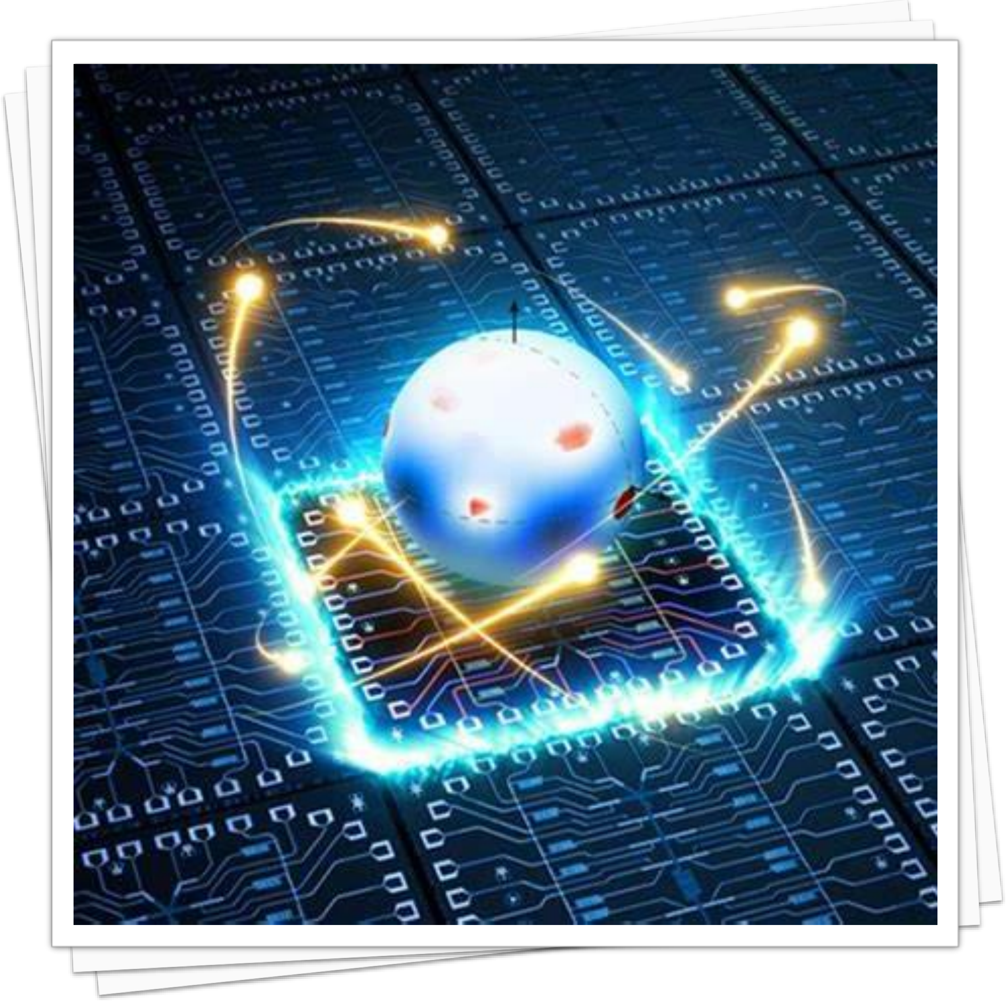


两态系统和量子比特

量子比特

Rabi振荡

混合态

- 18:05:25

双态系统的波函数

- 二维Hilbert空间是最简单的非平庸空间
- 基矢

$$|0\rangle, \qquad |1\rangle$$

- 任意态矢量均可表示为

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \sim \psi = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

- 整体常数因子可去除，

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}, \qquad a, b \in [0,1], \qquad a^2 + b^2 = 1$$

- 用角度参数表示

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\phi} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \phi \in [0, 2\pi)$$

把量子态映射到半个球面。赤道线对应同一个物理状态。

- 把量子态映射到整个球面，

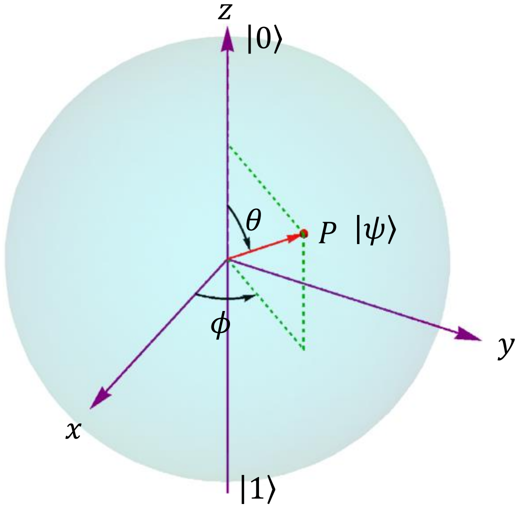
$$\psi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, \pi], \qquad \phi \in [0,2\pi)$$

