第一章　光的特性

按现代物理学的认知，光是一种电磁波。描述电磁运动规律的基本理论是量子电动力学（quantum electrodynamics，QED）。量子光学利用量子理论研究光的特性以及光与物质相互作用。

对于许多光学问题，量子效应不明显，主要显示出波动性，可以用经典的电磁理论来处理。用经典电磁场理论，来研究光在宏观传播过程中的波动现象（包括干涉、衍射和偏振等），以及光波与介质的相互作用，是波动光学的主要内容。

§0.1 几何光学与费马原理

在波面线度远较波长为大的情况下，研究光的反射、折射和成象等问题，使用光线和波面等概念，会更为方便。

1．几何光学基本定律

几何光学又称光线光学，用一条表示传播方向的线代表光，并称之为**光线**。几何光学的基本定律来自于实验总结，可以表述为：

① 光在均匀介质中的**直线传播定律**。

② 光的**独立传播定律**。

③ 光通过两种介质分界面时的**反射和折射定律**。

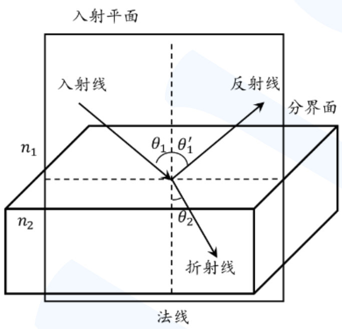


图 0-1 光的反射和折射

在真空或均匀介质中，光沿直线传播。在线性介质中，当不同的光线相交时，每一光线的传播方式都不发生改变。

当光线遇到两种均匀各向同性介质的分界面时，光线被分为反射光线和折射光线。-

如图所示，分界面的法线与入射线确定了**入射平面**。入射线与法线的夹角θ_1称为**入射角**，反射线与与法线的夹角称为**反射角**；入射角与反射角相等，

$$\theta_1' = \theta_1 \tag{0.1}$$

折射线与法线的夹角θ_2称为**折射角**。1621 年荷兰数学家斯涅尔发现了光线的折射定律，

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{0.2}$$

2．费马原理

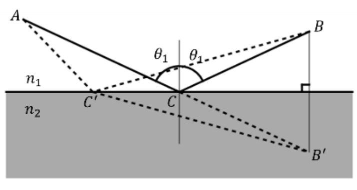


图 0-2 反射符合费马原理

光在均匀介质中直线传播，是沿着一条费时最短的路径行进。那么反射光线是否也是费时最少的路径？

设光线从 A 点到达 B 点，中间在界面上 C 点处被反射，且满足反射定律。我们来比较另外一条路径$\mathrm{AC'B}$和路径ACB的长度。作 B 点关于分界面的镜像点$\mathrm{B'}$，

$$\mathrm{ACB} = \mathrm{AC} + \mathrm{CB} = \mathrm{AC} + \mathrm{CB'} = \mathrm{ACB'} \tag{0.3}$$

$$\mathrm{AC'B} = \mathrm{AC'} + \mathrm{C'B} = \mathrm{AC'} + \mathrm{C'B'} = \mathrm{AC'B'} \tag{0.4}$$

而$\mathrm{ACB'}$是一条直线，所以

$$\mathrm{ACB'} < \mathrm{AC'B'} \tag{0.5}$$

光线遵守反射定律时，通过的路径最短，费时最少。

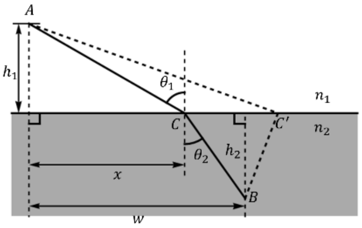


图 0-3 折射符合费马原理

对折射现象，设 A 点到界面的距离为h_1，B 点到界面的距离为h_2，A、B 两点的水平距离（平行于分界面的距离）为w。假若光线在 C 点发生折射，记 A、C 的水平距离为x，那么从 A 点到 B 点所需时间是

$$t = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \tag{0.6}$$

取微商得

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{w - x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (w - x)^2}} \tag{0.7}$$

耗时最少的路径满足

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{w - x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (w - x)^2}} \tag{0.8}$$

即

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \tag{0.9}$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{0.10}$$

因此符合折射定律的路径费时最少。

由以上的讨论，我们可以把三个定律总结为费马原理（1657 年 Pierre de Fermat）：

光线从空间一点传播到另一点，沿所需时间为驻值的路径传播。

写成表达式就是

$$\delta t = 0 \tag{0.11}$$

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} \tag{0.12}$$

乘以真空中的光速，定义为**光程**

$$l = ct = \int_A^B \frac{c}{v} ds = \int_A^B n ds \tag{0.13}$$

则费马原理可以等价的表述为：光线是沿光程为驻值的路径传播的，

$$\delta l = 0 \tag{0.14}$$

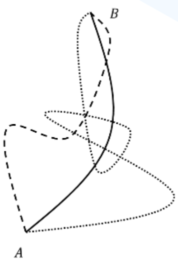


图 0-4 光程最短路径

费马原理不仅可以用于均匀介质中光的传播、反射和折射，也可用于非均匀介质。设介质的折射率为

$$n = n(\vec{r}) \tag{0.15}$$

光线经过的路径是

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \tag{0.16}$$

则光程是积分型泛函

$$l[\vec{r}] = \int_A^B n ds \tag{0.17}$$

利用变分法，可得光线的真实路径满足的程函方程

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\nabla n \tag{0.18}$$

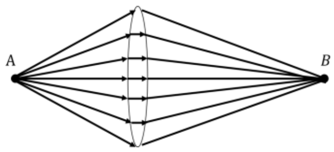


图 0-5 物、象之间等光程

对目镜、望远镜和显微镜等成像系统，从物点A发出的光线，只要进入光瞳，就会汇聚于像点 B，其中每条光线都遵循费马原理，光程取驻值。

驻值有可能是极大值、极小值和常数这三种情形。把成像光线 1 在物点 A 点处的方向微微变动，那么变动后的光线 2 仍会到达像点 B。假如光线 1 的光程是极值，那么相邻的光线 2 的光程就不可能取驻值。因此物象之间的光线，其光程必须取常数，

物点到像点各条光线的光程一定相等。

这称为**物象等光程性**，是费马原理的一个重要推论。

例 沿着光轴方向入射的平行光线，汇聚于凸透镜的焦点，应该怎样考虑等光程性？

解：如图，我们可以取同样的两个凸透镜，共轴摆放。

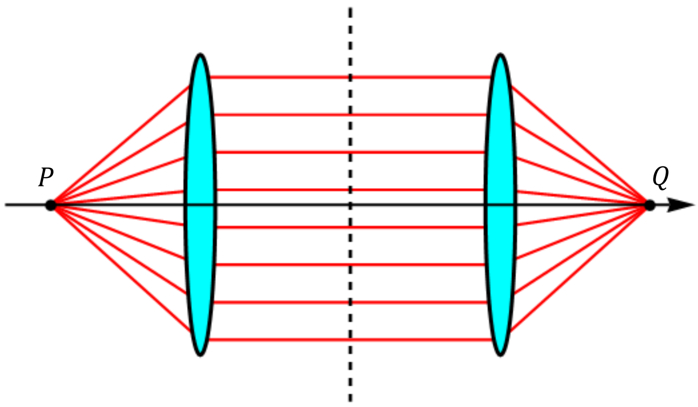


图 0-6 平行光入射时的等光程性

各条光线从左侧透镜的焦点P出射，经左侧透镜后成为平行光，然后相交于右侧透镜的焦点Q，即P、Q分别是物点和像点。

由物象之间的等光程性，这个光路中的所有光线光程相等。整个光路左右对称，把装置用中线一分为二，一半光程也是相等的。

因此，对平行光入射的情形，只要作垂直于光线方向的平面（这是波动光学中的等相面），光线从等相面到焦点的光程必然相等。

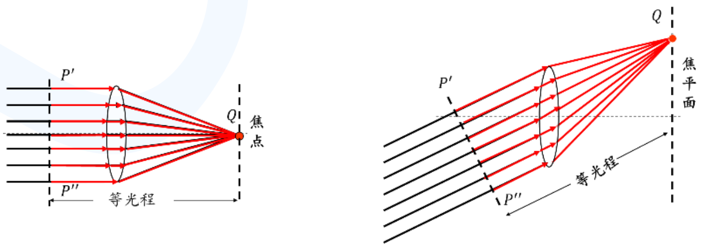


图 0-7 平行光入射时的等光程性

对入射平行光与光轴夹角不等于零的情形，类似的分析可以得出同样的结论。

§0.2 光是电磁波

1. 光波的基本性质

根据麦克斯韦电磁理论，电磁波在介质中的传播速度为

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} \tag{0.19}$$

其中ε_0和μ_0是真空的介电常数和磁导率，ε和μ是是介质的相对介电常数和磁导率。对真空$\varepsilon=\mu=1$，真空中的光速是

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.99792458\times10^8\ \mathrm{m/s} \tag{0.20}$$

按国际单位制，光在真空中行进$1/299792458$秒的距离为 1 米。真空中的光速是测量标准之一，现在已被定义为常量。

对大多数的介质

$$\mu\approx1,\qquad \varepsilon>1 \tag{0.21}$$

按斯涅耳定律，**折射率**应定义为

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon\mu}\approx\sqrt{\varepsilon} \tag{0.22}$$

光在介质中的速率通常小于真空中的光速，折射率大于 1。

一束光波在穿过不同介质时，介质中的电荷在电磁场作用下受迫振动并辐射。光波频率ν保持不变，波速v发生变化。在真空中传播时，其波长λ_0与频率ν的关系为

$$\lambda_0\nu=c \tag{0.23}$$

在介质中传播时，

$$\lambda\nu=v=\frac{c}{n}=\frac{\lambda_0\nu}{n} \tag{0.24}$$

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n} \tag{0.25}$$

波长变短。

人眼视觉细胞能够感受的光波称为**可见光**。光波的波长单位通常使用纳米（$1\mathrm{nm}=10^{-9}\mathrm{m}$）或埃（$1\text{Å}=10^{-10}\mathrm{m}$）。可见光的波长范围介于 390nm 至 760nm 之间。

表 0-1 电 磁 波 谱

	3×10^{20}	6×10^{16}	7×10^{14}	4×10^{14}	3×10^{12}	$10^4\mathrm{Hz}$
γ射线	X 射线	紫外线	可见光	红外线	无线电波	
	0.01	10	390	760	$10^5\mathrm{nm}$	

单一波长的光称为**单色光**，否则称为**复色光**。按傅里叶变换，任何复色光都可以看成不同波长单色光的叠加。对单色光，人眼感受到的颜色与频率（或真空中的波长）有对应关系。

表 0-2 可见光的频率和波长

名称	波长范围	频率范围/Hz
红	760 nm～622 nm	3.9×10^{14}～4.7×10^{14}
橙	622 nm～597 nm	4.7×10^{14}～5.0×10^{14}
黄	597 nm～577 nm	5.0×10^{14}～5.5×10^{14}
绿	577 nm～492 nm	5.5×10^{14}～6.3×10^{14}
青	492 nm～450 nm	6.3×10^{14}～6.7×10^{14}
蓝	450 nm～435 nm	6.7×10^{14}～6.9×10^{14}
紫	435 nm～390 nm	6.9×10^{14}～7.7×10^{14}

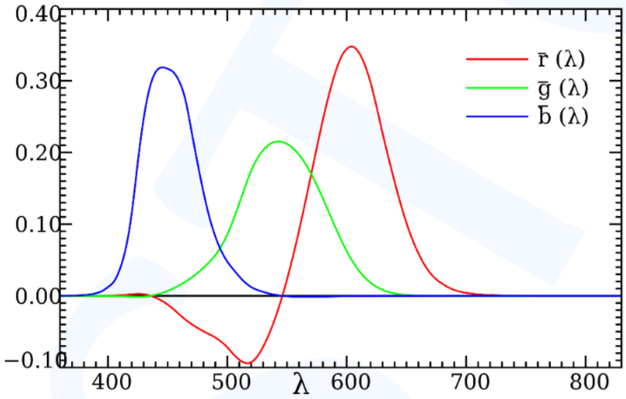


图 0-8 人眼的三种视锥细胞对不同波长光波的响应曲线

（CIE1931 RGB color matching function）

利用分光仪器（如三棱镜和光栅）对各种光源进行光谱分析，会发现它们发出的大都不是单色光。

2．光矢量和光强

光是电磁波，电磁波是变化的电场$\vec{E}$和磁场$\vec{B}$，因此我们可以用描述电磁场的波函数

$$\vec{E}=\vec{E}(t,\vec{r}),\qquad \vec{B}=\vec{B}(t,\vec{r}) \tag{0.26}$$

来描述光波。上式中t是时间，$\vec{r}=(x,y,z)$是空间坐标。

电磁场是麦克斯韦方程的解。当介质分布以及边界条件不同时，波函数也不相同。在光学中常用到**单色平面光波**和**单色球面光波**，是麦克斯韦波动方程的特解。任何光波都可以分解为这些特解的线性组合。

单色光波也称定态光场，具有形式

$$\begin{cases}\vec{E}(t,\vec{r})=\vec{E}_0(\vec{r})\cos\big(\omega t+\phi_E(\vec{r})\big)\\ \vec{B}(t,\vec{r})=\vec{B}_0(\vec{r})\cos\big(\omega t+\phi_M(\vec{r})\big)\end{cases} \tag{0.27}$$

可以看出单色光波满足四个条件：

（1）空间各点的电磁场以同一频率作简谐振荡；

（2）各点的振幅不随时间变化；

（3）初相位是空间分布，与时间无关；

（4）波列在空间上无限延伸，在时间上无限长。

实际光源只能发出近似的单色光波。

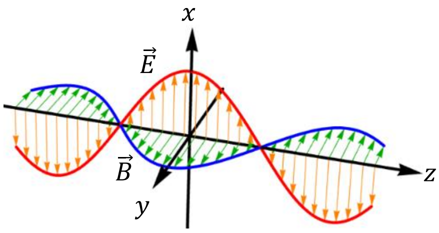


图 0-9 电磁场是横波

在均匀介质中，沿z-轴正方向，以速度v传播的平面简谐电磁波为

$$\begin{cases} \vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\phi_0\right] \\ \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_0 \cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\phi_0\right] \end{cases} \tag{0.28}$$

由电磁理论，$\vec{E}_0$、$\vec{B}_0$和速度$\vec{v}$互相垂直，电场、磁场同相位，且

$$E_0 = cB_0 \tag{0.29}$$

实验表明光与物质作用有多种物理效应。人眼对光的感觉、乳胶感光和光电效应等，主要是电场分量作用的结果。因此，在光学中讨论光波时，一般指电场矢量的振动，并把电场矢量称为**光矢量**。

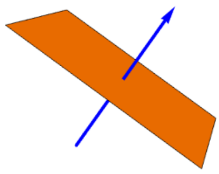


图 0-10 平面波的等相面和波矢量

一列沿任意方向传播的平面单色光波的光矢量为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0\right) \tag{0.30}$$

其中

$$\omega = 2\pi\nu \tag{0.31}$$

是**圆频率**。$\vec{k}$是**波矢量**。波矢量平行于速度方向，模长是

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{0.32}$$

在任一时刻，波的同相位点$\vec{r}$满足

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0 = \phi \tag{0.33}$$

构成**等相面**，是法向为$\vec{k}$的平面，所以称之为**平面波**。

光矢量有三个分量，研究光的偏振现象，必须确定光矢量的方向。但也有很多场合，各束光的振动方向近似平行，或者只需考虑其中一个方向的光矢量分量，可以用**标量波函数**描述光波。

