第二章 Poisson 过程

学习目标

- ❏ 掌握 Poisson 过程定义
- ❏ 掌握 Poisson 过程有关的分布
- ❏ 了解 Poisson 过程的推广

2.1 Poisson 过程

许多偶然现象可以用 Poisson 分布来描述，大量自然界的物理过程可以用 Poisson 过程来刻画。它是随机建模的重要基石，也是学习随机过程理论的重要直观背景。最著名的例子包括盖格计数器上的粒子流，二次大战时伦敦空袭的弹着点，电话总机所接收到传呼的次数，交通流中的事故数，地震记录，细胞中染色体的交换等。这类变化过程可粗略地假定为有相同的变化类型。我们所关心的是随机事件的数目，而每一变化可用时间或空间上的一个点来表示。这类过程有如下两个性质：一是在时间或空间上的均匀性，二是未来的变化与过去的变化没有关系。我们将基于这些性质推导出 Poisson 过程的模型。

定义 2.1. (Poisson 过程的定义)

一个整数值随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下述三个条件就称作强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程：

(i) $N(0) = 0$，

(ii) $N(t)$ 是独立增量过程，

(iii) 对任何 $t > 0$，$s \geq 0$，增量 $N(s+t) - N(s)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布，即

$$\mathrm{P}(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k \exp\{-\lambda t\}}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{2.1}$$

♣

定义2.1的条件 (i) 告诉我们随机事件从时刻 0 开始计数，条件 (iii) 是过程称为 Poisson 过程的直接理由。由 Poisson 分布的性质我们马上可以求出 $EN(t) = Var[N(t)] = \lambda t$。增量 $N(s+t) - N(s)$ 代表时间区间 $(s, s+t]$ 中发生的随机事件数，由条件 (iii) 这一增量的分布与 s 无关因而增量具有平稳性。因此条件 (ii) 和 (iii) 充分刻画了模型所要求的两个性质：前后的独立性与时间上的均匀性。强度 λ 有时也称为速率，它描绘随机事件发生的频繁程度。

例 2.1 顾客依 Poisson 过程到达某商店，速率为 $\lambda = 4$人/小时。已知商店上午 $9:00$ 开门。试求到 $9:30$ 时仅到一位顾客，而到 $11:30$ 时总计已到达 5 位顾客的概率。

解 令 t 的计时单位为小时，并以 $9:00$ 为起始时刻，所求事件可表示为 $\{N(1/2) =$

$1, N(5/2)=5\}$ 。其概率为

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\{N(1/2)=1, N(5/2)=5\} \\
= \;& P\{N(1/2)=1, N(5/2)-N(1/2)=4\} \\
= \;& \frac{e^{-4\cdot\frac{1}{2}}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}{1!}\times\frac{e^{-4\cdot 2}(4\cdot 2)^4}{4!}=0.0155.
\end{aligned}
$$

稀有事件的概率常服从 Poisson 分布。这是由于当试验次数很多而每次试验成功的概率很小时，Poisson 分布可以逼近二项分布。若记 N 为试验次数，p 为成功概率而当 N 很大时 Np 趋于一个常量 λ, 则 N 次试验中的总成功次数近似地服从参数为 λ 的 Poisson 分布。这一想法很自然地可以推广到随机过程的情况。记 $[0,\infty)$ 为观察过程的时间轴，0 代表起始时刻，$N(b)-N(a)$ 代表时间区间 $(a,b]$ 上发生的事件数。我们特作如下假定:

(1) 在不相交区间中事件发生的数目相互独立，也即对任何整数 $n=1,2,\cdots$，设时刻 $t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, 增量 $N(t_1)-N(t_0), N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立。

(2) 对任何时刻 t 和正数 h，随机变量 (增量)$N(t+h)-N(t)$ 的分布只依赖于区间长度 h 而不依赖时刻 t。

(3) 存在正常数 λ, 当 $h\downarrow 0$ 时，使在长度为 h 的小区间中事件至少发生一次的概率

$$\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)\geq 1\}=\lambda h+o(h).$$