Bloch球

- 任意二能级态

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+z}{2}} \\ \frac{x+iy}{\sqrt{2(1+z)}} \end{pmatrix}$$

$$\theta \in [0,\pi], \qquad \phi \in [0,2\pi), \qquad x^2+y^2+z^2=1$$



对应到球面上的一个点

- 相差整体相因子的所有波函数，对应到同一个点，代表同一个物理状态
- 注意北极点对应态矢$|0\rangle$，南极点对应态矢$|1\rangle$

- 二能级系统的波函数可以存储信息，称为一个量子比特(qubit)

量子比特

- 经典比特（bit）

①用一个可处于完全2个不同的状态的系统实现

②两个状态用二进制数0,1表示

③可能的单比特操作（逻辑门）：恒等Id，非NOT

- 量子比特（qubit）

❶用一个2能级体系实现

❷状态是2维空间的矢量，标准基为

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

任意一个态矢都可以用基矢展开，

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$\propto \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}$$

❸量子比特的操纵：么正变换，单量子比特门

对 比

- 传统的bit只有0, 1两种状态
- 量子比特的状态由连续变化的实参数(θ, ϕ)描述

- 单个量子比特可以存储无穷多的信息？

并非完全如此：

  - 获取单个量子比特的信息，需要测量
  - 每次测量只能得到1个经典比特的信息，$\sigma_n = +1, -1$
  - 为了得到α, β，需要无穷多次测量

量子比特的实现

① 量子点（quantum dot）中的电子自旋$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

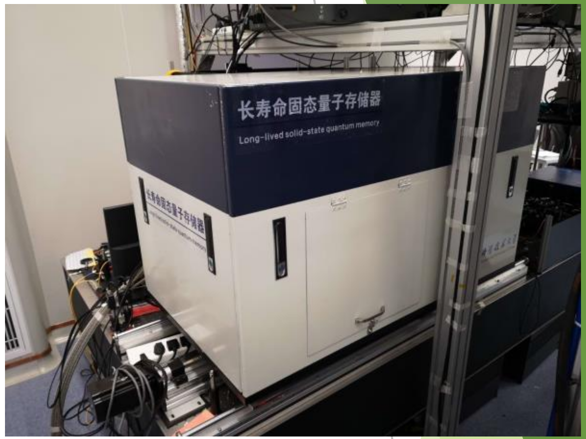
② 核磁共振（NMR）中的核自旋$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

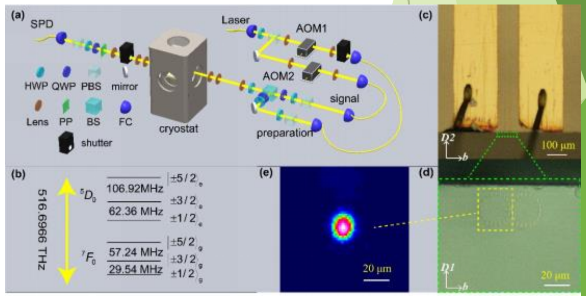
③ 双阱系统（double well）中粒子位置$\{|\text{left}\rangle, |\text{right}\rangle\}$

④ 激光（或微波射频）驱动单原子的态$\{|E_1\rangle, |E_2\rangle\}$

⑤ 超导回路（superconducting circuit, flux qubit）中的电流方向$\{|\circlearrowleft\rangle, |\circlearrowright\rangle\}$

⑥ 光子的偏振$\{|\circlearrowleft\rangle, |\circlearrowright\rangle\}$或$\{|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle\}$





图片来源：科大新闻网

量子比特的实现，需要一个二态系统满足以下条件，

（1）系统可以制备在任意指定的态(输入)

例如基态$|0\rangle$，或者一个叠加态

（2）可以把系统从一个任意状态，变换到另外一个任意状态（计算）

么正变换，量子逻辑门，用磁场或激光控制系统的演化

（3）存在可测物理量，有2个特征值（输出）

例如测量σ_z，有两个本征值± 1

• 18:05:26

量子比特的测量

- 如果我们以同样方式制备大量相同的量子态$|\psi\rangle$，那么量子比特的参数θ,ϕ是可测量的
- 测量三个物理量$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+z}{2}} \\ \frac{x+iy}{\sqrt{2(1+z)}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle = \sin\theta\cos\phi = x$$

$$\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle = \sin\theta\sin\phi = y$$

$$\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = \cos\theta = z$$

重复多次测量后取平均，可得到x,y,z，即一个量子比特的高精度状态

量子比特的幺正变换

- 进行量子信息处理需要操纵量子比特
- 操纵量子比特即对量子态进行变换

$$\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \qquad |\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$$

