# 随机过程B

陈昱
cyu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

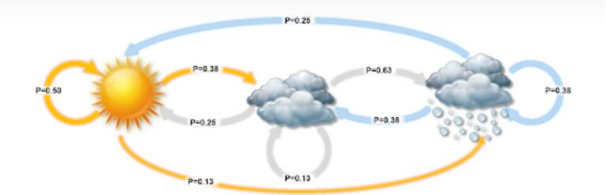
2022 年 2 月

# 第 3 章　Markov 过程

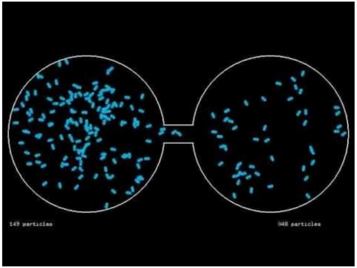
- 马尔可夫链的定义及例子
- 马尔可夫链的状态及分类
- 马尔可夫链的极限性质
- 连续时间马尔可夫链

# Markov 过程应用

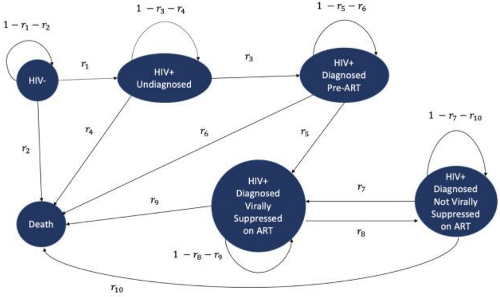
1. 天气预报




2. 分子扩散模型(Ehrenfest扩散模型)



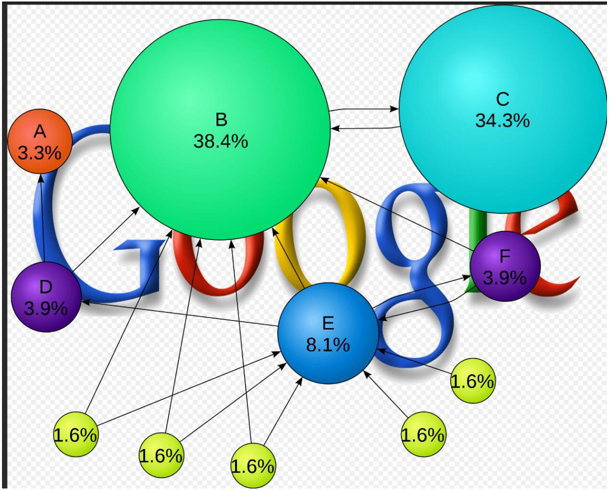
3. 病情预测



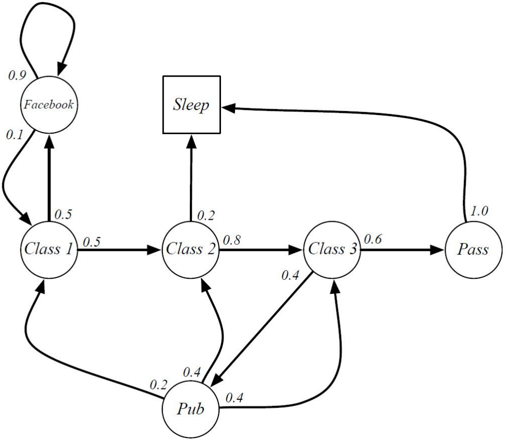

Download : Download high-res image (348KB)    Download : Download full-size image

Fig. 2. HIV Transmission Markov Model.

4. PageRank算法（计算互联网网页重要度的算法）



5. 学习过程


0.9
Facebook
0.1
Sleep
0.5
0.2
1.0
Class 1
0.5
Class 2
0.8
Class 3
0.6
Pass
0.4
0.4
0.2
Pub
0.4

过程 $\{X(t), t \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}$, 状态空间 $S$.

- **Markov 性质**: 具有马尔科夫性质的状态满足下面公式:

$$P(X_{t+1} \mid X_t) = P(X_{t+1} \mid X_1, \ldots, X_t)$$

- **Markov 过程**: 对 $\forall\, t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $t_i, t \in T$, $x_i \in S$, $B \in \mathcal{B}(S)$,

$$\mathrm{P}\left(X(t) \in B \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_n) = x_n\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_n) = x_n\right).$$

- **时间齐次性**: 对 $\forall\, t_0 < t$, $t_0, t \in T$, $x \in S$, $B \in \mathcal{B}(S)$,

$$\mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_0) = x\right) \text{ 与 } t_0 \text{ 无关，只依赖于 } t - t_0.$$

- **分类**: 根据 $T$ 与 $S$ “离散” 与 “连续” 进行分类

研究离散时间离散状态时间齐次的马氏链 (Markov Chain, 记为 MC) $\{X_n, n \in T\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 或有限状态.

- 局部历史和全部历史的马氏性
- 一步转移概率:

$$P_{ij} = \mathrm{P}(X_1 = j | X_0 = i) = \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad \forall\, i, j, n$$

- 一步转移概率矩阵:

$$\boldsymbol{P} = \left(P_{ij}\right)_{S \times S}$$

---

注

$\{X_n, n \geq 0\}$ 概率规律由 $X_0$ 分布和转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 唯一确定.

当然在此我们把过程留在原地也看成是一种“转移”，即从 $i$ 转移到 $i$。通常把 $P_{ij}$ 排成一个无穷维的方阵。记作 **P**, 称为一步转移概率矩阵,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & & & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

1, $P_{ij} \geq 0 (\forall i, j \geq 0)$
2, $\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1 (i = 0, 1, 2, \cdots)$

即这个矩阵每一行和为1, 每一个元素均为非负。

---

矩阵的第 $i+1$ 行就是给定 $X_n = i$ 时，$X_{n+1}$ 的条件概率分布。当 Markov 链的状态总数是有限时，则 **P** 就是有限阶的方阵，其阶数正好是状态空间中状态的总数。

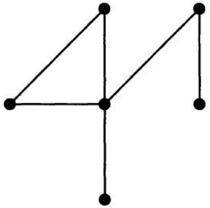
**定义：转移图**

转移图是一个有向图$G=(V,E)V=S$，$S$是Markov链的状态空间，$E$定义如下

$$E=\left\{\overrightarrow{ij}\mid i,j\in S,p_{ij}>0\right\}$$

**例子：图上随机游走**

考虑如下一个图$G=(V,E).V=S$，　$S$是Markov链的状态空间，



即顶点即为Markov链所处的状态，定义转移概率如下

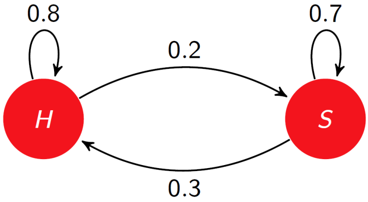
$$p\left(v_i,v_j\right)=1/d\left(v_i\right),\quad v_i\sim v_j$$

其中$d\left(v_i\right)$为顶点$v_i$的度(无向图), [if $d\left(v_i\right)=0$, we let $p\left(v_i,v_i\right)=1$ ].

# §3.1 马尔科夫链的例子

- 例: 每一天的心情两种，happy ($X_n = 0$) or sad ($X_n = 1$)
  $\Rightarrow$ 明天的心情只会被今天的心情所影响
- 我们用一Markov Chain来刻画，

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

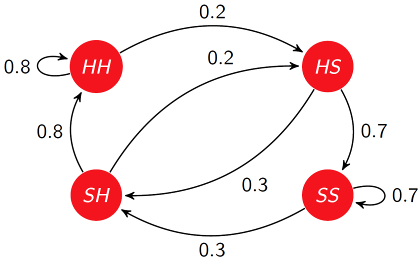



- Inertia (惯性) $\Rightarrow$ 今天开心或者悲伤，明天很有可能继续
- But when sad, a little less likely so ($P_{00} > P_{11}$)

- 例: 明天的心情会被今天和昨天两天的心情所影响
  $\Rightarrow$ 如果用上一个例子的状态，这就不是一个Markov chain。

- 我们定义double states(两天的状态), HH (Happy-Happy), HS (Happy-Sad), SH, SS, 这可以用一Markov Chain来刻画，

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



由当前事件和独立序列生成的马氏链

**定理:** 假设$Y_{\mathrm{N}} = Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ 是$i.i.d.$ 且独立于$X_0$. 考虑随机过程$X_{\mathrm{N}} = X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 满足

$$X_n = f\left(X_{n-1}, Y_n\right), \quad n \geq 1$$

则$X_{\mathrm{N}}$ 是Markov chain, 其转移概率为

$$P_{ij} = \mathrm{P}\left(f\left(i, Y_1\right) = j\right).$$

- 这是识别马尔可夫链非常有用的一个结论.
- 随机游动时, $f(x, y) = x + y$.

