第三章　稳恒电流

§ **3.1**　稳恒条件

§ **3.2**　欧姆定律与焦耳定律

§ **3.3**　电源与电动势

§ **3.4**　基尔霍夫定律

基本知识

- **电流**的定义：在导体中，电荷的定向运动就是电流。
- **稳恒电流**的定义：不随时间变化的电流即稳恒电流。
- 有稳恒电流时导体的状况：导体中自由电荷的分布也不会随时间变化，所产生的电场也不随时间变化，称为**恒定电场**，即导体内存在着非零的电场，而且：

  (1) 它与电流之间的依赖关系满足一定的实验规律，该规律反映了导体的导电性质；

  (2) 恒定电场本质上属于静电场，同样满足静电场的基本规律，以下将不加区别地将恒定电场称为静电场；

  (3) 电流既是电荷的运动，它本身满足电荷守恒定律。
- 对比**静电场**情况，处于静电平衡的导体显示出彻底的“抗电性”，表现为导体内电场强度必须处处为零。

§3.1 稳恒条件

一、 电流强度和电流密度

二、 电流的物理图像

三、 电流连续方程

四、 稳恒条件

一、 电流强度和电流密度

- 中学里接触到直流电路的时候，曾引入电流强度：

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \qquad (3.1.1)$$

电流强度的单位为库仑/秒，称为安[培]，符号为A。

- 用电流强度描述导体中电荷的宏观流动性质似乎太“粗糙”。（1）不能描述电流沿截面的分布情况；（2）不能描述电流的方向，即正电荷移动的方向。

- 为了描述导体中各点电流的大小和方向，人们引入一个更“精细”的物理量——电流密度。

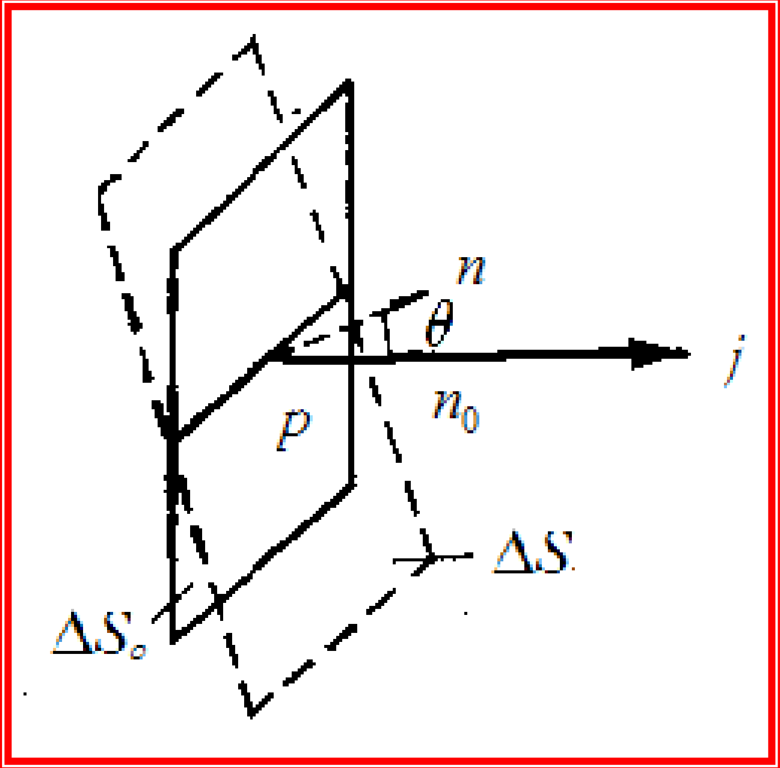
■**电流密度**的**定义**：考虑导体中某一给定点P，在该点沿电流方向作一单位矢量$\mathbf{n}_0$，并取一面元 ΔS_0 与$\mathbf{n}_0$垂直，如图所示。设通过 ΔS_0 的电流强度为 ΔI ，则定义P点处电流密度的大小为：

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S_0}. \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

单位为安培/米^2（$\mathbf{A \cdot m^{-2}}$）。

为了使电流密度能同时表示出P点处电流的方向，可将电流密度定义为一个矢量，其方向与$\mathbf{n}_0$同向，表示正电荷移动的方向，即：

$$\boldsymbol{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0}\boldsymbol{n}_0 \qquad \textbf{(3.1.3)}$$



电流密度的定义

■ 由上述定义可见，电流密度是一个矢量，它的方向表示导体中某点电流的方向，数值等于通过垂直于该点电流方向的单位面积的电流强度。这样定义的电流密度是空间位置的函数**j(r)**，它细致地描述了导体中的电流分布，也称为电流场。

■ 类似静电场，对电流场也可以通过引入“电流线”来进行形象描述。电流线即电流所在空间的一组曲线，其上任一点的切线方向和该点的电流密度方向一致。一束这样的电流线围成的管状区域称为电流管。

■ 已知导体中某点P的电流密度，可以求得通过该点任一面元 ΔS 的电流强度 $\Delta I = j\Delta S_0 = j\Delta S\cos\theta.$ 又可写成 $\Delta I = \boldsymbol{j}\cdot\Delta\boldsymbol{S}.$

通过 S 面的电流强度I：

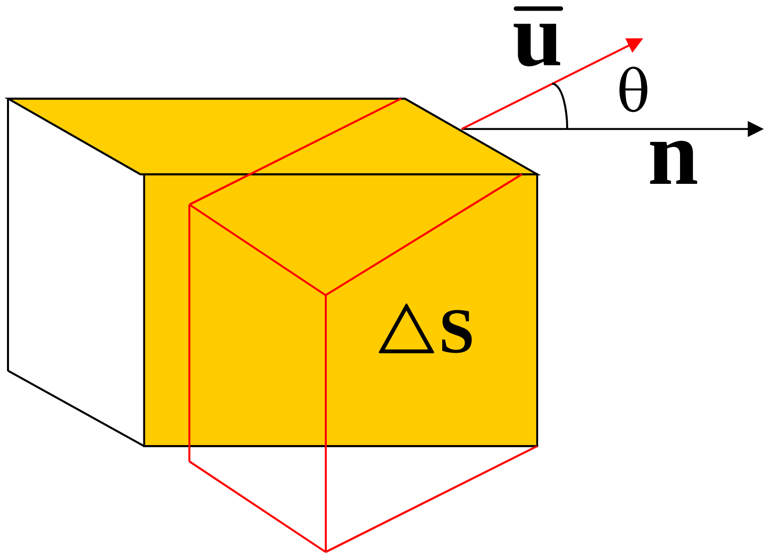
$$I = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}. \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

二、电流的物理图像

■电流是电荷的**定向**运动，即导体中载流子在外力，例如电场，作用下的定向运动所产生。下面以通电导线为例，说明其物理图像。

■带正电荷的**金属**原子核 ⊕**不动**, 载流子是电子⊖ ，是电子运动。

■按电流的定义，在导体中如果有 k 种带电粒子，



其中第i种带电粒子的电量、数密度、平均速度分别为 $q_i, n_i, \bar{\mathbf{u}}_i$，则有：

$$\Delta I=\sum_{i=1}^{k}q_i n_i\bar{\mathbf{u}}_i\bullet\Delta\mathbf{S}=\sum_{i=1}^{k}\rho_{ei}\bar{\mathbf{u}}_i\bullet\Delta\mathbf{S}$$

$$\because\quad \Delta I=\mathbf{j}\bullet\Delta\mathbf{S}$$

$$\therefore\quad \mathbf{j}=\sum_{i=1}^{k}\rho_{ei}\bar{\mathbf{u}}_i=\sum_{i=1}^{k}q_i n_i\bar{\mathbf{u}}_i$$

- 在载流金属导线中只有两种带电粒子：

$$\sum_{i=1}^{2}\rho_{ei}=\rho_{e+}+\rho_{e-}=0,$$ 整体电中性

$$\mathbf{j}=\rho_{e+}\overset{0}{\cancel{\bar{\mathbf{u}}_+}}+\rho_{e-}\bar{\mathbf{u}}_-=\rho_{e-}\bar{\mathbf{u}}_-=-en\bar{\mathbf{u}}_-\neq 0.$$

- 当不载流金属导线整体运动时：

$$\because\quad \bar{\mathbf{u}}_+=\bar{\mathbf{u}}_-,\qquad \therefore\quad \mathbf{j}=\bar{\mathbf{u}}_+(\rho_{e+}+\rho_{e-})=0.$$