- 量子力学中的状态变换需要保证几率不变，即态矢的模长不变：

$$\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \qquad \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle$$

- 保矢量模长不变⟺保矢量内积不变

$$\left.\begin{array}{r} |\psi\rangle = c_1|a\rangle + c_2|b\rangle \\ \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow c_1^* c_2\langle a|b\rangle + c_1 c_2^*\langle b|a\rangle = c_1^* c_2\langle a'|b'\rangle + c_1 c_2^*\langle b'|a'\rangle$$

$$\Rightarrow \forall|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}, \qquad \langle a|b\rangle = \langle a'|b'\rangle$$

- 复Hilbert空间保内积的变换，是幺正变换

$$\langle a|b\rangle = \langle a'|b'\rangle = \left\langle a\middle|\hat{U}^\dagger\hat{U}\middle|b\right\rangle \Leftrightarrow \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbf{1}$$

- 时间演化算符是幺正变换

$$\hat{U}(t_2, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot(t_2 - t_1)}$$

- 对单量子比特，幺正变换即Bloch球的转动：

操纵单个量子比特，等价于三维空间的刚体转动

单量子比特门

- Hadamard门

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x+\sigma_z)$$
$$=ie^{-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2\sqrt{2}}}$$

- 相移门

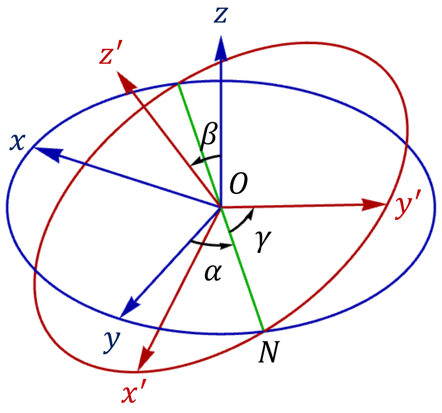
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\delta}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}e^{-i\frac{\delta}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\delta}{2}}\end{pmatrix}=e^{-i\delta\frac{\sigma_z}{2}}=u_z(\delta)$$

- 转动Bloch球，可实现任意量子态：

$$u_z\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)Hu_z(\theta)|0\rangle$$
$$=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle\right)$$

- 球体的转动，即刚体转动（SO(3)），可用欧拉转动实现

$$R(\alpha,\beta,\gamma)\stackrel{\text{def}}{=}R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$



- Bloch球的转动$R(\alpha,\beta,\gamma)$，对应量子态的转动

$$u(\alpha,\beta,\gamma)\stackrel{\text{def}}{=}u_z(\alpha)u_y(\beta)u_z(\gamma)$$

- U(2)的分解

$$u\equiv e^{-i\left(\delta\frac{\sigma_0}{2}+\psi_1\frac{\sigma_1}{2}+\psi_2\frac{\sigma_2}{2}+\psi_3\frac{\sigma_3}{2}\right)}\equiv e^{-i\frac{\delta}{2}}u(\alpha,\beta,\gamma)$$

除了一个没有物理效应的整体相因子，需要三个参数描述（**SU(2)**）

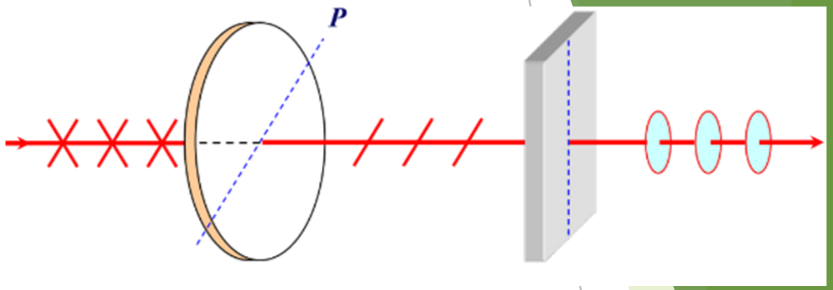
- Hadamard门+相移门，能实现任意单量子比特门

$$u\equiv u_z(a)Hu_z(b)Hu_z(c)$$

光子偏振态的变换

- 光子的偏振态

$$|\leftrightarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\updownarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$|\psi\rangle = \alpha|\leftrightarrow\rangle + \beta|\updownarrow\rangle$$



- 光子可用于实现量子比特，可用于量子通讯
- 快轴与x轴夹角为θ的½波片，琼斯矩阵为

$$P_{1/2}(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

- 快轴与x轴夹角为θ的¼波片，琼斯矩阵为

$$P_{1/4}(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\sin\theta\cos\theta\\ (1-i)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + i\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