(4) 在小区间 $(t,t+h]$ 发生两个或两个以上事件的概率为 $o(h)$ (可以忽略不计)，即当 $h\downarrow 0$,

$$\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h).$$

从逼近的观点看,(1) 说明试验是独立的；(2) 说明在每个长度相同的小区间上事件发生有相同的概率 p；(3) 告诉我们成功（事件发生）概率 $p\doteq\lambda h$，而且 p 很小；(4) 是说明事件不发生的概率为 $1-\lambda h\doteq 1-p$。这正好是独立 Bernoulli 试验的模型。若观察区间为 $[0,1]$, 则 $N\doteq\dfrac{t}{h}$，所以当 $h\downarrow 0$ 时，$N\to\infty$，而 $Np\doteq\lambda t$。从而二项分布的极限是参数为 λt 的 Poisson 分布。从直观意义看，如前所述 (1) 为前后的独立性，(2) 为时间上的均匀性或齐次性，(3) 表明事件是稀有的，而 (4) 则称为相继性 (orderliness)。意思指事件是一件一件地发生的，在同一瞬间同时发生多个事件的可能性很小很小。基于这些假定我们可以证明:

定理 2.1. (Poisson 过程的等价定义)

满足假定 (1) – (4) 的随机过程 $N(t)$ 为 Poisson 过程。♡

证明 由假定 (1) 和 (2)，$N(s+t)-N(s)$ 的分布和 $N(t)$ 的分布相同。为验证过程 $N(t)$ 是 Poisson 过程，只需求出 $N(t)$ 的概率分布。记 $P_m(t)=P\{N(t)=m\}$，并记 $p(h)=P\{N(h)\geq 1\}=P_1(h)+P_2(h)+\cdots=1-P_0(h)$。$p(h)$ 是在 $(0,h]$ 上发生一个及一个以上事件的概率。由独立性

$$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)=P_0(t)(1-p(h))$$

因而，

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-P_0(t)\frac{p(h)}{h}$$

令 $h\downarrow 0$，由假设 (3) 得到微分方程 $P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$。容易看出这一方程的解是 $P_0(t)=Ce^{-\lambda t}$。由初始条件 $P_0(0)=1$ 确定 $C=1$。故有 $P_0(t)=e^{-\lambda t}$。下面再依次定出 $P_i(t), i\geq 1$。由独立增量性，

$$P_1(t+h)=P_1(t)P_0(h)+P_0(t)P_1(h) \tag{2.2}$$

由假定 (4) 可推出

$$\begin{aligned} p(h) &= \mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)\geq 1\} \\ &= P_1(h)+\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)\geq 2\} \\ &= P_1(h)+o(h) \end{aligned}$$

将 $P_0(h)=1-p(h)$ 及 $P_1(h)=p(h)+o(h)$ 代入 (2.2) 后再稍加整理有

$$P_1'(t)=-\lambda P_1(t)+\lambda P_0(t)$$

两边除以 h 并令 $h\downarrow 0$ 可得到微分方程

$$P_1'(t)=-\lambda P_1(t)+\lambda P_0(t).$$

这里所用的分析方法是仅让 t 变化很小，利用已知假定建立起有关概率的微分方程，常称为无穷小分析。类似地对 $m>1$ 有

$$P_m(t+h)=P_m(t)P_0(h)+P_{m-1}(t)P_1(h)+\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)P_i(h) \tag{2.3}$$

注意到由假定 (4)

$$\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)P_i(h)\leq\sum_{i=2}^{m}P_i(h)$$

将 (2.3) 稍加整理并令 $h\downarrow 0$，即有

$$P_m'(t)=-\lambda P_m(t)+\lambda P_{m-1}(t), \quad m=1,2,\cdots \tag{2.4}$$

在初始条件 $P_m(0)=0$，$m=1,2,\cdots$ 下容易解出（习题 5）

$$P_m(t)=\frac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

由定义 2.1 定理得证。

不直接解方程 (2.4)，也可利用 1.2.2 节所介绍的矩母函数方法来验证 $N(t)$ 与 Poisson 分布的矩母函数相同。记

$$g(u,t)=g_{N(t)}(u)=Ee^{uN(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}P_k(t)$$

为过程 $N(t)$ 的矩母函数。由方程 (2.4) 知

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(u,t)}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} P_k'(t) \\ &= -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} P_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{uk} P_{k-1}(t) \\ &= -\lambda g(u,t) + \lambda e^u g(u,t)\end{aligned}$$

所以立即有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \ln g(u,t) = \lambda(e^u - 1), \\ g(u,0) = P_0(0) = 1. \end{cases}$$

