第八章 Maxwell电磁理论

- 爱因斯坦的评价:

  “自牛顿以来, 物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

§ **8-1** 介质中的麦克斯韦方程组

§ **8-2** 平面电磁波

§ **8-3** 电磁场的能量、动量和角动量

静电场、稳恒电流、静磁场、电流的磁效应、电磁感应以及似稳的交变电流的实验规律，都是大量的实验事实的总结，具有可靠性；但是，它们只在一定的条件下成立，所以具有局限性。它们不是电磁现象的普通规律，需要发展，麦克斯韦沿着法拉第的思路，近距作用的观点研究下去，终于取得了突破。

两个假设、两个推广

麦克斯韦在总结了前人得到的实验规律的基础上，大胆提出了“变化的磁场产生涡旋电场”和“位移电流”的假设。

把静电场、静磁场的通量定理**推广**到由随时间变化的电荷、电流所产生的迅变电磁场，高度概括为具有优美数学形式的**4**个方程，称为麦克斯韦方程组。

两个预言

麦克斯韦方程组是电磁场的普通规律，它不仅可以解释当时已知的一切电磁现象，而且从理论上由方程组导出电磁场所满足的波动方程，**预言了**电磁波的存在.

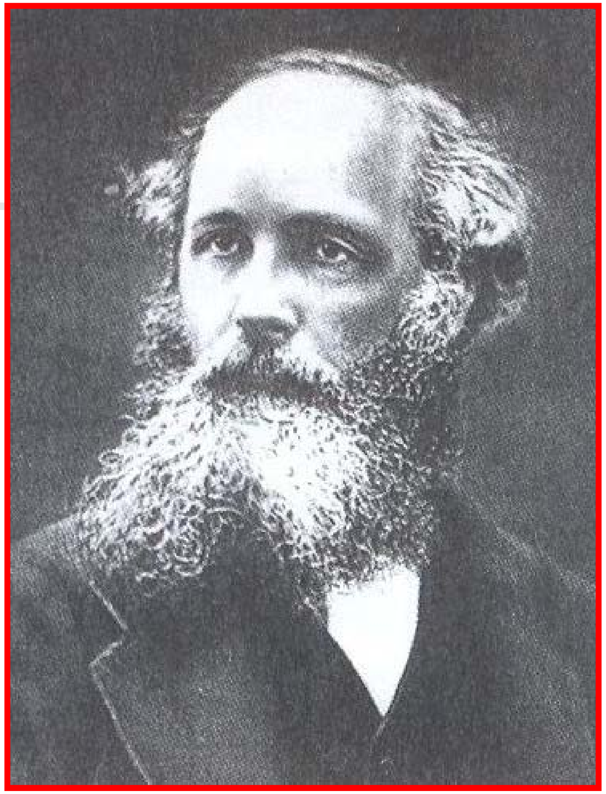
从真空中波动方程得到的电磁波的速度恰好为真空中的光速，麦克斯韦大胆地**预言了**光波就是电磁波，建立了光的电磁理论，把光学与电磁学“统一”起来。

麦克斯韦电磁理论的建立是物理学史上的一个伟大创举。

爱因斯坦的评价：

“自牛顿以来，物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

它开辟了无线电时代的新纪元，对科学技术和人类文明的发展起到了不可估量的作用。



Maxwell, James Clerk (1831-06-13~1879-11-05)
毕业于剑桥大学数学系

§ 8-1 介质中的麦克斯韦方程组

- 介质中**静电场**的基本定理:

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\sum q_0=\iiint_V \rho_0 dV,\qquad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_0,$$

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{E}=0,$$

- 介质中**静磁场**的基本定理:

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0,\qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0,$$

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\sum I_0=\iint_S \mathbf{J}_0\cdot d\mathbf{S},\qquad \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_0.$$

- 电荷守恒定律:

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_v \rho_0 dV = -\iiint_v \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dV;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

- 稳恒条件 (稳恒电流):

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0$$

- 洛仑兹力 (电磁力):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

- **以上的基本规律在随时间变化的电磁场的情况下是否适用呢?**

麦克斯韦在前人所取得的科学成果的基础上，发展和创造后得到普遍适用的电磁理论，即麦克斯韦方程，他的贡献在于作了两个大胆的推广和两个重要的假设。

一、两个大胆的推广

1. 麦克斯韦认为**介质中静电场**的通量定理对**随时间变化的电场**同样适用，即

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_0 dV = Q_0; \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_0 \qquad \textbf{(8-1-1)}$$

其中 $\mathbf{D}$ 为介质中的电位移矢量，

ρ_0 为介质中的自由电荷密度，

V 为闭合曲面S所包围的体积。

2. 麦克斯韦认为**介质中稳恒磁场**的通量定理对**随时间变化的磁场**同样适应，即

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0; \qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \textbf{(8-1-2)}$$

这**两个推广的基础**是:

1. 库仑定律与毕奥—萨伐尔定律在有介质时仍然成立；电荷是电场的“源”，有自由电荷存在，对随时间变化的电场也正确。

2. 在§**6.1.5**中已讲，为使电磁感应定律成立，随时间变化的磁场也应满足高斯定理，同时也说明没有自由磁荷。

二、两个重要的假设

1. 涡旋电场假设： 随时间变化的磁场会激发**涡旋电场**或称为感应电场，感生电动势正是来源于**涡旋电场**所产生的非静电力。于是，得到新的环路定理，其数学表达式为：

$$\varepsilon = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad \textbf{(8-1-3)}$$

它是**法拉第电磁感应定律**与**涡旋电场假说**的结果。

2. 位移电流假设:

随时间变化的电场与电流(包括**传导电流**、**极化电流**和**磁化电流**)一样能激发磁场。

引入**位移电流密度**：$\mathbf{j}_d \equiv \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

其中等式右边第一项表达电场随时间的变化率，第二项表示束缚电荷的微观运动产生的极化电流。

于是，磁场的环路定理应表达为：

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_d)\cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})\cdot d\mathbf{S} \qquad \textbf{(8-1-4)}$$

这个假说的产生，源于麦克斯韦对稳恒磁场的环路定理的研究。

■稳恒磁场是由稳恒电流产生的。对于稳恒电流应满足条件

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

是它保证了 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_c} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}$ 的合理性。

因为对于以C为边界的任意曲面S_C，由稳恒条件，右边积分值都是唯一的。

■但是，对于**非稳恒电路**，例如**电容器中**，这时**只有电荷守恒定律成立**，即

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} + \frac{dq_0}{dt} = 0$$

将式 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0 = \iiint_V \rho_0 dV$ 代入上式得

$$\oiint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

即

$$\oiint_S (\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

于是，他定义了**位移电流密度：** $\mathbf{j}_d \equiv \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