- 量子比特的任意幺正变换可分解为

$$u = P_{1/4}(a)P_{1/2}(b)P_{1/4}(c) = \begin{pmatrix}\xi & \eta\\ -\eta^* & \xi^*\end{pmatrix}$$
$$\xi = \{\cos[2(a-b)] + \cos[2(b-c)]\} + i\{\cos 2b - \cos[2(a-b+c)]\}$$
$$\eta = \{-\sin[2(a-b)] - \sin[2(b-c)]\} + i\{\sin 2b - \sin[2(a-b+c)]\}$$

- 可见½波片与¼波片能实现任意单量子比特门

- 18:05:28

Rabi振荡：模型

- 原子的二能级体系可以作为qubit
- 可用光场改变原子的状态

- 系统的哈密顿量

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \\
&= \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -g_{ab}E(t) \\ -g_{ab}^{*}E(t) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_a & -g_{ab}E(t) \\ -g_{ab}^{*}E(t) & E_b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

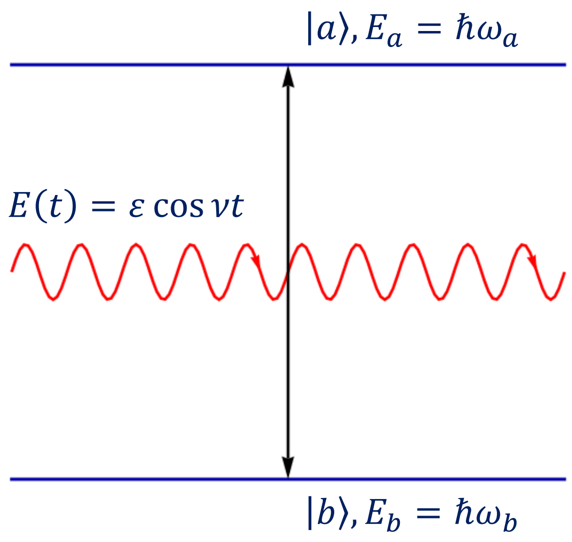
其中

$$g_{ab} = e\langle a|x|b\rangle$$

是电偶极矩阵元， $\hat{H}_1$是原子与辐射场的偶极相互作用。

- 用单频光场与原子作用，

$$E(t) = \varepsilon \cos \nu t$$



Rabi振荡：相互作用表象的薛定谔方程（一）

- 薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}c_a(t)\\c_b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hbar\omega_a & -g_{ab}E(t)\\-g_{ab}^*E(t) & \hbar\omega_b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_a(t)\\c_b(t)\end{pmatrix}$$

- 相互作用表象中的薛定谔方程

令

$$\begin{pmatrix}c_a(t)\\c_b(t)\end{pmatrix}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a(t)e^{-i\omega_a t}\\\tilde{c}_b(t)e^{-i\omega_b t}\end{pmatrix}$$

代入薛定谔方程得

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{\tilde{c}}_a(t)e^{-i\omega_a t}\\\dot{\tilde{c}}_b(t)e^{-i\omega_b t}\end{pmatrix}+i\hbar\begin{pmatrix}-i\omega_a\tilde{c}_a(t)e^{-i\omega_a t}\\-i\omega_b\tilde{c}_b(t)e^{-i\omega_b t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hbar\omega_a c_a(t)\\\hbar\omega_b c_b(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -g_{ab}E(t)\\-g_{ab}^*E(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_a(t)\\c_b(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e^{-i\omega_a t} & 0\\0 & e^{-i\omega_b t}\end{pmatrix}i\hbar\begin{pmatrix}\dot{\tilde{c}}_a(t)\\\dot{\tilde{c}}_b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -g_{ab}E(t)\\-g_{ab}^*E(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\omega_a t} & 0\\0 & e^{-i\omega_b t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a(t)\\\tilde{c}_b(t)\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a(t)\\\tilde{c}_b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -g_{ab}E(t)e^{i\omega t}\\-g_{ab}^*E(t)e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a(t)\\\tilde{c}_b(t)\end{pmatrix}$$

$$\omega\stackrel{\text{def}}{=}\omega_a-\omega_b$$

Rabi振荡：相互作用表象的薛定谔方程（二）

- 相互作用表象的薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a(t)\\ \tilde{c}_b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -g_{ab}E(t)e^{i\omega t}\\ -g_{ab}^*E(t)e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a(t)\\ \tilde{c}_b(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde{c}}_a\\ \dot{\tilde{c}}_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & i\dfrac{g_{ab}\varepsilon}{\hbar}\cos\nu t\, e^{i\omega t}\\ i\dfrac{g_{ab}^*\varepsilon}{\hbar}\cos\nu t\, e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a\\ \tilde{c}_b\end{pmatrix}$$

