6.5 磁场的能量

1　载流线圈系统的磁能

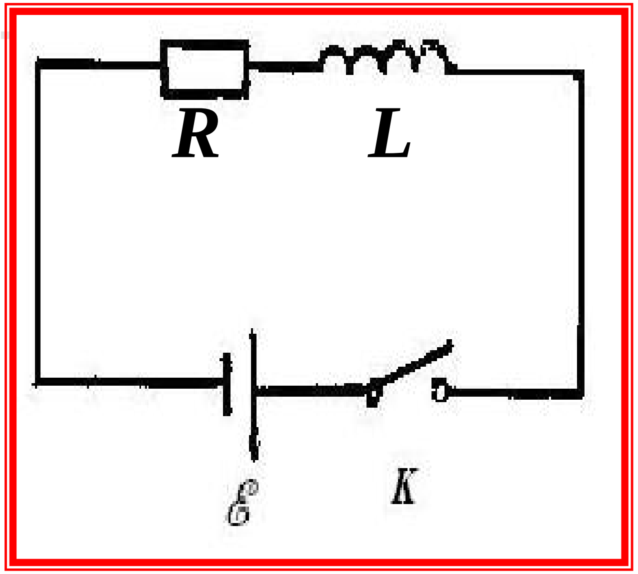
2　载流线圈在外磁场中的磁能

3　**磁场的能量和磁能密度**

本节阐述的方式与电场能量部分几乎相同，读者可以通过对比去学习和掌握本节的内容。

§6.5.1 载流线圈系统的磁能

一、一个载流线圈的磁能



在6.4节中，我们研究了如右图所示的电路。当接通开关后，自感为L的线圈中的电流从零开始，增大到I，而达到稳定。这是一个暂态过程，描述它的方程为：

$$\boxed{\mathscr{E}} - L\frac{dI}{dt} = IR, \text{ 或 } \boxed{\mathscr{E}} + \boxed{\mathscr{E}_i} = IR$$

$\boxed{\mathscr{E}_i}$是线圈L的感应电动势。于是立即可得：

$$\mathscr{E} Idt = LIdI + I^2 Rdt \quad (6.5.1)$$

或

$$\varepsilon Idt = -\varepsilon_i Idt + I^2 Rdt \quad (6.5.2)$$

■式（6.5.1）说明，电源在时间 dt 内作功并消耗能量 $\mathscr{E} Idt$，其中除一部分转变为电阻***R***的焦耳热 $I^2 Rdt$ 之外，另一部分用来**反抗线圈的感应电动势作功**，其值为 $LIdI$ 或 $-\varepsilon_i Idt$。

■我们知道，在开关接通以前线圈中的电流为零，其磁场为零，作为零能态；开关接通后，电流逐渐增大，线圈内磁场逐渐增强，这正是电源消耗一部分能量反抗线圈的感应电动势作功的结果，**该能量转变为线圈的磁能**（即磁场能）W_m：

$$W_m = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2, \qquad (6.5.3)$$

可写成：

$$W_m = \frac{1}{2}I\Phi_m \qquad (6.5.4)$$

式中 $\Phi_m = LI$ 为穿过线圈的全磁通，式（**6.5.3**）或式（**6.5.4**）为**线圈的自感磁能**表达式。

二、N个载流线圈系统的磁能

为了简化讨论，我们**假定**所给的线圈的电阻很小可以忽略，即焦耳热损耗的能量可以忽略。各线圈电流由零逐渐增加到给定值 I_i，将各线圈 $I_i = 0$ 取为零能态。

- 在某一瞬间，在第**i**个线圈中，感应电动势$\mathscr{E}_i$由下式确定：

$$\varepsilon_i = -L_i\frac{dI_i}{dt} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} M_{ki}\frac{dI_k}{dt} \qquad \textbf{(6.5.5)}$$

L_i是第**i**个线圈的自感，M_{ki}是第**k**个线圈和第 **i** 个线圈之间的互感。

- 因此，在第**i**个线圈中，电源反抗感应电动势$\mathscr{E}_i$在 **dt** 时间内所作的功是：

$$dA_i' = -\mathscr{E}_i I_i dt = L_i I_i dI_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} M_{ki} I_i dI_k \qquad \textbf{(6.5.6)}$$

在N个线圈中，总的电源作功是：

$$dA' = \sum_{i=1}^{N} dA_i' = \sum_{i=1}^{N} L_i I_i dI_i + \sum_{\substack{i,k=1\\k\neq i}}^{N} M_{ki} I_i dI_k \qquad \textbf{(6.5.7)}$$

由 $M_{ki} = M_{ik}$ 以及上式右边第二项互换求和指标***i***和***k***结果不变，得：

$$\sum_{\substack{i,k=1\\k\neq i}}^{N} M_{ki} I_i dI_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{i,k=1\\k\neq i}}^{N} M_{ki} I_i dI_k + \sum_{\substack{i,k=1\\i\neq k}}^{N} M_{ik} I_k dI_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1\\i\neq k}}^{N} M_{ik} d(I_i I_k)$$