便得 $$\oint\!\!\!\oint_S (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_d)\cdot d\mathbf{S} = 0$$

这是电荷守恒定律在非稳恒电流情况下成立的结果，它保证了

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_C} (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_d)\bullet d\mathbf{S}$$

的**右边积分值的唯一性**。

于是产生了**新的环路定理(8-1-4)**，它是**电荷守恒定律**和**位移电流假说**与毕奥—萨伐尔定律的结果。

- 位移电流的物理意义：

$$\mathbf{j}_d \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

随时间变化的电场和极化电流与传导电流一样能产生磁场，这是它们的**共同点**。

- 由此得到电磁波传播的物理图像：

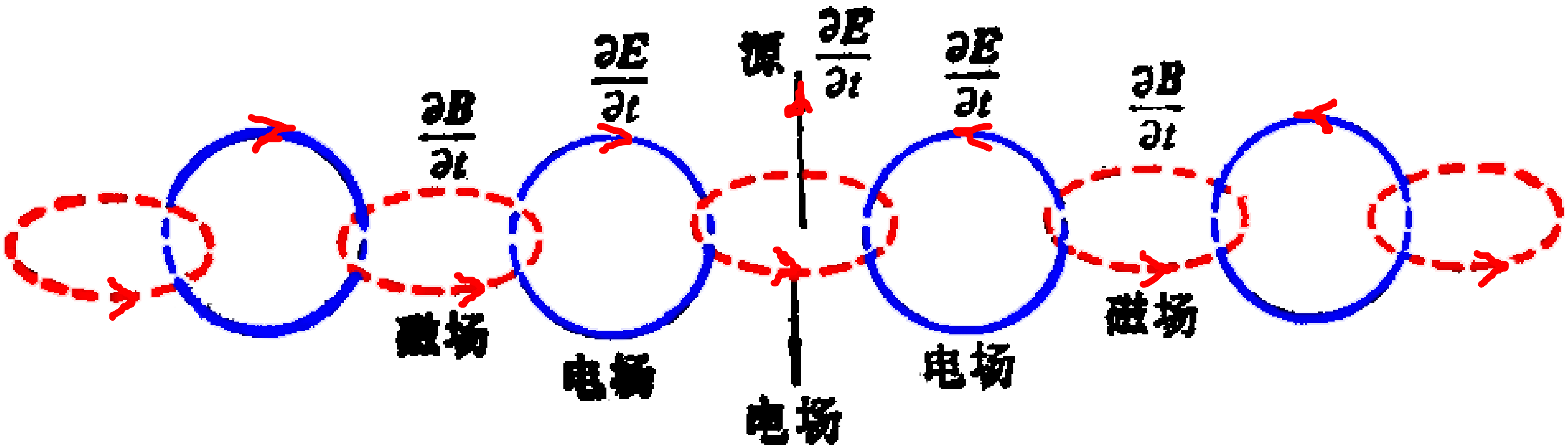


图8-1-1　电磁波存在的理论预言示意图

位移电流与传导电流的区别：

1. 位移电流并非自由电荷的定向运动所产生，在真空和电介质中也存在；
2. 它不伴随焦耳热效应；
3. 它与外磁场无安培力的关系。

三．将介质中、非稳恒情况下的电磁场规律表达为如下的麦克斯韦方程组：

积分形式	微分形式	
$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V \rho_0 dV,$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_0,$	(8-1-5)
$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S},$	$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$	(8-1-6)
$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0,$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,$	(8-1-7)
$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\iint_S (\mathbf{j}_0+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})\cdot d\mathbf{S}.$	$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_0+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$	(8-1-8)

均匀线性各向同性介质的

电磁性能方程为：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}.$$

在真空中：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_0 = 0, \ \sigma = 0.$$

四. 边值关系

从麦克斯韦方程组的积分形式(8-1-5)-(8-1-8)出发，作圆柱形曲面或矩形回路横跨并无限接近两介质的界面，从而得到边值关系，对随时间变化的电磁场、自由面电荷密度、传导面电流密度也成立：

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_0, \qquad (8\text{-}1\text{-}9)$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0, \qquad (8\text{-}1\text{-}10)$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0, \qquad (8\text{-}1\text{-}11)$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{i}_0, \qquad (8\text{-}1\text{-}12)$$

其中， σ_0 是界面上的自由面电荷密度，

$\mathbf{i}_0$ 是界面上的传导面电流密度。

§8-2 平面电磁波

1. 波动方程

这是一个麦克斯韦方程应用的重要实例，也是其理论预言的根据。我们从微分形式的麦克斯韦方程和均匀各向同性线性介质的电磁性能方程出发，研究自由空间中的电磁场。

自由空间的含意是：$\rho_0 = 0, \quad \mathbf{j}_0 = 0,$

求此空间介质中(由欧姆定律，$\sigma = 0$，这介质应是绝缘介质)的电磁场。于是，可得：

自由空间中的均匀线性各向同性介质的电磁性能方程：

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad \because \mathbf{j}_0 = 0 \quad \therefore \sigma = 0.$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \textbf{(8-2-9)} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, & \textbf{(8-2-10)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \textbf{(8-2-11)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. & \textbf{(8-2-12)} \end{cases}$$