解出 $g(u,t) = e^{\lambda t(e^u-1)}$，正是 Poisson 变量当参数为 λt 时的矩母函数。

定理 2.1 的这些假定在实际问题中常常可以近似地得到满足，从而建立起 Poisson 过程的随机模型。

2.2 与 Poisson 过程相联系的若干分布

我们考虑直线上的 Poisson 过程 $N(t)$。过程的一次实现或样本路径一般是跳跃度为 1 的阶梯函数，如图 2.1 所示。这个图对理解和掌握 Poisson 过程十分有用。

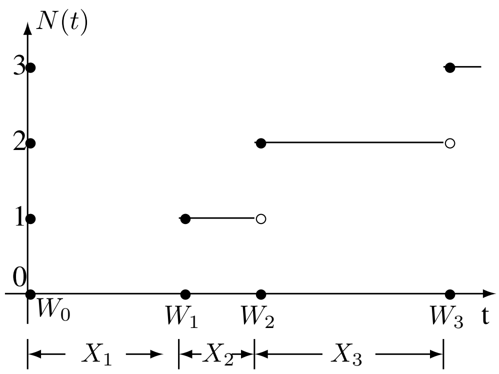

图 2.1 Poisson 过程的样本路径

图中第 $n-1$ 次与第 n 次事件间的间隔时间记作 X_n，而 $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 为第 n 次事件的到达或等待时间。我们来求 X_n 与 W_n 的分布。

命题 2.1

$X_n, n = 1, 2, \cdots$ 是均值为 $1/\lambda$ 的独立同分布的指数随机变量，W_n 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布。

证 事件 $\{X_n > t\}$ 表示第一次事件发生在时刻 t 之后。其发生当且仅当在时间区间 $(0, t]$ 中 Poisson 过程不曾有事件发生过。所以，

$$\mathrm{P}\{X_1 > t\} = \mathrm{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t},$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_2 > t \mid X_1 = s\} &= \mathrm{P}\{(s, s+t]\text{中事件不发生} \mid X_1 = s\} \\
&= \mathrm{P}\{(s, s+t]\text{中事件不发生}\}(\text{独立增量性}) \\
&= \mathrm{P}\{(0, t]\text{中事件不发生}\}(\text{平稳增量性}) \\
&= e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

这就可以得出结论: X_2 也服从以 λ 为参数的指数分布而且 X_1 与 X_2 是独立的。类似地可对其他 X_i 证明命题的结论。利用第一章习题 15 可以知道 W_n 服从 Γ 分布，参数为 n, λ。但我们宁愿在这里再给一个直接的证明。因事件 $\{N(t) \geq n\}$ 是与 $W_n \leq t$ 等价的，它们都表明第 n 次事件发生在时刻 t 之前，或者换言之到时刻 t 已经至少发生了 n 件事。于是

$$
\mathrm{P}\{W_n \leq t\}\mathrm{P}\{N(t) \geq n\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j\,!}, \tag{2.5}
$$

对 W_n 的分布函数 (2.5) 式关于 t 求导即可求出 W_n 的密度函数

$$
\begin{aligned}
f_{W_n}(t) &= -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

命题遂得证。

命题 2.1 从另一角度刻画了 Poisson 过程，而且可以应用于对过程进行计算机模拟。从均匀分布 $U[0,1]$ 中随机抽样的方法是熟知的。将其作变换后就可以模拟参数为 λ 的指数随机变量。而独立同分布的指数随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依命题 2.1 就是 W_n，也就是 Poisson 过程第 n 次事件到达的时刻。这样就可以模拟参数为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$。λ 越大表明事件平均间隔时间 $1/\lambda$ 越短，事件的发生就越频繁，强度也就越大。

给定了到时刻 t 总计发生了 n 件事，在过去某时刻 $u < t$ 发生了 k 件事的条件概率可由本章习题 1 知道是二项分布。但人们常常对给定 $N(t) = n$ 事件发生后 $W_1, \cdots, W_n$ 的联合分布更感兴理。关于这一条件联合分布，我们有

定理 2.2. 到达时刻的条件分布

若 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程，则给定 $N(t) = n$ 下等待时间 $W_1, \cdots, W_n$ 的联合密度为

$$
f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)=n}(w_1, \cdots, w_n|n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < w_1 < \cdots < w_n \leq t \tag{2.6}
$$