[例] 一般载流金属导线中的情况。

$$j \sim 10^6 \text{安培}/\text{米}^2,$$

$$n \sim 10^{29} / \text{米}^3,$$

$$q = e \sim 10^{-19} \text{库仑}.$$

$$\because \quad \mathbf{j} = -en\bar{\mathbf{u}}_- \Rightarrow$$

$$\therefore \quad \left|\bar{\mathbf{u}}_-\right| = \frac{j}{en} \sim \frac{10^6}{10^{-19} \times 10^{29}} \sim 10^{-4} (\text{米}/\text{秒}).$$

可见电子的平均定向速度是很慢的，但为何电源一接通立即灯亮呢？这是由于电场的传播速度为光速**C**。

三、 电流连续方程

■ 电流连续方程是**电荷守恒定律**的数学表示。

■ 按照电荷守恒定律：在孤立系统内，电荷的代数和保持不变，电荷只能由一个物体转移到另一个物体，或由物体的某一部分转移到其它部分。

■ 如果在导体内任取一闭合曲面S，所围区域为V，则某段时间内流出该曲面S的电量应当等于同一段时间内区域V中电量的减少。

若在S面上规定面积元矢量$d\mathbf{S}$**指向外法线方向**，则单位时间内由S面**流出**的电量应为：

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

与此同时，单位时间内V中电量的**减少**为：

$$-\frac{dq}{dt}=-\frac{d}{dt}\iiint_V \rho_e dV=-\iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t}dV,$$

根据电荷守恒定律，应有：

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}=-\frac{dq}{dt}=-\iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t}dV.$$

即为电流连续方程的积分形式。

用数学高斯公式，立即得：$\iiint_V (\nabla\bullet\mathbf{j})dV=-\iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t}dV,$

鉴于V的任意性，于是可得
电流连续方程的微分形式：

$$\nabla\bullet \boldsymbol{j}+\frac{\partial \rho_e}{\partial t}=0.$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{dq}{dt}$$

说明：

（1）由于电荷守恒定律的普遍性，上述电流连续方程也是普遍成立的，与载流导体的物理性质无关；

（2）类比静电场的高斯定理，可借助电流线作如下形象解释。电流线只能起、止于电荷随时间变化的地方。在电流线的起点附近的区域中，由 $dq/dt<0$，会出现负电荷的不断累积，即电荷密度不断减小；

而在电流线的终点附近的区域中则有 $dq/dt>0$，会出现正电荷的不断累积，即电荷密度不断增加；

对于电荷密度不随时间变化的地方，电流线既无起点又无终点，即电流线不可能中断。

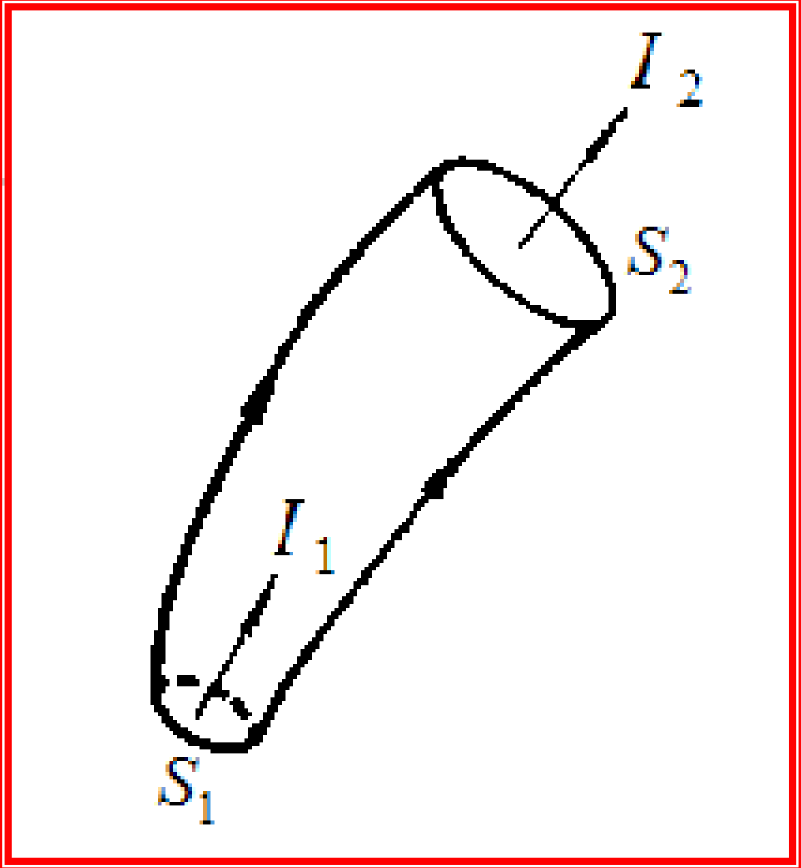
四、稳恒条件

从电流连续方程出发，立刻可导出稳恒电流应满足的条件。对稳恒电流来说，导体内各点电流密度应与时间无关，要求dq/dt与时间无关，如果不为零，则造成电荷不断积累，电场随时间变化，将破坏电流的稳定，所以：$\frac{dq}{dt}=0$，$\frac{\partial \rho_e}{\partial t}=0$，于是：$\oiint_S \mathbf{j}\bullet d\mathbf{S}=0$，或 $\nabla\bullet\mathbf{j}=0.$

称做稳恒条件的积分形式和微分形式。稳恒条件表明，电荷分布将不会因稳恒电流的存在而随时间变化，所以由它产生的电场必然是静电场。

■说明：借助于电流线和电流管的概念，可以对稳恒条件作如下形象解释：（1）电流线不可能有起点和终点，即稳恒电流的电流线或电流管一定是闭合的；（2）沿任一电流管各截面的电流强度都相等。

- 通常的直流电路由导线连接而成，电流线沿着导线分布，从而导线本身就是一个电流管。
- 由上述结论可知，直流电路（或者说稳恒电路）应当是闭合的；且沿一段没有分支的电路，各处的电流强度必定相等。



沿电流管的电流强度相等

§3.2 欧姆定律与焦耳定律

一、欧姆定律

二、焦耳定律

三、经典电子论观点解释

四、欧姆定律的失效问题

五、导电介质

现在我们来分析导体中电流和电场的关系。

一、欧姆定律

中学已知，由实验得在直流电路中导线内，欧姆定律为：

$$I = \frac{U}{R} \quad 或 \quad U = IR, \qquad (3.2.1)$$

■电阻的倒数叫做电导，用G表示：

$$G = \frac{1}{R}. \qquad (3.2.2)$$

单位是（欧[姆]）$^{-1}$，称为西[门子]，符号为S。

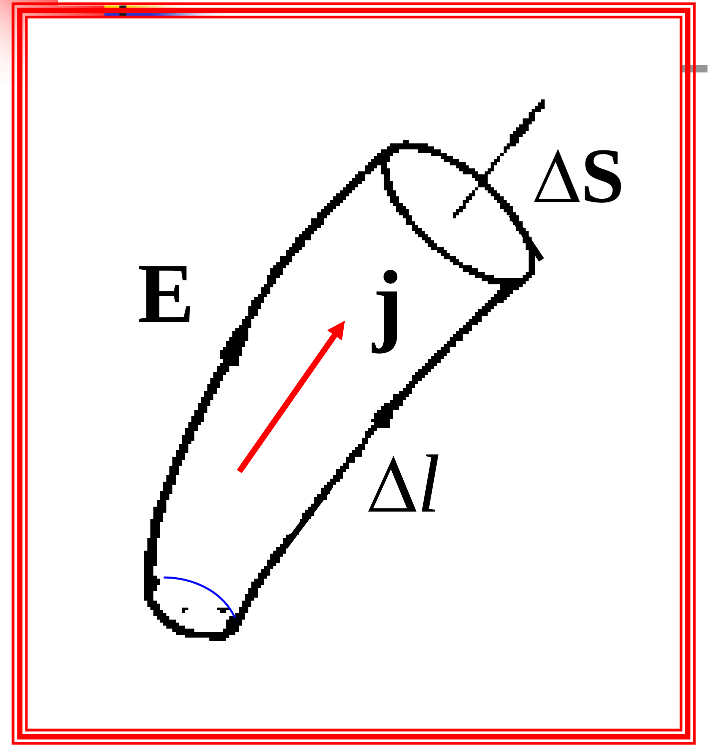
$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (3.2.3)$$

■电阻率的倒数称为电导率，用 σ 表示：

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \qquad (3.2.4)$$

电导率的单位为(欧·米)$^{-1}$，或S· m^{-1}。

为了更细致地描述导体的导电规律，我们应当逐点分析电流密度$\boldsymbol{j}$和电场强度$\boldsymbol{E}$之间的关系。取一段电流管如左图，现在有：$\Delta I=\dfrac{\Delta U}{R}$，



