



第四章 真空中的静磁场

§ 4.1 磁现象与磁场

§ 4.2 毕奥—萨伐尔定律

§ 4.3 安培定律

§ 4.4 静磁场的基本定理

§ 4.5 带电粒子在磁场中的运动



§ 4.1 磁现象与磁场

- 一、磁现象与磁学
- 二、磁的库仑定律及磁场线引入
- 三、电流的磁效应---奥斯特实验
- 四、磁场的定量表述与洛伦兹力
- 五、安培力公式与洛伦兹力公式

一、磁现象与磁学

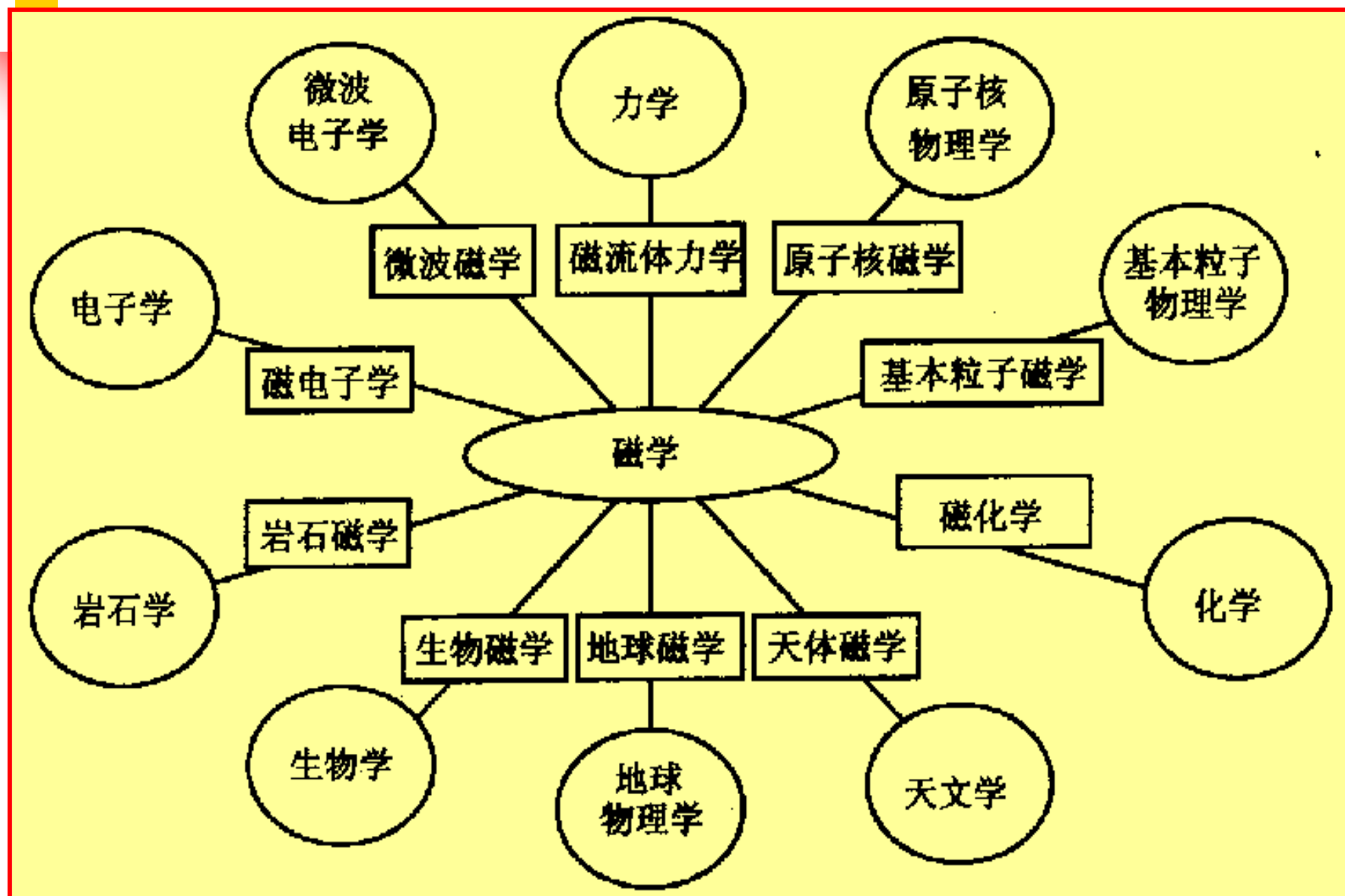
磁现象的研究与应用(即**磁学**)是一门古老而又年轻的学科。

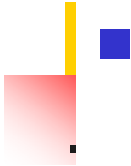
说她**古老**，是因为关于磁现象的发现和使用的历史悠久；**司南勺、指南针**。“**magnet**”名词来源于古希腊语（**magnes**），一地名“**Magnesia**”。

说她**年轻**，是因为磁的应用目前越来越广泛，已形成了许多与磁学有关的边缘学科。

磁现象是一种普遍现象，即一切物质都具有磁性，任何空间都存在磁场。

磁学犹如一棵根深叶茂的参天大树





■ 尽管人们对物质磁性的认识已有两千年多年，但直至19世纪20年代才出现采用经典电磁理论解释物质磁性的代表——安培分子环流假说；

■ 而真正符合实际的物质磁性理论却是在19世纪末发现电子、20世纪初有了正确的原子结构模型和建立了量子力学以后才出现。



基本磁现象

对基本磁现象的认识可以分成三个阶段：

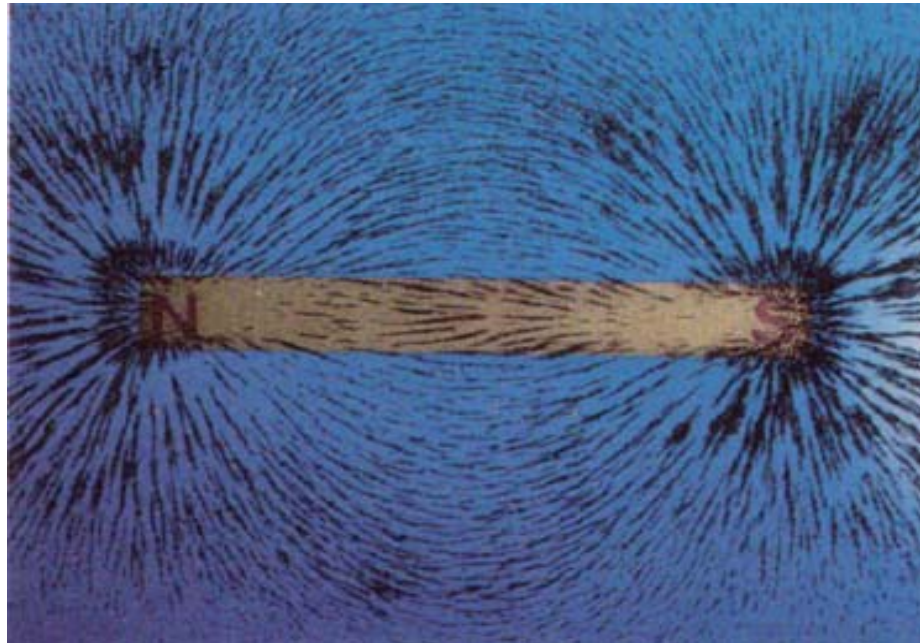
1、 早期阶段（磁铁 \Leftrightarrow 磁铁）

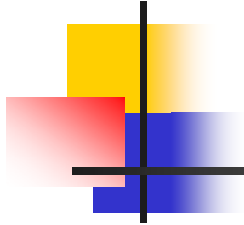
2、 电流 \Leftrightarrow 磁铁 电流 \Leftrightarrow 电流

3、 电流 \Leftrightarrow 磁场 \Leftrightarrow 电流

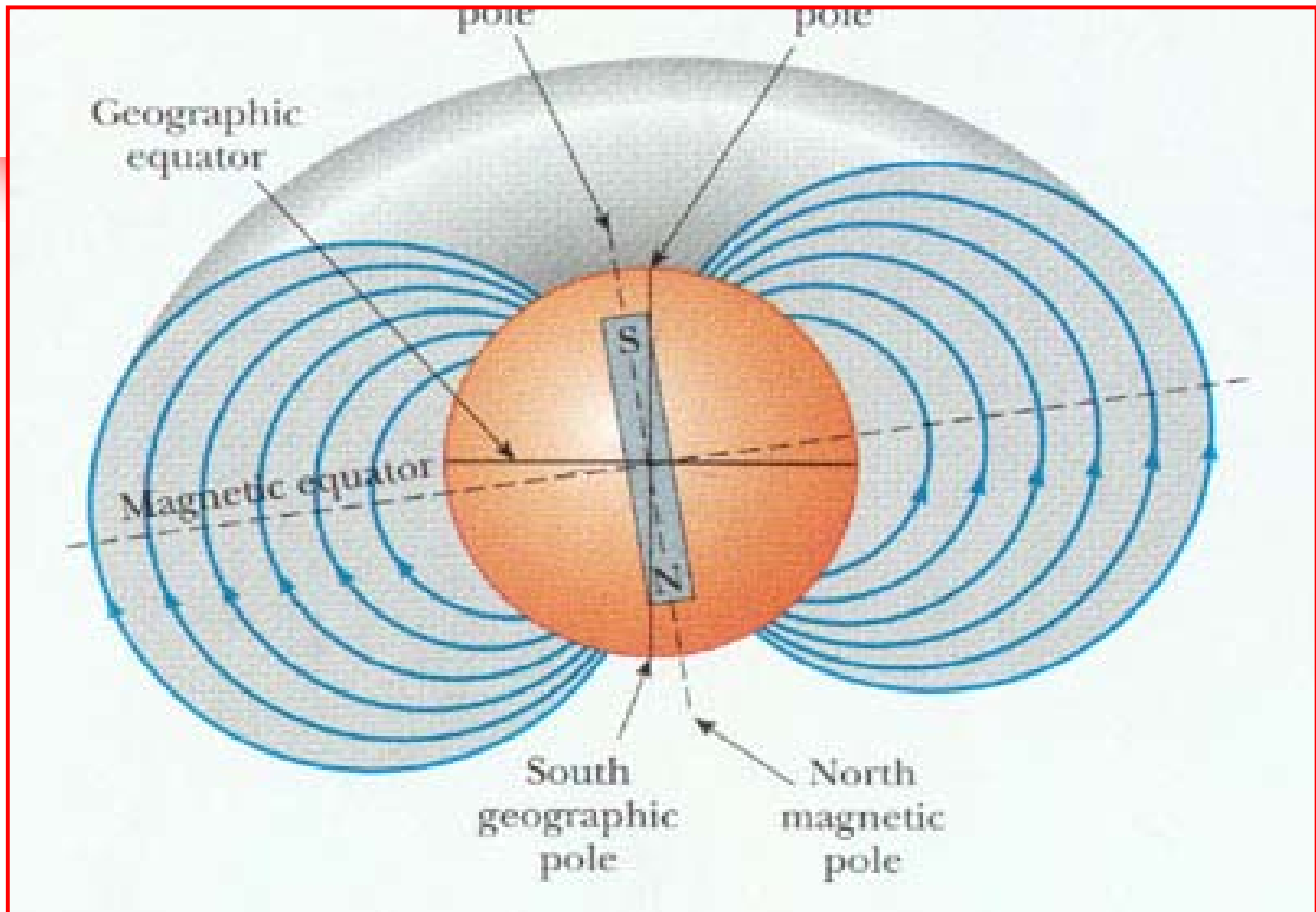
早期阶段（磁铁 \Leftrightarrow 磁铁）

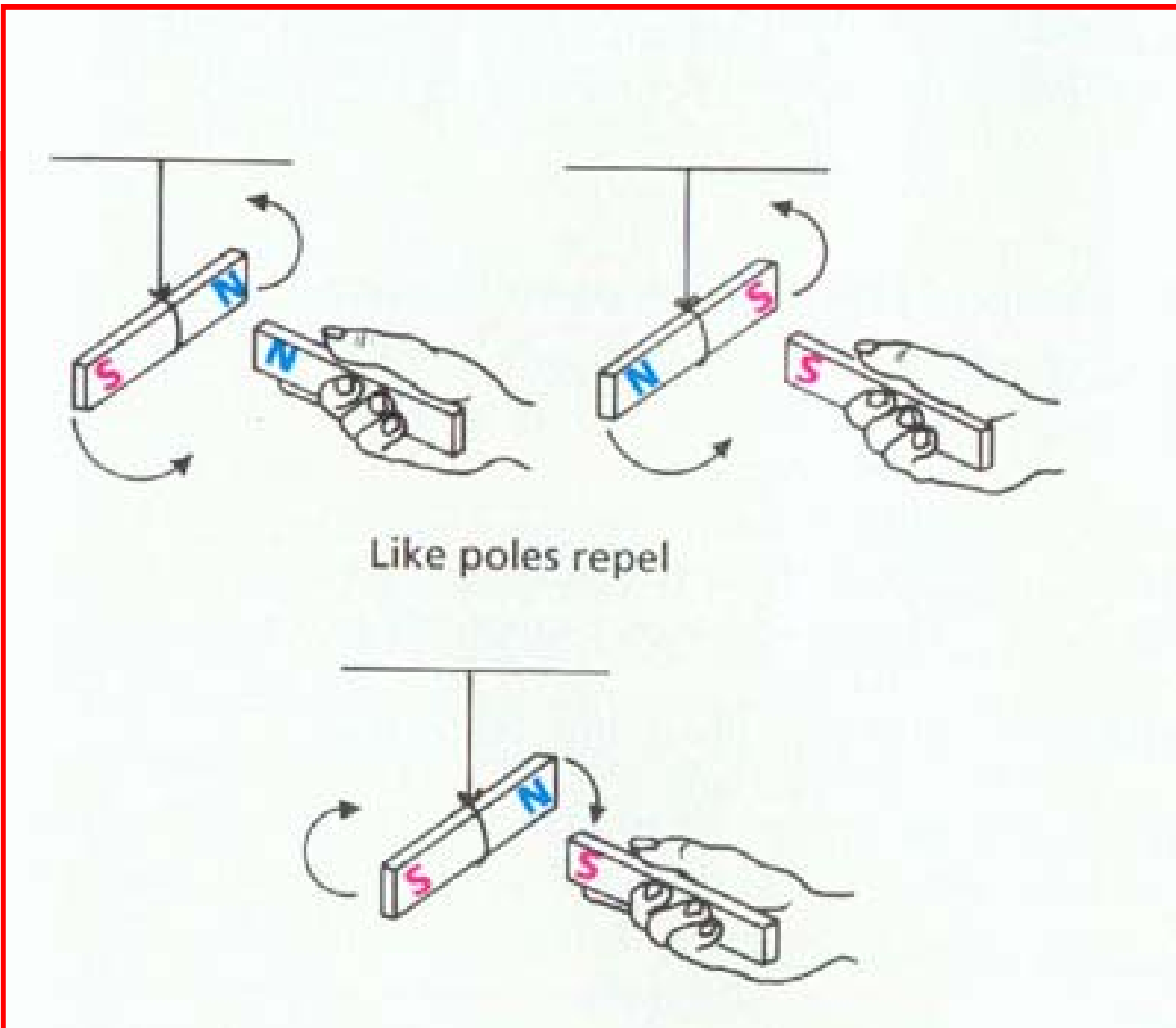
■ 天然磁铁（吸铁石）能吸引铁、镍、钴等物质。条形磁铁的两端称作磁极，中部称作中性区。



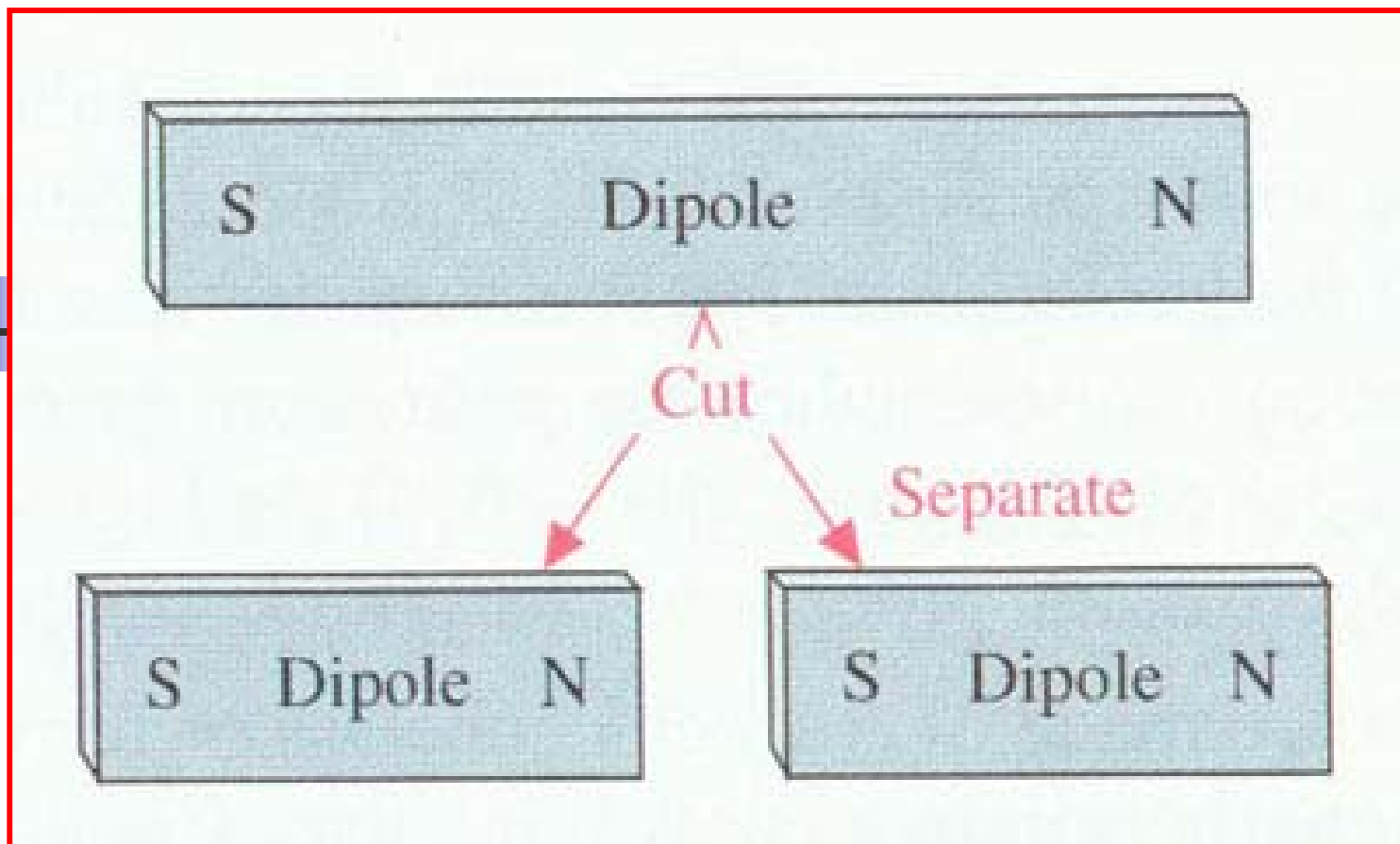


- 将条形磁铁的中心支撑或悬挂起来使它能够水平面内运动，则两极总是指向南北方向分别称作**S**极和**N**极。这是因为**地球本身是一个磁体**，所以条形磁铁(**指南针**)可以与地磁体发生相互作用。





条形磁
铁与地球磁
体之间以及
条形磁铁之
间的相互作
用说明**同号
磁极**相互排
斥，**异号磁
极**相互吸引。



- 将一磁铁可以一直细分成很小很小的磁铁，而每一个小磁铁都具有N、S极(上图)。自然界中有独立存在的正电荷或负电荷，但迄今却未发现独立的N、S极，尽管在近代理论中有人认为可能存在磁单极子。

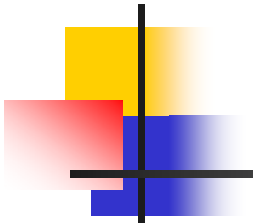


二、磁的库仑定律及磁场线引入

1、磁的库仑定律

2、磁场线引入

1、磁的库仑定律


$$\mathbf{F} = k \frac{q_{m0} q_m}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4.1.1)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\mu_0} = \frac{1}{16\pi^2} \times 10^7 \text{ N}^{-1} \cdot \text{A}^2$$

磁的库仑定律

$$\mathbf{F} = \frac{q_{m0} q_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r}.$$

(4.1.2)

磁荷的单位为(牛顿)·米/安(培)
(**N·m/A**)。

定义磁场强度

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} / q_{m0},$$

(4.1.3)

点磁荷产生的
磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r}.$$

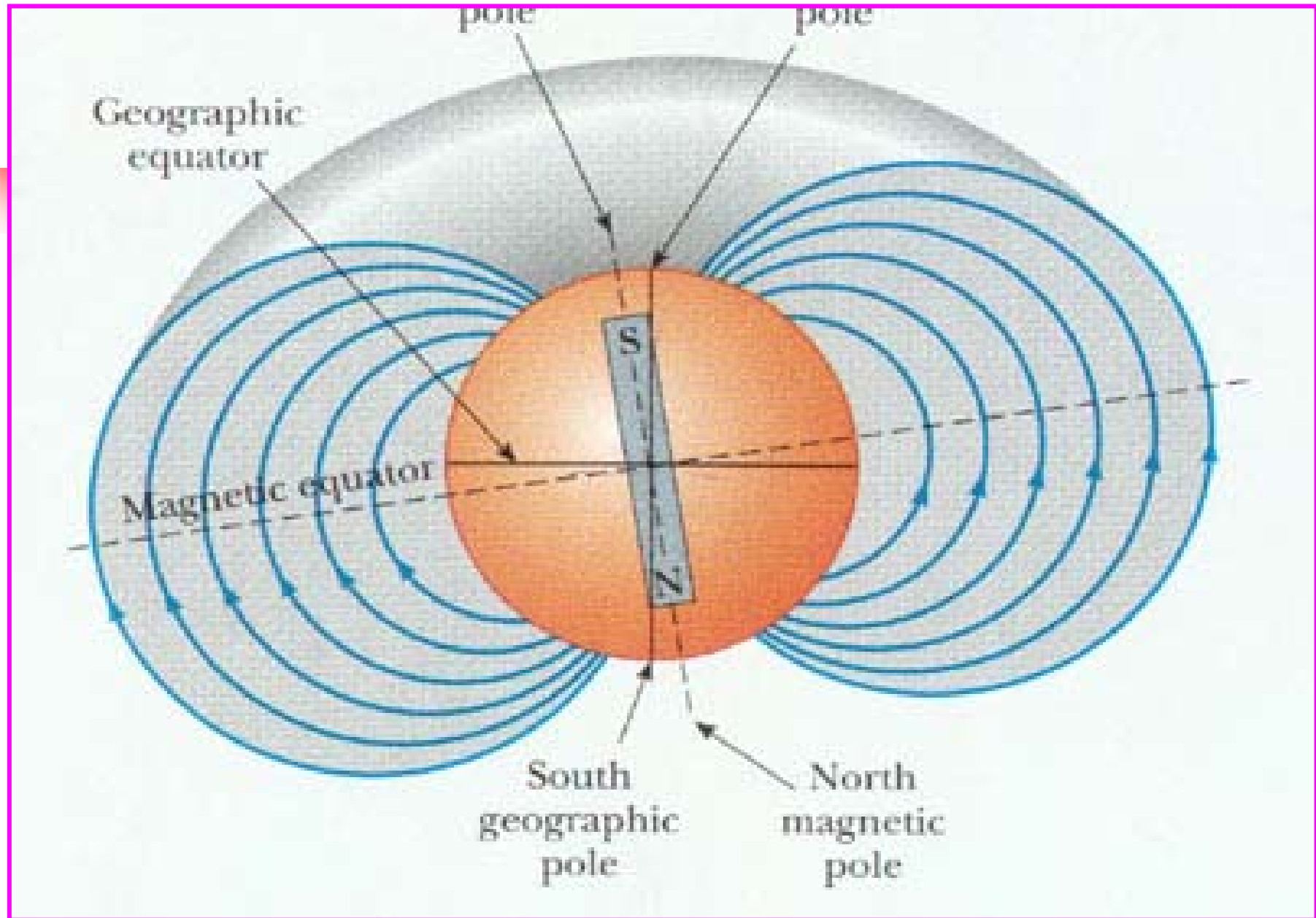
(4.1.4)



