



电磁学

孙勇杰

中国科学技术大学近代物理系

sunday@ustc.edu.cn

Tel: 63600973

13956004132



绪论

1、什么是电磁学：是研究电磁现象、电磁相互作用规律及其应用的学科。

2、研究的对象：电磁场，与力学、热学区别。

3、适用范围：尺度(1%的原子尺度)

$$10^{-10} \text{ cm} \longrightarrow \infty$$

速度 低速 \longrightarrow 高速

4、重要性：四大相互作用之一；物质结构的基础；高新技术的基础；其它学科的基础。


电流的磁效应（电生磁）

- 1750年富兰克林已经观察到莱顿瓶放电可使钢针磁化，甚至更早在1640年，已有人观察到闪电使罗盘的磁针旋转。
- 但到19世纪初，科学界仍普遍认为电和磁是两种独立的作用。
- 与这种传统观念相反，丹麦的自然哲学家**奥斯特**接受了德国哲学家康德和谢林关于自然力统一的哲学思想，坚信电与磁之间有着某种联系。
- 经过多年的研究，他终于在1820年**发现电流的磁效应**：当电流通过导线时，引起导线近旁的磁针偏转。电流磁效应的发现开拓了电学研究的新纪元。

电磁感应（磁生电）

- 杰出的英国物理学家法拉第从事电磁现象的实验研究，对电磁学的发展作出极重要的贡献，其中最重要的贡献是1831年发现电磁感应现象。紧接着他做了许多实验**确定电磁感应的规律**，他发现当闭合线圈中的磁通量发生变化时，线圈中就产生感应电动势，感应电动势的大小取决于磁通量随时间的变化率。
- 楞次于1834年给出**感应电流方向**的描述，而诺埃曼概括了他们的结果给出**感应电动势**的数学公式。
- 美国亨利先于法拉第一年左右发现了电磁感应现象，但他等待积累更多的实验数据而立刻没有发表，当他从一本杂志上介绍法拉第的工作时，他感到无比的沮丧和郁闷。

场的概念的建立

- 
- 超距作用：两个物体可以不通过任何接触而发生作用。
 - 近距作用：两个物体之间的作用力必须通过通过某些媒介物质（例如“以太”）传递。

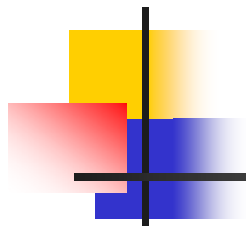
超距说在18世纪占统治地位。

- 17世纪末，牛顿得到万有引力定律。定律支持超距说，但牛顿本人并不支持。他相信以太的存在。
- 笛卡尔也反对超距说，相信以太的存在。但他也反对引力的平方反比定律，将牛顿的追随者们送入了超距说阵营。

法拉第认为：

- 力线是物质的，它弥漫在全部空间，并把异号电荷和相异磁板分别连接起来；
- 电力和磁力不是通过空虚空间的超距作用，而是通过电力线和磁力线来传递的它。
- 力线是认识电磁现象必不可少的组成部分，甚至它们比产生或“汇集”力线的“源”更富有研究的价值。

- 1862年他发表了第二篇论文《论物理力线》，不但进一步发展了法拉第的思想，扩充到磁场变化产生电场，而且得到了新的结果：电场变化产生磁场，由此预言了电磁波的存在，并证明了这种波的速度等于光速，揭示了光的电磁本质。这篇文章包括了麦克斯韦研究电磁理论得到的主要结果。
- 1864年他的第三篇论文《电磁场的动力学理论》，从几个基本实验事实出发，运用场论的观点，以演绎法建立了系统的电磁理论。
- 1873年出版的《电学和磁学论》一书是集电磁学大成的划时代著作，全面地总结了19世纪中叶以前对电磁现象的研究成果，建立了完整的电磁理论体系。这是一部可以同牛顿的《自然哲学的数学原理》、达尔文的《物种起源》和赖尔的《地质学原理》相媲美的里程碑式的著作。



- 1888年，赫兹根据电容器放电的振荡性质，设计制作了电磁波源和电磁波检测器，通过实验检测到电磁波，测定了电磁波的波速，并观察到电磁波与光波一样，具有偏振性质，能够反射、折射和聚焦。



第一章 真空中的静电场

§ 1-1 电荷守恒

§ 1-2 库仑定律

§ 1-3 叠加原理

§ 1-4 电场强度

§ 1-5 高斯定理

§ 1-6 环路定理

§ 1-7 电势

§ 1-1 电荷守恒

1. 电荷：电荷是电学中最基本的概念（回顾）。

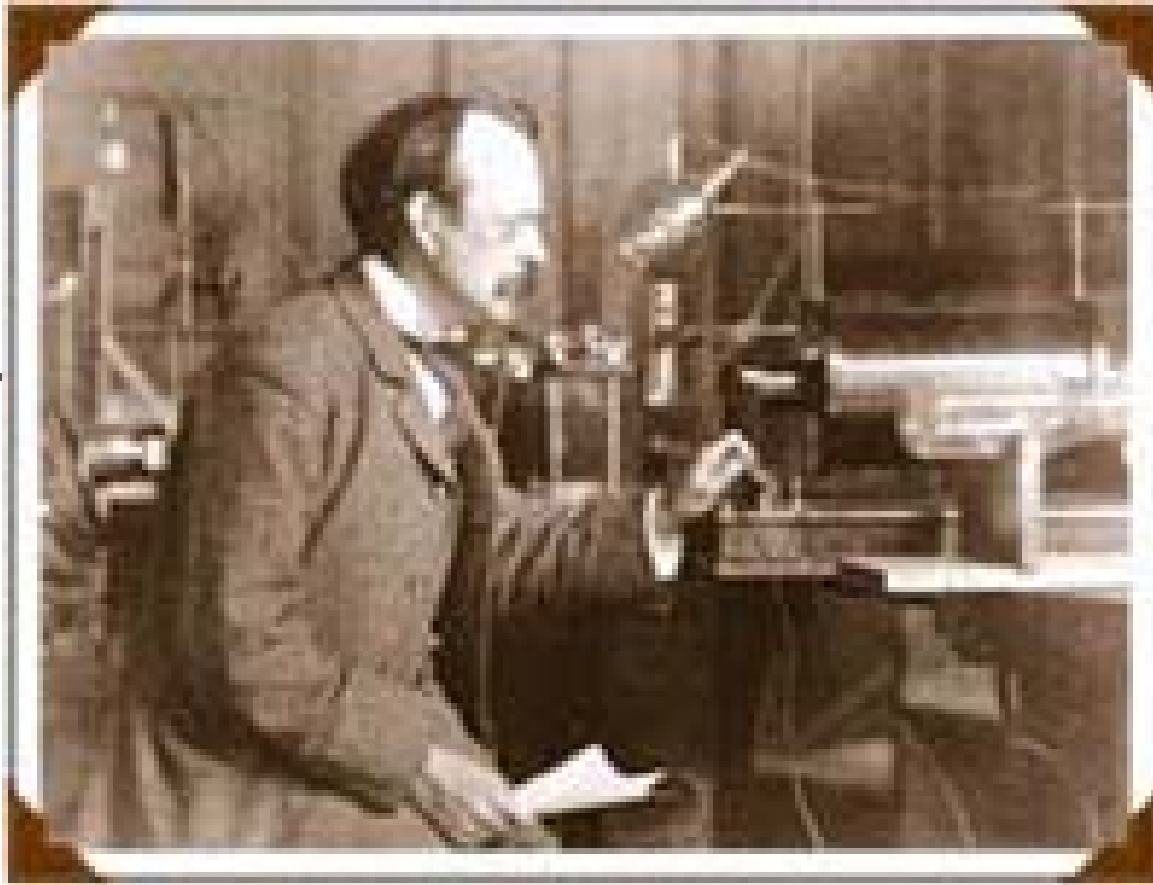
早期人们是通过物质的力效应来定义它的。他们发现许多物质，如琥珀、玻璃棒、硬橡胶棒……等，经过毛皮或丝绸摩擦后，能吸引轻小物质，便说这些物质带了电荷。



吉尔伯特（1544-1603）为了把这种作用与磁作用加以区别，造出“**Electricity**（电）”，它源自希腊文“琥珀”音译“**electron**”。

近代物理学的实验揭示了**电荷的物理本质**。**电荷是基本粒子**——如电子、质子、 μ 子等等——的**一种属性**，离开了这些基本粒子它便不能存在。也就是说，电荷是物质的基本属性，不存在不依附物质的“单独电荷”。

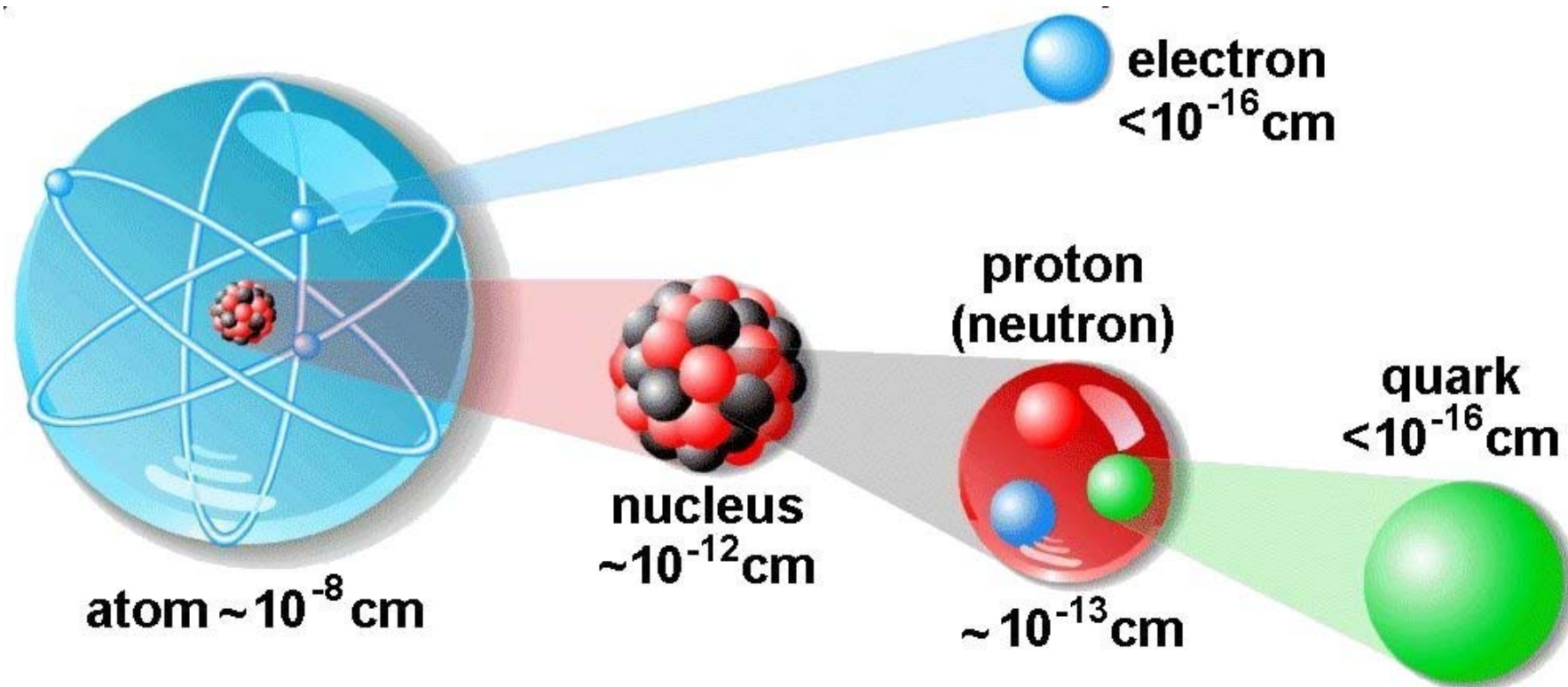
1897年，英国物理学家汤姆孙测出了阴极射线带电粒子的**荷质比**；这种带负电的粒子后来被称为电子。



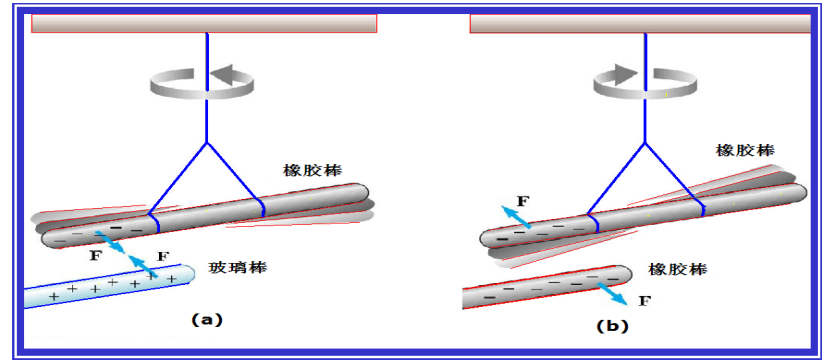
电子的发现者-汤姆逊(J.J.Thomson)

1909-1917年间，密立根用油滴实验，
测定**电荷的最小单位**是 **1.59×10^{-19}** 库仑。

物质的结构



2. 电荷的特性



(1) 自然界中存在两种电荷，分别称为正（+）电荷和负（-）电荷。

1747年，美国科学家富兰克林把在室温下丝绸摩擦过的玻璃棒所带的电荷称为**正电荷**；毛皮摩擦过的橡胶棒所带的电荷称为**负电荷**。现在人们都习惯沿用富兰克林的定义。







实验表明同号电荷相斥，异号电荷相吸，根据这一性质我们可以用实验来测出物体带有哪种电荷。

(2) 电荷是量子化的，即在自然界里物质所带的电荷量不可能连续地变化，而只能一份一份地增加或减小。如前所述，这最小的一份电量是电子或正电子所带的电量，绝对值记为 **e** ， **$e = 1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{ C}$** 。


近代物理从理论和实验上都已证实强子都是由**6**种夸克（或反夸克）组成。每一个夸克或反夸克可能带有 **$\pm 1/3 e$** 或 **$\pm 2/3 e$** 的电量。然而至今单独存在的夸克尚未在实验中发现。

6种夸克

Quarks

Bottom		Electric Charge -1/3	Top		Electric Charge 2/3
Strange		-1/3	Charm		2/3
Down		-1/3	Up		2/3
each quark: ●R, ●B, ●G 3 colors					

例如： $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P} \text{ (质子) 由 } \mathbf{uud} \text{ 组成;} \\ \mathbf{n} \text{ (中子) 由 } \mathbf{udd} \text{ 组成;} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \pi^+ \text{ 介子由 } \mathbf{u} \bar{\mathbf{d}} \text{ 组成} \\ \pi^- \text{ 介子由 } \mathbf{d} \bar{\mathbf{u}} \text{ 组成} \end{array}$ ⁶⁰



(3) “电荷对称性”。一系列近代高能物理实验表明，对于每种带电的基本粒子，必然存在与之对应的、带等量异号电荷的另一种基本粒子-反粒子。例如，我们有电子和正电子，质子和反质子； π^+ 介子和 π^- 反介子等等。

(4) 电量是相对论性不变量。即电量与质量不同，与带电物质的运动速度无关。

讨论题：请对比电荷与质量的异同？



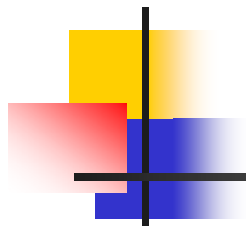
3. 电荷守恒定律

一个孤立系统（与外界不发生电荷交换的系统）的电荷总量（代数和）是保持不变的，它既不能创生，也不会消灭。电荷只能从系统内的一个物体转移到另一个物体，系统的总电量既不随时间而变，也与参考系的选取无关。

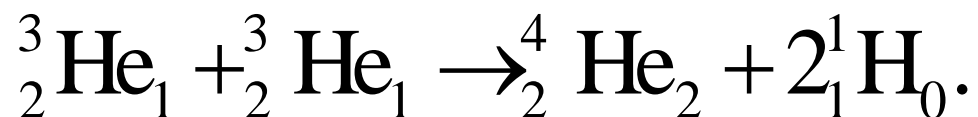
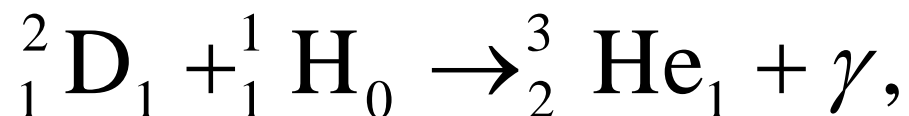
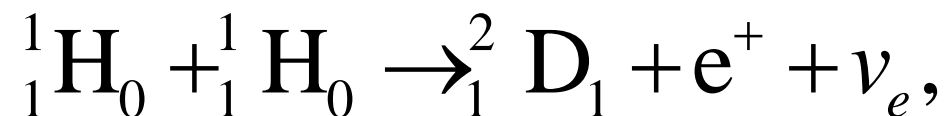
对核反应也是成立的：

中子(**n**) β 衰变： ${}_0^1\text{n}_1 \rightarrow {}_1^1\text{p}_0 + \text{e}^- + \bar{\nu}_e$.