式中 $\Delta I=j\Delta S$，　$R=\rho\dfrac{\Delta l}{\Delta S}=\dfrac{\Delta l}{\sigma\Delta S}$

在电流管情况下有 $\Delta U=E\Delta l$

于是，

$$j\Delta S=\frac{E\Delta l}{\Delta l/(\sigma\Delta S)}=\sigma E\Delta S,\qquad j=\sigma E$$

既然$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{E}$同向，上式可写成：

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}.\qquad\qquad \textbf{(3.2.5)}$$

这就是电流密度的欧姆定律。称它为欧姆定律的微分形式，而把式（**3.2.1**）称为欧姆定律的积分形式。

- 说明：欧姆定律的微分形式更为细致地描述了导体的导电规律。

（1）便于用场的观点阐述稳恒电路的基本原理；

（2）从它出发便于说明金属导电的微观机制；

（3）也便于研究大块导体中电流和电场的分布规律；

（4）欧姆定律的微分形式比积分形式适用范围更广。例如对非稳恒情况，实验证明，欧姆定律的微分形式仍在一定范围内适用于这类非稳恒情况。

二、焦耳定律

中学已学焦耳定律为：$P_e = IU = \frac{U^2}{R} = RI^2.$

单位体积的热功率称为热功率密度，用p表示，有

$p = P/V = I^2 R / V$。

类似推导欧姆定律的微分形式（**3.2.5**）的做法，考虑一段长 Δl、截面积 ΔS 的电流管，由

$$I = j\Delta S, \quad R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}, \quad V = \Delta S \Delta l,$$

将这三个量代入p 中，得：

$$\boxed{p = \frac{j^2}{\sigma}.}$$

上式即焦耳定律的微分形式。

三、经典电子论观点解释欧姆定律和焦耳定律

以金属导体为例，对欧姆定律和焦耳定律作出经典的微观解释。

■定性地描绘一下金属的微观结构。金属中的原子倾向于失去部分电子而成为正离子。全部正离子在金属中周期有序排列，形成所谓“晶体点阵”或“晶格”。脱离原子的电子称为自由电子，它们不再为一特定的正离子所束缚，而是为全体正离子所共有。

■在无外电场或其它原因（如温度梯度、数密度梯度等）时，金属中的自由电子好象气体中的分子一样不停地作无规热运动，不会发生定向运动，因而$\boldsymbol{j} = 0$。

■当有外电场时：自由电子将受力而获得一加速度，但是电子不会无限制地加速 ⟶ 而会与晶格碰撞发生散射，从而改变运动方向和速率 ⟶ 并将部分能量转移给晶格上的正离子，使其热振动加剧 ⟶ 金属具有电阻和金属发热的原因。

在电场力和碰撞力的共同作用下，自由电子的总体运动为一逆着外电场方向的漂移运动，最终产生沿电场方向的宏观电流。

■来定量分析电子的漂移速度。假设经碰撞后电子对原来的运动方向完全丧失"记忆"，即沿各个方向等概率散射，其宏观定向速度$u_0 = 0$。此后，电子在电场力作用下定向加速，直到下一次碰撞为止。

在相邻两次碰撞之间，电子自由飞行，获得的宏观定向末速 $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} \cdot \overline{\tau} = -e\overline{\tau}\boldsymbol{E}/m$ ，$\overline{\tau}$ 为电子在相邻两次碰撞之间的平均自由飞行时间。

若电子的平均自由程为 $\overline{\lambda}$，平均热运动速率为 $\overline{v}$ ，所以，

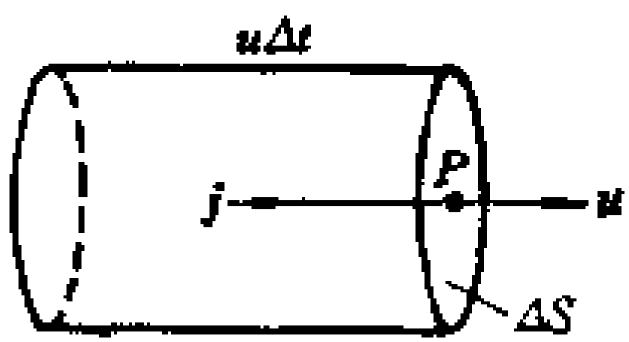
$$\overline{\tau} = \overline{\lambda} \Big/ \left[\overline{v} + \left(u_1 / 2 \right) \right]$$

一般情况下 $\overline{v} >> u_1$，则 $\overline{\tau} = \overline{\lambda}/\overline{v}$ 。电子的漂移速度 u 应是碰撞前后宏观定向速度的平均，即

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 = -\frac{e\overline{\lambda}}{2m\overline{v}}\mathbf{E}$$

■下面分析j和**u**的关系。为此，在导体中某点P作一面元ΔS与**u**垂直。经过时间Δt后，电子漂移的距离为$u\Delta t$。以ΔS为底，$u\Delta t$为高，逆着**u**的方向作一柱体（下图），则在Δt时间内，柱体中的电子将全部通过ΔS。设电子的数密度为n。因柱体的体积$u\Delta t\Delta S$，故共有$nu\Delta t\Delta S$个电子。因此，通过ΔS的电流强度为

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = neu\Delta S,$$



电流密度的大小为：

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = neu, \quad \vec{j} = -ne\vec{u}.$$

将式**u**代入上式得：

$$\boldsymbol{j} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\boldsymbol{E}$$

与欧姆定律$j=\sigma E$比较，可求得电导率的表达式如下：

$$\sigma = \frac{ne^2\overline{\lambda}}{2m\overline{v}}$$

我们不仅解释了欧姆定律，而且导出了电导率与微观量平均值的关系。这一关系从定性上讲是对的。例如，

$$\sigma \propto \frac{1}{\overline{v}} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad T\uparrow \text{ 则 } \sigma\downarrow .$$ 定性符合

要对金属的导电规律进行严格定量的处理，需要用到量子理论。

四、欧姆定律的失效问题

主要表现是j与E或者说I与U的比例关系遭到破坏，而代之以非线性关系。下面就几种重要的情况进行讨论。

（1）电场很强时，例如在金属中$E > 10^3—10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$时，则 $\mathbf{F}\uparrow, \mathbf{a}\uparrow, \therefore |\mathbf{u}|\uparrow$, 此时$|\mathbf{u}| \sim \bar{v}$, 故计算$\bar{\tau}$时不能忽略$|\mathbf{u}|$，于是，便有$\bar{\tau}(\mathbf{E})$，从而$j$与$E$的关系是非线性的。另外，高速运动的电子与晶格的正离子碰撞将使正离子进一步电离，这时有$n = n(E)$。这将加剧j和E之间的非线性关系。

（2）低气压下的电离气体，$\bar{\lambda}\uparrow\uparrow, \bar{\tau}\uparrow\uparrow$, 则$|\mathbf{u}|\uparrow\uparrow$ 从而导致欧姆定律失效，其理由同前。

（**3**）高频交变电场中的导体内，$\boldsymbol{E}$的方向变的太快。

（**4**）晶体管、电子管等器件，I与U的关系也是非线性的，在电子学中会讨论它们的导电特性。

（**5**）各向异性晶体中，σ 是张量，$\boldsymbol{j}$与$\boldsymbol{E}$不再同向。

（**6**）超导体中。

五、导电介质

导电介质：既有绝缘介质的特性，又有导电的特性。

既满足稳恒电流的基本方程，也满足介质的基本方程。

基本方程

导体介质的电学规律

$$\boxed{\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV}$$

导体介质中的本构方程

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$$

导体介质中的边值关系

$$\boxed{j_{2n} = j_{1n}}$$

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0}$$

基本思路

- 稳恒电流和稳恒电场只与导电性质有关，与介电常数无关。
- 总电荷分布由稳恒电场决定，也与介电常数无关。
- 总电荷中极化电荷及自由电荷所占份额与介电常数有关。