2、磁场线的引入

与电场中引入电场线相似，磁场中可引入磁场线（又称磁力线、磁感应线）。

磁场线定义：磁场线即磁场空间中一些有方向的曲线，其曲线上每点的切线方向与该点的磁场（磁感应强度）方向一致。且规定是检验小磁针放在该点其**N极所指的方向**。

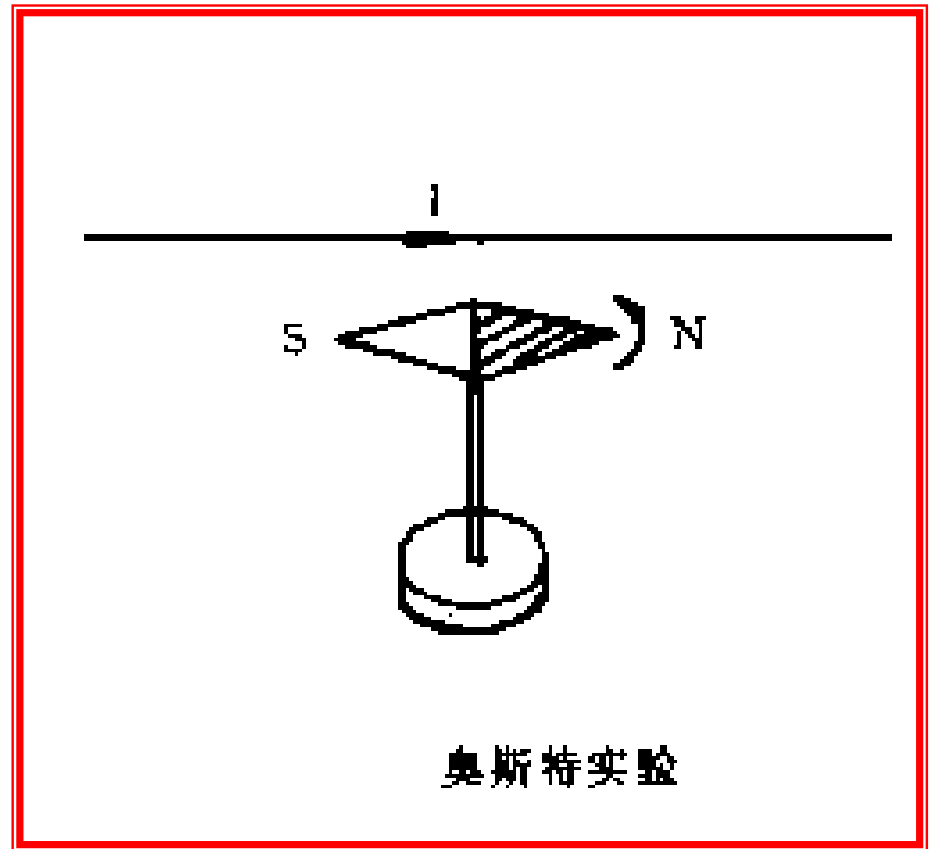


三、电流的磁效应---奥斯特实验

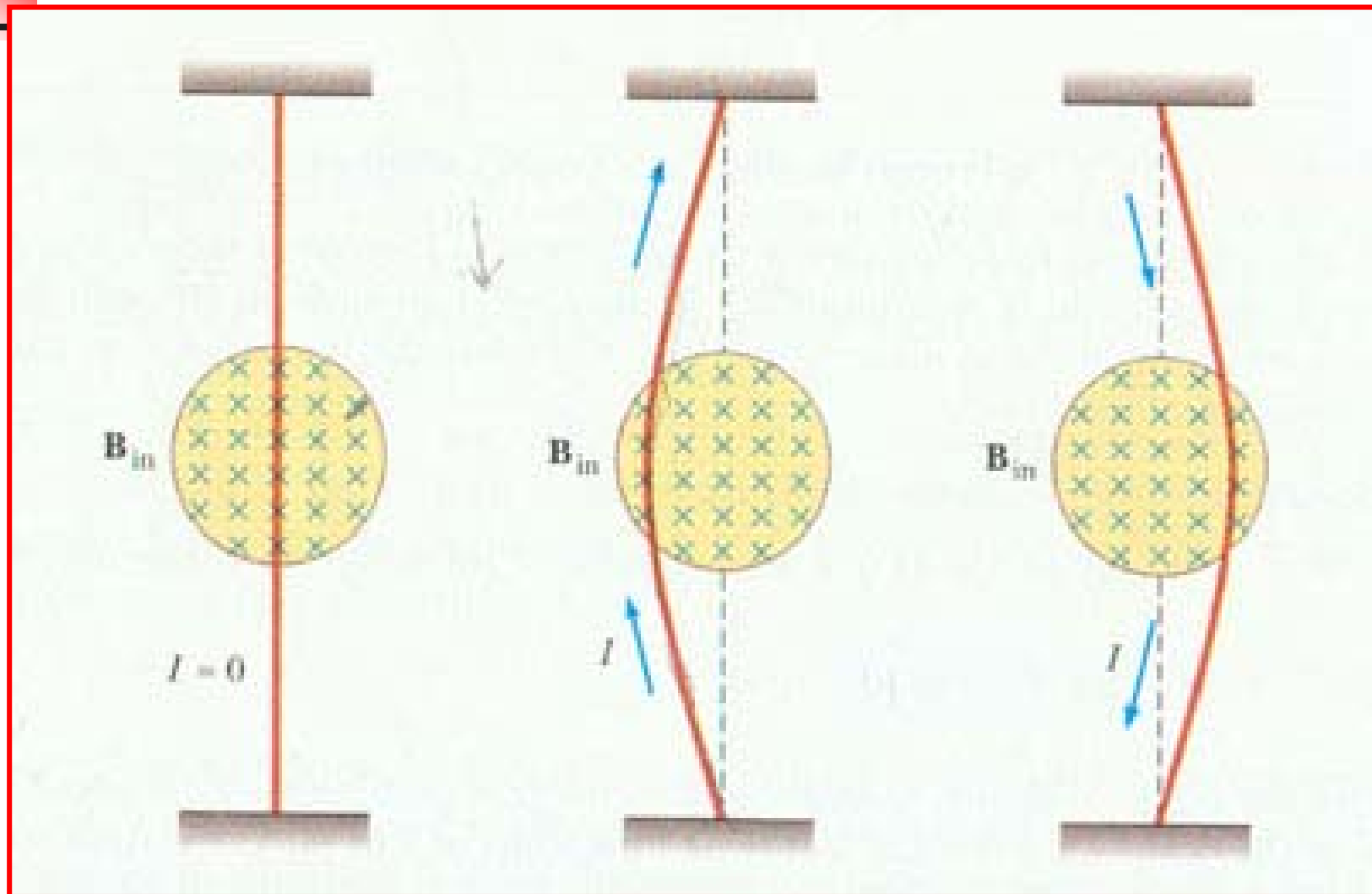
1. 奥斯特的实验

在德国哲学家康德与谢林关于自然力统一的思想影响下，丹麦物理学家**奥斯特**坚持用实验寻找电与磁的联系。

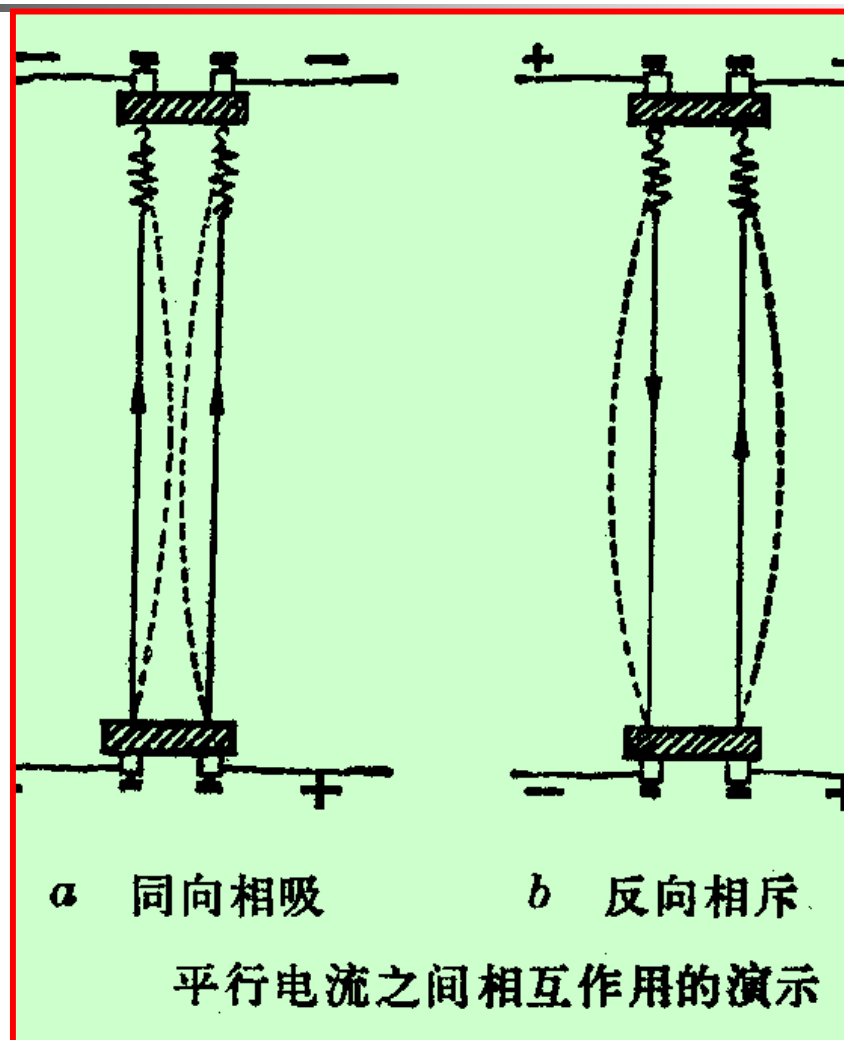
1820年7月21日，**奥斯特实验**打破了长期以来认为电与磁无关的思想，使人们开始认识到电与磁有着不可分割的联系。证明了**电流对磁铁的作用**，发现了**横向力**。



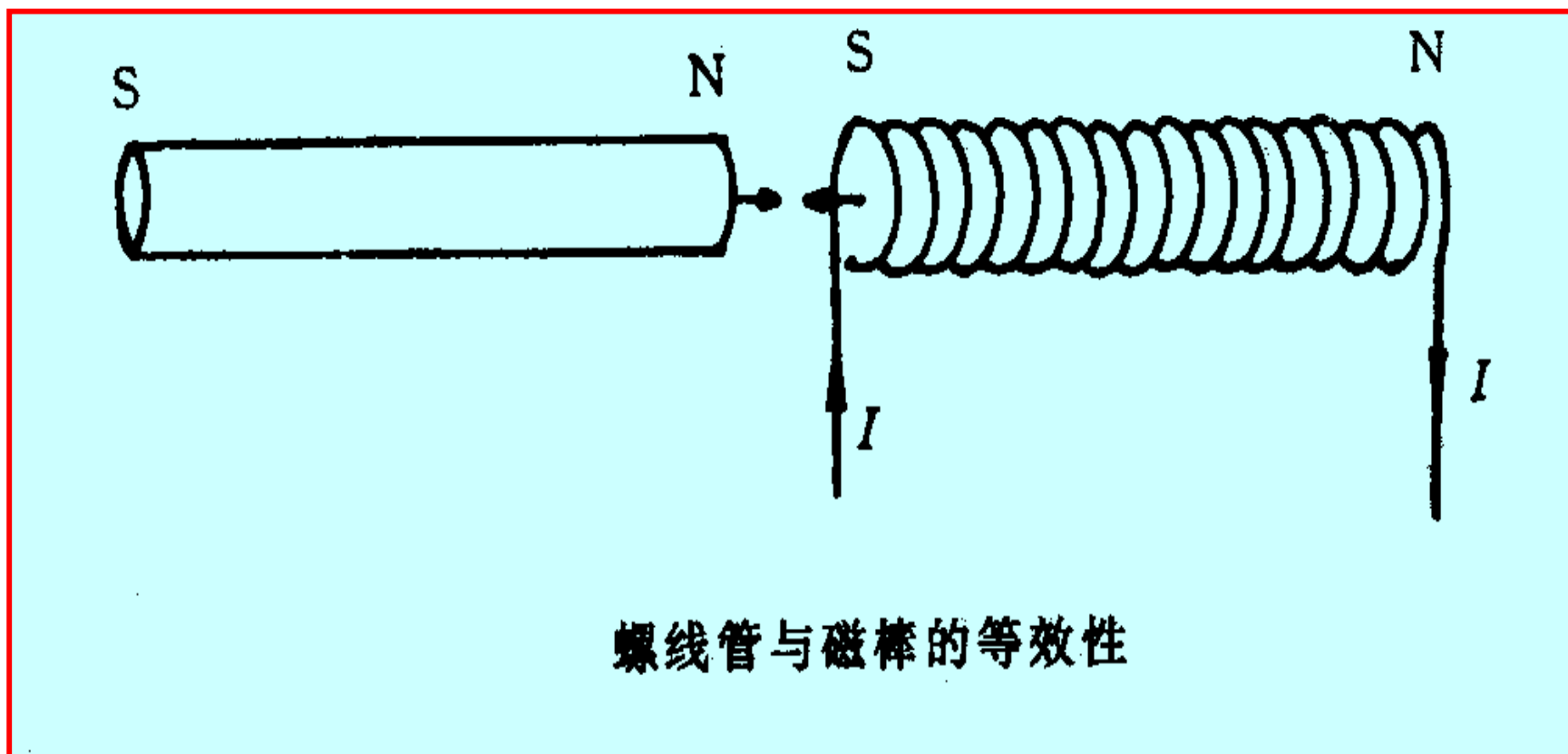
2. 引发的实验：磁铁对电流的作用



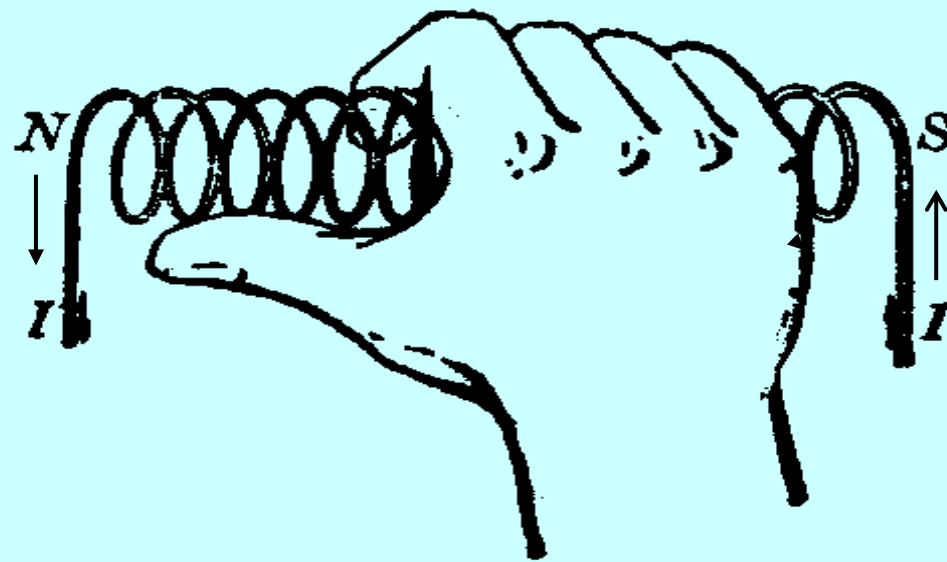
电流和电流之间的相互作用



一个载流螺线管的行为很像一根磁棒



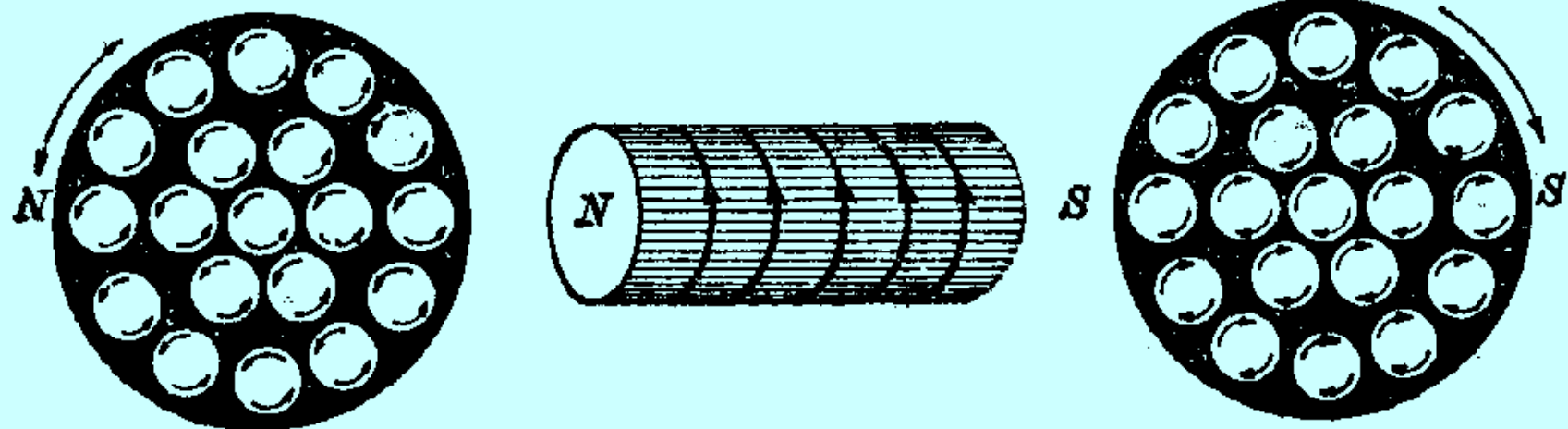
用右手定则来判断载流线圈的极性



确定载流螺线管极性的右手定则

3. 引发的理论：安培假说---磁场的起源

- 1821年安培提出了一个假说：
- 组成磁铁的最小单元(磁分子)就是环形电流，这些分子环流定向地排列起来在宏观上就会显示出N、S极来。
- 当时人们并不了解原子的结构，因此不能解释物质内部的分子环流是如何形成的。现在大家都知道，原子是由带正电的原子核和绕核旋转的负电子组成。电子不仅能绕核旋转，而且具有自旋。
- 分子、原子等微观粒子内电子的这些运动形成了分子环流，这就是物质磁性的基本来源的经典解释。

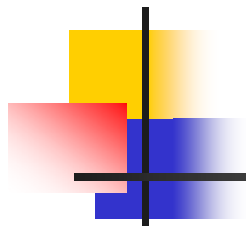


安培分子环流假说



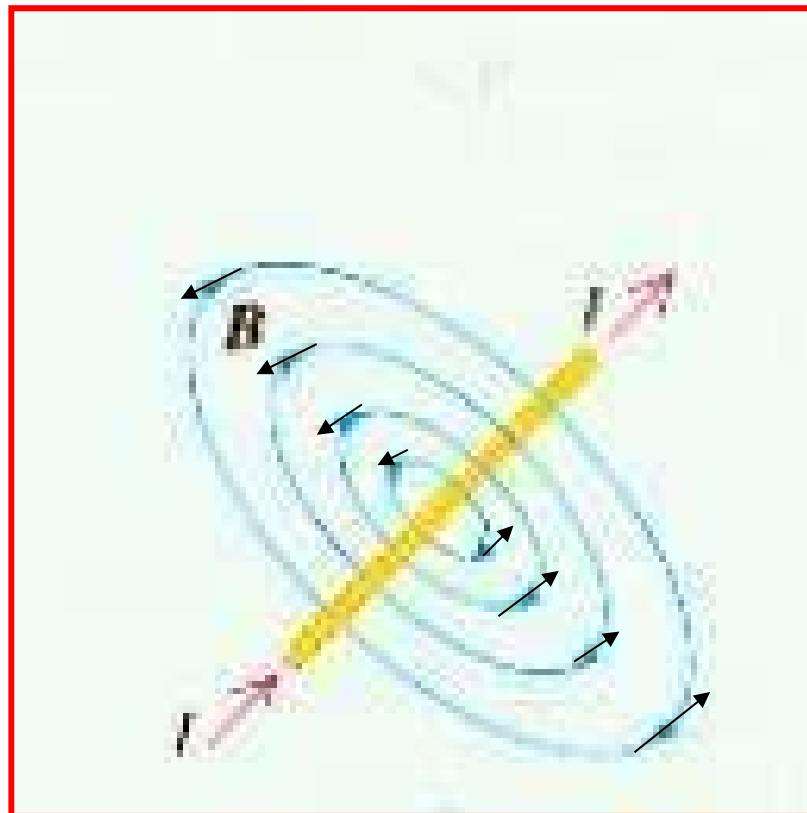
4. 电流 \Leftrightarrow 磁场 \Leftrightarrow 电流