再看

电磁波传播的物理图像：

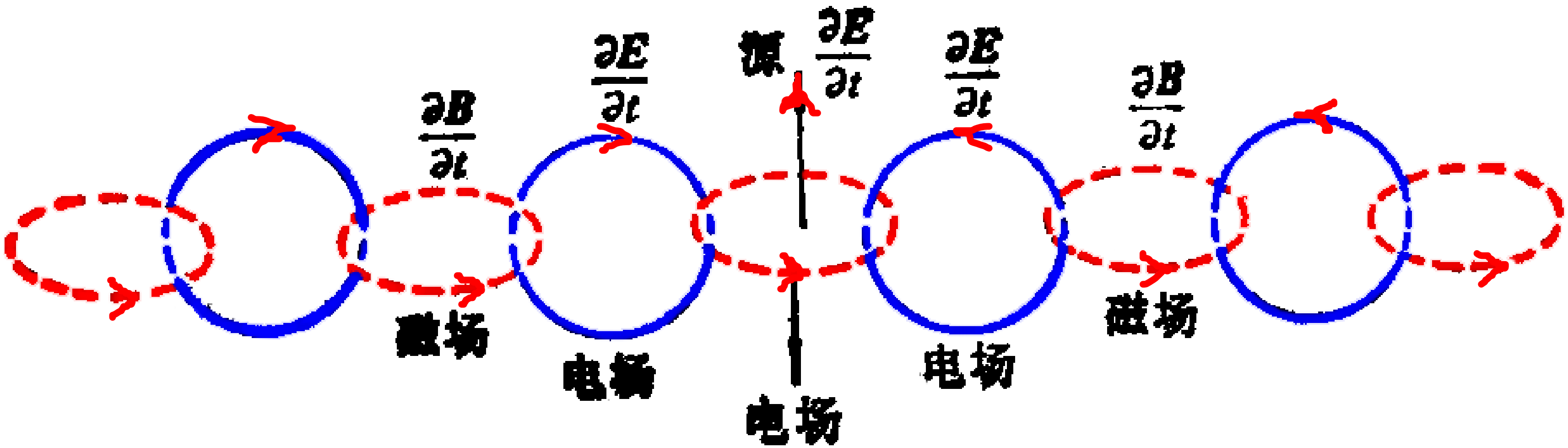


图8-1-1　电磁波存在的理论预言示意图

理论推导：

在线性均匀各向同性介质中，ε和μ是与时间t和空间位置$\mathbf{r}$无关的。由（**8-2-11**）、（**8-2-12**）可得：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H})=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},$$

由 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$,上方程左边:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=-\nabla^2\mathbf{E},$$

$$\therefore\qquad \nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0,$$

同理 $\nabla^2\mathbf{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0.$

重写：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 \mathbf{E} = 0, & \text{(8-2-13)} \\
\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2 \mathbf{H} = 0. & \text{(8-2-14)}
\end{cases}
$$

这是典型的波动方程，即脱离了场源的电磁场是以波的形式在无界的、自由的线性均匀各向同性介质中传播，这就是电磁波，它的传播速度为：

$$V=\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C \qquad \textbf{(8-2-15)}$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

C是真空中的光速，由此麦克斯韦预言光即是电磁波。

“我们不可避免地推论，光是媒介中起源于电磁现象的横波”

2. 定态电磁波的解

进一步**设**电磁波的激发源以确定的频率ω作简谐振动，因而辐射的电磁波也以相同频率作简谐振动，这种**以一定频率作简谐振动的波**，常称为定态电磁波或单色波。

一般的非单色的电磁波，可以用傅里叶分析方法分解为不同频率的单色波的迭加，因此只须研究定态电磁波。

由图8-1-1的分析，为简便直观，限于讨论平面电磁波。即E、H仅与Z和t有关，与坐标y，x无关，这种电磁波又称为平面电磁波。它满足的方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Z^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial Z^2} = 0. \end{cases}$$

可设其解的形式为（用分离变量法）：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}(Z)e^{-j\omega t} & \text{(8-2-16)} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(Z)e^{-j\omega t} & \text{(8-2-17)} \end{cases}$$

意即设电磁波沿Z轴正向传播，其场强在与Z轴正交的平面上各点有相同的值，其中E(Z)，H(Z)只是坐标Z的函数。

将形式解（8-2-16）、（8-2-17）分别代入波动方程（8-2-13）、（8-2-14）中，立即得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}(Z)}{\partial Z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{E}(Z) = 0, & \textbf{(8-2-18)} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{H}(Z)}{\partial Z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{H}(Z) = 0. & \textbf{(8-2-19)} \end{cases}$$

其解为：$\begin{cases} \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}_0 e^{jKZ}, & \text{(8-2-20)} \\ \mathbf{H}(Z) = \mathbf{H}_0 e^{jKZ}. & \text{(8-2-21)} \end{cases}$

其中$\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$是积分常数，它们是常矢量，由已知的激发源确定，代表电场和磁场的振幅。上两式中

$$K \equiv \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

于是有

$$\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C = V$$

（V是电磁波传播速度）。

$$K \equiv \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi f}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

又称**波数**，表示在空间中**2π**（米）长度上有多少个电磁波。

将（8-2-20），（8-2-21）分别代入（8-2-16），（8-2-17）中得：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Z,t) = \mathbf{E}_0 e^{j(KZ-\omega t)} \\ \mathbf{H}(Z,t) = \mathbf{H}_0 e^{j(KZ-\omega t)} \end{cases}$$

更一般的写法为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t-\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})} & (8\text{-}2\text{-}22) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0 e^{-j(\omega t-\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})} & (8\text{-}2\text{-}23) \end{cases}$$

其中**K**的方向定义为电磁波的传播方向**Z**，大小为$\frac{2\pi}{\lambda}$。**K**又称**波矢**，**r**是空间任意点相对于电磁波源的位置矢。**这就是平面电磁波的解。**

3. 平面电磁波的性质(讨论所得解)

现在已经得到了均匀各向同性介质中自由空间的定态平面电磁波的解（8-2-22）、（8-2-23）。可以将它们代入麦克斯韦方程组（8-2-9）—（8-2-12）中，考虑到 $\nabla \Rightarrow j\mathbf{K},\ \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -j\omega$，有：

$$
\begin{cases}
\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}=0, & (8\text{-}2\text{-}24)\\
\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}=0, & (8\text{-}2\text{-}25)\\
\mathbf{K}\times\mathbf{E}=\mu\omega\mathbf{H}, & (8\text{-}2\text{-}26)\\
\mathbf{K}\times\mathbf{H}=-\varepsilon\omega\mathbf{E}. & (8\text{-}2\text{-}27)
\end{cases}
$$

由此可知无限均匀线性各向同性介质中平面电磁波的性质为：

$$
\begin{cases}
\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}=0, & (8\text{-}2\text{-}24)\\
\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}=0, & (8\text{-}2\text{-}25)\\
\mathbf{K}\times\mathbf{E}=\mu\omega\mathbf{H}, & (8\text{-}2\text{-}26)\\
\mathbf{K}\times\mathbf{H}=-\varepsilon\omega\mathbf{E}. & (8\text{-}2\text{-}27)
\end{cases}
$$

（1）式（8-2-24）说明 $\mathbf{K}\perp\mathbf{E}$，式（8-2-25）说明 $\mathbf{K}\perp\mathbf{H}$，即电磁场强度与波的传播方向垂直，故平面电磁波是横波。

（2）式（8-2-26）与（8-2-27）说明 $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$ 即电场强度和磁场强度垂直，且 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{K}$ 三个矢量构成一个右旋直角坐标系，如图8-2-2所示。

