



第五章 静磁场中的磁介质

§ 5.1 磁场对电流的作用

§ 5.2 磁介质及其磁化强度 \mathbf{M}

§ 5.3 磁介质中静磁场的基本定理

§ 5.4 介质的磁化规律

§ 5.5 边值关系和唯一性定理

* § 5.6 磁像法

§ 5.7 磁路定理及其应用

* § 5.8 磁荷法

§ 5.1 磁场对电流的作用

一. 磁场对电流的力和力矩

研究磁场对物质的作用时，实际上是研究磁场对物质内部电流的作用。根据第四章4.1节介绍的洛伦兹力公式和安培力公式，我们可求得外磁场 \mathbf{B} 对运动点电荷、线电流、面电流和体电流系统的作用力如下：


$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (5.1.2)$$

$$\mathbf{F} = \int_S^L \mathbf{i} \times \mathbf{B} dS, \quad (5.1.3)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV. \quad (5.1.4)$$

从安培力公式出发还可以推出电流在外磁场中所受力矩的表达式，结果为：


$$\mathbf{L} = \oint_L \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.1.5)$$

$$\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{r} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{B}) dS \quad (5.1.6)$$

$$\mathbf{L} = \iiint_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \quad (5.1.7)$$

应用上述公式，应先求出外磁场 \mathbf{B} 。有时候，由外磁场和受作用电流的磁场合成的总磁场 \mathbf{B}_t 容易计算。在这种情况下，应从 \mathbf{B}_t 中减去受作用电流的贡献 \mathbf{B}_1 才得到外磁场 \mathbf{B} ，即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t - \mathbf{B}_1. \quad (5.1.8)$$

与静电场问题类似处理，将 \mathbf{B}_1 代之以电流元自身产生的磁感应强度即可，这不会影响最终结果。体电流元和面电流元在其附近产生的磁感应强度易于求得，结果如下：

(1) 体电流元在其附近产生的磁感应强度为零，这是由于 $dV \sim r^3$ ， $B_1 \sim dV/r^2 \sim r$ ， $r \rightarrow 0$ 则 $B_1 \rightarrow 0$ 。

(2) 面电流元在其两侧产生的磁感应强度存在间断，大小为 $\mu_0 i / 2$ ，方向相反并与面元相切（见例**4.7**）；可以预计， \mathbf{B}_t 也存在同样性质的间断，以至按式**(5.1.8)**算出的 \mathbf{B} 不会有间断。

应当指出，上述分析不能推广到**线电流元**。可以证明，一个闭合线电流中的任一小段线电流所受的内力趋于无穷大；在需要分析这种内力时，我们**必须放弃线电流近似**，计入通电导线有限截面尺寸的效应。

二、计算举例

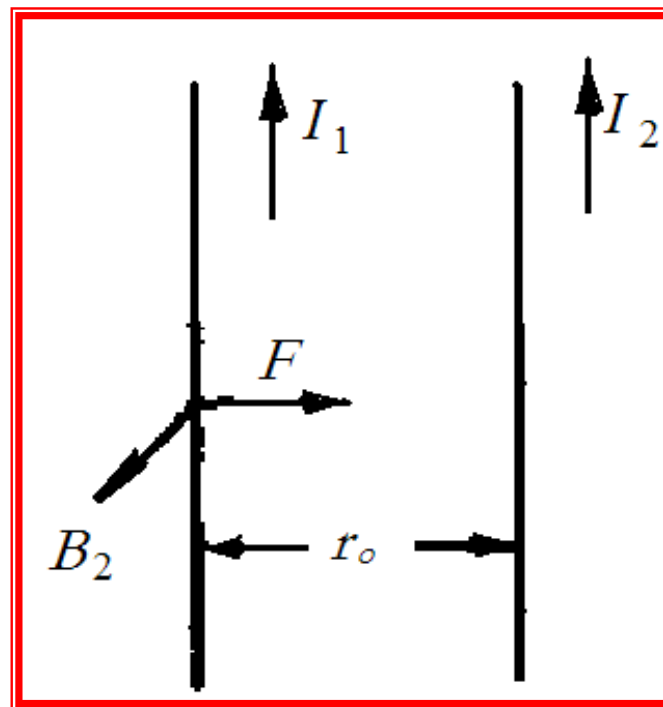
[例5.1] 有两根**无限长**平行直载流导线，电流强度为 I_1 、 I_2 ，相距为 r_0 ，求其中一根单位长度受的力。

[解] 由例4.1的结果，导线2在导线1处产生的磁感应强度为

$B_2 = \mu_0 I_2 / (2\pi r_0)$ ，方向如右图所示。

再由式（5.1.2）求得导线1单位长度受力为：

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0} = 2 \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{r_0}.$$



当 I_1 和 I_2 同向时，该力为引力。1948年第九届国际计量大会直接从上式出发来定义电流强度的单位“安培”。

[例5.2] 求一电流强度为 I 的载流线圈在均匀磁场 \mathbf{B} 中所受的力和力矩。

[解] 由式 (5.1.2) (用 $d\mathbf{r}$ 代 $d\mathbf{l}$) 得:

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \left(\oint d\mathbf{r} \right) \times I\mathbf{B} = 0,$$

即载流线圈在均匀磁场中受力为零。利用关系式:

$$\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})$$

和式 (5.1.5), 可求得:

$$\mathbf{L} = \frac{I}{2} \oint (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} + \frac{I}{2} \oint d[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] - I\mathbf{B} \oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

上式右边的积分项在例4.2中曾碰到过。第一项为 $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$, \mathbf{m} 为载流线圈的磁矩；第二项为全微分的闭路积分，其值为零；第三项由于 $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d(r^2/2)$ ，其值也为零。这样，载流线圈在均匀磁场中受的力矩为：

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (5.1.9)$$

如果在非均匀外磁场中，只要线圈尺寸远小于磁场的非均匀尺度，则相对于线圈中心点而言，线圈所受的力矩仍由式（5.1.9）表示，不过线圈受力不再是零。

[例5.3] 求电流强度为 I 、单位长度匝数为 n 的无穷长螺线管单位表面受力。

[解] 由例4.6，无穷长螺线管在管内外沿轴向的 B_t 分别为 $\mu_0 n I$ 和 0。由例4.7，考虑到面电流密度为 $i = n I$ ，

则螺线管面元 ΔS 对内、外侧磁场的贡献为 $\pm \mu_0 n I / 2$ 。于是，对受作用面元 ΔS 而言，按式 (5.1.8) 算得的外磁场为 $\mu_0 n I / 2$ 。进一步可根据式 (5.1.3) 计算单位面积面元受力，结果为：

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{i \Delta S}{\Delta S} \frac{\mu_0 n I}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2.$$

该力的方向垂直于面元并指向螺线管外侧。

■ 类似于例4.6，若考虑螺线管存在一等效的轴向电流 I ，则该电流的面密度为 $i_{//} = I / (2\pi R)$ 。仿照上述步骤即按式 (5.1.8) 算得管面上的外磁场为 $B_{\perp} = \mu_0 I / (4\pi R)$ ，它与管面相切并与管轴垂直。因此，单位面积面元受一指向管轴的力，大小为：

$$i_{//} B_{\perp} = \mu_0 I^2 / (8\pi^2 R^2).$$

一般情况下，这力比上面指向螺线管外侧的力小得多，可忽略不计。

§ 5.2 磁介质及其磁化强度 \mathbf{M}

磁体具有吸引铁磁性物质的能力，并把这种能力定义为磁性。这里不仅磁体具有磁性，而且被吸引着的铁磁性物质也具有磁性。处于磁场中的其它物质都或多或少具有磁性，只是在多数情况下远不如铁磁性物质的磁性那样强。使物质具有磁性的物理过程叫做磁化，而一切能够磁化的物质叫做磁介质。

下面我们来分析磁介质磁化的定量描述、实验规律和微观机制。

一、磁化强度

根据安培分子电流假说，已磁化物质的磁性来源于物质内部有规则排列的分子电流，即分子磁矩。用 $\Sigma \mathbf{m}_{\text{分子}}$ 表示体积元 ΔV 中所有分子磁矩的矢量和，

则定义：

$$M = \frac{\sum m_{\text{分子}}}{\Delta V} \quad (5.2.1)$$

为磁化强度。磁化强度为矢量，其方向代表磁化的方向，其大小代表磁化的程度。在非磁化状态下，或分子固有磁矩为零，或分子磁矩的取向杂乱无章，以至 $\sum m_{\text{分子}} = 0$ 。于是， $M = 0$ 表示磁介质处于非磁化态。

二、磁化电流

在磁化状态下，由于分子电流的有序排列，磁介质中将出现宏观电流，称为磁化电流。其特点是：

1. 磁化电流的产生不伴随电荷的宏观位移。相反，凡伴随电荷的宏观位移的电流称为传导电流，例如载流导体中的电流；

2. 磁化电流可存在于一切磁介质（包括绝缘体和导体）中，不具有焦耳热效应；传导电流则只能存在于导体（包括半导体和电离气体）中，具有焦耳热效应。

■ 尽管两种电流在产生机制和热效应方面存在区别，但在激发磁场和受磁场作用方面却是完全等效的。

■ 既然磁化电流的出现是物质磁化的结果，它和磁化强度之间应该存在一定关系。为分析这种关系，我们引入分子平均磁矩 m_a ，其定义如下：

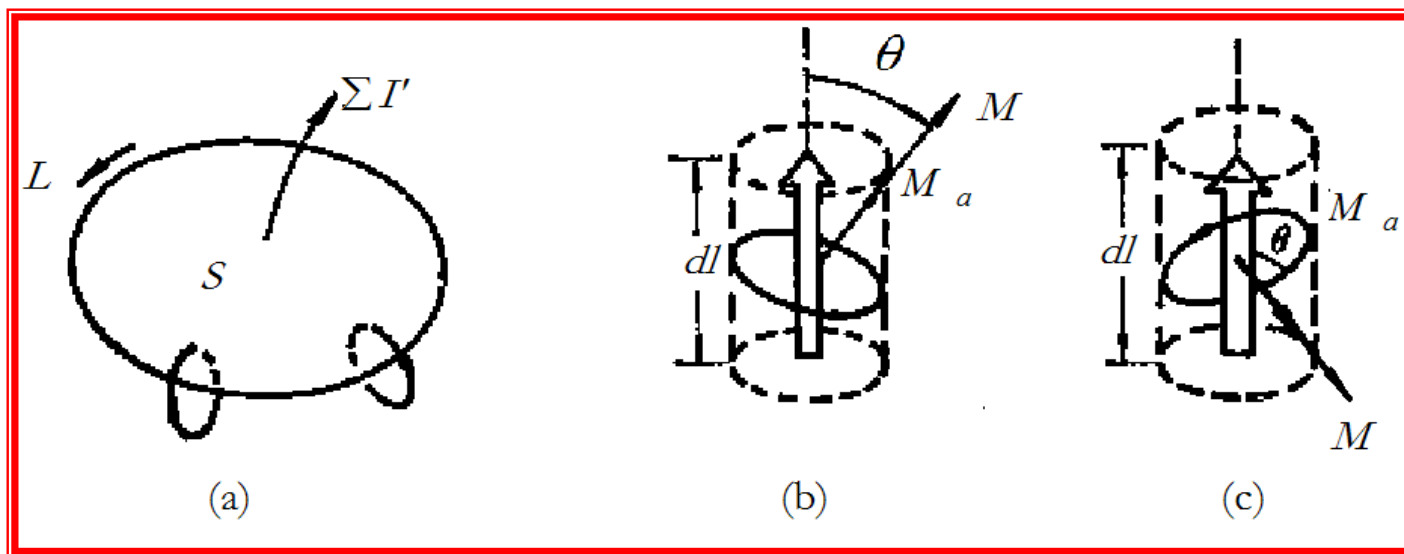
$$m_a = \frac{\Sigma m_{\text{分子}}}{n\Delta V}, \quad (5.2.2)$$