■ 类似于静止电荷之间的相互作用力是通过电场来传递的；同样我们也可以把上述的各种相互作用统一起来，即所有的这些作用都是通过磁场来传递的。

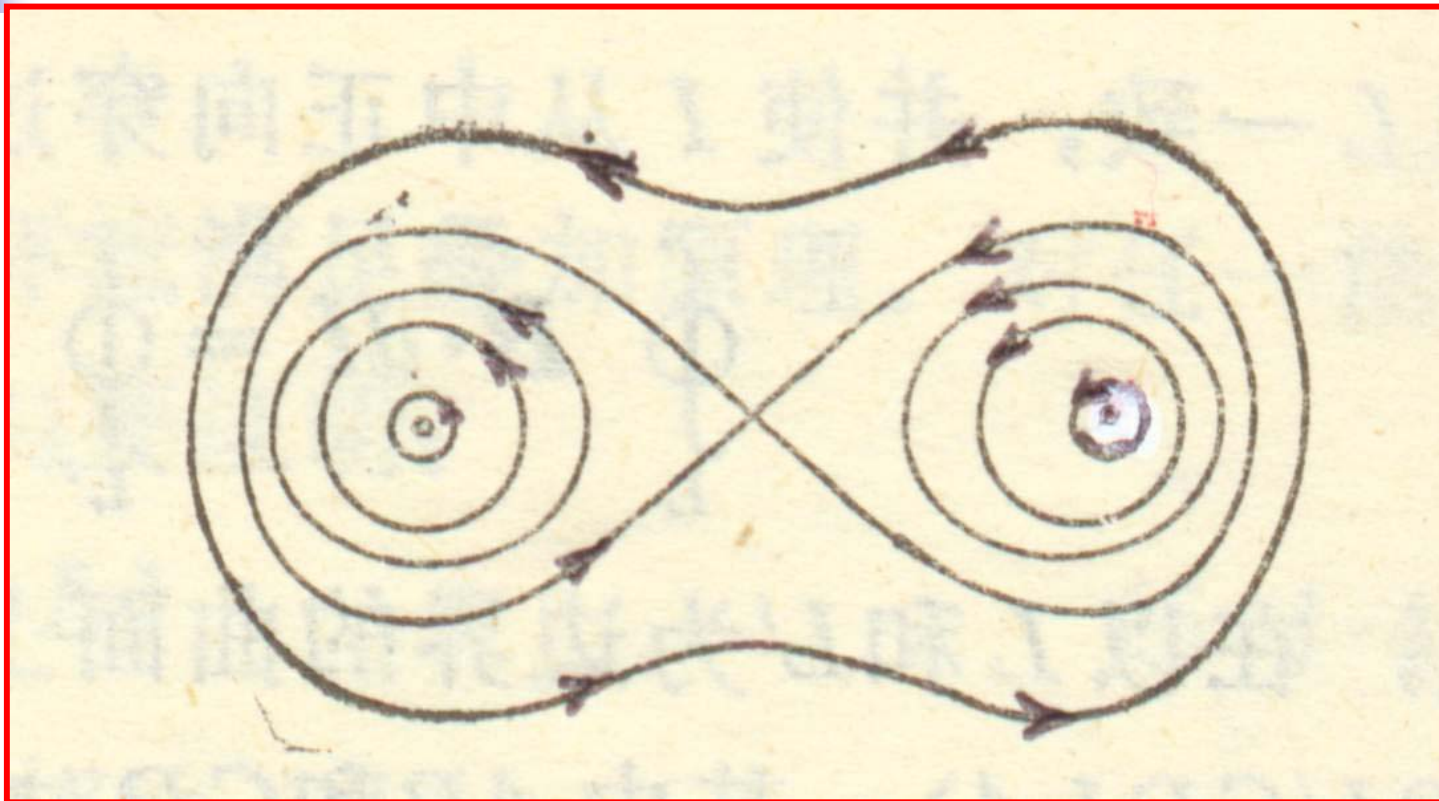


几种磁场线

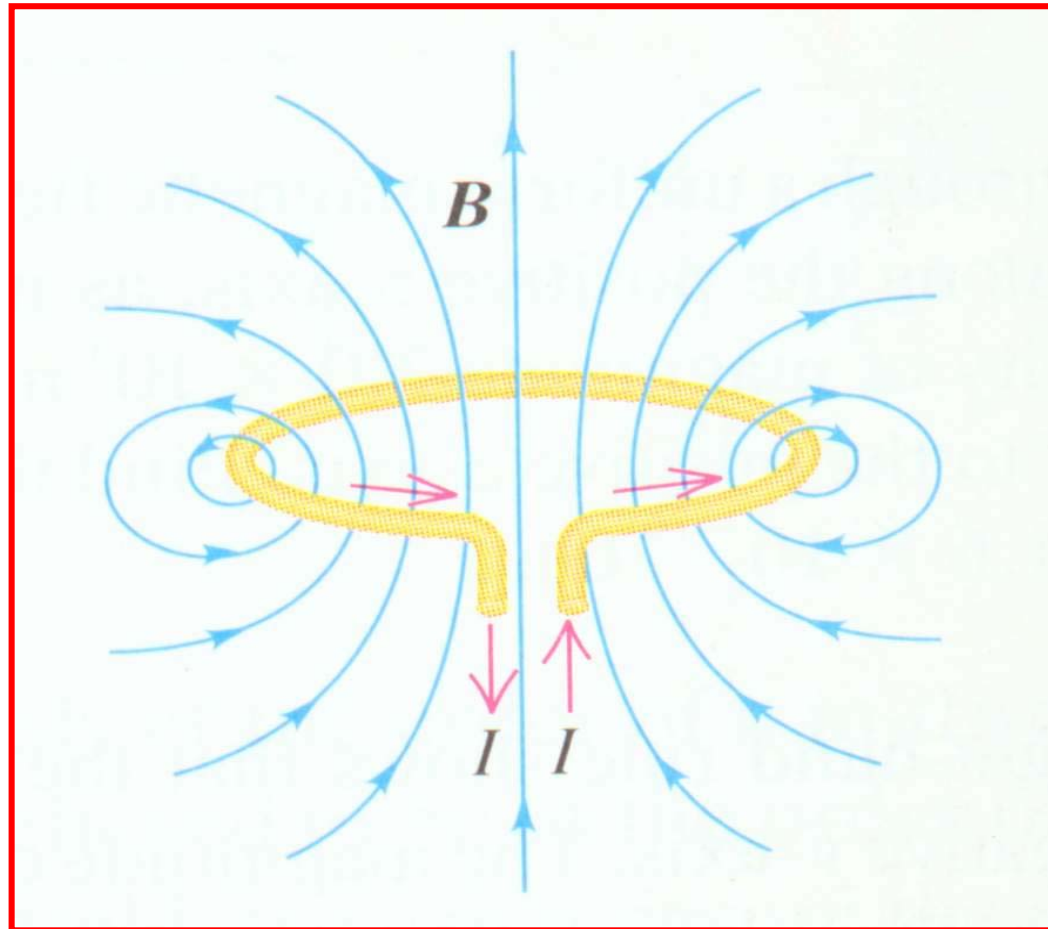
(a) 直线电流



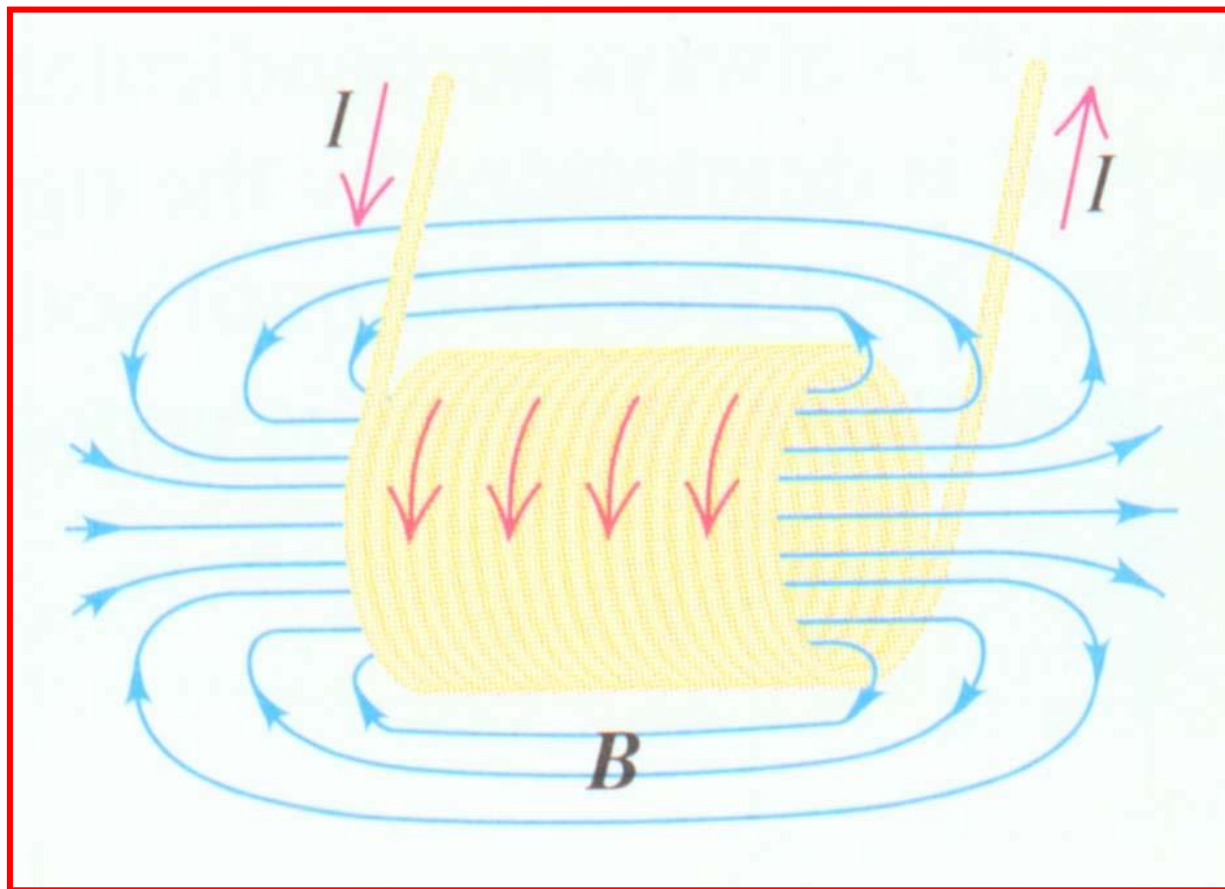
(b) 两根平行直线电流



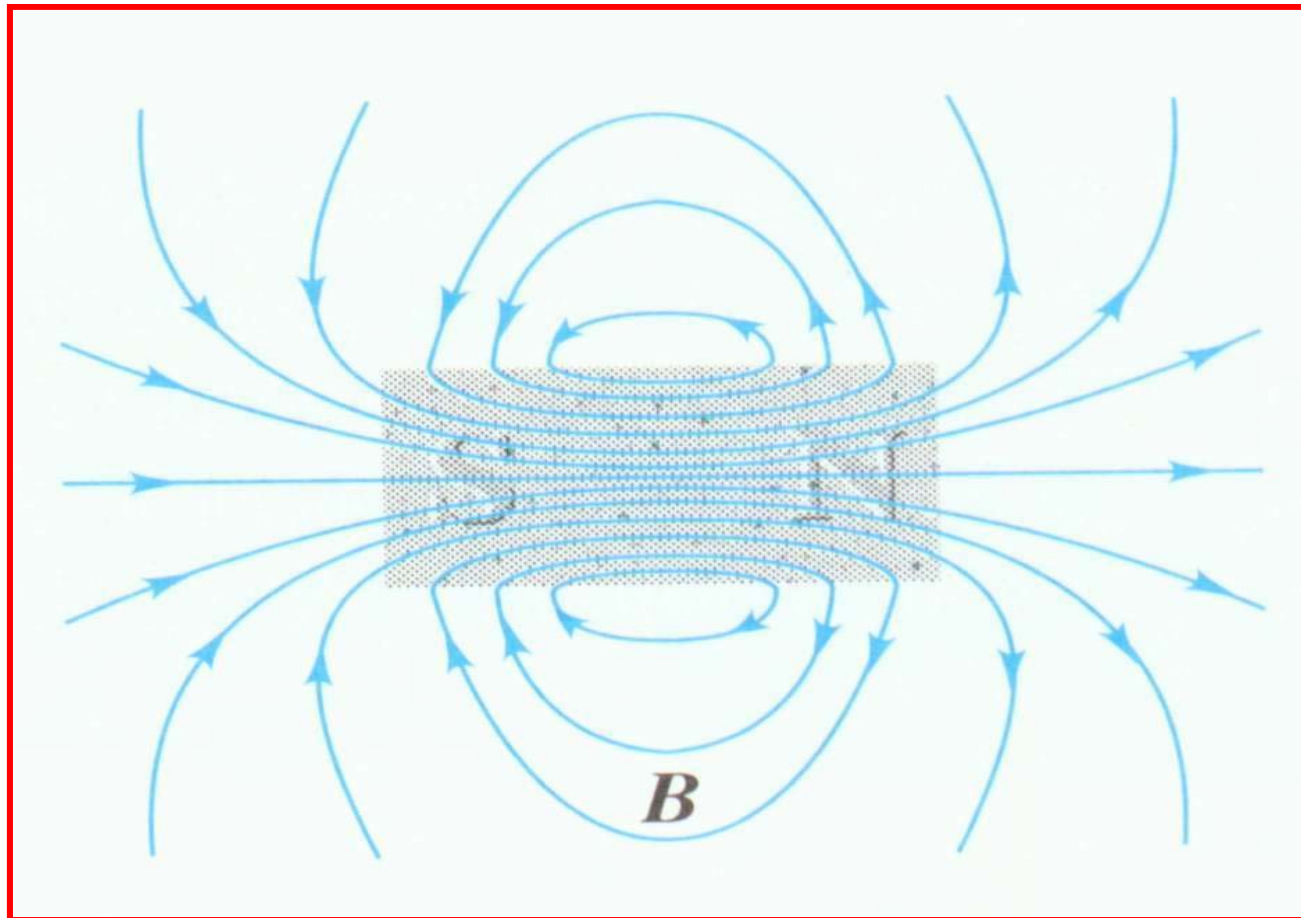
(c) 圆环电流



(d) 有限长螺线管电流



(e) 电磁铁





5. 引发的深入研究:

- (1) 安培的分子环流假说---Weber
最初的电子论（归结为运动电荷之间的作用力）--- Lorentz 的电子论
- (2) 毕奥---萨伐尔实验及定律
- (3) 安培的实验及定律
- (4) 逆效应的追求---法拉第的电磁感应定律



四、磁场的定量表述与洛伦兹力

1. 磁场的定量表述——磁感应强度 **B**

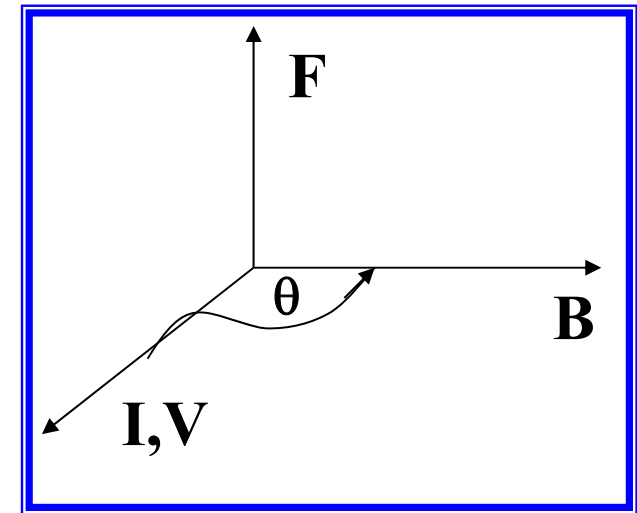
载流导线在磁场中受到力的作用。

导线中的电流是导体中自由电子的定向运动形成的。显然，运动着的带电粒子在磁场中将受到力的作用。这力可以测量，我们便能够用这力来定量表述磁场，类似于用力来定量表述电场强度 $F=qE$ 。

后面我们会看到，定量表述并不唯一。

如何表述？ 从实验出发、探讨

- 由实验知，磁场作用到电流上的力是**横向力**，它**既垂直于**电流方向，**又垂直于**磁场方向，如下图所示，构成**右手螺旋**关系。电流方向即**正电荷速度的方向**。
- 设电荷的电量为 **q** ，速度为 **\mathbf{V}** ；
横向力为 **\mathbf{F}** ，磁场用矢量 **\mathbf{B}** 来表示。
- **实验表明**，对一确定磁场，
 $F \propto qv \sin\theta$ ，**比例系数**与 **q** 、 **v** 无关，
只由磁场的性质（强弱）决定。
- 于是，我们**可以定义**：

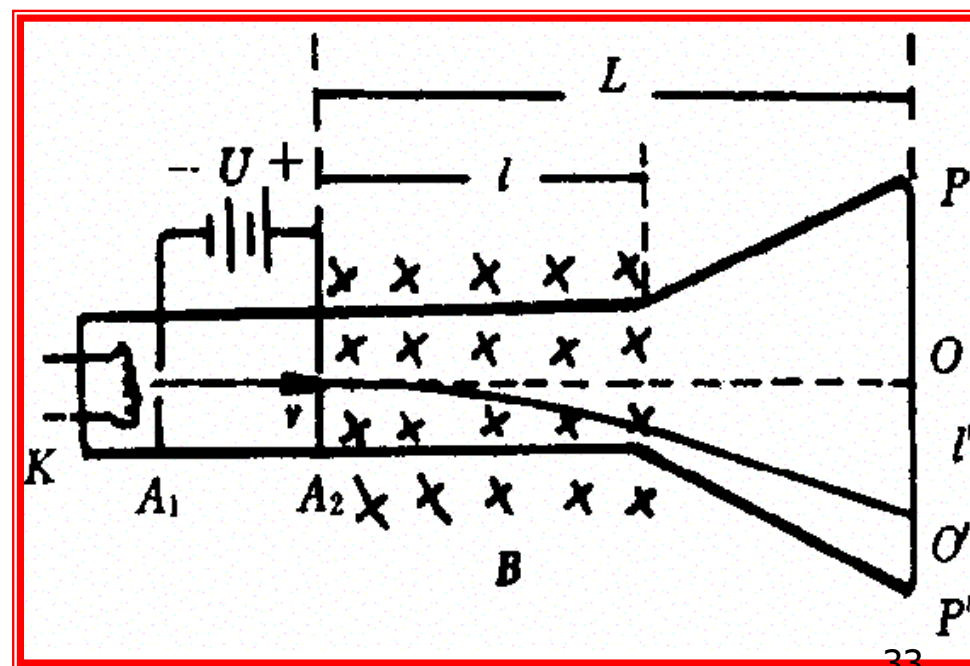


$$B = F / qv \sin\theta \longrightarrow F = Bqv \sin\theta \quad (4.1.5)$$

- 写成矢量式： **$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$** 这力称为**洛伦兹力**， **$\mathbf{B}$** 称为**磁感应强度**

2. 实验验证—阴极射线偏转演示

- 阴极射线管：被抽成真空的喇叭形玻璃管
- 阴极**K**：发射**电子**
- 两个电极**A1**，**A2**：中心开有小圆孔，在两电极间加上一定的电压，使从电极**A2**小圆孔出来的电子具有一定的运动速度。
- 在电极**A2**的右边有电磁铁产生的**均匀磁场B**。
- 管底**PP'**涂有荧光物质，使打到管底上的电子在到达处显出光点。



实验发现电子束发生偏转，表明运动电子受磁力的作用。实验证实了上述洛伦兹力公式。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (4.1.6)$$

当然直接测量这力仍有困难，但是我们可以通过动力学的方法间接测得这力，在下面会讲到。

式(4.1.6)既作为磁感应强度的定义式，又可以用于求运动电荷在磁场中所受的作用力。磁感应强度的单位是特[斯拉]，用符号T表示，为牛顿/[安培·米]， $1\text{T}=10^4$ 高斯。

五、安培力公式与洛伦兹力公式

- 既然**电流**是电荷的宏观定向运动，由式(4.1.6)就不难推出电流在磁场中的受力公式。
- 电流密度的微观表达式 $\mathbf{j} = nq\mathbf{u}$ ，考虑处于**外场** \mathbf{B} 中的载流导体，在某个体积元 dV 中共有 ndV 个运动电荷，其中每个电荷受力为 $q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ，因此**整个**体积元受力为 $d\mathbf{F} = nq\mathbf{u} \times \mathbf{B}dV$ ，即

体电流元受力 $d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}dV$ (4.1.7)

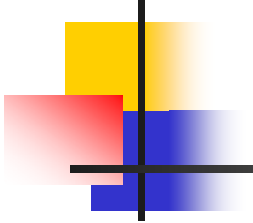
对面电流元 $d\mathbf{F} = \mathbf{i} \times \mathbf{B}dS,$ (4.1.8)

对线电流元 $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$ (4.1.9)

- 式 (4.1.7) — 式 (4.1.9) 即为电流元 $j dV$ 、 $i dS$ 和 $I dl$ 在外磁场中的受力表达式, 称为**安培力公式**, 相应的力称为**安培力**。
- 要计算整个载流导体所受的安培力, 只要选取相应公式进行**积分运算**就行了。
- 其实, **最早**对磁场和电流的相互作用的实验研究, 是对载流导线进行的, 并通过**安培力公式 (4.1.9)** **定义**空间某点的磁感应强度 **B**。
- **本节用来定义 B 的式 (4.1.6)**, 是**后来**由荷兰物理学家洛伦兹引入的。洛伦兹曾把运动电荷受的**电力**同时计入, 将总力公式写为:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (4.1.10)$$

式 (4.1.6) 和式 (4.1.10) 命名为**洛伦兹力公式** ₃₆



§ 4.2 毕奥—萨伐尔定律

一、毕奥—萨伐尔的重要实验

二、证明： IdL 对单位磁极的作用力

三、求磁场举例

一、毕奥-萨伐尔的重要实验

- 毕奥-萨伐尔的重要实验是弯折载流导线的实验，实验结果是对磁极的作用力：

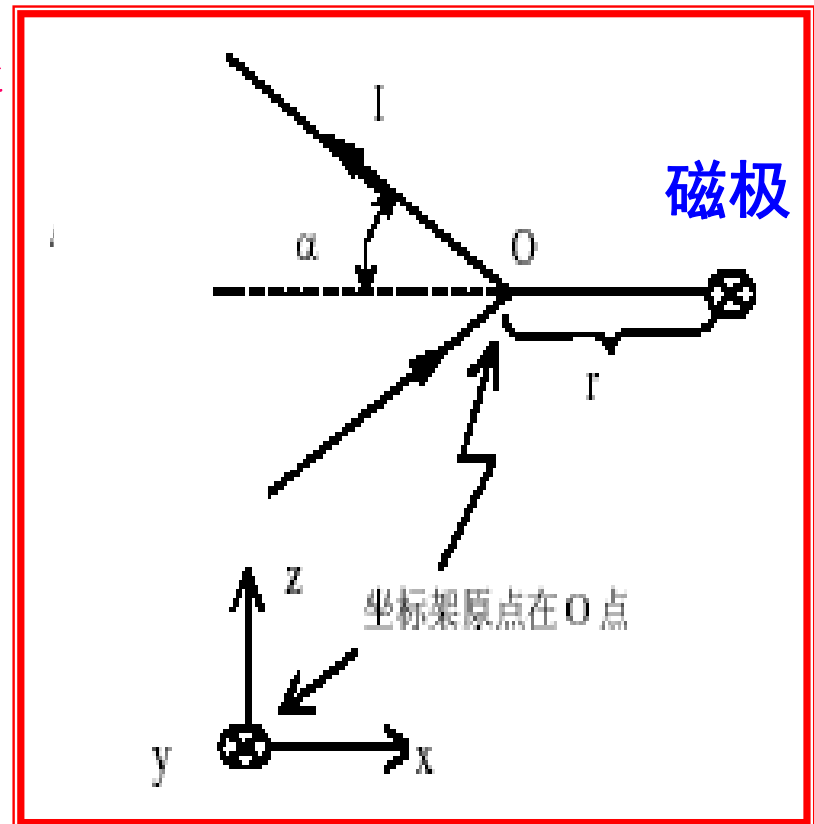
$$F \propto \frac{I}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \alpha = \pi/2, \text{ 是直导线}$$

或者

$$\mathbf{F} = k_1 \frac{I}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_y \quad \text{对单位磁极的力}$$

由此拉普拉斯导出毕奥-萨伐尔定律，简称为毕-萨定律：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$



二、证明：IdL对单位磁极的作用力

代入前页 F

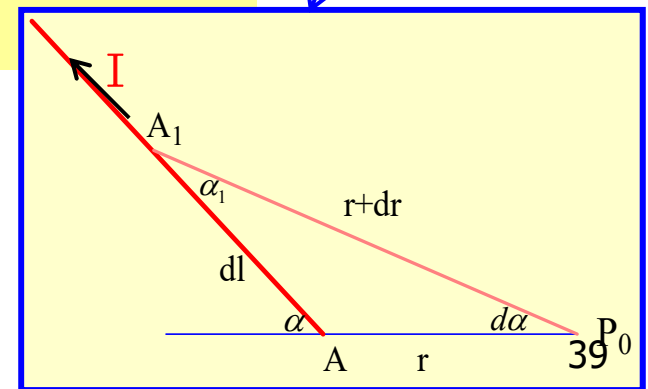
$$dF = \frac{dF}{dl} dl = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dl} \right) dl$$

$$= k_1 \frac{I}{r^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha dl + k_1 \frac{I}{r} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{\sin \alpha}{r} dl$$

dr 、 $d\alpha$ 与
 dl 关系见
下页

$$= k_1 \frac{I}{r^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) dl = k_1 \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$$

这实际上就是毕-萨定律，
参数 k_1 需要由实验确定： $k_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}$



其中： dr ， $d\alpha$ 与 dl 的关系

$$P_0 A_1 \equiv r_1 = r + dr$$

$$\alpha_1 = \alpha - d\alpha$$

- dr 及 $d\alpha$ 都随 $dl \rightarrow 0$ 而趋于零，并且 dr 及 $d\alpha$ 均是正的小量。现在找出 dr ， $d\alpha$ 与 dl 的关系。

讨论其中的 $\triangle P_0 A A_1$ ，利用正弦定理

$$\frac{dl}{\sin d\alpha} = \frac{r}{\sin(\alpha - d\alpha)} \quad \sin d\alpha \rightarrow d\alpha \quad \sin(\alpha - d\alpha) \rightarrow \sin \alpha$$

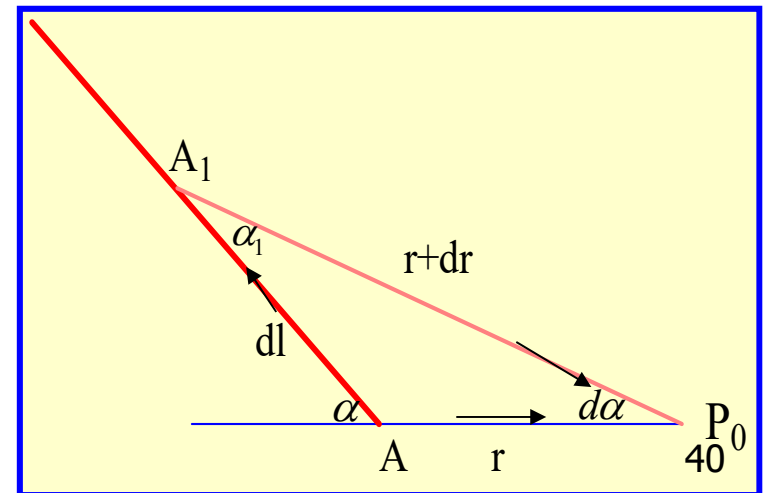
$$d\alpha = \frac{dl \sin \alpha}{r}$$

- 折线 $A_1 A P_0$ 在 $A_1 P_0$ 上投影有关系

$$-dl \cos(\alpha - d\alpha) + r \cos d\alpha = r + dr$$

保留到的一阶有：

$$dr = -dl \cos \alpha$$



三、求磁场举例

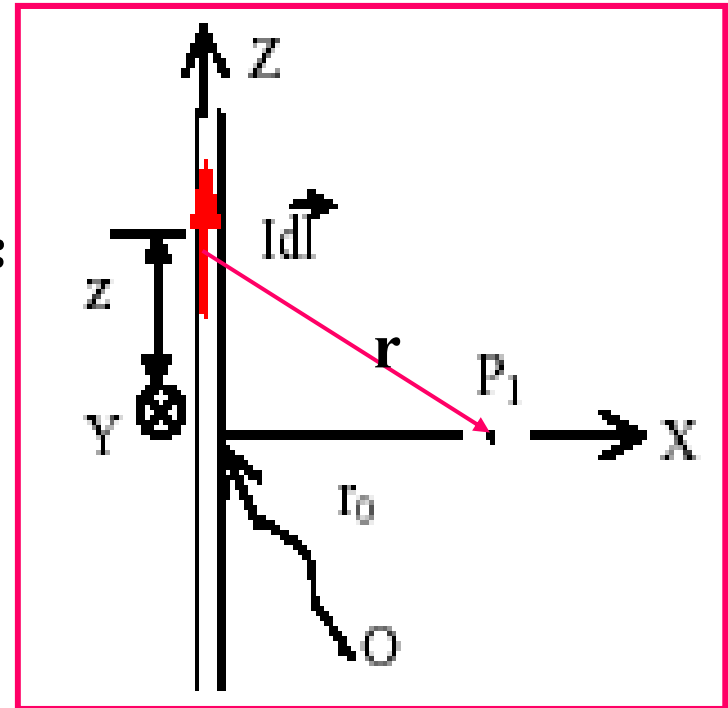
■ **[例4-1]** 求无限长直线电流 I 的磁场。首先正确作图！

■ **[解]**: $Id\mathbf{l} = Idz\mathbf{e}_z$, 相应的 $d\mathbf{B}$ 用毕—萨定律求出:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Idz\mathbf{e}_z \times \frac{r_0\mathbf{e}_x - z\mathbf{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

■ 磁场与电场一样满足叠加原理:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathbf{e}_y r_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I\mathbf{e}_y\end{aligned}$$



此结果与实验结果一致，验证了毕—萨定律。

[例4-2] 半径为 R 的圆形电流 I , 在轴线上距离为 z 的 P_1 点的磁场 \mathbf{B} 及周围的磁场 。 **首先正确作图!**

[解]: 采用柱坐标系

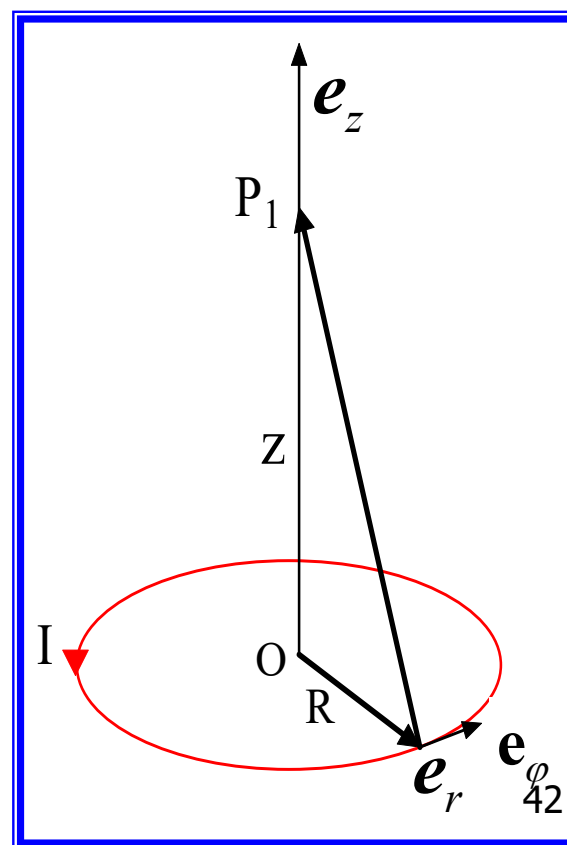
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} IR d\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \frac{z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}_r}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

定义 $\mathbf{m} = I\pi R^2 \mathbf{e}_z$, 为圆线圈电流的
磁矩

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

由对称性,
第一项为0!