证明：先证$Y_{n+1}$与$X_0, X_1, \ldots, X_n$相互独立.
$X_1 = f(X_0, Y_1)$, $Y_2$与$X_0, Y_1$独立, 所以$Y_2$与$X_1, X_0$独立. 同理

$$X_2 = f(X_1, Y_2) = f(f(X_0, Y_1), Y_2),$$

所以$Y_3$与$X_2, X_1, X_0$独立。归纳假设可知$Y_{n+1}$与$X_0, X_1, \ldots, X_n$相互独立。所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(f\left(X_n, Y_{n+1}\right) = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(f\left(i_n, Y_{n+1}\right) = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots X_n = i_n\right) = P\left(f\left(i_n, Y_{n+1}\right) = i_{n+1}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right)
\end{aligned}$$

# §3.1 马尔科夫链的例子

**例($(s,S)$存储问题):** 设一家电视机商店最多可存放$S$台电视机.开始时商店进货进足$S$台电视机.若在第$n$个月中顾客欲购的电视机台数(需求量)为$\xi_n$,第$n$个月底盘点时所剩的电视机台数记为$X_n$. 盘点后决定是否进货. 决策的方法如下:若$X_n \leqslant s$, 就立即进货至$S$台, 若$X_n > s$, 则不进货.假设$\{\xi_n, n \geqslant 1\}$为i.i.d. 随机变量序列,其共同分布为$\{q_k, k \geqslant 0\}$. 这时$\{X_n, n \geqslant 0\}$是马尔可夫链. 事实上, 我们有

$$X_0 = S,$$

$$X_n = \begin{cases} \max(0, X_{n-1} - \xi_n), & \text{当 } s < X_{n-1} \leqslant S, \\ \max(0, S - \xi_n), & \text{当 } X_{n-1} \leqslant s, \end{cases} \qquad n \geqslant 1.$$

$X_n$是一个状态空间为$\{0,1,\ldots,S\}$的MC，转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_s, & j = 0, i \leqslant s, \\ \alpha_i, & j = 0, i > s, \\ q_{s-j}, & 0 < j \leqslant S, i \leqslant s, \\ q_{i-j}, & 0 < j \leqslant i, i > s, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中$\alpha_i = \sum_{j=i}^{\infty} q_j$.

- 例【独立和序列】 一般随机游动过程 $\{S_n, n \geq 0\}$, 其中 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$, 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ iid,

$$\mathrm{P}\,(X_1 = j) = \alpha_j, \quad j \in \mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

显然，$\{S_n, n \geq 0\}$ 为一个 MC, 转移概率

$$P_{ij} = \alpha_{j-i}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{Z}.$$

---

若

$$\mathrm{P}\,(X_1 = j) = \alpha_j, \quad j \in \mathbb{Z} \equiv \{0, 1, 2, \ldots\},$$

此时$\{S_n, n \geq 0\}$ 为一个 MC, 转移概率为

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_{j-i}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$$

**例：** (1)无限制的随机游走. 设有一质点在数轴上随机游动，每单位时间向左或向右移动一个单位，或者原地不动. 向左的概率为$q$, 向右的概率为$p$, 不动的概率为$r$, $Z_n$记此离散分布. $X_n$表示$n$时刻质点的位置，则$\{X_n, n \geq 0\}$是一Markov链. ( $X_0 = a$)

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$$

- $p = q = 1/2$, 简单对称随机游动
- $p + q = 1, 0 < p < 1$, 简单随机游动

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ r & j = i \\ q & j = i-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

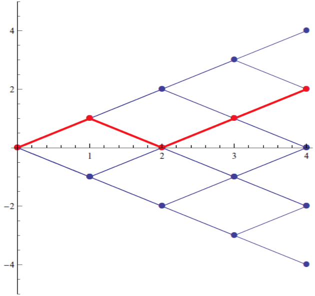



图. 简单随机游走的样本路径

对于马尔科夫链，我们经常会画出其状态转移图，例如下图是简单随机游走的状态转移图

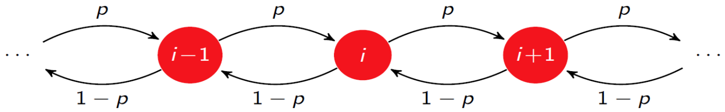



图. 简单随机游走的状态转移图

对一般的MC，

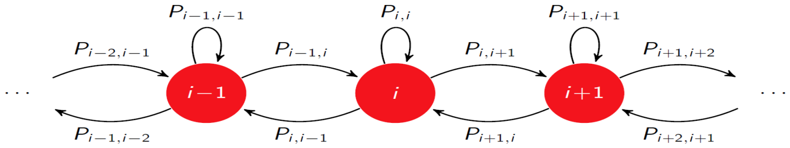



图. 状态转移图

**例：** (2)带吸收壁的随机游走. 将(1)中的随机游动限制在0和$J$(吸收态absorbing)之间，即$S=\{0,1,\ldots,J\}$上。质点移动到0和$J$上后就永远停留在该位置了. 即

$$P_{00}=1=P_{JJ},$$

其余同(1). 这时候就称为带两个吸收壁的随机游动, 是一个有限状态的马尔可夫链.

$$X_{n+1}=\max(0,\min(X_n+Z_{n+1},J))$$

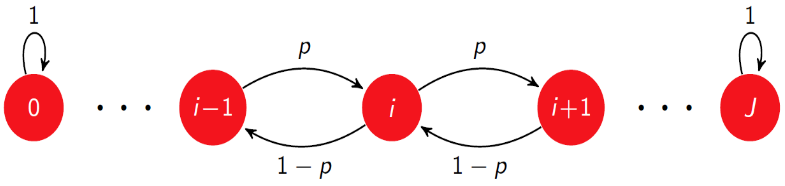
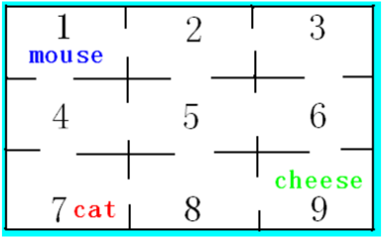



图. 状态转移图

下图为一个迷宫，其中房间9放有一块奶酪,而房间7里隐藏着一只猫. 现有一只老鼠从房间1出发. 假设老鼠没有任何信息，即：当老鼠在一个给定房间时，它进入相邻房间的概率为$1/k$，其中$k$表示与该给定房间相邻的房间个数. 假设一旦老鼠进入奶酪或猫所在的房间，则永远停留在该房间.



设Xn表示老鼠在n次变换房间之后所在房间号，则随机过程$\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$是一个以$S=\{1,2,\ldots,9\}$为状态空间的Markov链，并且初始概率向量为$S(0)=(1,0,\ldots,0)$，转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**赌徒输光问题** 赌徒甲有资本$a$元，赌徒乙有资本$b$元，两人进行赌博，每赌一局输者给赢者1元，没有和局，直赌至两人中有一人输光为止。设在每一局中，甲获胜的概率为$p$，乙获胜的概率为$q$，求甲输光的概率。

这个问题实质上是带有两个吸收壁的随机游动。

**解：** 从甲的角度看，$X_n$表示手里持有的资本，$X_0 = a$，每次移动一格，向左（输1元）或向右（赢1元）. 一旦达到0（甲输光）或达到$c = a + b$(乙输光）这个游动就停止。这是一个带两个吸收壁（0和$c$)的随机游动。现在的问题是求质点从$a$出发到达0状态先于到达$c$状态的概率。

这是一个Markov链，具有马氏性，以此来递推。设$0 \le j \le c$，设$u_j$为质点从$j$出发到达0状态先于$c$. 于是得到递推式

$$u_j = u_{j+1}p + u_{j-1}q$$

边界条件为

$$u_0 = 1, \quad u_c = 0.$$

要求$u_a$，先求$u_j$. 把上式移动一下变为

$$u_j - u_{j+1} = \left(\frac{q}{p}\right)(u_{j-1} - u_j)$$

令$r = q/p$,

$$u_j - u_{j+1} = r\left(u_{j-1} - u_j\right) = r^2\left(u_{j-2} - u_{j-1}\right) = r^j(u_1 - u_0)$$