- 电偶极矩阵元的相位

$$g_{ab}\overset{\text{def}}{=}|g_{ab}|e^{-i\phi}$$

- 拉比频率

$$\Omega_R\overset{\text{def}}{=}\frac{|g_{ab}|\varepsilon}{\hbar}$$

- 薛定谔方程成为

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde{c}}_a\\ \dot{\tilde{c}}_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & i\Omega_R\cos\nu t\, e^{i(\omega t-\phi)}\\ i\Omega_R\cos\nu t\, e^{-i(\omega t-\phi)} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a\\ \tilde{c}_b\end{pmatrix}$$

Rabi振荡：化简薛定谔方程

- 相互作用表象的薛定谔方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_R \cos\nu t\, e^{i(\omega t-\phi)} \\ i\Omega_R \cos\nu t\, e^{-i(\omega t-\phi)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(t) \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}$$

- 两边对时间求偏导数，化简得

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{c}}_a \\ \ddot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \dot{\Lambda} \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \dot{\Lambda}\Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} + \Lambda^2 \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^2 = -\Omega_R^2 \cos^2 \nu t\, \mathbf{1}_{2\times 2}$$

$$\Lambda^{-1} = -\frac{1}{\Omega_R^2 \cos^2 \nu t}\Lambda = \frac{1}{\Omega_R \cos\nu t} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i(\omega t-\phi)} \\ -ie^{-i(\omega t-\phi)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & (-\omega\cos\nu t - i\nu\sin\nu t)\Omega_R e^{i(\omega t-\phi)} \\ (\omega\cos\nu t - i\nu\sin\nu t)\Omega_R e^{-i(\omega t-\phi)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} = \frac{1}{\cos\nu t} \begin{pmatrix} -\nu\sin\nu t + i\omega\cos\nu t & 0 \\ 0 & -\nu\sin\nu t - i\omega\cos\nu t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu\tan\nu t + i\omega & 0 \\ 0 & -\nu\tan\nu t - i\omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{c}}_a = (-\nu\tan\nu t + i\omega)\dot{\tilde{c}}_a - \Omega_R^2\cos^2\nu t\, \tilde{c}_a \\ \ddot{\tilde{c}}_b = (-\nu\tan\nu t - i\omega)\dot{\tilde{c}}_b - \Omega_R^2\cos^2\nu t\, \tilde{c}_b \end{cases}$$

Rabi振荡：Rotating Wave Approximation

- 薛定谔方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_R \cos\nu t\, e^{i(\omega t-\phi)} \\ i\Omega_R \cos\nu t\, e^{-i(\omega t-\phi)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}\Omega_R\left(e^{i[(\omega+\nu)t-\phi]} + e^{i[(\omega-\nu)t-\phi]}\right) \\ \frac{i}{2}\Omega_R\left(e^{-i[(\omega+\nu)t-\phi]} + e^{-i[(\omega-\nu)t-\phi]}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}$$

- 旋转波近似：舍弃高频项$e^{i[(\omega+\nu)t-\phi]}, e^{-i[(\omega+\nu)t-\phi]}$（平均效果约为0）

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}, \qquad \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} i\frac{\Omega_R}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i[(\omega-\nu)t-\phi]} \\ e^{-i[(\omega-\nu)t-\phi]} & 0 \end{pmatrix}$$

- 求导得

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{c}}_a \\ \ddot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} + \Lambda^2 \begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^2 = -\frac{\Omega_R^2}{4}\mathbf{1}_{2\times 2}, \qquad \Lambda^{-1} = -i\frac{2}{\Omega_R}\begin{pmatrix} 0 & e^{i[(\omega-\nu)t-\phi]} \\ e^{-i[(\omega-\nu)t-\phi]} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Lambda} = (\omega-\nu)\frac{\Omega_R}{2}\begin{pmatrix} 0 & -e^{i[(\omega-\nu)t-\phi]} \\ e^{-i[(\omega-\nu)t-\phi]} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} = -i(\omega-\nu)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{c}}_a \\ \ddot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} = i(\omega-\nu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}_a \\ \dot{\tilde{c}}_b \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\Omega_R^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{c}_a \\ \tilde{c}_b \end{pmatrix}$$

Rabi振荡：旋转波近似解

- 微分方程

$$\begin{pmatrix}\ddot{\tilde{c}}_a\\ \ddot{\tilde{c}}_b\end{pmatrix}=i(\omega-\nu)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\tilde{c}}_a\\ \dot{\tilde{c}}_b\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\Omega_R^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_a\\ \tilde{c}_b\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}\ddot{\tilde{c}}_a=i(\omega-\nu)\dot{\tilde{c}}_a-\frac{1}{4}\Omega_R^2\tilde{c}_a\\ \ddot{\tilde{c}}_b=-i(\omega-\nu)\dot{\tilde{c}}_b-\frac{1}{4}\Omega_R^2\tilde{c}_b\end{cases}$$