♡

证 给定 $N(t) = n$，不妨设 n 个等待时间 $W_i = w_i$, $i = 1, \cdots, n$。对充分小的增量 Δw_i，事件 $N(t) = n$ 和 $w_i \leq W_i < w_i + \Delta w_i$, $i = 1, \cdots, n$ 是与在 $[w_i, w_i + \Delta w_i)$, $i = 1, \cdots n$ 中恰恰发生了一件事而在 $[0, w_1), [w_1 + \Delta w_1, w_2), \cdots, [w_{n-1} + \Delta w_{n-1}, w_n), [w_n +$

$\Delta w_n, t]$ 中没有发生事件是相对应的。于是

$$
\begin{aligned}
& f_{W_1,\cdots W_n|N(t)=n}(w_1,\cdots,w_n|n)\Delta w_1\cdots\Delta w_n \\
&= \mathrm{P}\{w_i \le W_i < w_i+\Delta w_i, i=1,2,\cdots,n|N(t)=n\} + o(\Delta w_1\cdots\Delta w_n) \\
&= \mathrm{P}\{w_i \le W_i < w_i+\Delta w_i, i=1,2,\cdots,n;\ N(t)=n\}/\mathrm{P}\{N(t)=n\} \\
&\quad + o(\Delta w_1\cdots\Delta w_n) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

上式第一项的分子由独立增量性及 Poisson 过程的定义知为

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\{N(w_i+\Delta w_i)-N(w_i), i=1,2,\cdots,n; N(w_1)=0, \\
&\quad N(w_2)-N(w_1+\Delta w_1)=0,\cdots,N(w_n)-N(w_{n-1}+\Delta w_{n-1})=0, \\
&\quad N(t)-N(w_n+\Delta w_n)=0\} \\
&\quad = [\lambda\triangle w_1\cdots\lambda\triangle w_n + o(\triangle w_1\cdots\triangle w_n)]\cdot \\
&\qquad [e^{-\lambda w_1}e^{-\lambda(w_2-w_1-\triangle w_1)}\cdots e^{-\lambda(w_n-w_{n-1}-\triangle w_{n-1})}e^{-\lambda(t-w_n-\triangle w_n)}] \\
&\quad = \lambda^n\triangle w_1\cdots\triangle w_n\cdot e^{-\lambda t}\cdot\exp\{\lambda\sum_{i=1}^n\triangle w_i\} + o(\triangle w_1\cdots\triangle w_n),
\end{aligned}
$$

分母为 $e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$。代入后在 (2.7) 式两边除以 $\Delta w_1\cdots\Delta w_n$ 并令 $\Delta w_i \to 0, i = 1,2,\cdots,n$, 就得到 (2.6) 式。

熟悉数理统计的读者马上可以看出联合密度 (2.6) 似曾相识。若从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布抽取 n 个独立同分布的随机样本 $U_1,\cdots,U_n$, 并按其大小排列成次序统计量，记为 $U_{(1)} \le U_{(2)} \le \cdots \le U_{(n)}$, 则 $U_{(i)}, i=1,\cdots,n$ 的联合密度正好是 (2.6)。有关证明可参看陈希孺等编的《数理统计学教程》，上海科技出版社，1988, 38页。

例 2.2 顾客依速率为 λ 的 Poisson 过程到达车站。若火车在时刻 t 离站，问在 $(0,t]$ 区间里顾客的平均总等待时间是多少?

解 作为依 Poisson 过程到达的第一位顾客，他的到达时间为 W_1, 等到时刻 t 发车需等待 $t-W_1$。而第 i 位旅客的等待时间为 $t-W_i$。在 $(0,t]$ 区段总共来了 $N(t)$ 位客人，所以总等待时间为 $\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)$。而所要求的平均总等待时间就是 $E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\Big]$。为求出它可以先求条件期望

$$
\begin{aligned}
E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)|N(t)=n\Big] &= E\Big[\sum_{i=1}^{n}(t-W_i)|N(t)=n\Big] \\
&= nt - E\Big[\sum_{i=1}^{n}W_i|N(t)=n\Big]
\end{aligned}
$$