平面波的标量波函数为

$$E = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}+\phi_0\right) \tag{0.34}$$

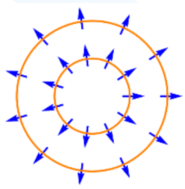


图 0-11 球面波的等相面和波矢量

从点光源发出的单色光波，在均匀各向同性介质中传播时，形成单色球面波。单色球面波的标量波函数是

$$E = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr+\phi_0) \tag{0.35}$$

其中常数A_0，表示$r=1$处的振幅。

在简谐振动中引进复数，可以带来计算上的方便。对任一单色标量波函数

$$E = E_0(\vec{r})\cos(\omega t+\phi(\vec{r})) \tag{0.36}$$

增加虚部，定义**复波函数**

$$\tilde{E}(t,\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} E_0(\vec{r})\cos(\omega t+\phi(\vec{r})) - iE_0(\vec{r})\sin(\omega t+\phi(\vec{r})) = E_0(\vec{r})e^{-i\phi(\vec{r})}e^{-i\omega t} \tag{0.37}$$

同时记**复振幅**为

$$\tilde{E}_0(\vec{r}) = E_0(\vec{r})e^{-i\phi(\vec{r})} \tag{0.38}$$

复波函数是复振幅与时间因子的乘积，

$$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{0.39}$$

单色平面波的复振幅是

$$\tilde{E}_0(\vec{r}) = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi_0)} \tag{0.40}$$

而单色球面波的复振幅是

$$\tilde{E}_0(\vec{r}) = \frac{A_0}{r}e^{i(kr-\phi_0)} \tag{0.41}$$

在电磁学中，电磁场的瞬时能流密度是坡印亭矢量，

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} \tag{0.42}$$

光波的频率（10^{14}Hz）远大于人眼和探测仪器的时间分辨能力。实际接收到的是光的时间平均效应。能流密度的长时间平均（近似等于一个周期的平均）

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \langle|\vec{S}|\rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle\vec{E}\cdot\vec{E}\rangle \tag{0.43}$$

称为光的强度或**光强**。在同一种介质中，只关心光强的相对分布时，定义**相对光强**为

$$I \stackrel{\text{def}}{=} 2\langle\vec{E}\cdot\vec{E}\rangle \tag{0.44}$$

相对光强也简称光强。在比较两种介质中的强度时，不能使用相对光强这种定义。

单色波的光强，等于一个周期T中的平均值，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T}\int_0^T 2E_0^2(\vec{r})\cos^2(\omega t+\phi(\vec{r}))\,dt = \frac{1}{T}E_0^2(\vec{r})\int_0^T\left[1+\cos(2\omega t+2\phi(\vec{r}))\right]dt \\ &= E_0^2(\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r})\tilde{E}_0^*(\vec{r}) \end{aligned} \tag{0.45}$$

对球面波，有

$$I = \frac{A_0^2}{r^2} \tag{0.46}$$

单位时间通过半径r的球面的总能量

$$I\cdot 4\pi r^2 = 4\pi A_0^2 \tag{0.47}$$

是一个常数，符合能量守恒的要求。

以$dI(\lambda)$表示波长区间$(\lambda,\lambda+d\lambda)$光的强度，**谱密度**定义为

$$i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} \tag{0.48}$$

光束的**总光强**为

$$I = \int_0^{+\infty} i(\lambda)d\lambda \tag{0.49}$$

在很大的波长范围内，热辐射光源的强度连续变化，称之为**连续光谱**。气体放电发光时，在一些分立的波长附近形成一条条的谱线，称为**线光谱**。

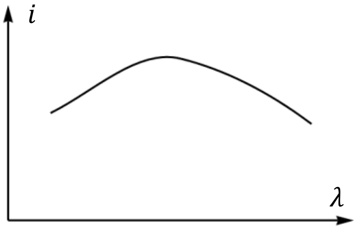


图 0-12 连续谱

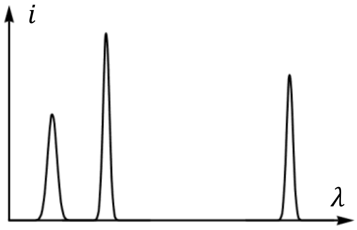


图 0-13 分立谱

不同化学成分，有不同的**特征谱线**。每一条谱线只是近似的单色光。一条谱线的谱密度函数是一条钟形曲线，其分布有一定的宽度，这个宽度$\Delta\lambda$称为**谱线宽度**。

谱线宽度来源于光源的能级宽度、分子热运动和碰撞等效应。这些效应展宽了谱线的频率范围，并导致单次发光的电磁波列长度只有几厘米或几毫米。与之对比，单色光的波列为无限长。激光的谱线宽度远远小于普通光源，这表示激光的**单色性**非常好。

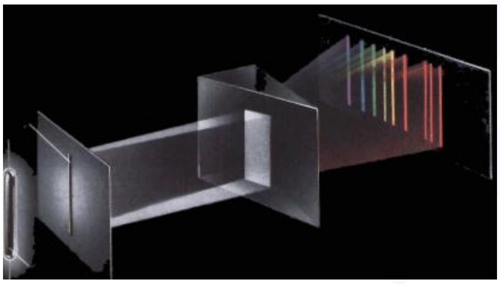


图 0-14 特征谱线

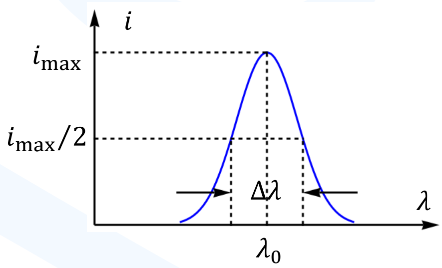


图 0-15 谱线宽度

太阳光谱除了一些暗线外，基本上是连续光谱。阳光给人以白光的感觉。在光学中，定义**白光**是具有和阳光相近的连续光谱的复色光。

3. 叠加原理

线性介质中的麦克斯韦方程，是线性偏微分方程组。方程组的解（即光的波函数），服从**叠加原理**。当多列光波同时存在时，在重叠区域，光矢量是各列波的光矢量之和，

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_1(t,\vec{r}) + \vec{E}_2(t,\vec{r}) + \cdots \tag{0.50}$$

波的叠加原理是干涉、衍射和偏振等波动光学问题的理论基础。在物理学中，机械波、电磁波和物质波等线性系统，都服从叠加原理。

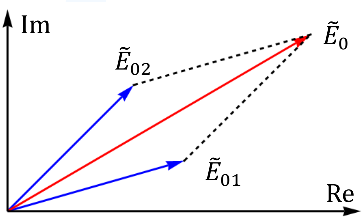


图 0-16 复振幅的叠加

考虑同频同振向的两列波，可用标量波函数描述其光场分布，

$$E_1(t,\vec{r}) = E_{01}(\vec{r})\cos\big(\omega t + \phi_1(\vec{r})\big) \tag{0.51}$$

$$E_2(t,\vec{r}) = E_{02}(\vec{r})\cos\big(\omega t + \phi_2(\vec{r})\big) \tag{0.52}$$

总波函数是两者的叠加，

$$E(t,\vec{r}) = E_{01}(\vec{r})\cos\big(\omega t + \phi_1(\vec{r})\big) + E_{02}(\vec{r})\cos\big(\omega t + \phi_2(\vec{r})\big) \tag{0.53}$$

表示为复波函数，

$$\tilde{E}(t,\vec{r})=\tilde{E}_1(t,\vec{r})+\tilde{E}_2(t,\vec{r})=\left(\tilde{E}_{01}(\vec{r})+\tilde{E}_{01}(\vec{r})\right)e^{-i\omega t} \tag{0.54}$$

所以总复振幅是

$$\tilde{E}_0(\vec{r})=\tilde{E}_{01}(\vec{r})+\tilde{E}_{02}(\vec{r})=E_{01}(\vec{r})e^{i\phi_1(\vec{r})}+E_{02}(\vec{r})e^{i\phi_2(\vec{r})} \tag{0.55}$$

合成光仍是同频率的单色光，但实振幅E_0和相位$\phi(\vec{r})$与两列波都不同，

$$\tilde{E}_0(\vec{r})=E_0(\vec{r})e^{i\phi(\vec{r})} \tag{0.56}$$

$$E_0^2(\vec{r})=\left|\tilde{E}_{01}(\vec{r})+\tilde{E}_{01}(\vec{r})\right|^2=E_{01}^2(\vec{r})+E_{02}^2(\vec{r})+2E_{01}(\vec{r})E_{02}(\vec{r})\cos\left(\phi_1(\vec{r})-\phi_2(\vec{r})\right) \tag{0.57}$$

$$\phi(\vec{r})=\arctan(E_{01}\cos\phi_1+E_{02}\cos\phi_2\,,E_{01}\sin\phi_1+E_{02}\sin\phi_2) \tag{0.58}$$

§0.3 光的干涉

1．干涉现象

英国物理学家玻意耳（Robert Boyle，1627-1691）首次记载了在肥皂泡和玻璃球中产生的彩色薄膜条纹。肥皂泡在白光照射下呈现多彩条纹；一些鸟类羽毛、甲虫外壳和蝴蝶翅膀的颜色，随视线方向变化，这都是常见的干涉现象。

图 0-17 自然界的干涉现象

两束或两束以上的光波，叠加后产生的稳定、不均匀的光强分布（色彩或明暗），即干涉条纹（interference fringe），这种现象称为**光的干涉**（interference）。

2．相干条件

发光的物体称为**光源**。考虑两个点光源发出的单色球面波在全空间的叠加。设两列波同振向，用标量波函数描述。

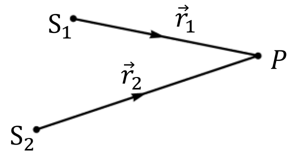


图 0-18 两个点源的叠加

在P点，两列波的波函数分别为

$$E_1 = E_{10}(\vec{r})\cos\left(\omega_1 t + \phi_1(\vec{r})\right) \tag{0.59}$$

$$E_2 = E_{20}(\vec{r})\cos\left(\omega_2 t + \phi_2(\vec{r})\right) \tag{0.60}$$

其中球面波在P点处的相位分别为

$$\phi_1(\vec{r}) = \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda_1}r_1, \qquad \phi_2(\vec{r}) = \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda_2}r_2 \tag{0.61}$$

注意两条传播路径的介质折射率可能不同，λ_1与λ_2不一定相等。

由叠加原理，总振幅是

$$E = E_{10}\cos\left(\omega_1 t + \phi_1(\vec{r})\right) + E_{20}\cos\left(\omega_2 t + \phi_2(\vec{r})\right) \tag{0.62}$$

$$\begin{aligned} E^2 &= E_{10}^2\cos^2\left(\omega_1 t + \phi_1(\vec{r})\right) + E_{20}^2\cos^2\left(\omega_2 t + \phi_2(\vec{r})\right) \\ &\quad + E_{10}E_{20}\{\cos[(\omega_1+\omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] + \cos[(\omega_1-\omega_2)t + \phi_1 - \phi_2]\} \end{aligned} \tag{0.63}$$

当$\omega_1 \neq \omega_2$时，交叉项的时间均值为零，

$$I = 2\langle E^2\rangle = 2\left\langle E_{10}^2\cos^2\left(\omega_1 t + \phi_1(\vec{r})\right) + E_{20}^2\cos^2\left(\omega_2 t + \phi_2(\vec{r})\right)\right\rangle \tag{0.64}$$

$$I = E_{10}^2 + E_{20}^2 = I_1 + I_2 \tag{0.65}$$

P点观测到的光强是两束光的光强之和，不存在干涉现象。

从上面的分析，我们得出产生干涉的必要条件（**相干条件**）是：

（1）存在互相平行的电场分量；

（2）频率相同；

（3）相位差稳定。

两列同频同振向的相干光波叠加后，总光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\langle\cos\delta\rangle \tag{0.66}$$

其中δ是两列波在该点的相位差，

$$\delta = \phi_1 - \phi_2 = \left(\phi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda_1}r_1\right) - \left(\phi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda_2}r_2\right) = \varphi + \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 r_2 - n_1 r_1) \tag{0.67}$$

上式中，

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} \phi_{10} - \phi_{20} \tag{0.68}$$

是光源处的初相位之差；λ_0是单色光在真空中的波长；n_1和n_2是两束光经过的介质的折射率；r_1和r_2分别是两束光传播到 P 点所经过的直线距离。干涉条纹的强度与**光程差**

$$L \overset{\text{def}}{=} n_2 r_2 - n_1 r_1 \tag{0.69}$$

有关。

普通光源的发光过程，是由其中的分子或原子进行的微观过程，初相位与发光时的状态有关。分子或原子发光不是持续的，时间τ一般不超过10^{-8}秒，发出长度$c\tau$的波列。不同的原子，或同一原子不同次发光时，波列的振向、初相位随机变化。这导致在观测时间（一般较长）内，初相位之差φ是随机数，

$$\langle\cos\delta\rangle = 0 \tag{0.70}$$

不能满足相干条件。因此，必须设法使同一原子、同一次发光的波列分成两束，经过不同路

径传播后再叠加，才能在重叠区域产生稳定的干涉场。

激光光源的发光机制与普通光源不同。激光的波列很长，有良好的相干性，能够实现两个独立激光器发出的光束的干涉。快速光电感应器的技术进展，也使得人们能够观察到较短波列的干涉现象。

3. 干涉条纹

单色相干光源发出的两束光，叠加之后得到的光强分布为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \tag{0.71}$$

其中相位差满足

$$\delta = 2m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{0.72}$$

的点，光强为极大值

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \tag{0.73}$$

称为**干涉极大**；而相位差满足

$$\delta = (2m+1)\pi, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{0.74}$$

的点，光强取极小值

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \tag{0.75}$$

称为**干涉极小**。

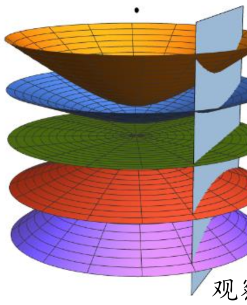


图 0-19 各级干涉极大

当两束光经过不同介质时，把上述**相位差判据**改写为等价的**光程差判据**会更方便。设相干光从同一光源发出，初相位之差为零，则光程差与光强的关系为

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \begin{cases} m\lambda_0, m \in \mathbb{Z}, & \text{干涉极大} \\ \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\lambda_0, m \in \mathbb{Z}, & \text{干涉极小} \end{cases} \tag{0.76}$$

单色光的干涉表现为明暗相间的条纹。干涉现象的显著程度可用**反衬度**γ描述，

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{0.77}$$

反衬度的取值范围为$\gamma \in [0,1]$。

对两束单色相干光，反衬度是

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \tag{0.78}$$

两束光的光强相等时$\gamma = 1$，干涉条纹最清晰。

令

$$I_0 = I_1 + I_2 \tag{0.79}$$

双光束干涉场的光强分布可以写成

$$I = I_0(1 + \gamma\cos\delta) \tag{0.80}$$

4. 杨氏干涉实验

1802 年，托马斯·杨（Tomas Young 英国物理学家，光的波动说的奠基人之一）用一种巧妙的方法稳定了两个点光源之间的相位差。实验装置如图所示。

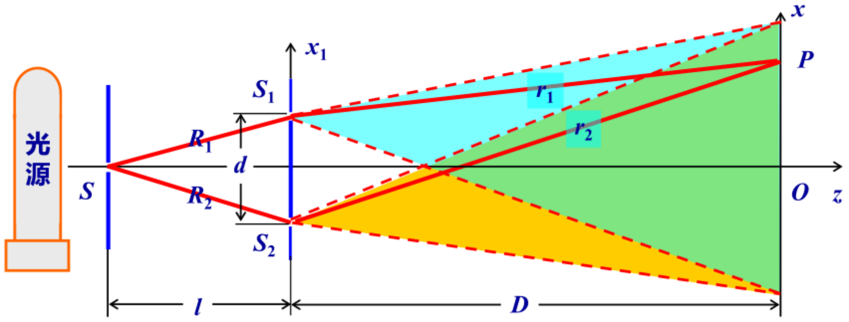


图 0-20 双缝干涉装置

用单色光照射带有针孔S的不透光屏，S可看成点光源，发出球面波。当球面波到达带有两个不透光针孔S_1和S_2的不透光屏时，S_1和S_2分别发出两列球面波。

这两列球面波是相干光，S_1和S_2可看成是相干光源。原因是S_1和S_2处的初相位由距离SS_1和SS_2确定，只要两者的距离差小于单次发光的波列长度，双孔之后的两列波相位差是稳定的。