- 特征方程

$$\lambda^2-i(\omega-\nu)\lambda+\frac{1}{4}\Omega_R^2=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\left[i(\omega-\nu)\pm\sqrt{-(\omega-\nu)^2-\Omega_R^2}\right]=\frac{i}{2}[(\omega-\nu)\pm\Omega]$$

$$\lambda^2+i(\omega-\nu)\lambda+\frac{1}{4}\Omega_R^2=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\left[-i(\omega-\nu)\pm\sqrt{-(\omega-\nu)^2-\Omega_R^2}\right]=\frac{i}{2}[-(\omega-\nu)\pm\Omega]$$

$$\Omega\overset{\text{def}}{=}\sqrt{(\omega-\nu)^2+\Omega_R^2}=\sqrt{(\omega-\nu)^2+\frac{|g_{ab}|^2\varepsilon^2}{\hbar^2}}$$

- 所以微分方程的通解是

$$\begin{cases}\tilde{c}_a(t)=\left(a_1e^{\frac{i}{2}\Omega t}+a_2e^{-\frac{i}{2}\Omega t}\right)e^{\frac{i}{2}(\omega-\nu)t}\\ \tilde{c}_b(t)=\left(b_1e^{\frac{i}{2}\Omega t}+b_2e^{-\frac{i}{2}\Omega t}\right)e^{-\frac{i}{2}(\omega-\nu)t}\end{cases}$$

- 用初值确定积分常数，得

$$\begin{cases}\tilde{c}_a(t)=\left\{\left[\cos\frac{\Omega t}{2}-i\frac{\omega-\nu}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\tilde{c}_a(0)+\left[i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{-i\phi}\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\tilde{c}_b(0)\right\}e^{\frac{i}{2}(\omega-\nu)t}\\ \tilde{c}_b(t)=\left\{\left[i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\tilde{c}_a(0)+\left[\cos\frac{\Omega t}{2}+i\frac{\omega-\nu}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\tilde{c}_b(0)\right\}e^{-\frac{i}{2}(\omega-\nu)t}\end{cases}$$

Rabi振荡：布居反转

- 如果取初条件是

$$\tilde{c}_a(0)=1,\qquad \tilde{c}_b(0)=0$$

$$\begin{cases} \tilde{c}_a(t)=\left(\cos\dfrac{\Omega t}{2}-i\dfrac{\omega-\nu}{\Omega}\sin\dfrac{\Omega t}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(\omega-\nu)t} \\ \tilde{c}_b(t)=i\dfrac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}\sin\dfrac{\Omega t}{2}\,e^{-\frac{i}{2}(\omega-\nu)t} \end{cases}$$

- 则处于两个能级的概率分别是

$$P_a(t)=|c_a|^2=|\tilde{c}_a|^2=\cos^2\frac{\Omega t}{2}+\frac{(\omega-\nu)^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

$$P_b(t)=|c_b|^2=|\tilde{c}_b|^2=\frac{\Omega_R^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

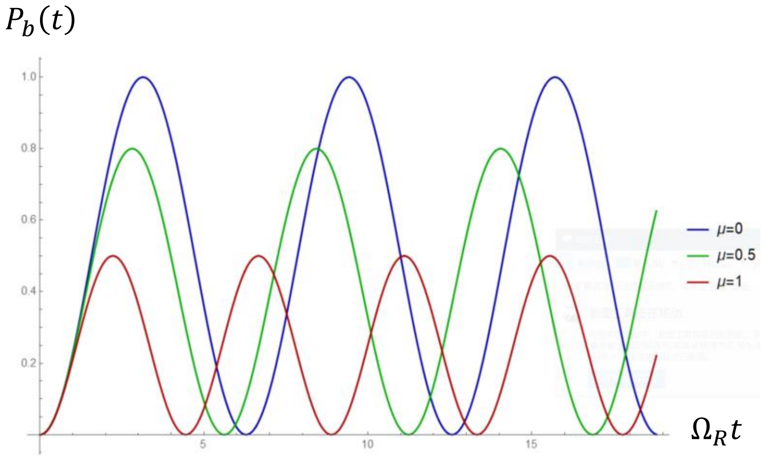
$$P_b=\frac{1}{1+\mu^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{2}\Omega_R t\right),\qquad \mu\overset{\text{def}}{=}\frac{\omega-\nu}{\Omega_R}$$