注意到给定 $N(t)=n, W_i, i=1,\cdots,n$ 的联合密度是与 $(0,t]$ 上均匀分布中随机样本 $U_i, i=1,\cdots,n,$ 的次序统计量 $U_{(i)}, i=1,\cdots,n,$ 的联合密度是一样的。于是，

$$
E\Big[\sum_{i=1}^{n}W_i|N(t)=n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n}U_i\Big] = \frac{nt}{2}.
$$

因此，

$$
E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)|N(t)=n\Big] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}
$$

最后得到

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right]=\frac{t}{2}E[N(t)]=\frac{\lambda t^2}{2}$$

可以看到顾客平均总等待时间是和 t^2 成正比的，比例因子的大小决定于 Poisson 过程的强度 λ 。

2.3 Poisson 过程的推广

前两节所讨论的只是 Poisson 过程大家庭中最简单，最基本的一种情形，是大大简化了的随机模型。人们很自然地将其作各种推广。

2.3.1 非齐次 Poisson 过程

Poisson 过程 $N(t)$ 中的强度 λ 是常数，它是事件在某一小区间上的概率与区间长度的比例因子。更确切地说

$$\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h\cdot e^{-\lambda h}=\lambda h+o(h),$$

如果允许这一比例因子依赖于时刻 t, 所得的过程就是非齐次 Poisson 过程。其参数为 t 的函数 $\lambda(t)$。这也提供了过程增量不平稳的例子。此时,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)=k\}\\&\quad=\frac{\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)^k\exp\left(-\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)}{k!},\ k=0,1,\cdots.\end{aligned}\tag{2.8}$$

人们只需将 2.1 节中的假定 (3) 改为 (3)′:

$$\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)\geq 1\}=\lambda(t)h+o(h)$$

就可以完全类似地证明。

命题 2.2

在 2.1 节的假定 (1), (4) 和本节假定 (3)′ 下, 过程 $N(t)$ 是参数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, 过程增量 $N(t+h)-N(t)$ 的分布为 (2.8) 式.

例 2.3 记录值 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 是一串独立同分布连续随机变量，分布为 $F(t)$, 密度函数为 $f(t)$。当 X_i 代表某一元件的寿命时,$\lambda(t)=f(t)/(1-F(t))$ 常定义为失效率。它的直观意义是 $\lambda(t)$ 近似地等于 $P(X_1=t|X_1\geq t)$, 即元件在时刻 t 仍在工作而在下一瞬间 t 失效的条件概率密度。记 $X_0\equiv 0$, 当 $X_n>\max(X_1,\cdots,X_{n-1})$ 时, 也就是当 X_n 的值超过以往任何记录时称在时刻 n 创了记录。X_n 则称为是所创的记录值。记录值比 t 小的新记录的次数记为 $N(t)$。也即若记录值次数为 $N(t)$, 则第 n 次记录值在 t 时刻之前发

生。过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一非齐次 Poisson 过程. 其强度函数正好是失效率 $\lambda(t)$。比如,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t)=0) &= \mathrm{P}(X_1 > t) = 1 - F(t) = \exp\{\ln(1-F(t))\} \\
&= \exp\left[-\int_0^t \frac{dF(u)}{1-F(u)}\right] = \exp\left[-\int_0^t \frac{f(u)du}{1-F(u)}\right] \\
&= \frac{\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)^k}{k!} \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]_{k=0}
\end{aligned}
$$

正好是 (2.8) 式中 $k=0$ 的情形。

有兴趣的读者可自行证明本例。记录值的模型也解释了为什么常用 Poisson 过程来描述事故与灾难的发生过程, 因为灾害就是负面的破纪录。

2.3.2 复合 Poisson 过程

人们在考虑设备故障所需的维修费, 自然灾害所造成的损失, 股票市场的价格变动时都会碰到这样一类模型: 事件的发生依从一 Poisson 过程, 而每一次事件都还附带一个随机变量 (如费用, 损失等)。这时人们感兴趣的不仅仅是事件发生的次数, 人们还要了解总费用或总损失。这也就是累计值过程 $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i$, 其中 Y_i 为独立同分布的随机变量。它们有分布函数 $G(y)$, 均值 $EY = \mu$, 方差 $VarY = \tau^2$。$N(t)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程。$X(t)$ 就是复合 Poisson 过程。由例 1.12 易知 $X(t)$ 是随机和并且 $E[X(t)] = \lambda\mu t, Var[X(t)] = \lambda(\tau^2+\mu^2)t$。若取 Y_i 恒等于 1, 复合 Poisson 过程 $X(t)$ 就是通常的 Poisson 过程。