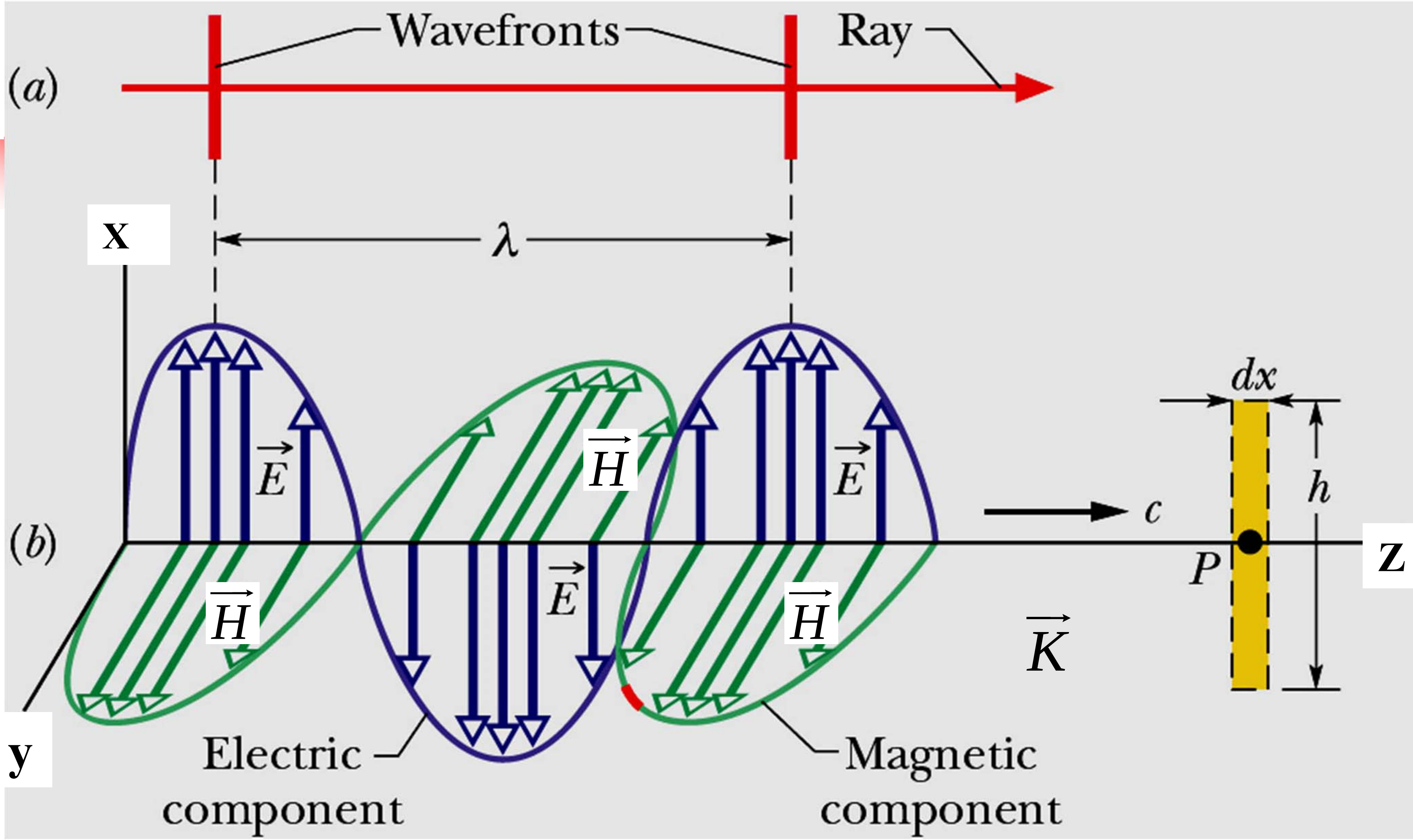


图8-2-2　**E, H和K的相互关系**

$$\mathbf{K}\times\mathbf{E}=\mu\omega\mathbf{H}, \qquad \textbf{(8-2-26)}$$

$$\mathbf{K}\times\mathbf{H}=-\varepsilon\omega\mathbf{E}. \qquad \textbf{(8-2-27)}$$

（3）将**K**叉乘式（**8-2-26**）两边，再将（**8-2-27**）代入上结果，得

$$(K^2-\mu\varepsilon\omega^2)\mathbf{E}=0$$

要求此式有非零解，即$\mathbf{E}\neq 0$，则必须有

$$K^2-\mu\varepsilon\omega^2=0,$$

于是得：$\dfrac{\omega}{K}=\sqrt{\dfrac{1}{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\dfrac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C=V.$ **(8-2-28)**

再将式（**8-2-28**）代入式（**8-2-26**）得

$$E_0\sqrt{\varepsilon}=H_0\sqrt{\mu};\quad \varepsilon E^2=\mu H^2 \qquad \textbf{(8-2-29)}$$

式（**8-2-29**）说明**E**和**H**的幅值成比例；而且，在介质中任一点，任一时刻其**电场能量密度**与**磁场能量密度**相等。

（4）式(8-2-28)说明电磁波的传播速度为 $V=\dfrac{\omega}{K}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\dfrac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C$,麦克斯韦**预言光即是电磁波**,于是可得 $\dfrac{C}{V}=n$ 是介质的折射率，

$$n=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}\approx\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