式中 n 为分子数密度。

这样，式（5.2.1）变成：
$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_a \quad (5.2.3)$$

进一步设 \mathbf{m}_a 由一等效分子电流所产生，其电流强度为 I_a ，面积矢量为 \mathbf{S}_a ，则：
$$\mathbf{m}_a = I_a \mathbf{S}_a \quad (5.2.4)$$

■ **研究 \mathbf{M} 的环量**。在以下分析中，假定 ΔV 中全部分子具有同一磁矩 \mathbf{m}_a ，考虑磁介质中任一**闭合回路 L** 和以它为周线的**曲面 S** ，通过 S 的总磁化电流设为 $\Sigma I'$ ，其正向与回路 L 的绕行方向满足右手定则（见下图（a））。



显然，只有那些从S内穿过并在S外闭合的分子电流才对 $\Sigma I'$ 有贡献；其它分子电流，或者来回穿过S，或者根本不与S相交，对 $\Sigma I'$ 的净贡献为零。

■ 考虑L上一段弧元 dl ，其方向沿回路绕行方向。设在 dl 处磁化强度 \mathbf{M} 与 dl 的夹角为 θ 。先分析 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 的情况。不难看出，对 $\Sigma I'$ 有贡献的分子的中心应位于前页的图 (b) 所示的圆柱体中，大小为：

$$\Delta \Sigma I' = I_a n S_a \cos \theta dl = n \mathbf{m}_a \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时（见前页图(c)），上式也成立，所得磁化电流为负。 \mathbf{M} 的环量为将上式沿L积分，得到它与穿过S的总磁化电流的关系：

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I' \quad (5.2.5)$$

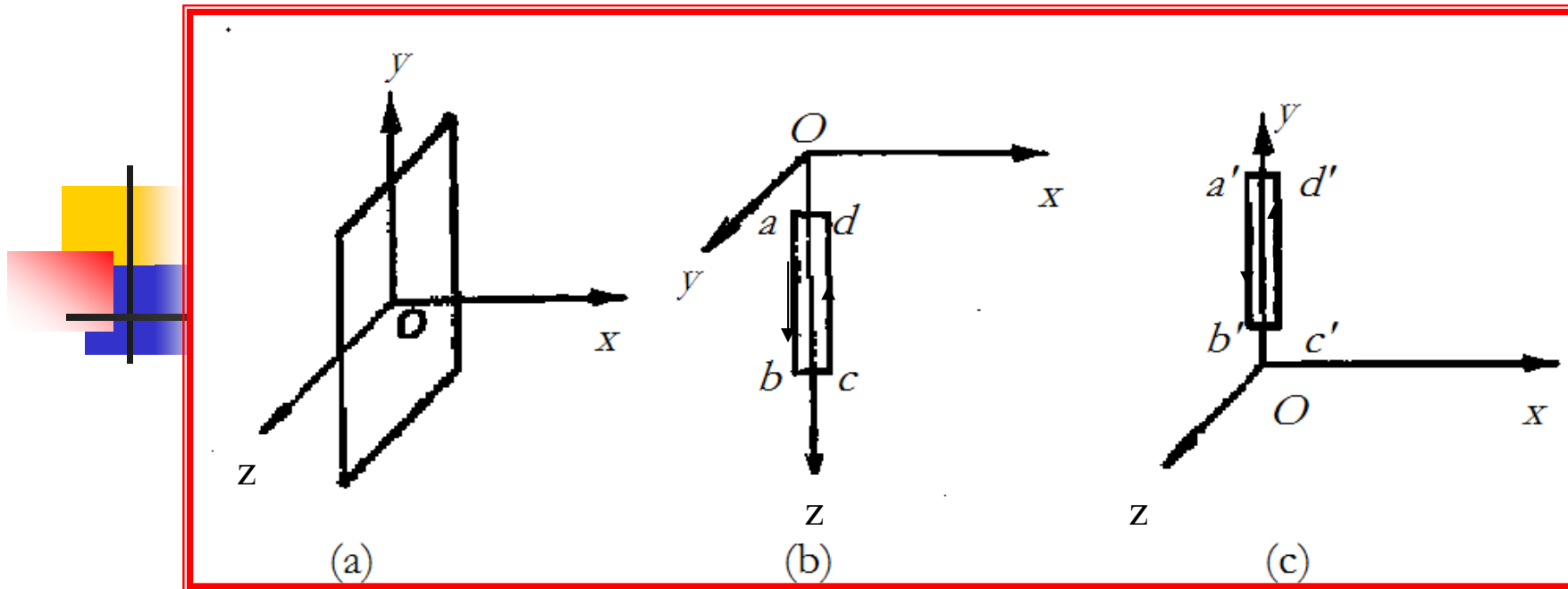
说明：这一关系不仅对介质内部的回路成立，而且对跨过介质界面的回路也成立。如果介质均匀磁化，即 $M = \text{常量}$ ，则

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot \oint_L d\mathbf{l} = 0$$

即均匀磁化介质内，磁化电流为零。

■ 磁化电流不仅出现在非均匀磁化介质中，还常以面电流形式存在于介质表面。下面来分析磁化面电流和磁化强度之间的关系。

考虑介质表面上任一面元，设其内侧磁化强度为 \mathbf{M} ；外侧为真空。取直角坐标系 $Oxyz$ ，使 $y-z$ 平面与所考虑的面元相切， x 轴指向面元外法线方向（如下页图（a））。



■ 在 x - z 平面作一矩形回路 $abcd$ ，使之横跨 z 轴， ab 位于介质内， cd 位于介质外，并规定其绕行方向与 y 轴方向满足右手定则（图 (b)）。取 $\overline{ad} \ll \overline{ab}$ ，则由式 (5.2.5) 有

$$M_z ab = i'_y ab, \quad \text{即} \quad i'_y = M_z.$$

■ 进一步在 x - y 平面内作一矩形回路 $a'b'c'd'$ ，按上述规定取 $\overline{a'd'} \ll \overline{a'b'}$ ，则由式 (5.2.5) 有

$$-M_y \overline{a'b'} = i'_z \overline{a'b'}, \quad \text{即} \quad i'_z = -M_y.$$

上述磁化面电流和表面磁化强度之间的分量关系可归纳为如下矢量关系：

$$\mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (5.2.6)$$

式中 \mathbf{n} 为介质表面单位外法向矢量，此处即 \mathbf{x} 轴的方向。

§ 5.3 磁介质中静磁场的基本定理

磁介质的全部作用在于提供磁化电流作为附加场源。

设由传导电流和磁化电流产生的磁感应强度分别为 B_0 和 B' ，则总磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \quad (5.3.1)$$

显然， \mathbf{B} 应满足真空中静磁场的高斯定理和安培环路定理：

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.3.2)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_0 + \mu_0 \sum I' \quad (5.3.3)$$

只要已知传导电流 I_0 和磁化电流 I' 的分布，就可决定磁介质内、外的静磁场。

[例5.4] 求沿轴均匀磁化的磁介质圆棒轴线上的磁场分布。设圆棒长为 l ，半径为 R ，磁化强度为 M 。

[解] 由于是沿轴向均匀磁化，故磁化电流只分布于介质棒的侧面，其面电流密度为 $i' = M$ 。这种电流分布与一有限长直螺线管电流等效。照搬例4.4的结果（令 $nI = i'$ ），可推得磁介质圆棒轴线上距左端 l_1 处的磁感应强度为

$$B' = \frac{\mu_0 i'}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) = \frac{\mu_0 M}{2} \left(\frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} \right),$$

式中 $l_2 = l - l_1$ 。对细长棒（ $l \gg R$ ），端点（ $l_1 = 0$ ）处，

$B' = \mu_0 M / 2$ ，棒内远离端点处 $B' \approx \mu_0 M$ 。对圆薄片（ $l \ll R$ ）， $B' = \mu_0 M l / (2R) \approx 0$ 。

■ 大多数情况下问题并非如此简单。这是因为磁介质在外磁场中磁化，磁化后的介质又会改变空间的磁场分布，并反过来影响磁介质的磁化状态。这种相互牵制的关系使我们难以自洽地决定介质的磁化强度或磁化电流的分布。

■ 类似情况在第二章2.6节讨论电介质时也曾碰到过。当时我们的做法是引入电位移矢量，对于磁介质中的静磁场，将式（5.2.5）代入式（5.3.3）得：

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0$$

令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (5.3.4)$$

立即得：

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 \quad (5.3.5)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I_0 \quad (5.3.5)$$

■ 这就是经过变形之后的磁介质中静磁场的安培环路定理，它的右边不再出现磁化电流。后面，我们将会看到，对于线性各向同性介质且具有一维对称性的情况，可用式（5.3.5）安培环路定理简化静磁场的计算。

■ 式（5.3.2）和式（5.3.5）涉及两个物理量 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} ，还必须通过引入 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的关系才能完全确定静磁场的具体形式。这说明，在引入辅助矢量 \mathbf{H} 之后，表面上回避了直接计算磁化电流的复杂性，但却带来了分析 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系的新问题。下面我们就来分析这一关系，即介质的磁化规律。

§ 5.4 介质的磁化规律

一、介质按磁化规律的分类

M 和 B 的关系通过实验决定。由于历史的原因，人们常用 M 和 H 之间的关系来表达介质的磁化规律。实验表明，对线性各向同性磁介质， M 和 H 之间满足如下比例关系：

$$M = \chi_m H. \quad (5.4.1)$$

将上式代入式 (5.3.4) 求得磁介质的性能方程：

$$B = \mu H \quad (5.4.2)$$

式中

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (5.4.3)$$

χ_m 称为磁化率， μ 称为磁导率。在真空 $M=0$ ， $\chi_m=0$
 $\mu = \mu_0$. 称 μ 为绝对磁导率， $\mu_r \equiv \mu / \mu_0$ 为相对磁导率。