圆线圈周围的磁场（计算见书 P122）

远处任一点 P_2 , $r_0 \gg R$

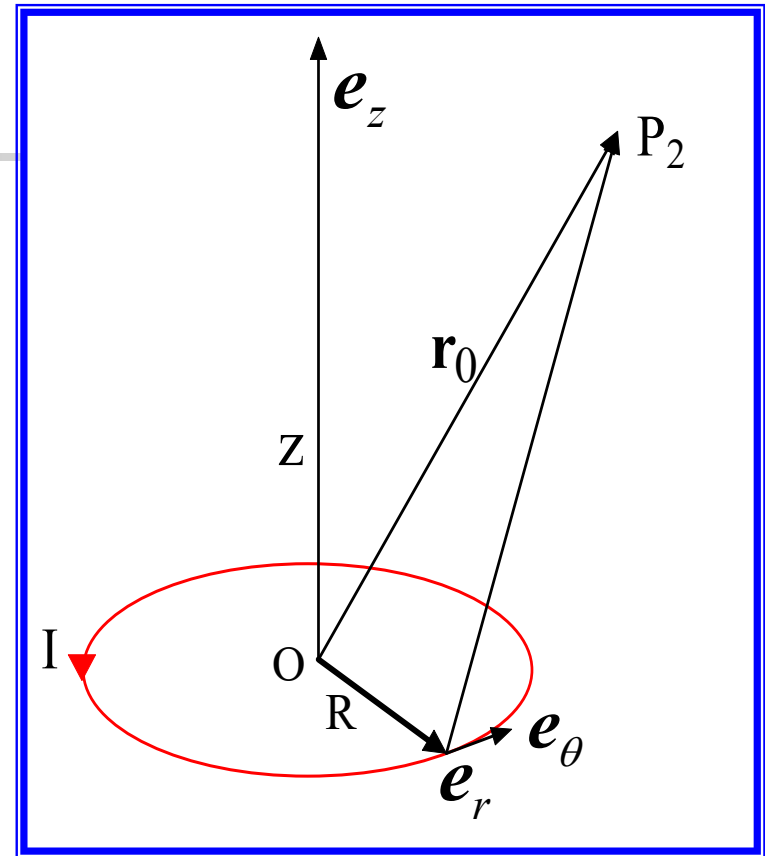
$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_0)}{4\pi r_0^5} \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{m} = IS, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_L \mathbf{R} \times d\mathbf{R}$$

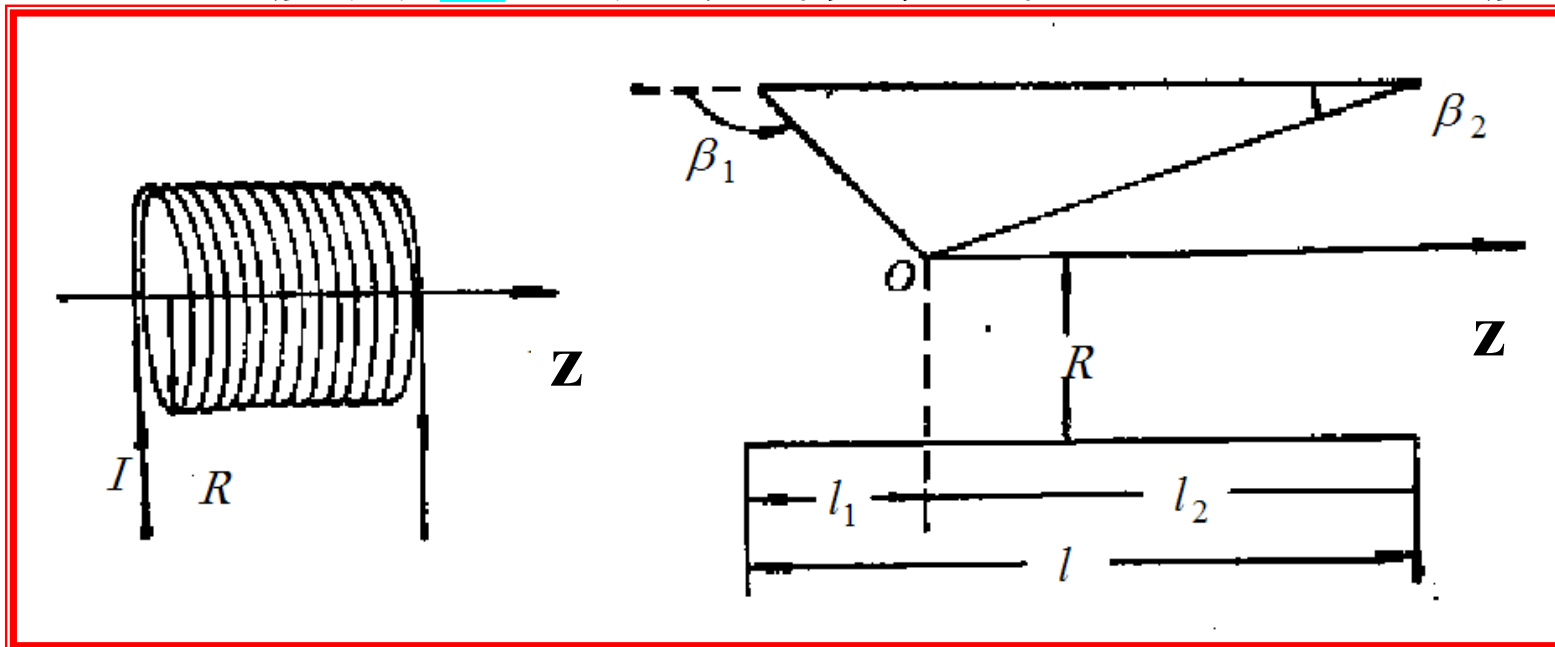
以上结论对任意载流线圈成立,
 \mathbf{m} 称为磁偶极矩。

并与电偶极子的电场公式相似:


$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r}$$



[例4.3] 绕在圆柱面上的螺旋形线圈叫螺线管（下图）。设它的长 l ，半径为 R ，单位长度的匝数为 n ，电流强度为 I ，求螺线管轴线上的磁感应强度分布。



[解] 设螺线管是密绕的，它的磁场近似可看作一系列圆线圈磁场的叠加。考虑轴线上某点 O 的磁感应强度，取该点为坐标原点， Oz 沿轴线。在位置 z 处长度 dz 内共有匝线圈 ndz ，它在原点产生的磁感应强度只有 z 方向分量，其大小（见例4.2）为：


$$dB_z = \frac{n\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} dz.$$

■ 整个螺线管在原点产生的磁感应强度为：

$$B_z = \frac{n\mu_0 IR^2}{2} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{n\mu_0 I}{2} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-l_1}^{l_2}$$
$$= \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1),$$

■ 下面讨论特例：对**无穷长螺线管** $\beta_1 = \pi$, $\beta_2 = 0$,
则 $B_z = \mu_0 n I$ 。

■ 对**半无限长螺线管的一端**, $\beta_1 = \pi/2$, $\beta_2 = 0$,
则 $B_z = \mu_0 n I / 2$ 。

螺线管内磁场分布

- 螺线管无限长

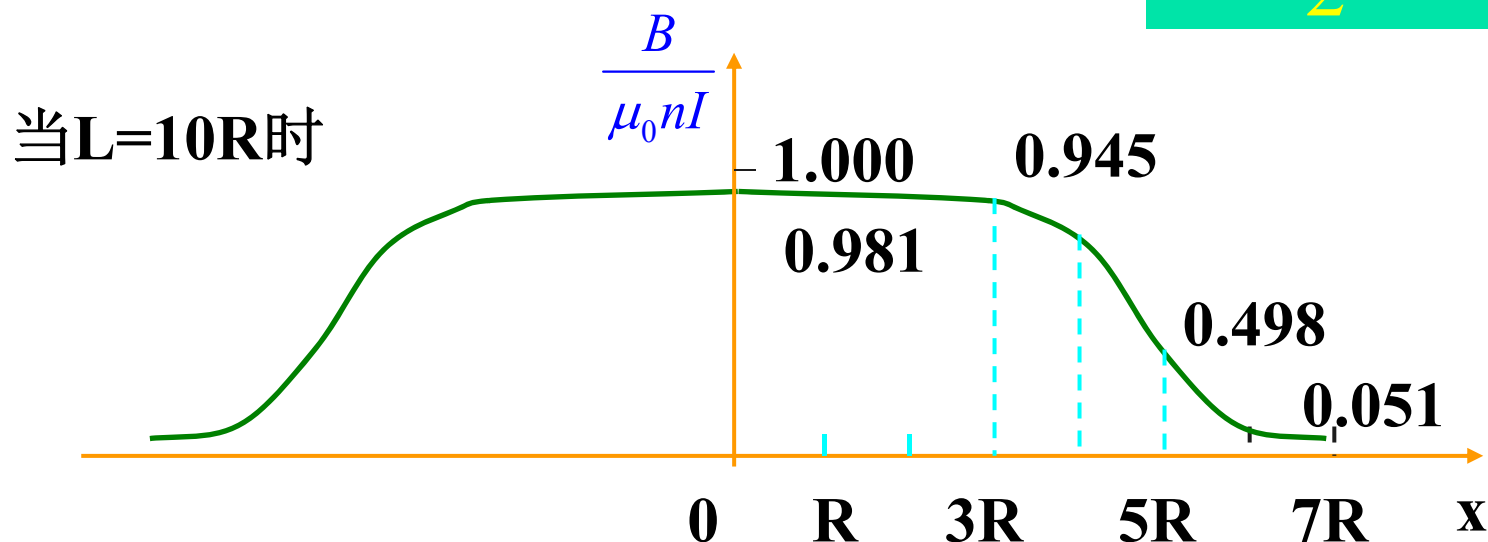
$$\beta_1 = \pi, \quad \beta_2 = 0$$

$$B = \mu_0 n I$$

- 螺线管半无限长

$$\beta_1 = \pi/2, \quad \beta_2 = 0$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

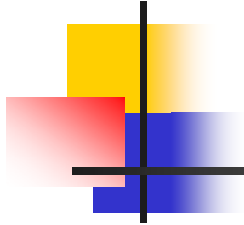


➤ 管外磁场非常弱，管内基本上是均匀磁场。螺线管越长这种特点越明显。



§ 4.3 安培定律

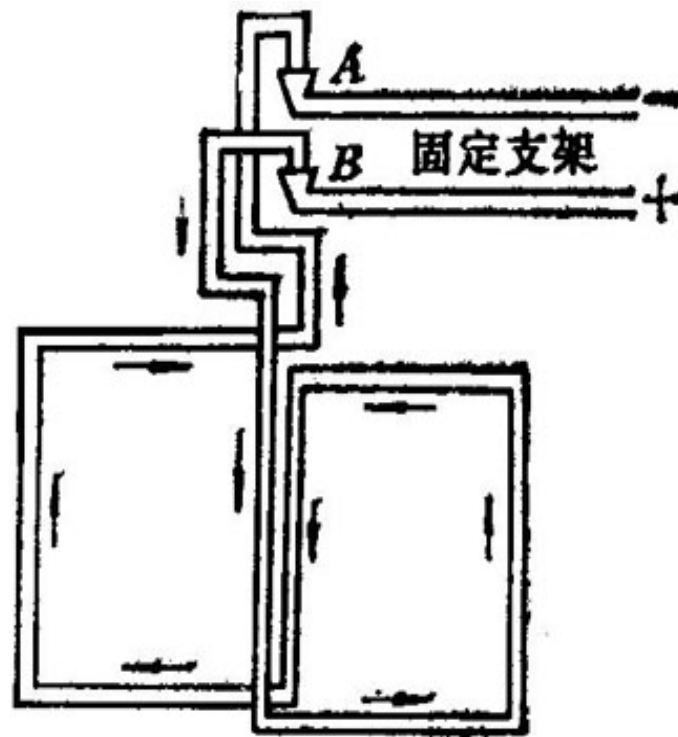
- 一、安培的四个示零实验
- 二、安培定律
- 三、安培定律与磁感应强度 B
- 四、安培力与电动机



历史上，在奥斯特的发现之后，紧接着安培做了大量精巧的实验，特别是研究了**载流导线间的相互作用**，获得了相互作用的定量规律。安培公布这一成果的时间仅比毕奥和萨伐尔晚一个多月。

一、安培的四个示零实验

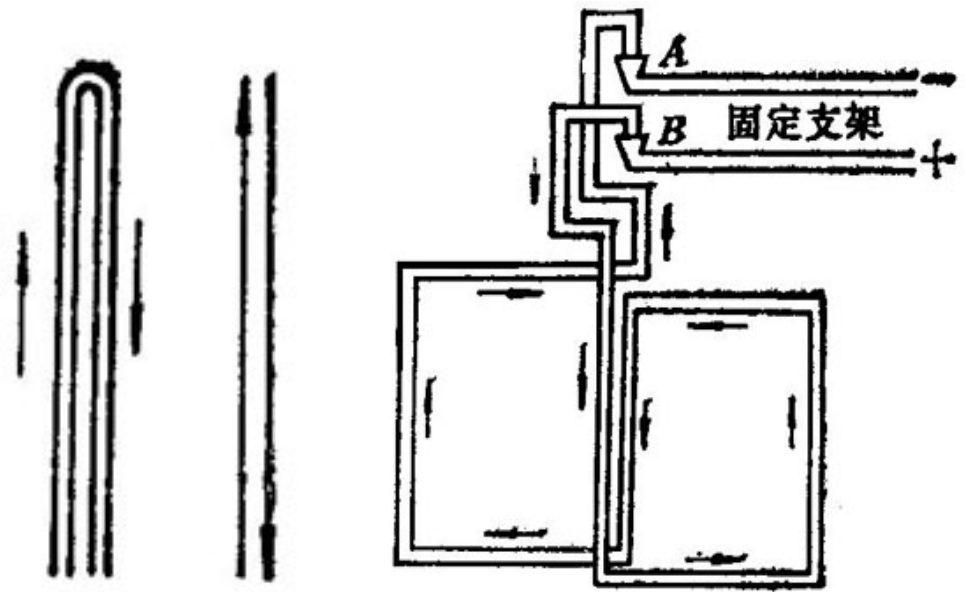
安培首先设计制作了如图
所示的装置，并将它取名为
无定向秤。他用一根硬导线
弯成两个共面的大小相等的
矩形线框，线框的两个端点
A、B通过水银槽和固定支
架相连。接通电源时，**两个
线框中的电流方向正好相反**。
整个线框可以以水银槽为支
点自由转动。在**均匀磁场**（如地磁场）中它所受到的合
力和合力矩为零，处于**随遇平衡**；但在**非均匀磁场中**
它会发生运动。



实验一

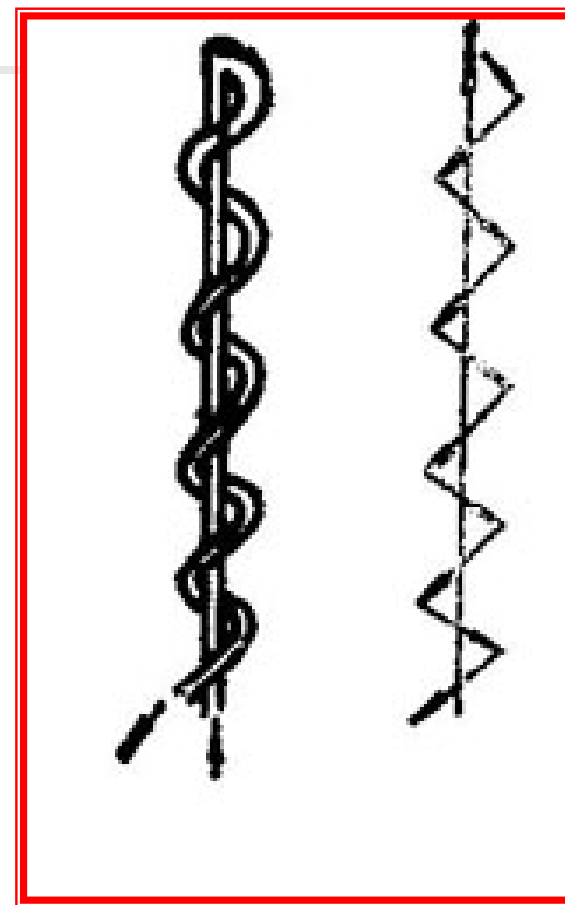
安培将一对折的通电导线移近无定向秤以检验对无定向秤有无作用力，结果是否定的，无定向秤无任何反应。这说明电流反向时，电流产生的作用力也反向；大小相等的电流产生的力的大小相等。

作用力与
电流方向、
电流大小
有关。



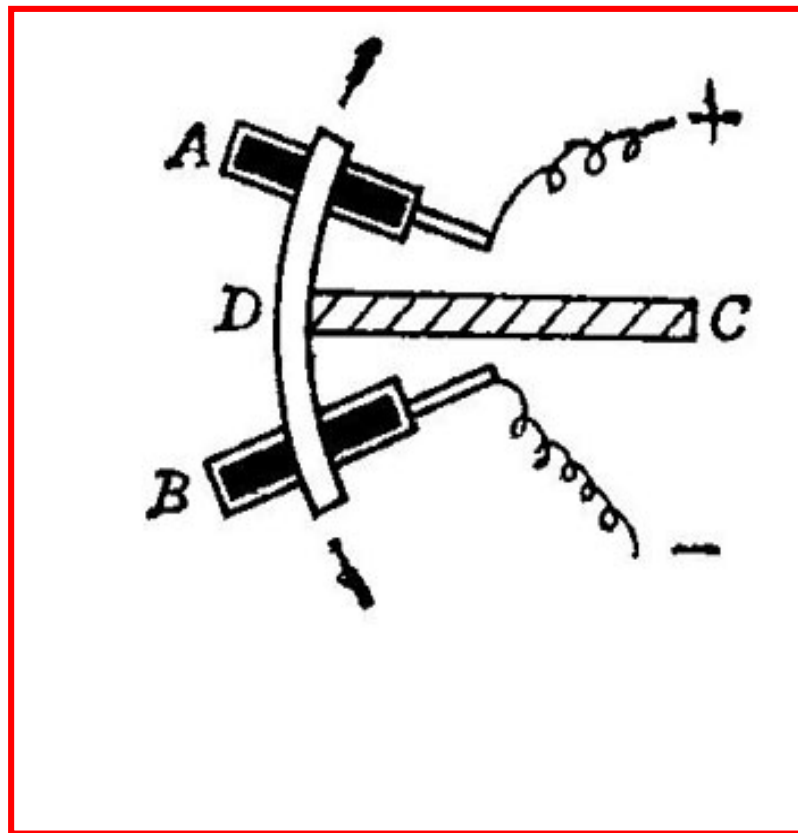
实验二

■ 将对折导线中的一段绕在另一段上，成螺旋形，通电后，将它移近无定向秤，结果表明无定向秤仍无任何反应。这说明一段螺旋状导线的作用与一段直长导线的作用相同，从而证明电流元具有矢量性质，即许多电流元的合作用是各单个电流元作用的矢量叠加。



实验三

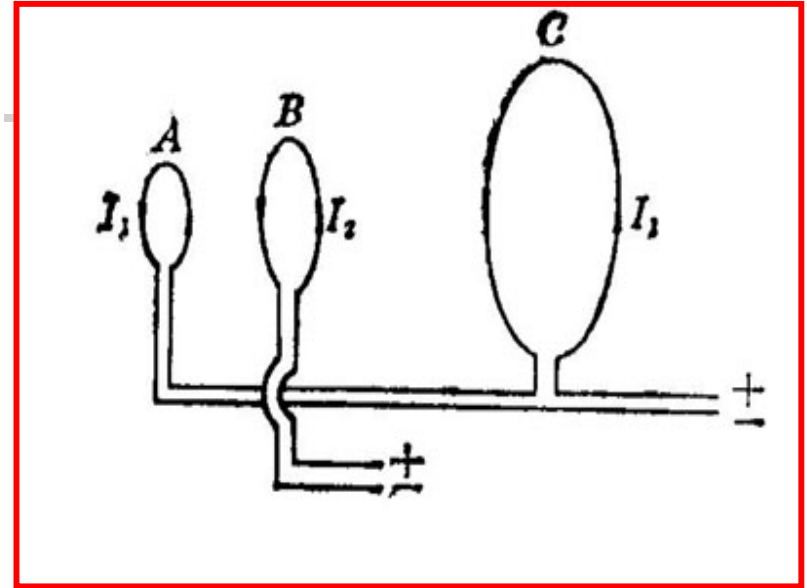
■ 弧形导体**D**架在**水银槽A、B**上。导体**D**与一绝缘棒固接，棒的另一端架在圆心**C**处的支点上，这样既可以通过水银槽给导体**D**通电，弧形导体**D**又可绕圆心**C**移动，从而构成一个**只能**沿弧形长度方向移动，**不能**沿径向运动的电流元。安培用这个装置**检验**



各种载流线圈对它产生的作用力，结果发现弧形导体**D**不运动。这表明**作用在电流元上的力**与其**电流垂直**，即这种作用具有**横向性**。

实验四

■ A、B、C是用导线弯成的三个几何形状相似的线圈，其周长比为 $1:k:k^2$ 。A、C两线圈相互串联，位置固定，通入电流 I_1 。线圈B可以活动，通入电流 I_2 。实验发现，只有当A、B间距与B、C间距之比为



1: k时，线圈**B**才不受力，即此时**A**对**B**的作用力与**C**对**B**的作用力大小相等、方向相反。这表明：

电流元长度增加，作用力增加；相互距离增加，作用力减小；如果两电流元的长度及相互距离增加同一倍数，相互作用力不变。

- 在以上系列实验的基础上，安培又作了补充假设：两个电流元之间的相互作用力沿它们的连线（并不正确）。
- 由此推出原始公式，现在都改写成下面公式：

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

二、安培定律

- 安培定律并不是直接从实验得到，而是在安培设计得很巧妙的四个实验和一个假设的基础上，与相当高超的数学技巧相结合得到的。

- 根据安培定律，电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力为：

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

- 式中 \mathbf{r}_{12} 是电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 到受力电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 方向的矢径。

讨论:

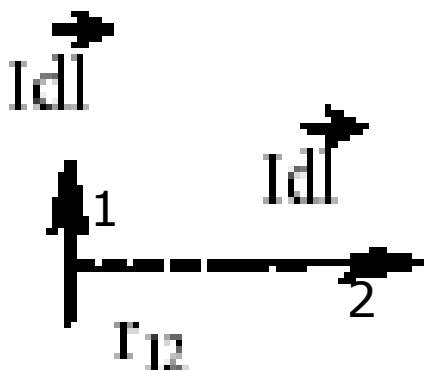
$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

(1) 式中k是比例系数，在国际单位制中， $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ，

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 牛顿/安培²，称为真空的磁导率。

(2) 电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律。但是，实际上不存在孤立的稳恒电流元，它们只是闭合回路的一部分，可以证明，若将 $d\mathbf{F}_{12}$ 沿两闭合回路积分，得到的合成作用力总是与反作用力大小相等，方向相反。

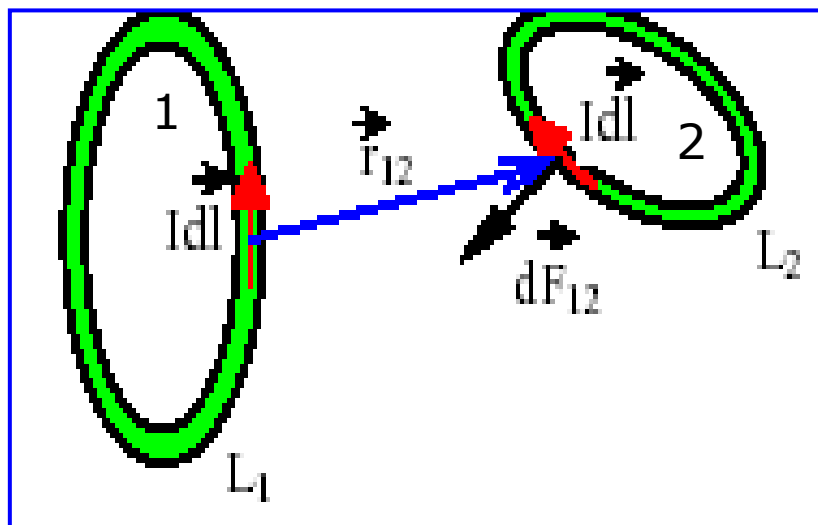
思考:



$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r_{12}^2} \mathbf{e}_z, \quad d\mathbf{F}_{21} = 0$$

因此两个电流元之间的相互作用不满足牛顿第三定律。

对于两个线圈来说，牛顿第三定律成立。



$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}) \\ &= -\mathbf{F}_{21} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

$$d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1, \quad \mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}, \quad r_{12} = r_{21}$$

$$\therefore \mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \left(I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{1}{r_{12}^3} (I_2 d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) I_1 d\mathbf{l}_1 - \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} [(I_2 d\mathbf{l}_2) \cdot (I_1 d\mathbf{l}_1)]$$

$$\text{另有 } -\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} I_1 d\mathbf{l}_1 \times \left(I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \right)$$

$$\therefore \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{1}{r_{21}^3} (I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{21}) I_2 d\mathbf{l}_2 + \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} [(I_1 d\mathbf{l}_1) \cdot (I_2 d\mathbf{l}_2)]$$

$$\text{其中 } \oint \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} = \oint \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \therefore \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} = \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = 0$$

(3) 电流强度单位：安培的定义

- 若在处于真空中相距1米的两无限长、圆截面可以忽略的、平行圆直导线内通以等量恒定电流时，若此两导线之间产生的力在每米长度上等于 1×10^{-7} 牛顿(N)，则此恒定电流的电流强度定为1安培(A)。
- 长度、质量、时间、电流为国际单位制的基本量，其他为导出量；基本量的单位是规定出来的。

- 我们还可以根据下面两个式子，计算两个体电流元 $J_1 dV_1$ 、 $J_2 dV_2$ 之间的作用力：

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{\mathbf{J}_2 dV_2 \times (\mathbf{J}_1 dV_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

- 两个面电流元 $i_1 dS_1$ 、 $i_2 dS_2$ 之间的作用力：

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{\mathbf{i}_2 dS_2 \times (\mathbf{i}_1 dS_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

三、安培定律与磁感应强度 B

- 重写安培定律:

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

- 再看 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 受的安培力为:

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}$$

对比可得磁感应强度 $d\mathbf{B}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

这即是毕奥—萨伐尔定律。

回路线圈L（电流为I）所产生的磁场强度可根据**叠加原理**推出：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

两定律的关系：

**安培定律 = 安培力公式 +
毕—萨定律**

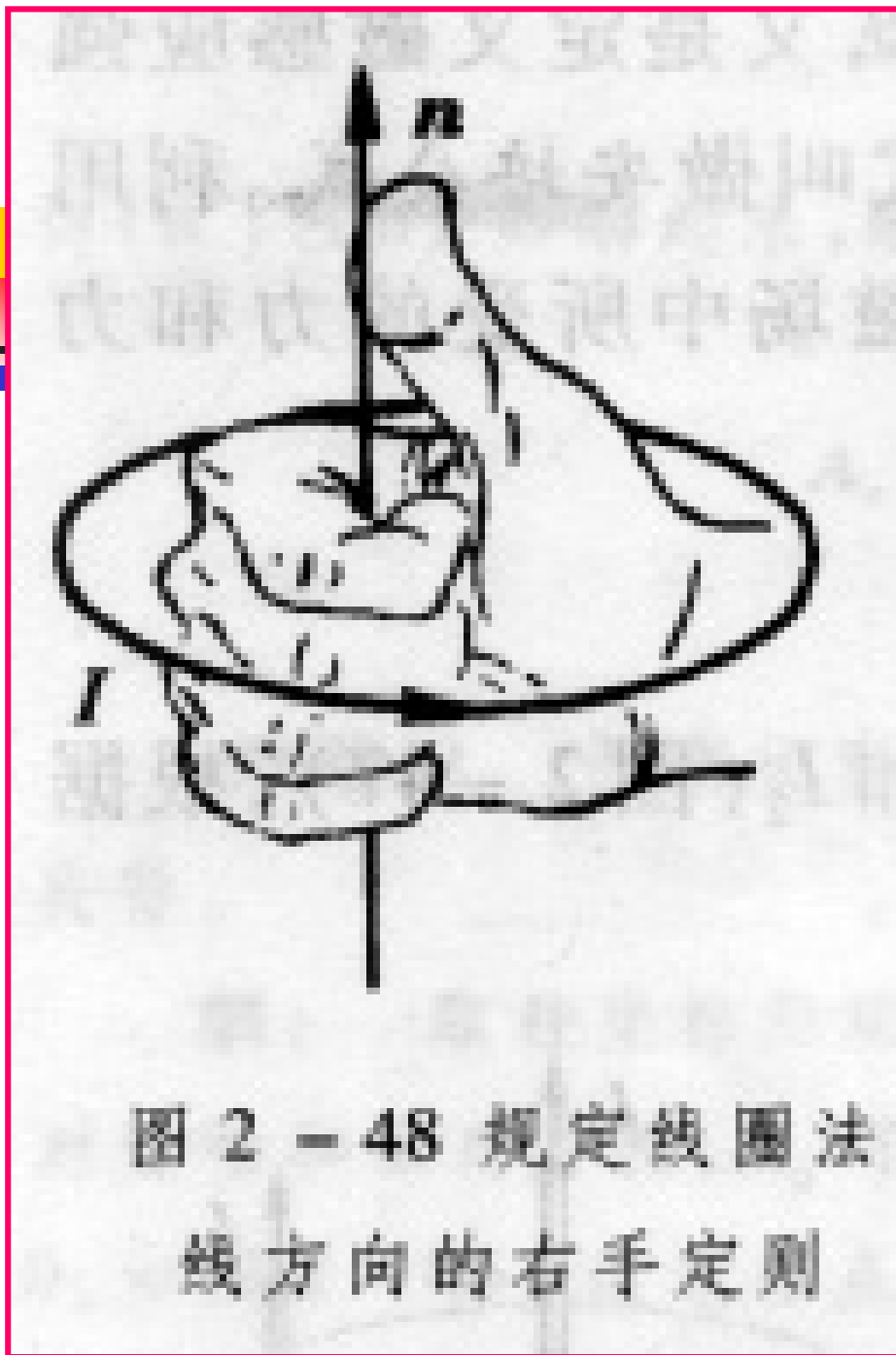


四、安培力与电动机

一个电流元在外磁场**B**中所受的安培力为：

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

该式又叫安培公式。利用它可以计算各种形状的载流回路在外磁场中所受的力和力矩。并由此，发明了电动机。



为表达方便，用
右手定则规定戴流线圈的空间取向，如左
图所示。

矩形载流线圈 $ABCD$ ，
边长 $AB=a$ ， $BC=b$ ，
中心轴 OO' ，垂直于
外磁场 B ，**电流由** $A \rightarrow B$
 $\rightarrow C \rightarrow D$ ，线圈法线方向
为 n 。