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势

电场强度

总电荷

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_e dV$$

只与导体性质有关

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

自由电荷

电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$$

极化强度

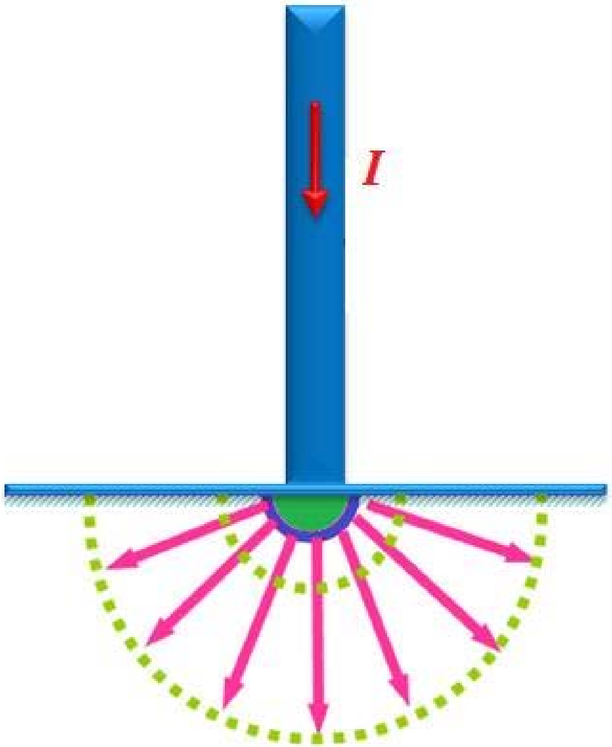
极化电荷

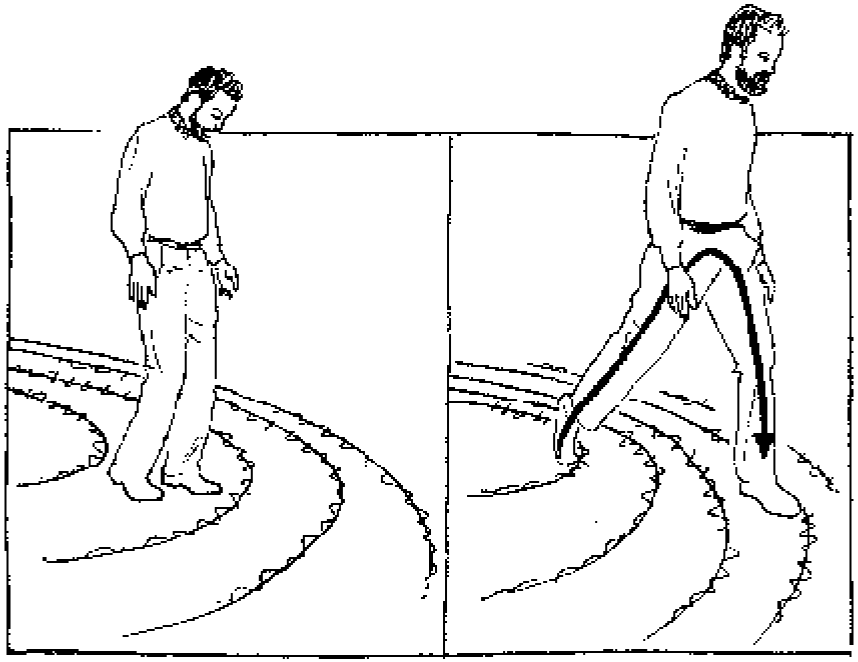
$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

【例】电线被风吹断，一端触及地面，使得200A的电流由接触点流入大地。设地面水平，土地的电导率为$10^{-2}\ (\Omega m)^{-1}$。

（1）当一个人走近输电线接地点时，两脚间（0.6m）产生跨步电压。求相距触地点1m和10m处的跨步电压；

（2）大地中的电荷分布；（3）接触点上的总电荷。





导体中

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电势

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

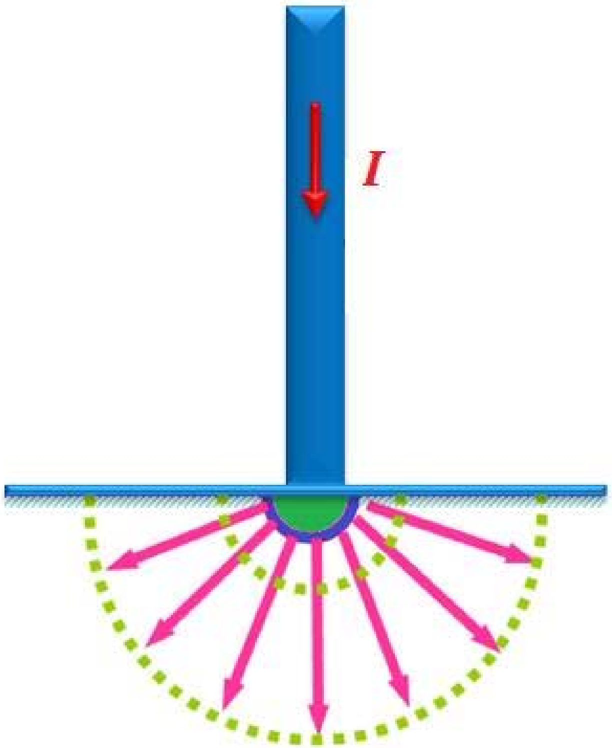
电流强度 ⟷ 电流密度 ⟷ 电场强度

总电荷

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e dV$$

【解】200A电流全部流入大地

以地面为底，半径为r作半球面，根据稳恒条件



$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -I + j\cdot 2\pi r^2 = 0$$

$$j = \frac{I}{2\pi r^2}$$ 方向如图所示

根据本构方程，可得电场强度

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$$

进而可得地面上$r=a$与$r=b$之间的电势差

$$U_{ab}=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^b \frac{Idr}{2\pi\sigma r^2}=\frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{(b-a)}{ab}$$

取$a=1m, 10m$；$b\text{-}a=0.6m$；得跨步电压分别为

$$\Delta U_{a=1}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{(b-a)}{ab}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{0.6}{1+0.6}=1194\,V$$

$$\Delta U_{a=10}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{(b-a)}{ab}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{0.6}{10(10+0.6)}=18\,V$$

（2）大地中的电荷分布：

根据稳恒条件，有： $$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$$

代入欧姆定律： $$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

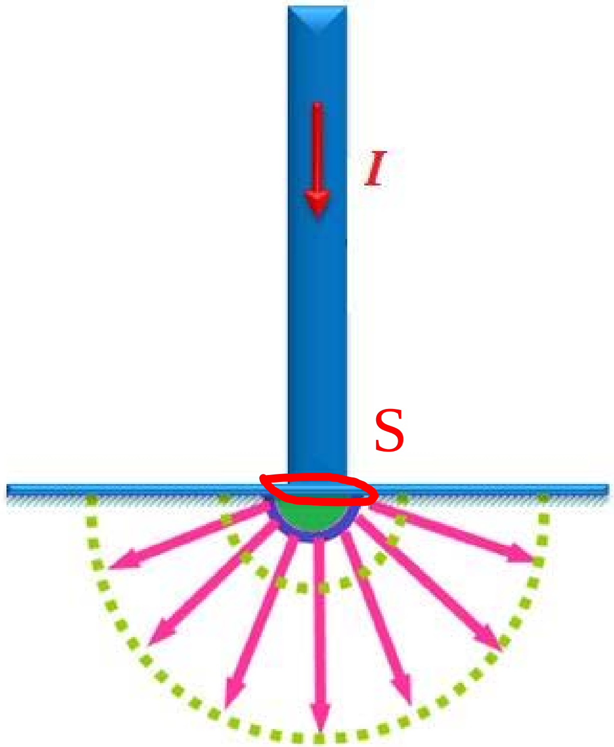
可得： $$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

根据高斯定律： $$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e dV$$

易得： $$\boxed{\rho_e\equiv 0}$$

$\boxed{\text{流过稳恒电流的均匀导体中，电荷密度恒为零}}$

（3）大地与电线接触点（面）上的电荷分布：



任取一封闭曲面S, 正好包住接触点（面）

根据稳恒条件，有： $\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$

S可分为两部分，电线中与大地中：

$$S = S_1 + S_2$$

则有： $\iint_{S_1} \vec{j}_1\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{j}_2\cdot d\vec{S} = 0$

$$\iint_{S_2} \vec{j}_2\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_1} \vec{j}_1\cdot d\vec{S} = I$$

$$\sigma_2 \iint\limits_{S_2} \vec{\mathrm{E}}_2 \cdot d\vec{S} = -\sigma_1 \iint\limits_{S_1} \vec{\mathrm{E}}_1 \cdot d\vec{S} = I$$

$$\iint\limits_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\sigma_2} \qquad \iint\limits_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\sigma_1} \approx 0$$

根据高斯定理：

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oiint\limits_{S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{I}{\sigma_1} + \frac{I}{\sigma_2} \approx \frac{I}{\sigma_2} = \frac{I}{\sigma} \qquad Q \approx \frac{\varepsilon_0 I}{\sigma}$$