当$r \neq 1$, 有

$$1 = u_0 - u_c = \sum_{j=0}^{c-1}\left(u_j - u_{j+1}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{c-1} r^j(u_1 - u_0) = \frac{1 - r^c}{1 - r}(u_1 - u_0).$$

而

$$u_j = u_j - u_c = \sum_{i=j}^{c-1}\left(u_i - u_{i+1}\right) = \sum_{i=j}^{c-1} r^i(u_1 - u_0)$$

$$= r^j\left(1 + r + \cdots + r^{c-j-1}\right)(u_1 - u_0) = \frac{r^j - r^c}{1 - r}(u_1 - u_0)$$

于是得到

$$u_j = \frac{r^j - r^c}{1 - r^c},$$

从而

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{r^a - r^c}{1 - r^c} \\ &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^c\right) / \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^c\right) \end{aligned}$$

若$r = 1$时

$$u_0 - u_c = 1 = c(u_1 - u_0), \quad c = a + b$$

由上式

$$u_j - u_{j-1} = u_{j-1} - u_{j-2} = \cdots = u_1 - u_0 = \frac{1}{c},$$

从而$u_j = u_j - u_c = \sum_{i=j}^{c-1}(u_i - u_{i+1}) = (c - j)\frac{1}{c}$, 于是

$$u_a = \frac{b}{a + b}.$$

(续)

- 引理 3.1.1 设 $\{S_n, n \geq 0\}$ 为简单随机游动, 则对任意 $i \neq 0$,

$$\mathrm{P}\left(S_n = i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right) = \frac{p^i}{p^i + q^i}. \qquad (*.1)$$

证明: 约定 $i_0 = 0$, 定义 $j = \max\{k: \ i_k = 0, 1 \leq k \leq n\}$.

- 事件 $\{S_n = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_j| = 0\}$ 对应的路径向右跳 $\frac{1}{2}(n-j+i)$ 步, 向左跳 $\frac{1}{2}(n-j-i)$ 步;
- 事件 $\{S_n = -i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_j| = 0\}$ 对应的路径向右跳 $\frac{1}{2}(n-j-i)$ 步, 向左跳 $\frac{1}{2}(n-j+i)$ 步.

于是 $(*.1)$ 左边等于

$$\mathrm{P}\left(S_n = i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_j| = 0\right) = \frac{p^i}{p^i + q^i}.$$

(续) 证明 $\{|S_n|, n \geq 0\}$ 为一个 MC.

证明： 对 $\forall\, i \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(|S_{n+1}| = i+1 \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right)\\
&\quad = \mathrm{P}\left(|S_{n+1}| = i+1 \,\middle|\, S_n = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right)\\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(S_n = i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right)\\
&\qquad + \mathrm{P}\left(|S_{n+1}| = i+1 \,\middle|\, S_n = -i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right)\\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(S_n = -i \,\middle|\, |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \ldots, |S_1| = i_1\right)\\
&\quad = p \cdot \frac{p^i}{p^i + q^i} + q \cdot \frac{q^i}{p^i + q^i}.
\end{aligned}
$$

于是，转移概率为: $P_{01} = 1$, $P_{ij} = 0, \forall\, |i-j| > 1$, 且

$$
P_{i,i+1} = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i} = 1 - P_{i,i-1}. \qquad \blacksquare
$$

顾客进入一个服务系统，只有一个服务员，如果发现服务员空着即刻得到服务，如果有顾客在接受服务就排队等候. 假设相继来到的顾客服务时间序列为独立同分布的序列， 分布为$Exp(\lambda)$，每个顾客的服务时间的分布也相同，来到过程和服务时间都是相互独立的。该排队系统记为$M/G/1$.

$$\underbrace{M}_{\text{指数分布}} \quad / \quad \underbrace{G}_{\text{一般非指数分布}} \quad / \quad \underbrace{1}_{\text{1个服务员}}$$

若以$X(t)$记在$t$时刻系统中的顾客数，不具有马氏性，因为此时等待下一个来到时间(前一个顾客来了多久），还有就是服务中的顾客剩余服务时间都有关系，除非是指数分布. 来到间隔是指数分布， 我们不关心前一个到达系统的顾客已经到达多久(指数分布无记忆性)，但是我们关心服务的顾客已经服务了多久.

记$X_n$: 第$n$个顾客走后剩下的顾客数.
记$Y_n$: 第$n+1$个顾客接受服务的期间来到的顾客数.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n, & X_n > 0 \\ Y_n, & X_n = 0 \end{cases}$$

$Y_n$分布不依赖于 $n$，为

$$P\{Y_n = k\} = P_k,\ k = 0, 1, \cdots,\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1,$$

并且 $Y_n$ 是相互独立的. 则此时 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一 Markov 链。其转移概率阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & P_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

- $n$ 步转移概率：

$$P_{ij}^{n} = \mathrm{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right), \quad \forall\, i, j$$

- $n$-步转移概率矩阵：

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \left(P_{ij}^{n}\right)_{S\times S}$$

- Chapman-Kolmogorov 方程： 对 $\forall\, m, n \geq 0$,

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}, \quad \forall\, i, j,$$

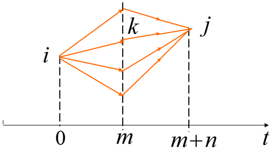
即 $\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(m)}\boldsymbol{P}^{(n)}$, 其中约定 $P_{ik}^{0} = \delta_{ik}$. 因此,

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P}^{n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

**证明：**

由齐次马氏链的定义，令

$$P_{ij}^{m+n} = \mathrm{P}\left[X_{n+m} = j | X_0 = i\right]$$




利用全概率公式，对第$m$步取条件

$$\begin{aligned} P_{ij}^{m+n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left[X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i\right] \mathrm{P}\left[X_m = k | X_0 = i\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left[X_{m+n} = j | X_m = k\right] \mathrm{P}\left[X_m = k | X_0 = i\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{kj}^{n} P_{ik}^{m} \end{aligned}$$

**性质：** 一个马尔可夫链的特性完全由它的一步转移概率矩阵及其初始分布向量决定. 且

$$\pi(n+1)=\pi(n)\boldsymbol{P}, \quad \pi(n)=\pi(0)\boldsymbol{P}^n$$

**证明：** 记

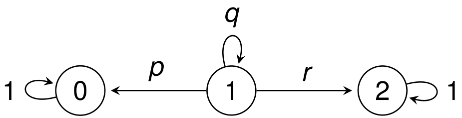
$$\pi_i(n)=P(X_n=i), n\geq 0.$$

则$(\pi_1(0),\pi_2(0),\cdots,\pi_i(0),\cdots)$为马尔科夫链的初始分布向量. 事实上：

$$\begin{aligned}
& P(X_0=i_0,X_1=i,\cdots,X_n=i_n) \\
= \quad & P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)P(X_2=i_2|X_0=i_0,X_1=i_1)\cdots\times \\
& \quad P(X_n=i_n|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}) \\
= \quad & P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)P(X_2=i_2|X_1=i_1)\cdots\times \\
& \quad P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}) \\
= \quad & \pi_{i_0}(0)P_{i_0i_1}P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}$$

# 例子

- 考虑一个三状态的Markov链$\{X_n\}$，其转移图和转移概率矩阵为：




$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中$p,q,r>0, p+q+r=1$. 这一Markov链从状态1出发，一旦进入状态0或2就被吸收了. 求:

1) 过程从状态1出发被状态0吸收的概率

2) 需要多长时间过程会进入吸收状态

**解**：令

$$T=\min\{n\geq 0 | X_n = 0 \text{ or } 2\}$$

$$u=P\{X_T=0|X_0=1\}$$
$$v=E\{T|X_0=1\}$$

## 例子

而如果 $X_1 = 2$ 也有 $T = 1$ 但 $X_T = 2$；只有当 $X_1 = 1$ 时过程才回到 $X_0$ 所处的状态 1 并重新开始转移。因此由全概率公式我们有

$$\begin{aligned}
u &= P\{X_T = 0 | X_0 = 1\} \\
&= \sum_{k=0}^{2} P\{X_T = 0 | X_0 = 1, X_1 = k\} P\{X_1 = k | X_0 = 1\} \\
&= \sum_{k=0}^{2} P\{X_T = 0 | X_1 = k\} P\{X_1 = k | X_0 = 1\} \\
&= 1 \cdot p + u \cdot q + 0 \cdot r = p + qu
\end{aligned}$$