在两列波的重叠区放置一个屏幕，将观察到干涉条纹。

双孔发出的光波，实际上是由单孔发出的波前（wave front，或称波面）的不同部分发出，故称为**分波前**干涉。

为了提高干涉条纹的亮度，常用互相平行的三条狭缝取代三个小孔，狭缝的方向垂直于示意图的纸面。也可以用目镜代替观察屏，直接观察条纹。如果光源是激光器，得益于激光的高亮度和高相干性，直接用激光照射双孔，就可以看到清晰明亮的图样。

下面具体分析杨氏双缝干涉实验的光强分布。

设双缝等宽，中心距离为d。单缝与双缝等距，双缝到观察屏的垂直距离为D。记屏幕上任意一点P，到双缝的距离为r_1和r_1，到原点O的距离为x。一般来说，双缝距离小到毫米以下，而双缝与观察屏的距离约几米，$d \ll D$且$x \ll D$。

空气的折射率约为 1。两列波在P点的光程差是

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \approx \frac{d}{D}x \tag{0.81}$$

第m级干涉极大的位置在

$$x = m\frac{D\lambda_0}{d}, \qquad m = 0 \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{0.82}$$

第m级干涉极小的位置为

$$x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{D\lambda_0}{d}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{0.83}$$

相邻量极大或极小之间的距离Δx称为**干涉条纹间隔**，

$$\Delta x = \frac{D\lambda_0}{d} \tag{0.84}$$

它反映了干涉条纹的疏密程度。

把光程差ΔL换算成相位差δ，

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta L=\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{d}{D}x \tag{0.85}$$

得屏幕上的光强分布为

$$I(x)=I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda_0 D}x\right)\right]=2I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda_0 D}x\right) \tag{0.86}$$

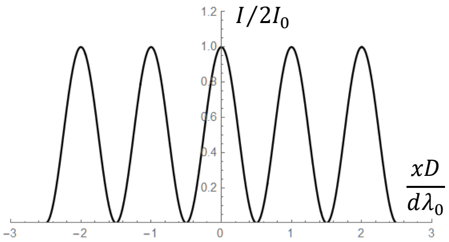


图 0-21 双缝干涉强度分布

图 0-22 双缝干涉图样（模拟图）

如果用白光入射，则每一种波长成分都会形成一套干涉条纹。由于条纹间距与波长有关，除了第零级条纹仍是白色之外，其他各级亮条纹都将变成彩色，而且级次越高，干涉条纹越模糊。

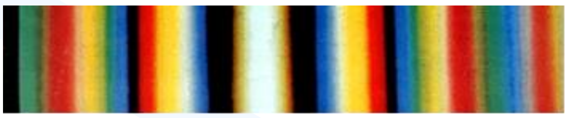


图 0-23 白光的双缝干涉

考虑波长在$[\lambda,\lambda+\Delta\lambda]$之间的复色光入射。设最短波长$\lambda$的$m+1$级极大，刚好与最长波长$\lambda$的第$m$级极大重合，

$$(m+1)\frac{D}{d}\lambda=m\frac{D}{d}(\lambda+\Delta\lambda)\Rightarrow m=\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{0.87}$$

第m级彩色亮带与第$m+1$级彩色亮带衔接，没有暗带间隔。如果$\Delta\lambda$较小，人眼看不出颜色区别，同时第m级之后的条纹也分不出明显的明暗变化。这时的光程差

$$\Delta L_M=m\lambda=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{0.88}$$

称为**最大相干光程差**。

上述最大相干光程差公式，适用于任何双光束干涉装置。光源的单色性越好，则最大相干光程差越大。

例 讨论移动光源时，干涉图样的变化。

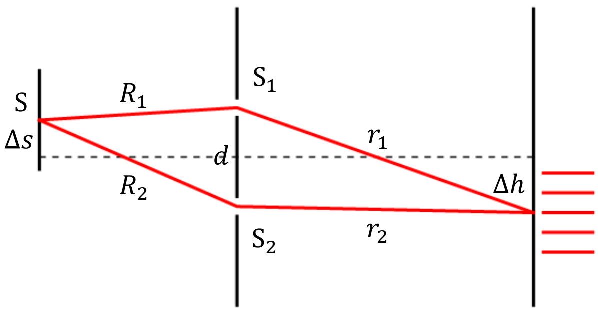


图 0-24 光源与干涉图样的移动

解：

移动双缝实验中的单缝光源，使之偏离光轴Δs；零级亮条纹的位置将偏移Δh（以向上为正），相位差的改变为零，

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{d}{l}\Delta s+\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{d}{D}\Delta h=0 \tag{0.89}$$

因此有

$$\frac{\Delta s}{l} = -\frac{\Delta h}{D} \tag{0.90}$$

零级条纹的移动方向，与光源的移动方向相反。

实际光源都有一定的宽度，是**扩展光源**，可以看成很多独立的发光点组成。各点发出的光波初相位随机，互相之间没有关联，不满足相干条件。干涉场中某点上的光强，是从各点源传播来的光强之和。

当光源宽度b达到**临界宽度**b_c时，光源边缘处发光点形成的条纹，刚好与光源中心点形成的条纹明暗互补，非相干叠加后条纹消失。此时

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{d}{l}\frac{b_c}{2} = \pi \tag{0.91}$$

所以临界宽度是

$$b_c = \frac{l}{d}\lambda_0 \tag{0.92}$$

如果把整个干涉装置浸没在水中，光的波长变短，干涉条纹变密，上述结论只需替换波长即可。当介质的折射率$n \neq 1$时，

$$b < b_c = \frac{l}{d}\lambda \tag{0.93}$$

例　在杨氏双缝实验中，屏与双缝距离为 1m，用波长 589.3nm 的钠光灯作为光源。设人眼能分辨最小距离为 0.15mm 的两条明纹。为了看到干涉条纹的，双缝的最大间距是多少？

解：利用我们得到条纹间隔公式，

$$\Delta x = \frac{D\lambda_0}{d} \Longrightarrow d = \frac{D\lambda_0}{d} \tag{0.94}$$

计算的最大间距，

$$d = \frac{1\mathrm{m}\cdot 589.3\mathrm{nm}}{0.15\mathrm{mm}} = 3.93\mathrm{mm} \tag{0.95}$$

例　用很薄的透明云母片（折射率$n = 1.58$）覆盖在双缝实验的一条缝上，发现屏幕上的第 7 级明条纹刚好移到观察屏中央，即原来的 0 级明条纹的位置。实验中使用的入射光波长是 $550\mathrm{nm}$。求云母片的厚度h。

解：按题意，在移动云母片以覆盖其中一条缝的过程中，经两条缝的两束光波到达观察屏时，光程差改变了 7 倍波长。改变的原因是云母片的折射率 1.58 不等于空气的折射率 1，

$$(1.58-1)h = 7 \times 550\mathrm{nm} \tag{0.96}$$

解出$h = 6.6\mu\mathrm{m}$。

用双缝干涉可以精确测量样品厚度。如果已知样品厚度和波长，也可以用双缝装置来测量材料的折射率。

5．薄膜干涉*

当一束单色光照射到透明介质薄膜时，在薄膜上表面会产生反射光和折射光。折射光在下表面反射后，再从上表面折射回原来的介质。两表面的反射光束是相干的，在重叠区域发

生干涉。

两列波都是从入射光在同一空间位置（上表面）分离出来的，所以薄膜干涉称为**分振幅干涉**。分波前法和分振幅法是从普通光源获得相干光的主要方法。

如图所示，光源发出的单色平行光照射到薄膜上。薄膜的上下表面近似平行，因此两表面的反射光近似平行，汇聚于无穷远处。薄膜厚度为h，折射率为n，薄膜上方介质的折射率为n_1；光的入射角为θ_i，折射角为θ_r。

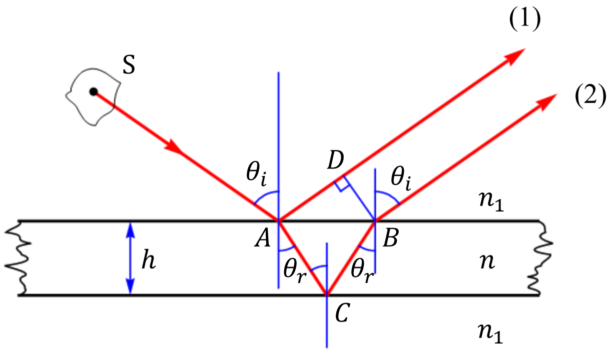


图 0-25 薄膜干涉

上表面是光疏介质到光密介质的界面，下表面是光密介质到光疏介质的界面。电磁理论可以证明，光在这样两种性质相反的界面反射时，两反射光之间会产生大小为π的附加相位差，等效于半个波长的额外光程差，称之为**半波损失**。

两束出射光的光程差为

$$\Delta L = n(|AC| + |CB|) - n_1|AD| + \frac{\lambda}{2} \tag{0.97}$$

由于

$$|AC| \approx |BC| \approx \frac{h}{\cos\theta_r} \tag{0.98}$$

$$|AD| \approx |AB|\sin\theta_i \approx 2h\tan\theta_r\sin\theta_i \tag{0.99}$$

光程差近似为

$$\Delta L = \frac{2nh}{\cos\theta_r} - 2n_1 h\tan\theta_r\sin\theta_i + \frac{\lambda}{2} \tag{0.100}$$

$$= \frac{2h}{\cos\theta_r}(n - n_1\sin\theta_r\sin\theta_i) + \frac{\lambda}{2} \tag{0.101}$$

再由折射定律

$$n_1\sin\theta_i = n\sin\theta_r \tag{0.102}$$

$$\Delta L = \frac{2h}{\cos\theta_r}n(1-\sin^2\theta_r) + \frac{\lambda}{2} \tag{0.103}$$

化简后得

$$\Delta L = 2nh\cos\theta_r + \frac{\lambda}{2} \tag{0.104}$$

或者写成

$$\Delta L = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\theta_i} + \frac{\lambda}{2} \tag{0.105}$$

对于等厚度的均匀薄膜，n, h都是常数，光程差只取决于入射角θ_i。具有相同入射角的入射光束所形成的两束反射光，具有相同的光程差，叠加后属于同一级干涉条纹，因此等厚薄膜的干涉又称**等倾干涉**。

下图为观察等倾干涉现象的实验装置。其中M是半反射镜，与薄膜夹角为45°。点光源S发出的同一锥面（以S为顶点，水平方向为对称轴）上的光线，被M反射后，以相同角度入

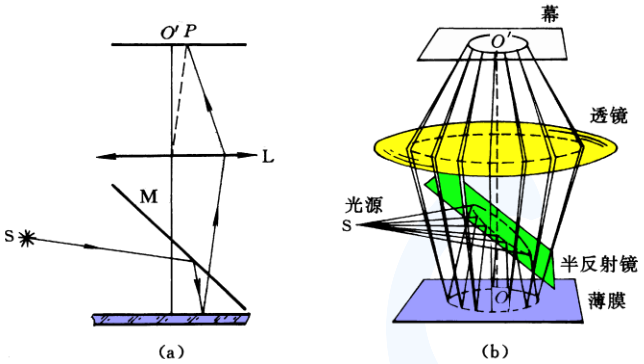


图 0-26 等倾干涉的观察装置

射薄膜上表面。在薄膜上、下表面反射后，形成锥面形状的相干反射光，且两个锥面平行。两反射光被凸透镜汇聚于焦平面处的屏幕上，形成一个圆周。

屏幕上的点是上下表面反射的两光线交会处，透镜L不改变两者的光程差。同一圆周上的点对应的倾角相等，所以等光程，从而等倾干涉条纹为圆环形。

等倾干涉条纹的大小可以用折射角表示，亮圆环满足

$$2nh\cos\theta_r+\frac{\lambda}{2}=m\lambda,\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{0.106}$$

而暗圆环则满足

$$2nh\cos\theta_r=m\lambda,\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{0.107}$$

等倾条纹为一组中心疏，边缘密的同心圆环，干涉级次内高外低。

图 0-27 等倾干涉条纹（示意图）

改变等倾干涉装置中点光源S的位置，不会改变干涉条纹半径。所以实际观察时，总是使用面光源，以使条纹更加明亮清晰。

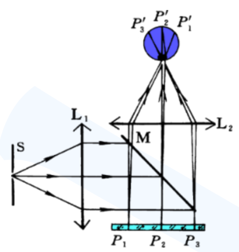


图 0-28 等厚条纹的观察装置

如果薄膜的厚度不均匀，使用平行光垂直入射薄膜，可以使上下表面反射光的光程差只与该处的厚度有关。观察装置如图所示。

两束光的光程差为

$$\Delta L=2nh+\frac{\lambda}{2} \tag{0.108}$$

因此明条纹的位置满足

$$2nh+\frac{\lambda}{2}=m\lambda,\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{0.109}$$

暗条纹位置满足

$$2nh=m\lambda,\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{0.110}$$

同级干涉条纹对应薄膜的等厚线，这种干涉称为**等厚干涉**。

例 劈尖干涉

两块平板玻璃叠合在一起，一端接触，上面玻璃的另一端微微抬起。用单色光垂直于表

面入射。玻璃之间的空气形成一个劈尖。在两块玻璃的四个表面有 4 束反射光。

玻璃有一定的厚度，只有空气层上下表面的反射光光程差没有超过最大相干光程差，等厚条纹由这两束光相干叠加后确定。两束光的光程差为$\Delta L = 2h - \lambda/2$，干涉条纹是与棱边平行的直条纹。

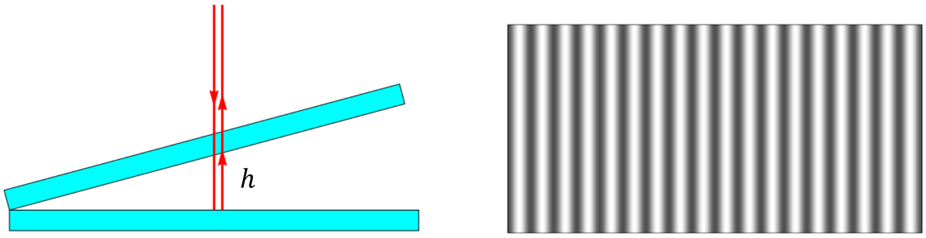


图 0-29 劈尖干涉

例　牛顿环装置

一块平凸透镜放置在平板玻璃上，两者之间的空气膜上下表面的反射光相干叠加，形成等厚干涉条纹。光程差是

$$\Delta L = 2h + \frac{\lambda}{2} = 2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) - \frac{\lambda}{2} \approx \frac{r^2}{R} - \frac{\lambda}{2} \tag{0.111}$$

