





目录 CONTENTS

枚举的思想

例题1: 称硬币

例题2: 熄灯问题



◎枚举的思想

- 逐个排除
 - 。例如: 求小于N的最大素数
 - 。虽然找不到一个数学公式,使得我们根据N就可以计算出这个 素数,但可以采取枚举的方法。
 - 。N-1是素数吗? N-2是素数吗?N-K是素数的充分必要条件 是: N-K不能被任何一个大于1、小于N-K的素数整除。
 - 。判断N-K是否是素数的问题又成了求小于N-K的全部素数,这也是一种递归的思想。
 - 。解题思路: 2是素数,记为 $PRIM_0$ 。根据 $PRIM_0$ 、 $PRIM_1$ 、...、 $PRIM_k$,寻找比 $PRIM_k$ 大的最小素数PRIMk+1。如果PRIMk+1 大于N,则PRIMk是我们需要找的素数,否则继续寻找。



◎枚举的思想

- 依次猜测
 - 。根据所知道的知识, 给一个猜测的答案。
 - 如: 2是素数。
 - 。判断猜测的答案是否正确。
 - · 如: 2是小于N的最大素数吗?
 - 不断进行新的猜测,直到找到正确的答案。每次猜测的结果必须是前面的猜测中没有出现过的。
 - 如: 每次猜测是素数一定比已经找到的素数大。
 - 。猜测的过程中要尽早排除错误的答案。
 - 如:除2之外,只有奇数才可能是素数。



- •问题描述 (P159)
 - 。赛利有12枚银币。其中有11枚真币和1枚假币。假币看起来和真币没有区别,但是重量不同。但赛利不知道假币比真币轻还是重。于是他向朋友借了一架天平。朋友希望赛利称三次就能找出假币并且确定假币是轻是重。
 - 。例如:1)如果赛利用天平称两枚硬币,发现天平平衡,说明两枚都是真的。2)如果赛利用一枚真币与另一枚银币比较,发现它比真币轻或重,说明它是假币。经过精心安排每次的称量,赛利保证在称三次后确定假币。



• 输入

- 。输入有三行,每行表示一次称量的结果。赛利事先将12枚银币分别标号为A-L。
- 。每次称量的结果用三个以空格隔开的字符串表示: 天平左边放置的硬币 天平右边放置的硬币 平衡状态。
- 。其中平衡状态用"up","down",或"even"表示,分别为右端高、右端低和平衡。天平左右的硬币数总是相等的。

• 输出

。输出哪一个标号的银币是假币,并说明它比真币轻还是重。



• 输入样例

1

ABCD EFGH even

ABCI EFJK up

ABIJ EFGH even

• 输出样例

K is the counterfeit coin and it is light.



- 问题分析
 - 此题并非要求你给出如何称量的方案,而是数据已经保证三组 称量后答案唯一。
 - 。此题可以有多种解法,这里只介绍一种比较容易想到和理解的逐一试探法。
- •解题思想:逐一试探法
 - 对于每一枚硬币: 先假设它是轻的,看这样是否符合称量结果。如果符合,问题即解决。
 - 。如果不符合,就假设它是重的,看是否符合称量结果。如果符合,问题即解决。
 - 。把所有硬币都试一遍,一定能找到特殊硬币。



- 具体实现
 - 。定义变量存储称量结果

char left[3][7], right[3][7], result[3][7];

- 数组下标 3 代表 3 次称量;
- ·数组下标7代表每次左右至多6枚硬币(总共12枚硬币),多出一个字符位置是为了放'\0',以便字符数组使用字符串函数。
- 例如:
 - left[0] = "ABCD"
 - right[0] = "EFGH"
 - result[0] = "even"



• 具体实现:逐一枚举硬币的代码

```
for (char c = 'A'; c <= 'L'; c++) {</pre>
    if (isLight(c)) {
        printf("%c is the counterfeit coin and it is light.\n", c);
        break;
    } else if (isHeavy(c)) {
        printf("%c is the counterfeit coin and it is heavy.\n", c);
        break;
```



```
// 判断硬币x是否为轻的代码
bool isLight(char x)
 int i;
 // 判断是否与三次称量结果矛盾
 for (i = 0; i < 3; i++) {
    switch (result[i][0]) {
      case 'u':
        if (!inRight(i, x))
          return false;
        break;
      case 'e':
        if (inRight(i,x) || inLeft(i,x))
          return false;
        break;
      case 'd':
        if (!inLeft(i,x))
          return false;
           break;
  return true;
```