镭的 α 衰变： ${}_{88}^{226}\text{Ra}_{138} \rightarrow {}_{86}^{222}\text{Rn}_{136} + {}_2^4\text{He}_2$



太阳上核聚变反应的一种可能链式过程：



1965年有人做了一个实验，估计出电子的寿命超过 **10²¹**年（比推测的宇宙年龄还要长得多）。



§ 1-2 库仑定律

1. 库仑定律建立的基础

16世纪—18世纪中叶，摩擦起电机；正电、负电两种，同性电荷相斥，异性电荷相吸；天电和地电统一；掌握了电荷转移及储存方法；认识到电荷守恒定律。

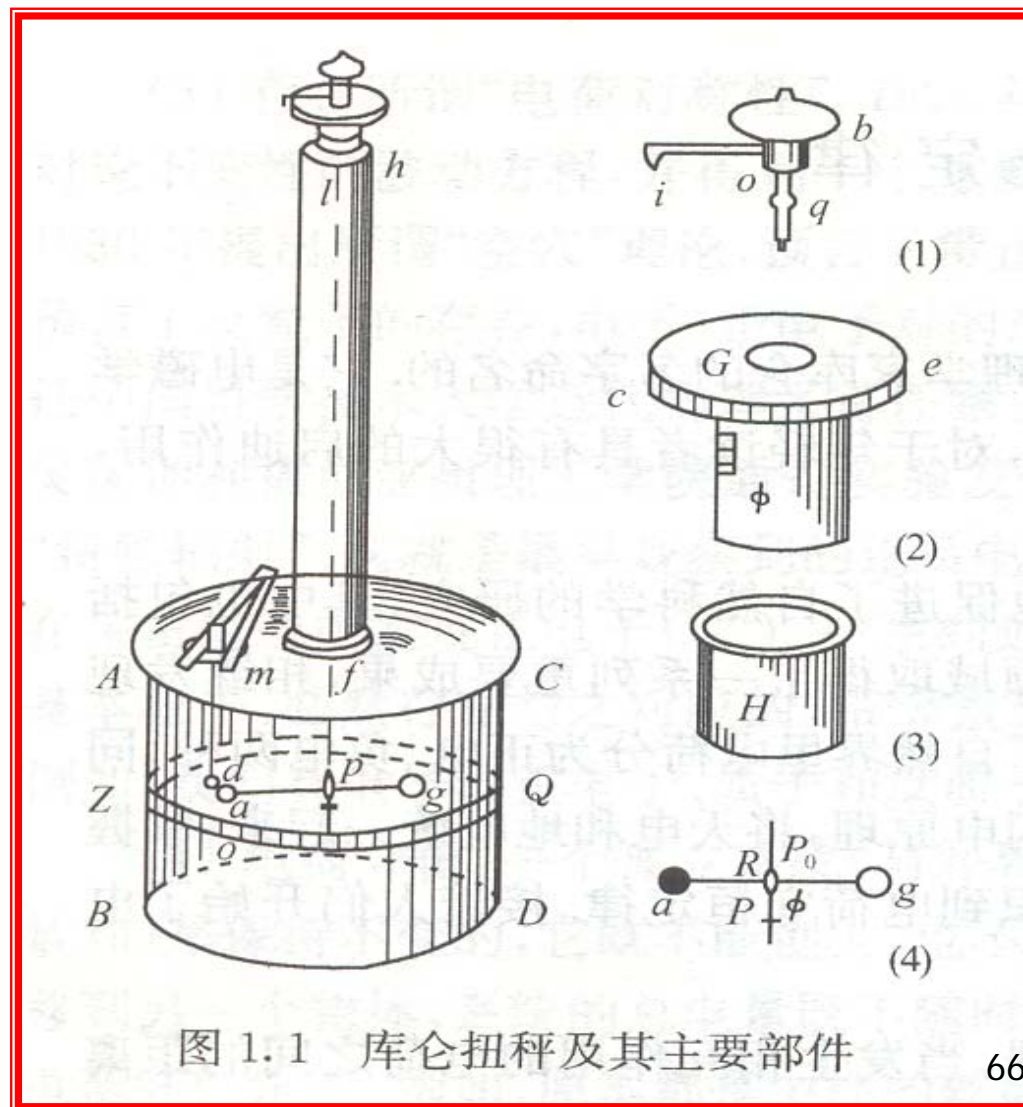
电荷之间作用力的大小和方向？

1750年前后，德国的埃皮努斯**发现**：电荷之间的相互作用力随其距离的减小而增大，但是没有给出定量的规律；

2. 库仑的扭称实验与电摆实验

(1) 扭称实验

1785年库仑自行设计制作了一台扭秤，**利用银质悬丝的扭转力**的知识，测量了电荷之间的相互**排斥力**与其距离的关系，建立了库仑定律。**直接的测量**。



(2) 电摆实验 (在作异号电荷相互吸引时, 遇到不稳定的困难!)

是在牛顿万有引力定律的启示下设计的。

单摆的周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

重力 $mg = G \frac{mM}{r^2}$

代入则得 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{GM}} r$
即 $T \propto r$ 。

修正漏电产生的误差, 平方反比的结论基本符合。是间接验证。

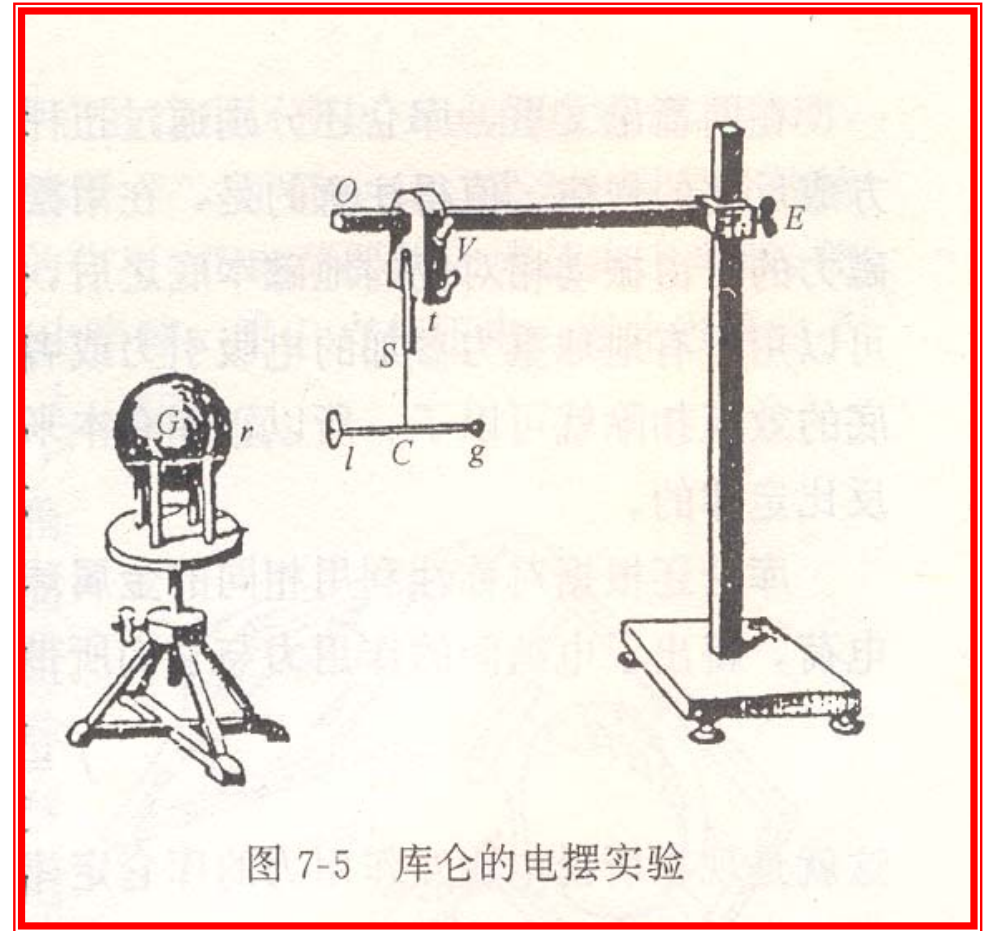


图 7-5 库仑的电摆实验



3. 库仑定律

库仑定律的精确表述是：

两个静止的点电荷 q_0 和 q_1 之间的作用力的大小与两点电荷电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两点电荷间的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

按图**1.2**，可将库仑定律表达为：

$$\mathbf{F}_{10} = k \frac{q_1 q_0}{r_{10}^3} \mathbf{r}_{10} = -\mathbf{F}_{01}, \quad (1.2.1)$$

式中， k 为比例常数，由实验测定并与单位制有关。我们取国际单位制(**SI**)，在真空中，我们将常数 k 写成为 $k=1/(4\pi\epsilon_0)$ ，其中 ϵ_0 称为真空介电常量或电容率。由实验测定已知电量的两个点电荷在真空中的相互作用力，便可得 k 或 ϵ_0 的值。近似值可取： $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ；相应的 k 值为 $k \approx 8.99 \times 10^9 \text{ C}^{-2} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2$ 。



4. 对库仑定律的几点说明

- (1) 库仑定律适用的对象是点电荷。点电荷意即其尺度为零。自然界中并不存在这种理想的点电荷。在实际问题中，只要两带电体的尺度远小于它们之间的距离，就可忽略带电体本身的尺度，而把它们当作点电荷来处理。
- (2) 库仑定律只适用于两点电荷静止的情况，因此人们常把库仑力称为静电力。当两点电荷发生运动时，由库仑定律所预言的相互作用力应该进行修改。但以后会知道，只要它们运动的速度远低于光速，这一修改可以忽略。

(3) 电力距离平方反比律与光子静止质量 m_γ 是否为零有密切的关系。近代观点认为，各种相互作用都通过某种粒子来传递，其中电磁相互作用就是通过光子来传递的。**如果电力相对距离平方反比律出现偏差，将导致 $m_\gamma \neq 0$ 。**（可参看陈秉乾等人的书P562-568）

(4) 库仑定律与力学中的万有引力定律相似点与不同点？
（小讨论）

相似点：都具有与距离平方反比的特征（都是长程力），**都满足**牛顿第三定律。

不同点：**(a)** 电荷有正、负两种，异号电荷相吸，同号电荷相斥。可对质点来说，它们之间只有引力，没有斥力。**(b)** 静电之间的相互作用可以屏蔽，而质点间的引力相互作用是无法屏蔽的。**(c)** 带电粒子间的库仑力远大于它们间的万有引力。



建立定律的归纳法

1. 观察现象

2. 提出问题

3. 猜测

4. 设计实验测量: 库仑 $F \propto \frac{1}{r^{2 \pm \Delta}}$, $\Delta \leq 0.04$

5. 提高实验精度:

卡文迪许 $\Delta \leq 0.02$; 麦克斯韦 $\Delta \leq 5 \times 10^{-5}$

普里姆顿和洛顿 $\Delta \leq 2 \times 10^{-9}$

1971年, 威廉士等人 $\Delta \leq (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$



§ 1-3 叠加原理

1. 叠加原理的表述

实验证明，**两个静止点电荷之间的相互作用力不因第三个静止点电荷的存在而改变**；由 N 个静止点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N$ 组成的系统，作用到静止点电荷 q_0 上的**库仑力**可以表为：

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.3.1)$$

这就是叠加原理。式中 \mathbf{r} 为 q_0 的位置矢量， \mathbf{r}_i 为 q_i 的位置矢量。注意是**矢量叠加**！

2. 各种带电体对静止点电荷的作用力

(1) 引入电荷密度的概念：把带电体分割为许多称为“电荷元”的小部分，设电荷元的体积为 ΔV ，电量为 Δq ，定义
$$\rho_e = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.3.2)$$

称 ρ_e 为体电荷密度，它表示单位体积的电量。

■相应地可定义面电荷密度：
$$\sigma_e = \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (1.3.3)$$

■线电荷密度：
$$\lambda_e = \frac{\Delta q}{\Delta l}, \quad (1.3.4)$$

Δq 在一般问题中可看成点电荷。

 (2) 利用叠加原理来求带电体系对点电荷 q_0 的作用力；体电荷密度为 $\rho_e(\mathbf{r})$ 的带电体 V ：

$$\mathbf{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV', \quad (1.3.5)$$

■ 同理，带电面和带电线对点电荷 q_0 的作用力分别为：

$$\mathbf{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS', \quad (1.3.6)$$

$$\mathbf{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dl', \quad (1.3.7)$$



3. 各种带电体之间的作用力

设有体积为 V_1 、电荷密度为 $\rho_1(\mathbf{r})$ 和体积为 V_2 、电荷密度为 $\rho_2(\mathbf{r})$ 的两个带电体，则两个带电体之间的库仑力为：

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) dV_1 dV_2 = -F_{21} \quad (1.3.8)$$