条纹是同心圆，半波损失使得圆心是暗斑。第m级明条纹的半径满足

$$\frac{r_m^2}{R} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \tag{0.112}$$

$$r_m = \sqrt{(m + 1/2)R\lambda} \tag{0.113}$$

若记中间为第 0 级暗斑，则向外第m条暗条纹的位置在

$$r_m' = \sqrt{mR\lambda} \tag{0.114}$$

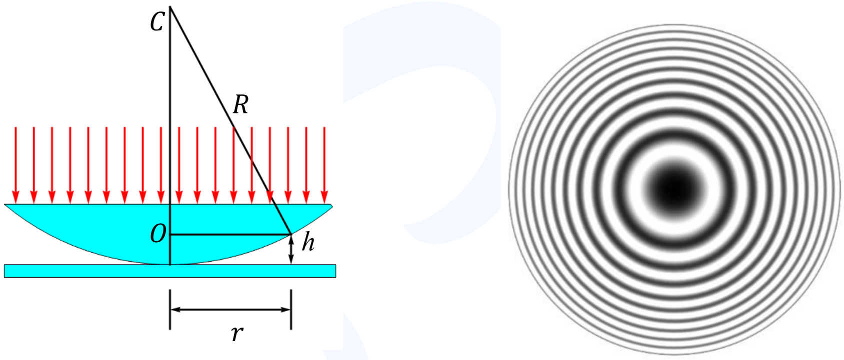


图 0-30 牛顿环

§0.4 光的衍射

1．衍射现象

光波遇到障碍物时，会偏离几何光学的直线传播而绕行，这种现象称为光的**衍射**（diffraction）。衍射可以使几何阴影区内产生明纹或亮斑，也可以使几何照明区出现暗纹或暗斑。

衍射是一切波动的共同特征。“未见其人，先闻其声”，是声波的衍射。在日常生活中，人们随时可见声波、水波和低频无线电波的衍射，但是很少觉察到光波衍射。原因是光波的波长较短，且普通光源是非相干的面光源。

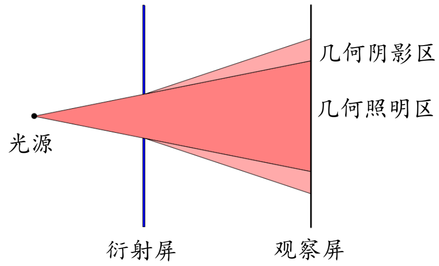


图 0-31 衍射装置

格里马耳迪（F.M. Grimaldi）于 1863 年首先观察到光的衍射现象：用一个点光源照明小棍，在小棍阴影中出现了光带。

夜晚看远处的路灯，或者对路灯、星空拍照，能观察到拉长的光芒，这是光在瞳孔或镜头光阑形成的**衍射图样**（diffraction pattern）。

当我们用高亮度的相干光源，照亮不同形状遮光屏（称为**衍射屏**），在其后的**观察屏**（又称接收屏）上能看到清晰的衍射图样。不同的衍射屏，衍射图样不同。

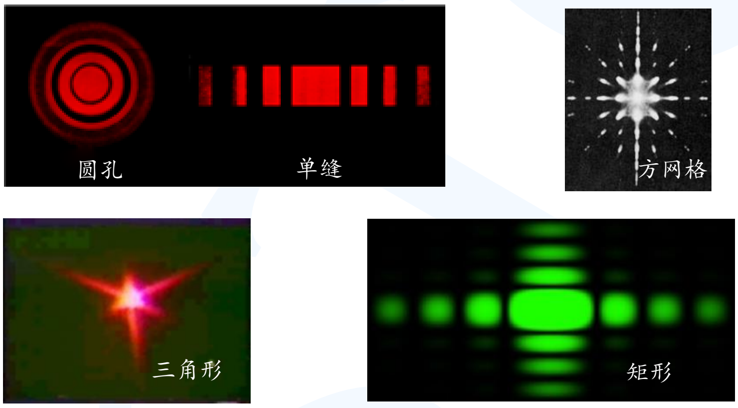


图 0-32 几种衍射图样

衍射现象有两个鲜明的特征：

（1）限制越严，扩展越烈。光束在衍射屏的某一方向受到限制，那么远处观察屏上的光强就沿该方向扩展开来。

（2）障碍物的尺度ρ与波长λ之比，决定了衍射的强弱——当$\rho > 10^3\lambda$时，衍射不明显，近乎直线传播；当$\lambda < \rho < 10^3\lambda$时，衍射效应显著，观察屏上出现与衍射屏对应的衍射图样；当$\rho < \lambda$时，衍射现象极其明显，向光的散射过渡。

2. 惠更斯-菲涅尔原理

法国物理学家菲涅尔（A.I. Fresnel，1788-1827），1818 年在惠更斯（Christiaan Huygens，1629-1695）的基础上，提出了“次波相干叠加”的概念。

光源S发出的光波到达波前Σ，波前Σ上任一面元$d\Sigma$均发出次波，次波在点P相干叠加后得到该点的总复振幅。

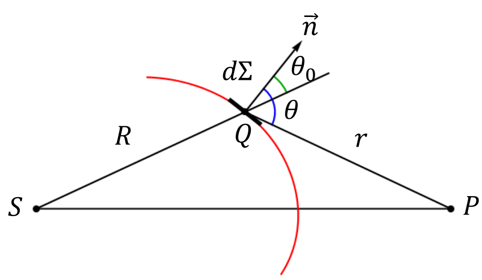


图 0-33 惠更斯-菲涅尔原理

惠更斯-菲涅尔原理表达为

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} d\tilde{E}(P) \tag{0.115}$$

各列次波对P点贡献的复振幅$d\tilde{E}(P)$分析如下：

$$\begin{aligned} d\tilde{E}(P) \quad & \propto \tilde{E}_0(Q) && \text{面元中心的复振幅} \\ & \propto d\Sigma && \text{面元的面积} \\ & \propto \frac{e^{ikr}}{r} && \text{次波源发射球面波到达场点}P \\ & \propto F(\theta_0, \theta) && \text{倾斜因子，面元发射的次波并非各向同性} \end{aligned} \tag{0.116}$$

最后得到菲涅尔衍射积分公式，

$$\tilde{E}(P) = K \oiint_{\Sigma} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \tag{0.117}$$

其中常数K是比例因子。

3. 基尔霍夫衍射公式

六十多年后的 1880 年，德国物理学家基尔霍夫（G.R. Kirchhoff，1824-1887）利用光的电磁理论，严格证明了

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{\lambda} \oiint_{\Sigma} \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2} \tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \tag{0.118}$$

称为**菲涅尔-基尔霍夫衍射公式**。所以倾斜因子为

$$F(\theta_0, \theta) = \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2} \tag{0.119}$$

比例常数是

$$K = -\frac{i}{\lambda} \tag{0.120}$$

入射光与衍射光不都是平行光的衍射，称为**菲涅尔衍射**或**近场衍射**；入射光与衍射光都是平行光的衍射，称为**夫琅和费衍射**（Fraunhofer diffraction）或**远场衍射**。

平行光几乎垂直入射衍射屏的夫琅和费衍射，满足傍轴条件

$$\theta_0 \approx 0, \qquad \theta \approx 0 \tag{0.121}$$

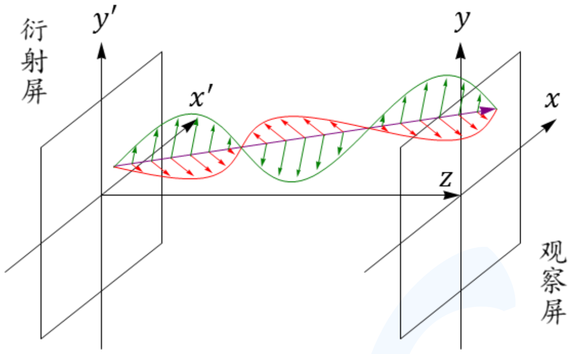


图 0-34 夫琅禾费衍射

在傍轴近似以及远场近似下，观察屏上的复振幅为

$$\tilde{E}(x,y) = -\frac{i}{\lambda}\frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}}{z}\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}_0(x',y')\tilde{t}(x',y')e^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}dx'dy' \qquad (0.122)$$

其中$\tilde{t}(x',y')$是**屏函数**，表示衍射屏对入射光波的调制，其模长$|\tilde{t}| \le 1$表示振幅透过率，相因子表示衍射屏导致的相位延迟。

如果入射光是平面波，振幅$\tilde{E}_0(x',y')$是常数，那么观察屏上的复振幅$\tilde{E}(x,y)$是屏函数的傅立叶变换。衍射的过程，即积分变换。

由衍射公式可以导出一个有用的结论。考虑一对互补的衍射屏，衍射屏a透光的部分，正好是衍射屏b不透光的部分，反之亦然，满足

$$\tilde{t}_a + \tilde{t}_b = 1 \qquad (0.123)$$

图 0-35 互补的衍射屏

$\tilde{t} = 1$即衍射屏不存在，入射光不受障碍地自由传播；那么有

$$\tilde{E}_a(P) + \tilde{E}_b(P) = \tilde{E}_0(P) \qquad (0.124)$$

以互补屏分别作为衍射屏得到的复振幅分布之和，等于无屏的复振幅$\tilde{E}_0(P)$。这个结论称为**巴比涅原理**（A. Babinet）。

在夫琅和费衍射系统中，经常会用两组透镜实现平行光入射，以及出射平行光的汇聚叠加。无衍射屏时，观察屏上只有一个像点是亮点，其它点处的复振幅均为零，

$$\tilde{E}_0(P) = 0 \qquad (0.125)$$

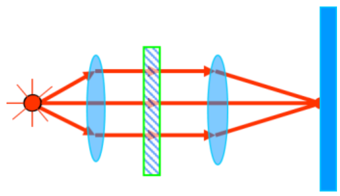


图 0-36 互补屏的衍射

于是

$$\tilde{E}_a(P) = -\tilde{E}_b(P) \qquad (0.126)$$

$$I_a(P) = I_b(P) \qquad (0.127)$$

除几何像点之外，互补屏产生的衍射图样完全相同，而不是明暗互补。

4. 单缝夫琅和费衍射

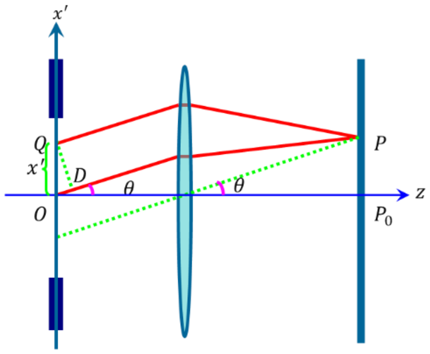


图 0-37 单缝衍射

以一个宽为a的狭缝作为衍射屏，进行夫琅和费衍射，建立坐标系如图。

接收屏上的复振幅为

$$\tilde{E}(x) \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\frac{k}{z}xx'}dx' \propto \operatorname{sinc}\frac{kax}{2z} \qquad (0.128)$$

其中辛格函数的定义是

$$\sin x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad (0.129)$$

由于满足傍轴条件，

$$\sin\theta \approx \frac{x}{z} \qquad (0.130)$$

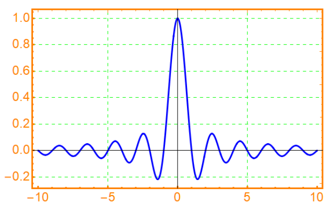


图 0-38 单缝衍射的复振幅

衍射角θ是接收屏上P点对应的衍射光线与入射线的夹角。再引进参数

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{ka}{2}\sin\theta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \qquad (0.131)$$

接收屏上的复振幅分布可以写成

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 \operatorname{sinc}\alpha \qquad (0.132)$$

光强分布为

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2\alpha \qquad (0.133)$$

相对强度$I/I_0 = \operatorname{sinc}^2\alpha$称为**单缝衍射因子**。

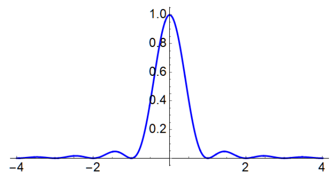


图 0-39 单缝衍射的光强分布

零级衍射斑的中心为**主极强**，出现在$\theta = 0$处，即几何光学的像点。零级衍射斑集中了绝大部分的光能。

次极强的位置满足

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \tan\alpha \qquad (0.134)$$

这个超越方程的正根，有渐进表达式

$$\alpha \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}, \qquad n = 1,2,3,\cdots \qquad (0.135)$$

或者

$$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots \qquad (0.136)$$

衍射角θ满足

$$\sin\theta = \pm 1.43\frac{\lambda}{a}, \pm 2.46\frac{\lambda}{a}, \pm 3.47\frac{\lambda}{a}, \cdots \qquad (0.137)$$

次极强的光强，比主极强的光强小得多。

暗条纹的位置满足

$$\operatorname{sinc}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = m\pi, \sin\theta = m\frac{\lambda}{a}, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \qquad (0.138)$$

相邻暗纹之间的角距离为亮斑的**角宽度**。零级衍射斑的**半角宽**是

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \tag{0.139}$$

比高级衍射斑的半角宽大一倍。

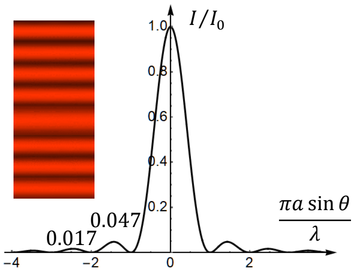


图 0-40 单缝衍射的衍射斑

可见缝宽越小，衍射斑越宽；反之，当缝宽很大时，$\Delta\theta \to 0$，衍射场集中在原方向，相当于直线传播。

从另一方面看，当波长$\lambda \to 0$时，$\Delta\theta$趋于零，衍射效应可以忽略，因此几何光学是波动光学的短波极限。

细丝是单缝的互补屏，除了几何像点，其衍射图样与单缝衍射图样完全相同。

例 在夫琅禾费单缝衍射中，使用波长 546nm 的单色平行光作为入射光源，缝宽 0.1mm，透镜焦距 50cm，观察屏在透镜后方的焦平面处。求中央明纹的宽度。

解：中央明纹的半角宽为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{546\text{nm}}{0.1\text{mm}} = 5.46 \times 10^{-3}\text{rad} \tag{0.140}$$

条纹宽度是

$$\Delta x = f \cdot 2\Delta\theta = 50 \times 2 \times 5.46 \times 10^{-3} = 0.546\text{cm} \tag{0.141}$$

5. 圆孔夫琅和费衍射*

光学仪器的光瞳通常是圆形的，圆孔衍射对于分析仪器的成像能力有重要意义。把单缝衍射屏换成圆孔衍射屏，就成了夫琅和费圆孔衍射装置。

利用基尔霍夫衍射公式，可求得圆孔衍射的强度分布

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2 \tag{0.142}$$

其中$J_1(x)$是一阶贝塞尔函数，

$$x \overset{\text{def}}{=} \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta \tag{0.143}$$

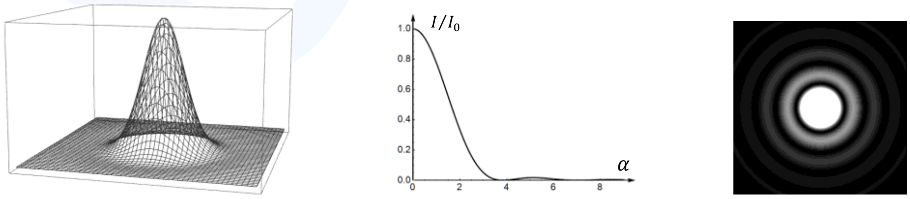


图 0-41 圆孔衍射的艾里斑

衍射图样为同心圆，中间θ=0 处取得最大光强，称为**中央极大**。中央亮斑称为**艾里斑**。艾里斑占有全部光能的83.8%，中间是几何光学的像点。艾里斑的半角宽为