磁介质按磁化规律不同可分为以下几类：

(1) 顺磁质和抗磁质

有的磁介质 $\chi_m > 0$ ， $\mu > \mu_0$ ，称为顺磁质；有的磁介质 $\chi_m < 0$ ， $\mu < \mu_0$ ，称为抗磁质。这两种磁介质的磁化率的绝对值都很小，前者约在 $10^{-4} - 10^{-5}$ 之间，后者约在 $10^{-5} - 10^{-7}$ 之间，都属于弱磁性物质。

■ 实验发现一般抗磁质的磁化率不随温度变化而改变；而一般顺磁质的磁化率随温度 T 降低而增大，遵从居里定律：

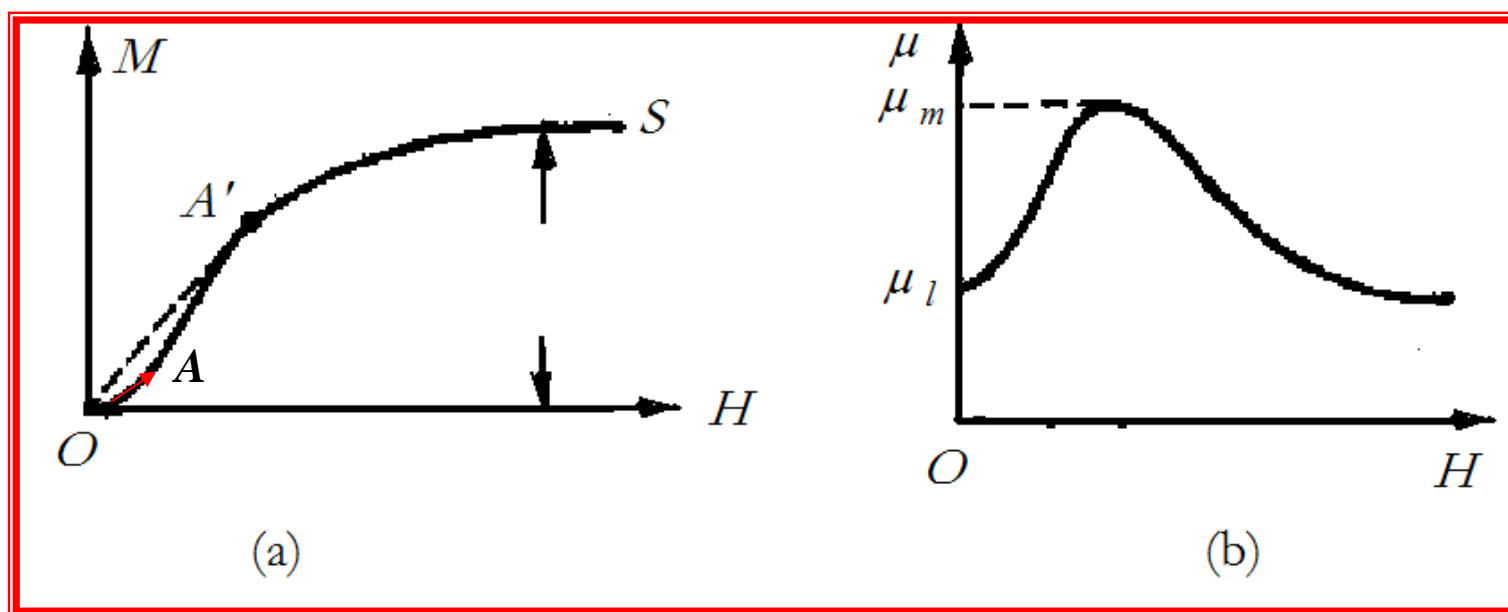
$$\chi_m = C / T, \quad (5.4.4)$$

式中 C 是居里常数，由实验确定。

■ 对各向异性磁介质（例如晶体介质）， M 和 H 的方向不一样，相应的磁化率和磁导率均为张量。

(2) 铁磁质

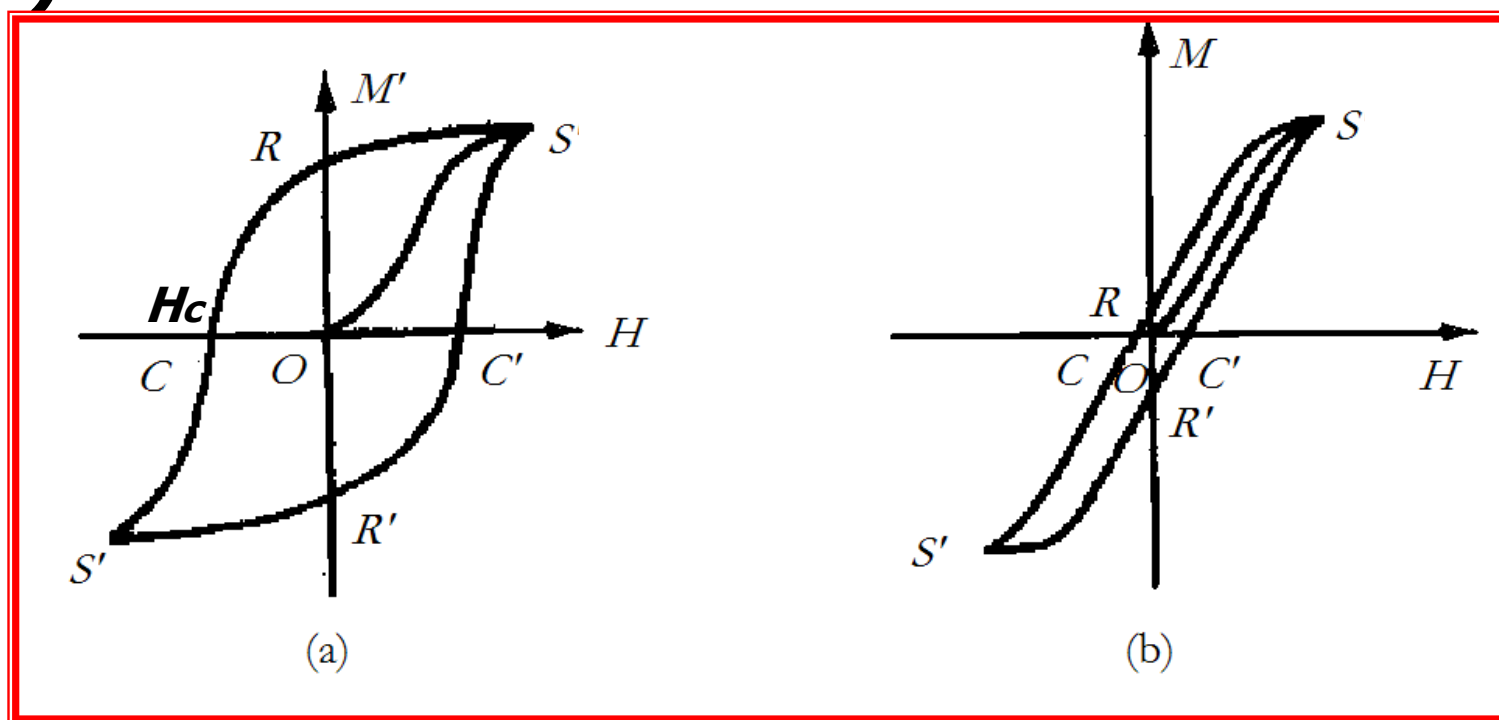
对铁磁质，例如铁、钴、镍， M 的值相当大， M 和 H 间的函数关系复杂，且与磁化的历史有关。下面简述一下铁磁质的磁化规律的典型特征。



(a)起始磁化曲线和 **(b)** $\mu-H$ 曲线

■ 闭合磁化曲线 $SRCS'R'C'S$ 称为**磁滞回线**。

■ 按照矫顽力 H_c 的大小，可把铁磁质划分为**硬磁材料**和**软磁材料**两大类。前者矫顽力大，磁滞回线较宽（见下图**(a)**）；后者矫顽力小，磁滞回线较窄（见下图**(b)**）。



磁滞回线

■硬磁材料在外加磁场为零时仍保留较强的剩余磁化强度，且不易退磁，适合于制作永久磁铁；而软磁材料则作为高导磁材料广泛应用于各种电子和电工设备之中。

■人造铁氧体，例如钡铁氧体、锶铁氧体等属于硬磁材料；锰锌铁氧体（**Mn**、**Zn**、**Fe₂O₃**按一定比例制成的晶体）、镍锌铁氧体等属于软磁材料。

■典型的软磁材料，如纯铁、硅钢、坡莫合金（**Ni**，**Fe**合金）等，其最大的相对磁导率 μ/μ_0 和磁化率 χ_m 位于 $10^3 - 10^5$ 之间，甚至更大；

■典型的硬磁材料的剩余磁感应强度 **B_R**，如碳钢为**1 T**，钕铁硼合金（**Nd₁₅B₈Fe₇₇**）为**1.23 T**，它们都具有强磁性。

■将**铁磁质**加热到**高于**其居里温度 T_c （或称**居里点**），其铁磁性消失，**转变为顺磁性**，磁化率与温度关系满足**居里—外斯定律**：

$$\chi_m = \frac{c}{T - T_c}, \quad (5.4.6)$$

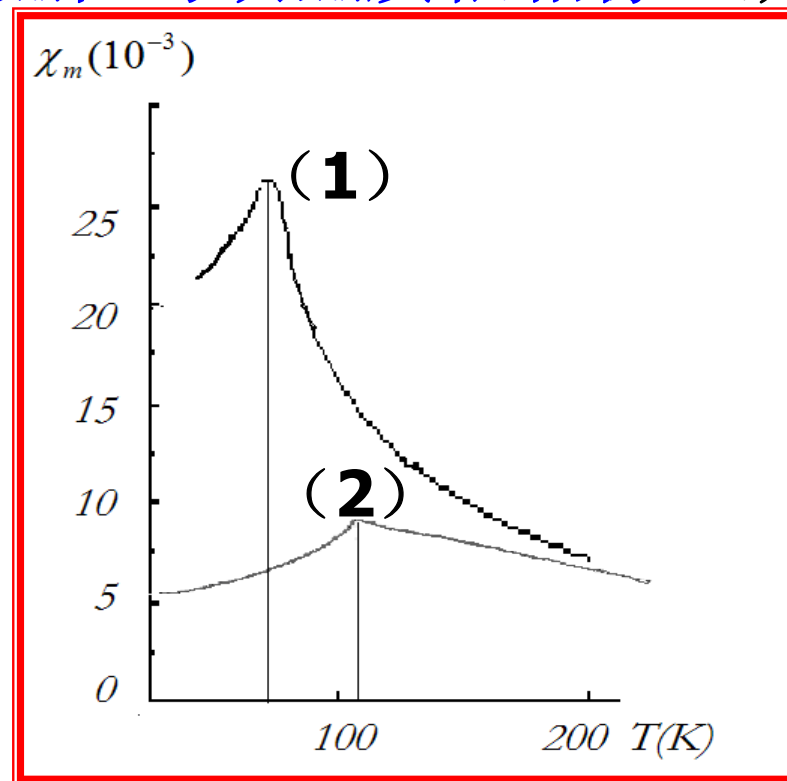
式中 c 为居里常数， T_c 为居里温度，二者通过实验确定。例如铁、钴、镍的居里温度分别为1040 K、1395 K、628 K。