式中 F_{12} 为带电体**1**对带电体**2**的作用力， F_{21} 为带电体**2**对带电体**1**的作用力。

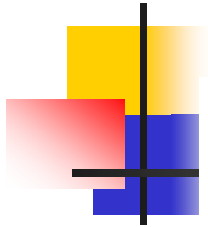


§ 1-4 电场强度

1. 电场强度的定义

由上两节式(1.2.1)、式(1.3.1)、式(1.3.5)、式(1.3.6)和式(1.3.7)可知，比值 F/q_0 与 q_0 的大小无关，只与施力物体的电荷分布和 q_0 的位置有关，它等于处在位置 r 处的单位正电荷所受的力，定义为电场强度 E ：

$$E = \frac{F}{q_0}, \quad (1.4.1)$$



电场强度是空间坐标的**矢量函数**，
 $E = E(x, y, z)$ ，即**矢量场**。为与其它矢量场，如速度场、引力场等相区别，我们称它为**电场**。简言之，**电场**就是**带电体周围的一个具有特定性质的空间**。

在此空间中 **r** 处一点电荷 **q** ，会受到作用力 **F** ，由**(1.4.1)**知，应有：

$$**F = qE(r)**$$

2. 各种带电体系的电场强度

点电荷 q 的电场强度: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}. \quad (1.4.2)$

N 个点电荷系: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.4.3)$

体电荷分布: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV', \quad (1.4.4)$

面电荷分布: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS', \quad (1.4.5)$

线电荷分布: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dl'. \quad (1.4.6)$

由此可见, 静电力满足叠加原理必将导致电场强度满足叠加原理。⁸²

3. 电场的物质性

电场是否只是形式的、数学的观念？

现在人们知道**电场也具有能量**，而且和带电体相互作用，交换能量；电场的能量可以转换成其它形式的能量如物体的机械能、电池的化学能等。

电场是客观存在的一种物质，只是在**形态上**与由原子和分子构成的物质不同。从这个观点出发，就能很自然地理解**带电体之间的相互作用**。这种作用实际上**是通过电场来传递**(即**近距作用**的观点)。

电荷 ↔ 电场 ↔ 电荷

■所谓“**超距作用**”观点认为带电体之间的相互作用（如两电荷间的吸力或斥力）是以**无限大速度**在两物体间直接传递的，与存在于两物体之间的物质无关。

■因此持有超距作用观点的人认为**带电体之间的相互作用无需传递时间，也不承认电场是传递相互作用的客观物质。**

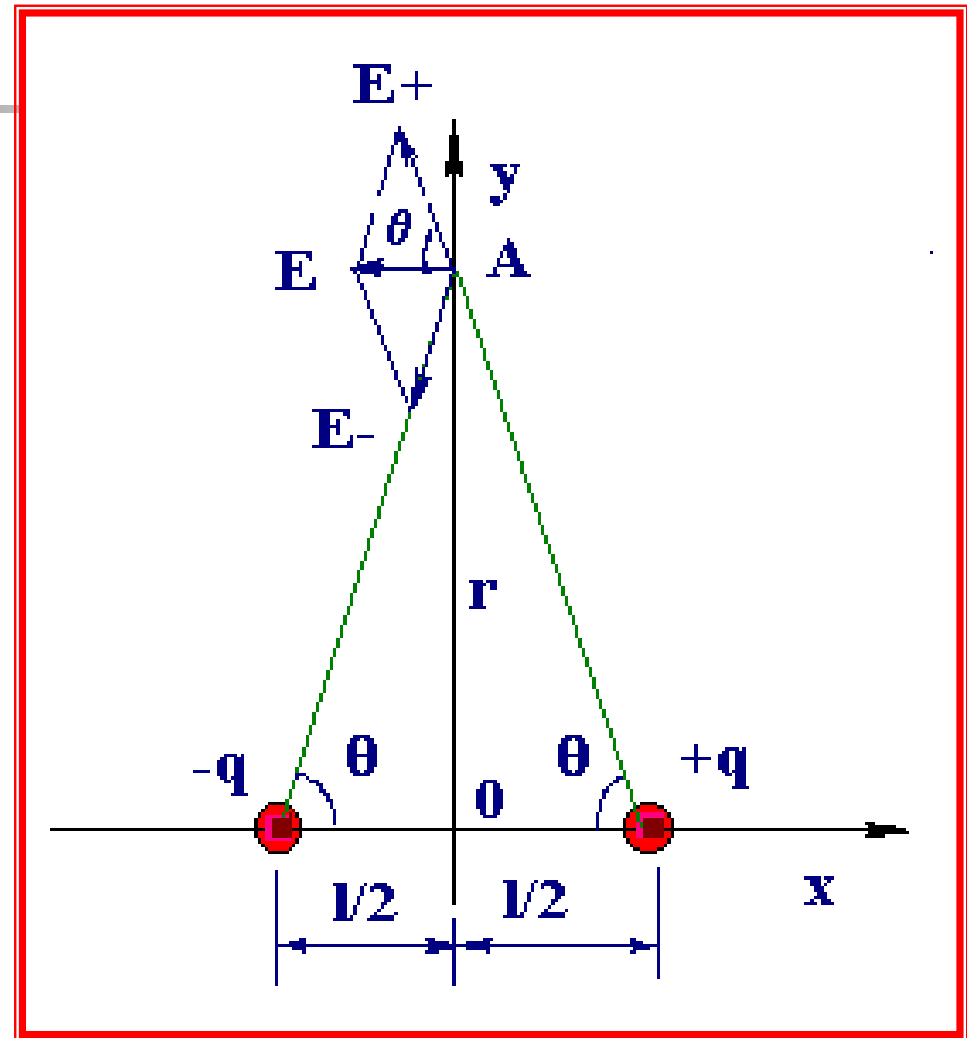
■在静电学的研究范围内，超距作用与近距作用两种观点等效。**包括库仑在内**，都持有超距作用观点。

4. 求电场的典型例子

【例1.1：电偶极子】

电偶极子即电量相等、符号相反、相隔某一微小距离的两点电荷组成的系统。求其中垂面上任一点A处的电场强度。

【解】 如右图所示，取直角坐标系。

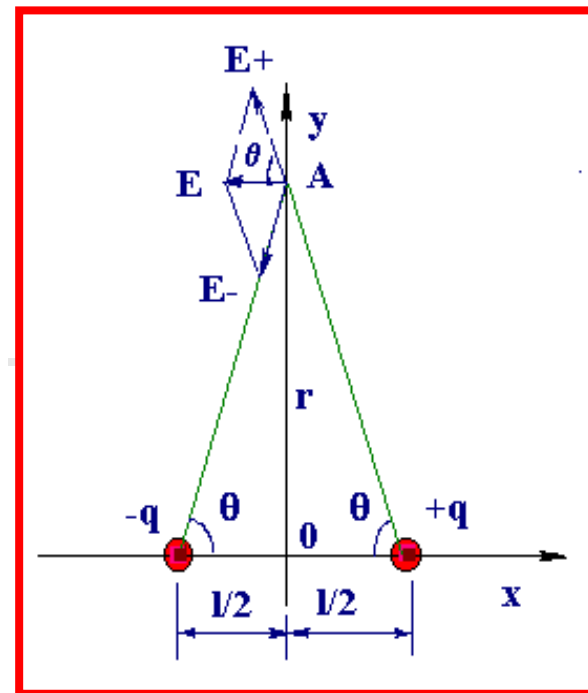


电偶极子的电场

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + (l/2)^2}$$

$$\begin{cases} E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0, \\ E_x = E_{+x} + E_{-x} = -2E_+ \cos\theta \end{cases}$$

$$= -\frac{E_+ l}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}} = -\frac{ql}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + l^2/4)^{3/2}}.$$



当 $r \gg l$ 时, 有 $E_x \approx -ql / (4\pi\epsilon_0 r^3)$

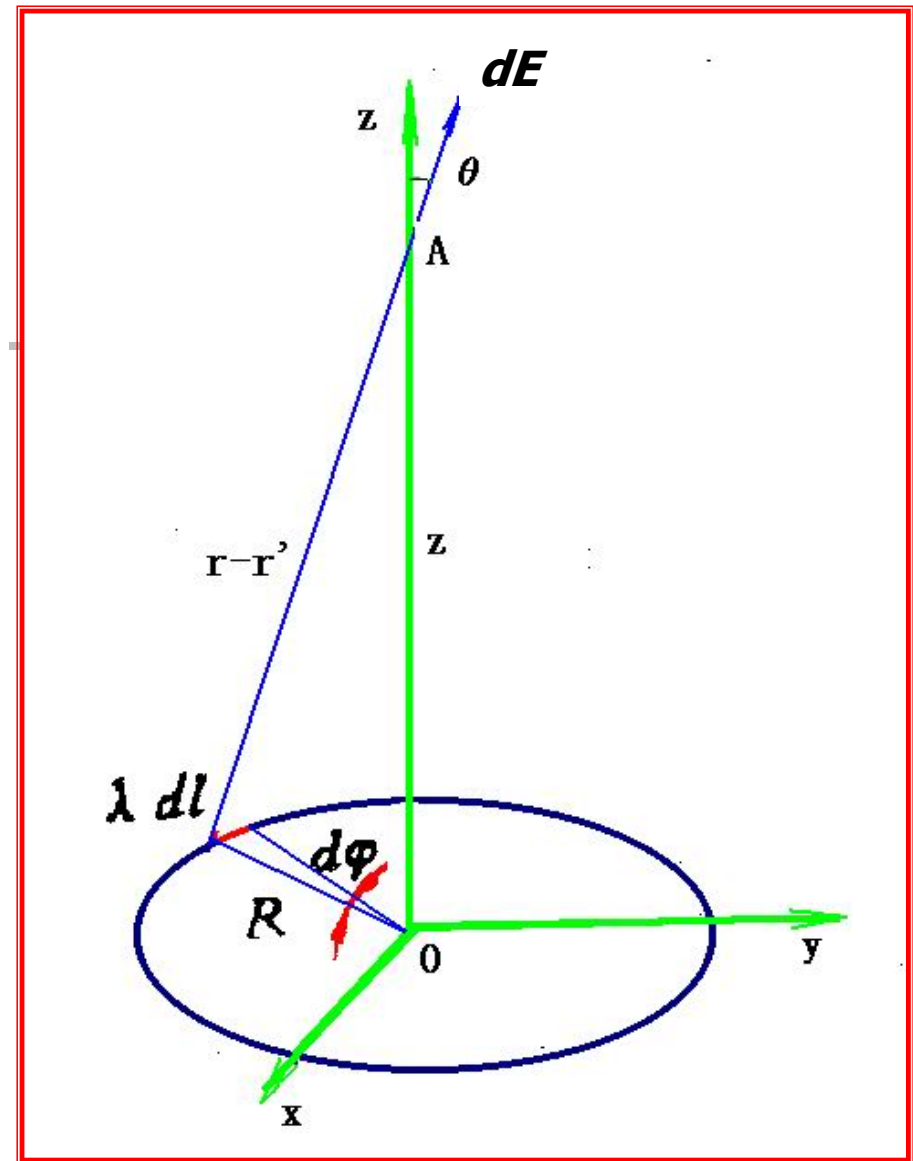
定义**电偶极矩** p , 其**大小** $p = ql$, 其**方向**由 $-q$ 指向 $+q$, 最终得

$$E(A) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}.$$

[例1.2: 线电荷]

一半径为 R 、无限细且均匀带电的圆环，环上线电荷密度为 λ_e 。求过环心垂直于环面的中轴线上的一点 $A(0,0,z)$ 的电场强度(见右图)。

【解】 在圆环上任取一线电荷元 λdl ，它在 A 点产生的电场强度为 dE ，分析对称性



均匀带电圆环的电场

只有沿 z 轴的分量。于是

$$dE_z = \frac{\lambda_e dl(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{\lambda_e Rz d\phi}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

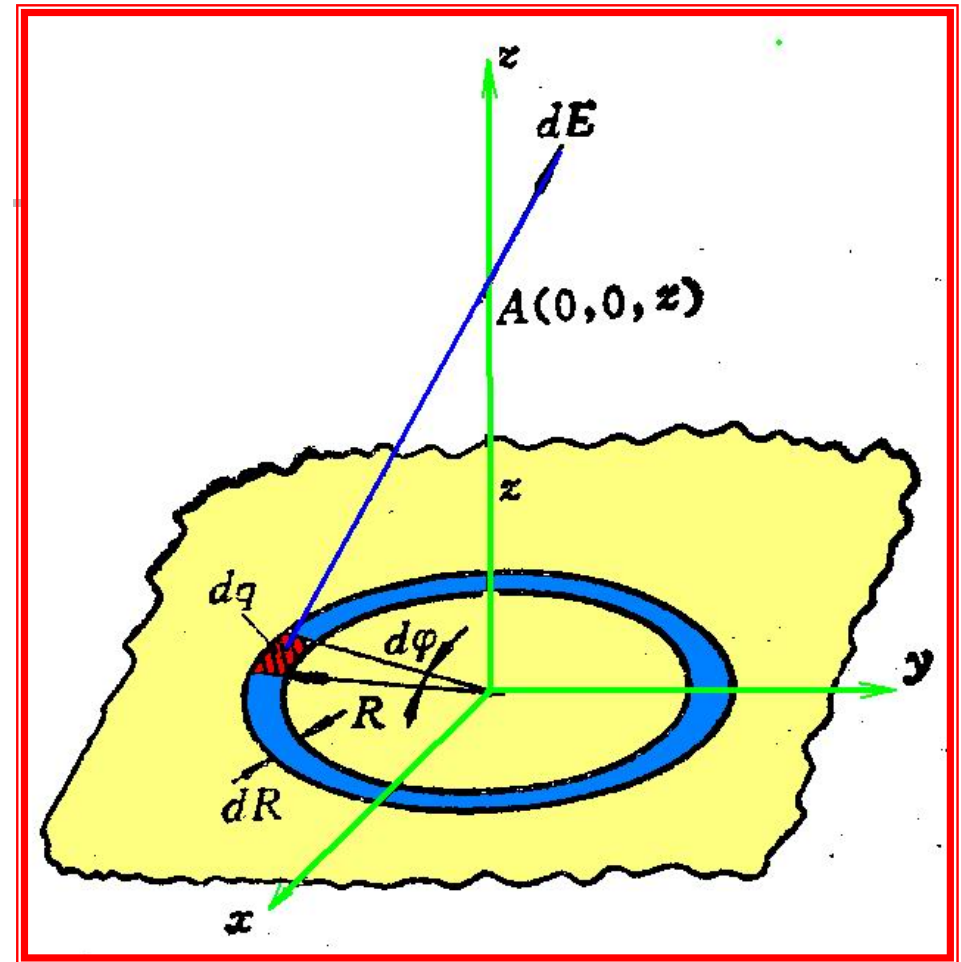
积分求得 A 点的电场强度:

$$E = E_z = \frac{\lambda_e Rz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda_e Rz}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

[例1.3: 面电荷]

均匀带电的无穷大平板，其面电荷密度为 σ_e 。求与板距离为 z 的一点 A 处的电场强度。

【解】 过 A 作平板的垂线 AO , $AO=z$, 以 O 为圆心，将平板分割成无数个圆环。设其中任一圆环的半径为 R ，环宽为 dR 。



无穷大均匀带电平板
的电场

由上题的结果，这宽度为 dR 的环对A点电场强度的贡献为：

$$dE = dE_z = \frac{\sigma_e R z dR}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