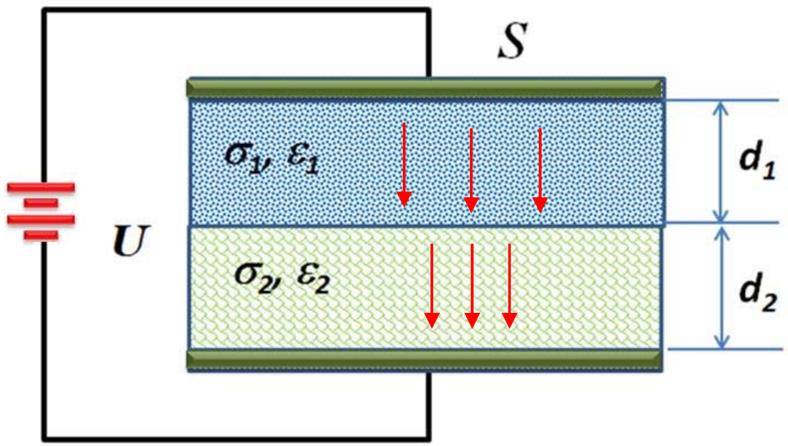
【例3.5】一平行板电容器两极板的面积为S，两极间充满两层均匀导电介质，当两极间加电势差为U时，略去边缘效应，求：

（1）通过电容器的电流；

（2）电流密度；

（3）交界面上的面电荷密度；

（4）两个极板之间漏电时间常数。



【解】

（1）两层介质的电阻分别为：

$$R_1=\rho_1\frac{d_1}{S}=\frac{d_1}{\sigma_1 S}\qquad R_2=\rho_2\frac{d_2}{S}=\frac{d_2}{\sigma_2 S}$$

两极板间总电阻： $$R=R_1+R_2=\frac{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}{\sigma_1\sigma_2 S}$$

通过电容器的电流： $$I=\frac{U}{R}=\frac{\sigma_1\sigma_2 SU}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

（2） 电流密度

$$j=\frac{I}{S}=\frac{\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

（3）求电荷密度分布，先求电场强度和电位移矢量

由欧姆定律可得：

$$E_1 = \frac{j}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \qquad E_2 = \frac{j}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

由电介质本构方程可得：

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \qquad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

总电荷密度：

$$\sigma_e = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

自由电荷密度：

$$\sigma_{e0} = D_2 - D_1 = \frac{(\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

介质交界面可以有自由电荷

极化电荷密度：

$$\sigma_e' = \sigma_e - \sigma_{e0} = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\sigma_1 - (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

（4） 时间常数

$$\tau = RC \qquad R = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 S}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

与电容器的面积无关

求解静电场或者稳恒电流（电场）的问题，

核心是得到**电场强度**分布

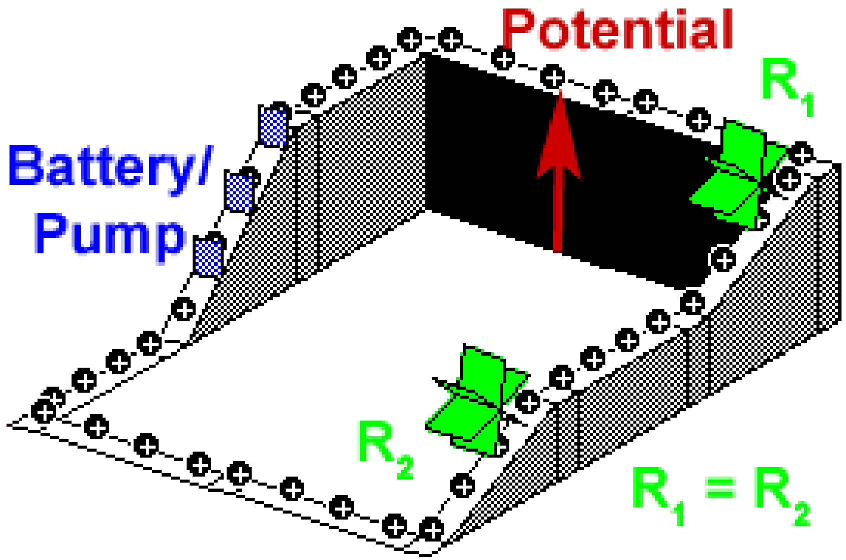
§3.3 电源与电动势

一、电源与电动势

二、常见的几种电源

三、全电路欧姆定律

四、稳恒电路中静电场的作用



分析与介绍

如何产生稳恒电流?

- 稳恒电流*j* 是闭合的，导线中的电场是静电场：

静电场 ⟶ 静电力（保守力）⟶ 电场线不闭合 ⟶ 正电荷只能沿电场线 ⟶ 造成电荷堆积 ⟶ 不能产生稳恒电流。

- 所以，为了产生稳恒电流，必须还有**非静电力**，使正电荷逆着电场线的方向运动，从低电势返回高电势。

- 常见的**非静电力**有以下几种：

（**1**）溶液中离子对极板的化学亲和力；

（2）温度梯度和电子浓度梯度相联系的扩散作用；

（3）光电效应；

（4）核力、核能（α 放射性源）；

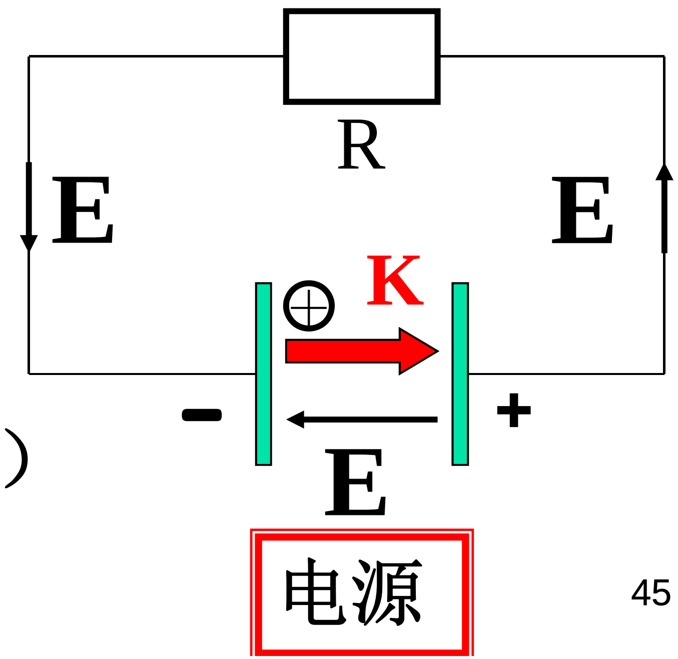
（5）磁场对运动电荷的洛伦兹力；

（6）变化磁场产生涡旋电场对电荷的作用力。

一、电源与电动势

■提供非静电力的装置称**电源**。

其特点是，在电源内部提供的非静电力**K**不断将正电荷从负极（–）搬运到正极（+），如右图所示。



■定量表达电源内非静电力的物理量是**K**，它为单位正电荷受力，方向与静电场**E**相反。

当一外电路与电源接通时，电源的另一作用是，它通过极板及外电路各处累积的电荷在外电路中产生静电场E，使电流经外电路由正极指向负极。

■综上所述，电荷q 在电路受力情况是：

在外电路 $F=qE$ ；在电源内 $F=q(K+E)$

在外电路 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$；在电源内 $\mathbf{j}=\sigma_{内}(\mathbf{K}+\mathbf{E})$

■实际应用中，描述电源的性质，更常用的不是K，而是 $\mathscr{E}$ ，它定义为：

$$\mathscr{E}=\int_{-\,(电源内)}^{+}\mathbf{K}\bullet d\mathbf{L}$$

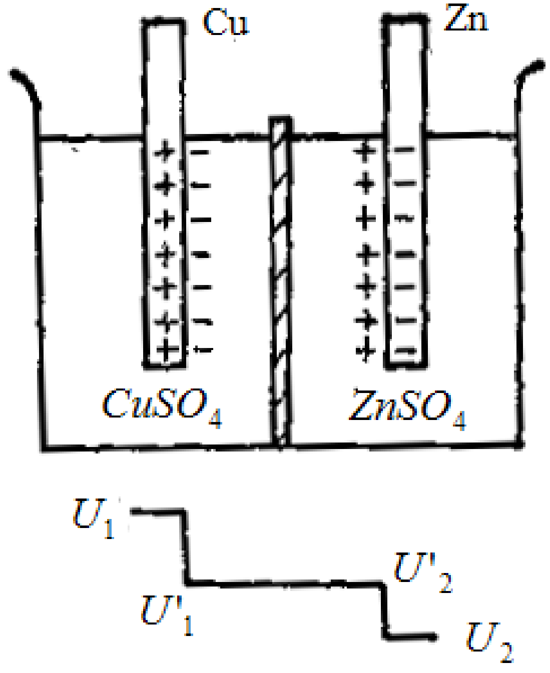
称为电动势。

可与电势比较理解它的物理意义，其单位也是伏特。

二、常见的几种电源

(1)化学电池： 各类干电池和蓄电池都属于化学电池，它将化学反应释放的能量转换为电能，即通过化学反应提供非静电力，使正、负电荷分离并在两极板上累积造成静电力，直到非静电力与静电力达到平衡，形成两极间的电势差。