。

- 一般情况下，介质μ和ε是电磁波的频率ω的函数，所以n也是ω的函数，

$$V=\frac{\omega}{K}=\frac{C}{n}$$

又称**色散关系**。

4. 赫兹实验及发射天线

1865年麦克斯韦预言了电磁波的存在，直到1888年才由赫兹的实验证实。

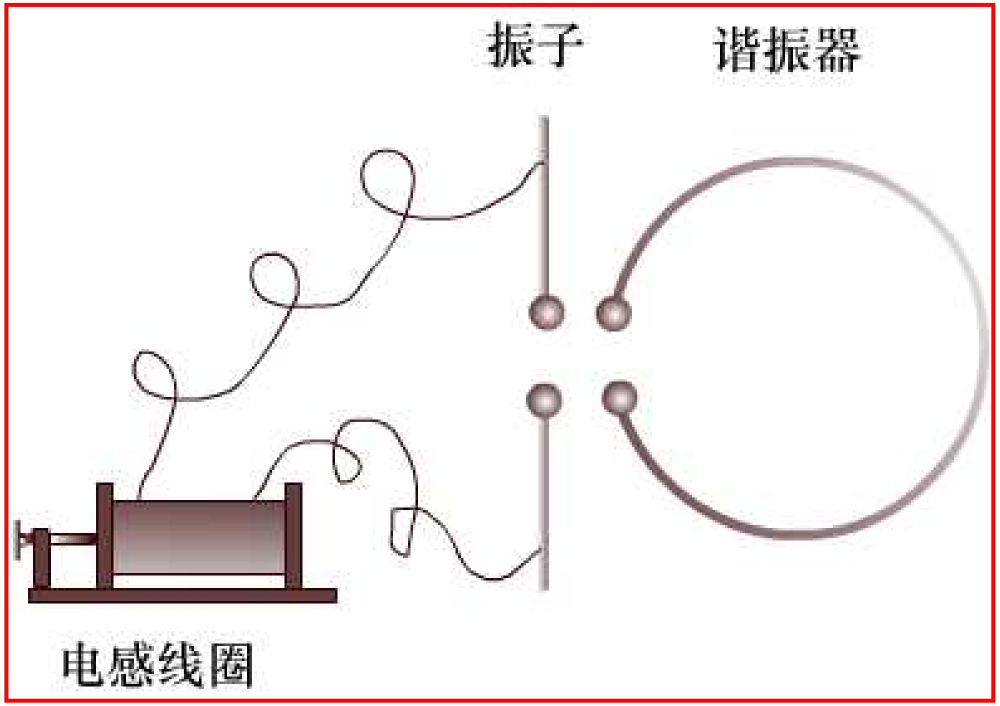


图8-2-3　赫兹实验的原理

天线原理

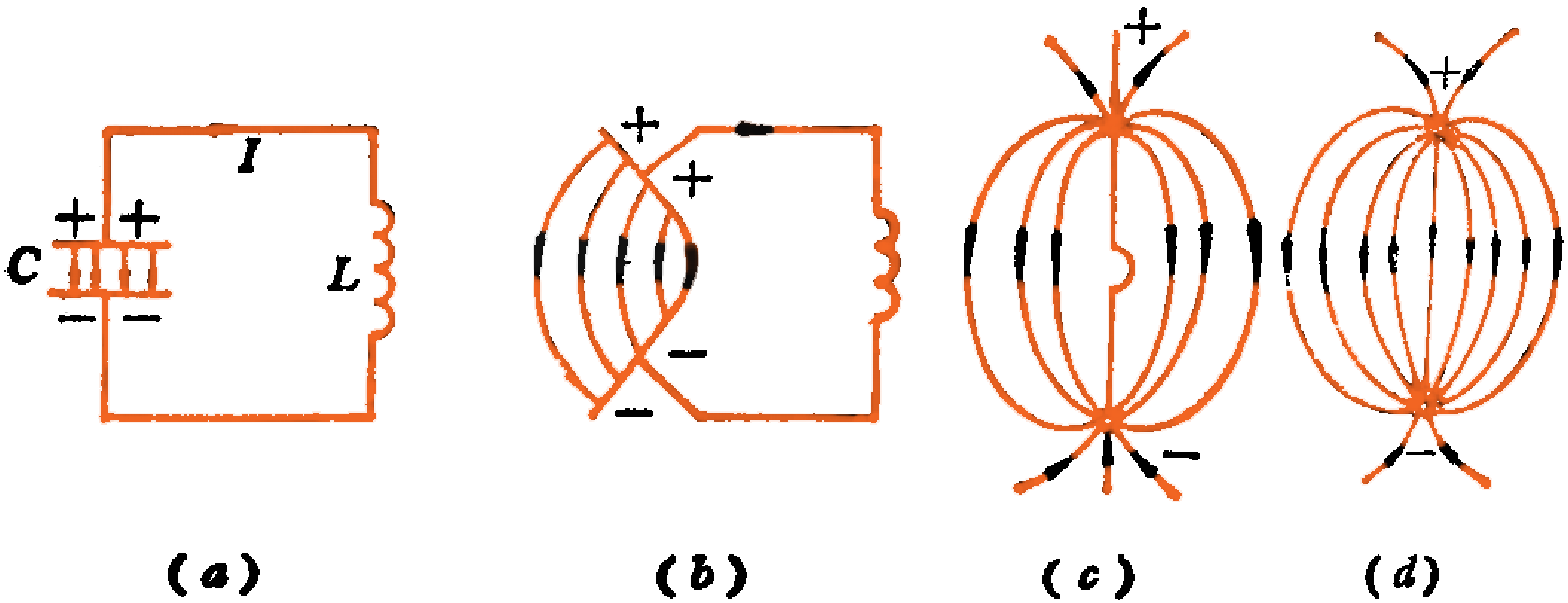
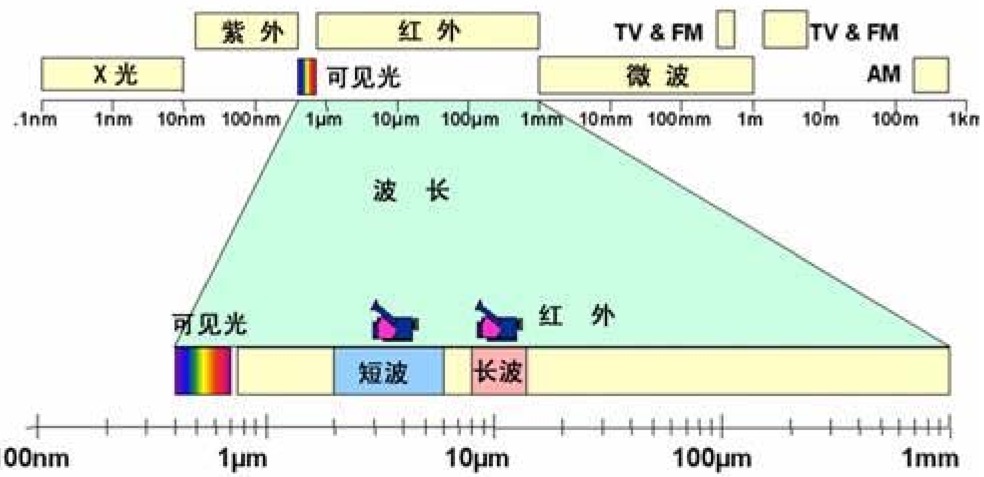


图8-2-4　由LC振荡电路变为偶极振子

电场和磁场向空间散开，因为$L \propto N^2$、$C \propto \frac{S}{d}$，所以现在L、C都很小，因此振荡频率很高，$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