例 2.4 假定在股票交易市场, 股票交易次数是以 λ 为速率的 Poisson 过程。记第 k 次与第 $k-1$ 次易手前后股票价格的变化为 Y_k。不妨假定 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量且与 $N(t)$ 独立。而 $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{N(t)} Y_k$ 则代表到时刻 t 时股票的总价格变化, 这是投资者计算赢亏决定投资意向的重要指标。设 Y_1 的分布为 $G(y)$。则 $P\{Y_1+Y_2 \leq y\} = \int\limits_{\infty}^{\infty} G(y-z)dG(z)$, 记为 $G*G(y)$ 或 $G^{(2)}(y)$, 是 G 与 G 自身的卷积。类似地 $G^{(n)}(y) = G*\cdots*G(y)$ 记 G 自身的 n 重卷积。基于上述记号, 不难求出 $X(t)$ 的分布:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X(t) \leq x\} &= \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x | N(t)=n\right\} P\{N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq x\right\} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G^{(n)}(x).
\end{aligned}
$$

2.3.3 标值 (Marked) Poisson 过程

在复合 Poisson 过程中我们关心的是累计值。若将发生事件的时刻和相伴的随机变量值一并考虑, 引进随机对或随机向量 $(W_1, Y_1), \cdots, (W_k, Y_k), \cdots$, 则得到所谓标值 Poisson 过程, 其中 W_k 仍为第 k 个事件的等待时间。这是一个多维的过程, 限于篇幅不能作详细的讨论。但随着对独立同分布随机变量的不同定义, 人们可以讨论各种有用的模型。比如令 $\mathrm{P}\{Y_k = 1\} = p$, $P\{Y_k = 0\} = q = 1 - p$, $0 < p < 1$, 就可以得到本章习题 9 所讨论的模型。再令 $N_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{N(t)} Y_k$, 则 $N_1(t)$ 是强度为 λp 的 Poisson 过程，它是以一定的机制从 $N(t)$ 抽取的。这一机制称为稀疏 (thinning)。

2.3.4 空间 Poisson 过程

直线上的 Poisson 过程可以自然地推广到空间去。记 S 为 n 维空间的集合,$\mathcal{A}$ 为 S 的子集所组成的集合类, 其中元素为 $A, B, \cdots$。$N(A)$ 为一随机过程, 它的取值是非负整值 $\{0, 1, 2, \cdots\}$, 它的指标集是 $\mathcal{A}$ 中的集合 A。我们最基本的要求是
$N(\cdot)$ 有某种可加性, 即如果 A 与 B 不相交, 则 $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$。回想在一维的情形 S 就是正半实轴。$A = (s, t]$, $0 \le s < t$。我们记 A 的大小为 $|A|$(长度, 面积, 体积等)。

定义 2.2

若 $\{N(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ 满足下面两个条件就称为强度是 $\lambda \ge 0$ 的空间齐次 Poisson 过程:

(i) 对每个 $A \in \mathcal{A}$, $N(A)$ 服从参数为 $\lambda|A|$ 的 Poisson 分布,

(ii) 对任何有限的由 S 的不交子集组成的集合类 $\{A_1, \cdots, A_n\}$, 随机变量 $N(A_1), \cdots, N(A_n)$ 是相互独立的。 ♣

例如在天文学中常常可以把宇宙空间中星星的分布看成三维的 Poisson 过程。而二次世界大战空袭伦敦时伦敦的弹着点是二维 Poisson 过程的著名的例子。

2.3.5 更新过程

由命题 2.2 知事件的间隔时间 X_i 相互独立且有相同的均值为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布。这是 Poisson 过程的重要的特征。如果把时间间隔 X_i 服从的指数分布改为一般的分布函数 $F(x)$, 那么所得的将会是什么过程呢? 这就是所谓的更新过程。

