1 复数

第一章主要介绍复数的基本性质。

1.1 复数的运算

我们从一个二次方程开始：

$$z^2+1=0.$$

该方程的解为：

$$\pm\sqrt{-1}.$$

记$i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，相应的$ai, a\in\mathbb{R}$ 称为纯虚数。虚数的概念由卡尔达诺于16世纪引入，当时主要为了解三次方程。卡尔达诺公式：解$z^3+pz+q=0$，设$\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则方程的解为

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

$$\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

因为看不见，摸不着，甚至很难想象，因而笛卡尔将这种数称为虚数，与实数相对应。莱布尼兹的说法最有代表性："圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的-1的平方根。"

欧拉公式："美"$e^{\pi i}+1=0$；"应用"：傅里叶变换。

复数（complex number），$z=x+yi$，$x,y\in\mathbb{R}$。

复数可以表示为：

代数表示： $z=x+iy$，其中x,y 为实数，x 称为z 的实部记为$\mathrm{Re}z=x$；y 称为z 的虚部记为$\mathrm{Im}z=y$；

向量表示： z 看作复平面上的一向量，作为向量其最大好处是可以任意平移向量。向量的长度称为复数的模长，记为$|z|$；其取值为$(\sqrt{x^2+y^2})$；向量的倾角称为复数的辐角，可以看出给定一个非零复数，其辐角的取值有无穷多并且以2π 为周期，我们经常约定位于区间$(-\pi,\pi]$ 之间的辐角取值称为z 的辐角的主值；用$arg(z)$ 表示辐角主值，用$Arg(z)$ 表示辐角全体，他们仅对$z\neq 0,\infty$ 有定义；辐角与辐角主值有如下关系：

$$Arg(z)=arg(z)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

辐角有如下表达式：设$z=x+yi$，$xy\neq 0$，则

$$arg(z)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & z\ \text{在第一象限；}\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & z\ \text{在第二象限；}\\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & z\ \text{在第三象限；}\\ \arctan\frac{y}{x}, & z\ \text{在第四象限。}\end{cases}$$

作为向量是没法比较大小的（复数之间没法比较大小），但可以比较向量的长度，也就是模长；

指数表示、三角表示： $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$，$r \in [0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}$，$r$ 为复数的模长；θ 为复数的辐角。

注记：容易看出，要说明两复数相等，只要说明他们的实部和虚部分别相等；或者说明模长和辐角分别相等。

复数的运算：

- 复数运算满足一般实数运算的所有法则（交换律，结合律，分配律等，仅需注意$i^2 = -1$），需要注意的是除法；例子：$\frac{1+i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-i}{5}$，在计算除法的时候，往往要分子分母同时乘以一个特定的复数（分母的共轭）。

- 如果将复数看成向量，则加法减法满足平行四边形法则或者三角形法则；容易看出复数的模满足三角不等式，即
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
除此之外还满足
$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

- 如果用指数形式表示复数，则复数的乘法（除法）有简单的形式（模相乘（相除），辐角相加（相减）——棣莫弗定理）；如果用指数表示复数，则幂次有如下公式
$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}.$$
例子：$(1+i)^{2020} = (\sqrt{2})^{2020} e^{i\frac{\pi}{4}\times 2020} = -2^{1010}$. 利用复数的乘法可以轻松获得很多三角等式，例如：
$$e^{i\theta}e^{i\phi} = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) = e^{i(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi).$$
通过对照，可以得到：
$$\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta+\phi)$$
和
$$\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi = \sin(\theta+\phi).$$

- 复数的开方的取值一般并不唯一（0 是例外），例如 $\sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}$ 表示复数范围内所有满足以下方程的w,
$$w^n = z.$$
假设w 的指数表示为$w = re^{i\theta}$ （θ 为辐角主值，当然也可以是其他辐角），则
$$r^n = |z|, n\theta = Arg(z) = 2k\pi + arg(z).$$
当$z = 0$ 时候，$w = 0$；而当$z \neq 0$ 的时候，有n 个解
$$(\sqrt[n]{|z|})e^{(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})i}, k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

需要注意前后 $\sqrt[n]{\ }$ 的含义是不一样的，我们用圆括号加以区分，在没有混淆的情况下，并不需要特别说明。

例子1. （*1*）求$\sqrt[3]{1}$ 的所有取值；（*2*）解方程，$z^5=10+i$。

解. （*1*）1 的模为1，辐角主值为0。所以

$$\sqrt[3]{1}=(\sqrt[3]{1})e^{\frac{2k\pi}{3}i}=e^{\frac{2k\pi}{3}i}, k=0,1,2.$$

即：1；$-\frac{(\sqrt{3})}{2}+\frac{1}{2}i$；$-\frac{(\sqrt{3})}{2}-\frac{1}{2}i$。

（*2*）设$z=re^{i\theta}$，则

$$r^5=(\sqrt{101}), 5\theta=\arctan\frac{1}{10}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

解得

$$r=(\sqrt[10]{101}), \theta=\frac{1}{5}\arctan\frac{1}{10}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}.$$