于是解出 $u = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p+r}$。

# 例子

类似地可以建立关于 $v$ 的方程，求出最终被吸收的平均时间：

$$
\begin{aligned}
v &= E\{T|X_0 = 1\} \\
&= \sum_{k=0}^{2} E\{T|X_0 = 1, X_1 = k\} P\{X_1 = k|X_0 = 1\} \\
&= \sum_{k=0}^{2} E\{T|X_1 = k\} P\{X_1 = k|X_0 = 1\} \\
&= 1 \cdot p + (1 + v) \cdot q + 1 \cdot r \\
&= 1 + qv,
\end{aligned}
$$

解出 $v = \dfrac{1}{1-q}$。可以从解中看到过程从状态 1 转回状态 1 的概率 $q$ 越大就越难进入吸收状态，而且平均时间拉长。这是符合常识的。

# $n$时刻处于状态$j$的概率

**Lemma**

$\mu_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i)$, 则$\mu^{(m+n)} = \mu^{(m)}\mathbf{P}_n$, *and hence* $\mu^{(n)} = \mu^{(0)}\mathbf{P}^n$

证明:

$$\begin{aligned}\mu_j^{(m+n)} &= \mathbb{P}(X_{m+n} = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i)\,\mathbb{P}(X_m = i) \\ &= \sum_i \mu_i^{(m)} P_{ij}(n) = \left(\boldsymbol{\mu}^{(m)}\mathbf{P}_n\right)_j\end{aligned}$$

某种鲜奶A改变了广告方式，经调查发现购买A种鲜奶及另外三种鲜奶B、C、D的顾客每两个月的平均转换率为：（假设市场上只有这4种鲜奶）

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{A} \rightarrow & \mathbf{A}(95\%) & \mathbf{B}(2\%) & \mathbf{C}(2\%) & \mathbf{D}(1\%) \\ \mathbf{B} \rightarrow & \mathbf{A}(30\%) & \mathbf{B}(60\%) & \mathbf{C}(6\%) & \mathbf{D}(4\%) \\ \mathbf{C} \rightarrow & \mathbf{A}(20\%) & \mathbf{B}(10\%) & \mathbf{C}(7\%) & \mathbf{D}(0\%) \\ \mathbf{D} \rightarrow & \mathbf{A}(20\%) & \mathbf{B}(20\%) & \mathbf{C}(10\%) & \mathbf{D}(50\%) \end{array} \tag{1}$$

假设目前购买A、B、C、D 4种鲜奶的顾客的分布为（25%，30%，35%，10%），求半年后鲜奶A、B、C、D的市场份额。

一步转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04 \\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \end{pmatrix}$$

初始分布

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (0.25, 0.30, 0.35, 0.10)$$

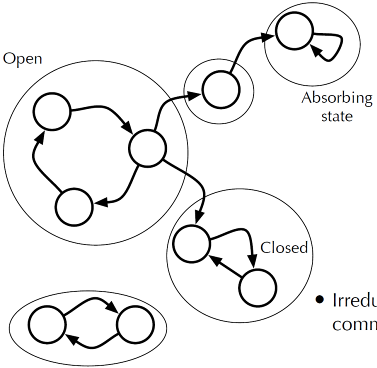
则

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.8894 & 0.0458 & 0.0466 & 0.01820 \\ 0.60175 & 0.2559 & 0.0988 & 0.04355 \\ 0.4834 & 0.1388 & 0.36584 & 0.01196 \\ 0.5009 & 0.2134 & 0.14264 & 0.14306 \end{pmatrix}$$

半年后A的市场占有

$$v = (0.25, 0.30, 0.35, 0.10) \begin{pmatrix} 0.8894 \\ 0.60175 \\ 0.4834 \\ 0.5009 \end{pmatrix} \approx 0.624$$

## Communicating Classes




- Irreducible: One communicating class.

- 定义 3.2.1

(1) 可达(accessible) $i \to j$ (状态 $j$ 可由状态 $i$ 到达)，若存在 $n \geq 0$, 使得 $P_{ij}^{n} > 0$.

(2) 互达(communicate) $i \longleftrightarrow j$ （状态 $i,j$ 互达），若 $i \to j$, $j \to i$.

- 性质 3.2.1

$$i \to j,\ j \to k \implies i \to k.$$

- 等价关系： $\longleftrightarrow$ 是一个等价关系：

(1) Reflexivity: $i \longleftrightarrow i$;

(2) Symmetry： $i \longleftrightarrow j \implies j \longleftrightarrow i$;

(3) Transitivity： $i \longleftrightarrow j, j \longleftrightarrow k \implies i \longleftrightarrow k$.

---

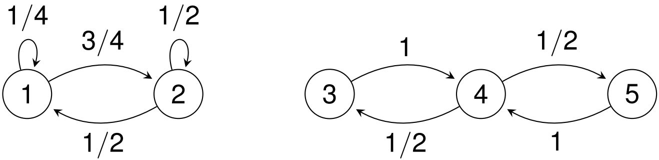
※ 状态空间 $S$ 可分为有限或无限可列个互不相交的子类，每一子类的状态互达，形如

$$C(j) = \{k:\ k \longleftrightarrow j, k \in S\}.$$

- 定义 3.2.2
  - MC 称为不可约的 (irreducible), 若 $S$ 只能分解为一个类.
  - 一个类 $C$ 称为闭的，若对 $\forall\, j \in C, \forall\, k \notin C$, 则 $P_{jk}^{n} = 0, \forall\, n \geq 0$; 即一个 MC 一旦进入子类 $C$ 就不再出来.

**例:** 若 Markov 链有转移概率矩阵$\{1,2\}$ 和 $\{3,4,5\}$ 是状态在互达意义下的两个等价类。这个链可约

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

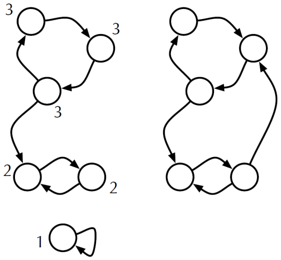


**定义:** 状态 $i$ 的周期为 $d$: $d \geq 1$ 且 $d$ 是所有满足 $P_{ii}^n > 0$ 的 $n$ 的最大公约数. $d = d(i) = G.C.D\left\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$

记号: 周期为 1 的状态称为非周期的.

若 $P_{ii}^{(n)} = 0, \forall\, n > 0$, 则约定 $d(i) = +\infty$.

若$n$不能被周期$d(i)$整除, 则必有$p_{ii}^{(n)} = 0$.



**例：** Markov 链有状态 $0,1,2,3$ 和转移概率阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

试求状态 0 的周期。参看图 3.2

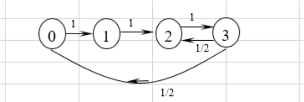



图3.2

**解** 不难直接算出 $P_{00}=0, P_{00}^{(2)}=P_{00}^{(3)}=P_{00}^{(5)}=P_{00}^{(2n+1)}=0$, $P_{00}^{(4)}=\frac{1}{2}, P_{00}^{(6)}=\frac{1}{4}, P_{00}^{(8)}=\frac{3}{8}$，而 $\{4,6,8,\cdots\}$ 的最大公约数为 2。所以 $d(0)=2$。

- **命题 3.2** (周期是类性) 若 $i \longleftrightarrow j$, 则 $d(i) = d(j)$.