其中 R 的变化范围是 $(0, \infty)$ 。对 R 积分得：

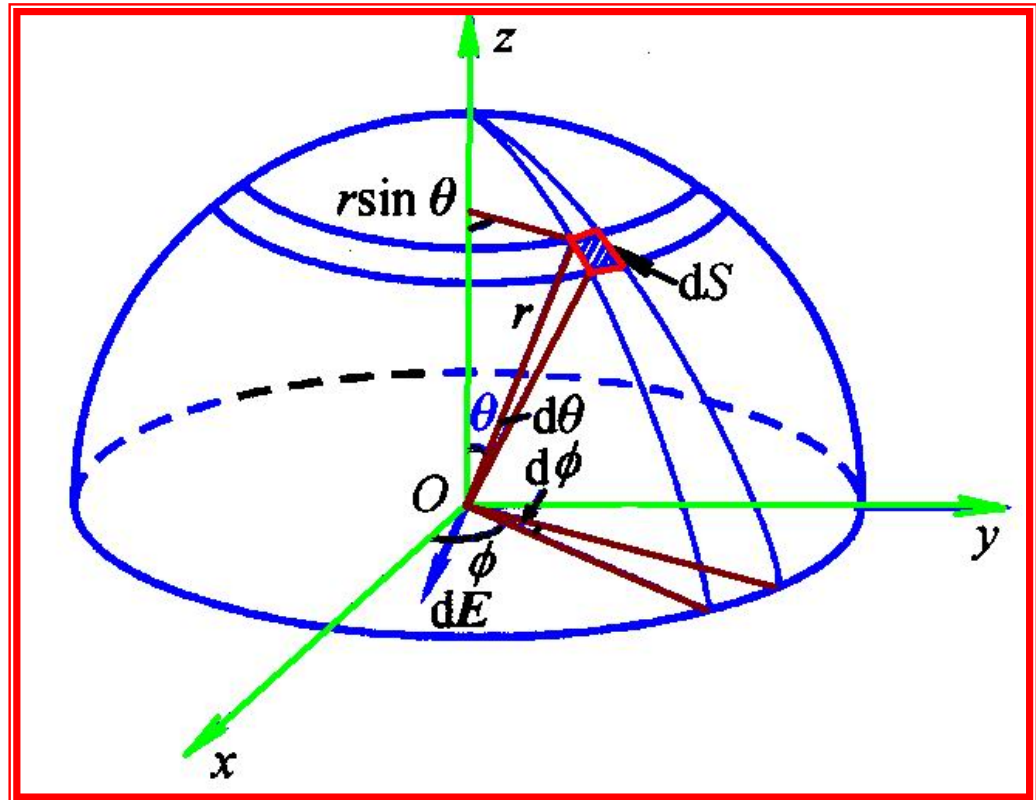
$$\begin{aligned} E = E_z &= \frac{\sigma_e z}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_e z}{4\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{dR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma_e z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

[例1.4: 球面电荷]

求面电荷密度为 σ 、半径为 r 的均匀带电半球面在球心的电场。

【解】 取球坐标，原点 O 与球心重合，球坐标中的面元 dS 可以看作是边长为 $rd\theta$ 和 $r\sin\theta d\phi$ 的矩形，其面积为

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$



均匀带电半球面在球心处的电场

该面电荷元在 O 点的电场强度大小为:

$dE = \sigma dS / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ 。当 σ 为正时, dE 的方向由 dS 指向球心。由于对称性, dE 只有沿 z 轴的分量 dE_z :

$$dE_z = -dE \cos \theta = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

将上式对 θ 和 ϕ 积分, 求得半球在 O 点处的电场为

$$E = E_z = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

负号表示电场沿 Z 轴负向。

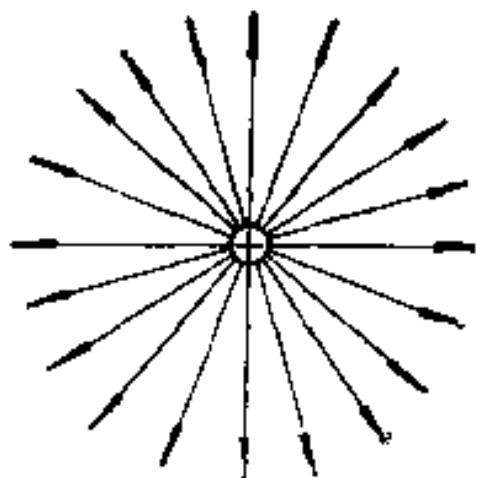
5. 电场线

■为给电场一种形象的几何描述，我们引入**电场线**（又称**电力线**）的概念。

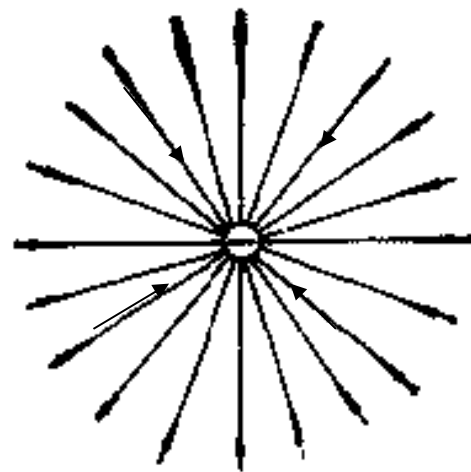
■所谓电场线是指电场所在空间中的一组曲线，曲线上每一点的**切线方向**都与**该点的电场强度方向**一致。

■为了使电场线能表示出空间中各点的**电场强度的大小**，我们引入**电场线数密度**的概念。在空间中任取一点，过该点取小面元 ΔS 与该点场强方向垂直。设穿过 ΔS 的电场线有 ΔN 根，则 $\Delta N / \Delta S$ 叫做该点电场线数密度，即 $E = \Delta N / \Delta S$ 。

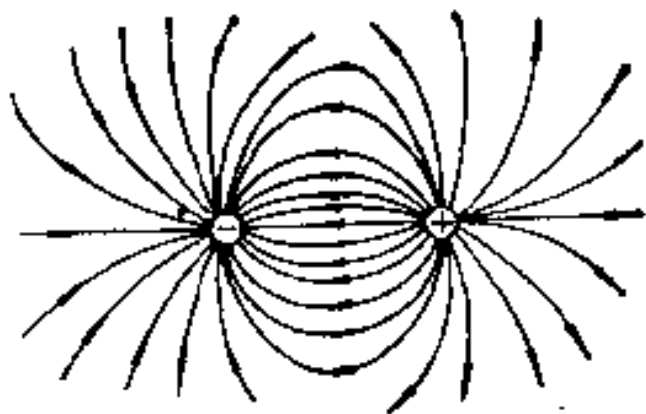
几种电荷系统的电场线



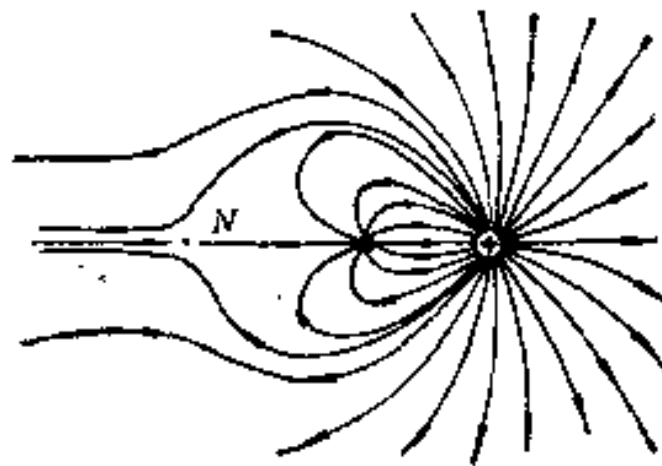
(a) 正点电荷



(b) 负点电荷



(c) 等量异号点电荷, $+q$ 和 $-q$



(d) $+3q$ 和 $-q$ 两点电荷

演示实验

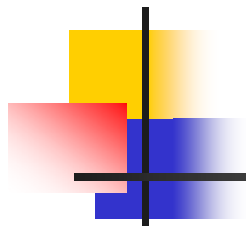
电场线的性质

(1) 起自正电荷或无穷远处，止于负电荷或无穷远处；

(2) 不会在没有电荷的地方中断和相交；

(3) 可以有中性点，前图 (d) 中的 N 点。

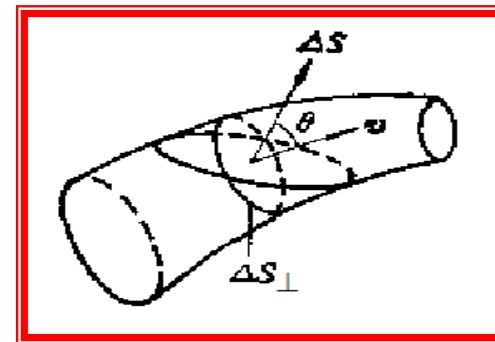
三种矢量场线 { 电场线
磁场线
流速线 (水流流线)



**下面两节是揭示静电场
性质的两个基本定理！**



§ 1-5 高斯定理



静电场属于**矢量场**。从数学角度，常引入“**通量**”和“**环量**”的概念来进一步揭示矢量场的性质

$\left\{ \begin{array}{l} \text{流速场} \rightarrow \text{水流流线} \\ \text{静电场} \rightarrow \text{电场线} \end{array} \right. \xrightarrow[\text{(性质)}]{\text{流量、通量} \rightarrow \text{源、汇}} \left\{ \begin{array}{l} \text{环流、环量} \rightarrow \text{旋涡} \end{array} \right.$

1. 水流量—水通量—电通量

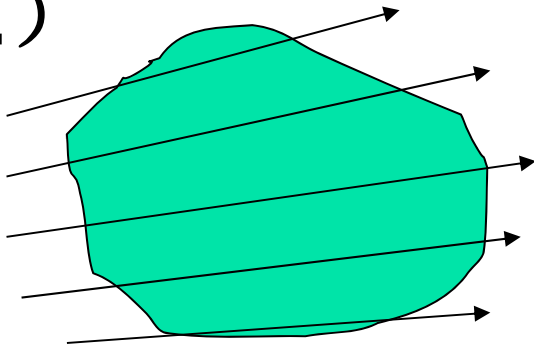
流速场：流量 $\Delta\Phi_v = \mathbf{V} \cdot \Delta\mathbf{S} \cdot \cos\theta = \mathbf{V} \cdot \Delta\mathbf{S}$

静电场：**通量** $\Delta\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S} = E \cdot \Delta S \cdot \cos\theta = \Delta N$ **(1.5.1)**

$$\Phi_E = \iint_S d\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad \textbf{(1.5.2)}$$

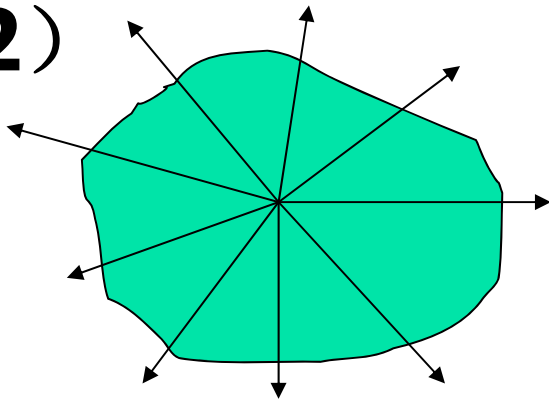
用穿过闭合曲面的通量来表达
此区域内是否有“源”或
“汇”？

(1)



(1) 流入通量=流出通量。

(2)

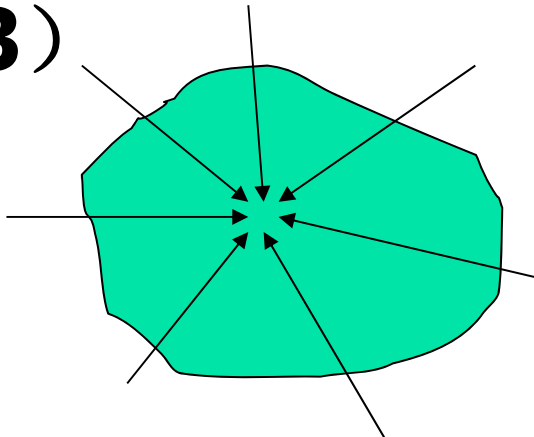


可猜: $\Delta \Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$
区域内无源、无汇。

(2) 类似喷泉，有源，可猜：

$$\Delta \Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \neq 0 \quad \text{应} > 0$$

(3)



(3) 类似地漏，有汇，可猜：

$$\Delta \Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \neq 0 \quad \text{应} < 0$$

由电场的叠加原理可推断电通量满足叠加原理：

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \iint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i}$$

(1.5.3)

2. 高斯定理—通量定理

真空中静电场的**高斯定理**：通过任意闭合曲面（或称**高斯面**） S 的电通量等于该面内全部电荷的代数和除以 ϵ_0 ，与面外的电荷无关。

高斯定理的**数学表述**是：

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S\text{内})} q \quad (1.5.4)$$

说明：（1）静电场有源，电荷是它的源；

（2） \mathbf{E} 是 S 面上的电场， \mathbf{E} 由全空间电荷的分布决定； $d\mathbf{S}$ 的方向规定为指向外的法线方向。

证明：先针对最简单的点电荷情况证明高斯定理。

(1) 当高斯面为**单位半径的球面** ($r=1$)、 q 位于球心所在位置时， E 的大小： $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ ，其方向与外法线方向一致，

由式 (1.5.2) 可求得：

$$\Phi_E = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

(2) 对高斯面为**任意封闭曲面** S 的情况，我们考察该面上的任一面元 ΔS ，其外法线方向 \mathbf{n} 与电场 \mathbf{E} 的方向的夹角设为 θ ，与点电荷 q 的距离设为 r 。以 q 为顶点，通过 ΔS 的周线作一锥面，

该锥面在单位球面上切出一面元 ΔS_1 ，在半径为 r 的球面上切出一面元 ΔS_2 （见右下图）。显然有：

$$\Delta S_2 = \Delta S \cdot \cos \theta,$$

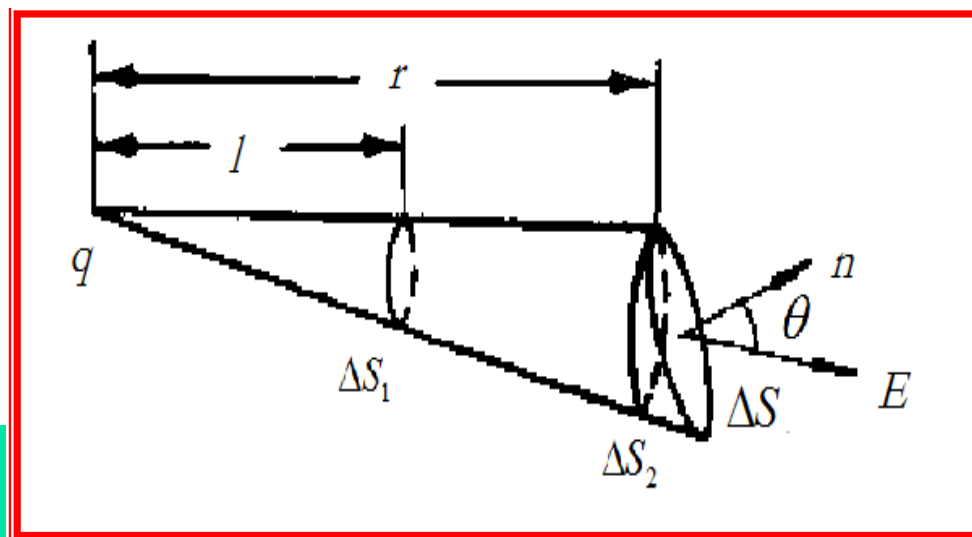
$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = r^2, \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