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{0.144}$$

上式中D是圆孔直径。

艾里斑给出了传统光学成像系统的分辨率极限。成像时，每一个物点在像平面对应的不是一个几何像点，而是一个艾里斑。两个物点靠得很近时，两个艾里斑会重叠在一起，无法分辨。

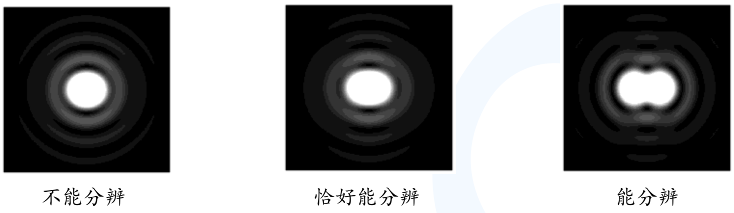


图 0-42 瑞利判据

两个艾里斑的角距离刚好等于每个艾里斑的半角宽，是两个点能够被分辨的极限条件，称为**瑞利判据**。

例 人眼瞳孔直径约 3mm，最敏感的黄绿光波长是 550nm。求眼睛的最小分辨角，并计算在明视距离 25cm 处能看清的最小间隔。

解：由瑞利判据，最小分辨角为

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 2.2\times10^{-4}\mathrm{rad} \tag{0.145}$$

明视距离处能看清的最小间隔是

$$\Delta x = d\cdot\Delta\theta = 25\times2.2\times10^{-4} = 0.055\mathrm{mm} \tag{0.146}$$

6. 光栅*

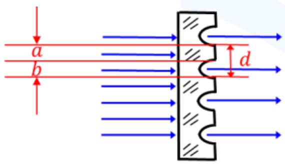


图 0-43 透射型光栅

光栅是具有周期性空间结构或光学性能的衍射屏。常用的透射光栅，是在一块不透明的平板（比如在玻璃上镀膜）上，刻画出一系列等宽等距的平行透光狭缝。

利用光栅衍射可以分析光谱和物质结构。

设光栅透光部分宽度（缝宽）为a，不透光部分宽度为b，**光栅常数**$d = a + b$，狭缝的数目为N。那么衍射屏上的复振幅为

$$\tilde{E}(x) \propto \sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\frac{a}{2}+nd}^{\frac{a}{2}+nd} e^{-i\frac{k}{z}xx'}dx' = \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{k}{z}xnd}\right)\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\frac{k}{z}xx'}dx' \tag{0.147}$$

$$\tilde{E}(x) \propto \frac{e^{-iNdk\frac{x}{z}}-1}{e^{-idk\frac{x}{z}}-1}\operatorname{sinc}\alpha \tag{0.148}$$

引进符号

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \tag{0.149}$$

那么有

$$d\frac{k}{z}x \approx \delta, \qquad \tilde{E} \propto e^{-i\frac{N-1}{2}\delta} \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} \operatorname{sinc}\alpha \tag{0.150}$$

接收屏上的实振幅为

$$E = E_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \operatorname{sinc}\alpha \tag{0.151}$$

光栅衍射振幅是多缝干涉因子

$$\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \tag{0.152}$$

和单缝衍射因子$\operatorname{sinc}\alpha$的乘积。

从计算过程我们可以看出，干涉和衍射现象都是叠加原理造成的结果，只不过干涉是可数项振幅的求和，衍射是对连续无穷多项振幅的积分。

强度分布是实振幅的平方，

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2, \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta, \qquad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \tag{0.153}$$

光栅在一厘米内有几百到上万条刻痕，多缝干涉因子随衍射角快速变化。相对的，单缝衍射因子是缓慢变化的函数，在局部可近似地当成常数。

忽略缓变的单缝衍射因子，则光强的变化由多缝干涉因子

$$g(\delta) = \begin{cases} N^2, & \delta = 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \\ \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2, & \delta \neq 2m\pi \end{cases} \tag{0.154}$$

决定。求导得

$$g'(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 2m\pi \\ \frac{\sin N\delta/2}{\sin^3 \delta/2}\left(N \sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{N\delta}{2} - \cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{N\delta}{2}\right), & \delta \neq 2m\pi \end{cases} \tag{0.155}$$

主极大的位置满足

$$\delta = 2m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{0.156}$$

次极大的位置满足

$$\cot\frac{\delta}{2} = N\cot\frac{N\delta}{2}, \qquad \sin\frac{\delta}{2} \neq 0 \tag{0.157}$$

而零点的位置在

$$\delta = 2\pi(m + n/N), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{0.158}$$

可见两个主极大之间，有$N-1$个零点，有$N-2$个次极大。

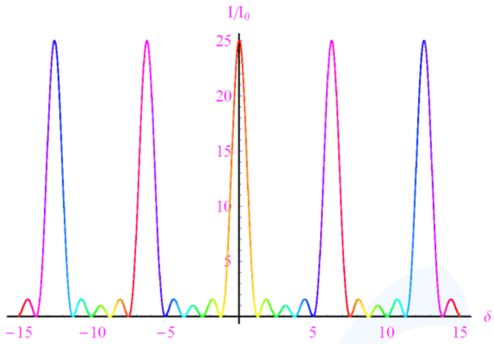


图 0-44 $N=5$时的多缝干涉因子

从主极大到相邻的极小（零点）之间的角距离$\Delta\theta$称为**半角宽**，

$$\Delta\delta=2\pi(m+1/N)-2m\pi=2\pi/N \tag{0.159}$$

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m}\approx\frac{\lambda}{Nd} \tag{0.160}$$

当N很大时，能量高度集中于各级主极大方向，衍射图样是黑背景上的亮线，正适合用来作精密测量。

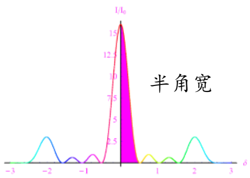


图 0-45 主极大的半角宽

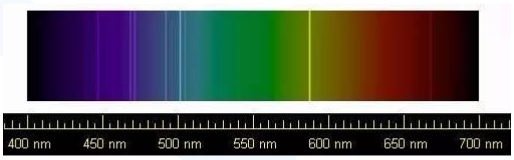


图 0-46 氦的吸收光谱

主极大满足的关系

$$\delta=2m\pi \tag{0.161}$$

给出**光栅方程**

$$d\sin\theta=m\lambda \tag{0.162}$$

例 以波长为 589. 3 nm 的钠黄光垂直入射到光栅上，测得第二级谱线的偏角为 28. 1°；用另一未知波长的单色光入射时，其第一级谱线的偏角为 13. 5°。

（1） 试求未知波长；

（2） 试问未知波长的谱线最多能观测到第几级？

解：（1）记

$$\lambda_0=589.3\text{nm},\qquad \theta_0=28.1°,\qquad k_0=2, \tag{0.163}$$

$$\theta=13.5°,\qquad k=1, \tag{0.164}$$

而λ为未知波长，则按题意可列出如下的光栅方程：

$$d\sin\theta_0=2\lambda_0 \tag{0.165}$$

$$d\sin\theta=\lambda \tag{0.166}$$

解得

$$\lambda=2\lambda_0\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}=584.9\text{nm} \tag{0.167}$$

（2）由光栅方程可以看出，k 的最大值由条件$|\sin\theta|\le 1$决定。对波长为584. 9nm的谱线，该条件给出

$$k \le \frac{d}{\lambda} = \frac{2\lambda_0}{\lambda \sin \theta_0} = 4.3 \tag{0.168}$$

∴最多能观测到第四级谱线。

§0.5 光的偏振

1. 偏振光的分类

光是横波。光波的电、磁分量方向都与传播的方向垂直，从而出现各种偏振状态。一般把光的偏振态分为五种：线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光、自然光和部分偏振光。

沿z-轴直线传播的平面波，光矢量在x、y方向振荡，形式为

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega t - kz) \\ A_2 \cos(\omega t - kz + \Delta\phi) \end{pmatrix} \tag{0.169}$$

可写成

$$\frac{E_x}{A_1} = \cos(\omega t - kz) \tag{0.170}$$

$$\frac{E_y}{A_2} = \cos\Delta\phi \cos(\omega t - kz) - \sin\Delta\phi \sin(\omega t - kz) \tag{0.171}$$

解出$\cos(\omega t - kz)$和$\sin(\omega t - kz)$，计算两者的平方和，得

$$\frac{E_x^2}{A_1^2} + \frac{E_y^2}{A_2^2} - 2\frac{E_x E_y}{A_1 A_2}\cos\Delta\phi = \sin^2\Delta\phi \tag{0.172}$$

（1）当$\Delta\phi = 0, \pi$时，

$$\frac{E_x}{A_1} = \pm\frac{E_y}{A_2} \tag{0.173}$$

是**线偏振光**（或称平面偏振光），偏振方向分别在一、三象限和二、四象限。

（2）当$-\pi < \Delta\phi < 0$时，迎着光线看，矢端逆时针旋转，称为**左旋椭圆偏振光**；当$0 < \Delta\phi < \pi$时，矢端顺时针旋转，称为**右旋椭圆偏振光**。

（3）当$\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$，且$A_1 = A_2$时，是**右旋圆偏振光**和**左旋圆偏振光**。

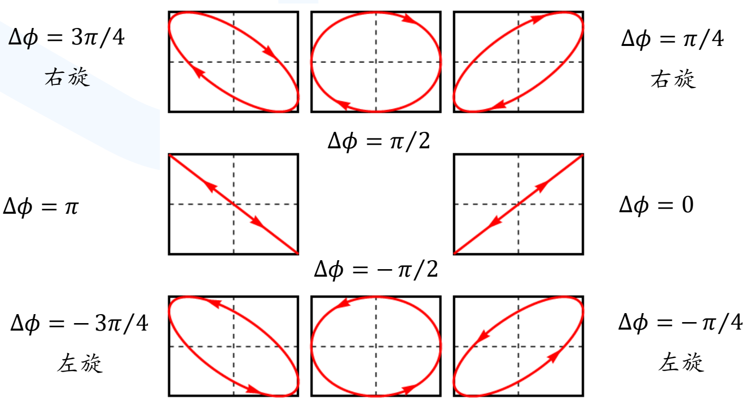


图 0-47 相位差与偏振态的关系

普通光源发光时，原子每次发出一个很短的波列。各原子独立、随机地发光，光矢量的大小、振动方向和初位相是随机数。在一次发光时间内，大量波列合成的光波可以是偏振的；但是在长时间内看，它以完全无规的方式迅速变化着，在哪个方向都不占优势，对其传播方向形成轴对称分布。

在垂直于传播方向的任何方向上，都具有相同的平均振幅和能量的光，称为**自然光**。自然光可以分解为两个振幅相等、振向垂直，相互间没有固定相位差的线偏振光。

部分偏振光的性质介于自然光和线偏振光之间。它的振动方向也在随机变化，但存在优势方向，此方向振幅最大，与优势方向垂直的方向振幅最小。部分偏振光可以分解为两个振幅不等、振向垂直，相互间没有固定的相位差的线偏振光。

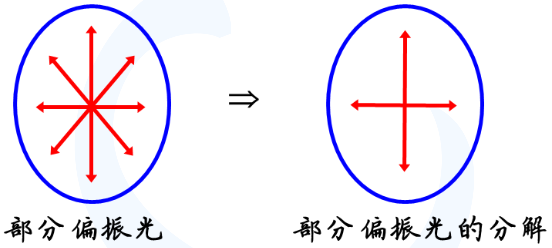


图 0-48 部分偏振光可分解

把各方向最大振幅和最小振幅对应的光强记为$I_{\max}$和I_{min}，定义**偏振度**

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_{\max} - I_{min}}{I_{\max} + I_{min}} \tag{0.174}$$

$$0 \le P \le 1 \tag{0.175}$$

自然光的偏振度为 0，线偏振光的偏振度为 1，部分偏振光介于两者之间。

常用短划线和点表示光的偏振状态。

右图中的箭头表示光波向右传播，短划线表示偏振方向在纸面内，点表示偏振方向垂直于纸面。短划线与点都有且数目相同，表示自然光。短划线数目多于点的数目，表示优势方向在纸面内；短划线数目少于点的数目，表示优势方向垂直于纸面。

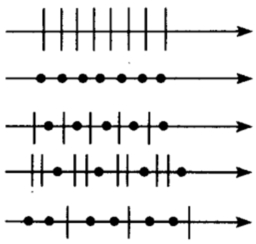


图 0-49 偏振状态的图示

2. 偏振片

阳光、烛光和白炽灯光是自然光。湖面反射的光和天空散射的光是部分偏振光。可以通过反射、折射、双折射等方法把自然光变成偏振光。

目前广泛用以获得偏振光的器件，是人造偏振片。兰德（Edwin Herbert Land）发明的 H-偏振片，是以具有网状结构的聚乙烯醇高分子材料为片基制成。将片基浸入碘溶液，经硼酸水溶液还原稳定后，高温拉伸 4-5 倍，使大分子定向排列，碘分子吸附在此线状结构上。

图 0-50 偏振片

入射光波沿着高分子长链方向的电场分量能推动电子运动做功，被强烈吸收，垂直长链方向的电场分量能够透过，出射的光线就成了线偏振光。

偏振片允许透过的光矢量方向，称为**透振方向**或透光轴。

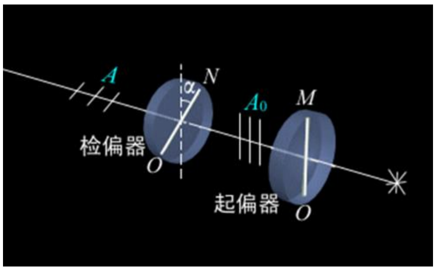


图 0-51 起偏和检偏

偏振片可以作为**起偏器**，使自然光成为偏振光。也可以用来作为**检偏器**，鉴别入射光是线偏振光、自然光还是部分偏振光。

如图所示，自然光通过起偏器后，得到一半亮度的线偏振光。再通过检偏器，出射光只有平行于透振方向的分量。设两个偏振片透振方向夹角为α，则检偏器前后的光波实振幅满足关系

$$A = A_0 \cos\alpha \tag{0.176}$$

光强满足马吕斯（Etienne Louis Malus）定律，

$$I = I_0 \cos^2\alpha \tag{0.177}$$

当$\alpha = 90^\circ$时，出射光强为零，产生了**消光现象**。

例 三个偏振片从左向右共轴放置，第一片偏振片与第二片偏振片的透振方向夹角为α，第三片偏振片与第一片偏振片的透振方向垂直，用光强为I_0的自然光从左侧入射。求右侧出射光的光强。

解： 自然光通过第一片偏振片后成为线偏振光，光强为$I_0/2$。

之后通过第二、三片偏振片，利用马吕斯定律，振幅是原来的

$$\cos\alpha\cdot\cos(90^\circ-\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \tag{0.178}$$

倍，所以出射光强是

$$I = \frac{1}{2}I_0\cdot\left|\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right|^2 = \frac{1}{8}I_0\sin^2 2\alpha \tag{0.179}$$

3．布儒斯特角*

实验和电磁学理论计算得出，自然光在介质表面发生反射和折射时，反射光和折射光都是部分偏振光。反射光中垂直于入射面的振动分量占优，折射光中平行于入射面的振动分量占优。