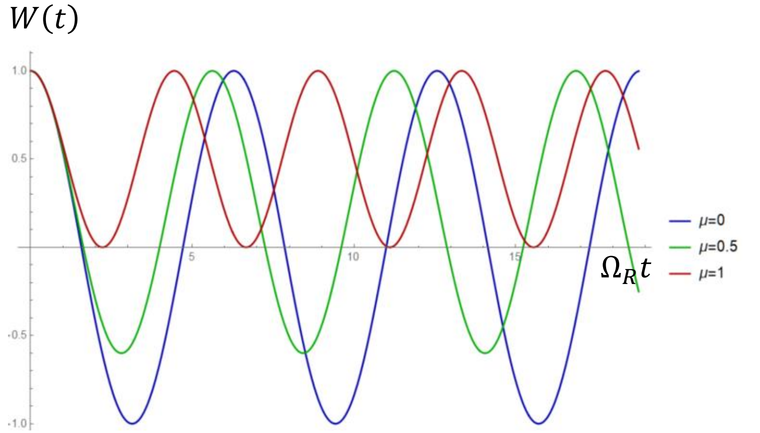
- 布居反转数

$$W(t)\overset{\text{def}}{=}P_a(t)-P_b(t)=\cos^2\frac{\Omega t}{2}+\frac{(\omega-\nu)^2-\Omega_R^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

- 共振时$\omega=\nu$，布居反转数是

$$W(t)\overset{\text{def}}{=}P_a(t)-P_b(t)=\cos^2\frac{\Omega_R t}{2}-\sin^2\frac{\Omega_R t}{2}=\cos\Omega_R t$$





混合态和密度矩阵

- 确定性的系统用态矢量$|\psi\rangle$描述，称为纯态(pure state)
- 当信息不完全时（子系统、热学过程），只有概率性的描述，称为混合态（mixed state）

$$\{p_1,|\psi_1\rangle;p_2,|\psi_2\rangle;\cdots\},\qquad \sum_j p_j=1$$

- 混合态下物理量的期望值

$$\langle A\rangle=\sum_j p_j\langle\psi_j|\hat{A}|\psi_j\rangle=\sum_j p_j\,\mathrm{Tr}\left(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\hat{A}\right)=\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)\hat{A}\right]$$

- 密度矩阵（density matrix）

$$\hat{\rho}\overset{\text{def}}{=}\sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{A}\right)$$

- 纯态的密度矩阵

$$\hat{\rho}=|\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{A}\right)=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

- 纯态和混态都可以用密度矩阵描述

密度矩阵的性质

- 厄米

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \Rightarrow \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

- 半正定

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}, \langle\varphi|\hat{\rho}|\varphi\rangle = \sum_j p_j \langle\varphi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle = \sum_j p_j \left|\langle\varphi|\psi_j\rangle\right|^2 \geq 0$$

- 迹

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = \mathrm{Tr}\left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right) = \sum_j p_j \langle\psi_j|\psi_j\rangle = \sum_j p_j = 1$$

- 特征值

❶厄米⇒特征值$\{\lambda_k | k = 1,2,3,\cdots\}$是实数

❷半正定⇒ $\lambda_k \geq 0,\ k = 1,2,3,\cdots$

❸迹为1⇒$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = 1$

- 特征矢

$$|k\rangle = \lambda_k |k\rangle, \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

❶正交归一：$\langle j|k\rangle = \delta_{jk}$

❷完备：$\sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbf{1}$

❸密度矩阵的谱分解：

$$\hat{\rho} = \sum_n \lambda_n |n\rangle\langle n|$$

- 纯态的密度矩阵是投影矩阵

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \rho^2 = \rho$$

- 混态的密度矩阵不是投影矩阵

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k |j\rangle\langle j|k\rangle\langle k| = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \delta_{jk} |j\rangle\langle k| = \sum_j \lambda_j^2 |j\rangle\langle j|$$

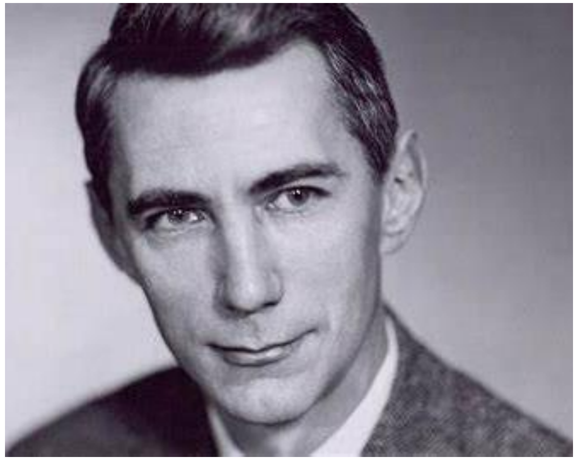
$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 = \sum_j \lambda_j^2 \leq 1$$

等号仅在纯态成立。

混合态的熵

- 经典统计的Shannon entropy

$$S = -\sum_j p_j \log p_j$$



- 量子统计的von Neumann entropy

$$S = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$$
$$= -\sum_j \lambda_j \log \lambda_j$$