(3) 亚铁磁质和反铁磁质

20世纪四、五十年代研制成功大批**铁氧体材料**、**过渡族与稀土族化合物**，广泛被应用于各类高新技术领域，它们绝大多数都是亚铁磁性的。

■在**20世纪三十年代以前**，只把物质按磁性**分成三类**：抗磁质、顺磁质、铁磁质。例如人类最早发现的天然磁石（ **Fe_3O_4** ）一直被视为铁磁质。后来，通过对其微观机理的深入研究，才认识到它属于**亚铁磁质**。**亚铁磁性属于强磁性**。亚铁磁质的**宏观磁性**与铁磁质很相像，从它们的磁化曲线和磁滞回线很难找出与铁磁质的差别。

■**20世纪三十年代**，从实验中观测到若干物质的**磁化率—温度关系**曲线上**出现极大的现象**（见右图），这类物质属于**弱磁性物质**，后来发现它们是**反铁磁质**。



MnF_2 (1)和 MnO (2)的磁化率—温度曲线

■早期由于不了解其磁结构，人们把它看成一类特殊的顺磁质。**20**年后，到**20**世纪五十年代初，法国物理学家涅尔用中子衍射法确定反铁磁质的磁结构，发现每种反铁磁质存在一特定温度：在该温度以下，磁化率随温度降低而减小，表现出反铁磁性；在该温度以上，磁化率随温度增加而减小，转变成顺磁性。称该温度为涅尔温度或涅尔点，常用 T_N 表示。

■涅尔还建立了亚铁磁质的分子场理论，给人造铁氧体磁性材料的开发提供了理论指导，他因此获得了**1970**年诺贝尔物理奖。

二、 介质磁化的微观机制

- **磁化规律**是磁场和物质相互作用的宏观描述。
- 与电介质的极化类似，**磁化的物理机制**与物质的微观结构有关。不过，物质的微观结构及有关运动规律相当复杂，涉及到各种量子效应，对它们的严格分析已超出经典电磁学的范围，**量子力学才是研究物质磁性的钥匙**。
- 下面我们限于**最简单的物质结构模型**，从经典理论出发对顺磁质和抗磁质的磁化的微观机制作出说明，**并用简化的量子概念**定性说明铁磁质、亚铁磁质与反铁磁质的磁化机理。

(1)顺磁质. 顺磁质由**具有一定磁矩的分子组成.**

■ 分子的磁矩来源于分子中**电子**的轨道运动所产生的**轨道磁矩**，以及电子本身所固有的**自旋磁矩**，而**原子核**的磁矩比它们要小近三个量级。一个分子内全部电子的磁矩的矢量和，称为分子的固有磁矩。

对**顺磁质**，**分子固有磁矩 m_0 不为零**。**不加外磁场时**，由于分子的热运动，各分子磁矩取向无规则，互相抵消，宏观磁矩为零。**在外磁场中**，分子将在磁力矩 $m_0 \times B$ 的作用下出现 m_0 顺着外场方向排列的趋势，由此产生与外场方向一致的磁化强度，这就是顺磁效应的来源。

■ 1905年，**朗之万**对这一效应进行了**简单的经典统计分析**：**设诸分子的固有磁矩 m_0 大小相同**。考察单位体积中分子磁矩在空间的取向分布。设分子数密度为 n_0 ，³⁰

$dn(\theta, \varphi)$ 表示单位体积中，磁矩 m_0 的方向角位于 $\theta \sim \theta + d\theta$

、 $\varphi \sim \varphi + d\varphi$ 之中的分子数目。当不存在外磁场时，分子磁矩取向在各个方向机会均等，应有：

$$dn(\theta, \varphi) = n_0 \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}.$$

■ 如果只考虑磁矩极角位于 $\theta \sim \theta + d\theta$ 之间的分子数，方位角 φ 可以任意，则可由上式对 φ 积分求得，即

$$dn(\theta) = \frac{n_0}{2} \sin \theta d\theta. \quad (5.4.7)$$

■ 当在z轴方向存在外磁场 B 时（见下页图），由热学结果，分子磁矩取向满足玻尔兹曼分布律：

$$dn(\theta) = C e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} \sin \theta d\theta, \quad (5.4.8)$$

ε_p 为磁矩分子在外磁场中的“势能”，其表达式为

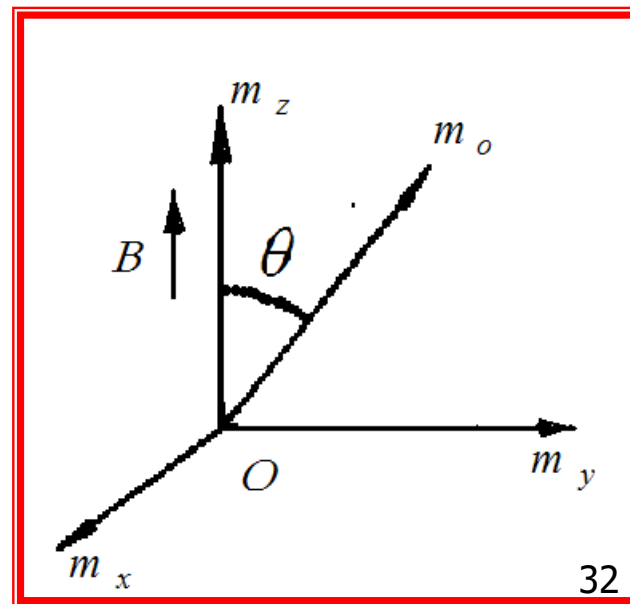
$$\varepsilon_p = -\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B} = -m_0 B \cos \theta. \quad (5.4.9)$$

将上式代入式 (5.4.8)，设 $|\varepsilon_p| \ll kT$ (通常这一条件满足)，则近似有


$$dn(\theta) = C \left(1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta. \quad (5.4.10)$$

由归一化条件：

$$\int dn(\theta) = \int_0^\pi C \left(1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta = n_0,$$



可定出常数 $C=n_0/2$. 于是, 式 (5.4.10) 化为:


$$dn(\theta) = \frac{n_0}{2} \left(1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta. \quad (5.4.11)$$

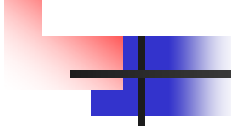
■根据上述分布函数, 不难求得介质磁化强度的大小为:

$$\begin{aligned} M &= \int m_0 \cos \theta dn(\theta) = \frac{m_0 n_0}{2} \int_0^\pi \cos \theta \left(1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{n_0 m_0^2}{3kT} B \approx \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT} H, \end{aligned}$$

其方向与 B 或 H 同向。将上式写成矢量形式:

$$\mathbf{M} = \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT} \mathbf{H}, \quad (5.4.12)$$

再与式（**5.4.1**）比较，可求得磁化率的表达式：


$$\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT}. \quad (5.4.13)$$

■ 上式表明：当 n_0 一定时，磁化率和温度成反比，由此可解释居里定律(**5.4.4**)。式（**5.4.13**）成立的条件为：

$$\frac{m_0 B}{kT} \ll 1 \quad (5.4.14)$$

■ 即磁场不能太强，温度不能过低。对于气态顺磁质，式（**5.4.13**）与实验结果符合。但对某些液态和固态顺磁质，式（**5.4.13**）不成立，这是由于我们所采用的理想模型不足以精确描述这类介质的微观特性。

(2) 抗磁质. 对抗磁质, 它的**分子的固有磁矩为零**。

■ **在外磁场作用下**, 分子中**每个电子的轨道运动**将受到影响而引起**附加轨道磁矩**。这一**附加磁矩总是逆着外磁场的方向**, 由此产生与外磁场方向相反的磁化强度, 这就是抗磁效应的来源。

■ 为分析这种效应, **考虑某个电子绕核的轨道运动**: 角速度 ω , 轨道半径 r , 则该电子的轨道磁矩大小为:

$$m = \pi r^2 I = -\pi r^2 e \omega / (2\pi) = -er^2 \omega / 2$$

可写成如下矢量形式:

$$\mathbf{m} = -\frac{er^2}{2} \boldsymbol{\omega}. \quad (5.4.15)$$

在**外磁场 \mathbf{B}** 中, 该电子受到如下力矩:

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (5.4.16)$$

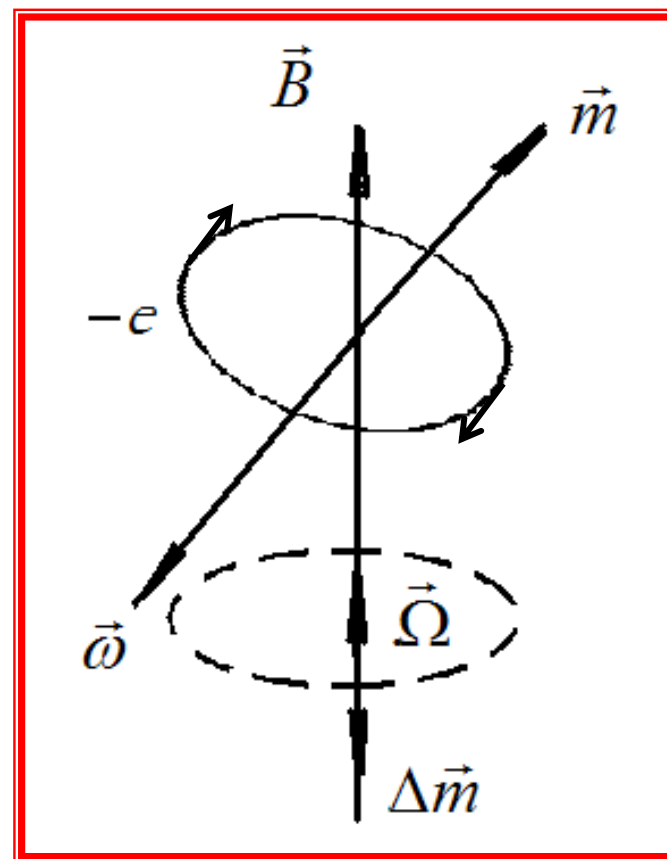
■ 在该力矩作用下，**电子轨道面将绕 B 进动**(见右下图)。通常外磁场的洛仑兹力远小于分子内的库仑力，以至**进动角速度 Ω** 的大小将远小于 ω 。由力学结果，下述近似关系成立：

$$\mathbf{L} = m_e r^2 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (5.4.17)$$

式中 m_e 为电子质量， $m_e r^2$ 是电子的轨道转动惯量。将式(5.4.15)和式(5.4.16)代入上式可得：

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}. \quad (5.4.18)$$

上式表明，**电子轨道面的进动角速度总是与外磁场同向**。上述电子的进动将**引入附加磁矩**，该磁矩与 $\boldsymbol{\Omega}$ 或 \mathbf{B} 的方向相反。