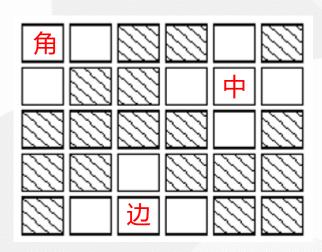
```
// 判断硬币x是否为重的代码
bool isHeavy(char x)
  int i;
  // 判断是否与三次称量结果矛盾
  for (i = 0; i < 3; i++) {
    switch (result[i][0]) {
      case 'u':
        if (!inLeft(i,x))
          return false;
        break;
      case 'e':
        if (inRight(i,x) || inLeft(i,x))
          return false;
        break;
      case 'd':
        if (!inRight(i,x))
          return false:
        break;
  return true;
```



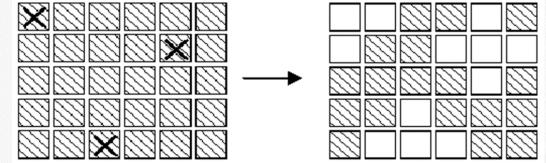
```
// 判断硬币x 是否在第i次称量左侧
bool inLeft(int i, char x)
    return strchr(left[i], x);
// 判断硬币x 是否在第i次称量右侧
bool inRight(int i, char x)
   return strchr(right[i], x);
```



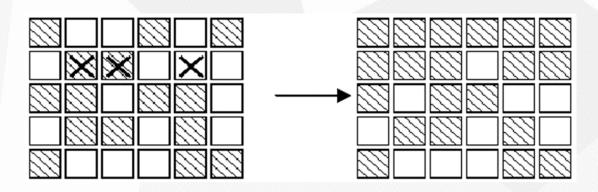
- •问题描述 (P163)
 - 。有一个由按钮组成的矩阵,其中每行有6个按钮,共5行。每个按钮的位置上有一盏灯。当按下一个按钮后,该按钮以及周围位置(上边、下边、左边、右边)的灯都会改变一次。如果灯原来是亮的,就会被熄灭;如果灯原来是熄灭的,则会被点亮。
 - 在矩阵角上的按钮改变3盏灯的状态
 - 在矩阵边上的按钮改变4盏灯的状态
 - 其他矩阵中的按钮改变5盏灯的状态
 - 。请写一个程序,确定需要按下哪些按钮, 恰好使得所有的灯都熄灭。







•对矩阵中的每盏灯设置一个初始状态。请你按按钮,直至每一盏等都熄灭。与一盏灯毗邻的多个按钮被按下时,一个操作会抵消另一次操作的结果。在下图中,第2行第3、5列的按钮都被按下,因此第2行、第4列的灯的状态就不改变。





• 输入

- 。第一行是一个正整数N,表示需要解决的案例数。每个案例由5 行组成,每一行包括6个数字。
- 。这些数字以空格隔开,可以是0或1。0表示灯的初始状态是熄灭的,1表示灯的初始状态是点亮的。

• 输出

。对每个案例,首先输出一行,输出字符串"PUZZLE#m",其中m是该案例的序号。接着按照该案例的输入格式输出5行,其中的1表示需要把对应的按钮按下,0则表示不需要按对应的按钮。每个数字以一个空格隔开。



• 样例输出



- 解题思路
 - 。第2次按下同一个按钮时,将抵消第1次按下时所产生的结果。 因此,每个按钮最多只需要按下一次。各个按钮被按下的顺序 对最终的结果没有影响。
 - 。对第1行中每盏点亮的灯,按下第2行对应的按钮,就可以熄灭第1行的全部灯。如此重复下去,可以熄灭第1、2、3、4行的全部灯。
 - 。**思路一**: 枚举所有可能的按钮(开关)状态,对每个状态计算一下最后灯的情况,看是否都熄灭。每个按钮有两种状态(按下或不按下),一共有30个开关,那么状态数是2³⁰,太多了,运行会超时。如何减少枚举的状态数呢?



