = k|X_0 = 1\} \\ &= 1 \cdot p + (1 + v) \cdot q + 1 \cdot r \\ &= 1 + qv, \end{aligned}$$

解出 $v = \dfrac{1}{1-q}$。可以从解中看到过程从状态 1 转回状态 1 的概率 q 越大就越难进入吸收状态，而且平均时间拉长。这是符合常识的。

Lemma

$\mu_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i)$, 则$\mu^{(m+n)} = \mu^{(m)}\mathbf{P}_n$, *and hence* $\mu^{(n)} = \mu^{(0)}\mathbf{P}^n$

证明:

$$\mu_j^{(m+n)} = \mathbb{P}(X_{m+n} = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i)\, \mathbb{P}(X_m = i)$$

$$= \sum_i \mu_i^{(m)} P_{ij}(n) = \left(\boldsymbol{\mu}^{(m)}\mathbf{P}_n\right)_j$$

某种鲜奶A改变了广告方式，经调查发现购买A种鲜奶及另外三种鲜奶B、C、D的顾客每两个月的平均转换率为：（假设市场上只有这4种鲜奶）

$$
\begin{array}{lllll}
\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}(95\%) & \mathbf{B}(2\%) & \mathbf{C}(2\%) & \mathbf{D}(1\%) \\
\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}(30\%) & \mathbf{B}(60\%) & \mathbf{C}(6\%) & \mathbf{D}(4\%) \\
\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}(20\%) & \mathbf{B}(10\%) & \mathbf{C}(7\%) & \mathbf{D}(0\%) \\
\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}(20\%) & \mathbf{B}(20\%) & \mathbf{C}(10\%) & \mathbf{D}(50\%)
\end{array} \tag{1}
$$

假设目前购买A、B、C、D 4种鲜奶的顾客的分布为（25%，30%，35%，10%），求半年后鲜奶A、B、C、D的市场份额。

一步转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04 \\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \end{pmatrix}$$

初始分布

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (0.25, 0.30, 0.35, 0.10)$$

则

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.8894 & 0.0458 & 0.0466 & 0.01820 \\ 0.60175 & 0.2559 & 0.0988 & 0.04355 \\ 0.4834 & 0.1388 & 0.36584 & 0.01196 \\ 0.5009 & 0.2134 & 0.14264 & 0.14306 \end{pmatrix}$$

半年后A的市场占有

$$v = (0.25, 0.30, 0.35, 0.10) \begin{pmatrix} 0.8894 \\ 0.60175 \\ 0.4834 \\ 0.5009 \end{pmatrix} \approx 0.624$$