单位时间内辐射能量 $\propto f_0^4$

电磁波谱：射电、红外、可见光、紫外、X-射线、γ-射线



电磁辐射频谱图

§8-3 电磁场的能量、动量和角动量

一、一般表达

对静止各向同性介质中的电磁场的能量密度 w，能流密度（又称坡印亭矢量）$\mathbf{S}$，动量密度 $\mathbf{g}$，角动量密度 $\mathbf{l}$ 表达式如下：

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}, \qquad (8\text{-}3\text{-}1)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}, \qquad (8\text{-}3\text{-}2)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}, \qquad (8\text{-}3\text{-}3)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{g}. \qquad (8\text{-}3\text{-}4)$$

于是，体积V中电磁场的总能量、总动量和总角动量分别为如下体积分：

$$W=\iiint_V w dV,\qquad \mathbf{G}=\iiint_V \mathbf{g} dV,\qquad \mathbf{L}=\iiint_V \mathbf{l} dV,\qquad \textbf{(8-3-5)}$$

能量守恒定律的表达式为：

$$\oiint_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A}=-\frac{d}{dt}(W+W_n) \qquad \textbf{(8-3-6)}$$

上式中$d\mathbf{A}$为积分的面元，W_n是非电磁的总能量。可将上式与电荷守恒定律比较，以便加深理解。

空间中电磁场能量的变化

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}=\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}-\vec{j}_0\right)-\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)$$
$$=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$
$$=-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

$$\nabla\cdot(A\times B)$$
$$=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$$

定义：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 称为波印廷矢量（Poynting Vector）

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{S}-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

某一体积V内电磁场能量单位时间损失：

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=-\iiint_V\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}dV=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{S})dV+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\iint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

$$p=\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

对于真空中的电磁场，$\vec{j}_0=0$

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t}=\iint_A \vec{S}\cdot d\vec{A}}$$

单位时间电磁场的能量损失等于波印廷矢量的通量

对比电荷守恒定律：$$\boxed{-\frac{\partial Q}{\partial t}=\iint_A \vec{j}\cdot d\vec{A}}$$