AB、CD两边受力大
小相等、方向相反，且
在一条直线上，抵消；

BC、DA两边受力大
小相等、方向相反，**不**
在一条直线上，不抵消！

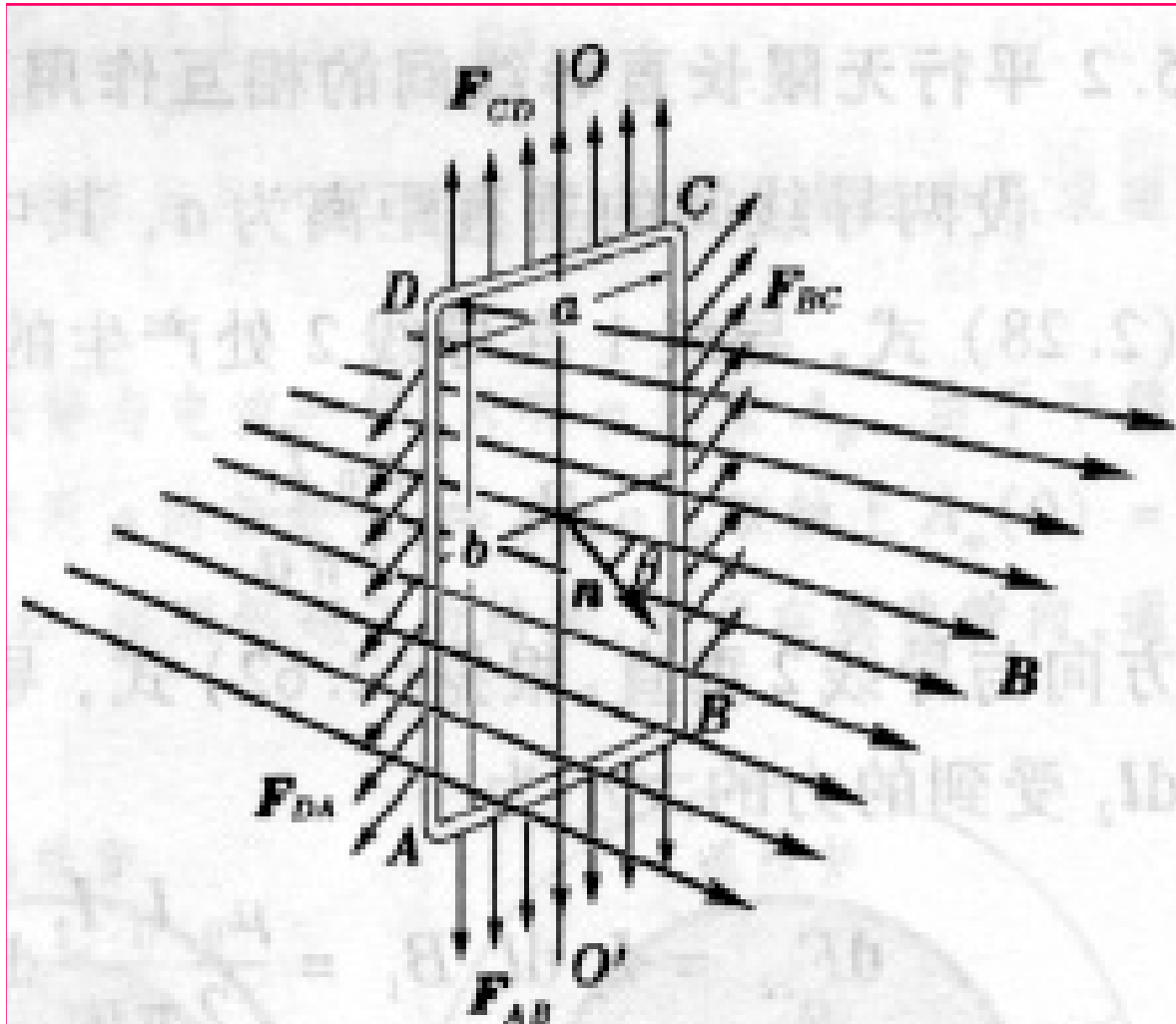
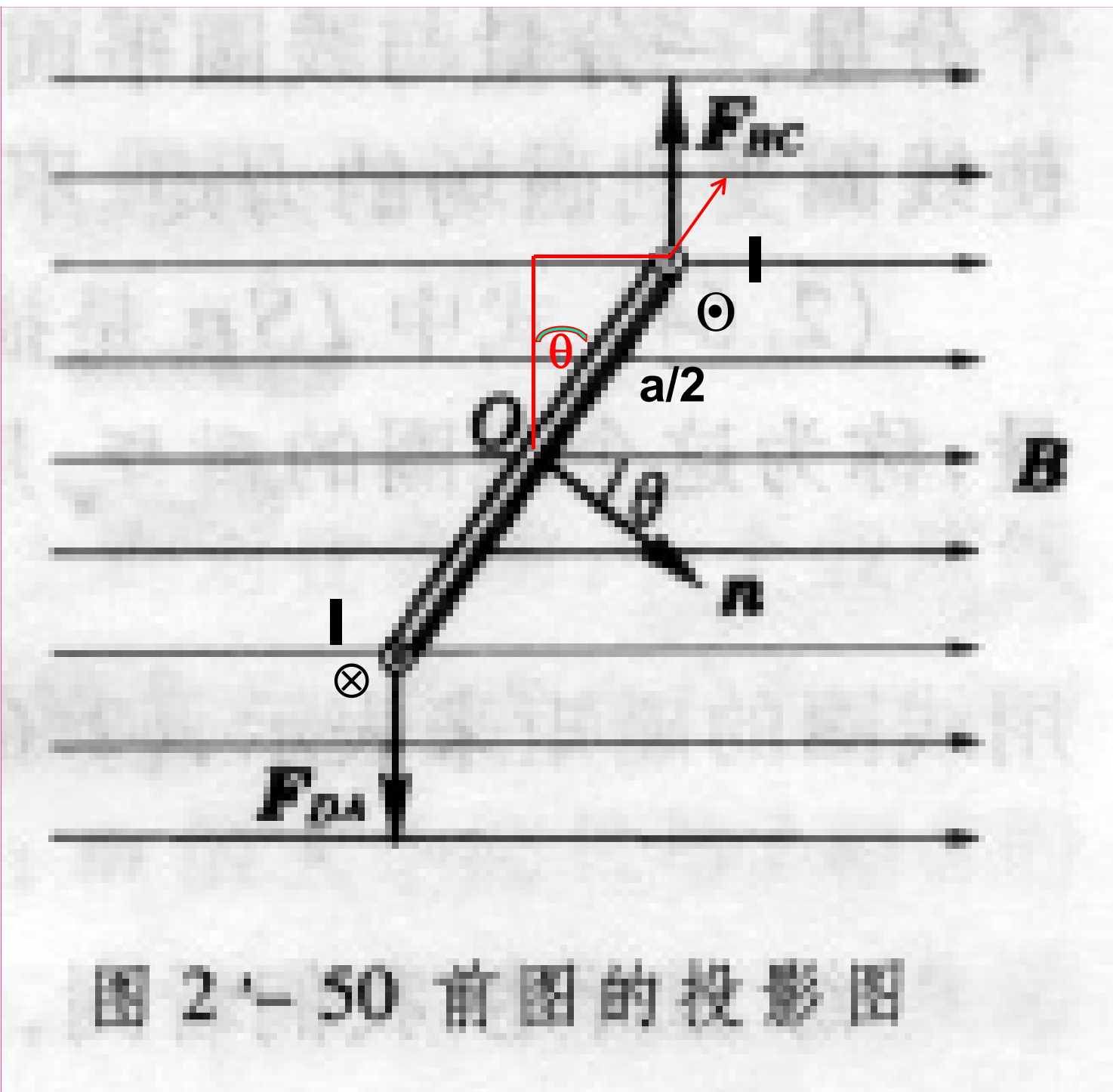


图 2-49 矩形线圈在均匀
磁场中所受的力矩



前图的
俯视图

图 2-50 前图的投影图

- 对轴OO'形成一力偶矩**L**，L的大小为：

$$L = 2 F_{AD} \cdot (a/2) \sin\theta = IbB a \sin\theta,$$

$$L = IS B \sin\theta,$$

写成矢量式：**L** = IS (**n** × **B**) = **m** × **B**

- 定义：**m** = IS**n** 又简称为磁矩，

- 在这力矩的作用下戴流线圈要转到使**m**//**B** 的方向。

- 对比电偶极子在外电场中所受的力矩公式：

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$$

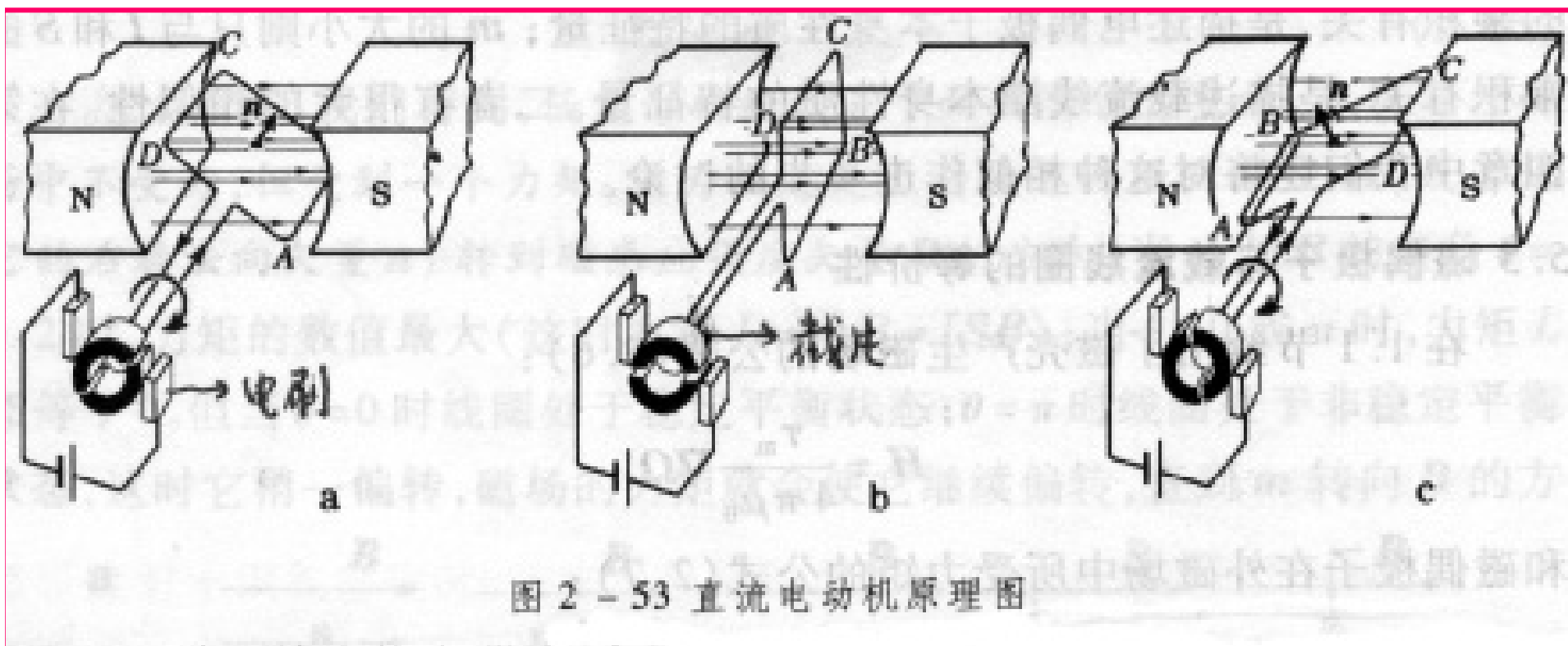


图 2 - 53 直流电动机原理图

直流电动机就是根据上述通电线圈在磁场中受到力矩作用的原理制成的。这里是一个单匝线圈的电动机模型。

线圈的两端接有**换向器**，它是一对相互绝缘的**半圆形截片**，它们通过**固定的电刷**与直流电源相接。



§ 4.4 静磁场的基本定理

- 一、磁感应线与磁通量
- 二、高斯定理（通量定律）
- 三、安培环路定理（环量定律）
- 四、两条定理与毕奥—萨伐尔定律的关系

一、磁感应线与磁通量

正如前面所讲，与电场中引入电场线相似，磁场中可引入磁场线（又称磁感应线、磁力线）。

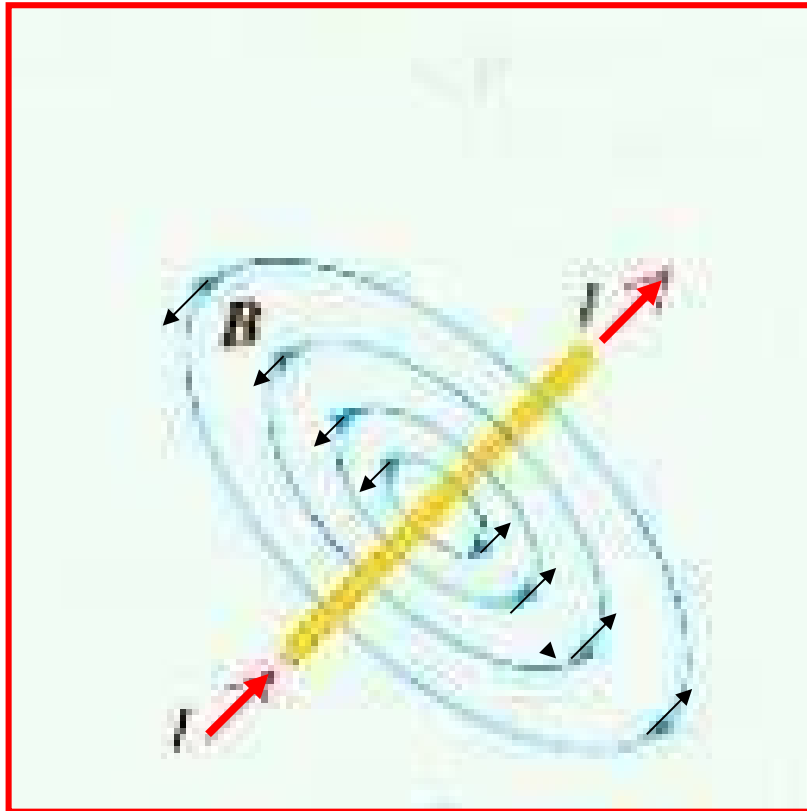
1. 磁感应线

定义：磁感应线即磁场空间中一些有方向的曲线，其上每点的**切线方向**与该点的磁感应强度方向一致。

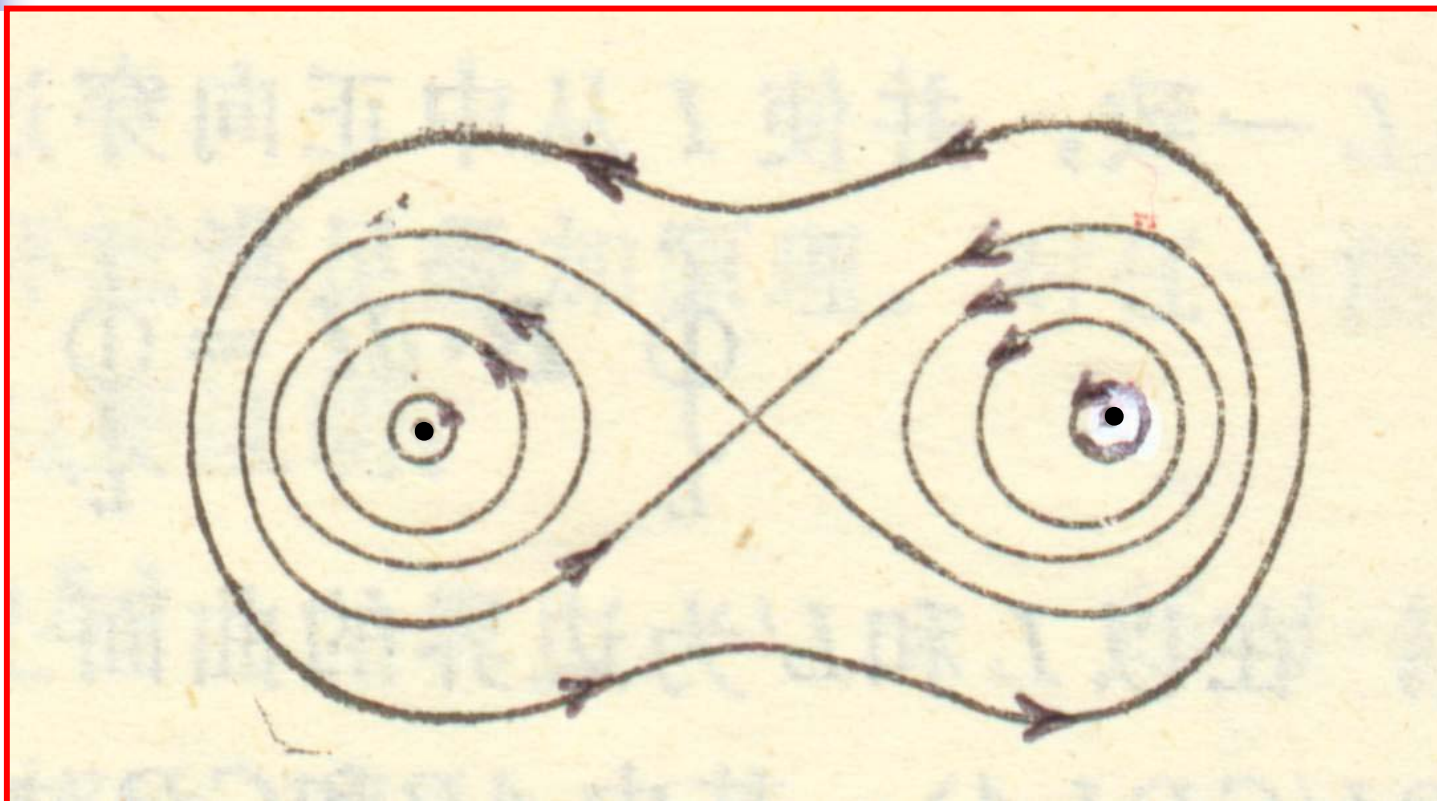
为了表达磁场中某点磁感应强度**大小**，我们规定，绘图时作到：过该点**垂直于磁感应线的截面的数密度**与磁感应强度成正比，即

$$| \boldsymbol{B} | = \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

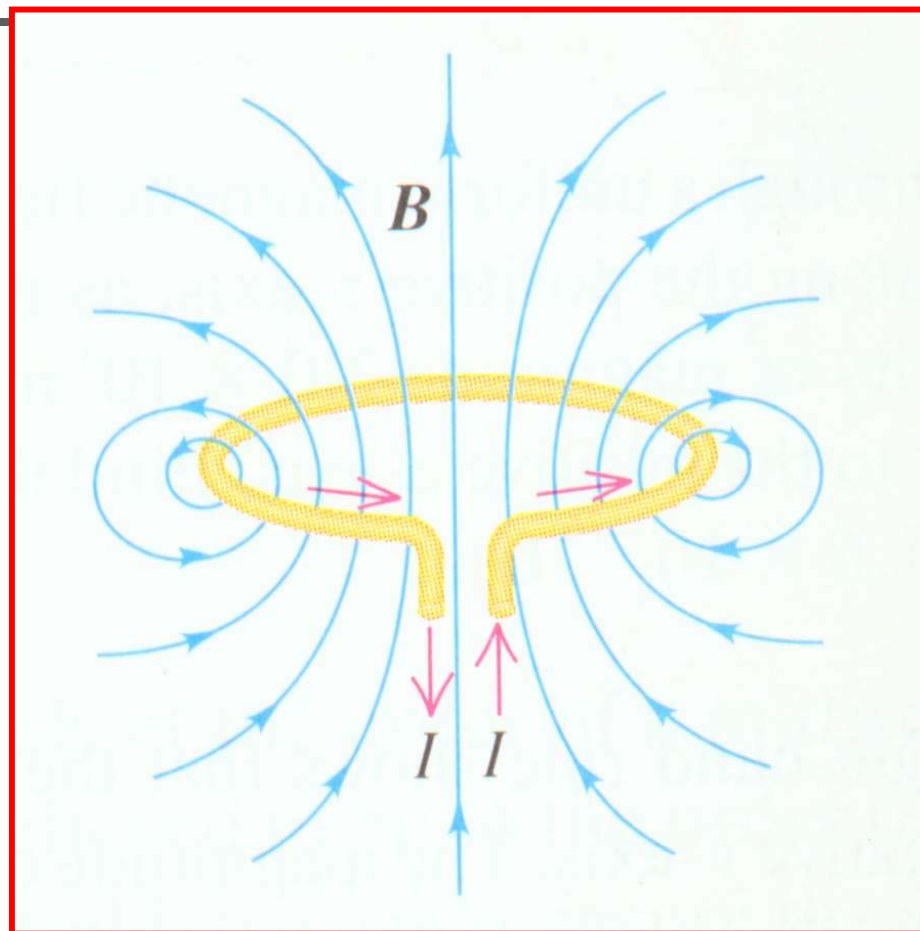
(a) 直线电流



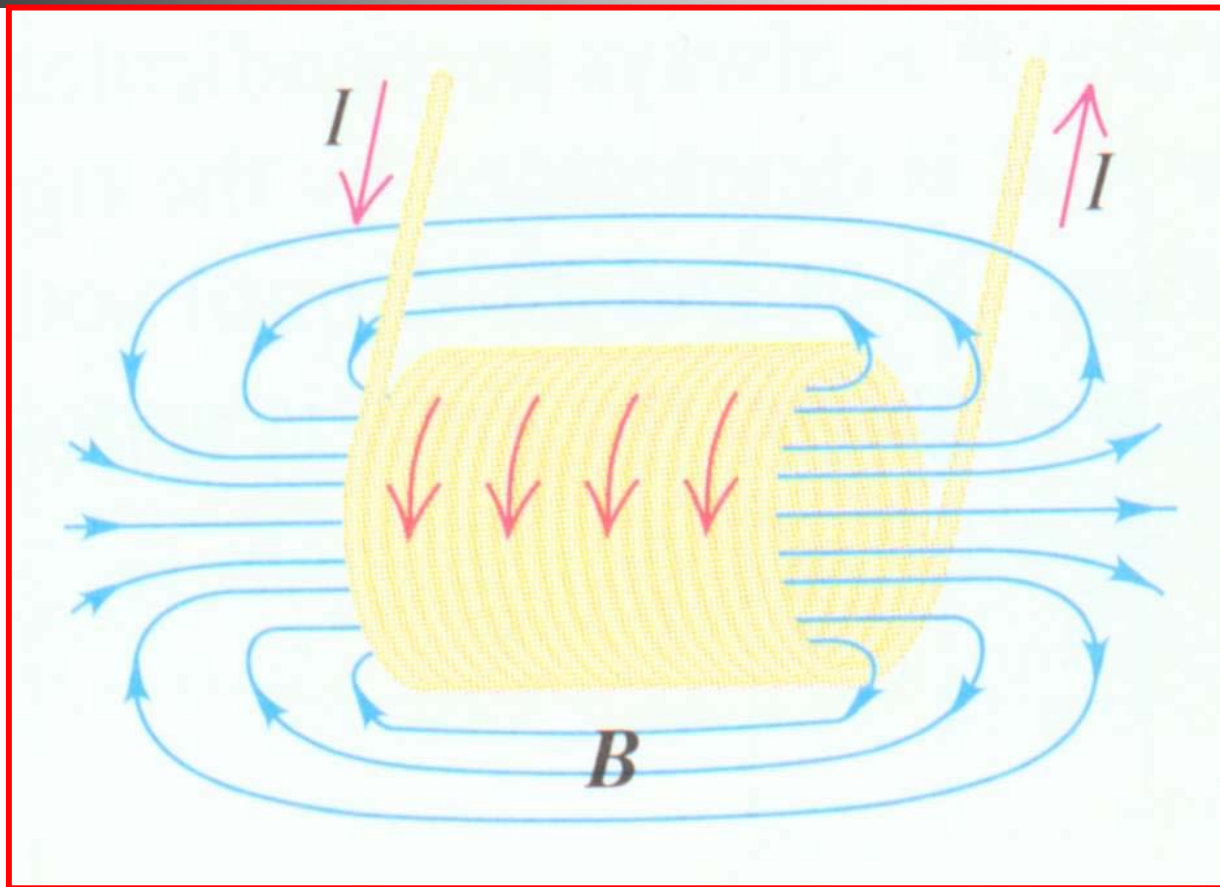
(b) 两根平行直线电流



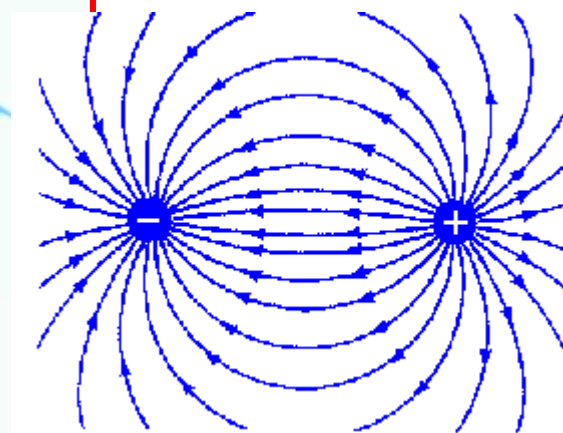
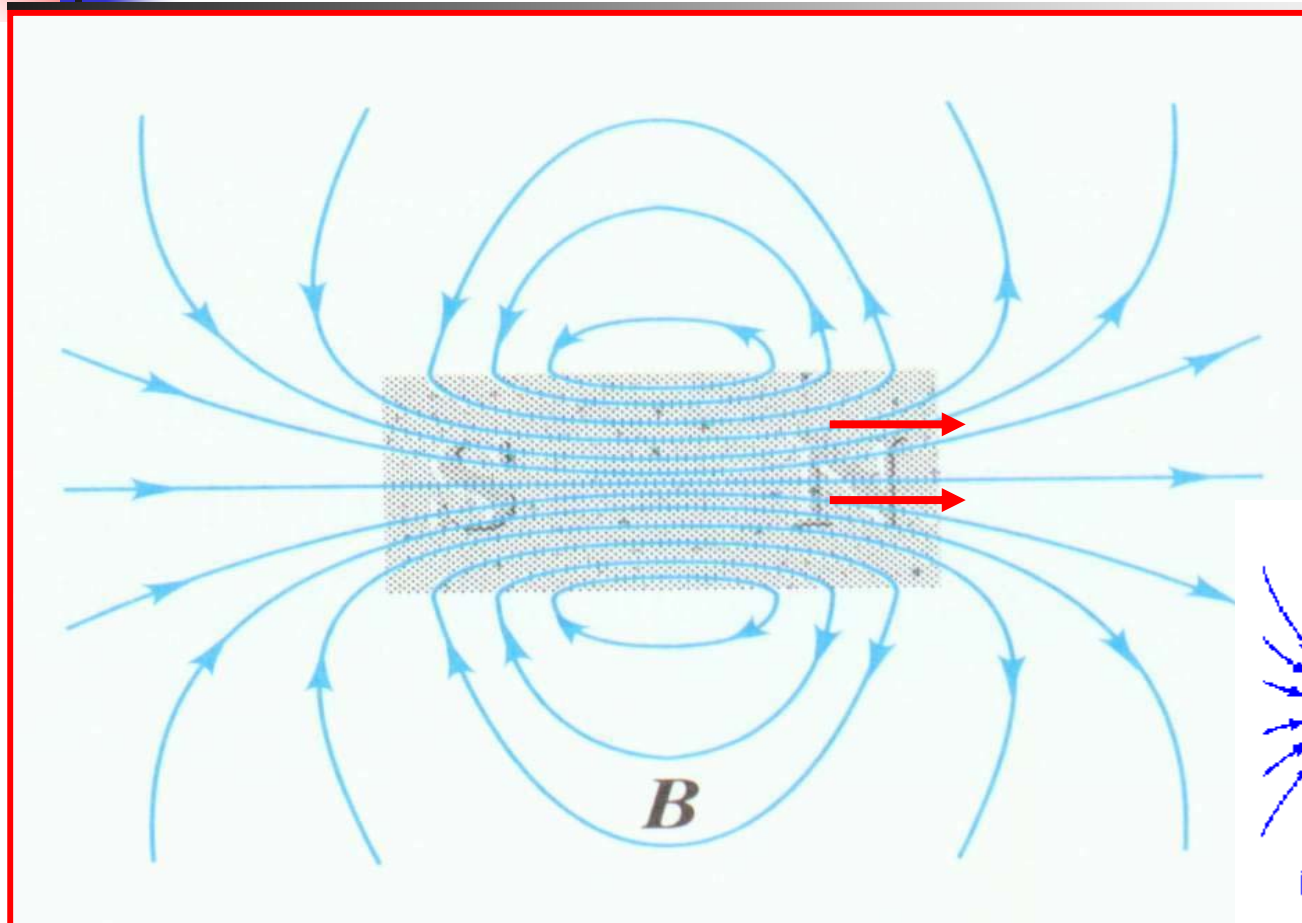
(c) 圆环电流



(d) 有限长螺线管电流



(e) 电磁铁 (磁场线与电场线的区别!?)