将 E 代入式(1.5.1):

$$\Delta\Phi_E = E \cdot \Delta S \cdot \cos \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta S_1,$$

ΔS 和 ΔS_1 之间存在一一对应的关系，故穿

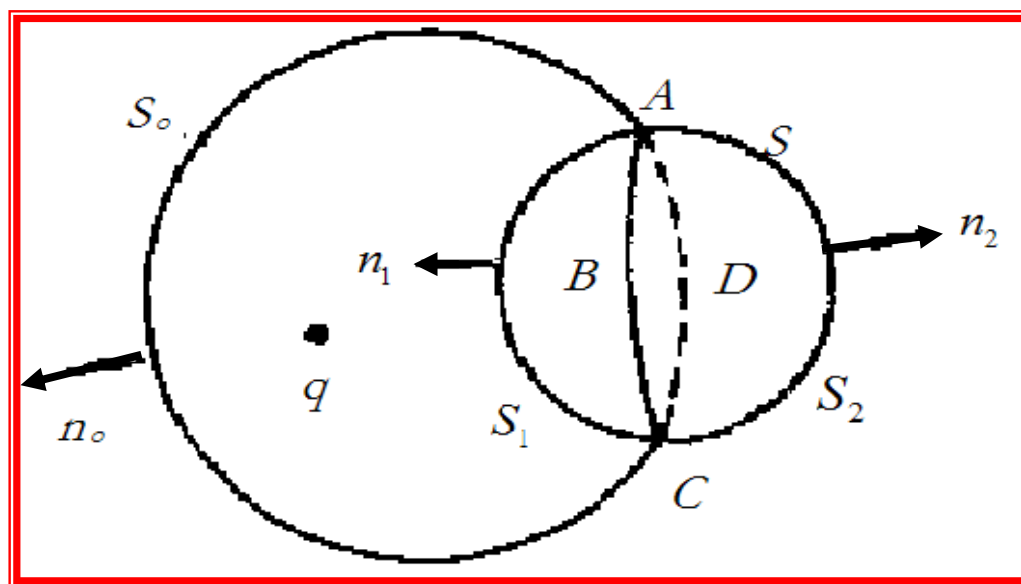
过 S 的电通量应为 q/ϵ_0 （与单位球面的相等）



任意高斯面与单位球面的一一对应

(3) 对于点电荷处于高斯面外的情况，我们作另一个封闭曲面，使之包围点电荷 q 并与高斯面 S 相交，交线为封闭曲线 $ABCD$ （见右下图）。该交线将 S 分为 S_1 和 S_2 两部分，并同时将所作的封闭曲面也分成两个部分，其中处于 S 之外的部分设为 S_0 。

考虑由 S_0 和 S_1 以及由 S_0 和 S_2 组成的封闭曲面，这两个封闭曲面都包含点电荷 q 。于是有：



点电荷 q 位于高斯面 S 之外

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ 注意仍用 } \mathbf{n}_1 \text{ 的方向!}$$

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

由第二式减去第一式可得:

$$\iint_{S_1+S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

到此, 证明了对单个点电荷的情况高斯定理成立。

(4) 对 N 个点电荷组成的点电荷系的情况, 由电通量的叠加原理, 可求得穿过 S 的总电通量为:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S \text{ 内})} q,$$

(5) 对连续电荷分布的情况, 可把带电体划分为许多小部分, 并把每部分当作点电荷处理。这样, 连续电荷分布被代之以点电荷系。例如, 对体电荷分布的情况, 可将高斯定理的普遍形式写成:

$$\Phi_E = \iiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (\mathbf{1.5.5})$$

3. 高斯定理与库仑定律的关系

高斯定理得以成立，是由于库仑定律是距离平方反比律的结果。假如我们设想库仑定律是下面形式：

$$F \propto \frac{1}{r^{2+\Delta}}$$

其中 Δ 是任意一小量。则有

$$E \propto F \propto \frac{1}{r^{2+\Delta}} \quad (1.5.6)$$

对于点电荷 q ，以它为球心，作半径为 r 的球面。取该球面为高斯面，有：

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{q}{r^{2+\Delta}} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{r^\Delta} = \frac{q}{\epsilon_0 r^\Delta} \quad (1.5.7)$$

如果 $\Delta > 0$ ，则当 $r \rightarrow \infty$ ， $\Phi_E(\infty) = 0$ ，**高斯定理不再成立**。因此，**验证高斯定理的正确性**是验证库仑定律中距离平方反比律的一种间接方法。可获得非常高的精度。

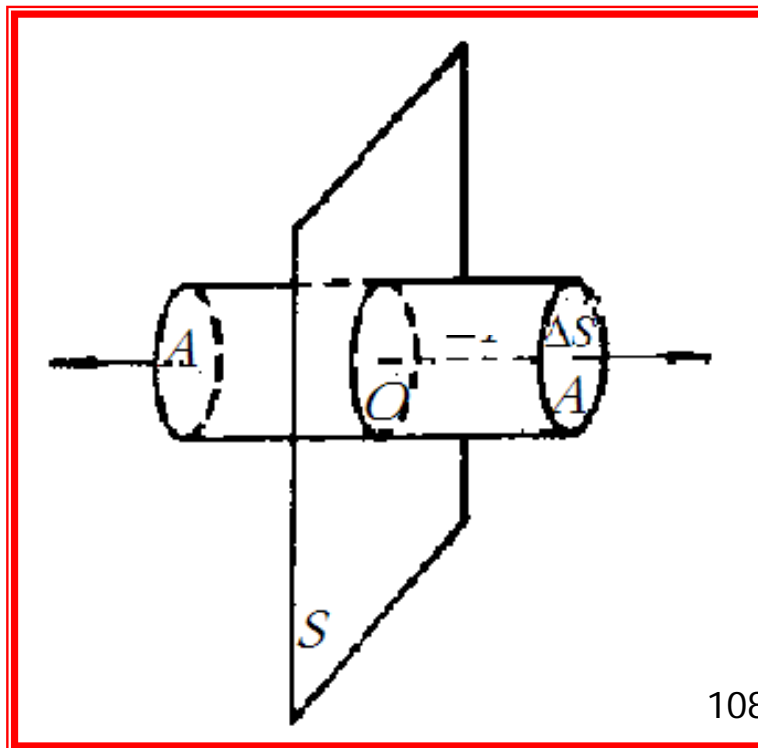
高斯定理出自于库仑定律，它对静电场成立。往后我们将会看到，它**对随时间变化的电场也成立**。

4. 应用举例

高斯定理对解决具有**一维对称性**（即只与一个空间坐标有关）的静电学问题提供了极为有效的方法。

[例1.5] 求面电荷密度为 σ_e 的均匀带电的**无限大薄平板**的电场强度分布。

[解] 首先**分析该问题**是否具有**一维对称性**。我们很快会发现本题待求的电场强度分布是以无限大平板 **S** 为**镜面对称**的。



取前页右下图所示的柱面作为高斯面：其侧面垂直于无穷大平板 S ，一底面过 A 平行于面 S ，另一底面过 A 的镜像对称点 A' 且平行于面 S 。对该柱面运用高斯定理得

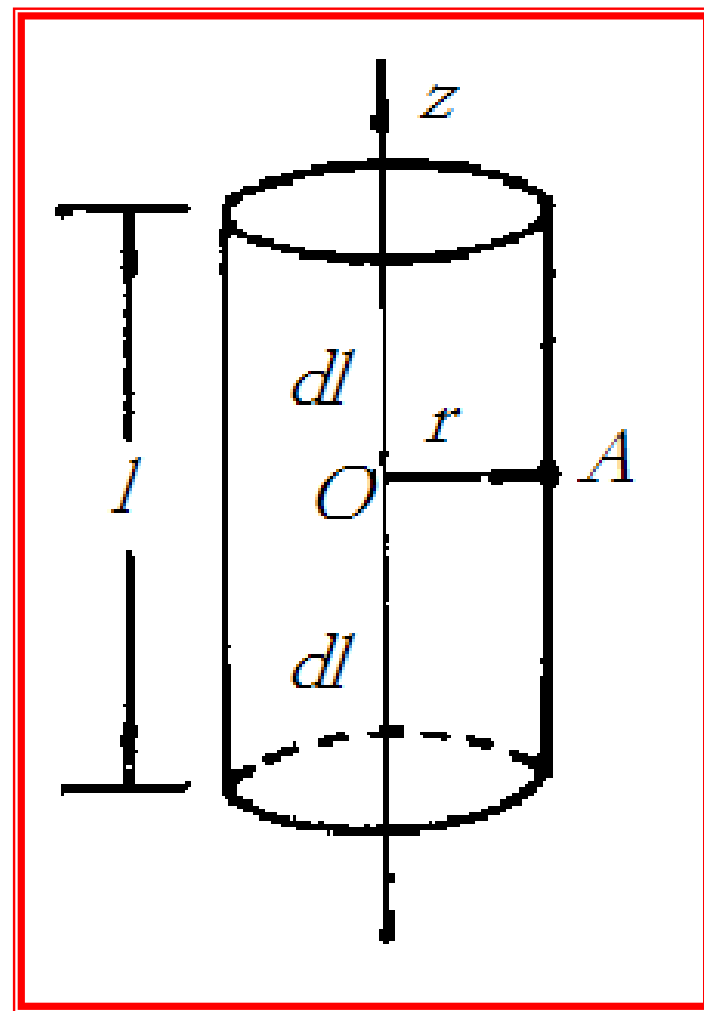
$$2 \cdot \Delta S \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \Delta S \cdot \sigma_e, \quad E = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}.$$

该结果与例**1.3**的结果一致，但计算过程简便得多。

[例1.6] 求线电荷密度为 η_e 的均匀带电无限长细棒所产生的电场。

[解] 作右图，取 z 轴与细棒重合。

首先分析对称性。与细棒距离相等的点，其环境完全一样，与其位置坐标 z 、 φ 无关。显而易见， E 是以细棒为轴对称的，这也是个一维问题。



于是，我们可取以细棒为轴、长度为 l ，半径为 r 的圆柱面作为高斯面。由高斯定理可得

$$2\pi r \cdot l \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot l \cdot \eta_e, \quad E = \frac{\eta_e}{2\pi r \varepsilon_0},$$

即

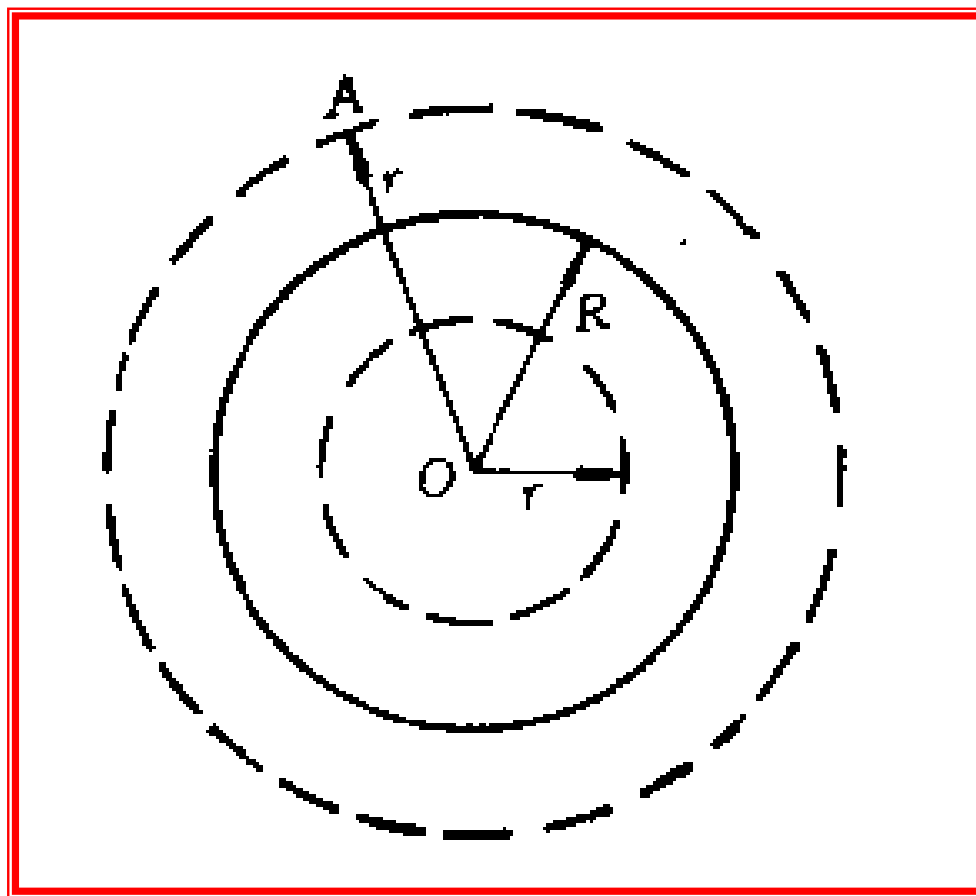
$$\mathbf{E} = \frac{\eta_e}{2\pi \varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}.$$

对于有限长的带电细棒，问题将不再是一维的，而是二维的。必须根据电场叠加原理通过积分去计算。

[例1.7] 求体电荷密度为 ρ_e 、半径为 R 的均匀带电球的电场强度分布。

[解] 首先分析对称性。与球心距离相等的点，其环境相同，与位置坐标 θ 、 φ 无关。场强沿半径方向。

场强的大小只与到球心 O 的距离 r 有关，呈球对称的分布，属于一维问题。



均匀带电球的电场

于是，可取以 O 为球心，以 $OA = r$ 为半径的球面作为高斯面，如前右下图所示。根据高斯定理可得：

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S\text{内})} q$$

(1) 高斯面位于带电球外 ($r > R$)。

对这种情况， S 内的电量等于带电球的总电量 $Q = 4\pi R^3 \rho_e / 3$ ，代入上式可得：

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{R^3 \rho_e}{3\epsilon_0 r^2}, \quad (r > R)$$

(2) 高斯面位于带电球内 ($r < R$)。对这种情况， S 内的电量等于 $4\pi r^3 \rho_e / 3$ ，据此求得：

$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \frac{4\pi r^3 \rho_e}{3} = \frac{\rho_e r}{3\varepsilon_0}, \quad (r < R)$$