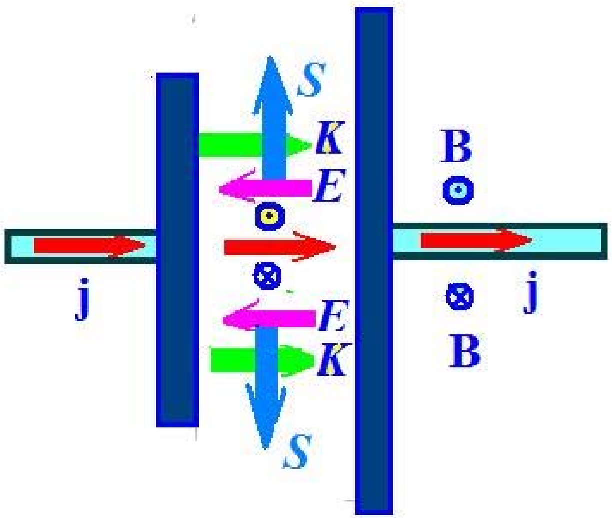
电流密度：单位时间流过单位（垂直）面积的电荷

波印廷矢量：单位时间流过单位（垂直）面积的能量

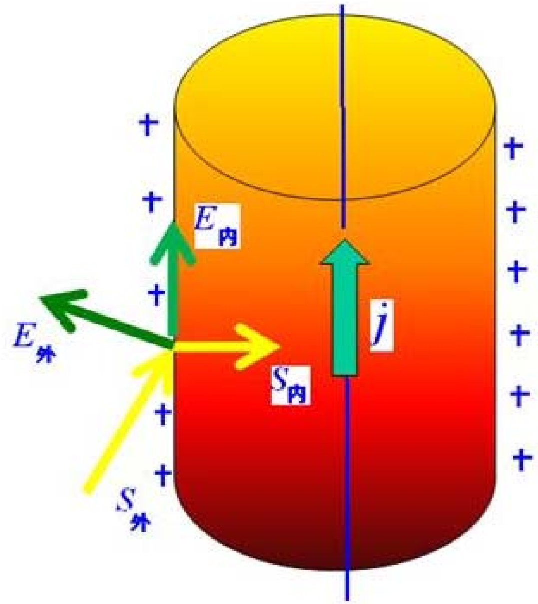
称为能流密度矢量

电路中的能量流动

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$



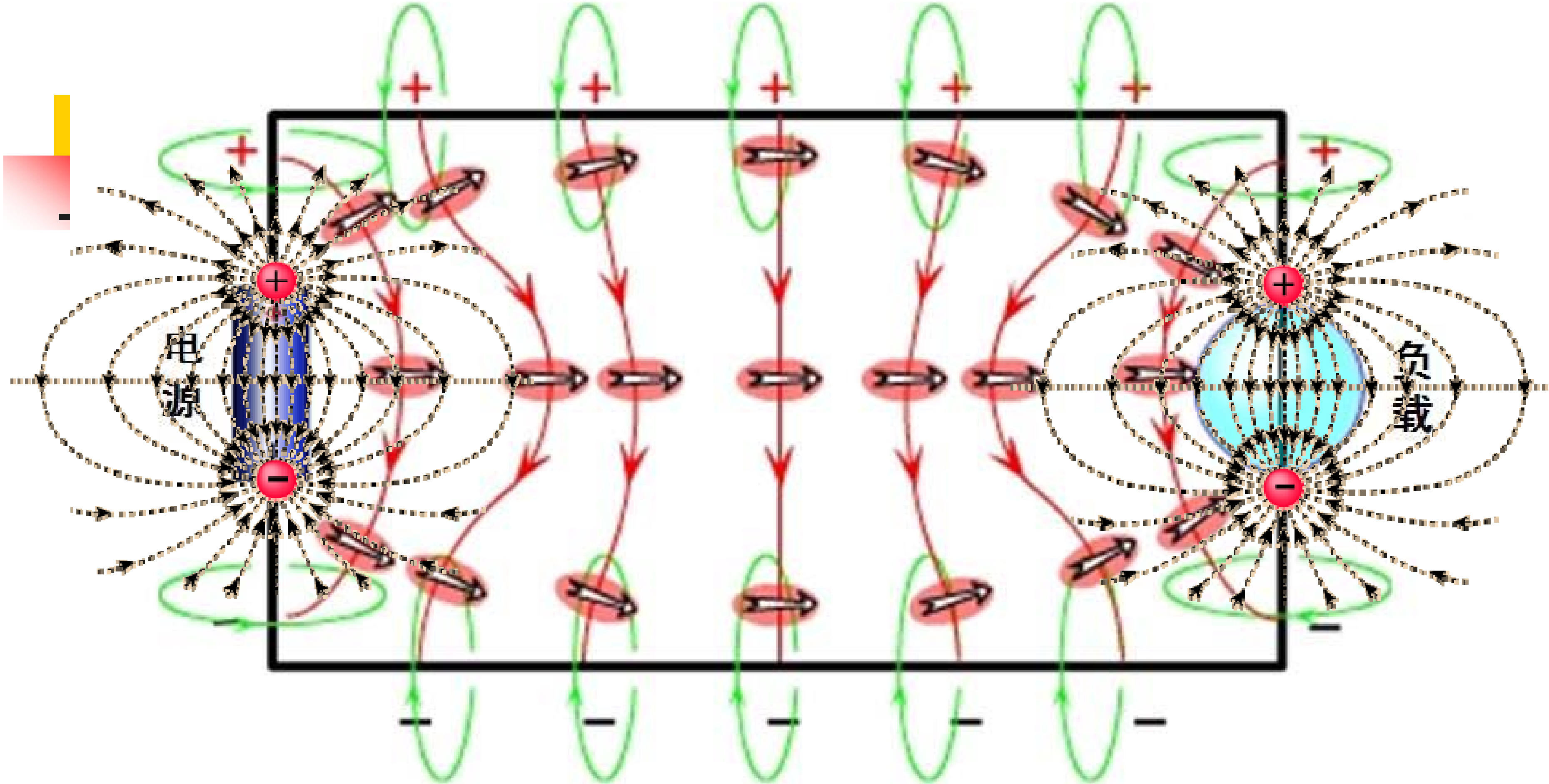
(a) 电源内部



(b) 导线内外部

- 非静电力对电磁场做正功
- 电场做负功，焦耳热
- 合力对电磁场做正功
- 能量沿垂直方向流出

- 在内部，能量垂直流入，转化为焦耳热
- 在外部，能量基本沿导线方向流动，少部分流入（电阻越大，比例越大）



- 如果没有导线，就没有电流，没有磁场，电磁场能量不流动
- 能量主要通过导线周围的介质传播，导线只是引导方向

为加深对电磁场角动量的理解，我们可以作一个简单的实验，如图8-3-1，一圆柱形介质电容器，长度为l，充满介电常数为ε的均匀各向同性介质，内外半径为r_1、r_2，绕轴的转动惯量为I，板极充电荷为$\pm Q$，置于一均匀磁场**B**中。

当电容器放电后，电容器便绕轴旋转，其角速度为ω，ω的大小可通过电磁场的角动量计算如下：

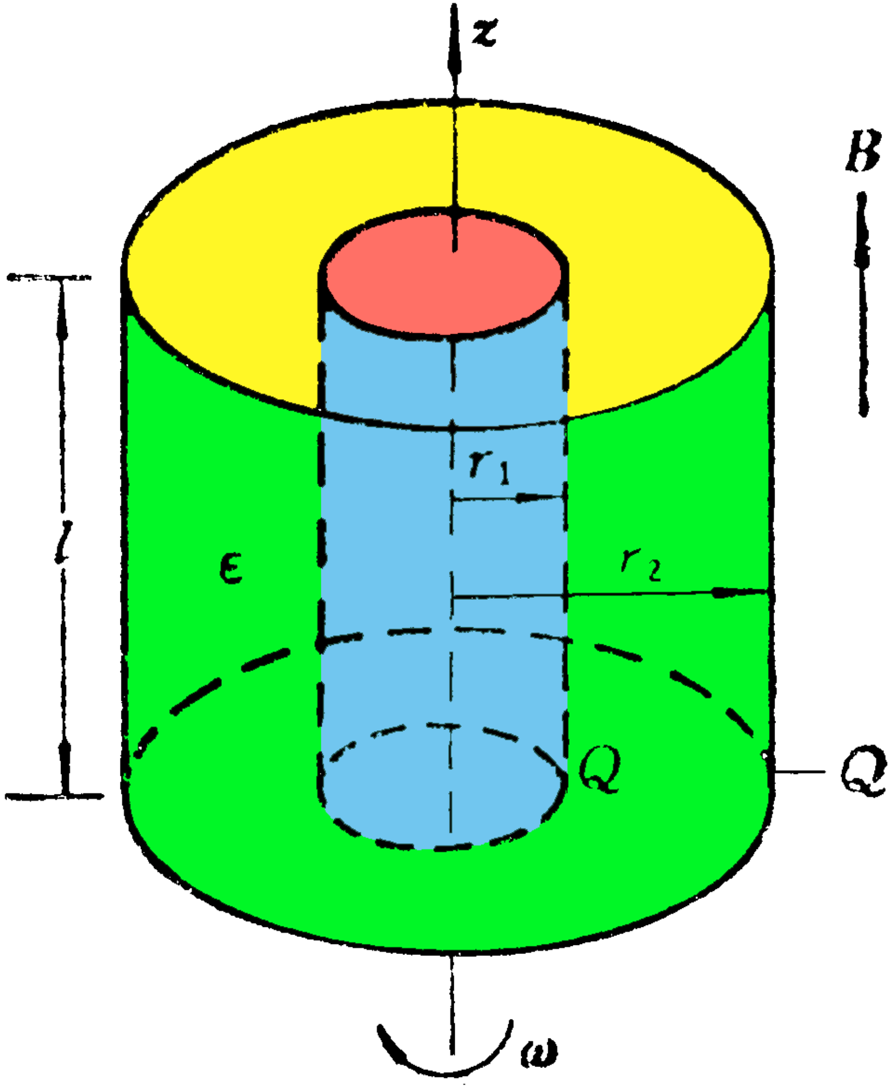
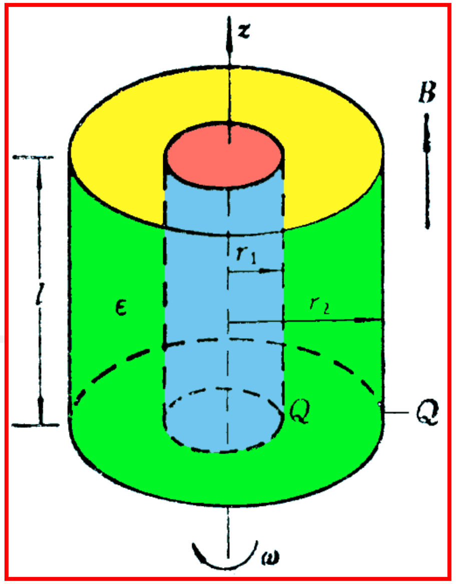