定义 2.3

如果 X_i, $i = 1, 2, \cdots$ 为一串非负的随机变量, 它们独立同分布, 分布函数为 $F(x)$。记 $W_0 = 0$, $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, W_n 表示第 n 次事件发生的时刻, 则称

$$N(t) = \max\{n : W_n \le t\}$$

为更新过程。 ♣

定义中 $N(t)$ 代表了到时刻 t 时事件的总数。W_i, $i=1,2,\cdots$, 也常常称为是更新点, 在这些更新点上过程又重新开始。在更新过程中事件平均发生的次数称为是更新函数，记作 $m(t)$, 即 $m(t)=E[N(t)]$。更新理论的主体是研究更新函数的性质，我们仅给出最基本的。

性质 更新过程 $N(t)$ 的分布

$$\mathrm{P}\{N(t)=n\}=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t),$$

而更新函数 $m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)$. 其中 $F^{(n)}(t)$ 为 $F(t)$ 的 n 重卷积, $F(t)$ 即为 X_i 的分布函数。

证 首先不难看出到时刻 t 的更新总数大于或等于 n 是与第 n 次更新发生在时刻 t 前是等价的, 也即有

$$\{N(t)\geq n\}\Longleftrightarrow\{W_n\leq t\}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{N(t)=n\}&=\mathrm{P}\{N(t)\geq n\}-\mathrm{P}\{N(t)\geq n+1\}\\&=\mathrm{P}\{W_n\leq t\}-\mathrm{P}\{W_{n+1}\leq t\}\\&=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

为求出更新函数, 引入示性函数

$$I_n=\begin{cases}1, & \text{若第 } n \text{ 次更新发生在 } [0,t] \text{ 中},\\ 0, & \text{如若不然},\end{cases}$$

显然,$N(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n$, 于是

$$\begin{aligned}EN[(t)]&=E\left[\sum_{n=1}^{\infty}I_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}E[I_n]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\{I_n=1\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\{W_n\leq t\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

例 2.5 对 Poisson 过程 $N(t)$, $X_1,X_2,\cdots$ 为独立同指数分布。由 2.2 节中 (2.5) 式知

$$F^{(n)}(t)=\sum_{j=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j\,!},$$

这也可以由对 Γ 分布的密度 $f_{W_n}(t)$ 求积分来直接证明。于是利用命题 2.3 立即可得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{N(t)=n\}&=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)\\&=\sum_{j=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}-\sum_{j=n+1}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\\&=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} F^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\left(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{(j-1)!} \\
&= \lambda t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t.
\end{aligned}
$$

这些结果都是我们熟知的了。Poisson 过程确实为更新过程的特殊情形。

更新理论有着丰富的内容和广泛的应用。运筹学中的排队论, 存贮理论, 可靠性数学, 管理数学和金融工程都要用到大量的更新理论的知识。在进一步学习这些内容时经常回想到 Poisson 过程是它的特例对于理解加深颇有益处。比如对 Poisson 过程 $EN(t)/t = \lambda t/t = \lambda = 1/\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 恒为常数。而令人惊奇的是对一般的更新过程也有 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{EN(t)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$, 其中 μ 是事件间隔时间 X_i 的期望 EX_i, 这也就是著名的基本更新定理。它告诉我们单位时间的平均事件次数当 t 趋于无穷时趋于一个固定的极限 $\dfrac{1}{\mu}$。

我们已从上述五个方面推广了过程理论中的一块重要的基石 Poisson 过程。在学习随机过程理论和处理各种随机模型时应注意它们的联系和区别, 要弄清所研究的实际问题的适用条件是什么, 这样才能更准确地刻画实际的物理过程。在下一章 Markov 过程的学习之后我们还可以看到 Poisson 过程是一类非常特殊的连续时间 Markov 过程 – 纯生过程的特例。Poisson 过程随时间的推移, 每次事件发生时 $N(t)$ 增加 1, 随后经过以相同参数 λ 的指数分布等待时间后事件再次发生过程再增加 1。而对一般的纯生过程, 过程的状态变化的等待时间可以是不同参数的分布。至于更一般的生灭过程, 跳跃度甚至可以是负数。尽管问题复杂化了, 但本章命题 2.1 中所用到的分析方法却仍然广泛适用。

第二章习题

1. $N(t)$ 为一 Poisson 过程, 对 $s < t$ 试求条件概率 $P\{N(s) = k|N(t) = n\}$。
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程。对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t)\cdot N(t+s)]$。
3. 电报依平均速率为每小时 3 个的 Poisson 过程到达电报局, 试问

   (i) 从早上八时到中午没收到电报的概率?