电子在外磁场中的进动与附加磁矩₆

■ 下面计算附加磁矩的统计平均值。设电子轨道面的各种取向机会均等，则电子将沿以 r 为半径的球面等几率分布，形成一面密度为 $\sigma = -e/(4\pi r^2)$ 的均匀球面电荷。各种轨道取向的电子以 Ω 进动的平均效应相当于上述球面电荷以 Ω 自转，其磁矩为


$$\Delta m = -\frac{er^2}{3}\Omega = -\frac{e^2r^2}{6m_e}B. \quad (5.4.19)$$

上式表示一个轨道电子对附加磁矩的平均贡献。

■ 设一个分子中电子总数为 Z （对单原子分子， Z 为原子序数），单位体积中分子数目为 n_0 ，则

$$M = n_0 Z \overline{\Delta m} = -\frac{n_0 Z e^2 \overline{r^2}}{6m_e} B \approx -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \overline{r^2}}{6m_e} H \quad (5.4.20)$$

对比式 (5.4.1) 和式 (5.4.20)，可求得磁化率为：


$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2}{6 m_e} \overline{r^2}. \quad (5.4.21)$$

注意对给定的 n_0 ，磁化率与温度无关。按式 (5.4.21) 计算的抗磁质的磁化率与实验结果相当符合。对顺磁质而言，上述抗磁效应仍然存在，但总是远远小于顺磁效应。

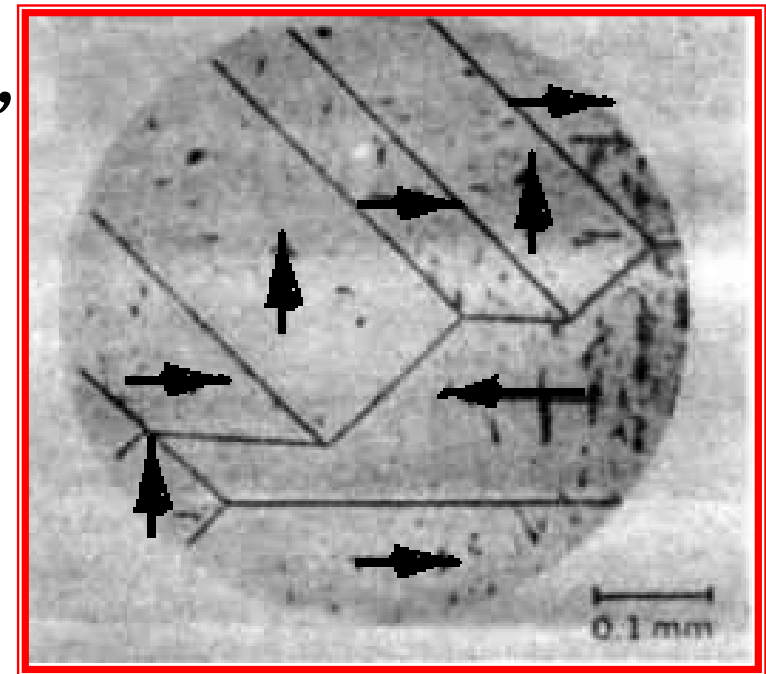


(3) 铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质。

- 金属铁是人类发现最早的铁磁性材料。对各类含铁的磁介质的磁性起源的认识，一直到**20**世纪七十年代还有人提出新的理论模型，可见定量解释其磁性的难度。

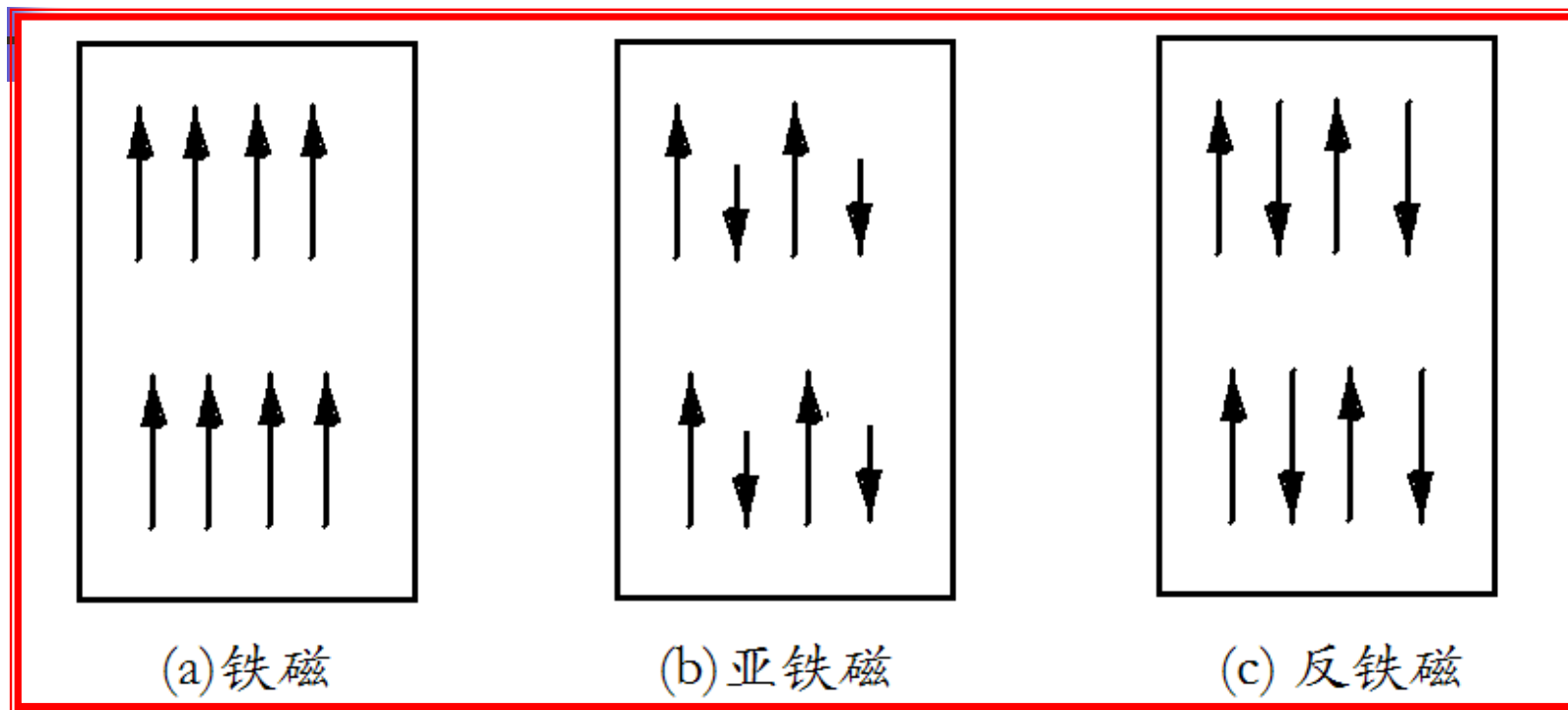
■ 目前取得的**共识是**：**各类含铁的磁介质**与**顺磁质**的**主要区别**在于其内部存在**强的交换作用**。交换作用完全是一种量子效应。在铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质内部的这种交换作用，使得**原子或分子磁矩按某种方式有序排列**，形成许多小区域，称为**磁畴**。

1907年外斯就提出了**磁畴假说**，令人们半信半疑。直到**1948年**毕特发明用**磁粉**（ Fe_3O_4 的小磁粒）**纹法**显出磁畴结构，并用显微镜观察到铁磁体内有**沿不同方向自发磁化的磁畴**（见右图），磁畴假说才被公认。



磁畴示意图，箭头表示各磁畴的磁化方向，实线给出磁畴边界₄₀

■铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质内有许多个磁畴。由于交换作用的不同，这**三种磁介质的单个磁畴内的磁有序状态不同**（见下图），呈现的所谓**自发磁化各异**。



(a) 铁磁质的原子或分子磁矩彼此平行排列。

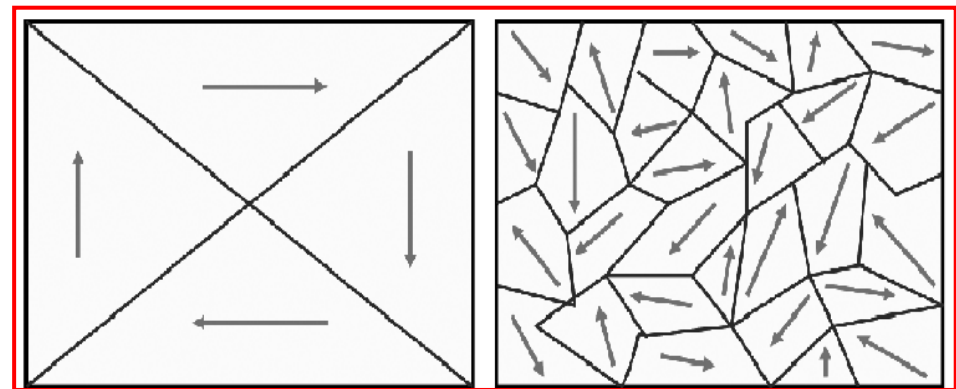
(b) 亚铁磁质的原子或分子磁矩彼此反平行排列，但彼此反向的磁矩大小不等，产生净剩余磁矩。该净剩余磁矩在一个磁畴的范围内彼此平行，所以亚铁磁质的磁化特性很像铁磁质。⁴¹

(c) 反铁磁质的原子或分子磁矩彼此反平行排列，且彼此反向的磁矩大小相等，完全抵消。

这些磁结构可由中子衍射法一类实验检测出来。

■在某一特定温度以上，亚铁磁质和反铁磁质的磁有序状态都会消失，转变成顺磁态，这一特性与铁磁质一样。此时原子或分子的热动能大于交换作用能，磁畴消失。在转变温度以下，由于微观磁结构的不同，它们在宏观的磁化特性上也不相同。