球内 $E(r)$ 随径向距离线性增长，球心处电场为零。

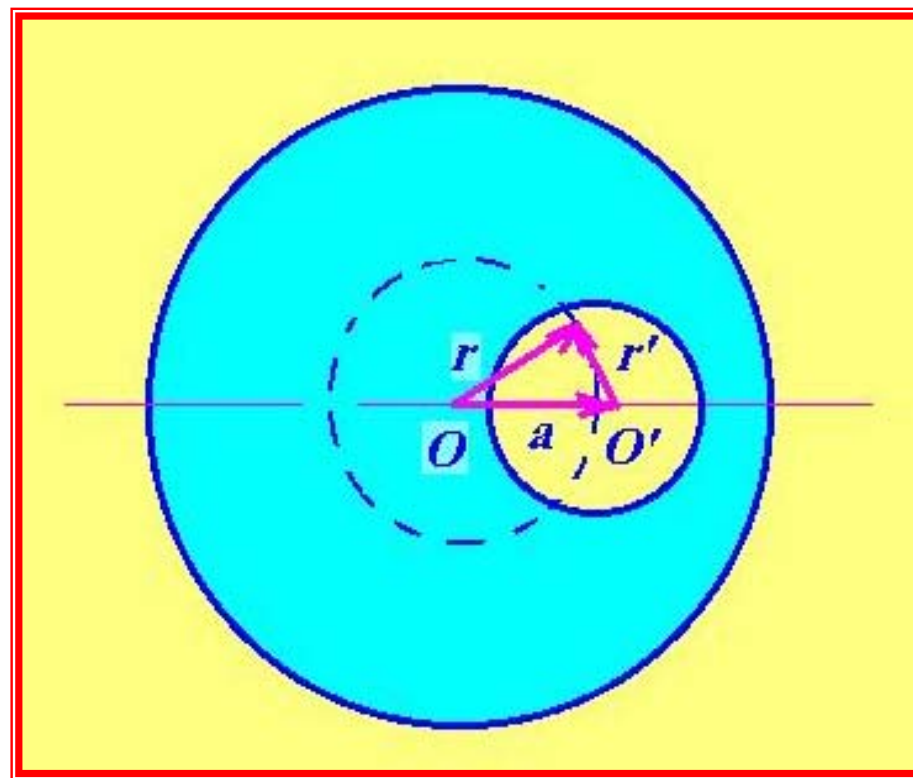
对于面电荷密度为 σ_e 的均匀带电球壳的电场，可按此例的步骤进行类似处理。结果为：球内电场为零，球壳外表面附近电场强度的大小为：

σ_e / ε_0 。请课后作！

[例1.8] 如右下图所示的带空腔的均匀带电球，其电荷密度为 ρ_e ，球心到空腔中心的距离为 a 。求空腔中的电场强度。

[解] 利用叠加原理。

设想在空腔内同时填满 $+\rho_e$ 和 $-\rho_e$ 的电荷，则原电荷分布可视为电荷密度为 $+\rho_e$ 的实心大球和电荷密度为 $-\rho_e$ 的实心小球的叠加。



球形空腔内的电场

由上一例题的结果，可直接写出大球和小球在空腔内部的电场强度表达式：

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \mathbf{r}'$$

腔内电场为二者叠加，结果为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$$

式中 \mathbf{a} 为 O 指向 O' 的矢量。上述结果表明，**空腔内为均匀电场。**

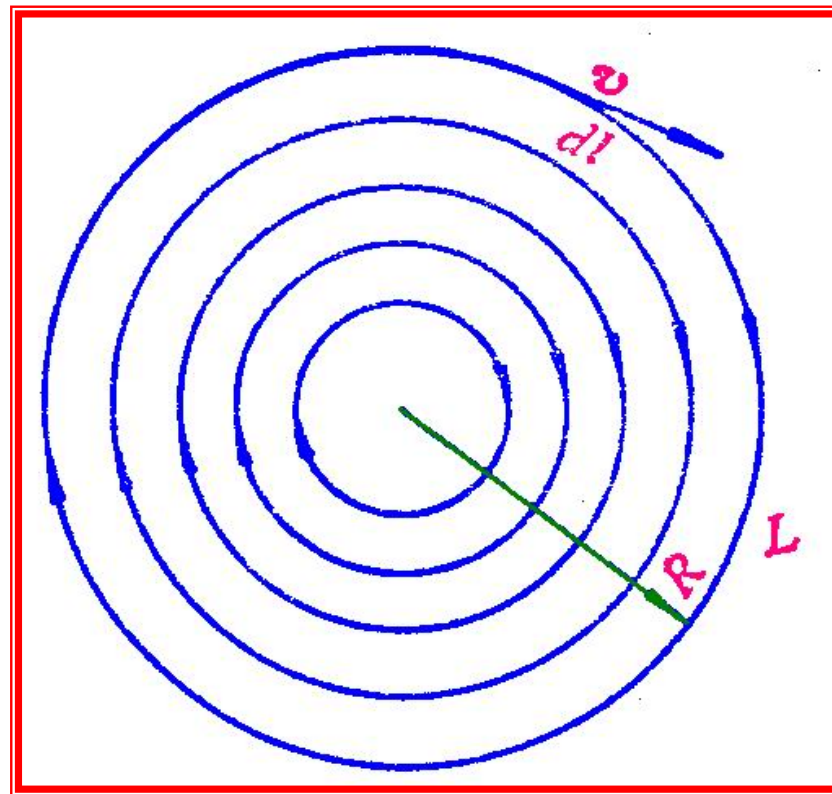
§ 1-6 环路定理

1. 水流速度场的环量

为了便于理解，仍以流体中速度场为例来介绍环量的概念。设水中某处有旋涡，定义对任一闭合曲线 L ，速度沿该闭合曲线一周的积分称速度场的环量，即：

$$\text{环量} = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L}$$

(1.6.1)



速度场的环量

在此处用流线表示如图中的圆闭合曲线（这只是一种近似，严格讲是螺旋线）。又设 \mathbf{V} 在线上任一点的大小一样，则：

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L v \cdot dl = v \oint_L dl = v 2\pi R \neq 0.$$

且速度越大，速度的环量越大，环量 $\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L}$ 精确地描述了 \mathbf{V} 的旋转程度。

2. 静电场的环量

我们用静电场 \mathbf{E} 代替 \mathbf{V} ， \mathbf{E} 的环量应为： $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$

环量反映了矢量场的“旋转”程度，然而对静电场而言，它还具有特定的物理内容：

■ 试探电荷 q_0 在静电场 E 中沿闭合路径 L 缓慢移动，则电场力所作的功为：

$$A = \oint_L dA = \oint_L q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\text{于是：} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \frac{A}{q_0} \quad (\mathbf{1.6.2})$$

它说明静电场的环量表示静电场对沿该闭合路径移动的单位正电荷所作的功。

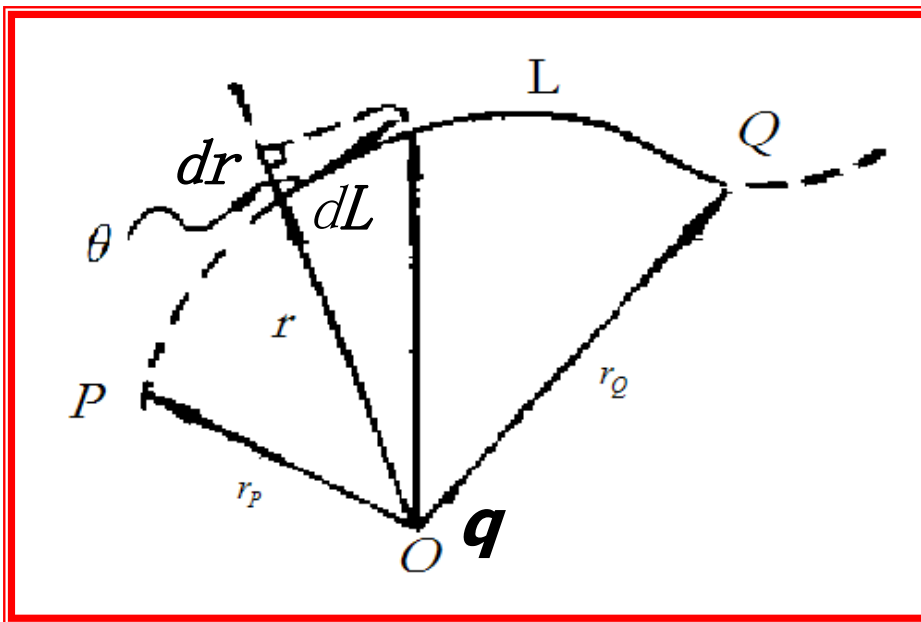
3. 环路定理

静电场的**环路定理**如下：静电场的环量恒等于零，即对**任意闭合回路** L 成立：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (1.6.3)$$

【证明】我们先就**点电荷的静电场**证明式(1.6.3)满足。为此，设 \mathbf{E} 是由点电荷 q 所产生的静电场，则有：

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, \quad A = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{L}$$



电场做功与路径无关

由前页右下图可知：

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{L} = r \cos \theta dL = r dr. \quad (1.6.4)$$

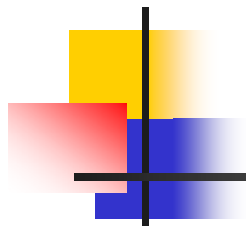
考虑闭合曲线 L 的 PQ 段，将 q_0 沿 L 从点 P 移到点 Q ，电场 \mathbf{E} 作的功为 A_{PQ} ：

$$\begin{aligned} A_{PQ} &= \int_{P(L)}^Q q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{L} \\ &= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right). \quad (1.6.5) \end{aligned}$$

■式（**1.6.5**）表明，单个点电荷产生的静电场对试探电荷所作的功，只与试探电荷的起点和终点的位置有关，与路径 L 无关。由此自然得到一个推论，即环量：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{P_{L_1}}^Q \frac{1}{r^2} dr + \int_Q^{P_{L_2}} \frac{1}{r^2} dr \right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{P_{L_1}}^Q \frac{1}{r^2} dr - \int_{P_{L_2}}^Q \frac{1}{r^2} dr \right) = 0. \quad \textbf{(1.6.6)}$$

式中 $L_1 + L_2 = L$ ，即 L_1 与 L_2 构成闭合环路 L ，证毕。



- 如果静电场是由电荷体系产生的(例如静止的点电荷系或带电体), 那末总可将这种电荷体系视为许多点电荷的叠加, 环路定理仍应成立。
- 环路定理表明, 静电场是一个无旋场, 静电场不会有闭合的电场线。
- 静电场无旋性来自库仑力有心力的特征

§ 1-7 电势

1. 电势差和电势

静电场沿任何闭合环路做功为零，这反映了库仑力的保守力特性，也说明静电场是保守力场；电场力做功与路径无关，我们便可以引进电势差和电势的概念（回忆引力场）。

■ 静电场和引力场类似：在静电场中，当把试探电荷 q_0 由点 P 移到点 Q 时，“电势能” W 为

$$W_{PQ} = W_P - W_Q. \quad (1.7.1)$$

由(1.6. 5)式有 $W_{PQ} = A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.7.2)$

■当电势能的零点（或参考点）确定后，例如，取**无穷远点电势能为零**，将**点 Q 取为无穷远点**，则求得 **q_0 在点 P 的电势能**为：

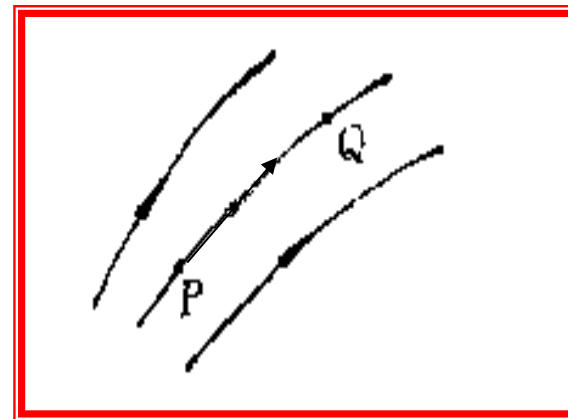
$$W_P = q_0 \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}, \quad (1.7.3)$$

■式（1.7.2）和式（1.7.3）表明，**比值 W_{PQ}/q_0 和 W_P/q_0 与 q_0 的大小无关**，它由电场本身的性质决定。这两个比值**分别定义为**电场中 **P 、 Q 两点间的电势差和 P 点的电势**，记为 **U_{PQ} 和 U_P** ：

$$U_{PQ} = \frac{W_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}, \quad (1.7.4)$$

$$U_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.7.5)$$

$$\int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_Q^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L},$$



于是有
$$U_{PQ} = U_P - U_Q. \quad (1.7.6)$$

这说明， P 、 Q 两点间的电势差正好等于点 P 的电势减去点 Q 的电势。

■特别是当 P 、 Q 位于一条电场线上时（右上图），则由式（1.7.4）和式（1.7.6）可知，有 $U_{PQ} > 0$ ， $U_P > U_Q$ 。这说明电势沿电场线单调减小，或者说**电场线的方向总是由高电势指向低电势**。

■在实际问题中，常取大地或电器外壳的电势为零。改变零点的位置，各点的电势能和电势的数值将随之变化，但都改变一个相同量，以至不会影响两点间的电势能差和电势差。

■电势差和电势的单位均为焦耳/库仑，在SI制中称为伏特，用英文字母V表示。

■由电势的单位可以反推出电场强度的单位为伏特/米（ V/m ），它与前面的牛顿/库仑（ N/C ）完全一致，但更为常用。

2. 电势的一般表达式

先讨论点电荷的情况，然后转入任意带电系统。如右下图所示， q 在点 P 产生的电势可由式（**1.7.5**）求得：

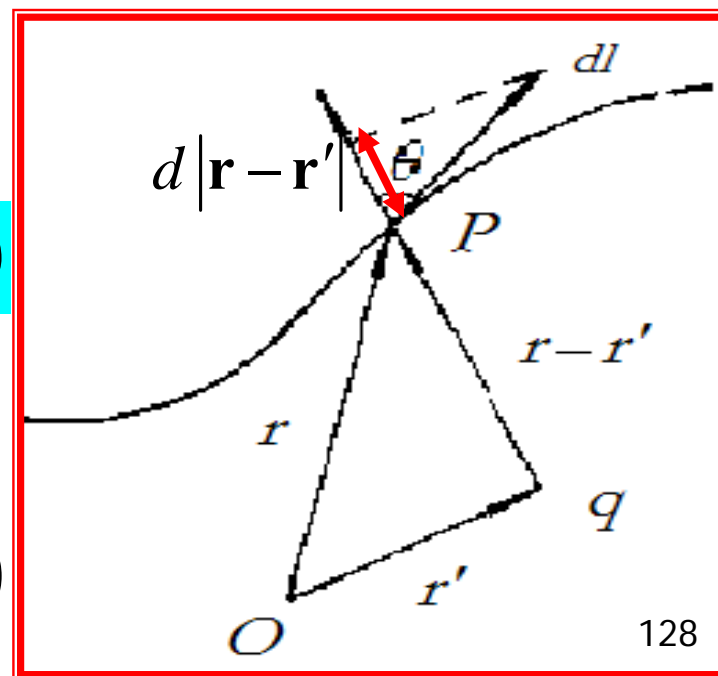
$$U(\mathbf{r}) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_P^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{L}$$