于是，可将式（**6.5.7**）写成：

$$dA' = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1\\i\neq k}}^{N} M_{ik} d(I_i I_k) + \sum_{i=1}^{N} L_i I_i dI_i$$

- 将上式自始态（全部 $I_i=0$ ）至末态积分便得：

$$A' = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{N} M_{ik} I_i I_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2$$

- 该功转换为系统的磁能 W_m ：

$$W_m = A' = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{N} M_{ik} I_i I_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2 \qquad \textbf{(6.5.8)}$$

于是，方程右边的第一项表示N个线圈系统的**互感磁能**，第二项表示**自感磁能**。

■如果记 $M_{ii}=L_i$，则式（6.5.8）可表为：

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N}M_{ik}I_iI_k \tag{6.5.9}$$

■设 $\Phi_{ki}=M_{ki}I_k=M_{ik}I_k$，它表示第***k***个线圈的电流的磁场通过第***i***个线圈的磁通，且令：

$$\Phi_i=\sum_{k=1}^{N}\Phi_{ki}=\sum_{k=1}^{N}M_{ik}I_k \tag{6.5.10}$$

于是式（6.5.9）又可写成：

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}I_i\Phi_i \tag{6.5.11}$$

式（6.5.9）与式（6.5.11）只不过是式（6.5.8）的另一种表述方式，便于记忆。

§6.5.2 载流线圈在外磁场中的磁能

- 对**两个**载流线圈的系统，我们应用式（**6.5.9**）求得磁能的表达式如下：

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2. \qquad \textbf{(6.5.12)}$$

上式右边第一、第二项分别是两个载流线圈的自感磁能，第三项是两个载流线圈的互感磁能。

- 当我们只对两个载流线圈的相互作用感兴趣时，同样地只研究它们的互感磁能，也就是**互能**，把它记为 W_{12} ，其表达式为：

$$W_{12} = M_{12} I_1 I_2 = \Phi_{12} I_2, \qquad \textbf{(6.5.13)}$$

式（6.5.13）可进一步写成：

$$W_{12} = I_2 \iint_{S_2} \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_2) \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (6.5.14)$$

我们可将该系统的互能看成为载流线圈2在外磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 中所具有的磁能。

■对均匀外磁场中的载流线圈或非均匀外磁场中的小载流线圈，式（6.5.14）右边的 $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_2)$ 可从积分号中提出，简记为$\boldsymbol{B}$，以至：

$$W_{12} = \boldsymbol{B} \cdot (I_2 \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}. \qquad (6.5.15)$$

这是磁矩$\boldsymbol{m}$在外磁场$\boldsymbol{B}$中的磁能表达式，与2.9节例4中对应的电偶极子$\boldsymbol{p}$在外电场中的能量表达式 $W_e = -\mathbf{p} \bullet \mathbf{E}$ 相比差一负号。

■ 如果有一外场$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，$N$个载流线圈处于该场中，这系统在外场中的磁能容易求得，只需推广式（6.5.14）便可得:

$$W_m = \sum_{k=1}^{N} I_k \iint_{S_k} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6.5.16)$$

■ 当外场均匀，式（6.5.16）可写成:

$$W_m = \mathbf{B} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} I_k \mathbf{S}_k \right) = \mathbf{m}_t \cdot \mathbf{B} \qquad (6.5.17)$$

式中 $\boldsymbol{m}_t$ 是整个系统的磁矩。

§6.5.3 磁场的能量和磁能密度

磁能贮存在哪里?

类同第2.9节的解释,磁能贮存在磁场中。

- 从**螺绕环入手**导出磁场的能量和磁能密度。设螺绕环的磁导率为 μ ，长为***l***，截面积为***S***，线圈匝数为***N***，电流强度为***I***，则环内磁场为 $B=\mu nI$ ，螺绕环的自感系数为:

$$L=\frac{NSB}{I}=\frac{NS\mu nI}{I}=\mu n^{2}V \qquad \textbf{(6.5.3.1)}$$

其中，$V=Sl$ 为是螺绕环的体积。由此，螺绕环的磁能 W_m 为:

$$W_m=\frac{1}{2}LI^{2}=\frac{1}{2}V\mu n^{2}I^{2}=\frac{1}{2}VBH \qquad \textbf{(6.5.3.2)}$$