最先发明的电源之一——伏打电池，由浸在稀硫酸溶液中一块铜片和一块锌片组成。由于化学反应，铜片带正电形成正极，锌片带负电形成负极。后来改进为丹聂耳电池。它是一种蓄电池，可以充放电。

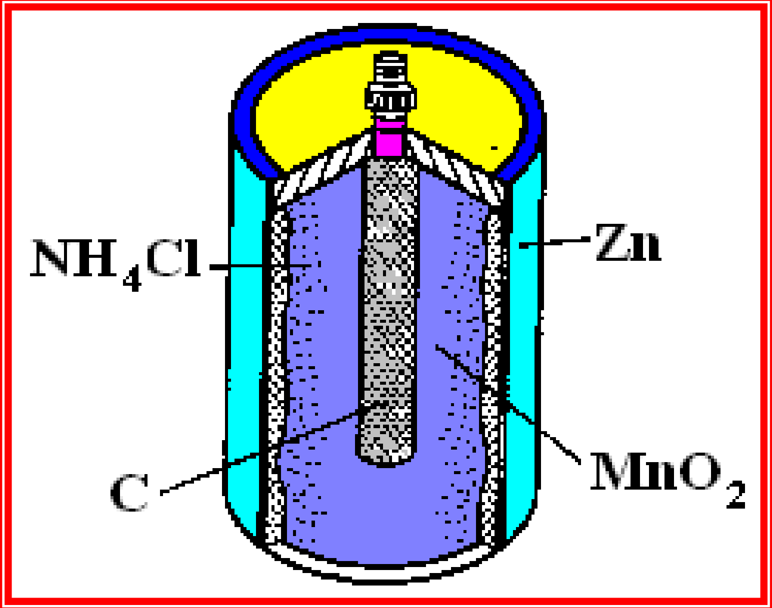


丹聂耳电池

日常使用的各种型号的干电池、银锌纽扣电池、锂电池等都是化学电池。

(2) 光电池

这类电池将光能转变为电能。最常见的如太阳能电池。其简单原理是，当太阳光照到对光敏感的金属表面时，通过光电效应，金属表面发射电子，这些电子被收集到另一邻近的金属表面，造成正、负电荷分离，产生电动势。主要有硅、硫化镉、锑化镉以及砷化镓等太阳能电池。

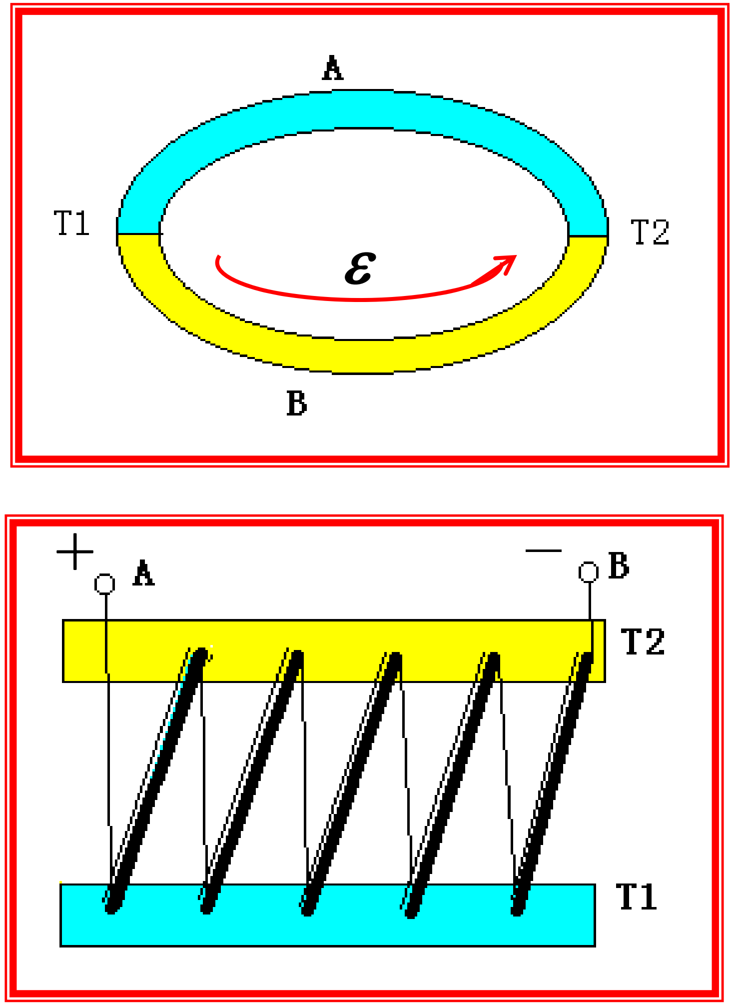


干电池的结构示意

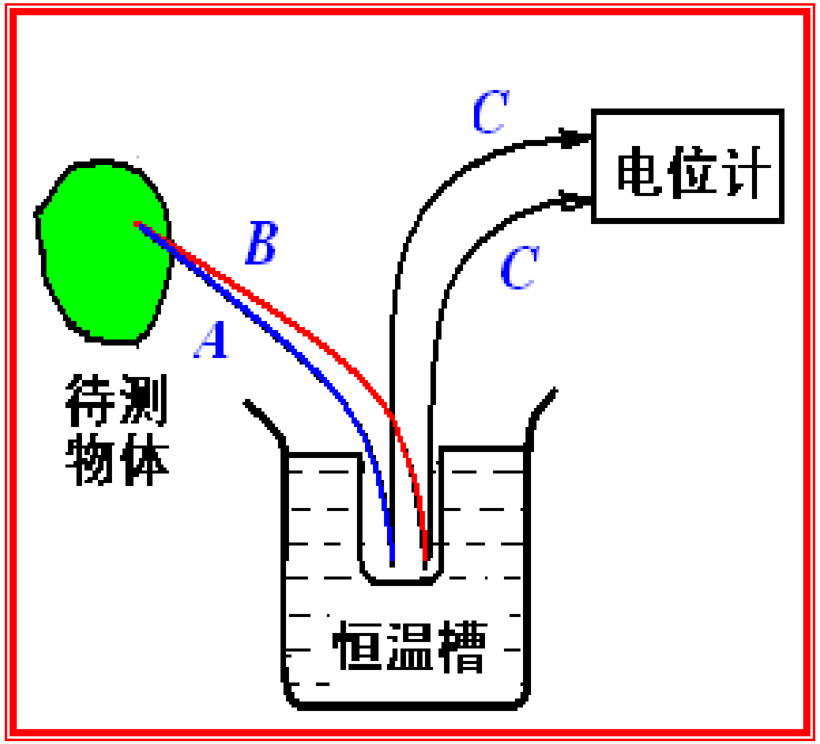
太阳能电池阵列

(3) 温差发电器

- 这类发电器利用温差电效应把**热能直接转化成电能**。



温差电效应和温差电堆示意图

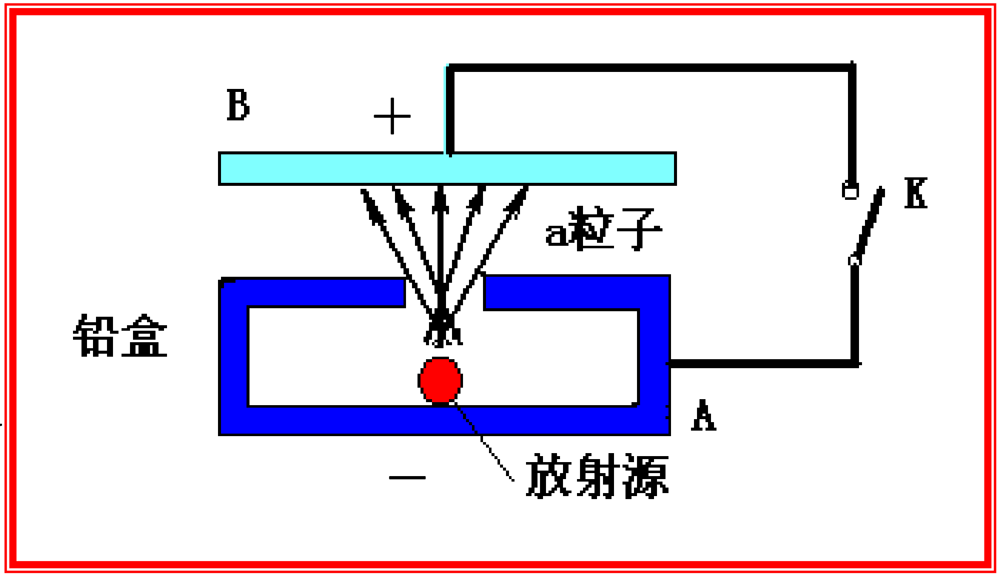


用温差电偶测温度

(4) 核能电池

这种电池将核能直接转化为电能。

$$2e\int_A^B \boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 = 5\times10^6\ \text{eV}$$



$$\mathscr{E} = \int_A^B \boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{r} = 2.5\times10^6\ \text{V}.$$