**证明:** 由 $i \leftrightarrow j$ 知存在 $m, n$ 使 $P_{ij}^{(m)} > 0$ 和 $P_{ji}^{(n)} > 0$。于是有

$$P_{jj}^{(n+m)} \geq P_{ji}^{(n)} P_{ij}^{(m)} > 0, P_{ii}^{(m+n)} \geq P_{ij}^{(m)} P_{ji}^{(n)} > 0,$$

因此$m+n$同时能被$d_i$及$d_j$整除. 于是对任意的 $s$ 满足 $P_{ii}^{(s)} > 0$, 有

$$P_{jj}^{(n+s+m)} \geq P_{ji}^{(n)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(m)} > 0$$

因为不等式最左边所表示的从状态 $j$ 出发经过 $n+s+m$ 步转移后又回到 $j$ 的概率, 它当然要大于一个加了更多限制的子事件的概率。这个子事件是从 $j$ 出发经过 $n$ 步转移到 $i$, 再经过 $s$ 步返回 $i$, 又再从 $i$ 出发经过 $m$ 步到达 $j$。它的效果也是转移 $n+s+m$ 步回到 $j$。
由 $d(j)$ 的定义它将同时整除 $n+m$ 及 $n+s+m$, 所以 $d(j)$ 必整除 $s$, 而 $d(i)$ 是所有使 $P_{ii}^{(s)} > 0$ 的 $s$ 的最大公约数, 所以 $d(j)$ 整除 $d(i)$。同样可证 $d(i)$ 整除 $d(j)$, 所以有 $d(i) = d(j)$。

- 考虑 MC $\{X_n, n \geq 0\}$, 定义首达时

$$T_{jk} = \min\{n: \ X_n = k | X_0 = j\}.$$

$$\{T_{jk} = n\} = \{ \ X_n = k, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_1 \neq k | X_0 = j\}.$$

若右边为空集，则令$T_{jk} = +\infty$.

- $T_{jk}$表示从$j$出发首次达到$k$的时间。
- 定义首达概率

$$f_{jk}^0 = 0, \quad \forall\, j, k;$$
$$f_{jk}^n = \mathrm{P}\left(X_n = k, \ X_\nu \neq k, \nu = 1, \ldots, n-1 \,|\, X_0 = j\right), \quad n \geq 1.$$

- $f_{jk}$ 表示给定过程初始状态为 $j$, 最终能够访问状态$k$ 的概率;

$$f_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}^n = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{T_{jk} = n\right\}$$
$$= P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{T_{jk} = n\right\}\right) = \mathbf{P}\left\{T_{jk} < \infty\right\} \leq 1$$

- 性质

$$P_{jk}^{n} = \sum_{m=1}^{n} f_{jk}^{m} P_{kk}^{n-m} \geq f_{jk}^{n}, \quad \forall j, k.$$

- 常返和瞬过定义：

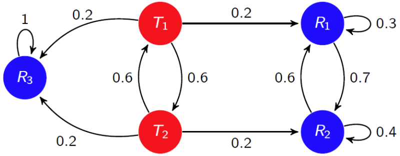
---

若$f_{ii} = 1$, 则称$i$ 为常返状态(recurrent),
若$f_{ii} < 1$, 则称$i$ 为非常返状态(transient)（或瞬时状态或称滑过的或瞬过的)

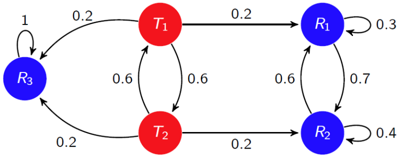
---

※
(1) 有限状态 MC 其所有状态不可能都是滑过的，必有常返态.
(2) $f_{jk} > 0 \implies j \to k$.

**例子：** 状态转移图如下图




- $T_1$ 是瞬过的, $f_{T_1,T_1} = (0.6)^2 = 0.36$
- $T_2$ 也是瞬过的, $f_{T_2,T_2} = (0.6)^2 = 0.36$




- $R_3$是常返的，因为它是吸收态，$\mathrm{P}(X_1 = R_3 | X_0 = R_3) = 1$.
- $R_1$是常返的$\mathrm{P}(X_1 = R_1 | X_0 = R_1) = 0.3$

$\mathrm{P}(X_2 = R_1, X_1 \neq R_1 | X_0 = R_1) = (0.7)(0.6)$
$\mathrm{P}(X_3 = R_1, X_2 \neq R_1, X_1 \neq R_1 | X_0 = R_1) = (0.7)(0.4)(0.6)$
$\vdots$
$\mathrm{P}(X_n = R_1, X_{n-1} \neq R_1, \ldots, X_1 \neq R_1 | X_0 = R_1) = (0.7)(0.4)^{n-2}(0.6)$

$$\begin{aligned} f_{R_1,R_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X_n = R_1, X_{n-1} \neq R_1, \ldots, X_1 \neq R_1 | X_0 = R_1) \\ &= 0.3 + 0.7\left(\sum_{n=2}^{\infty} 0.4^{n-2}\right)0.6 = 0.3 + 0.7\left(\frac{1}{1-0.4}\right)0.6 = 1 \end{aligned}$$

关于$p_{ij}^{(n)}$重要关系式

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)}, \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$

其中$f_{ij}^{(0)} = 0$, $p_{jj}^{(0)} = 1$, $p_{ij}^{(0)} = 0$, $i \neq j$ 和$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. 设$P_{ij}(z)$和$F_{ij}(z)$ 分别表示序列$\{p_{ij}^{(n)}\}$ 和 $\{f_{ij}^{(n)}\}$ 的生成函数。

$$\begin{aligned} P_{ij}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n = p_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} z^n \\ &= p_{ij}^{(0)} + \sum_{r=1}^{\infty} f_{ij}^{(r)} z^r \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} z^k = p_{ij}^{(0)} + F_{ij}(z) P_{jj}(z), \end{aligned}$$

其中

$$F_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n.$$

显然

$$f_{ij} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = F_{ij}(1),$$

对于$i = j$, 我们有

$$P_{ii}(z) = 1 + F_{ii}(z)P_{ii}(z) \tag{3}$$

或

$$P_{ii}(z) = \frac{1}{1 - F_{ii}(z)}.$$

利用微积分中的Abel定理, 令$z \to 1^-$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}. \tag{4}$$

**定理：** 状态 $i$ 常返的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty \ .$$

当然与此等价地有，状态 $i$ 是瞬过的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty \ .$$

**证明：** 记$N_i$表示从$i$出发返回$i$的次数

$$N_i := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{X_n = i | X_0 = i\}$$

与$P_{ii}^{n}$的关系

$$\mathbb{E}[N_i] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}\{X_n = i | X_0 = i\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n}$$

由$N_i$定义知

$$\mathrm{P}(N_i = n) = f_{ii}^n (1 - f_{ii})$$

$\Rightarrow$ $N_i + 1$ 是服从参数为$1 - f_{ii}$的几何分布.

$$\mathbb{E}[N_i] + 1 = \frac{1}{1 - f_{ii}} \Rightarrow \mathbb{E}[N_i] = \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}}$$

所以我们有

$$f_{ii} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty \ .$$

$$f_{ii} < 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty \ .$$

**定理**：状态 $j$ 是瞬过的，则对所有的$i$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty \quad .$$

**证明**：利用式子(2), $j$为非常返态，从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{jj}^{(m)} \sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(r)} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} p_{jj}^{(m)} < \infty$$

- **命题 3.2.4**

(1) 设 $i$ 为常返态，$i \longleftrightarrow j$, 则 $j$ 为常返态.

(2) 设 $i$ 为非常返态，$i \longleftrightarrow j$, 则 $j$ 为非常返态.

证： 由 $i \longleftrightarrow j$ 知存在 $m, n$ 使得 $P_{ij}^m > 0$, $P_{ji}^n > 0$, 于是

$$P_{jj}^{n+k+m} \geq P_{ji}^n P_{ii}^k P_{ij}^m, \quad \forall k.$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{jj}^k \geq \sum_{k=1}^{\infty} P_{jj}^{n+k+m} \geq P_{ji}^n P_{ij}^m \sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^k = \infty.$$

---

※ 常返性和非常返性皆为类性.

- 命题 3.2.5 设 $i \neq j$, $i \longrightarrow j$ 且 $f_{ii} = 1$, 则 $j \longleftrightarrow i$, $f_{ji} = 1$.

**证明:** 引入记号

$$
\begin{aligned}
{}_jP_{ik}^{(n)} &= \mathrm{P}\{X(m) \neq j, 1 \leq m - 1, X(n) = k | X(0) = i\} \\
{}_jf_{ik}^{(n)} &= \mathrm{P}\ \{X(m) \notin \{j, k\}, 1 \leq m \leq n - 1, X(n) = k | X(0) = i\}
\end{aligned}
$$

因 $i \to j$, 所以$f_{ij} > 0$.

$$
f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( {}_if_{ij}^{(n)} + \sum_{r=1}^{n-1} {}_jP_{ii}^{(r)} \cdot {}_if_{ij}^{(n-r)} \right) > 0
$$

可知必存在$N$, 使得${}_if_{ij}^{(N)} > 0$。又由

$$
0 = 1 - f_{ii} = \sum_{k \neq i} {}_if_{ik}^{(N)} (1 - f_{ki}) \geq {}_if_{ij}^{(N)} (1 - f_{ji})
$$

于是$1 - f_{ji} = 0$, 即$f_{ji} = 1$, 可见$j \to i$, 故$i \Leftrightarrow j$.