类似式（**1.6.4**）的推导过程可得：

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{L} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

所以

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\mathbf{1.7.7})$$



由于电场满足叠加原理，从式（**1.7.5**）出发容易证明，**电势也满足叠加原理**。

对 N 个静止点电荷组成的系统：

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (1.7.8)$$

带电体： $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.7.9)$

带电面： $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (1.7.10)$

带电线： $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'. \quad (1.7.11)$

3. 等势面

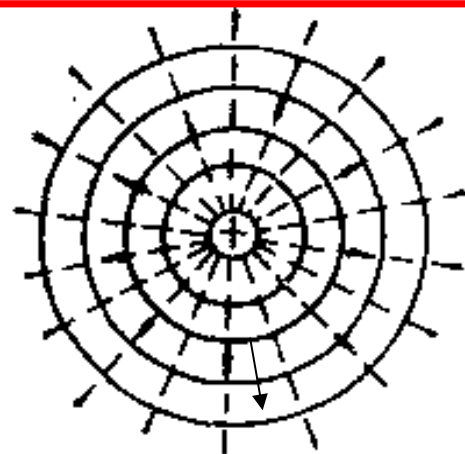
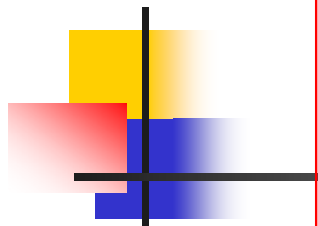
电势为空间坐标的标量函数，属于**标量场**。
标量场常用等值面来进行形象的几何描述。

■ **电势的等值面**称为**等电势面**，或简称**等势面**。

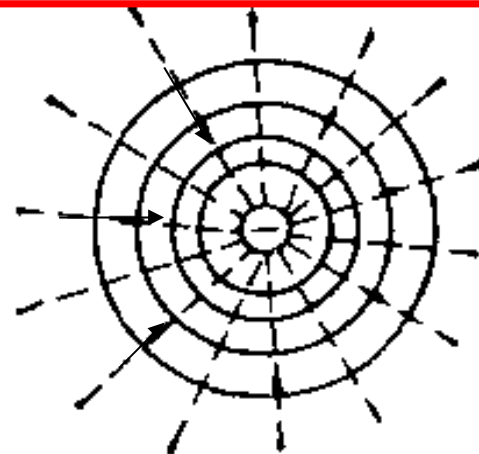
在同一等势面上，电势处处相等。下一页图

(a)、**(b)**、**(c)**、**(d)**给出前面的**电场线图(a)**、

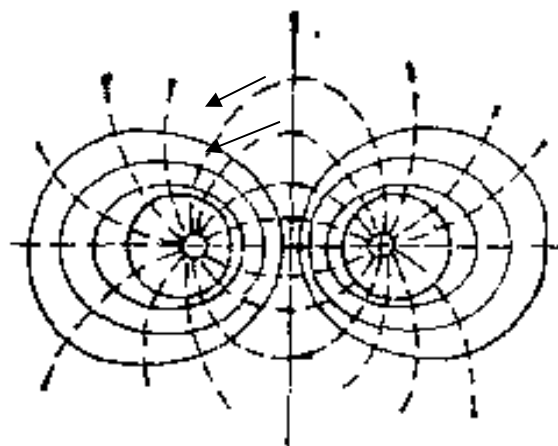
(b)、**(c)**、**(d)**对应的点电荷系统的**等势面**（**实线**，对应等势面与纸面的交线），图中还用**虚线**画出了电场线。



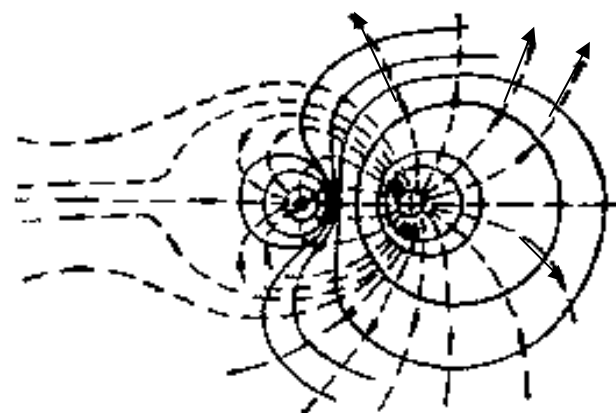
(a) 正点电荷



(b) 负点电荷



(c) $+q$ 和 $-q$



(d) $+3q$ 和 $-q$

点电荷系统的等势面（实线）和电场线（虚线）

4. E 与 U 的微分关系

考虑空间任意两邻近点 P 和 Q ，其电势差为 $\Delta U = U_{PQ} = U_P - U_Q$ ，则 Q 为起点、 P 为终点的相对位置矢量为：

$$\Delta \mathbf{l} = \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} + \Delta z \hat{z} \quad (1.7.12)$$


数学上：

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z. \quad (1.7.13)$$

由积分关系式 (1.7.4) 有：

$$\Delta U = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_x \Delta x - E_y \Delta y - E_z \Delta z. \quad (1.7.14)$$

对比上两式，立即得到：


$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.7.15)$$

可写成如下矢量形式：

$$\mathbf{E} = -\nabla U, \quad (1.7.16)$$

式中

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}, \quad (1.7.17)$$

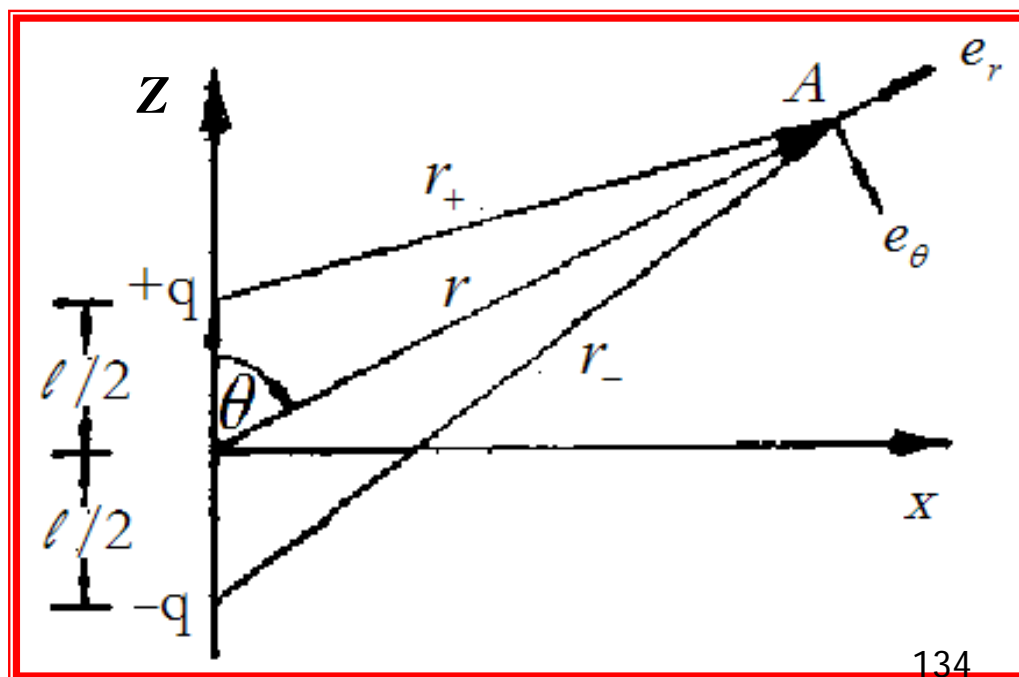
称为**电势梯度**。式**(1.7.16)**就是电场强度和电势之间的微分关系，**电场强度的方向总是指向电势减小的方向**。


5. 应用举例

由于电势是标量，比较好求。因此，常常先求电势(除一维对称性问题以外)，然后对电势微分求电场。

[例1.9] 求右下图所示的电偶极子的电势及电场的分布。

[解] 其电场和电势分布相对 z 轴旋转对称，与角 φ 无关，而与 r 和 θ 有关。由式(1.7.8)有：





$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right),$$

式中:

$$r_+ = \left[r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 - rl \cos \theta \right]^{1/2}$$

$$= r \left[1 + \left(\frac{l}{2r} \right)^2 - \frac{l}{r} \cos \theta \right]^{1/2} \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta.$$

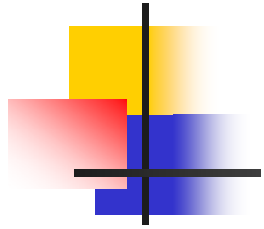
以上用到近似 $l \ll r$ 。于是有

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r - (l/2)\cos\theta} - \frac{1}{r + (l/2)\cos\theta} \right] \approx \frac{ql\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由 $\mathbf{p} = ql\hat{\mathbf{z}}$, 可将上式写成

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} \cdot \mathbf{r}. \quad (1.7.18)$$

在球坐标下将式 (1.7.16) 展开, 并将式 (1.7.18) 代入后求得



$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^3} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \sin \theta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3},$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0.$$

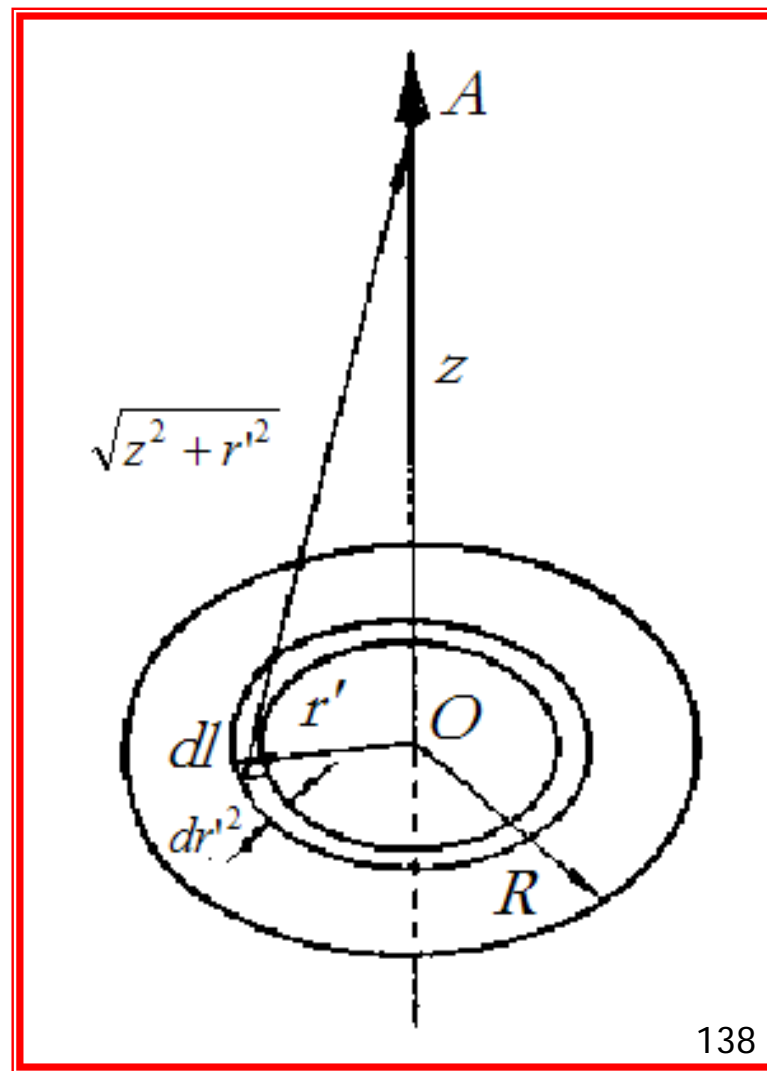
从球坐标下的结果不难看出，电偶极子的电场可以写成如下矢量形式：

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r} \quad (\mathbf{1.7.19})$$

[例1.10] 求面电荷密度为 σ_e 、半径为 R 的均匀带电薄圆盘轴线上的电势与电场分布。

[解] 如右图所示，圆盘轴线上任一点 A 与盘心 O 的距离为 $OA = z$ 。以 O 为圆心，取半径为 r' ，宽度为 dr' 的圆环，环上取一小段 $dl = r'd\varphi$ 。

由式（1.7.10），求得该小段电荷在点 A 产生的电势为：



$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e dr' dl}{(r'^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e r' dr' d\varphi}{(r'^2 + z^2)^{1/2}}$$

将上式对 r' 和 φ 积分得轴上的电势分布:

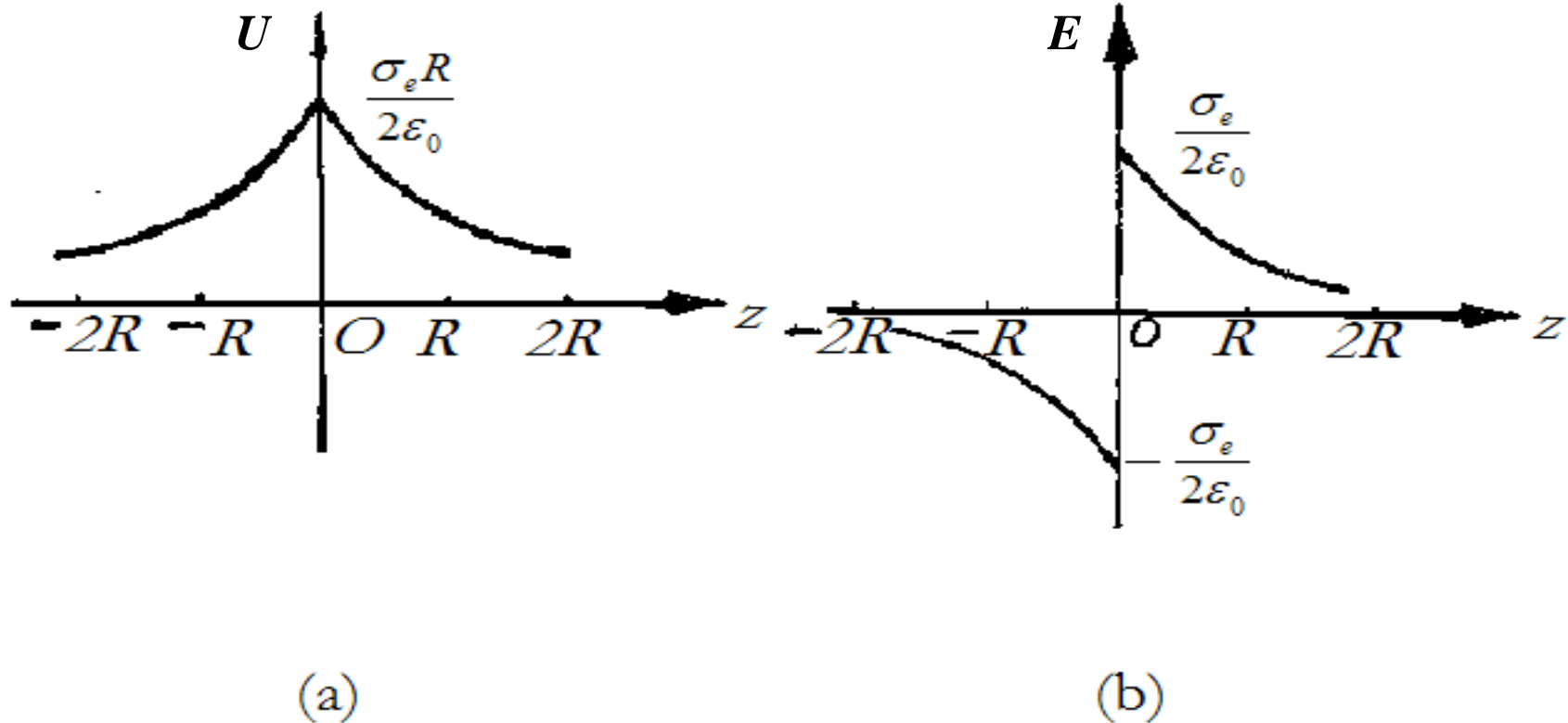
$$U(z) = \frac{\sigma_e}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