2. 磁通量

- 回忆电通量！

- 定义： $\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{S} \equiv \Delta \Phi_B$

称为通过 $\Delta \mathbf{S}$ 的磁通量，形象地说是垂直通过 $\Delta \mathbf{S}$ 的磁感应线根数。进一步，可引入通过某曲面 S 的磁通量：

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- 磁通量的单位为韦伯(Wb)， $1 Wb = 1 T \cdot m^2$ 。
- 磁通量也和 \mathbf{B} 一样满足叠加原理。



二、高斯定理（通量定律）

▲ **高斯定理**：通过任意闭合曲面S的磁通量等于零，即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

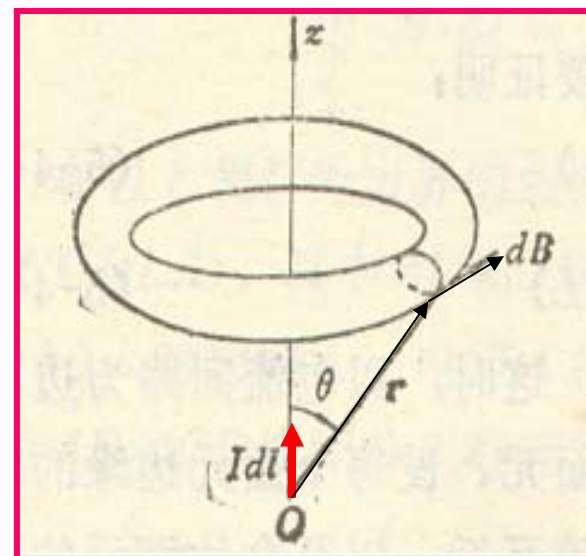
▲ **物理意义**：反映了磁场的“**无源性**”，孤立的磁荷不可能存在，磁场线闭合（一般地说）。

高斯定理的证明

【证明】：因为任意一磁场**B**，都是由许多**电流元**产生的磁场叠加而成，其**磁通量**也满足**叠加原理**，所以**只需证明电流元**产生的磁场遵守高斯定理。

取电流元 **Idl** 为坐标原点，**Z轴**沿电流元方向，**以Z为轴的任意圆上**，由毕---萨定律得：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$



此式表明，在**圆上任意一点** **$d\mathbf{B}$** 的**大小相同**、**方向与圆相切**。于是，穿过**以Z为轴的任一环形管内**任意截面的磁通量为常量，与截面在管中的位置以及取向无关。

■ 对于任一**封闭曲面** S ，上述**环形管每穿过 S 一次**，均会在 **S 上切出两个面元**，见图中 ΔS_1 、 ΔS_2 ，且其磁通量

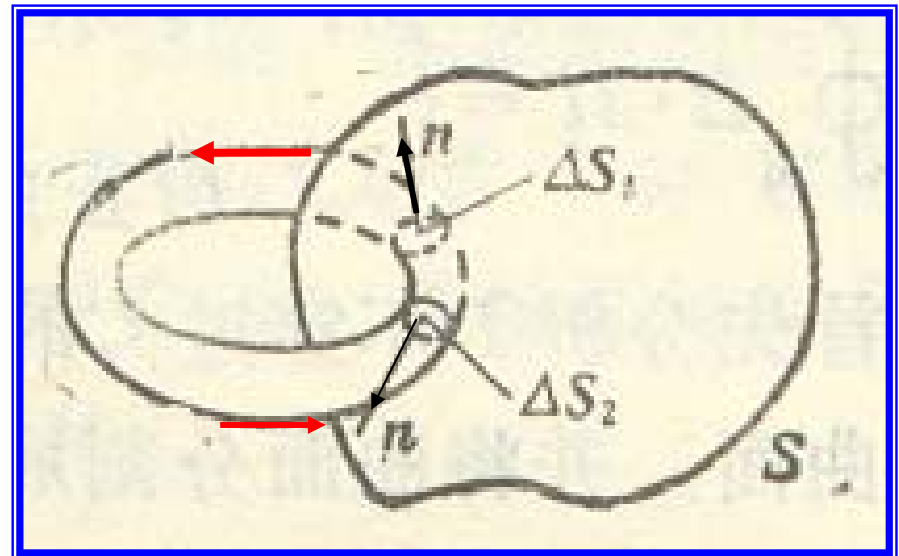
$$\mathbf{B}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = B\Delta S - B\Delta S = 0$$

■ 反之，对曲面 S 上任一面元，都可作一个环形管，且可找到 S 上的另一个面元与之对应。同上理，这**两个面元**的磁通量之和为零。

故，穿过 S 的总磁通：

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

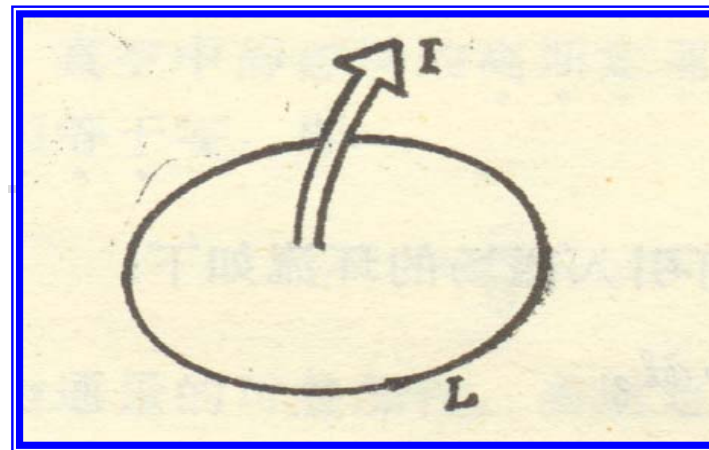
证毕。



三、安培环路定理（环量定律）

- 仿照引入静电场环流的作法，可引入磁场的环量如下：

$$\text{环量} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$$



- **安培环路定理：**沿任何闭合曲线**L**磁感应强度**B**的环流**等于**穿过**L**的电流强度的**代数和**的 **μ_0** 倍，即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \sum_{\text{穿L}} \pm I$$

I的正负确定规则：在**设定了L**绕行方向后，采用右手定则，四指沿**L**方向，则电流方向与**大拇指一致时取正**，反之取负。**物理意义：**磁场是**有旋场**。



安培环路定理的证明

【证明】 因为任何静磁场都是由一些稳恒的闭合线电流产生的，只要证明对其中任一稳恒的闭合线电流 I 和任一闭合回路 L 满足：

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \begin{cases} 0, & (I \text{ 不穿过 } L) \\ \mu_0 I. & (I \text{ 正向穿过 } L) \end{cases}$$

则按照叠加原理，安培环路定理便成立。

首先证明 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 0$ (I 不穿过 L)

1. 一闭合线电流 I 不穿过闭合回路 L

将闭合线电流 I 分割成许多个小圆元电流，则元电流间邻接线上的电流相互抵消，以至全体元电流的总和与所考察的闭合线电流 I 等效，见右下图。

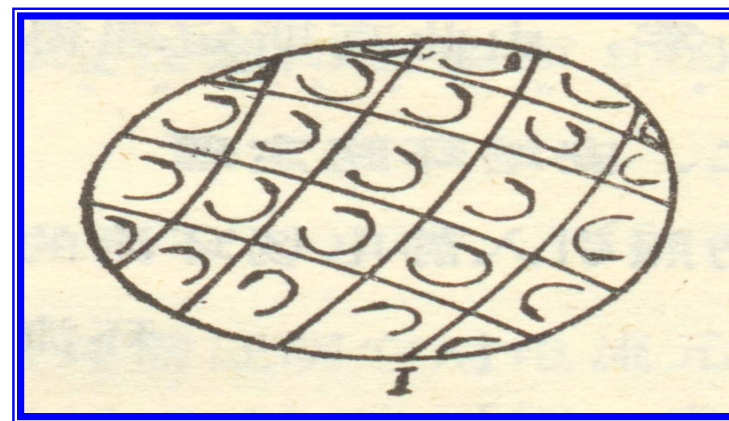
即，闭合线电流 I 的磁场等于全体元电流 I 的磁场的叠加

- 上述任一元电流 I (磁偶极子) 在远处的磁场和电偶极子的电场的函数形式相同 (见例4.2)。由静电场的环路定理：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

- 对任一元电流 I 的磁场也应有：

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 0$$



故：叠加的全体元电流的磁场的环流也为零，得证。

进一步证明 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I$ (I 正向穿过 L)

2. 考虑 I 正向穿过 L 的情况

另作任一回路 L' , 定义其正向如右下图(a), I 穿过 L' 。

- 在回路 L 与 L' 上切开一小口, 形成一个新的回路 $ABL'CDLA$, 方向如右下图 (b)。其中 DLA 的方向与(a)中 L 同, $BL'C$ 的方向与(a)中 L' 规定方向相反。
- 于是, 由前页已证明的公式知:

$$\oint_{ABL'CDLA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{BL'C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{DLA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

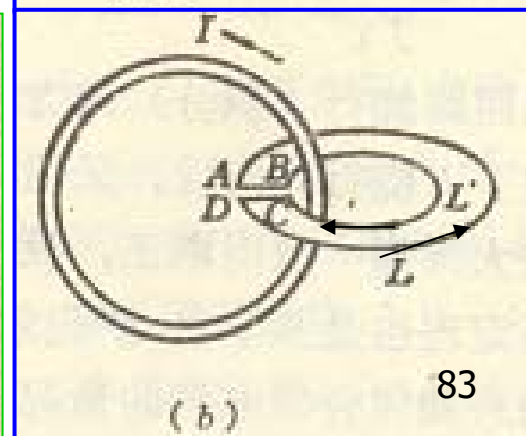
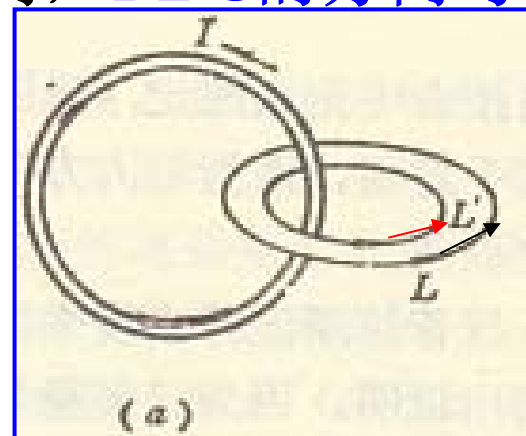
$$\therefore \int_{AB} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{CD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_{BL'C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_{DLA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\therefore \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

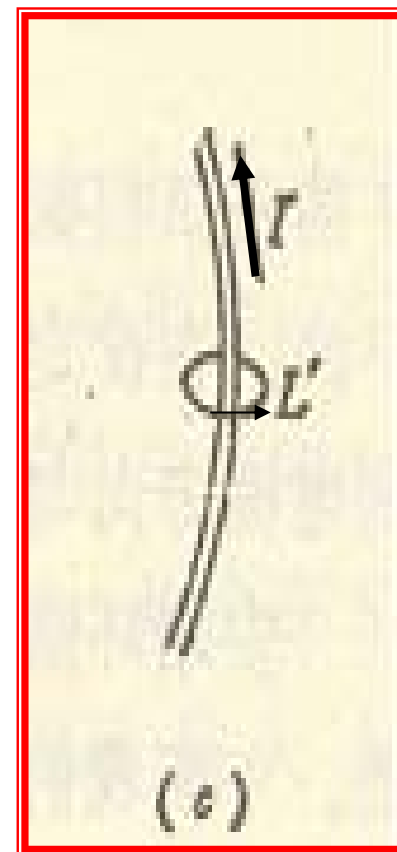
$$\text{即 } \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$



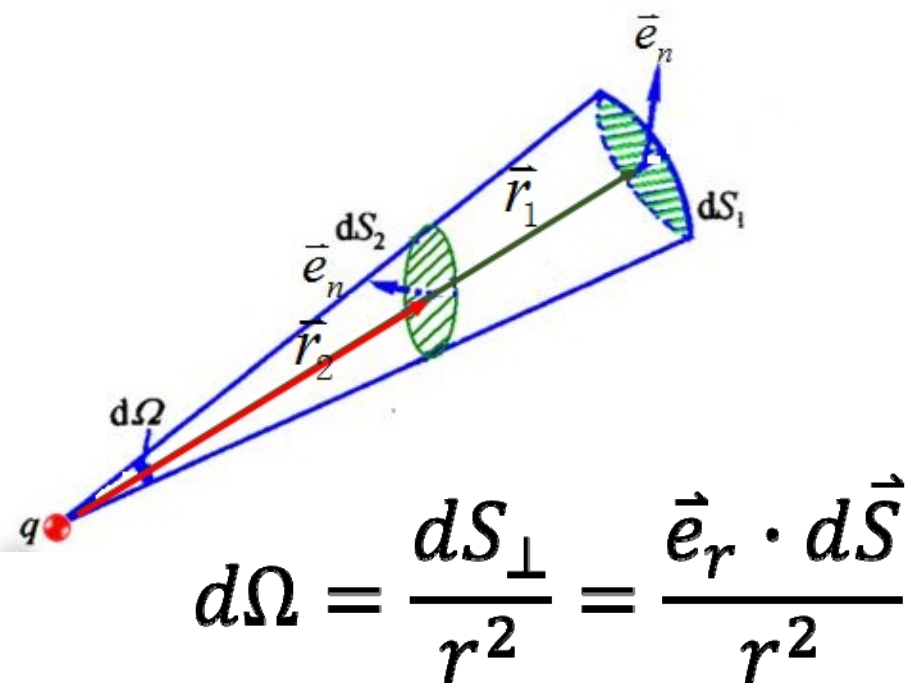
■ 由 \mathbf{L}' 的任意性，可将它取成半径为 r_0 的圆，圆心位于电流 \mathbf{I} 回路上，圆面垂直于 \mathbf{I} ，见右下图 (c)。使 $r_0 \ll$ 电流 \mathbf{I} 的曲率半径，则 \mathbf{L}' 回路上的场近似为一无穷长直电流 \mathbf{I} 的场，由例4.1可知

■
$$\oint_{\mathbf{L}'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cdot 2\pi r_0 = \mu_0 I$$

■ 安培环路定理证毕。



立体角



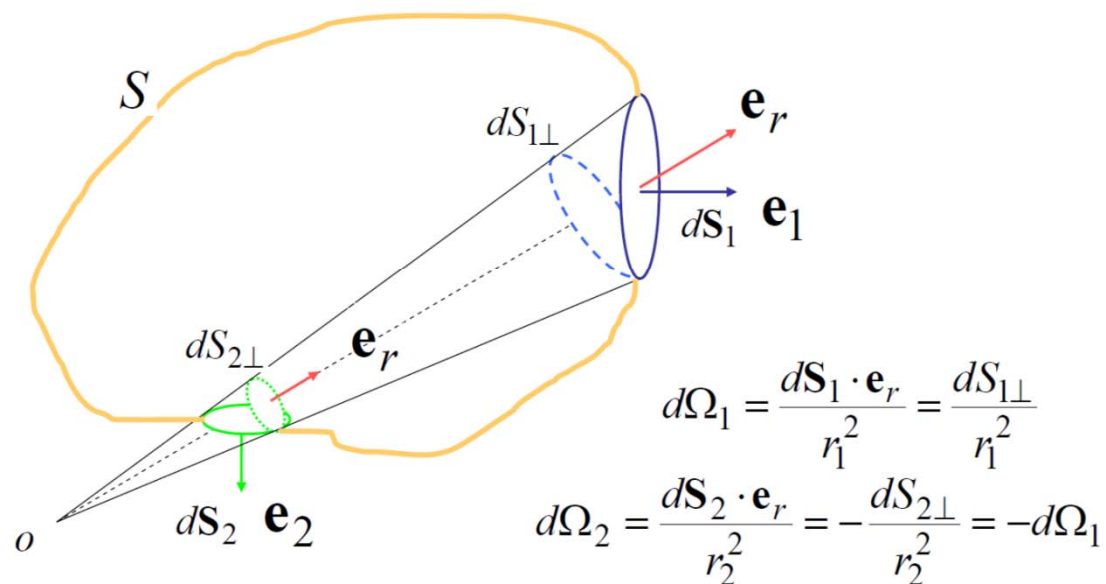
- 以锥体的顶点为球心作球面，该锥体在球表面截取的面积与球半径平方之比

- 球面的立体角： 4π

$$\Omega = \oiint_S d\Omega = \frac{\oiint_S \vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = 4\pi$$

- 封闭曲面对面内点： 4π

- 封闭曲面对面外点： 0



- 半球面对中截面一点: 2π

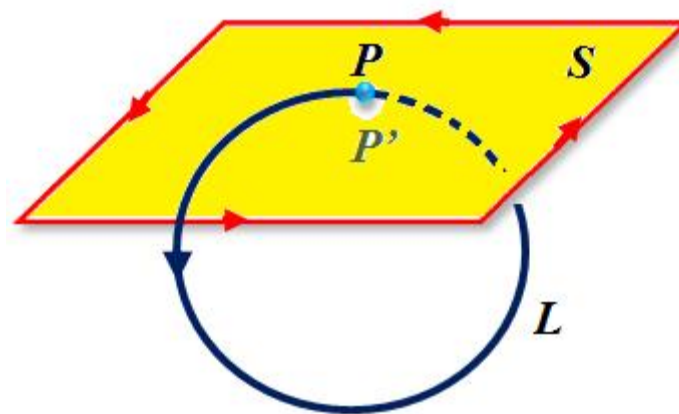
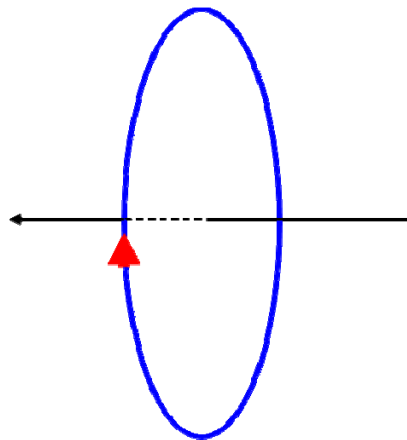
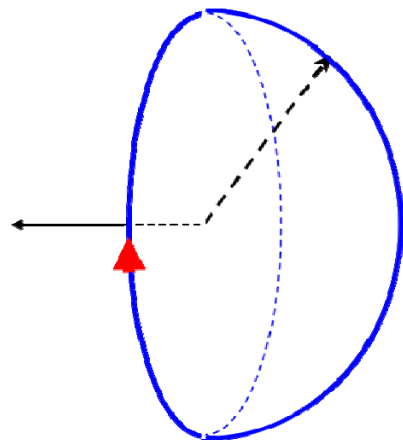
- 无限接近曲面时: $+2\pi, -2\pi$

- P点从正面接近曲面: -2π

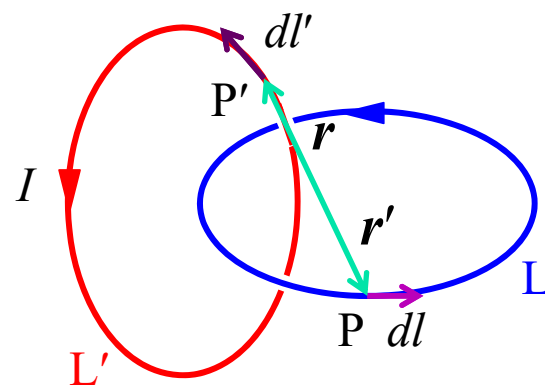
- P点从反面接近曲面: $+2\pi$

- 当由P点沿L一周绕到P'点时, 立体角变化为:

$$\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$



设 L' 为电流环路并穿过任一回路 L ，如图所示， $I dl'$ 为元电流， P' 为源点， dl 为 L 上的线元， P 为场点， r 为源点到场点的矢量， r' 为场点到源点的矢量，显然有： $r = -r'$

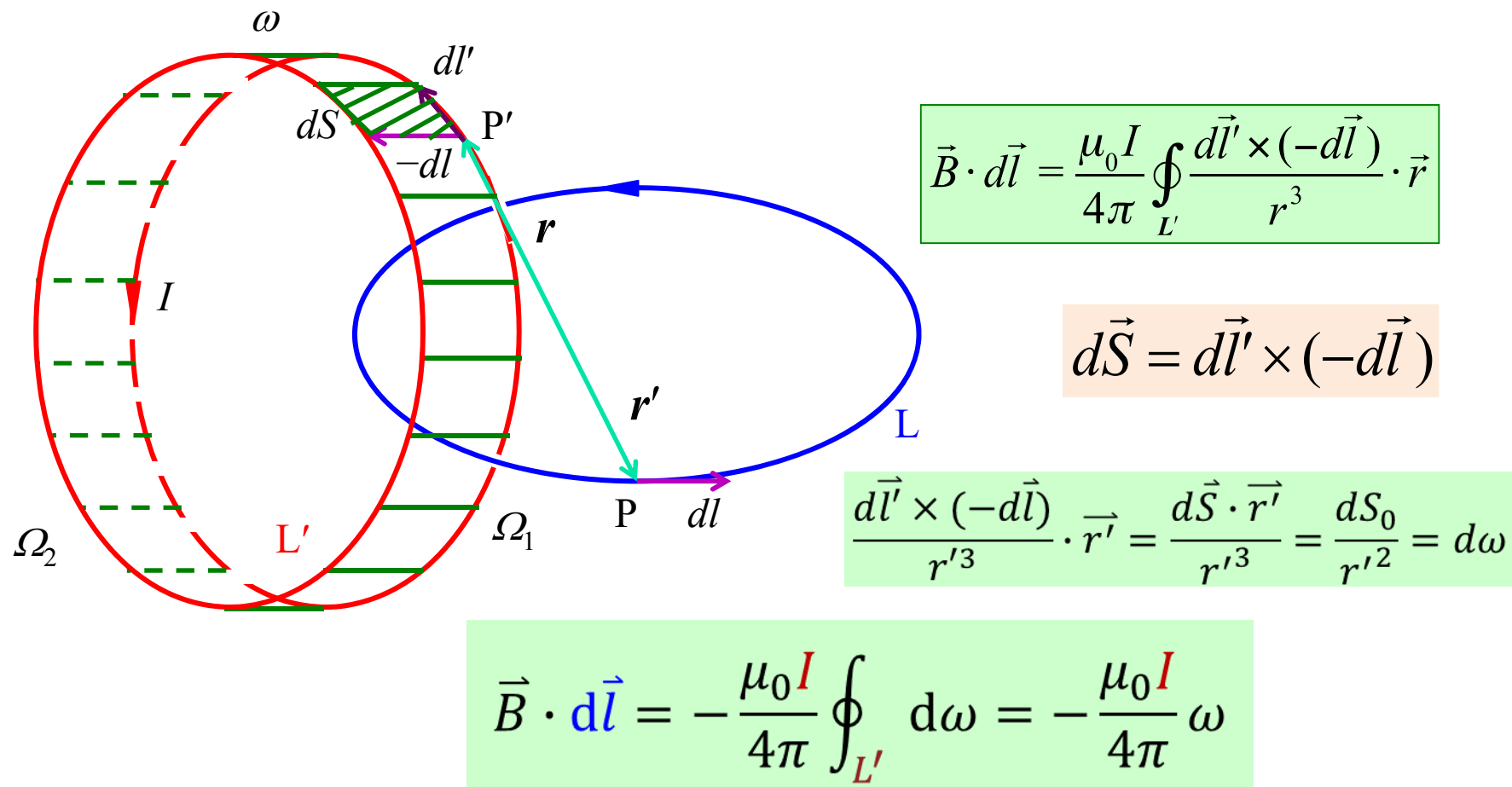


由毕萨定理，得：

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L'} \frac{I d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{aligned} \because (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L'} \frac{d\vec{l} \times d\vec{l}'}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L'} \frac{d\vec{l}' \times (-d\vec{l})}{r^3} \cdot \vec{r}$$



P点沿 $d\vec{l}$ 的移动，与P不动，载流回路 L' 作 $-d\vec{l}$ 平移是等价的。 ω 为带状面对P点所张的立体角。图中 Ω_1 、 Ω_2 为 L' 平移前后相对P点所张的立体角，两者与 ω 一起构成封闭柱形曲面。