- 定义:

$$w_m = \frac{W_m}{V}$$

它表示螺绕环内单位体积的磁能，称为磁能密度。由式（6.5.3.2）将 BH 代之以一般形式 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$，可得:

$$w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \qquad (6.5.3.3)$$

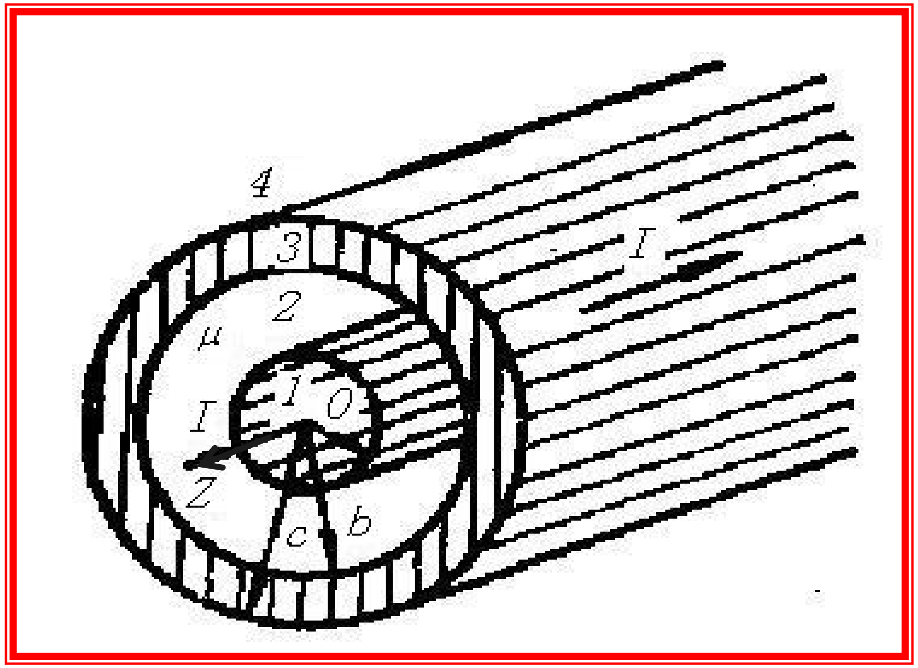
式（6.5.3.3）表明，磁能以磁能密度 $w_m = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}/2$ 贮存于磁场之中。当空间磁场不均匀时，总磁能应当是磁能密度的体积分，即:

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} dV \quad \textbf{(6.5.3.4)}$$

式中积分遍及磁场所在的全部空间V。

- **需说明的是**，按式（**6.5.3.3**）和式（**6.5.3.4**）定义的磁能密度和磁能，计入了介质的磁化能，它**要求介质是线性无损耗的**。
- 将式（**6.5.3.3**）与电能密度$w_e = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}/2$比较，所定义的$w_m$与$w_e$对应，它反映了**磁能储存于磁场之中**的观点，即磁场具有能量，其能量密度为$w_m = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}/2$。

[例1]　一同轴电缆，中心是半径为***a***的圆柱形的导线，外部是内半径为***b***、外半径为***c***的导体圆筒，在内、外导体之间充满磁导率为 μ 的介质，电流在内、外导体中的方向如右下图所示。设电流沿截面均匀分布，求这电缆单位长度的自感系数。



[解] 原来我们从计算磁场和磁通量出发求自感，这种方法在此处不便使用。

- 下面**换一种方法**，即从式（**6.5.3.2**）出发，先求 W_m，再根据 $W_m = LI^2/2$ 计算自感***L***。为计算 W_m，考虑长度为***l***的一段电缆，将其按图划分为为四个区域，分别计算各区的磁场、磁能密度和磁能。

1区： $0 \le r \le a$，$\mu = \mu_0$（对一般导体成立）。由环路定理可得：

$$H_1 = \frac{1}{2\pi r}\frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}, \quad w_{m1} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

$$W_{m1} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^l w_{m1} r dr d\phi dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi}$$

2区： $a \le r \le b$，磁导率为 μ，可求得：

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \qquad B_2 = \frac{\mu I}{2\pi r}, \qquad w_{m2} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_{m2} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l w_{m2} r dr d\phi dz = \frac{\mu l I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

3区：$b \le r \le c$，$\mu = \mu_0$。穿过半径为**r**环路的总电流为

$$\Sigma I = I - \frac{I\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} = \frac{I(c^2 - r^2)}{c^2 - b^2},$$

故有：

$$H_3 = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2}{r} - r\right), \qquad B_3 = \mu_0 H_3,$$

$$w_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2}\left(\frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2\right)$$

$$W_{m3} = \int_b^c \int_0^{2\pi} \int_0^l w_{m3} r dr d\phi dz$$

$$= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right].$$

4区： $r \geq c$ ，穿过半径为***r***的环路的总电流为

$\Sigma I = I - I = 0,$ 于是有 $H_4 = 0, B_4 = 0, w_{m4} = 0$ 和

$$W_{m4} = 0$$

■ 由上述结果计算长度为***l***的电缆的总磁能：

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4}$$

然后由 $L = 2W_m / I^2$ 和 $L_0 = L / l$ 求得电缆单位长度的自感 L_0

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W_m}{lI^2} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\mu_0}{4} + \mu \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_0}{(c^2 - b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right]\right\}.$$