常返态出发只能到达常返态

- 命题 3.2.6

(1) 一个常返类一定是闭的;

(2) 一个闭的非常返类一定含有无穷多个状态.

- 命题 3.2.7 设 $C$ 为一个闭类, $k \in C$, 则

$$C \text{ 为常返类} \iff f_{jk} = 1,\ \forall\, j \in C, j \neq k.$$

证明: $(\Longrightarrow)$ $\surd$
$(\Longleftarrow)$

$$f_{kk} = P_{kk} + \sum_{j \in C, j \neq k} P_{kj} f_{jk} = \sum_{j \in C} P_{kj} = \sum_{j \in S} P_{kj} = 1. \quad \blacksquare$$

※ 一个类只能为如下三者之一:

闭的常返类;　闭的非常返类;　非闭的非常返类.

- 【例 3.2 (A)】 简单随机游动过程 $\{S_n, n \geq 0\}$, 其中 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ iid,

$$\mathrm{P}(X_1 = 1) = p, \quad \mathrm{P}(X_1 = -1) = 1 - p = q,$$

则 $\{S_n\}$ 为不可约 MC, $d(0) = 2$, 转移概率 $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, \forall\, i$. 由Stirling公式, $n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$, 易知

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{2\pi n}},$$

所以,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{2\pi n}} < \infty \Longleftrightarrow p \neq \frac{1}{2}.$$

因此，当 $p = 1/2$ 时，0 为常返态. ∎

※ 守株待兔 缘木求鱼

- 记号: 对常返态定义

$$T_{jj} = \text{过程从状态 } j \text{ 出发首次返回状态 } j \text{ 所需要的转移步数},$$

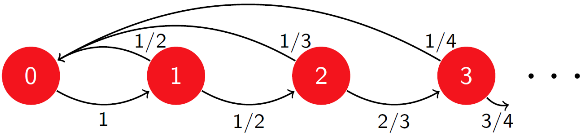
$$\mu_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{n}$$

- 定义 3.3.1

  设 $j$ 为常返态.

  - 称 $j$ 为正常返的, 若 $\mu_{jj} < \infty$;
  - 称 $j$ 为零常返的, 若 $\mu_{jj} = \infty$;
  - 称 $j$ 为遍历的, 若 $j$ 为正常返且非周期.

例：考虑如下的MC




解：因为是不可约的MC，只考虑0状态

P[ return time $=2] = \frac{1}{2}$ P[ return time $=3] = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

P[ return time $=4] = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{3\times 4}$ $\cdots$

P[ return time $=n] = \frac{1}{(n-1)\times n}$

- 0状态是零常返的，因为

$$\sum_{m=2}^{n} \mathrm{P}[\text{ return time } = m] = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)\times m} = \frac{n-1}{n} \to 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\mathrm{P}[\text{ return time } = n] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)\times n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} = \infty$$

- $p_{ij}^n$ 与 $f_{ij}^n$ 有如下关系, $\forall i,j \in S, n \geq 1$
  1. $p_{ij}^n = \sum_{k=1}^n f_{ij}^k p_{jj}^{n-k}$
  2. $f_{ij}^n = \begin{cases} \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{n-1}, & n > 1 \\ p_{ij}, & n = 1 \end{cases}$
  3. $i \to j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$
  4. $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$ 且 $f_{ji} > 0$
- 常返, 正常返, 零常返, 瞬过, 周期均为等价类性质
- $i \to j$, $i$是常返的, 则 $f_{ji} = 1$, 则$j$也是常返的
- 所有常返态组成一个闭集.
- MC的状态空间$S$可分解为为

$$S = T \cup C = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_h, \cdots$基本常返闭集, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $T$为所有非常返状态组成的集合（不一定是闭集）

- 所有非常返态组成的集合不可能是闭集.
- 没有零常返状态.
- 不可约MC只有正常返状态.
- MC的状态空间$S$可分解为为

$$S = T \cup C = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_h, \cdots$基本常返闭集, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $T$为所有非常返状态组成的集合（一定不是闭集）, 即不管系统自什么状态出发，迟早要进入常返闭集。

常返态表明，过程从常返状态出发能无穷次返回该状态，而滑过状态最多只能有限次地返回，因此，随着时间的发展，滑过状态将逐渐消失。所以，在对Markov链作稳态设计时，滑过状态是不予考虑的，这也说明了区分常返态与滑过状态是十分重要的。

那为什么要区分正常返和零常返？这是因为零常返表示返回这个状态所需的平均时间为$\infty$，随着时间的发展，长时间后过程处于该状态的概率趋于0.

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^7 := \begin{pmatrix} 0.6031 & 0.3969 \\ 0.5953 & 0.4047 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^{30} := \begin{pmatrix} 0.6000 & 0.4000 \\ 0.6000 & 0.4000 \end{pmatrix}$$

在实际应用中，人们常常关心两个问题：

1. 当$n \to \infty$时，$P(X_n = i) = \pi_i(n)$ 的极限是否存在？
2. 当什么条件下，一个马尔可夫链是一个平稳序列？

故对（1）的研究可转化为对

$$\pi_i(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0) P_{ij}^n$$

的渐近性质的研究。即

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

是否存在？若存在，其极限是否与状态$i$ 有关？Markov链理论中，有关这一问题的定理统称为遍历定理。

问题(2) 的实际上是讨论马尔可夫链平稳分布是否存在的问题。这两个问题之间有密切联系。

考虑两个状态的MC, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 < p, q < 1.$$

特征根为1 和$1-p-q$. 将$P$ 正交化

$$D = Q^{-1}PQ,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} q/(p+q) & p/(p+q) \\ -1/(p+q) & 1/(p+q) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

于是

$$P^n = \left(QDQ^{-1}\right)^n = QD^nQ^{-1}$$
$$= Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix}Q^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} (q+p(1-p-q)^n)/(p+q) & (p-p(1-p-q)^n)/(p+q) \\ (q-q(1-p-q)^n)/(p+q) & (p+q(1-p-q)^n)/(p+q) \end{pmatrix}$$

因为$|1-p-q|<1$,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} q/(p+q) & p/(p+q) \\ q/(p+q) & p/(p+q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$$

表示过程在经过一段长时间后会以概率$q/(p+q)$处于状态0, 以概率$p/(p+q)$处于状态1.

# 极限定理–两状态的MC

一方面

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(1)} &= 1 - p \\
f_{00}^{(n)} &= pq(1-q)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots
\end{aligned}
$$

于是

$$\mu_0 = ET_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \frac{p+q}{q}$$

类似有

$$\mu_1 = ET_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \frac{p+q}{p}$$

是巧合吗？

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\mu_0}, \quad \pi_1 = \frac{1}{\mu_1}$$

# §3.3 极限性质

$$\text{状态}\,i\begin{cases}\text{瞬过}\\ \text{常返}\begin{cases}\text{零常返}\\ \text{正常返}\begin{cases}\text{正常返周期}\\ \text{正常返周期}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

正常返非周期的状态也称为遍历的.

Markov链的基本极限定理

1. 若状态$i$是瞬过的或者是零常返的，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$$

2. ) 若状态$i$是周期为d的常返状态，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

3. 若状态$i$是非周期的正常返状态，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$$

状态性质判别法：

$$i\text{非常返} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty \left(\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{n} = 0\right)$$

$$i\text{零常返} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty\text{且} \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{n} = 0$$

$$i\text{正常返} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty\text{且} \overline{\lim_{n\to\infty}} p_{ii}^{n} > 0$$

$$i\text{ 遍 历} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty\text{且} \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{n} = \frac{1}{\mu_i} > 0$$

- 当$j$是正常返状态时情况较复杂，此时

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

的极限不一定存在，即使存在也可能与$i$有关。这时有一下结论:

**定理**: $j$是正常返状态，周期为$d$, 则对任意的$i$及$0 \le r \le d-1$有

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd+r} = f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$$

其中 $f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{md+r}$.

**推论**: 若$j$是遍历状态（正常返的并且是非周期的），则对任意的状态$i \in S$有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

- 定理 3.3.1 对一个不可约的MC

(i) 若$j$是非常返态或零常返态，则对任意的$i$ 有$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0$

(ii) 若 $j$ 为非周期的正常返的，则 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \dfrac{1}{\mu_{jj}}$; $f_{ij} = 1$

(iii) 若 $j$ 的周期为 $d$，则 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd} = \dfrac{d}{\mu_{jj}}$.