■对于铁磁质而言，在无外磁场时，各磁畴的自发磁化方向不同，宏观上不显示磁性（见右图）。



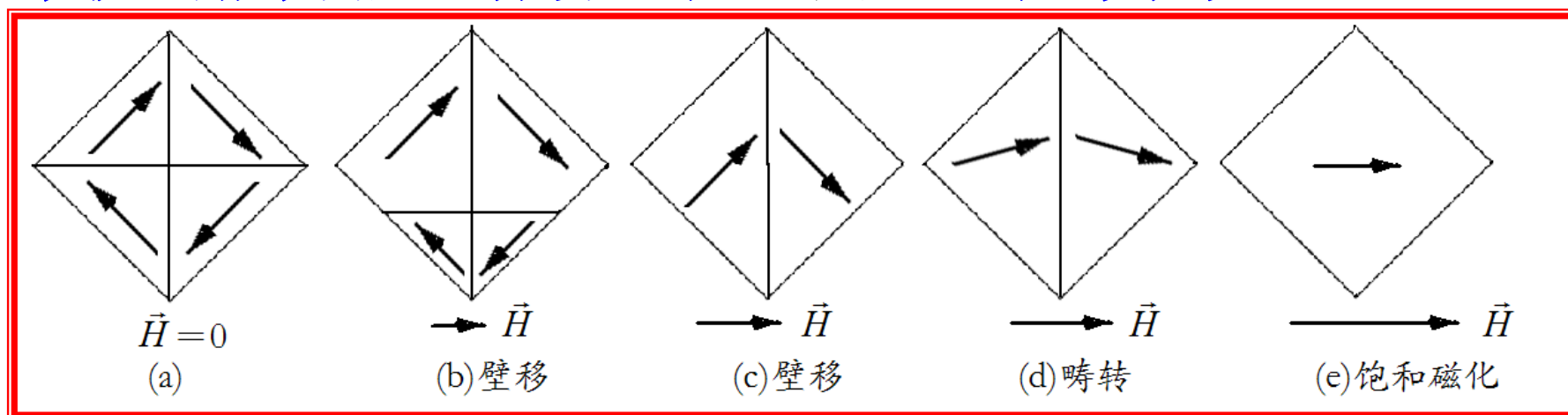
(a) 单晶

(b) 多晶

铁磁质内磁畴结构示意图

■当加上外磁场时，铁磁质的磁化有两种方式：一种叫“壁移过程”，另一种叫“畴转过程”；实际的磁化过程经常是壁移和畴转两种过程交叉或同时进行。

下图给出一个示例：随着磁场增大，先是“壁移”，然后是“畴转”，使铁磁质最终达到饱和磁化。铁磁质以磁畴为单元磁化，比以单个分子为单元磁化抗热干扰的能力强，容易磁化，因此磁化率很大。



铁磁质磁化示意图

■ **亚铁磁质**有自发磁化和磁畴结构，宏观磁性与铁磁质很相似，磁化过程与铁磁质也很相似；从磁化曲线和磁滞回线很难找出它们与铁磁质的差别。

■ **反铁磁质**的磁化行为较复杂，仅举最简单的例子给以说明。一块氧化锰（**MnO**）单晶反铁磁质，取**外磁场平行或反平行于锰离子固有磁矩方向**。此时**温度越低**，磁化率越小；接近绝对零度时，磁化率几乎为零，这是**交换作用强于外磁场作用的结果**；

当**温度升高**，相应无规热运动增强，扰乱了反铁磁质的磁序，有利于外磁场的磁化作用，以至磁化率升高。

温度达到某一特定温度（奈尔点）时，反铁磁质的磁序消失，转变成顺磁质，此时磁化率达到一个极大值。温度再升高，与顺磁质类似，磁化率将随温度增加而减小，遵守居里定律。

若外磁场与原来锰离子的磁矩方向垂直，在转变温度（奈尔点）以下，磁化率与温度无关，数值等于平行情况下的最大值。

三、无限均匀线性各向同性介质中的静磁场

安培环路定理的应用举例

[例5.5] 求一电流为 I 的无穷长直导线在磁导率为 μ 的无限均匀线性各向同性磁介质中的磁场分布。

[解] 本问题显然具有轴对称性质，是一维问题，磁感应线为以长直导线为轴的圆，磁场强度的大小只与圆半径 r 有关。取以长直导线为轴、半径为 r 的圆回路，应用式（5.3.5）得：

$$2\pi rH = I, \quad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

再由式（5.4.2）可得 $B = \mu H = \mu I / (2\pi r)$ ，它为真空中无穷长载流直导线的磁感应强度的 μ / μ_0 倍。

[例5.6] 设匝数为 N 、电流为 I 、平均半径为 R 的细螺绕环内填满磁导率为 μ 的均匀线性各向同性磁介质，求管内磁感应强度的大小。

[解] 取管内与环同轴的半径为 R 的圆回路，应用安培环路定理（5.3.5）得：

$$2\pi RH = NI, \quad H = \frac{NI}{2\pi R} = nI,$$

式中 n 为单位长度上的匝数。再由式(5.4.2)式可得 $B = \mu H = \mu nI$ ，它为真空螺绕环 B 值的 μ / μ_0 倍。

■简单提一下 H 线的概念和基本性质。所谓 H 线，是指磁场空间的一组曲线，沿曲线每点的切线与该点的磁场强度 H 平行。类比磁感应线数密度的概念，我们可以定义 H 线的数密度，它在数值上等于 H 的大小。由 H 满足的环路定理（5.3.5），可推断 H 线和传导电流线总是相互环绕。对各向同性磁介质而言， H 与 B 处处平行。

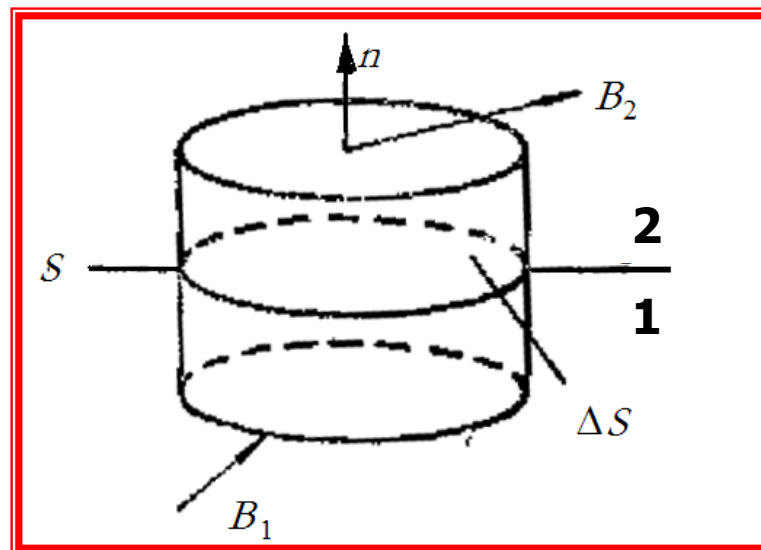
§ 5.5 边值关系和唯一性定理

一、磁场在磁介质界面上的边值关系

■ 在实际问题中会碰到磁介质界面的情况，在这种界面两侧磁场将会出现间断。从静磁场的高斯定理和安培环路定理可以推出磁场在磁介质界面上应满足的边值关系。

■ 设有两种介质，分界面为 S 。在 S 上取面元 ΔS ， n 为它的单位法向矢量，由介质1指向介质2。

以 ΔS 为截面作一柱形高斯面，其两底分别位于介质1和2中（右图）。柱面的高度很小且最终趋于零，故在计算通过该高斯面的磁通量时只需考虑两底面的贡献。对该高斯面运用高斯定理(5.3.2)得：



$$n \cdot (B_2 - B_1) = 0. \quad (5.5.1)$$

式 (5.5.1) 表明 **B** 的法向分量在界面上连续。

■ 对于 5.2 节讨论的介质 2 为真空的情况，由公式：

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I' \quad (5.2.5)$$

前面推得：

$$\mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (5.2.6)$$

■ 若介质 2 不是真空，取 $\mathbf{M}_2 \neq 0$ ，用 \mathbf{M}_1 代 \mathbf{M} ，则式 (5.2.6) 应代之以：

$$\mathbf{i}' = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1). \quad (5.5.2)$$

上式常用来计算介质界面的磁化面电流密度。

■ 注意安培环路定理 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I_0 \quad (5.3.5)$

和式 (5.2.5) 形式上类似，由它出发可推得：

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1), \quad (5.5.3)$$

式中 i_0 为界面传导面电流密度。对通常磁介质界面则有 $i_0 = 0$ ，以至

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \quad (5.5.4)$$

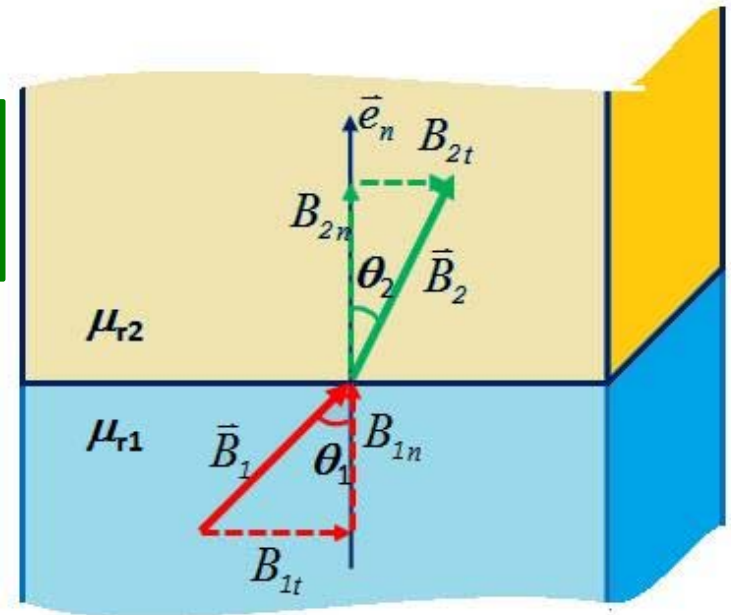
由边值关系：

$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

$i_0=0$ 时 $H_{2t} = H_{1t}$

$$\frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$



可得到“折射定理”：

$$\tan \theta_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2t}/B_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tan \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

二、两类特殊分区均匀介质静磁场问题求解

(1) 介质界面与磁感应线重合

一般介质表面没有传导电流

根据边值关系 $H_{2t} = H_{1t}$

由于磁感应线与介质表面平行

$$H_2 = H_1$$

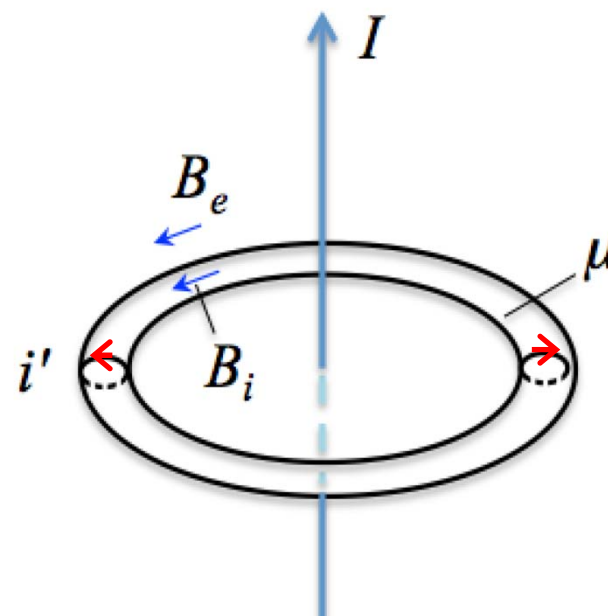
不同介质中的磁场强度 H 一样，不受磁介质影响

$$H_i = H_0$$

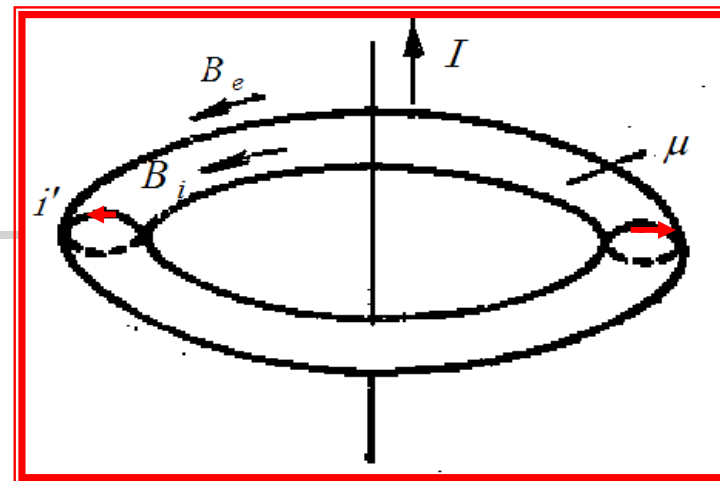
在这种特殊情况下，可根据唯一性定理证明：
 $H=H_0=B_0/\mu_0$

不同介质中的磁感应强度 B 不一样

$$B_i = \mu_i H_i = \mu_i H_0 = \frac{\mu_i}{\mu_0} B_0 = \mu_{ri} B_0$$



【例5.7】 一圆环状磁介质与一无穷长直导线共轴（右图）。设磁介质磁导率为 μ ，直导线电流强度为 I ，求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化面电流。