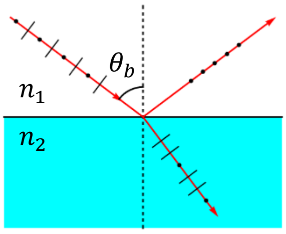


图 0-52 布儒斯特角

改变入射角，反射光和折射光的偏振度会发生变化。当入射角取**布儒斯特角**（David Brewster）

$$\theta_b = \arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{0.180}$$

时，反射光是振动面与入射面垂直的线偏振光。

利用布儒斯特定律，可以测量不透明材料的折射率，也可以产生线偏振的激光。

4．波晶片

与各向同性介质（例如玻璃）不同，光波在方解石、石英和红宝石等晶体内部传播时，其相速度与偏振方向有关。利用此特性可以制作**波晶片**（相位延迟片），用以改变偏振光的

相位。

对给定波长λ的单色光，最常用的波晶片是$\lambda/4$片。波晶片是薄片形状的光学器件。在波晶片平面内，有一个方向是**快轴**，与之垂直的方向是**慢轴**。当线偏振光垂直通过$\lambda/4$片后，出射光的快轴分量相位比慢轴分量相位增加了90°。

$\lambda/4$片可以把圆偏振光和椭圆偏振光，转变成线偏振光。

把偏振片和$\lambda/4$片结合起来使用，可以区分线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光、自然光和部分偏振光这五种入射光。

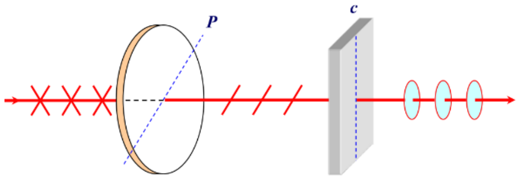


图 0-53 用 1/4 波片将线偏振光转换为圆偏振光

§0.6 黑体辐射

在 17 世纪，牛顿等物理学家认为，光是由质量很小的微粒组成；惠更斯等人则认为光是一种机械波。19 世纪的杨氏双缝干涉和菲涅尔衍射等实验，使得波动说战胜了微粒说。1865 年，麦克斯韦电磁理论进一步为光的波动说提供了坚实的理论基础。

然而到了 19 世纪末，人们发现了一些新的实验现象，如黑体辐射、光电效应、康普顿散射和原子光谱等，无法用波动理论解释。

1. 辐射与吸收

我们知道任何物体都在不停地发射各种波长的电磁波，原因是物体的分子或原子由带电粒子组成，在热运动时会产生电磁辐射，这种现象称为**热辐射**。


图 0-54 热辐射

在温度为T的热辐射体表面，单位面积、单位时间、单位波长范围内辐射的电磁波能量$r(\lambda,T)$，称为**单色辐射本领**。单位表面积辐射的总功率

$$R(T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} r(\lambda,T)d\lambda \qquad (0.181)$$

称为**总辐射本领**。

每个物体在辐射热能的同时，也在吸收周围物体辐射的能量。设在单位面积、单位时间、单位波长范围内辐射到物体上的能量是$dE(\lambda)$，被吸收的部分为$dE'(\lambda,T)$，两者之比

$$\alpha(\lambda,T) = \frac{dE'(\lambda,T)}{dE(\lambda)} \qquad (0.182)$$

称为**单色吸收本领**。

考虑放在封闭的真空容器内的若干个物体，设物体与外界没有能量交换。达到热平衡后，每个物体单位时间吸收的能量，等于单位时间辐射的能量。辐射本领强的物体，吸收本领也强。

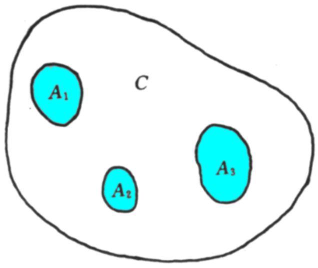


图 0-55 密封腔中的物体

假想只有两个物体分别放置在两个封闭容器中，用只能传导波长λ的光波、等截面S的波导（光纤）连接。波导也与外界隔绝能量传递。经过一段时间后，两个物体达到热平衡，温度均为T，内能不再变化，

$$r_2(\lambda,T)\cdot S\cdot\alpha_1(\lambda,T)=r_1(\lambda,T)\cdot S\cdot\alpha_2(\lambda,T) \tag{0.183}$$

所以有**基尔霍夫定律**，

$$\frac{r_1(\lambda,T)}{\alpha_1(\lambda,T)}=\frac{r_2(\lambda,T)}{\alpha_2(\lambda,T)}=r_0(\lambda,T) \tag{0.184}$$

函数$r_0(\lambda,T)$是与物体的性质无关的普适函数。

2. 黑体辐射

吸收系数$\alpha(\lambda,T)=1$的物体，能吸收全部波长的电磁波，这样的物体称为**绝对黑体**或黑体。黑体的单色辐射本领

$$r(\lambda,T)=r_0(\lambda,T) \tag{0.185}$$

是普适函数，反映了热辐射的一般规律。

自然界不存在绝对黑体，但是可以人工制造。在空腔上开一个小孔，那么空腔物体的表面上小孔处，就是一个很小的黑体。

经小孔入射的光线，需要经过非常多次反射，才有可能从小孔逃逸。在多次反射过程中，光线已经损失（被吸收）了绝大部分的能量，出射光极其微弱。也就是说，对任何波长的光，小孔的吸收率都几乎是 1。小孔处的热辐射，很接近黑体的辐射。

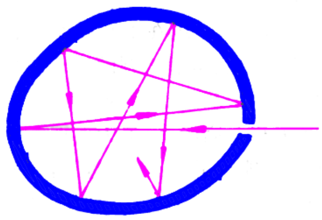


图 0-56 黑体

1879 年斯特藩（Jožef Stefan）从实验总结，随后 1884 年玻尔兹曼（Ludwig Edward Boltzmann）从理论推导得出，黑体的总辐射本领与黑体温度的四次方成正比，

$$R=\sigma T^4 \tag{0.186}$$

称为 **Stefan-Boltzmann 定律**。其中常数为

$$\sigma=5.670\times10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)} \tag{0.187}$$

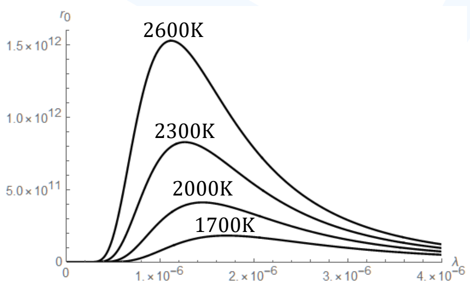


图 0-57 维恩位移定律

1893 年维恩（Wilhelm Wien）根据热力学原理推得，在确定的温度下，黑体的单色辐射本领$r(\lambda,T)$都有一个极大值点

$$\lambda_m=\frac{b}{T},\qquad b=2.898\times10^{-3}\,\mathrm{m\cdot K} \tag{0.188}$$

称为**维恩位移定律**。

随后，维恩利用热力学原理和一些特殊假设，得出**维恩定律**

$$r_0(\lambda,T)=\frac{c_1}{\lambda^5}\exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right) \tag{0.189}$$

上式中的常数c_1,c_2称为第一、第二辐射常数。维恩定律在短波段（紫外区）与实验符合得很好，在长波段（红外区）有明显偏离。

例 实验测得太阳辐射最强的波长是$4.65\times10^{-7}\mathrm{m}$，估算太阳表面温度。

解：根据维恩位移定律，太阳表面温度是

$$T=\frac{b}{\lambda_m}=\frac{2.898\times10^{-3}}{4.65\times10^{-7}}=6.232\times10^3\mathrm{K} \tag{0.190}$$

1900 年瑞利（Lord Rayleigh）和金斯（James Jeans）用电磁学和统计物理严格求解了黑体辐射问题，得到**瑞利-金斯公式**[1]

$$r_0(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^4}k_BT \tag{0.191}$$

公式在很长波段才与实验符合，短波段辐射本领趋于无穷大，与实验严重不符。这代表经典物理学理论对黑体辐射问题失效，被称为“紫外灾难”。

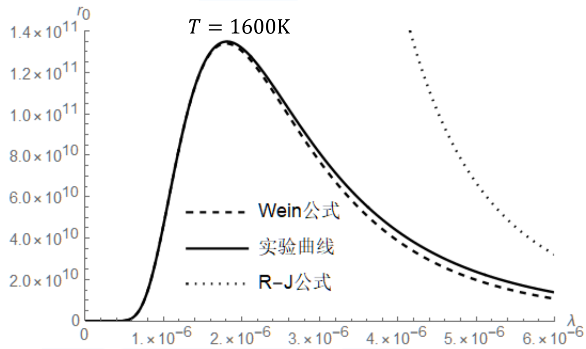


图 0-58 维恩公式、瑞利-金斯公式与实验数据的对比

1900 年，德国物理学家普朗克（Max Planck）把适用于短波的 Wein 公式和适用于长波的 R-J 公式连接起来，得到一个经验公式

$$r_0(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda k_BT)}-1} \tag{0.192}$$

普朗克公式与实验符合得非常好，有必要为它找到一个合理的理论解释。

经过两个月的努力，普朗克得到了黑体辐射公式的理论推导。与瑞利和金斯不同，推导的关键在于用能量量子化假设，代替了统计物理中的能量均分定理。

普朗克假设，黑体的原子或分子可以看成是谐振子，这些谐振子的能量不能连续变化，而是只能取最小能量单元$h\nu$的整数倍，即能量取**能级**

$$E=nh\nu,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{0.193}$$

其中的整数n称为**量子数**。普朗克常数

$$h=6.626070150\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} \tag{0.194}$$

2018 年 11 月 16 日，第 26 届国际度量衡大会改以普朗克常数作为新标准，来重新定义“千克”，取代了国际千克原器。

Planck 的量子假设开始了物理学的新纪元。

[1]Rayleigh, J. W. S. *Phil. Mag.* **49**, 539, 1900. Jeans, J. H. *Phil. Mag.* **10**, 91, 1905. Rayleigh, J. W. S. *Nature* **72**, 54, 1905; *ibid.*, **72**, 243, 1905.

例　假设太阳表面是温度$T = 6000\text{K}$的黑体，计算可见光能量在总辐射能中的占比。
解：总辐射能正比于

$$R = \sigma T^4 \tag{0.195}$$

其中可见光能量正比于

$$A = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r(\lambda, T) d\lambda \tag{0.196}$$

可见光波长范围是 400-760nm。利用 Matlab 作数值积分，得到可见光能量占比是

$$A/R \approx 43\% \tag{0.197}$$

§0.7 光电效应

1. 实验规律

实验发现，当光照在金属上时，金属内部的电子吸收光的能量，有可能逸出金属表面，成为可自由移动的电荷，这种现象称为**光电效应**。

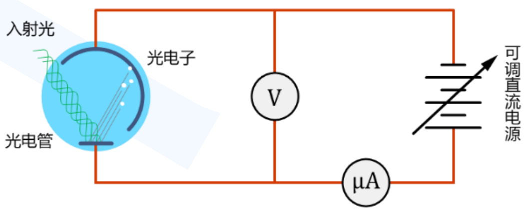


图 0-59 光电效应实验装置

光电效应的实验装置如图，在真空玻璃管内装有阳极和金属阴极，在两极之间加上电压。当阴极不受光照时，管中没有电流通过。使用适当频率的光，通过真空管的窗口照射光电阴极，阴极金属有光电子逸出。在电场作用下，光电子飞向阳极形成电光流。

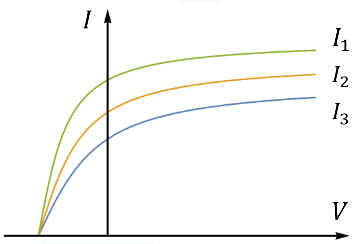


图 0-60 伏安特性曲线

光电效应有以下规律：

（1）存在**饱和电流**。

不改变光照强度和频率，调节变阻器改变电压，可以测得电流随电压变化的伏安特性曲线。

曲线显示，光电流随电压增大而增大。当加速电压超过某一数值时，电流达到饱和值I_m，不再变化。

这是因为单位时间内从阴极逸出的光电子数目n是一定的，

$$I_m = ne \tag{0.198}$$

（2）存在**反向截止电压**。

只有施加反向电压$V = -V_0$时，光电流才降为零。这说明光电子逸出阴极之后，具有初速度v_0，

$$eV_0 = \frac{1}{2} m_e v_0^2 \tag{0.199}$$

（3）改变入射光强，发现饱和光电流与光强成正比。这说明光电子产生速率n与光强成正比。

（4）不改变光强，而是改变入射光的频率ν，发现饱和电流不变。

（5）反向截止电压随频率升高而升高。且存在一个**截止频率**ν_0（红限频率），低于此频

率的光照不产生光电流。截止电压与频率有线性关系，

$$V_0 = K(\nu - \nu_0) \tag{0.200}$$

常数K与阴极金属的种类无关，而截止频率与金属种类有关。上式表明逸出电子的**最大初动能**为

$$\frac{1}{2}m_e v_m^2 = eK(\nu - \nu_0) \tag{0.201}$$

表 0-3 金属的介质波长

金属	铯	钾	钠	锂	钨	铁	银	铂
截止波长（Å）	6520	5500	5400	5000	2700	2620	2610	1961

（6）从光开始照射阴极，到发射出光电子，所需的驰豫时间$< 10^{-9}$秒。

2．与经典物理学的矛盾

光电效应的实验事实，与经典物理学在多个方面是矛盾的：

（1）实验发现截止电压与光强无关。但是按照经典理论，光强越大，电子速度就越快，截止电压越大。

（2）实验发现截止电压和频率有线性关系。而由经典理论可知，电子有一个共振频率，在此频率光照下逸出的光电子初速度最大，其它频率的初速度较小，截止电压和频率理应不是线性关系。

（3）实验发现频率有红限。按经典理论，只要光强足够大，总能使得电子脱离金属表面。

（4）实验测得驰豫时间$< 10^{-9}$秒。但用经典理论计算得出，电子必须花费很长时间（50 分钟以上）逐渐吸收电磁场能量，才能脱出金属表面。

3．光子理论

1905 年，为了解释光电效应，爱因斯坦（Albert Einstein）进一步发展了普朗克的能量子假设，提出了光子假设：当光与物质发生作用时，光能并不像波动理论描述的那样连续变化，而是集中在一些光子（photon）上，每个光子具有能量（Planck-Einstein relation）

$$E = h\nu \tag{0.202}$$

光子只能整个被吸收或发射。光束是由不连续的光子组成的能量流。

按照爱因斯坦的光子假说，阴极金属内部的电子一次性吸收一个光子，逸出成为光电子。由能量守恒，有

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A = eV_0 + A \tag{0.203}$$

其中A是电子逃逸出金属表面所需的逸出功。

这可以解释光电效应的全部实验结果。上式说明，电子的初动能（或截止电压）与频率有线性关系。截止频率为

$$\nu_0 = A/h \tag{0.204}$$

入射光强正比于光子流密度，因此光强增大意味着单位时间产生的光电子数目增大，饱和电流变大。能量集中于一个一个的光子上，电子吸收单个光子即获得足够能量逸出，所以驰豫时间极短。

光子假说成功解释了光电效应。爱因斯坦因这一工作获得了 1921 年的诺贝尔物理学奖。

例 钾的截止频率$\nu_0 = 5.44\times10^{14}\mathrm{Hz}$，用波长 435.8nm 的光照射，求反向遏止电压。

解：钾的逸出功为

$$A = h\nu_0 = 6.63\times10^{-34}\times5.44\times10^{14} = 3.61\times10^{-19}\mathrm{J} \tag{0.205}$$