1. 有限状态的马尔可夫链没有零常返态
2. 有限状态的马尔可夫链的状态不可能全为非常返状态。
3. 不可约的有限状态马尔可夫链的状态全为正常返的。
4. 若马尔可夫链有一个零常返态，则必有无限个零常返态。

- 命题 3.3.2 正常返和零常返性为类性.

---

证明: 设 $i \longleftrightarrow j$ 且 $i$ 为正常返, 即

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{nd} = \frac{d}{\mu_{ii}} < \infty, \qquad (*.5)$$

下证 $\mu_{jj} < \infty$.

由 $i \longleftrightarrow j$ 知存在 $s, t \geq 0$ 使得 $P_{ij}^s > 0$, $P_{ji}^t > 0$, 且 $d(i) = d(j) = d \geq 1$. 显然,

$$P_{jj}^{t+s+\nu d} \geq P_{ji}^t P_{ii}^{\nu d} P_{ij}^s, \quad \forall \nu \geq 1.$$

注意到 $d|(s+t)$, 于是由 $(*.5)$ 知

$$\frac{d}{\mu_{jj}} = \lim_{\nu\to\infty} P_{jj}^{s+t+\nu d} \geq P_{ij}^s P_{ji}^t \cdot \frac{d}{\mu_{ii}} > 0. \quad \blacksquare$$

▶ 定义 3.3.2 一个 pmf $\{\pi_i, i \geq 0\}$ 称为 MC $\{X_n, n \geq 0\}$ 的平稳分布，若

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad \forall\, j. \tag{*.6}$$

※ 设 $X_0$ 的分布为平稳分布 $\{\pi_i, i \geq 0\}$, 则

- $X_n$ 的分布也为平稳分布，于是

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}^n, \quad \forall\, j. \tag{*.7}$$

- $(X_h, X_{h+1} \ldots, X_{h+n})$ 的分布与 $h$ 无关. 此时，$\{X_n, n \geq 0\}$ 为平稳过程.

- 定理 3.3.3 一个不可约非周期的 MC 必属于下述二者之一：
  (i) 所有状态滑过或零常返，$P_{ij}^n \to 0, \forall\, i, j$, MC 不存在平稳分布；
  (ii) 所有状态正常返，
  $$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n > 0, \quad \forall\, i, j.$$
  此时，$\{\pi_j, j \geq 0\}$ 是唯一的平稳分布.

---

证：(1) 假设存在平稳分布 $\{\pi_i^*, i \geq 0\}$, 则
$$\pi_j^* = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^* P_{ij}^n, \quad \forall\, j.$$

于是，
$$\pi_j^* \leq \sum_{i=0}^{m} \pi_i^* P_{ij}^n + \sum_{k=m+1}^{\infty} \pi_k^* \to 0 \quad (\text{先令 } n \to \infty \text{ 再令 } m \to \infty).$$

(续)

(ii) 由 $1=\sum_j P_{ij}^n$ 知 $1 \ge \sum_j \pi_j$. 再由

$$P_{ij}^{n+1}=\sum_k P_{ik}^n P_{kj} \stackrel{n\to\infty}{\Longrightarrow} \pi_j \ge \sum_k \pi_k P_{kj}, \quad \forall j.$$

上不等式中等和严格成立[反证，若对某个 $j$ 不成立, 则

$$\sum_j \pi_j > \sum_j \sum_k \pi_k P_{kj} = \sum_k \sum_j \pi_k P_{kj} = \sum_k \pi_k,$$

矛盾], 即

$$\pi_j = \sum_k \pi_k P_{kj}, \quad \forall j. \tag{$*$.8}$$

令 $\pi_j^* = \pi_j / \sum_k \pi_k$, 则 $\{\pi_j^*\}$ 为一个平稳分布.

(续)

(ii) 唯一性. 设 $\{\pi_j^*\}$ 为另一个平稳分布, 下证 $\pi_i = \pi^*$, $\forall\, i$. 事实上,

$$\pi_j^* = \sum_k \pi_k^* P_{kj}^n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \pi_j^* \geq \sum_k \pi_k^* \pi_j = \pi_j, \quad \forall j.$$

另一方面,

$$\pi_j^* \leq \sum_{k=0}^{m} \pi_k^* P_{kj}^n + \sum_{k=m+1}^{\infty} \pi_k^* \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \pi_j^* \leq \sum_{k=0}^{m} \pi_k^* \pi_j + \sum_{k=m+1}^{\infty} \pi_k^*$$

$$\overset{m\to\infty}{\Longrightarrow} \pi_j^* \leq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k^* \pi_j = \pi_j, \quad \forall\, j.$$

于是, $\pi_j^* = \pi_j$, $\forall j$. ∎

- 注 对于不可约、正常返 MC, 存在唯一的 pmf $\{\pi_i\}$ 满足

$$\pi_j = \sum_k \pi_k P_{kj}, \quad \forall j. \tag{$*$.9}$$

其中

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{前 } n \text{ 步转移访问状态 } j \text{ 的次数}}{n} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

---

证：记 $I_n(i) = 1_{\{X_n=i\}}$, 则

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n I_k(j)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \sum_i I_{k-1}(i) I_k(j)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sum_i \mathbb{E}[I_{k-1}(i)] P_{ij} \geq \sum_i \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[I_{k-1}(i)]\right) P_{ij} \\
&= \sum_i \pi_i P_{ij}.
\end{aligned}$$

(再同前定理 3.3.3(ii) 证明等号成立)

(续)

- 对于不可约、正常返且周期为 $d$ 的 MC,

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd} = \frac{d}{\mu_j} = d\pi_j, \quad \forall j.$$

▶若不可约马尔可夫链是遍历的（即所有状态相通且均为周期为1的正常返态)则极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, j \in S$$

称为马尔可夫链的极限分布。

**定理：** 不可约遍历的马尔可夫链有唯一的平稳分布

$$\left\{\pi_j = \frac{1}{\mu_j}, j \in S\right\}$$

此时唯一的平稳分布就是极限分布。即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j = \frac{1}{\mu_j}, j \in S$$

**注：** 若状态都是滑过的（非常返）或都是零常返的，则平稳分布不存在。

附注：设MC的状态空间$S$可分解为为

$$S = T \cup C_0 \cup H = T \cup C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

其中$C_0$为零常返闭集，$C_1, C_2, \cdots, C_h, \cdots$基本正常返闭集，$C_i \cap C_j = \emptyset$，$T$为所有非常返状态组成的集合（不一定是闭集）．记

$$Q = T \cup C_0, \qquad H = \cup_{j\in\Gamma} C_j$$

如果$\{\pi_j \geq 0, j \in S\}, \sum \pi_j < \infty$，则$\{\pi_j \geq 0, j \in S\}$ 为一齐次MC的平稳分布的充分必要条件是存在非负数列$\{\lambda_j, j \in \Gamma\}$使得

1. $\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma = 1$
2. $\pi_i = 0, j \in Q$
3. $\pi_j = \frac{\lambda_\gamma}{\mu_{jj}}, \quad j \in C_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma$

分支过程是由F.Galton于1874年在研究家族姓氏的消失时提出的. 这种模型是一类特殊的Markov链, 它在生物遗传原子核的连锁反应中都有重要应用.
对于一个家族, 假设在第0代(常称为祖先)有一个个体, 他所繁衍的第一代子女数为一随机变量, 可能取值为0, 1, 2, . . . , 而每个第一代个体又再衍生子孙. 整个群体可能兴旺,也可能消亡.

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_n(i)$$

假设

$$P(Z_1 = k) = p_k, \quad E(Z_1) = \mu, \quad \mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2$$

公式

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) \cdot E(Z_1)$$
$$\mathrm{Var}(X_{n+1}) = E(X_n) \cdot \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(X_n) \cdot (EZ_1)^2$$

$$EX_{n+1} = EX_n \cdot \mu = EX_{n-1} \cdot \mu^2 = \cdots = EX_1 \cdot \mu^n = \mu^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_{n+1}) &= E(X_n) \cdot \operatorname{Var}(Z_1) + \operatorname{Var}(X_n) \cdot (EZ_1)^2 \\
&= \mu^n \cdot \sigma^2 + \operatorname{Var}(X_n) \cdot \mu^2 \\
&= \sigma^2 \mu^n \left(1 + \mu + \mu^2 + \cdots + \mu^n\right) \\
&= \begin{cases} \sigma^2 \mu^n \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}, & \mu \neq 1 \\ (n+1)\sigma^2, & \mu = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

# § 分支过程

考虑一个群体的衍化, 记 $X_n$ 为第 $n$ 代群体的大小, $n \geq 0$. 每个个体在其生命结束时都会独立地产生后代, 产生的后代个体数 $Z$ 的 pmf 为 $\{P_i, i \geq 0\}$. MC $\{X_n, n \geq 0\}$ 称为分支过程.