   (ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?
4. $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程, 试求

   (i) $\mathrm{P}\{N(1) \leq 2\}$,

   (ii) $\mathrm{P}\{N(1) = 1$ 且 $N(2) = 3\}$,

   (iii) $\mathrm{P}\{N(1) \geq 2|N(1) \geq 1\}$。
5. 证明概率 $P_m(t) = \mathrm{P}\{N(t) = m\}$ 在命题 2.1 的假定 (1) – (4) 下满足微分方程

   $$P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t),\ m = 1, 2, \cdots$$

   并证明在初始条件下 $P_m(0) = 0,\ m = 1, 2, \cdots$ 下的解为 $\dfrac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}$。
6. 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Poisson 过程近似求出某连续三页无错误的概率。

7. $N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 给定 $N(t)=n$, 试求第 r 个事件 $(r\leq n)$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$。
8. 令 $\{N_i(t),t\geq 0\},i=1,2,\cdots,n$, 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的 Poisson 过程。记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布。
9. 考虑参数为 λ 的 Poisson 过程 $N(t)$, 若每一事件独立地以概率 p 被观察到, 并将观察到的过程记为 $N_1(t)$。试问 $N_1(t)$ 是什么过程?$N(t)-N_1(t)$ 呢?$N_1(t)$ 与 $N(t)-N_1(t)$ 是否独立?
10. 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Poisson 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从参数为 λ_2 的 Poisson 过程 $N_2(t)$, 且过程 N_1 与 N_2 独立。试问随机过程 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率。
11. 设 $[0,t]$ 内到达某商店门口的顾客数 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程, 每个达到的顾客依概率 p 进入店内，以概率 $1-p$ 不进店即离开，且顾客是否进店是相互独立的; 进店的每个顾客又独立地以概率 q 进行消费，以概率 $1-q$ 不消费。求进店的顾客数的均值和方差与消费的顾客数的均值和方差.
12. 设有两个相互独立的 Poisson 过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 参数分别为 λ_1 和 λ_2. 计算在 $X(t)$ 的两个相邻事件间隔内, $Y(t)$ 出现 k 个事件的概率.
13. 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Poisson 过程。设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布,Y_k, $k=1,2,\cdots$, 独立同分布。记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害。当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命。试求该系统的平均寿命 ET, 并对所得结果作出直观解释。(提示: 对非负随机变量 $ET=\int_0^\infty \mathrm{P}(T>t)dt$)。
14. 设 $N(t)$ 为参数是 λ 的 Poisson 过程, S_k 表示第 k 个事件出现的时刻, 求
$$E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}\exp\left(-(t-S_k)^2\right)\right)$$
15. 设 $N(t)$ 为参数是 λ 的 Poisson 过程，先从该过程中每隔一点抽取一个构成一个新的计数过程，请问该新过程还是 Poisson 过程吗? 请说明理由
16. 现有红色、黄色、蓝色三种汽车，分别按强度为 λ_1,λ_2 和 λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站，
(1) 若不论颜色，求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望;
(2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下,
(a) 下一辆仍是红车的概率是多少? (b) 下一辆是黄车的概率是多少?
(3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，接下来通过的 k 辆全是红车，而后是非红车的概率是多少? $(k\geq 0)$
(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有 n 辆的概率, $n=0,1,2,\cdots$.
17. 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程,$X_1,X_2,\cdots$ 为事件间的时间间隔。
(i) X_i 是否独立,
(ii) X_i 是否同分布,

(iii) 试求 X_1 及 X_2 的分布。

18. 考虑对所有 t, 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$。令 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)du$, $m(t)$ 的反函数为 $\ell(t)$, 记 $N_1(t) = N(\ell(t))$。试证 $N_1(t)$ 是通常的 Poisson 过程, 试求 $N_1(t)$ 的强度参数 λ。

19. 设 $N(t)$ 为更新过程, 试判断下述命题的真伪:

    (i) $\{N(t) < k\} \Longleftrightarrow \{W_k > t\}$,

    (ii) $\{N(t) \leq k\} \Longleftrightarrow \{W_k \geq t\}$,

    (iii) $\{N(t) > k\} \Longleftrightarrow \{W_k < t\}$,

    其中 W_k 为第 k 个事件的等待时间。