波长 435.8nm 的光波，其光子能量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{435.8\times10^{-9}} = 4.56\times10^{-19}\mathrm{J} \tag{0.206}$$

所以反向遏制电压是

$$V_0 = \frac{E-A}{e} = \frac{4.56\times10^{-19}-3.61\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}} = 0.60\mathrm{V} \tag{0.207}$$

4. 光的波粒二象性

利用相对论质能关系式

$$E = mc^2 \tag{0.208}$$

得光子动量的大小为

$$p = mc = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \tag{0.209}$$

其中

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{0.210}$$

是约化普朗克常数，$k = \left|\vec{k}\right|$是波矢量的模长。

总之，光子满足**普朗克-爱因斯坦关系**，

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases} \tag{0.211}$$

等式左边表示粒子的性质，光子的能量和动量。等式右边表示波动性质，光波的圆频率和波矢量。

光具有粒子性和波动性，两种性质通过普朗克常数相联系。光既能够产生干涉、衍射这类典型的波动现象，也能够在黑体辐射、光电效应中体现出它的粒子性。

例 对波长550nm的黄绿光，求光子能量和动量。

解：利用普朗克-爱因斯坦关系式，光子的能量是

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{550\times10^{-9}} = 3.62\times10^{-19}\mathrm{J} \tag{0.212}$$

光子的动量是

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}}{550\times10^{-9}} = 1.21\times10^{-27}\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}} \tag{0.213}$$

5. 康普顿散射

经典电磁理论认为，物质中的电子在入射光的电磁场中作受迫振动，发出频率与入射光相同的散射光。散射不改变波长。

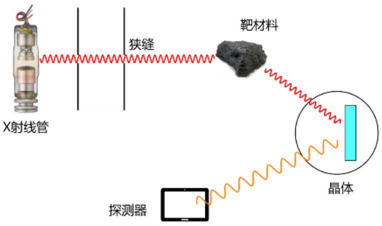


图 0-61 康普顿散射实验装置

康普顿（Arthur Holly Compton）按照爱因斯坦的光子理论计算了光子与电子的弹性碰撞过程，并做了实验检验。

实验中使用波长$\lambda_0 = 0.071\text{nm}$的高能 X 射线，照在石墨散射体上，结果显示散射光的波长与散射角有关。

碰撞前电子的速度可以忽略不计。设入射光子的动量为$\vec{p}_0$，在自然单位下（$c = 1$），光子和电子的能量分别是

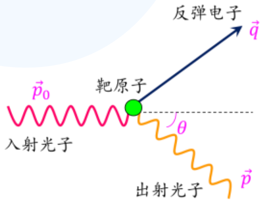


图 0-62 光子与电子的碰撞

$$E_{\gamma 0} = p_0, \qquad E_{e0} = m_e \tag{0.214}$$

碰撞后光子的动量为$\vec{p}$，能量为

$$E_\gamma = p \tag{0.215}$$

电子的动量为$\vec{q}$，能量是

$$E_e = \sqrt{q^2 + m_e^2} \tag{0.216}$$

碰撞前后动量守恒，

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{q} \tag{0.217}$$

平方得

$$p_0^2 + p^2 - 2\vec{p}_0 \cdot \vec{p} = q^2 \tag{0.218}$$

碰撞前后能量守恒，

$$p_0 + m_e = p + \sqrt{q^2 + m_e^2} \tag{0.219}$$

平方得

$$(p_0 + m_e - p)^2 - m_0^2 = q^2 \tag{0.220}$$

联立消去q^2，

$$-pp_0 + (p_0 - p)m_e = -\vec{p}_0 \cdot \vec{p} \tag{0.221}$$

记光子的散射角为θ，

$$\vec{p}_0 \cdot \vec{p} = p_0 p \cos\theta \tag{0.222}$$

$$(p_0 - p)m_e = 2pp_0 \sin^2\frac{\theta}{2} \tag{0.223}$$

最后利用

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad p_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{0.224}$$

得到康普顿散射公式

$$\Delta\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \lambda_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{m_e c} \approx 0.0243\text{Å} \tag{0.225}$$

康普顿散射实验是对光子概念的有力支持。实验证实了散射的是整个光子；爱因斯坦关系式正确，在微观碰撞事件中能量、动量守恒定律仍然成立。

例 波长 0.01nm 的 X 射线与静止的电子碰撞，在90°散射角方向探测到的 X 射线波长有多大？反冲电子的动能是多少？

解： 利用康普顿散射公式，波长是

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2} = \lambda_0 + \lambda_c \tag{0.226}$$

$$= 0.01\text{nm} + 0.0243\text{Å} \approx 0.0124\text{nm} \tag{0.227}$$

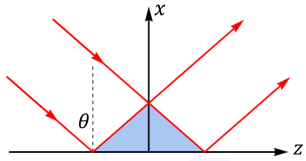
利用能量守恒，可求得反冲电子的动能，

$$\begin{aligned} E_e &= E_{\gamma_0} - E_\gamma = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} \\ &= \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}\times0.0243\times10^{-10}}{0.01\times10^{-9}\times0.0124\times10^{-9}} = 3.9\times10^{-15}\text{J} \end{aligned} \tag{0.228}$$

习　　题

1. 单色平面波在y-z平面内，沿着与y-轴夹角为30°方向传播，写出它的标量波函数、复波函数和复振幅。

2. 如图，一列波矢量在x-z平面的平面波，入射后在的分界面$x=0$处发生反射。求反射波和入射波重叠区光矢量的复振幅。



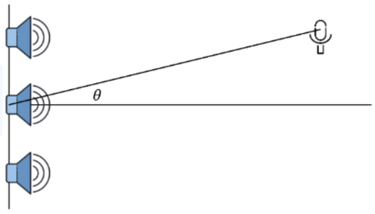
3. 产生干涉的相干光，必须来自同一发光原子、同一次发射的波列，解释其理由。

4. 用很薄的云母片覆盖在双缝实验的一条缝上，看到干涉条纹移动了 9 个条纹间距，求云母片的厚度。已知云母片折射率$n=1.58$，光源波长 550nm。

5. 三个扬声器排成直线,相距d，播放单频声音信号

$$s_j(t)=A\cos(\omega t+\varphi_j),j=1,2,3.$$

远处一个麦克风在夹角为θ的方向接收声音。欲使麦克风处消音，三个初相位$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$应该满足什么关系？



6. 两块平板玻璃叠合在一起，一端接触，在离接触线 12.5cm 处用金属细丝垫在两板之间。用波长 546nm 的单色光垂直入射，测得条纹间距为 1.50mm。求细丝的直径。

7. 牛顿环从中间数第 5 暗环和第 15 暗环直径分别是 0.70mm 和 1.70mm。设入射单色光的波长为 589nm。
（1）求透镜凸面的曲率半径。
（2）若在牛顿环间隙充满折射率为 1.33 的水，这两个暗环的直径变为多大？

8. 在折射率为 1.5 的玻璃表面，镀上一层折射率为 1.30 的透明薄膜。对于 550nm 的黄绿光垂直入射的情形，为了增强透射光束强度，应使反射光干涉相消。求膜的厚度。

9. 用波长 589.3nm 的钠黄光作为夫琅禾费单缝衍射的光源，测得第二极小到干涉图样中心的距离为 0.30cm。改用未知波长的单色光源，测得第三极小到中心的距离为 0.42cm。求未知波长。

10. 评估你的手机像素数目是否超过了镜头的光学衍射极限。估算所需的参数，如手机摄像头模组的光圈系数、像素、CMOS 图像传感器的尺寸等，请自行在网络上搜索。

11. 天空的两颗星相对于望远镜的角距离为4.8×10^{-6}rad，都发出 550nm 的光。望远镜的口径至少多大，才能分辨这两颗星？

12. 用氦氖激光器发出的波长为 632.8nm 的红光，垂直入射到平面透射光栅上，测得第一级极大出现在 38°方向。（1）求光栅常数。（2）能否看到第二级极大？

13. 在氢、氘混合气体的发射光谱中，波长 656nm 的红色谱线是双线，双线波长差是 0.18nm。为了能在第二级光谱中分辨双线，光栅的刻线数至少为多少？

14. 四个偏振片依次前后排列。每个偏振片的透振方向，均相对于前一偏振片沿顺时针方向转过 30°角。不考虑吸收、反射等光能损失，则透过此偏振片系统的光强是入射光强的多少倍？

15. 有一空气-玻璃界面，光从空气一侧入射时，布儒斯特角是 58°，求光从玻璃一侧入射时的布儒斯特角。

16. 利用普朗克辐射公式，求维恩位移定律常数b。

17. 利用普朗克辐射公式，求斯特藩-玻尔兹曼定律常数σ。（$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{\pi^4}{15}$）

18. 热核爆炸中火球的温度可达10^7K，
（1）求辐射最强的波长；
（2）这种波长的光子能量是多少？

19. 20°C 的空腔中，每立方米的光子总数是多少？（$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}dx=2.404$）

20. 铝的脱出功是 4.2eV，用波长为 200nm 的光照射铝表面，
（1）求铝的截止波长。
（2）光电子的最大初动能。
（3）求截止电压。
（4）如果入射光强是$2.0\mathrm{W/m^2}$，阴极面积是$1\mathrm{m^2}$，光束垂直照射阴极，那么饱和电流最大是多少？

21. 能量为 0.41MeV 的 X 射线光子与静止的自由电子碰撞，反冲电子的速度为$0.6c$，求散射光的波长和散射角。

第二章　玻尔原子模型

黑体辐射、光电效应以及原子光谱等物理现象，是推动量子理论创立的动机，也是新理论的实验基础。

§1.1 原子模型

1. 电子的发现

1894 年，J. Stoney 命名阴极射线的粒子为电子（electron）。1897 年，英国物理学家汤姆逊（Joseph John Thomson）测量了电子荷质比；1899 年，汤姆逊利用威尔逊（T. Wilson）发明的云室测量了电子电荷。电子带电荷$-e$，

$$e = 1.602 \times 19^{-19}\mathrm{C} \tag{1.1}$$

质量为

$$m_e = 9.109 \times 10^{10^{-31}\mathrm{kg}} = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2 \tag{1.2}$$

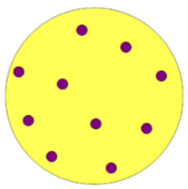


图 1-1 汤姆逊原子模型

随后实验物理学家发现原子中含有电子。电子质量约为氢原子质量的$1/1836$。原子是电中性的，所以还应该有正电荷，并且正电荷物质贡献了绝大部分原子质量。

1903 年，汤姆逊提出一个原子模型：原子中的正电荷均匀分布在一个半径约为 1Å即10^{-10} 米的球内，电子镶嵌其中（“葡萄干蛋糕”模型）。

2. α粒子散射实验

我们可以直接观测宏观物体的运动，但对原子这样小的尺度，只能通过它对外部粒子的影响推测其内部结构。

为了检验汤姆逊模型是否成立，英国物理学家和化学家卢瑟福（Ernest Rutherford）设计了用α粒子（He^{++}离子）轰击金箔的散射实验。

图中 R 是放射源，F 是金属箔，S 是闪烁屏。圆形金属匾 B 固定于带有刻度的圆盘 A 上，A 和 B 可在光滑套轴 C 上转动，R 与 T 装在与匾不相连的管子 T 上，金属匾通过管 T 抽真空。显微镜 M 用于对屏 S 的闪烁计数。

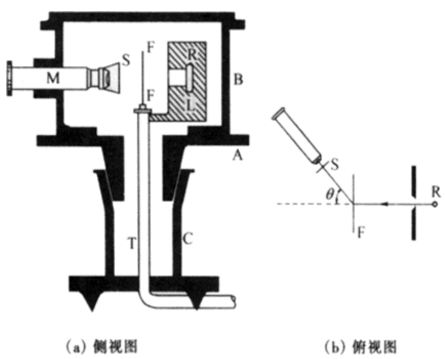


图 1-2 α粒子散射装置

实验发现大部分α粒子在与金箔碰撞后，散射角很小，这与汤姆逊模型的预期一致；但是还有大约 1/8000 的α粒子散射角大于 90°，而按照汤姆逊模型计算，这一概率应该小于10^{-2000}。

3. 卢瑟福模型

为了解释大角度散射，1911 年卢瑟福提出原子的**核式模型**：原子中的正电荷集中在原子中心很小的区域，称为原子核，电子分布于核外。

α粒子的质量

$$m_\alpha \approx 7300 m_e \tag{1.3}$$

在碰撞时，原子中的电子由于质量太小，对α粒子运动的影响可以忽略。α粒子受到的作用力来自于核物质的正电荷Ze。在汤姆逊模型中，均匀带电球的作用力为

$$F_T = \begin{cases} \dfrac{2e\cdot Ze\cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & \text{if } r \le R; \\ \dfrac{2e\cdot Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{if } r > R. \end{cases} \tag{1.4}$$

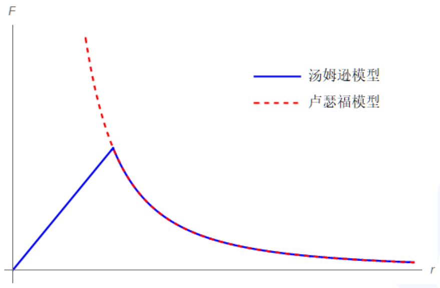


图 1-3 两种模型的作用力

而在卢瑟福模型中，正电荷集中于原子核，作用力为

$$F_R = \frac{2e\cdot Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.5}$$

当距离很小时，核式模型中的库仑排斥力很大，使得粒子有可能发生大角度散射。卢瑟福模型的计算结果与α粒子散射实验符合得很好。

§1.2 原子光谱

1. 原子的光谱线

热辐射包含各种波长的电磁波，形成一个连续光谱。而在气体放电实验中，物理学家们观察到了特定波长的电磁波，在观察屏或感光底片上形成一些分立的亮线，称为**光谱线**。光谱线反映气体中的原子特性和内部结构。

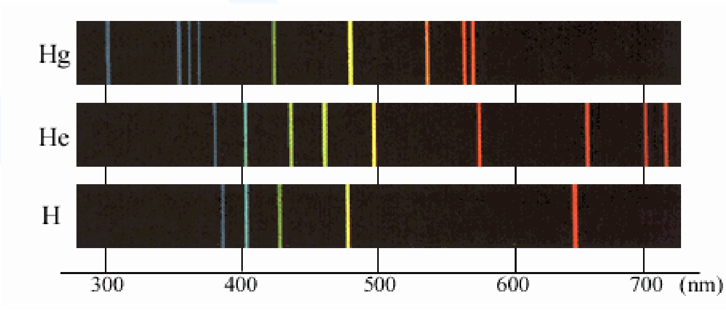


图 1-4 原子的光谱线

2．氢光谱

1853 年，瑞典物理学家埃格斯特朗（A. J. Angstrom）测出了氢原子在可见光和近紫外波段的光谱。1885 年，瑞典的一位中学教师巴尔末（Johann Jacob Balmer）给出了一个经验公式

$$\lambda = 3645.6\frac{n^2}{n^2-2^2},\ n = 3,4,5,\cdots \tag{1.6}$$

1889 年瑞典物理学家里德伯（J. R. Rydberg）把公式改写成**波数**$1/\lambda$满足

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.7}$$

其中

$$R_H = 1.0967758\times 10^7\mathrm{m}^{-1} \tag{1.8}$$

称为**里德伯常数**。巴尔末公式只用了一个拟合系数，却与实验符合得极好。

此后的实验中，人们陆续发现了可见光之外的氢原子光谱。1904 年在紫外区发现了莱曼系，谱线公式为

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right),\qquad n = 2,3,4,\cdots \tag{1.9}$$