由封闭曲面对P点所张立体角为零：

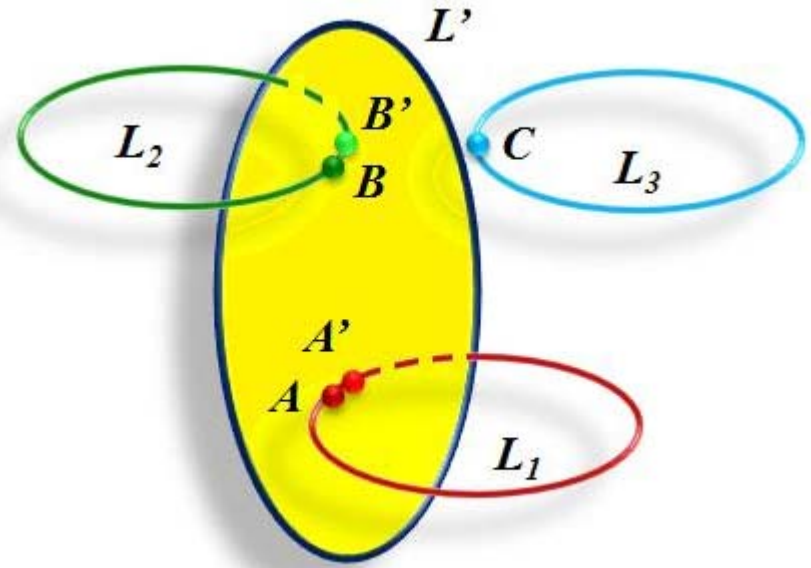
$$\omega + \Omega_2 - \Omega_1 = 0$$

$$\omega = -(\Omega_2 - \Omega_1) = -d\Omega$$

所以：

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$



L_1 ：从A顺着 $d\vec{l}$ 方向走到A'，从正面走到反面，方位角变化 4π

L_2 ：从B'顺着 $d\vec{l}$ 方向走到B，从反面走到正面，方位角变化 -4π

L_3 ：从C'顺着 $d\vec{l}$ 方向走到C，走到原地，方位角变化0

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega = \begin{cases} \mu_0 I & L_1, \text{ 即 } \vec{L} \text{ 与 } I \text{ 同向} \\ -\mu_0 I & L_2, \text{ 即 } \vec{L} \text{ 与 } I \text{ 反向} \\ 0 & L_3, \text{ 即 } \vec{L} \text{ 与 } I \text{ 不套连} \end{cases}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \mu_0 I$$

■ 得证。

环路定理应用举例(对称性好)

[例4.5] 一无限长直圆柱导线，截面半径为 R ，电流沿截面均匀分布，电流强度为 I ，求导线内、外的磁场分布。

[解] 根据电流分布的轴对称性，磁感应强度应沿与圆柱共轴的圆回路的切线方向，大小只与离轴线的距离有关。设圆回路 L 的半径为 r ，如右图，则由安培环路定理得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi r B = \mu_0 I',$$

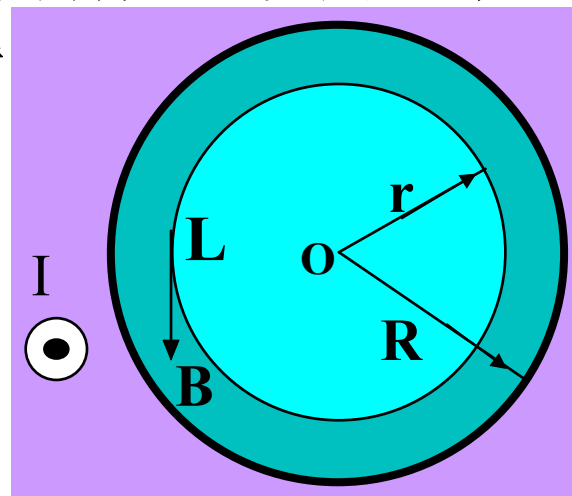
其中 I' 为穿过圆回路 L 的电流。

易证：

$$I' = \begin{cases} I r^2 / R^2, & r < R, \\ I, & r \geq R. \end{cases}$$

于是，

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2 \pi R^2}, & r < R, \\ \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}, & r \geq R. \end{cases}$$



[例4.6] 设一**无限长**螺丝管单位长度上的匝数为 **n** ，电流强度为 **I** ，求管内、外的磁场。

[解] 由电流分布的**轴对称性**，可判断管内磁感应强度 **B** 只有**轴向分量**，其大小只与离螺线管轴的距离 **r** 有关。取矩形回路 **$ABCD$** ， **AB** 位于螺线管轴上， **CD** 位于螺线管内（见图a）。由例4.3可知，轴线上的磁感应强度大小为 **$\mu_0 nI$** ，沿轴线向左方向。对回路 **$ABCD$** 应用安培环路定理得：

$$-\mu_0 nI \cdot \overline{AB} + B_i(r) \cdot \overline{CD} = 0,$$

即

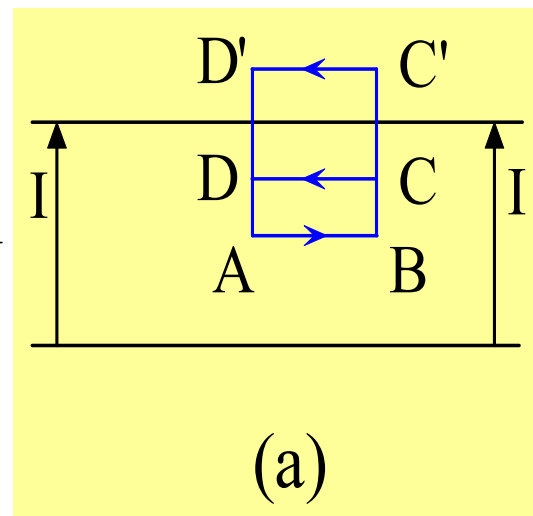
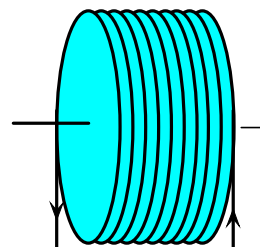
$$B_i(r) = \mu_0 nI.$$

这表明**无限长螺线管管内沿轴线方向**磁场均匀。

■ 再取回路 **$ABC'D'A$** （见图a），同理应用安培环路定理得：

$$-\mu_0 nI \cdot \overline{AB} + B_{e//}(r) \cdot \overline{C'D'} = -\mu_0 nI \cdot \overline{AB},$$

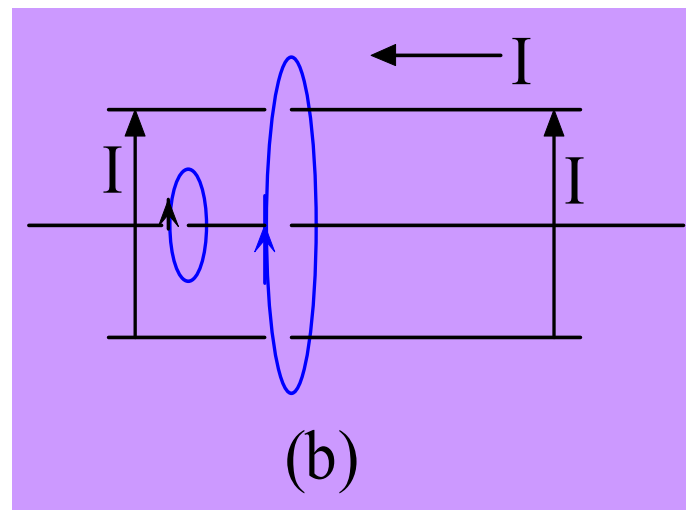
由此得 **$B_{e//}(r) = 0$** ，即**无限长螺线管管外沿轴线方向**磁场处处为零



管外磁场

- 另一方面，考虑螺线管**存在一自右向左的等效轴向电流 I** （见图b），且该电流可视作**沿螺线管表面均匀分布的面电流**，由它产生的磁感应强度**方向与同螺线管共轴的圆形环路相切**，设为 $B_{e\perp}$ 。
- 按图b**选择同螺线管共轴的圆回路并应用安培环路定理**，不难得出**螺线管内磁场 $B_{i\perp}$ 为零**，而**螺线管外的磁场 $B_{e\perp}$ 与无穷长直线电流的磁场相同**，

即 $B_{e\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，其中 $r \geq R$ （螺线管半径）



综合起来看：

无限长螺线管**管内**磁场均匀分布，与轴线平行；
管外磁场与无穷长直线电流的磁场相同。

[例4.7] 电流均匀分布在一**无穷大平面导体薄板**上，面电流密度为 i ，求空间磁场分布。

[解] 取直角坐标，使导体板位于 $y-z$ 平面，**电流 i 沿 z 方向**。

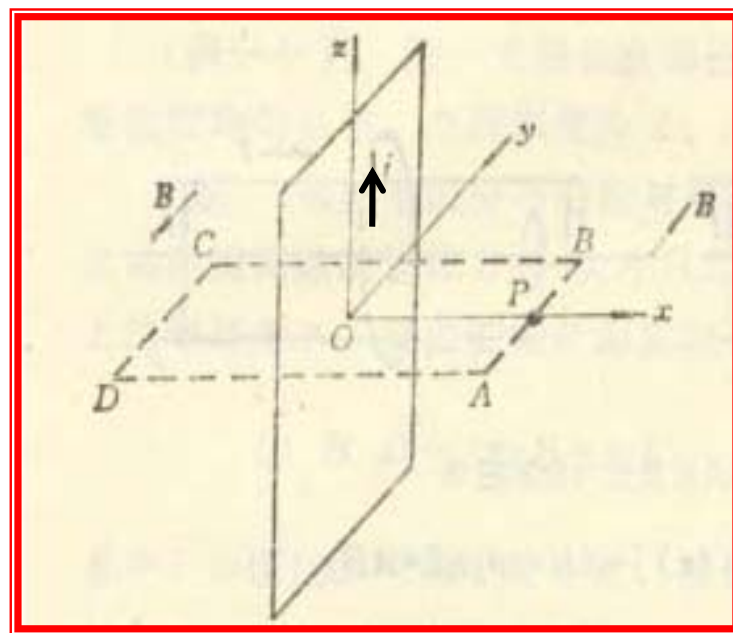
由电流分布的**对称性**，可知磁感应强度**只有 y 分量**，其大小只与 x 有关，且 $B(x) = -B(-x)$ 。

为此，考虑 x 轴上一点 P ，以 O 为中心，在 $x-y$ 平面过点 P 作一矩形回路 **$ABCD$** ，应用安培环路定理可得

$$B(x) \cdot 2 \overline{AB} = \mu_0 i \cdot \overline{AB}.$$

于是，

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2}.$$



上式表明，**无穷大平面电流两侧为均匀磁场**，且磁感应强度的大小相等、方向相反。

另外，对有限大小的面电流板，只要 x **远小于** 该面电流板的尺寸，则它对磁感应强度的贡献也可由此式近似表示。

[例4.8] 绕在圆环上的线圈叫**螺绕环**，设螺绕环内径为 **R_1** ，外径为 **R_2** ，总匝数为 **N** ，电流强度为 **I** ，求环管内、外的磁场分布。

[解] 设螺绕环是密绕的，电流**接近轴对称分布**。这时，磁感应强度 **B** 应沿与**环共轴的圆周的切线方向**，大小只与离轴线的距离有关。在**环管内部**取半径为

r ($R_1 < r < R_2$) 的圆周回路，

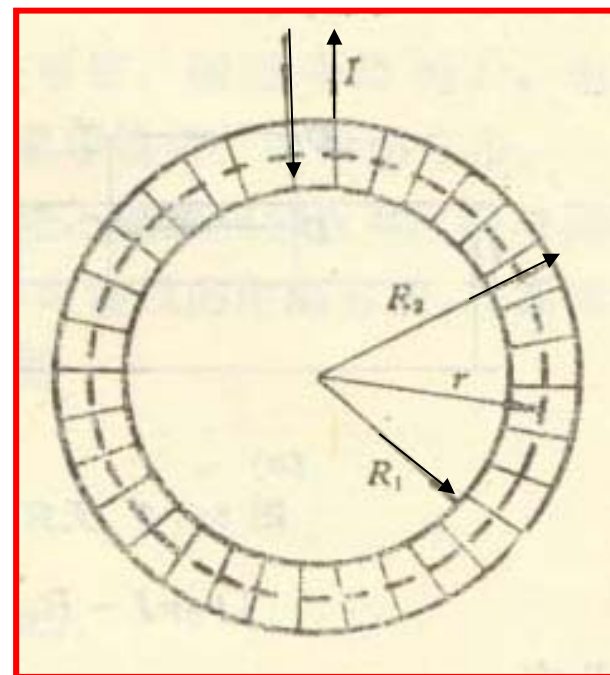
由安培环路定理有， **$2\pi rB = \mu_0 NI$**

从而求得环管内的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad (\text{螺绕环管内}).$$

当**螺绕环很细**即 **$R_1 \approx R_2 \approx R = (R_1 + R_2)/2$**
(**R** 为螺绕环的平均半径) 时，则

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI, \quad \text{可近似认为螺绕环内磁场大小均匀, 其值与无穷长直螺线管的结果一致。}$$



讨论：

- 如果在螺线环管的外部取一与环共轴的圆周回路，则穿过该回路的总电流为零，以至由安培环路定理可证环管外部的环向磁场处处为零。
- 不过，基于和例5.6类似的理由，本题中的螺绕环存在一逆时针方向的等效环向电流 I ，该电流沿环管表面分布。对于环管截面很小（ $R_1 \approx R_2 \approx R$ ）的螺绕环来说，该环向电流在环管外部的磁场和一电流强度 I 、半径 R 的圆线圈的磁场相同。

四、两条定理与毕奥-萨伐尔定律的关系

- 两条定理均通过毕奥-萨伐尔定律导出。
- 从高斯定理的证明过程可知，它不要求毕奥-萨伐尔定律中的距离平方反比关系。如 $d\mathbf{B} \propto \frac{Id\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^n}$ ，当 $n \neq 2$ 时，高斯定理仍然成立。
- 但安培环路定理则要求 $n=2$ 。从证明过程可知，要利用无穷长直导线电流的磁场，与例4.1相同步骤，可推出 $B \propto r_0^{-n+1}$ ，于是，以导线为轴半径为 r 的圆环的环流：
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} \propto \mu_0 I r^{-n+2}$$
- 当 $n \neq 2$ 时，该环量值与回路半径 r 有关，使安培环路定理不能成立。
- 对随时间变化的磁场，高斯定理仍然成立；但实验表明，安培环路定理应予修正，在第八章介绍。

§ 4.5 带电粒子在磁场中的运动

复习洛伦兹力

- 如果电场和磁场同时存在，则运动电荷 q 所受的电力为：

$$F_e = q E$$

- 所受的磁力为：

$$F_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- 带电粒子所受的总作用力，也称为洛伦兹力：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

一、带电粒子在磁场中运动的特点

1. 洛伦兹力不作功：

带电粒子在磁场中运动，将受到洛伦兹力，洛伦兹力的功率应为：

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = (q \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V} = 0$$

即洛伦兹力不作功。

由于能量守恒，所以在洛伦兹力作用下，粒子的动能和速率 v 不会改变，变化的只是粒子的速度方向。

2. 在均匀磁场中：

■ 粒子的运动方程为：
$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

■ 假定 \mathbf{B} 沿 \mathbf{Z} 的方向，即 $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$, $B_x = B_y = 0$ ，上式写成分量式：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

■ 定义 $\omega_L = qB/m$ ，则上述方程可化为：

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_L^2 \dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_L^2 \dot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

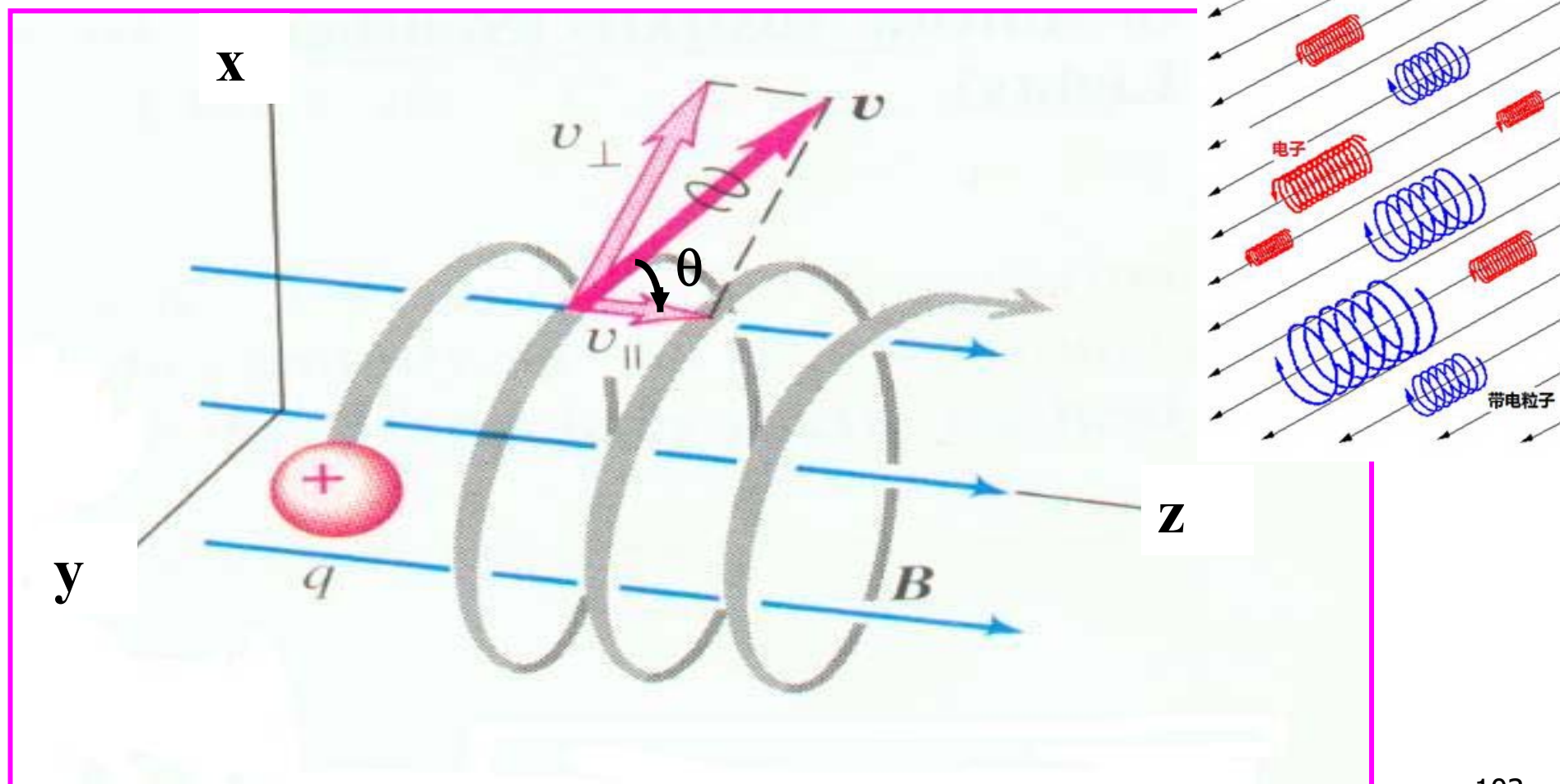
■ 易得解：

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{\perp} \cos(\omega_L t + \delta) \\ \dot{y} = -v_{\perp} \sin(\omega_L t + \delta) \\ \dot{z} = v_{\parallel} = \text{const} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \sin(\omega_L t + \delta) + x_0 \\ y = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \cos(\omega_L t + \delta) + y_0 \\ z = v_{\parallel} t + z_0 \end{cases}$$

- 其中 \mathbf{v}_{\perp} , \mathbf{v}_{\parallel} , δ , \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 , \mathbf{z}_0 为积分常数，由初始条件定。 \mathbf{v}_{\perp} 和 \mathbf{v}_{\parallel} 分别为垂直及平行于磁场的速度分量。

- 因为 $\mathbf{V} = \text{const}$, $\mathbf{V}_{\parallel} = \text{const}$, 所以 $\mathbf{V}_{\perp} = \text{const}$,
故：粒子速度与磁场的夹角（投射角） θ 为：
 $\theta = \arcsin(\mathbf{V}_{\perp} / \mathbf{V}) = \text{const}$, 在粒子运动过程中为常量，也由初始条件定。

- 从上述解可看出，磁场中的带电粒子作平行于 \mathbf{B} 的螺旋线运动。



- 轨道在 \mathbf{xy} 平面上投影是圆，圆心在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 处，回旋半径：

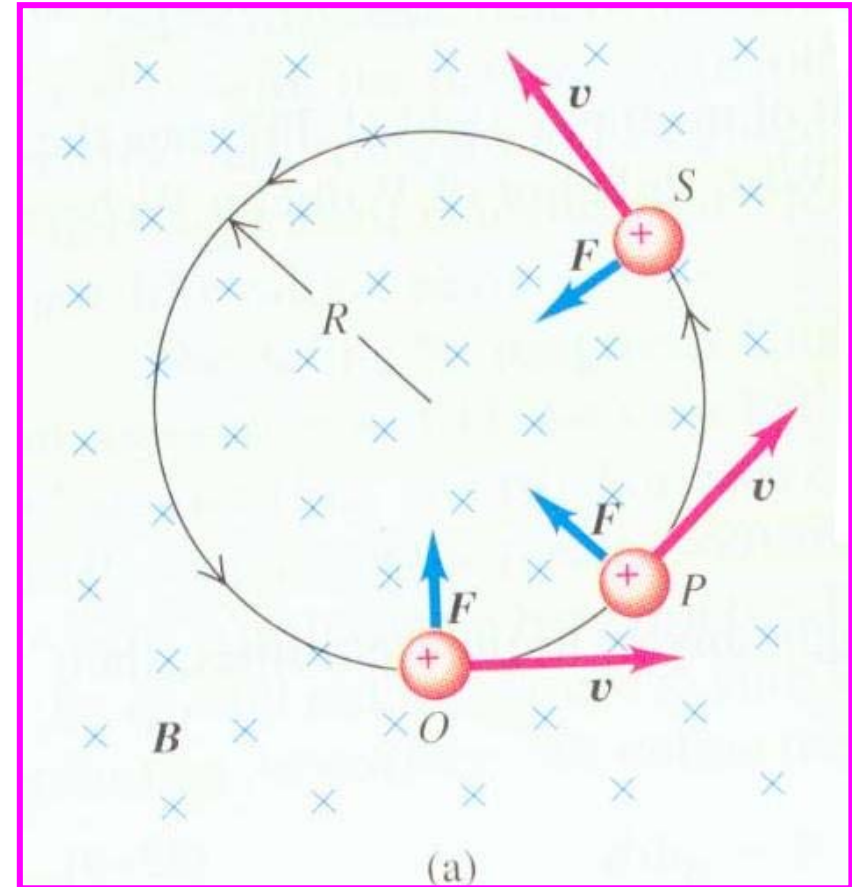
$$R = v_{\perp} / \omega_L = v_{\perp} m / qB$$

- 粒子回旋的角频率

$$\omega_L = qB/m, \text{ 回旋频率}$$

$$f = qB / (2\pi m), \text{ 回旋周期 } T = 2\pi m / (qB)$$

- ω 、 f 、 T 与粒子的回旋速率、回旋半径无关！



3. 在缓变、非均匀磁场中的情况介绍

- 对非均匀磁场，只要磁场的非均匀尺度远大于带电粒子回旋半径，则粒子的运动可近似看成是绕磁感应线的螺旋运动。
- 不过，由于磁场沿磁场线的非均匀性将破坏 \mathbf{v}_{\parallel} 以及 \mathbf{v}_{\perp} 的守恒性。
- 仍从粒子运动方程出发，介绍一种常用的守恒量——粒子的回旋磁矩，即带电粒子绕磁场的快速回旋形成一圆电流环，该电流环的磁矩称为粒子的回旋磁矩。

设在轴对称、缓变 非均匀磁场中

$$\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}} + B_r \hat{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{V} = V_{//} \hat{\mathbf{z}} + V_{\perp} \hat{\phi}.$$

- 取小圆柱形高斯面，从高斯定理：

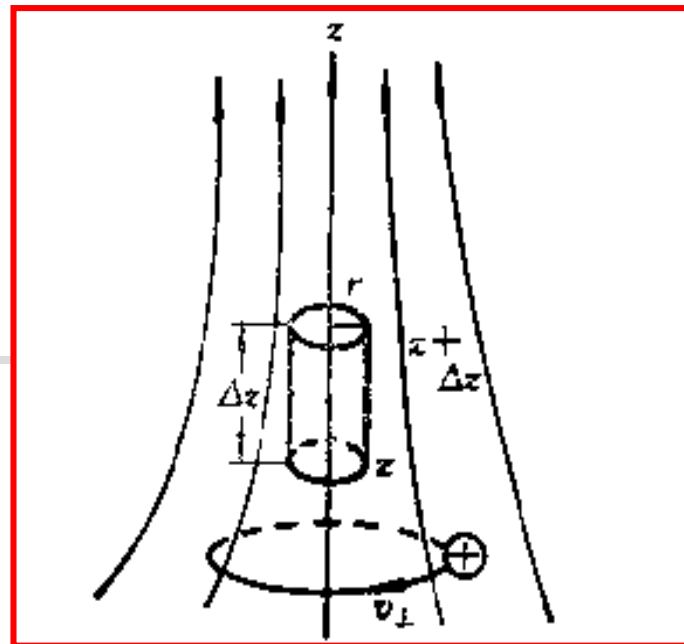
$$\therefore B_r \cdot 2\pi r \Delta z + [B_z(0, z + \Delta z) - B_z(0, z)] \pi r^2 = 0,$$

$$\therefore B_r = -\frac{r}{2} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{B_z(0, z + \Delta z) - B_z(0, z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$


- 由于 B_r 的出现， z 方向有洛伦兹力，所以 z 方向的运动方程：

$$m \frac{dv_{//}}{dt} = q v_{\perp} B_r = -q v_{\perp} \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

由此可见，粒子受到一种由场强处指向场弱处的力——磁压力

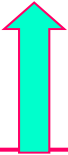


继续：


$$m \frac{dv_{//}}{dt} = -q v_{\perp} \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{m v_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z}$$

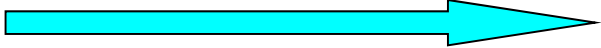
B_z 取 $r=0$ 处的值，即 B

因为


$$r = \frac{m v_{\perp}}{q B}$$

(回旋半径)

将上式两边同乘以 $v_{//}$ ，又 $\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dt} = v_{//} \frac{dB}{dz}$ ，


$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{//}^2 \right) = -\frac{m v_{\perp}^2}{2B} \frac{dB}{dt}$$

- 带电粒子作圆运动的磁矩的大小为：

$$|\boldsymbol{\mu}| = I\Delta S = \frac{q\omega}{2\pi} \pi R^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} \quad \leftarrow \begin{array}{l} R = v_{\perp} / \omega \\ \text{又 } \omega = qB/m \end{array}$$

- 由上式代入前式可得：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{//}^2 \right) = - \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \frac{dB}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{两式相减} \end{array}$$

- 由于 $v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2$ 守恒，
再加上 v_{\perp} 与 μB 关系，得：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{//}^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = - \frac{d}{dt} (\mu B) = -B \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{dB}{dt}$$

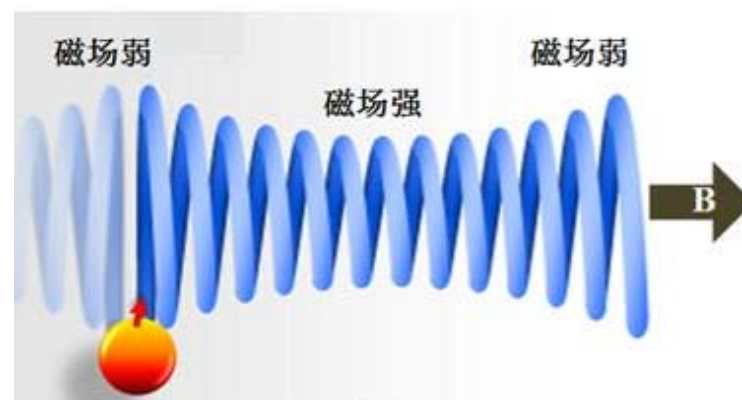
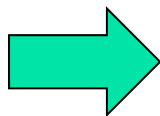
$$\frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad \text{得:} \quad \mu = \text{const}$$

$$\text{即:} \quad \mu = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} = \text{const}$$