所以

$$z=(\sqrt[10]{101})e^{i(\frac{1}{5}\arctan\frac{1}{10}+\frac{2k\pi}{5})}, k=0,1,2,3,4.$$

- 共轭是复数特有的运算形式，其符号是复数上面加一横（$z\to\bar{z}$：$\overline{x+iy}=x-iy$）；其几何意义是复数关于实轴的对称点。共轭有以下运算规律
  - $\bar{\bar{z}}=z$；
  - $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$；
  - $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；
  - $|z|^2=z\bar{z}$；
  - $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$；一般会依此计算复数的除法；例子：$\frac{1+i}{1-2i}=\frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-1+3i}{5}$；
  - 需要注意的是$\overline{f(z)}=f(\bar{z})$一般并不成立，最简单的例子就是$f(z)=iz$；
  - 指数表示下，$re^{i\theta}$ 的共轭为$re^{-i\theta}$。

  用共轭可以表示复数的实部，虚部和模
  - $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$, z 为实数等价于$z=\bar{z}$；
  - $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$, z 为虚数等价于$z=-\bar{z}$；
  - $|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2 \quad (z=x+iy)$。

例子2. 求解以下方程：

$$z^{2020}=2020\bar{z}.$$

解. 不妨设$z=re^{i\theta}$，则有

$$r^{2020}e^{i2020\theta}=2020re^{-i\theta}.$$

所以

$$r^{2019}=2020 \text{ 并且} 2021\theta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

解得：$r=0$ 或者$r=(\sqrt[2019]{2020})$；$r=0$的时候，$z=0$; $r\neq 0$ 的时候$\theta=\frac{2k\pi}{2021}, k=0,1,2,\cdots,2020$。所以

$$z=(\sqrt[2019]{2020})e^{i\frac{2k\pi}{2021}}, k=0,1,2,\cdots,2020.$$

例子3. 设$z=x+iy$, $y\neq 0$, $z\neq\pm i$。证明：当且仅当$x^2+y^2=1$ 的时候，$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数。

Proof. $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数等价于$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar z}{1+\bar z^2}$。即

$$z+z\bar z^2=\bar z+\bar z z^2.$$

即

$$(z-\bar z)(1-z\bar z)=0.$$

所以要么$z=\bar z$此时z 为实数，但是$y=0$ 与条件不符舍去；要么$\bar z z=1=|z|^2$，即z 位于单位圆周上。 □

例子4. 证明平行四边形对角线的平方和等于边的平方和。

Proof. 不妨设平行四边形的四个顶点分别为$0, z_1, z_2, z_1+z_2$。则仅需说明

$$2|z_1|^2+2|z_2|^2=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2.$$

实际上

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar z_1-\bar z_2)=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar z_2-\bar z_1 z_2.$$

同理

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar z_2+\bar z_1 z_2.$$

两式相加既得。 □

例子5. 已知正三角形的两个顶点为z_1, z_2，求第三个顶点z_3？

解. $z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$。所以

$$z_3=z_1+(z_2-z_1)(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

所以

$$z_3=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z_1+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)z_2 \text{ 或者} (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)z_1+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z_2.$$

1.2 复数列的极限

定义. 设z_n 为复数列，z_0 为复数。

- 如果$\lim_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$，就称$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0$，也就是在复平面上$z_n$ 无限靠近z_0；
- 如果$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$，就称$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$，也就是在复平面上$z_n$ 无限远离0。

当然我们也可以用极限语言来表述：

- 对任意$\epsilon > 0$，存在自然数N 使得$|z_n - z_0| < \epsilon$ 对任意$n > N$ 成立；
- 对任意$M > 0$，存在自然数N 使得$|z_n| > M$ 对任意$n > N$ 成立。

定义(邻域). 设z_0 为复数，z_0 的邻域是指包含z_0 的开集；∞ 的邻域是指包含“∞”的开集。例如，

$$\{z : |z| < 1\} \text{ 是}0\text{ 的邻域;}$$

$$\{z : |z| > 1\} \text{ 是}\infty\text{ 的邻域.}$$

用邻域的概念可以对极限有更直观的了解：

- $\lim_{n\to+\infty} z_n \to z_0$ 当且仅当对z_0 的任何领域U，仅有有限个$z_n \notin U$；也就是说从某个z_n 开始其后面的所有元素都在该邻域内。

定理. 设$z_n = x_n + iy_n, z_0 = x_0 + iy_0$ 为复数，则$\lim_{n\to+\infty} z_n \to z$ 等价于$\lim_{n\to+\infty} x_n \to x$ 并且$\lim_{n\to+\infty} y_n \to y$。但这对于极限是无穷的情况并不成立，例如：

$$z_{2k} = 2k, z_{2k+1} = (2k+1)i.$$

要看$z_n \to \infty$ 是否成立，只要看它的模是否趋于“$+\infty$”：即，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty.$$

同样地，要看$z_n \to 0$ 是否成立，只要看它的模是否趋于“0”：即，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