1908 年在红外区发现帕邢系，

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right),\qquad n = 4,5,6,\cdots \tag{1.10}$$

1922 年在红外区发现布拉开系，

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right),\qquad n = 5,6,7,\cdots \tag{1.11}$$

1924 年在远红外区发现普丰德系，

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{n^2}\right),\qquad n = 6,7,8,\cdots \tag{1.12}$$

这些谱线都可以表示为

$$\frac{1}{\lambda} = T_m - T_n,\qquad m = 1,2,3,\cdots; n = m+1, m+2, m+3,\cdots \tag{1.13}$$

其中**谱项**定义为

$$T_n \overset{\text{def}}{=} \frac{R_H}{n^2} \tag{1.14}$$

§1.3 玻尔模型

1．原子行星模型的困难

在卢瑟福模型中，电子绕原子核运动，就像行星沿轨道绕太阳运动一样。结合卢瑟福模型和经典物理学，虽然可以解释α粒子散射，但也有很多无法解决的困难：。

（1）无法解释为什么原子会具有特定的大小。电子绕原子核圆周运动的半径可取任何值。

（2）无法解释为什么原子能稳定存在。作圆周运动的电子具有加速度，会发出电磁辐射而损失能量，半径越来越小，最终落入原子核中。

（3）无法解释实验得到的线光谱。按电磁学理论，电子绕电荷为Ze的原子核作圆周运动时，发出的辐射光频率为

$$f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^2}} \tag{1.15}$$

在此过程中，电子的轨道半径r、速度v和辐射频率连续变化，因此原子发射的应该是连续光谱。

2. 玻尔假设

1913 年，丹麦物理学家玻尔（N. Bohr）受普朗克量子论、爱因斯坦光子说以及巴尔末公式的启发，认为微观过程中经典物理学不再适用，应该引入量子化概念。他提出，

（1）定态假设：原子存在一系列具有确定能量的稳定状态，称为**定态**。

（2）频率规则：原子从一个能量为E_i的定态，**跃迁**到能量为E_f的另一个定态时，原子吸收或发射光子，在此过程中能量守恒，

$$E_f-E_i=\pm h\nu \tag{1.16}$$

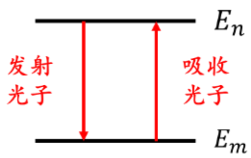


图 1-5 原子的跃迁

一般用一条水平线段表示一个能量状态。能量最低的状态称为**基态**（ground state），其它状态称为**激发态**（excited state）。

（3）角动量量子化：在原子中，电子的轨道角动量只能是约化普朗克常数$\hbar$的整数倍，

$$\hbar=\frac{h}{2\pi} \tag{1.17}$$

因此电子绕原子核作圆周运动的角动量为

$$m_e r v=n\hbar,\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1.18}$$

3. 氢原子的玻尔模型

利用玻尔假设和原子行星模型，可以推导出氢原子的大小和能级。

惯性离心力等于库仑力，

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \tag{1.19}$$

与角动量量子化条件联立，

$$mvr=n\hbar \tag{1.20}$$

解得

$$r=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\frac{n^2}{Z} \tag{1.21}$$

$$v=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\frac{Z}{n} \tag{1.22}$$

可见在原子中，电子的轨道半径和速度都是不连续的。与**主量子数**n有关。

引进**精细结构常数**（fine-structure constant）

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\approx\frac{1}{137} \tag{1.23}$$

和**玻尔半径**

$$a_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}=0.529\text{Å} \tag{1.24}$$

轨道半径和速度可以写成

$$r_n=\frac{1}{Z}n^2a_0,\qquad v_n=Z\frac{\alpha c}{n},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1.25}$$

原子的能量为

$$E=\frac{1}{2}m_ev^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{1.26}$$

把前面解出的r, v代入上式，得

$$E=-\frac{m_eZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2n^2}=-\frac{1}{2n^2}m_eZ^2\alpha^2c^2,\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1.27}$$

可见能量也是量子化的。

对氢原子，$Z=1$，

$$E=E_n=-\frac{1}{2n^2}\alpha^2m_ec^2\approx-13.6\text{eV}\cdot\frac{1}{n^2},n=1,2,3,\cdots \tag{1.28}$$

主量子数$n=1$的能级$E_1=-13.6\text{eV}$能量最低，是基态；$n=2$的能级$E_2=-3.4\text{eV}$称为**第一激发态**；$n=3$的能级$E_3=-1.51\text{eV}$称为**第二激发态**；……

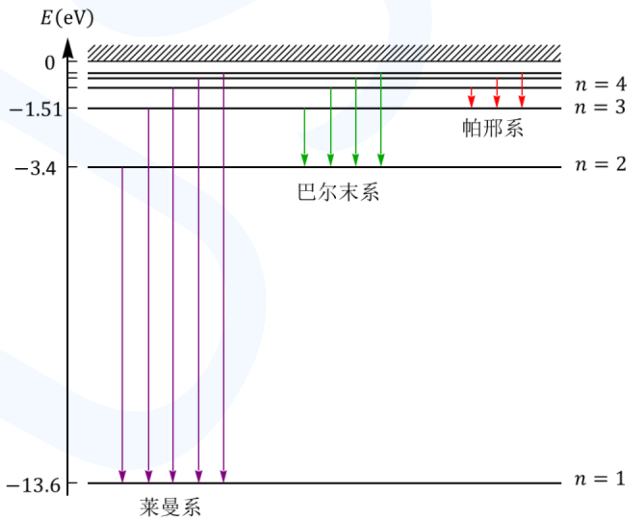


图 1-6 氢光谱

按频率规则，氢原子可以从能量E_n较高的定态，跃迁到能量E_m较低的定态，发出（里德伯）能量为$h\nu$的光子，

$$h\nu=E_n-E_m=\frac{1}{2}\alpha^2m_ec^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),\qquad m>n \tag{1.29}$$

波数为

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{h\nu}{hc}=R_\infty\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.30}$$

其中里德伯常数

$$R_\infty \overset{\text{def}}{=} \frac{m_e\alpha^2 c}{2h}=1.0973731534(13)\times 10^7\mathrm{m}^{-1} \tag{1.31}$$

上式中的里德伯常数，与氢光谱的实验值

$$R_H=1.0967758\times 10^7\mathrm{m}^{-1} \tag{1.32}$$

很接近。

电子绕原子核运动是个两体问题。前面的推导假设原子核固定不动，只是近似成立。对两体的相对运动，电子质量m_e应该代之以折合质量

$$\mu=\frac{m_e m_p}{m_e+m_p} \tag{1.33}$$

其中m_p是氢核即质子的质量。这样氢原子里德伯常数的理论值为

$$R_H=\frac{\mu\alpha^2 c}{2h} \tag{1.34}$$

与实验值完全符合。

原子从低能级跃迁到高能级时，由于能量是量子化的，所以只能吸收特定的能量。白光照射到原子上时，只有一些分立能量值的光子能够被原子吸收。这些波长的谱线从出射光中减弱或消失，形成了**吸收谱线**。同一种原子的吸收谱线与发射谱线完全重合。

例 处于基态的氢原子，吸收单色光后被激发，发出的光只有三条谱线。此单色光的波长是多少？

解：由于发出的光仅有三条谱线，激发态只能是$n=3$能级，发出的谱线分别是

$$3\to 2,\qquad 3\to 1,\qquad 2\to 1$$

跃迁。

把$n=1$能级的基态氢原子激发到$n=3$能级，需要吸收的光子能量为

$$h\nu=E_3-E_1=12.1\mathrm{eV} \tag{1.35}$$

单色光的波长是

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{h\nu}=\frac{1.24\mathrm{\mu m}\cdot\mathrm{eV}}{12.1\mathrm{eV}}=102\mathrm{nm} \tag{1.36}$$

4. 类氢离子

原子核外只有一个电子，核电荷数$Z>1$的离子称为类氢离子，比如He^+和Li^{++}都有类似氢原子的结构。

类氢离子的能级

$$E_n=-\frac{1}{2n^2}\alpha^2 m_e c^2 Z^2 \tag{1.37}$$

发射光谱的波数为

$$\frac{1}{\lambda}=Z^2 R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.38}$$

例　计算氘的里德伯常数。

解：氢同位素氘的里德伯常数

$$R_H = \frac{\mu\alpha^2 c}{2h}, \qquad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \tag{1.39}$$

而氘原子中，电子折合质量是

$$\mu_D = \frac{m_e \cdot 2m_p}{m_e + 2m_p} \tag{1.40}$$

因此里德伯常数为

$$R_D = \frac{\mu_D}{\mu} R_H = \frac{2m_e + 2m_p}{m_e + 2m_p} R_H = \left(1 + \frac{1}{1 + 2\dfrac{m_p}{m_e}}\right) R_H$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1 + 2 \times 1836}\right) \times 1.0967758 \times 10^7 = 1.0970744 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1} \tag{1.41}$$

5．弗兰克-赫兹实验

德国物理学家弗兰克（James Franck）和赫兹（Gustav Hertz），在玻尔理论发表后的第二年（1914 年），设计了一个实验以检验原子是否存在分立的能级。

如图所示，充有低压水银蒸汽的玻璃管中有阴极 K、阳极 A 和栅极 G。加热后的阴极发射出电子。阳极和栅极间的 0.5V 反向偏压，使动能很小的电子在通过栅极后，不会被阳极收集。

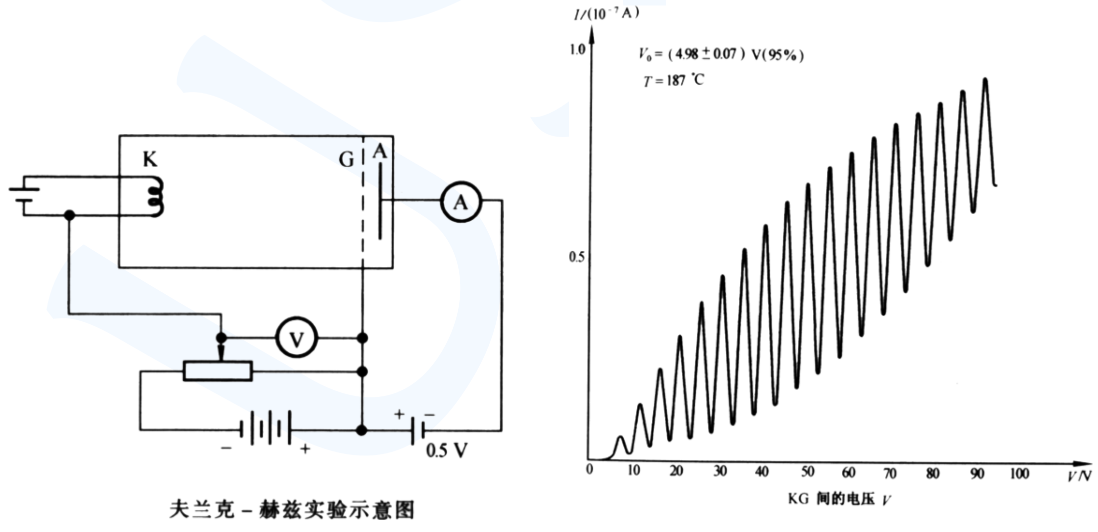


图 1-7 弗兰克–赫兹实验实验

改变栅极和阳极之间的电压V，测量阳极收集到的电流I。随着电压的增加，电流有周期性变化，峰值的间隔约为 4.9V。

大多数的汞原子处于基态。电子在从阴极飞向阳极的路径上，可能会与汞原子发生碰撞。

当电子的动能小于汞原子第一激发态与基态的能量差ΔE时，汞原子不可能获得能量，电子与汞原子只可能发生弹性碰撞。由于电子质量远远小于汞原子质量，通过弹性碰撞转移给汞原子的动能可以忽略不计。此时玻璃管相当于一个真空二极管，电压从零开始增加时，

$$I \propto V^{\frac{3}{2}} \tag{1.42}$$

当电压增加到$eV = \Delta E$时，电子在栅极附近有可能与汞原子发生非弹性碰撞。电子损失能量ΔE，使被碰的汞原子跃迁到第一激发态，而电子剩余动能不足以克服反向偏压，所以电流下降。

随着电压继续增加，电子有可能与汞原子发生两次和更多次的非弹性碰撞，表现为伏安特性曲线的多个峰。相邻两个峰之间的电压差$\Delta E/e \approx 4.9\mathrm{V}$，是汞原子的**第一激发电势**。

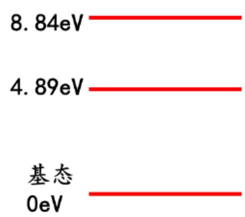
弗兰克-赫兹实验用不同于光谱学的方法验证了原子能量的量子化现象，二人因此获得1925年的诺贝尔物理学奖。

例 在气体放电管中，一束能量为10eV的电子和单原子气体发生碰撞，发出的辐射波长有：140.2nm, 253.6nm和313.2nm。其中253.6nm的光谱较其它两个成分强。给出相应的原子能级图，以及到达阳极的电子的能量。

解：三种波长对应的光子能量是

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1242}{\lambda}\mathrm{nm}\cdot\mathrm{eV} = 8.84, 4.89, 3.95\mathrm{eV} \tag{1.43}$$

注意到8.84=4.89+3.95，涉及的原子能级有3个，如图所示。



到达阳极的电子有下列几种情况：

1）未碰撞，10eV;

2）碰撞后原子处于第一激发态，

$$10 - 4.89 = 5.11\mathrm{eV}$$

3）碰撞后原子处于第二激发态，

$$10 - 8.84 = 1.16\mathrm{eV}$$

4）发生两次碰撞，

$$10 - 2 \times 4.89 = 0.22\mathrm{eV}$$

原子处于激发态的几率很小，可以忽略电子与激发态原子发生非弹性碰撞的情况。

6. 玻尔理论的成功与不足

玻尔理论揭示了微观体系具有量子化特征和规律，是原子物理发展史上一个重要的里程碑，对量子力学的建立起了巨大推进作用。玻尔提出的“定态”、“能级”、“量子跃迁”等概念，在量子力学中仍很重要，具有极深远的影响。

尽管如此，玻尔理论仍有很多不足，不能解释多电子原子光谱、强度、宽度和偏振性等，也不能说明原子是如何结合成分子、构成液体和固体的。

更重要的是，该理论存在逻辑上不自洽：它以经典理论为基础，又生硬地加上与经典理论不相容的量子化假设，逻辑上不一致——是个半经典、半量子的理论。

习 题

1. 已知氢原子的电离能为 13.6eV，求B^{4+}离子从$n = 2$能级跃迁到基态的辐射能量、波长。

2. 某种类氢离子的光谱中，已知属于同一线系得三条谱线波长为99.2nm、108.5nm 和 121.5nm。可以预言还有那些光谱线？

3. 气体放电管用 12.2eV 的电子宏基氢原子，确定此时氢所发出的谱线的波长。

4. 要使处于基态的氢原子受激发后，能发射莱曼系最长波长的谱线，则至少需向氢原子提供多少能量？

5. μ^{-}轻子（缪子 muon）质量是电子的 207 倍，电荷相同。一个质子可俘获一个缪子形成缪原子。求缪原子的半径和能级。

6. 设氢原子原来是静止的。当氢原子从$n = 4$的态跃迁到基态时，给出原子的反冲速度、发射光子的波长，并与不考虑反冲时的光子波长对比。