- 带电粒子在缓变磁场中运动，**磁矩守恒**。
- 同样可证，对任意随时间、空间缓变磁场，运动的带电粒子**磁矩守恒**。

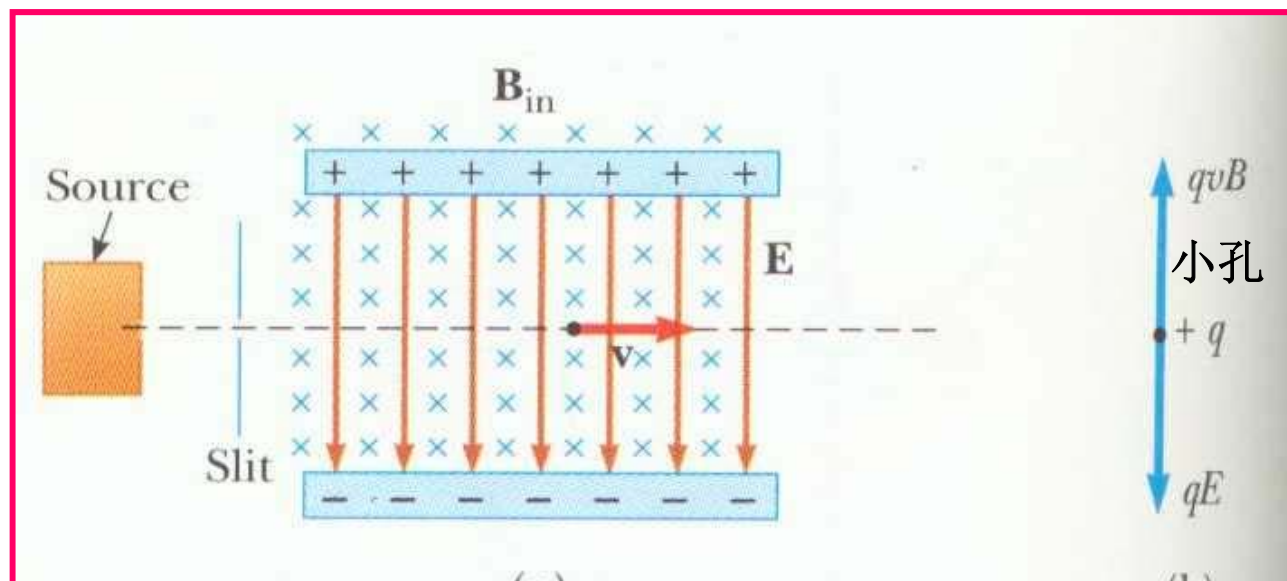
$$R = \sqrt{\frac{2m\mu}{q^2 B}}$$



二、应用举例

1. 速度选择器

一束带电粒子射入一相互垂直的均匀电场和均匀磁场。若粒子走直线，便能从小孔中穿出，它所受到的电力应与磁力平衡，则： $qE=qvB$ ，
 $\therefore \mathbf{v} = \mathbf{E} / \mathbf{B}$ 即只允许特定速率的粒子穿过（忽略重力），速率由 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 确定与粒子的电荷、质量无关。

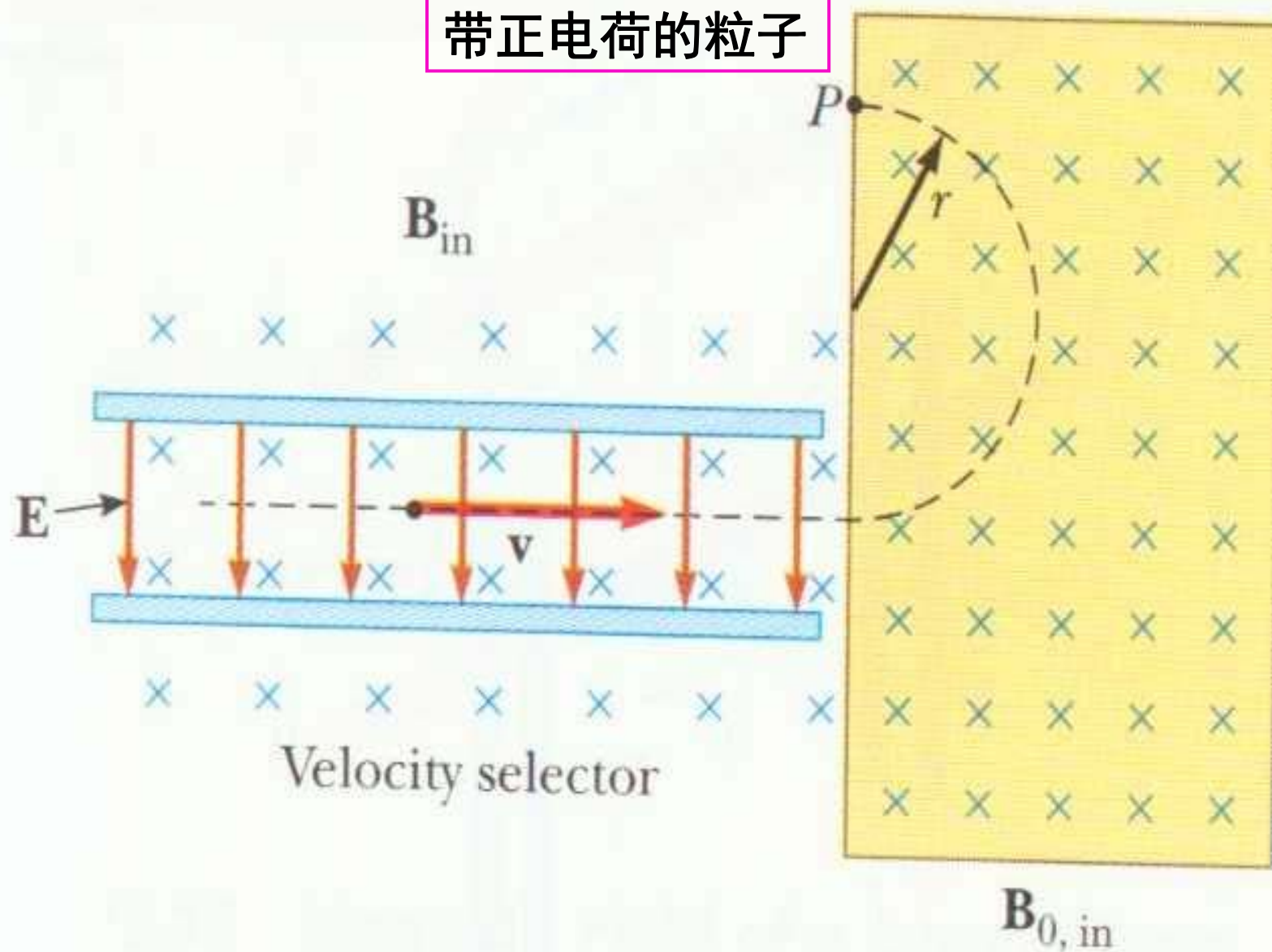




2. 质谱仪

- 质谱仪是通过测量带电离子的质量或电荷与质量的比值（简称荷质比）来对样品进行成分分析。
- 其基本方法是：离子束通过速度选择器，选出特定速率的离子，进入均匀磁场中作圆周运动。
- 由于离子电荷和质量的差异，回旋半径R不同。R可由感光胶片来测得，从而获得离子的荷质比。

带正电荷的粒子



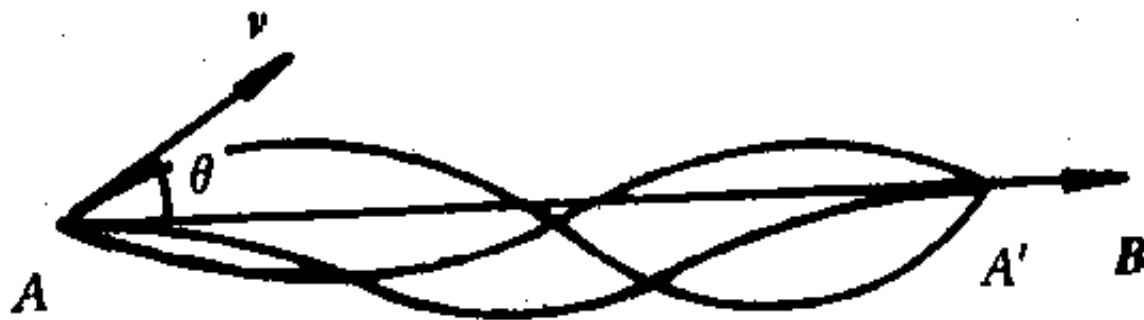
- 不同**m**、**q**离子，经速度选择器，**V**同，即 V_{\perp} 同且已知，进入均匀磁场中，则回旋半径：

$$R = \frac{V_{\perp}}{\omega} = \frac{V_{\perp} m}{qB}$$
$$\therefore \frac{q}{m} = \frac{V_{\perp}}{RB}$$

- **B**、**V**已知，由测量所得**R**可算带电粒子的荷质比，并可用来分离同位素，分析含量。

3. 磁聚焦

均匀磁场中的磁聚焦：利用带电粒子在**均匀**磁场中的螺旋运动特性，回旋周期与粒子速率无关，可以使开始发散角不大的粒子射线束，**一个周期会聚一次**（此原理可运用于电子显微镜中）。



均匀磁场的磁聚焦

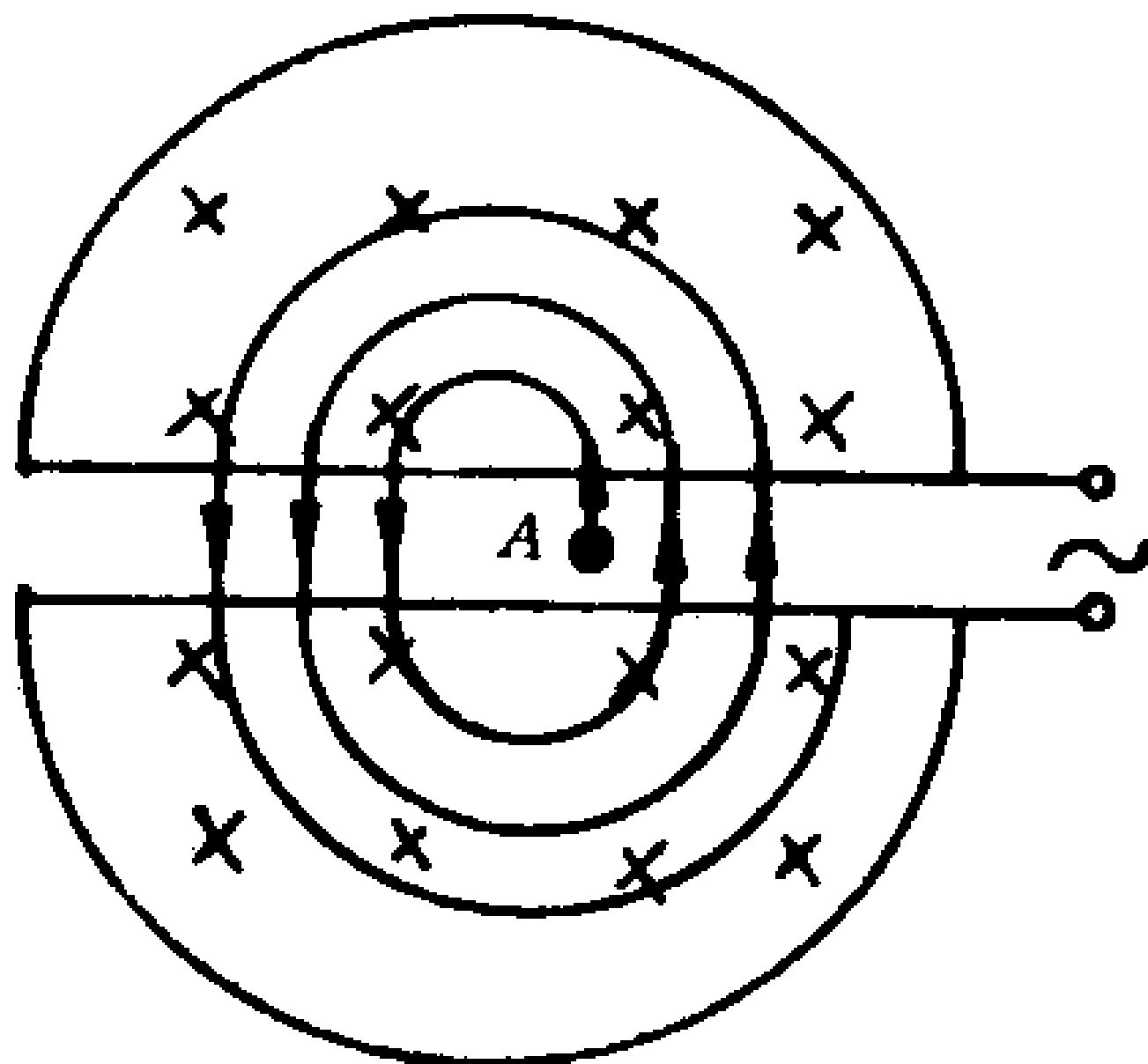
- 若无磁场，开始虽然张角较小的离子束，各个离子沿直线运动，则在远处会发散开；
- 外加均匀磁场，离子束作螺旋线运动，使离子束速度方向近似与 \mathbf{B} 平行，张角较小， $\mathbf{v}_{//}$ 近似相等，离子回旋频率和周期与粒子的回旋速度 \mathbf{v}_{\perp} 无关，经一个周期沿磁场方向上聚一次，不会发散。
- 离子螺旋运动的螺距 $\mathbf{h} = T \mathbf{v}_{//} \approx \frac{2\pi m v}{qB}$, $T = \frac{2\pi m}{qB}$

4. 回旋加速器

- 利用带电粒子在磁场中作回旋运动时回旋周期**T**与**粒子速率**和**回旋半径R**无关的特点，可以制成使带电基本粒子获得很高能量的回旋加速器。

$$T = \frac{2\pi m}{qB}, \quad R = \frac{vm}{qB}.$$

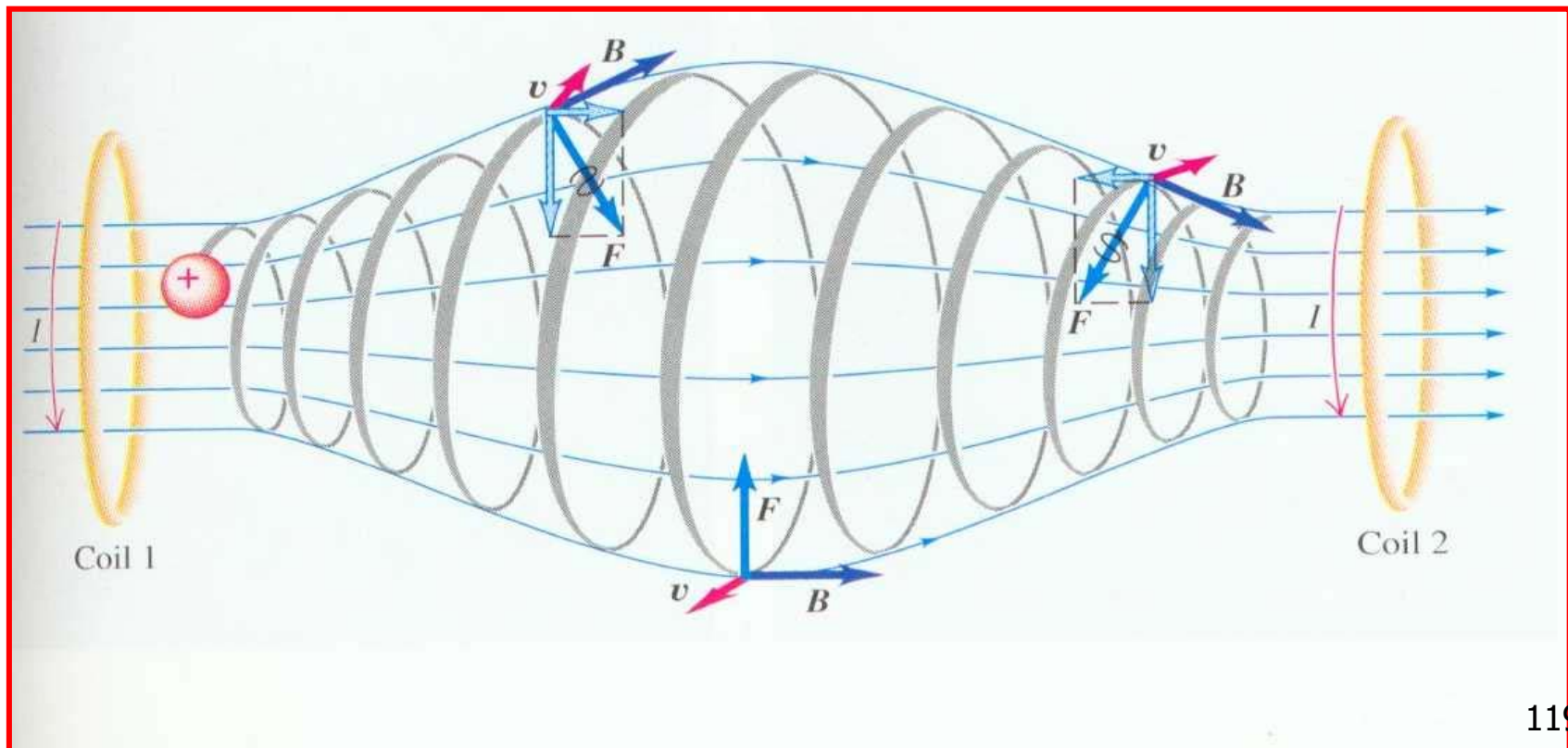
- **注意！相对论效应**：当速度接近光速时，质量随速度变化，且辐射的能量损失很严重。为避免相对论效应，都用来加速重离子。



- 回旋加速器的主要部分为两个半圆**D**形盒，一个垂直于盒底面的强均匀磁场，两个**D**形盒间加有交变电压，从而在两个**D**形盒间隙内形成方向为周期性变化的电场。
- 选取加在两个**D**形盒间的交变电压周期等于回旋周期。
- 调节电压位相，使得回旋粒子在穿过间隙时总被交变电场加速，直至粒子的回旋半径达到**D**形盒半径而获得很高能量，随后从**D**形盒中引出。

5. 磁约束等离子体

- **磁镜原理：**利用**带电粒子磁矩的守恒性**，可以把带电粒子约束在一弱磁场区，其两端磁场较强，形成所谓“**磁镜**”。这种两端强、中间弱的磁场位形，可用两个电流方向相同的线圈产生，称为磁镜装置。



$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} = \text{const}, \text{如 } B \downarrow, \text{则 } v_{\perp} \downarrow, v_{\parallel} \uparrow \quad (\text{向中点接近时})$$

■ 磁镜装置可以对等离子体进行约束。将高温等离子体置于这种磁场中，等离子体的电子和原子核都将沿磁力线作螺旋运动，且大部分离子将被约束在这磁场。

$$\therefore \frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \theta / B_0 = \frac{1}{2} m v^2 / B_m$$

$$\therefore \sin^2 \theta_m = \frac{B_0}{B_m} = \frac{1}{R_{mi}},$$

θ_m 是临界投掷角，只有投掷角大于 θ_m 的粒子被捕获。 R_{mi} 称为磁镜比， B_0 、 B_m 分别是最弱和最强的磁场。

■ 从磁矩守恒、速率守恒在中点处粒子平行于磁场的速度分量最大，而垂直的分量最小；越过中点向左或右运动，磁感应强度增大，则垂直于磁场的速度分量增大，而平行分量减小；当达某一点（镜点）时，某些粒子平行于磁场的速度分量降至零，粒子不能继续向磁镜外运动。受磁压力的作用，粒子作反向螺旋运动，从而使得粒子在磁场中来回运动而不能逃出磁场。如地球周围存在的“辐射带”——又称“范阿伦辐射带”。

6. 托卡马克

托卡马克是“磁线圈圆环室”的俄文缩写，又称环流器。

这是一个类似螺绕环的装置，由封闭环形磁场构成的“环形容器”（见图1），可用来约束等离子体。

再将这个整个带有等离子体的圆环室作为一个大型变压器的**次级线圈**。当变压器通电后，等离子体内将有很大的电流，造成绕环轴的圆型磁场(见图2) $B \propto r$ ，于是，靠环壁的带电粒子受**磁压效应**向环轴集中，达到磁悬浮约束等离子体的目的。

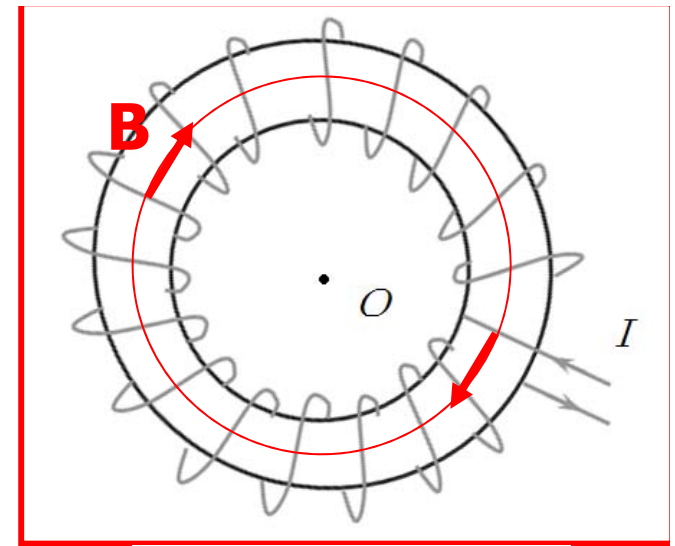


图1. 环流器

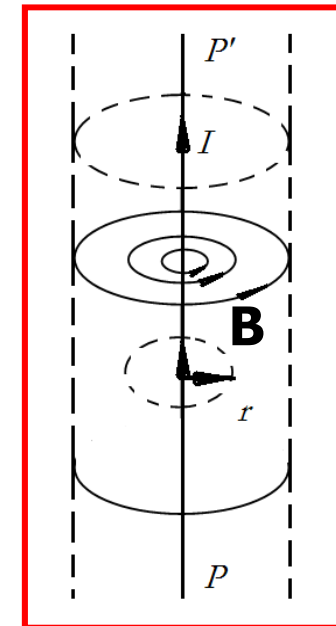
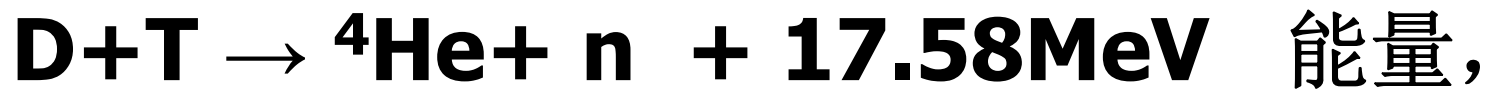


图2. 绕环轴磁场

当环内等离子体中含大量氘（**D**）、氚（**T**）离子，且当等离子体温度达到或高于**10⁸K**时，才能发生聚变反应：



释放出大量核能，又称热核聚变反应。

为使这反应能持续进行，还必须使维持的时间 **τ** 与离子的数密度 **n** 达到

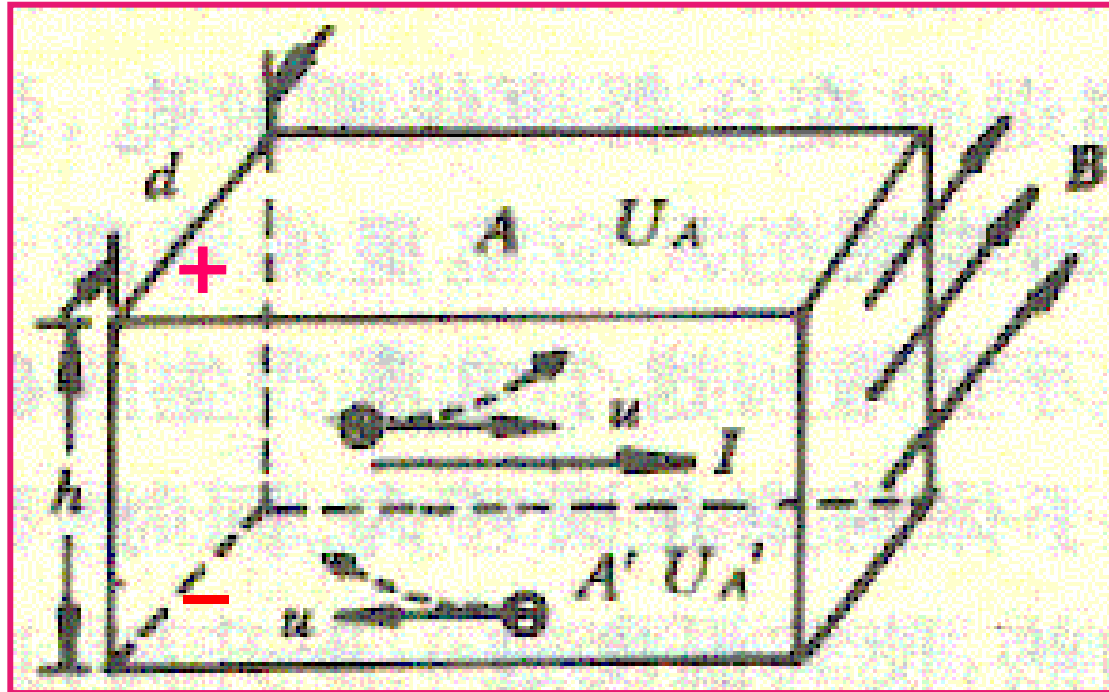
$$n\tau > \mathbf{3 \times 10^{20} m^{-3} \cdot s}, \text{ 称为} \textbf{劳逊条件}。$$



合肥“人造小太阳”装置—**EAST**

7. 霍尔效应

载流导体外加磁场，载流导体内载流子在外磁场中受洛伦兹力作用而发生偏转。如图示，长方形载流导体外加磁场，由于载流子在外磁场中发生偏转而使得在与电流 I 和外磁场 B 垂直的上、下底面之间存在电势差。



- 上下底出现电势差 $U=Eh$ 。只有当洛伦兹力与电力平衡时，载流子不再偏转。此时， $Eq=qvB$ ，又 $I=hdv_nq$ ，

- 故：

$$U = \frac{IB}{nqd} = K \frac{IB}{d}, \quad K \text{ 称霍尔系数, } K=1/nq。$$

- 给定 I 、 B 、 d ，测 U ，可得 K ，即得 nq 。若 q 已知，可得载流子浓度 n 。
- 测 U ，由上板为正还是负，可判定载流子带正电荷还是负电荷。
- 已知材料的 K 、 d 及 I ，测 U 可得磁场，是测磁场的常用法。
- 用其原理，可设计磁流体发电！