核能电池示意图

(5) 直流发电机

它通过电磁感应（见第七章）将机械能，如水的势能和风的动能转换为电能。

三、全电路欧姆定律

当电源两极断开、电源内部处于平衡状态时，有：

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}=0.$$

当外电路接通时，电路中将出现电流，这时电源内应有：

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}=\boldsymbol{j}/\sigma.$$

电源两端的电压，即所谓路端电压，等于静电场力通过外电路把单位正电荷从正极移到负极所作的功，即

$$U=U_{+}-U_{-}=\int_{+(外)}^{-}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

经电源内部积分可得：

$$\int_{\substack{+\\(内)}}^{-}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{\substack{-\\(内)}}^{+}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\substack{+\\(内)}}^{-}\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

$$\because \int_{+(内)}^{-} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{+(外)}^{-} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = U, \quad \int_{+(内)}^{-} \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{+(内)}^{-} \rho_{内} \frac{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{S}}{S} dl$$

代入前式得：

$$U = \mathscr{E} - I\int_{-(内)}^{+} \frac{\rho}{S} dl = \mathscr{E} - Ir$$

■该式就是全电路欧姆定律，式中r为电源内阻。 第二项取负号意味着电流的正向在电源内部由负极指向正极。

对外电路有：$U = \int_{+(外)}^{-} \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}\cdot d\boldsymbol{l} = IR$，$R$是外电路的电阻。

得：

$$\mathscr{E} = IR + Ir = I(R+r).$$

说明：稳恒电路的特点

（1）电动势 $\mathscr{E}$ 和内阻 r 是电源的两个特征量，由电源的性质确定，与外电路无关；

（2）路端电压 U 与电路中的电流 I 有关。开路时（I = 0）$U = \mathscr{E}$，开路测电动势，闭路测路端电压；

（3）使用大内阻的伏特计或万用表测量电源电动势，R越大，I 便越小，测得的路端电压U越接近电源的电动势，因电源内阻 r 一般都很小。

（4）使用电源应避免使电源短路，因电源内阻小，短路造成 I 很大，烧坏电源。

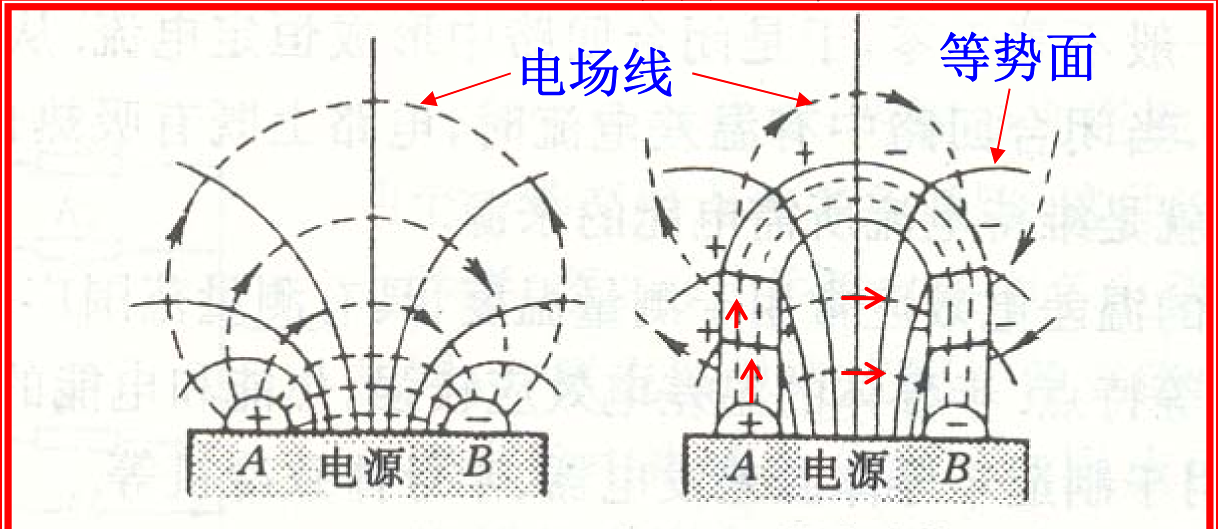
（5）外电路的均匀导体中，无净电荷，

$$\because \nabla\cdot\mathbf{j}=0,\quad \therefore \sigma\nabla\cdot\mathbf{E}=0, \nabla\cdot\mathbf{E}=0, \text{即} \rho_e=0.$$

四、稳恒电路中静电场的作用

主要体现在以下两个方面：

(1) 调节电荷分布的作用。在电流达到稳恒的过程中，这种调节作用不仅表现在导线表面上的电荷分布的变化，还包括非均匀导体内部体电荷分布的变化，以及在两种不同导体交界面上电荷分布的变化。



(a) 外电路断开　(b) 外电路接通

电荷分布与静电场在恒定电路中的作用

(2) 起着能量的中转作用。在闭合电路中，静电场作的总功为零。但是，在电源外部以及电源内部不存在非静电力的地方，静电场将正电荷从高电势处送到低电势处，作功为正，使电场能减少；存在非静电力的地方，非静电力把正电荷从低电势处送到高电势处，反抗静电场作功，消耗非静电能，使电场能增加。电路上消耗的能量归根到底是非静电力提供的。

(3) 静电场与非静电力合在一起保证了电流的闭合性。

§3.4 基尔霍夫定律

一、四个基本概念

二、基尔霍夫两条定律

三、两种方法

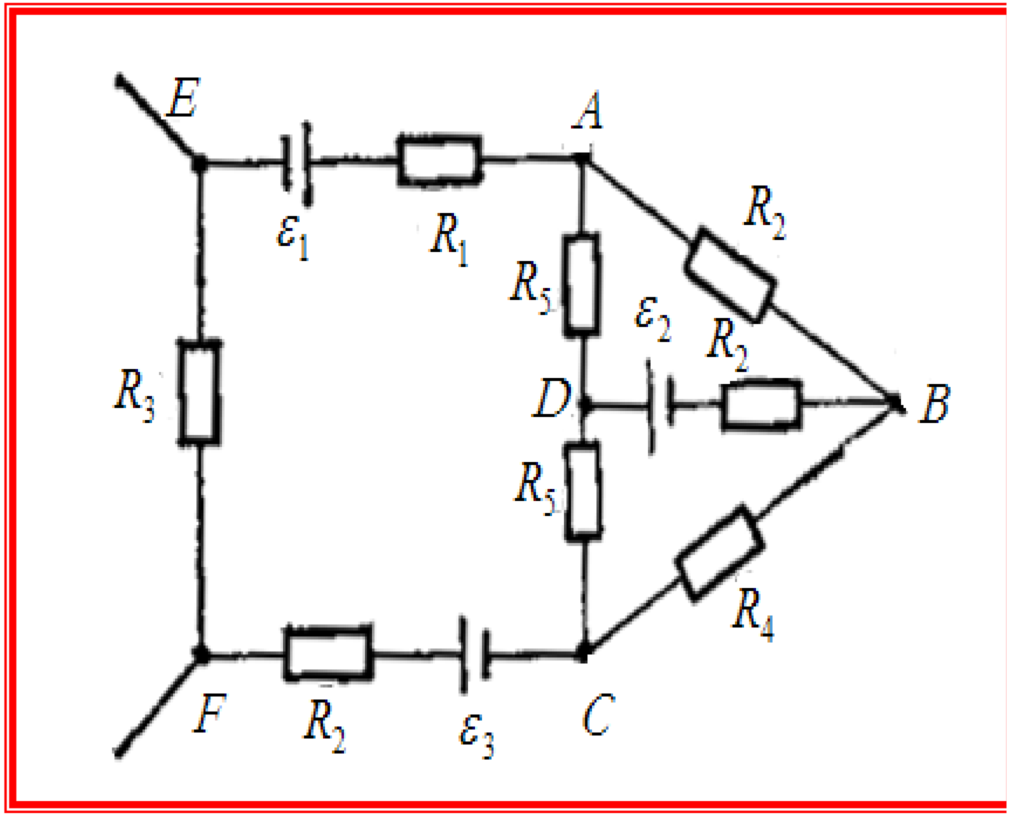
中学：简单电路 ⟶ 欧姆定律可解（串、并联）

现在：复杂电路 ⟶ 基尔霍夫定律才能解

一、四个基本概念

(1) 节点**:** 在电路中，**3**条或**3**条以上导线的汇合点，如右图中的点***A***、***B***、***C***、***D***、***E***、***F***等。