直线电流和磁介质圆环

【解】 本例题属于介质界面与磁感应线重合的情况。无穷长直线电流在真空中产生的磁感应强度与以该直线为轴的圆形环路相切，大小为：


$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad H = \frac{I}{2\pi R}$$

式中 r 为离直导线的距离。

由此可求得介质内、外空间的磁感应强度和的大小为：

$$B_i = \frac{\mu I}{2\pi r}, \quad B_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

由式 (5.5.2) 可求得界面上磁化电流的密度为:


$$i' = M_i - M_e = \frac{1}{\mu_0} (B_i - B_e) = \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

方向示于前页图。在推导上式过程中用到式 (5.3.4) 和式 (5.5.4)，后者即 **H** 切向分量在界面上连续。

或,

$$i' = M_{it} = \chi_m H = \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

■ **注意** 对于非对称情形，在某磁通量管中填入磁介质之后，则只能按本小节介绍的方法求解。

(2) 介质界面与磁感应线垂直

根据边值关系

$$B_{2n} = B_{1n}$$

由于磁感应线与介质表面法向平行

$$B_2 = B_1$$

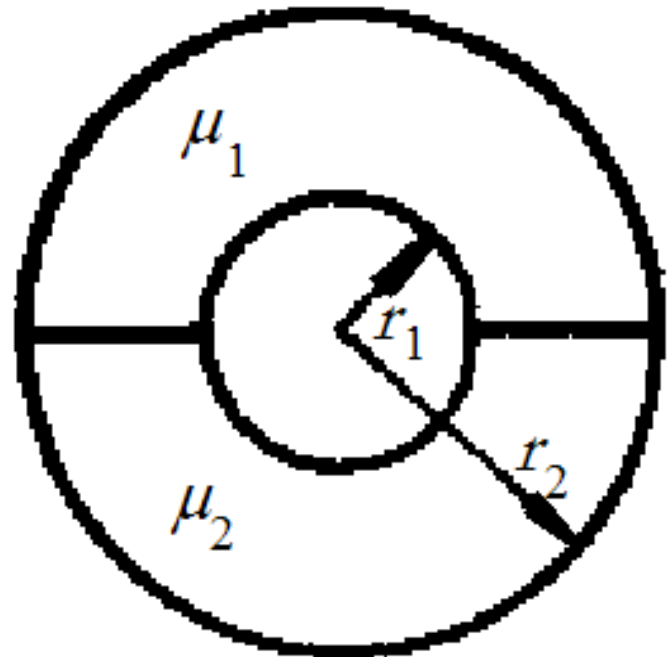
不同介质中的磁感应强度一样，

$$B_i = B \neq B_0$$

但磁场强度不一样，有

$$H_i = \frac{B}{\mu_i}$$

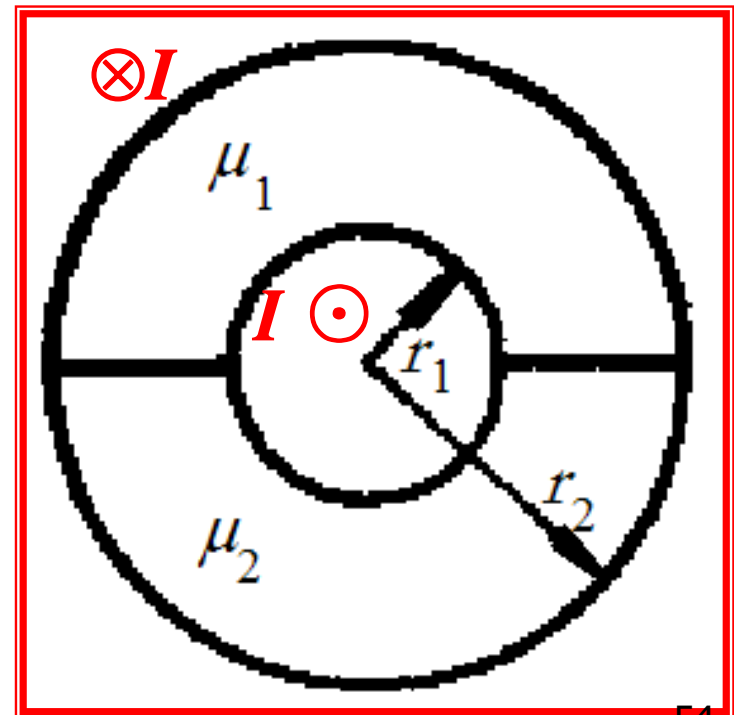
将此关系代入安培环路定理可解得 B ，进而得到 H_i



[例5.8] 在一同轴电缆（内导体半径为 r_1 ，外导体的内半径为 r_2 ，两导体可认为理想导体）中填满磁导率为 μ_1 和 μ_2 两种磁介质，各占一半空间，且介质界面为通过电缆轴的平面（下图）。设通过电缆的电流强度为 I ，求介质中的磁场分布和介质—导体毗连面上的面电流分布。

[解] 本题属于**磁介质界面与磁感应线垂直**的情况。且介质置入前的磁感应强度相对电缆轴线对称。取半径为 r ($r_1 < r < r_2$) 的圆回路，由介质中环路定理：

$$\frac{B}{\mu_1} \pi r + \frac{B}{\mu_2} \pi r = I$$



于是

$$B = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$$

进而可求得介质**1**和介质**2**中的**磁场强度**为:

$$H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}, \quad H_2 = \frac{B}{\mu_2} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$$

相应**磁化强度**为:

$$M_1 = \frac{1}{\mu_0} B - H_1 = \frac{\mu_2 [(\mu_1 / \mu_0) - 1] I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$$


$$M_2 = \frac{1}{\mu_0} B - H_2 = \frac{\mu_1 [(\mu_2 / \mu_0) - 1] I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r}$$

对于 $r < r_1$ 和 $r > r_2$, 恒有 $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$ 。在 $r = r_1$ 处的磁化面电流和传导面电流密度为:

$$i'_1 = \begin{cases} M_1 |_{r=r_1} = \frac{\mu_2[(\mu_1 / \mu_0) - 1]I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r_1}, & (\text{介质1}), \\ M_2 |_{r=r_1} = \frac{\mu_1[(\mu_2 / \mu_0) - 1]I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r_1}, & (\text{介质2}), \end{cases}$$

$$i_{01} = \begin{cases} H_1 |_{r=r_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r_1}, & (\text{毗连介质1}), \\ H_2 |_{r=r_1} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)r_1}, & (\text{毗连介质2}), \end{cases}$$

与此类似，在 $r = r_2$ 处有：


$$i'_2 = \begin{cases} -M_1 |_{r=r_2} = -\frac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{介质1}), \\ -M_2 |_{r=r_2} = -\frac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{介质2}), \end{cases}$$
$$i_{02} = \begin{cases} -H_1 |_{r=r_2} = -\frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{毗连介质1}), \\ -H_2 |_{r=r_2} = -\frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{毗连介质2}), \end{cases}$$

讨论：■由上述结果可见，在 $r = r_1$ 和 $r = r_2$ 处的磁化面电流和传导面电流密度分布都不均匀，但总面电流

$i = i' + i_0$ 的分布却是均匀的。

■ 正是总面电流分布的这种对称性决定了磁感应强度 B 的对称性。可是，介质的引入破坏了磁场强度 H 的轴对称性，因此无法直接通过安培环路定理计算。

■ 顺便指出，本题假定电缆线为内部磁场为零的理想导体或超导体，否则问题将变得十分复杂，不能用上述简单方法求解。

§ 5.7 磁路定理及其应用

一、磁路定理的基本方程

■ 尽管不同性质的物理现象满足不同的物理规律，但常出现这些规律的数学表述相同或相近的情况，以至可以采用同一种数学方法进行分析处理。

本节将要介绍的磁路和磁路定理和第三章提到的电路和电路定律就具有这种对应的关系。

■ 简单回顾一下直流电路问题的处理过程。我们用到以下基本方程（见第三章）：

1. 稳恒条件：
$$\oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.7.1)$$

2. 欧姆定律：
$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{K}) = \sigma \mathbf{E}' \quad (5.7.2)$$

3. 电动势的定义：
$$\oint \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (5.7.3)$$

■从上述基本方程出发，对一闭合电流管即闭合电路而言：

(1) 沿电流管的电流强度 $I = j \cdot S = \text{常量}$ ；

(2) 如下电路方程成立：
$$\mathcal{E} = IR, \quad (5.7.4)$$

式中

$$R = \oint \frac{dl}{\sigma S} \quad (5.7.5)$$

若电导率 σ 和截面积 S 沿电流管分段均匀，第 i 段落电流管的长度、截面积、电导率和电阻分别为 l_i 、 S_i 、 σ_i 和 R_i ，则 R 可表示为：

$$R = \sum_i R_i, \quad R_i = \frac{l_i}{\sigma_i S_i}. \quad (5.7.6)$$

■下面我们列出静磁场的有关方程：

1. 磁场的高斯定理：

$$\oiint B \cdot dS = 0 \quad (5.7.7)$$

2. 磁介质性能方程: $B = \mu H$ (5.7.8)

3. 安培环路定理: $\oint H \cdot dl = \sum I_0 = \mathcal{E}'_m$, (5.7.9)