假设 $X_0 = 1$, 记 $\{P_i\}$ 对应的均值为 $\mu = \mathbb{E}Z$, 则

$$\mathbb{E}[X_n] = \mu \mathbb{E}[X_{n-1}] = \mu^n.$$

定义

$$\pi_0 = \mathrm{P}(\text{群体最终灭绝}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n = 0).$$

对 $X_1$ 取条件得

$$\pi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(\text{群体最终灭绝} | X_1 = j) \cdot P_j$$

$\Longrightarrow$

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \, \pi_0^j.$$

- 问题 寻找 $\pi_0 = 1$ 的充分必要条件
- 定理 3.5.1 设 $P_0 > 0$, $P_0 + P_1 < 1$, 则

(i) $\pi_0$ 是满足方程

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \, \pi_0^j \qquad (*.10)$$

的最小正解.

(ii) $\pi_0 = 1 \Longleftrightarrow \mu \le 1$.

---

证: (1) 首先, $\pi_0 > 0$ 显然, 因为 $\pi_0 \ge P_0 > 0$. 设 $\pi > 0$ 是 $(*.10)$ 的一个解, 下仅证

$$\pi \ge \mathrm{P}\,(X_n = 0), \quad \forall\, n \ge 1.$$

利用

$$\mathrm{P}\,(X_{n+1} = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}\,(X_{n+1} = 0 | X_1 = j) \cdot P_j = \sum_{j=0}^{\infty} P_j [\mathrm{P}\,(X_n = 0)]^j.$$

(续) (ii) 定义函数

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k s^k, \quad s \in (0, 1].$$

易验证: $\phi''(s) > 0$, $\phi'(1) = \mu$, $\phi(1) = 1$, $\phi(0) = P_0$.

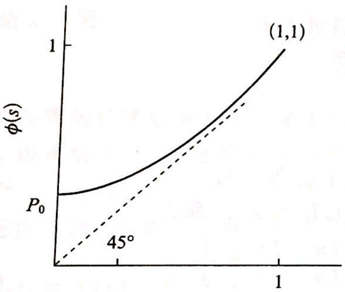



图 4.5.1

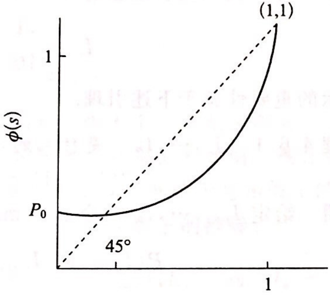



图 4.5.2

根据转移矩阵的不同结构，马氏链可以分为多个不同的类型，这里，我们只简单介绍其中常见而又较为重要的两类：正则链与吸收链.

**定义C1**. 对于马氏链，若存在一正整数$k$，使其转移矩阵M的$k$次幂$M^k > 0$（每一分量均大于0），则称此马尔链为一正则链(regular chain).

**定理C1**. 若$A$为正则链的转移矩阵，则必有：

1. $\lim_{n\to\infty} P^n = W$, 其中$W$为任一分量均大于零的随机矩阵；
2. $W$的所有行向量均相同

**定理C2** 记定理C1中$W$的行向量为$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$,

1. 对任意行和为1的随机向量$\boldsymbol{x}$, 有$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}P^n = \boldsymbol{\pi}$.
2. $\pi$是$P$的不动点向量,即$\pi P = \pi$, $P$的不动点向量是唯一的.

**定义C2.** 马氏链别称为吸收链，若其满足

- 至少存在一个吸收状态；
- 从任一状态出发，经有限步转移总可到达某一吸收状态.

▶ 具有$r$个吸收状态，$m-r$个非吸收状态的吸收链，它的$m\times m$转移矩阵$P$的标准形式为

$$P=\begin{bmatrix} I_r & \vdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R & \vdots & Q \end{bmatrix}$$

其中$I_r$为$r$ 阶单位阵，$O$为$r\times(m-r)$零阵，$R$为$(m-r)\times r$矩阵，$Q$为$(m-r)\times(m-r)$矩阵．令

$$B=(I-Q)^{-1},$$

称B为基矩阵.

**定理C3** 吸收链的基矩阵**B**中的每个元素，表示过程从一个非吸收状态出发到达每个非吸收状态的平均转移次数.

**定理C4**设$N = BC$, $B$为吸收链的基矩阵, $C = (1, 1, \ldots, 1)^T$，则$N$的每个元素表示从非吸收状态出发，到达某个吸收状态被吸收之前的平均转移次数.

**定理C5**设$F = BR = (f_{ij})$，其中$B$为吸收链的基矩阵，$R$为$T$中的子阵，则$f_{ij}$表示从非吸收状态$i$出发，被吸收状态$j$吸收的概率.

设$i$是瞬过态，则记$Y_i$为访问状态$i$的次数

$$Y_i = \sum_{n=0}^{\infty} I\left\{X_n = i\right\}$$

若初始状态$j$(也是瞬过态)

$$\begin{aligned} E\left(Y_i | X_0 = j\right) &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I\left\{X_n = i\right\} | X_0 = j\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{X_n = i | X_0 = j\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} \end{aligned}$$

因为
$$E\left(Y_i|X_0=j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ji}^{(n)}$$
换种说法，$E\left(Y_i|X_0=j\right)$ 就是矩阵
$$I+P+P^2+\dots$$
的$(j,i)$元，也就是矩阵
$$I+Q+Q^2+\cdots$$
的$(j,i)$元

$$P=\begin{bmatrix} I_r & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ R & \vdots & Q \end{bmatrix} \qquad P^n=\begin{bmatrix} I_r & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ R_n & \vdots & Q^n \end{bmatrix}$$

$$\left(I+Q+Q^2+\cdots\right)(I-Q)=I$$
$$I+Q+Q^2+\cdots=(I-Q)^{-1}=B$$

所以$B$的$(j,i)$元表示从$j$出发返回$i$的次数，$B_{ji}$. 那么第$j$行的和表示从$j$ 出发进入吸收态之前的步数。

# 例题

甲乙两队进行一场抢答竞赛，竞赛规则规定：开始时每队各记2分，抢答题开始后，如甲取胜则甲加1分而乙减1分，反之则乙加1分甲减1分(每题必需决出胜负)．规则还规定，当其中一方的得分达到4分时，竞赛结束．求：

(1) 甲队获胜的概率有多大？

(2) 竞赛从开始到结束，平均转移的次数为多少？

(3) 甲获得1、2、3分的平均次数是多少？

# 例题

设甲取胜一题的概率为$p(0<p<1)$，$p$与两队的实力有关．甲队得分有5种可能，即0，1，2，3，4．我们分别记为状态0，1，2，3，4，其中0和4是吸收状态，1，2和3是非吸收状态．过程以2作为初始状态．根据甲队赢得1分的概率为$p$，建立转移矩阵$P$：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 例题

将上式改记为标准形式

$$T = \begin{bmatrix} I_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R & \vdots & Q \end{bmatrix}$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

计算基矩阵

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -p & 0 \\ p-1 & 1 & -p \\ 0 & p-1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

记$q = 1 - p$，则

$$B = \frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{bmatrix}$$

因为2是初始状态，根据定理C3，甲队获分为1，2，3分的平均次数为

$$\frac{q}{1-2pq}, \quad \frac{1}{1-2pq}, \quad \frac{p}{1-2pq}$$

又

$$N = BC = \frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1+2p^2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

根据定理C4，以2为初始状态，在比赛结束前甲队的平均转移次数为$\frac{2}{1-2pq}$.

$$F = BR = \frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} (1-pq)p & p^3 \\ q^2 & p^2 \\ q^3 & (1-pq)p \end{bmatrix}$$

根据定理C5，甲队最后获胜的概率

$$f_{24} = \frac{p^2}{1-2pq}$$