图8-3-1 轴向均匀磁场中的圆柱电容器



充电后：略去边缘效应，电容器中：

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=Q$$

得

$$D=\frac{Q}{2\pi r\cdot l\cdot},\qquad \mathbf{D}=\frac{Q}{2\pi rl}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{D}\times\mathbf{B}=DB\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{z}}=-\frac{QB}{2\pi rl}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

$$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{g}=-\frac{QB}{2\pi l}\hat{\mathbf{z}},$$

于是电容器内电磁场的总角动量为

$$\mathbf{L}=\iiint_V \mathbf{l}dV=-\frac{QB}{2\pi l}(\pi r_2^2-\pi r_1^2)\cdot l\hat{\mathbf{z}}=-\frac{1}{2}QB(r_2^2-r_1^2)\hat{\mathbf{z}}$$

放电后：电容器内 $\mathbf{E}=0,\mathbf{D}=0$，电磁场的角动量为零。**由总角动量守恒**，则

$$0+\mathbf{L}_n=\mathbf{L}，\text{即}\quad I\omega=-\frac{1}{2}QB(r_2^2-r_1^2).$$

于是得：$$\boxed{\omega=-\frac{1}{2I}QB(r_2^2-r_1^2)}$$

上式中**负号**表示电容器顺时针旋转。

二、平面电磁波的能量、动量

$$\left.\begin{aligned}&\text{能量密度}: w=\varepsilon E^2=\mu H^2\\&\text{能流密度}: \mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\frac{\mathbf{v}}{v}=\frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\mathbf{v}}{v}=w\mathbf{v}\\&\text{动量密度}: \mathbf{g}=\mu\varepsilon\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{\mathbf{S}}{v^2}=w\frac{\mathbf{v}}{v^2}\end{aligned}\right\}\text{瞬时值}$$

如果在真空中，则有：$v=c,\quad S=wc,\quad g=\frac{w}{c}=\frac{S}{c^2}$

按时间的平均值：

$$\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \mathbf{v} = \bar{w}\mathbf{v}$$

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \frac{\mathbf{v}}{v^2} = \frac{\bar{\mathbf{S}}}{v^2}$$

三. 光压（电磁波即光波）

电磁波具有动量、能流密度，照射到物体表面后反射，动量改变(方向、大小)，造成光压。如下图**8-3-2**示：

电磁波⊥入射到物体表面，有 $\mathbf{S}_{入}, \mathbf{S}_{反}$

定义 $\mathrm{R} \equiv \dfrac{S_{反}}{S_{入}}$ 称反射系数

当 $\mathrm{R} = \begin{cases} 1 & \text{称全反射} \\ 0 & \text{称全吸收} \end{cases}$

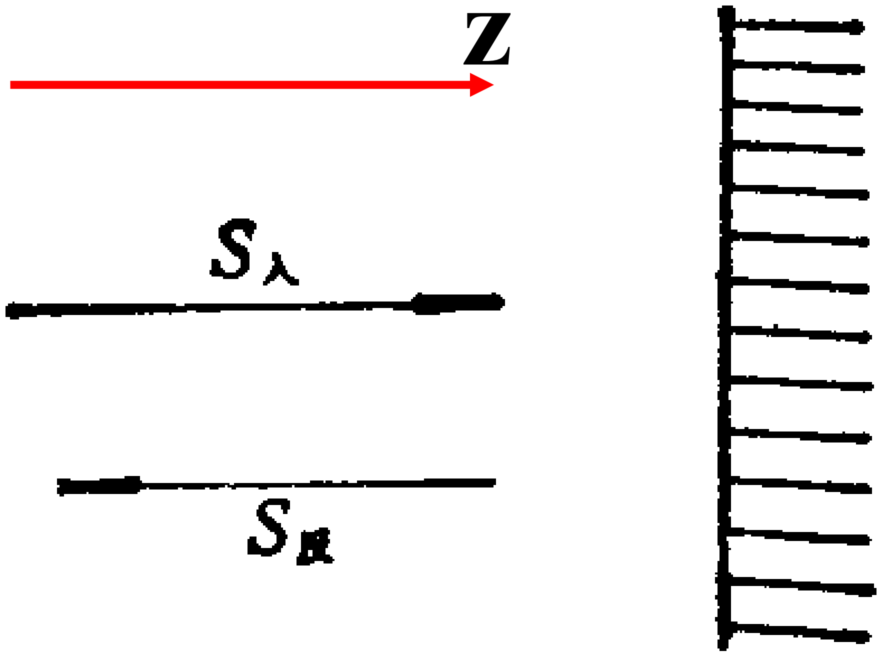


图8-3-2　光压分析示意图

设物体表面一面元ΔA，在Δt时间内，
电磁波动量改变是：

$$
\begin{aligned}
(\vec{g}_{入}-\vec{g}_{反})\cdot\Delta A\cdot(C\cdot\Delta t) &= \frac{\Delta A\cdot\Delta t}{C}C^2(g_{入}+g_{反})\hat{Z} \\
&= \frac{\Delta A\cdot\Delta t}{C}\cdot(S_{入}+S_{反})\hat{Z} \\
&= \frac{\Delta A\cdot\Delta t}{C}\cdot S_{入}(1+\mathrm{R})\hat{Z} \\
&= \Delta A\cdot\Delta t\cdot w\,(1+\mathrm{R})\hat{Z}
\end{aligned}
$$

又，动量的改变=冲量

$$\Delta A\cdot\Delta t\cdot w(1+\mathrm{R})\hat{Z}=p\cdot\Delta A\cdot\Delta t\,\hat{Z},\quad p\text{是压强}$$

$$\therefore\qquad p=w(1+\mathrm{R})$$

平均光压强：$\quad\overline{p}=(1+R)\overline{w}$

四、什么是电磁场？

电磁场是物质的一种形态

- 电磁场和实物是物质存在的两种不同的形态．电磁场与实物有很多相同点，例如，它们都具有能量、动量及角动量．
- 但另一方面，电磁场与实物又存在一些差异：

  1、如电磁场的基本组成部分是光子，而**光子是没有静止质量**的，但构成实物的电子、质子等微观粒子都具有静止质量；

  2、电磁场以波的形式在空间中传播，**在真空中的速率永远是** **c** = 3×10^{8} m/s，在折射率为n的介质中的传播速度为c/n；

  3、一种实物占有的空间不能同时被另一种实物占领，即**实物具有不可入性**，可是频率不同的电磁波，**可以同时**占有同一空间，独立存在，各自保持自己的特性不变．

综上所述，电磁场与实物有相同点也有不同点．