将上式代入式 (**1.7.15**) 第三式得

$$E_z = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right], \quad (z > 0)$$

$$E_z = -\frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right], \quad (z < 0)$$

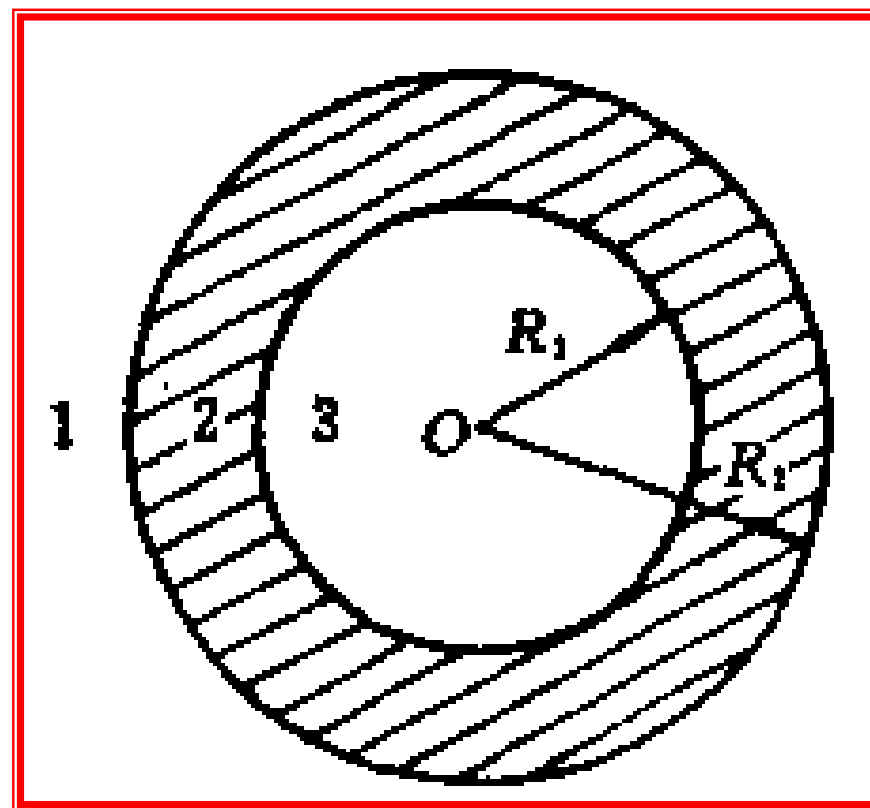
由上述结果，我们可画出电势与电场随 z 变化的曲线，分别见图(a)和(b)。



均匀带电圆盘轴线上的电势和电场强度的分布

[例1.11] 求电荷密度为 ρ_e 、内外半径分别为 R_1 和 R_2 的均匀带电球壳的电场与电势分布。

[解] 本题待求电场与电势具球对称性。对这类问题我们可先用高斯定理求电场，然后再求电势，这种处理方式比较简单。



■ 球壳将空间分隔成**1、2、3**三个区域。以 **O** 为球心，以 **r** 为半径作球面为高斯面，在三个区域中分别用高斯定理可求得：

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = \frac{\rho_e(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, \quad (r \geq R_2)$$

$$E_2 = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} [4\pi(r^3 - R_1^3)\rho_e/3] = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right) \mathbf{r}, \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

$$E_3 = 0. \quad (r \leq R_1)$$

代入式 (1.7.5) 分别求得

$$U_1 = -\int_{\infty}^r \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\rho_e(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_e(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r}, \quad (r \geq R_2)$$

$$U_2 = -\int_{\infty}^{R_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} - \int_{R_2}^r \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = U_1(R_2) - \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \int_{R_2}^r \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right) r dr =$$

$$= \frac{\rho_e(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\rho_e(r^2 - R_2^2)}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho_e R_1^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$= \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0} \left(3R_2^2 - \frac{2R_1^3}{r} - r^2 \right), \quad (R_1 \leq r \leq R_2);$$

$$U_3 = - \int_{\infty}^{R_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} - \int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} - \int_{R_1}^r \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l}$$

$$= U_2(R_1) = \frac{\rho_e(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}, \quad (r \leq R_1).$$

U_3 是与 r 无关的恒量，可知球壳内空腔的电势处处相等。

6. 高斯定理和环路定理的微分形式

由数学上的高斯散度定理

$$\oiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV$$

而高斯定理的积分形式

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S_{\text{内}}} q = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

由此得到：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



数学上的斯托克斯定理

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}$$

而对于静电场的环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

由此得到:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

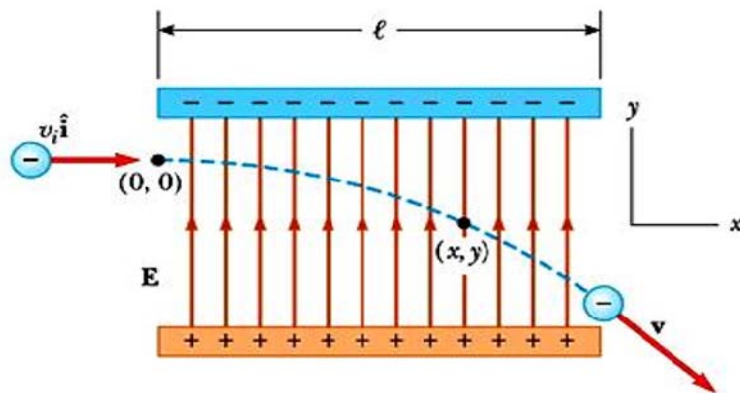
§ 1-8 带电粒子在电场中的运动

带电粒子的运动方程：_____ 根据能量守恒：

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

若电场沿 x 方向，
初始条件： $x(0) = 0$ ， $v(0) = 0$
得

$$x = \frac{qE}{2m} t^2$$



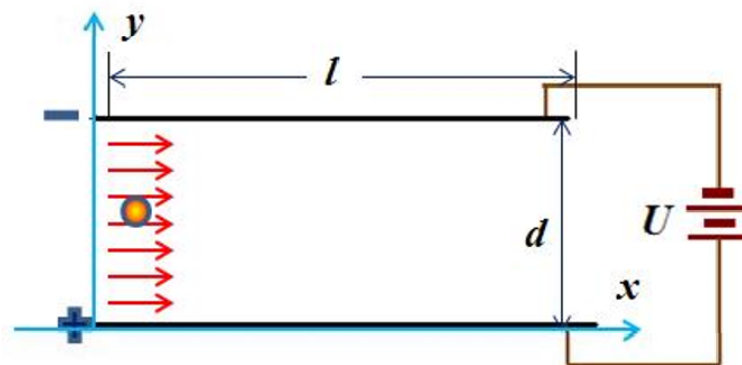
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + q U_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + q U_2$$

得

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q(U_1 - U_2)}{m}}$$

[例1.11] 两段式静电除尘。入口处粒子的质量、电荷与速度分别为 m , q , v 。求除尘电极的长度。

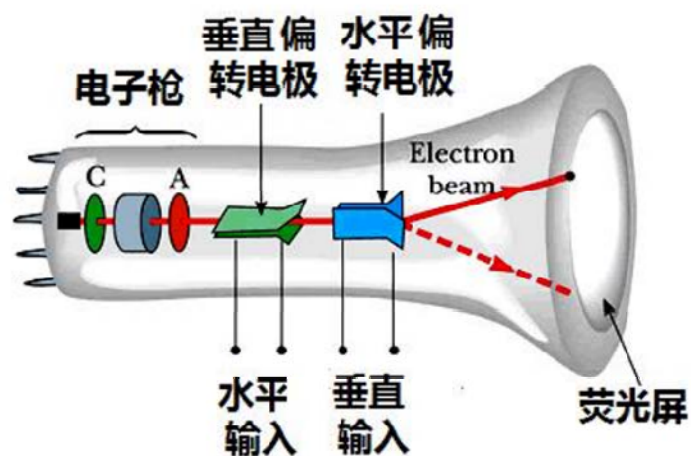
$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = qE_x = 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = qE_y = q \frac{U}{d} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = \frac{qU}{2md} t^2 + C_3 t + C_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = C_2 = 0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = C_1 = v \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = C_4 = d \\ \frac{dy}{dt}(0) = C_3 = 0 \end{cases}$$

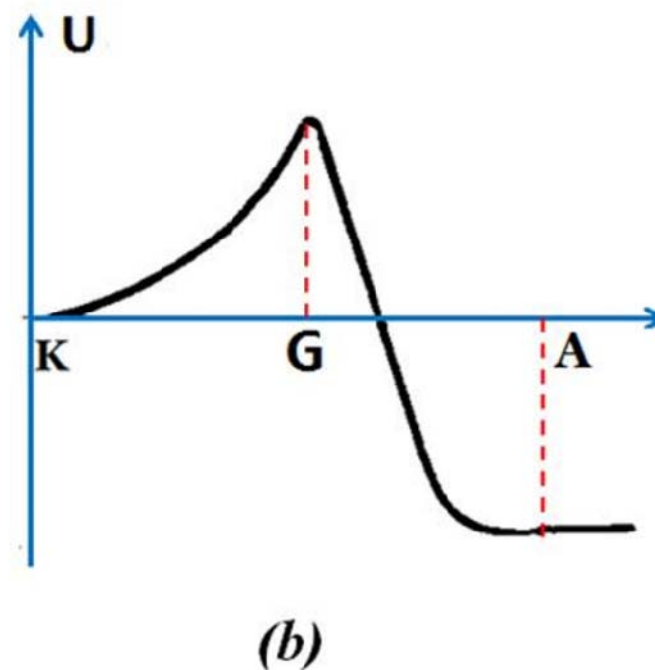
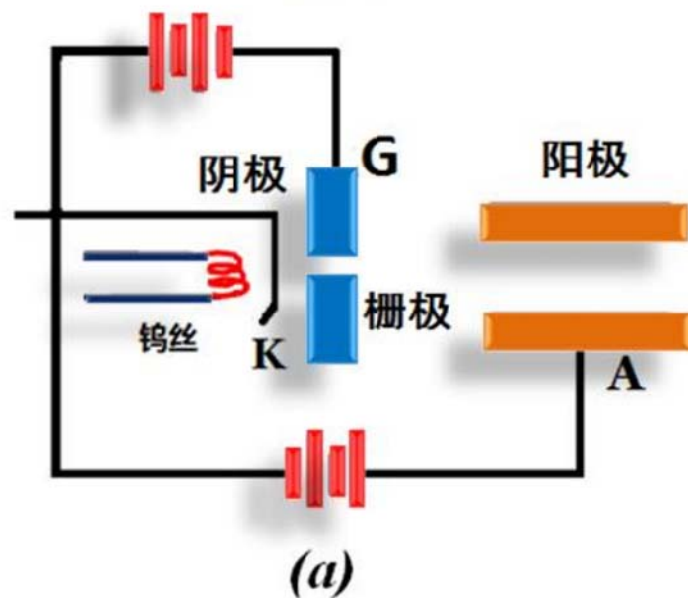
$$\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{qU}{2md} t^2 + d \end{cases} \quad \begin{cases} x = v \sqrt{\frac{-2md^2}{qU}} \\ y = 0 \end{cases}$$

显像管原理



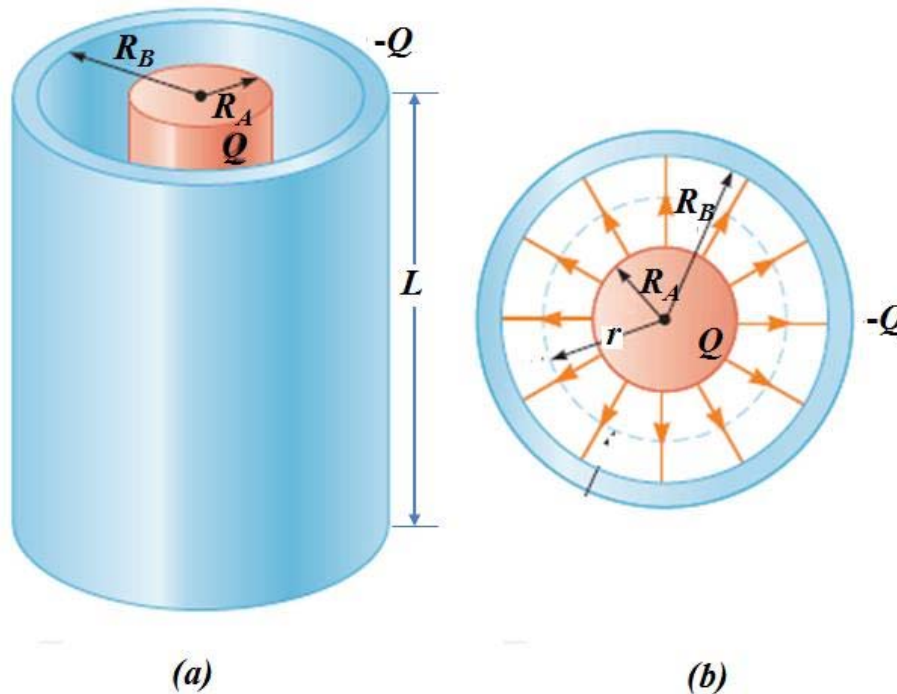
电子枪：小型加速器

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} U_A} \xrightarrow{U_A=10000V} 6 \times 10^7 \text{ m/s}$$



课堂练习

- 同轴电缆由同心导体圆柱体和圆柱面（壳层）构成，半径分别为 R_A 和 R_B ，圆柱体与圆柱面所带电荷分别为 $+Q$ 和 $-Q$ ，假定电缆长度 L 远大于 R_B ，求全空间的电场强度、电势和两导体间的电势差。



注：电荷 $+Q$ 分布在圆柱体表面。