称式 $\mathcal{E}'_m = \sum I_0$ 为“磁动势”。


■ 只要将 $j \longleftrightarrow B$, $E' \longleftrightarrow H$, $\sigma \longleftrightarrow \mu$, $\mathcal{E} \longleftrightarrow \mathcal{E}'_m$, 则式 (5.7.1) — 式 (5.7.3) 和 式 (5.7.7) — 式 (5.7.9) 之间也一一对应。由这些对应关系, 我们还可以推论出如下对应关系:

- (a) 电导率为 σ 的电流管与磁导率为 μ 的磁力线管对应;
- (b) 电流管的电流强度 $I = jS$ 与磁力线管的磁通量 $\Phi_B = BS$ 对应;
- (c) 一闭合电流管的电阻 R 与一闭合磁力线管的

$$R_m = \oint \frac{dl}{\mu S} \quad (5.7.10)$$

对应, R_m 定义为“磁阻”。

设磁导率 μ 和截面积 S 沿磁力线管分段均匀，则有：


$$R_m = \sum_i R_{mi}, \quad R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i S_i} \quad (5.7.11)$$

■ 像把电流管称为**电路**一样，我们把磁力线管称为“**磁路**”。

对一闭合磁路而言，有与电路相对应的如下结论：

(1) 沿磁力线管的磁通量 $\Phi_B = BS = \text{常量}$ ；

(2) 如下“**磁路定理**”成立：

$$\mathcal{E}_m = \Phi_B R_m = \Phi_B \sum_i R_{mi} \quad (5.7.12)$$


通常将 $\Phi_B R_{mi}$ 称为第*i*段磁路的“磁势降”。

二、磁路定理的应用：有铁(磁)芯的问题

理想的电路：它由电源、电阻和其它电路元件通过导线连接而成，电路外部为绝缘介质或真空（电导率 $\sigma = 0$ ），电流仅限于电路内部，即电流线严格与电路平行。

要实现**理想的磁路**则不那么简单。一般实际的磁路由绕有线圈的闭合或带小气隙的**环状铁芯**组成。当线圈通以电流时，它所产生的磁场 B_0 将使铁芯磁化，而磁化后的铁芯会产生附加磁场 B' 。我们将称 B_0 为外磁场，而将 $(B_0 + B')$ 称为合磁场。

根据5.5节的分析，**只有当铁芯磁导率均匀且填满合磁场的某个闭合的磁力线管时**，合磁场的磁力线位形将同原外磁场完全一致，这样安排的闭合铁芯的确构成一个**理想的磁路**。充满介质的**密绕螺绕环**（见第五章例5.6）就构成一理想磁路。



■ 可是实际的铁芯和线圈是根据使用需要设计的，铁芯的几何形状往往不能做到与线圈的合磁场的磁力线管一致。

另外，整个铁芯回路可能由分段均匀的材料构成，例如电磁铁的铁芯和衔铁一起构成一闭合回路，二者就具有不同的磁化性质。

有的铁芯回路（例如日光灯镇流器铁芯）还留有气隙。在这种情况下，实际铁芯回路和合磁场的磁力线管之间必然会出现偏离，不能看作是理想的磁路。

不过，如果偏离不远的话，还是可以把实际的铁芯回路近似看成理想磁路，从而运用前述磁路定理进行处理。

■ **铁芯回路接近理想磁路的条件是：**铁芯的磁导率远远大于 μ_0 。

这结论可以根据磁介质的**边值关系**作出进一步说明。如下图**(a)**所示，一界面把磁导率为 μ 的铁芯与磁导率近似为 μ_0 的空气隔开，磁力线在界面上发生“**折射**”。由**5.5**节给出的边值关系可知 **B** 的法向分量和 **H** 的切向分量跨过界面连续，即

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2, \quad H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2.$$

进一步由 $H_1 = B_1 / \mu_0$ 和 $H_2 = B_2 / \mu$ ，可将第二式改为：

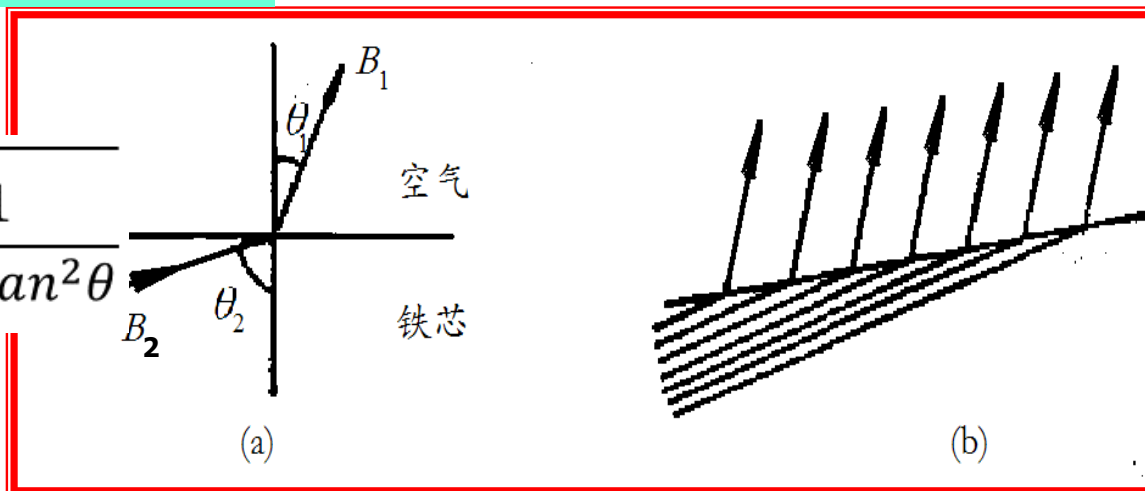
$$\mu B_1 \sin \theta_1 = \mu_0 B_2 \sin \theta_2$$

根据这些关系：
出：

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\tan \theta_2 = (\mu / \mu_0) \tan \theta_1,$$

$$B_2 = \left(\frac{1 + (\mu / \mu_0)^2 \tan^2 \theta_1}{1 + \tan^2 \theta_1} \right)^{1/2} B_1.$$

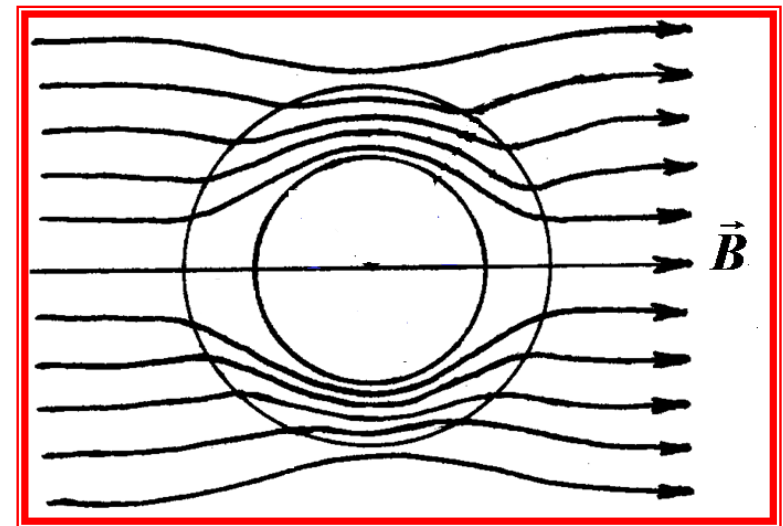


(a)磁感应线在铁芯界面上的折射；
(b)磁感应线集中于铁芯内部。

■磁屏蔽：当 $\mu \gg \mu_0$ 、 $\theta_1 \neq 0$ 时，近似有 $\theta_2 \approx \pi/2$ ， $B_2 \gg B_1$

因此铁芯内磁感应线大体与界面平行，且磁感应线将密集于铁芯内部（前页图**(b)**）。这说明，大部分磁通量将集中在铁芯内部，只有极小部分从铁芯表面泄漏出去。利用这一性质，我们可以达到磁屏蔽的目的。如下图**(c)**所示。

一高磁导率的软铁磁材料（相对磁导率大于 10^3 ）制成的空腔置于外磁场中，磁感应线将密集于软铁磁材料的腔壳之中，极少泄漏进空腔内。因此，空腔内的物体将几乎不受外磁场的影响，从而达到磁屏蔽的目的。



(c) 磁屏蔽原理

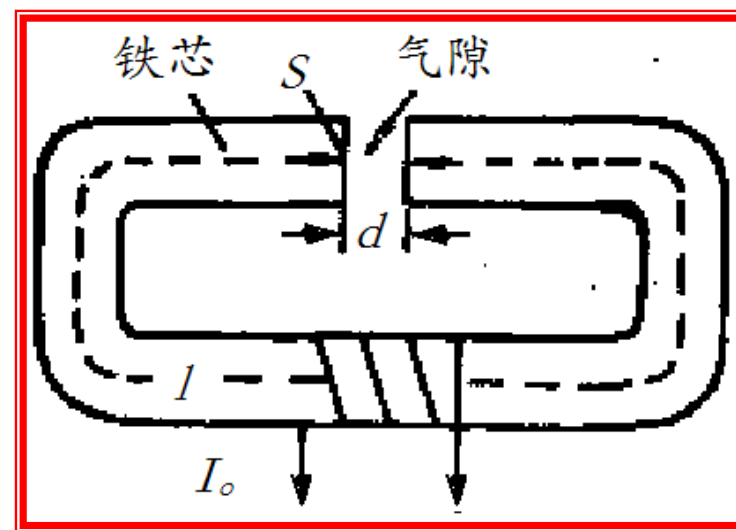
■考虑一带气隙的铁芯回路。设铁芯上的载流线圈提供磁动势 $\mathcal{E}_m = NI_0$ ， N 为线圈匝数， I_0 为电流强度(右下图)。进一步我们假定铁芯材料均匀，磁导率 $\mu \gg \mu_0$ ，同时气隙很窄，以至可忽略漏磁效应，视整个回路为一理想磁路。在这一近似下，由磁路定理（5.7.12）得：

$$NI_0 = \Phi_B (R_{m1} + R_{m2}),$$

式中

$$R_{m1} = \frac{l}{\mu S}, \quad R_{m2} = \frac{d}{\mu_0 S}$$

分别为铁芯和气隙的磁阻， l 为铁芯磁路长度， d 为气隙长度， S 为铁芯截面面积（铁芯被假定为均匀截面）。



带气隙的磁路

[例5.12] 日光灯镇流器可以等效为一带气隙的矩形磁路。设铁芯磁导率为 μ ，截面积为 S ，长度为 l ，线圈匝数为 N ，电流为 I_0 ，求无气隙时铁芯中的总磁通量以及该磁通量减至一半时的气隙长度 d 。

[解] 由磁路方程得（无气隙时）

$$NI_0 = \Phi_B \frac{l}{\mu S}, \quad \Phi_B = \mu S NI_0 / l$$

当存在气隙时， Φ_B 降至原值的一半，则下式成立：

$$NI_0 = \frac{\Phi_B}{2} \left(\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} \right)$$

于是有：

$$\frac{l}{\mu S} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} \right), \quad d = \frac{\mu_0}{\mu} l$$