一般而言我们将常规复平面加上∞ 组成一个新的空间，称为闭复平面。

复平面：所有复数的集合；**闭复平面**：所有复数加上一个“∞”。

我们有以下约定

- $\infty + z = \infty, \forall z \neq \infty$；$\infty + \infty$ 没有意义；
- $\infty \times z = \infty, \forall z \neq 0$；$\infty \times 0$ 没有意义；
- $\frac{z}{\infty} = 0, \forall z \neq \infty$；$\frac{\infty}{\infty}$ 没有意义；
- $\frac{z}{0} = \infty, \forall z \neq 0$；$\frac{0}{0}$ 没有意义。

闭复平面与球面（称为复球面）存在连续一一对应的关系，因为球面是闭的，因而闭复平面是“闭”的。

例子6. 设$z_n \to z_0$，$\arg z$ 表示主值。证明

(1) $\bar{z}_n \to z_0$；

(2) 当$z_0 \neq 0$ 和负数的时候，$arg z_n \to arg z_0$；

(3) $z_0 = \infty$ 呢？

证明. （1）设$z_n = x_n + y_n i$，则$\bar{z}_n = x_n + (-y_n)i$。所以$\bar{z}_n \to z_0$ 等价于$x_n \to x_0$ 并且$-y_n \to -y_0$ 等价于$x_n \to x_0$ 并且$y_n \to y_0$ 等价于$z_n \to z_0$。

（2）可以用极限语言。当ϵ 足够小的时候，当$z_0 \neq 0$ 和负数的时候，与z_0 的辐角主值相差小于ϵ 的复数全体其实是z_0 的一个角形邻域。由极限的定义马上可以说明结论。同时也可以看到，当$z_0 = 0$的时候，辐角主值不存在，而当z_0 位于负半轴的时候，与z_0 的辐角主值相差小于ϵ 的复数全体并不是z_0 的一个角形邻域，此时可以举例说明结论不成立。

（3）当$z_0 = \infty$ 的时候，辐角主值的定义没有意义。但（1）依然是正确的。

1.3 区域与曲线

定义(区域)**.** 复平面的一个子集D称为区域如果（1）它是开集；（2）它是连通的；根据连通性的不同，又分为单连通区域（没有洞）和多连通区域（带洞）。

例如：单位圆内部$|z| < 1$ 是单连通区域；但是如果我们把$|z| < 1$的零点挖掉，那它就变成了多连通区域。一般区域都是曲线围成的：

定义(约当曲线：曲线的参数表示)**.** 复平面上的曲线是指连续映射$z(t) = x(t) + iy(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$；如果曲线的取值除首尾可能一样外其他都不同，称之为若当曲线或简单曲线；特别地，如果若当曲线首尾相连，则称之为若当闭曲线或简单闭曲线。

例子7. 用参数表示直线，圆周，折线等。

- 直线：$z(t) = z_0 t + z_1, t \in \mathbb{R}$ 表示过z_1，方向为z_0 的直线；
- $z(\theta) = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in [0, 2\pi]$ 表示半径为r 的圆周，是简单闭曲线；
- 折线往往需要分开表示，例如表示一个正方形：

$$z(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1]; \\ 1 + i(t-1), & t \in (1,2]; \\ 1 + i - (t-2), & t \in (2,3]; \\ i - (t-3)i, & t \in (3,4]. \end{cases}$$

例如用参数表示一个正三角形：

$$z(t) = \begin{cases} -0.5 + t, & t \in [0,1]; \\ 0.5 + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(t-1), & t \in (1,2]; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(t-2), & t \in (2,3]. \end{cases}$$

简单闭曲线把复平面分成内外两个区域（看起来理所当然但证明及其困难）。

复平面上的区域通常用复数的运算和不等式表示：例如：

- 上半平面：$\mathrm{Im} z > 0$；
- 单位圆内部：$|z| < 1$；
- 单位圆内部去掉0 点：$0 < |z| < 1$；

- 带状区域：$1 < \mathrm{Re}z < 2$；
- 圆环：$r < |z-a| < R$；
- 椭圆区域：$|z-a| + |z-b| < c$。

用复数表示曲线：

例子8. 用复数表示直线$ax+by+c=0, a, b, c \in \mathbb{R}$；求$Re\frac{1}{z} = \alpha$ 所代表的曲线。

解. *(1)* 设$z = x+iy$，则

$$x = Rez = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = Imz = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

所以

$$a\frac{z+\bar{z}}{2} + b\frac{z-\bar{z}}{2i} + c = 0.$$

整理得：

$$\frac{a-ib}{2}z + \frac{a+ib}{2}\bar{z} + c = 0.$$

如果我们用$\alpha = \frac{a+ib}{2}$，则上式写为

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0.$$

(2) 设$z = x+iy$，则

$$Re\frac{1}{z} = Re\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \alpha.$$

如果$\alpha = 0$，则所代表曲线为$x = 0, y \neq 0$ 的直线（去掉0 点）。如果$\alpha \neq 0$，则、

$$(x - \frac{1}{2\alpha})^2 + y^2 = (\frac{1}{2\alpha})^2.$$

为一个圆心在$\frac{1}{2\alpha}$，半径为$\frac{1}{2|\alpha|}$的圆。

作业：1；4；15；21。