(2) 支路：两相邻节点间，由电源和电阻串联而成的通路，如右图中的***AB***、***BD***、***DC***等等。



多回路直流电路

(3) 回路：起点和终点重合在一个节点的环路，如前图中的*ABDA*、*ABCA*、*ACFEA*等等。

(4)独立回路：各个回路不相重合，即每个回路至少有一条其它回路没有的支路，则称这些回路互相独立。简单易行的取法是取各回路互不包含。例如前图中的***ABDA***、***ACFEA***、***BCDB***等，都是各自独立的回路。

注意，独立回路的数目减**1**正好等于支路的数目减去节点的数目。这给独立回路选择的正确与否提供了一个重要判据（参见例**4.1**）。

二、基尔霍夫两条定律

(1) 基尔霍夫第一定律：汇合于任一节点处的各电流的代数和等于零，即

$$\Sigma I = \Sigma I_{入} - \Sigma I_{出} = 0, \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

又称**节点电流方程**。式（**3.4.1**）中的$I_{入}$和$I_{出}$分别为流入和流出考察节点的电流。

它是稳恒电流条件 $\oiint_S \mathbf{j} \bullet d\mathbf{S} = 0$ 的必然结果。

(2) 基尔霍夫第二定律：电路中的任一闭合回路的全部支路上的电压的代数和等于零，即

$$\sum U = \sum (\pm \mathscr{E} \pm Ir \pm IR) = 0 \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

又称**回路电压方程**。式（**3.4.2**）中的 $\mathscr{E}$ 和r分别为某条支路所含电源的电动势和内阻，R和I分别为该支路的负载电阻和电流强度。它是静电场环路定理 $\oint_L \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = 0$ 的必然结果。

注意！式（**3.4.2**）中$\mathscr{E}$和I前面的正负号取法如下：

先任意规定所考察回路的绕行方向，然后根据绕行方向来决定$\mathscr{E}$和I前的符号：当**回路绕行方向经电源内部**由正极指向负极时，$\mathscr{E}$前取正号，反之取负号；当回路绕行方向与I的流向一致时，I前取正号，反之取负号。

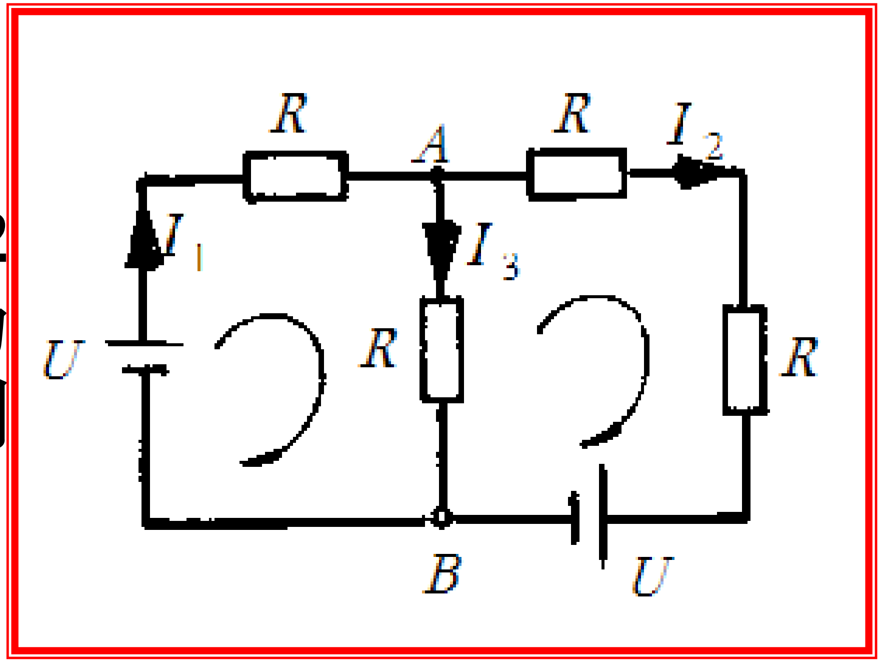
三、两种方法

1. **支路电流法**：**先设定**每个支路电流及方向和取值，**再设定**每个独立回路绕行方向，然后利用基尔霍夫两个定律写出方程组。共

$$\ell = m + n - 1 \quad \textbf{(3.4.3)}$$

个独立方程。其中：m为独立回路数，n为节点数，ℓ为支路数。可解得每个支路电流，如是正值，则与设定方向一致；如是负值，则与设定方向相反。

[例**4.1**]　如右图所示电路，求各支路中的电流。



[解] 本电路的节点数为n = 2，独立回路数m = 2，支路数为l = 3，满足式（**3.4.3**）。利用基尔霍夫定律列出如下**3**个独立方程：

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_1 = 0 \\ -U + I_1 R + I_3 R = 0 \\ U - I_3 R + 2I_2 R = 0 \end{cases}$$

$I_2 + I_3 - I_1 = 0$　第一定律

后两式：第二定律

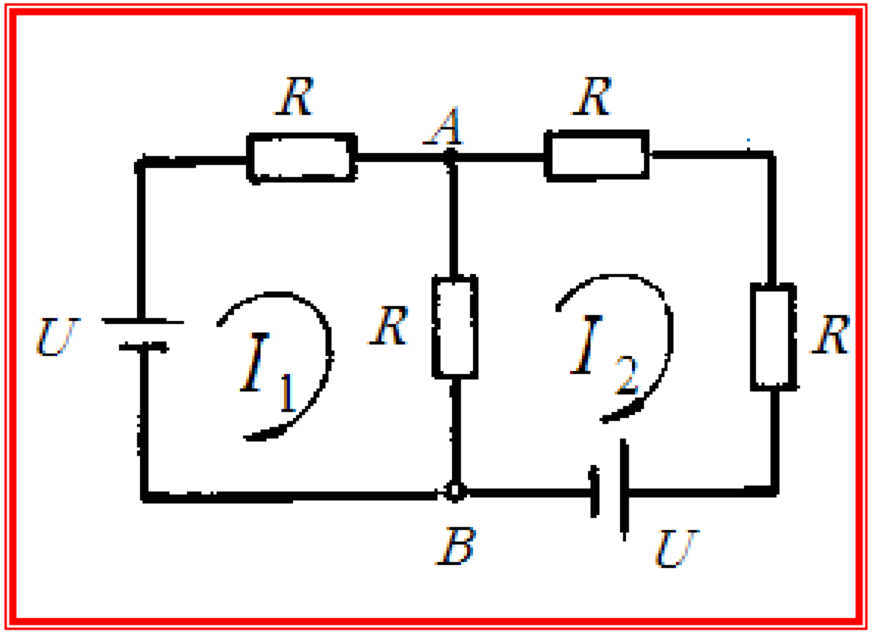
易解得：

$$I_1 = \frac{2U}{5R},\quad I_2 = -\frac{U}{5R},\quad I_3 = \frac{3U}{5R}$$

负号表示与设定的方向相反。

2．回路电流法：**先设定**独立回路的电流及方向，只需用基尔霍夫第二定律，便可解出各回路电流。然后再由所求得的回路电流计算各支路电流，它们将自动满足基尔霍夫第一定律。仍用例**4.1**说明：

共计**2**个独立回路，设电流分别为 I_1和 I_2，方向如图所示。列回路电压方程：



$$\begin{cases} -U+I_1R+(I_1-I_2)R=0 \\ U+(I_2-I_1)R+2I_2R=0 \end{cases}$$

解得 $I_1=\dfrac{2U}{5R}$， $I_2=-\dfrac{U}{5R}$

负号表示与设定的方向相反。两种方法等效。