- 18:05:32

密度矩阵的演化

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_j p_j \left\{ \left(\frac{d}{dt} |\psi_j\rangle \right) \langle\psi_j| + |\psi_j\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle\psi_j| \right) \right\}$$

$$= \sum_j p_j \left\{ \left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\psi_j\rangle \right) \langle\psi_j| + |\psi_j\rangle \left(\frac{1}{-i\hbar} \langle\psi_j| \hat{H} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \sum_j p_j \{ \hat{H} |\psi_j\rangle\langle\psi_j| - |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \hat{H} \} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{H}\rho - \rho\hat{H})$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} [\rho, \hat{H}]}$$

例：子系统的密度矩阵

- 设封闭的复合系统A+B是纯态，

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$\hat{\rho}_{AB} = |\psi\rangle_{AB\,AB}\langle\psi| = \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01| + \frac{1}{2}|01\rangle\langle 10| + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 01| + \frac{1}{2}|10\rangle\langle 10|$$

- 子系统A的可观测量Q，期望值是

$$\hat{Q} = \hat{Q}_A \otimes \hat{I}_B$$

$$\langle Q\rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB}\hat{Q}\right) = \frac{1}{2}\langle 0|\hat{Q}_A|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 1|\hat{Q}_A|1\rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|\hat{Q}_A + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|\hat{Q}_A\right)$$

- 因此子系统A的约化密度矩阵是

$$\hat{\rho}_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$$

$$\langle Q_A\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_A\hat{Q}_A\right)$$

- 定义偏迹(partial trace)

$$X = \left(X_{j,k;j',k'}\right)$$

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}_B(X), \qquad Y_{jj'} \equiv \sum_k X_{j,k;j',k}$$

- 子系统与总系统密度矩阵的关系：

$$\boxed{\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB})}$$

- 可判断子系统是混合态：

$$\hat{\rho}_A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}_A^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \neq \hat{\rho}_A$$

二维混合态密度矩阵

- 二维Hilbert空间的矩阵展开

$$\rho \equiv c_0 \mathbf{1}_{2\times 2} + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3, \qquad c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

- 厄米

$$\rho^\dagger = \rho$$
$$c_0 \mathbf{1}_{2\times 2} + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 = c_0^* \mathbf{1}_{2\times 2} + c_1^*\sigma_1 + c_2^*\sigma_2 + c_3^*\sigma_3$$
$$\Rightarrow c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

- 迹1

$$\operatorname{Tr}\rho = 2c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}$$
$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{2\times 2} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})$$

- $\operatorname{Tr}\rho^2 \le 1$

$$\rho^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{1}_{2\times 2} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \frac{1}{4}\{(1+\vec{p}^2)\mathbf{1}_{2\times 2} + 2\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\}$$
$$\operatorname{Tr}\rho^2 = \frac{1}{2}(1+\vec{p}^2) \le 1 \Rightarrow \vec{p}^2 \le 1$$

- 所以混合态的密度矩阵是

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{2\times 2} + p\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$
$$|\vec{n}| = 1, \qquad 0 \le p \le 1$$

- 18:05:33

混合态量子比特和Bloch球

- 纯态

$$\rho^2 = \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\{(1+\vec{p}^2)\mathbf{1}_{2\times 2} + 2\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{2\times 2} + p\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$

$$\Rightarrow p = 1$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{2\times 2} + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$

- 纯态量子比特

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+z}{2}} \\ \frac{x+iy}{\sqrt{2(1+z)}} \end{pmatrix}$$

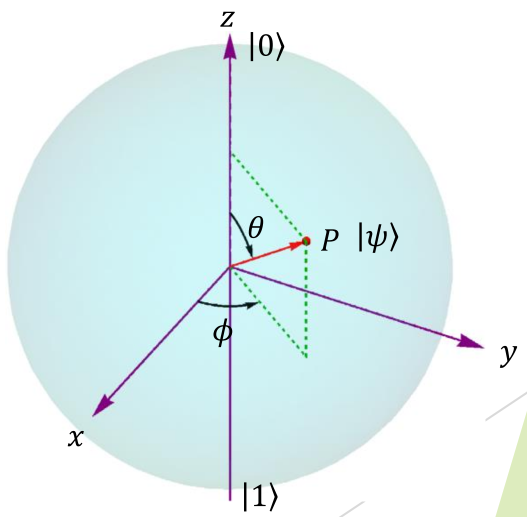
$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \frac{1+z}{2} & \frac{1}{2}(x-iy) \\ \frac{1}{2}(x+iy) & \frac{x^2+y^2}{2(1+z)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{2\times 2} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}), \qquad |\vec{r}| = 1$$

- $|\vec{r}| < 1$时正好是混合态的密度矩阵
- 因此，可以用Bloch球的

  球面表示纯态量子比特

  球体内部表示混合态量子比特
- 球心是混乱程度最大的状态



- 18:05:33