• 解题思路

- 。一个基本思路是,如果存在某个"局部",一旦这个局部的状态被确定,那么剩余其他部分的状态只能是确定的一种,或者不多的n种,那么就只需枚举这个局部的状态就行了。
- 。经过观察,发现第1行就是这样的一个"局部"。因为第1行的各开关状态确定的情况下,这些开关作用过后,将导致第1行某些灯是亮的,某些灯是灭的。
- 。此时要熄灭第1行某个亮着的灯(假设位于第i列),那么唯一的办法就是按下第2行第i列的开关(因为第一行的开关已经用过了,而第3行及其后的开关不会影响到第1行)。
- 。因此,为了使第1行的灯全部熄灭,第2行的合理开关状态就是 唯一的。



• 解题思路

- 。第2行的开关起作用后,为了熄灭第2行的灯,第3行的合理开关状态就也是唯一的,以此类推,最后一行的开关状态也是唯一的。
- 。总之,只要第1行的状态定下来(比如叫A),那么剩余行的情况就是确定唯一的了。
- 。推算出最后一行的开关状态,然后看看最后一行的开关起作用后,最后一行的所有灯是否都熄灭,如果是,那么A就是一个解的状态。如果不是,那么A不是解的状态,第1行换个状态重新试试。
- 。因此,只需枚举第一行的状态,状态数是26=64
- 。有没有状态数更少的做法?
- 。枚举第一列, 状态数是 25 = 32



- 具体实现
 - 。用一个矩阵anPuzzle [5][6]表示灯的初始状态
 - anPuzzle[i][j] = 1: 灯(i, j) 初始时是被点亮的
 - anPuzzle [i][j] = 0: 灯(i, j) 初始时是熄灭的
 - 。用一个矩阵anSwitch [5][6]表示要计算的结果
 - anSwitch[i][j] = 1: 需要按下按钮(i, j)
 - anSwitch[i][j] = 0: 不需要按下按钮(i, j)



- 具体实现
 - 。anSwitch[0] 里放着第1行开关的状态,可用六重循环进行枚举:

```
for (int a0 = 0; a0 < 2; a0++)
         for (int a1 = 0; a1 < 2; a1++)
              for (int a2 = 0; a2 < 2; a2++)
                  for (int a3 = 0; a3 < 2; a3++)
                       for (int a4 = 0; a4 < 2; a4++)
                          for (int a5 = 0; a5 < 2; a5++) {
                                anSwitch[0][0] = a0; anSwitch[0][1] = a1;
                                anSwitch[0][2] = a2;
```

。如果每行开关数目是可变数N那怎么办?



- 具体实现: 适用于一行有N个开关的办法
 - 。一个6位二进制数的所有取值正好是64种,让该数的每一位对应于anSwitch[0] 里的一个元素(即:anSwitch[0][5]对应最高位,anSwitch[0][4]对应次高位....),那么这个二进制数的每个取值正好表示了第一行开关的一种状态。
 - 。如果一行有N个开关,那么就用一个N位二进制数,例如:
 - 0的二进制表示形式是 00 0000, 即代表所有开关都不按下
 - 63 的二进制表示形式是 11 1111, 即代表所有开关都按下
 - 5 的二进制表示形式是 00 00101, 即代表右数第1, 3个开关按下



- 具体实现: 适用于一行有N个开关的办法
 - 。要写一个从二进制数到状态的转换函数:

```
void SwitchStatus(int n, int * pSwitchLine);
```

。该函数将整数n(0≤n<64)的二进制表示形式对应到数组pSwitchLine里去(anSwitch[0][i]对应第i位)

```
void SwitchStatus(int n, int * pSwitch)
{
    for (int i = 0; i < 6; i++)
        pSwitch[i] = (n >> i) & 1;
}
```



- · 具体实现: 适用于一行有N个开关的办法
 - 。 要写一个让开关起作用的函数

void ApplySwitch(int * pLights, int * pNextLights, int * pSwitchs);

- pSwitchs 表示一行开关的状态;
- pLights 表示与开关同一行的灯的状态;
- pNextLights 表示开关下一行的灯的状态。
- 。本函数根据 pSwitchs 所代表的开关状态,计算这行开关起作用后,pLights 行和pNextLights行的灯的状态。
- 。不考虑开关的上一行的灯,是因为设定pSwitchs的值的时候,已经确保会 使得上一行的灯变成全灭(或没有上一行)。



```
void ApplySwitch(int * pLights, int * pNextLights, int * pSwitchs) {
   // 依次让每个开关起作用
   for (int i = 0; i < 6; i++) {
       if (pSwitchs[i]) {
           // 开关左边的灯改变状态
           if (i > 0) pLights[i-1] = 1 - pLights[i-1];
           // 开关所在位置的灯改变状态
           pLights[i] = 1 - pLights[i];
           // 开关右边的灯改变状态
           if(i < 5) pLights[i+1] = 1 - pLights[i+1];</pre>
           // 开关下边的灯改变状态
           pNextLights[i] = 1 - pNextLights[i];
```



```
#include <memory.h>
#include <string.h>
#include <stdio.h>
int T;
int anPuzzle[6][6];
int anOriPuzzle[6][6];
int anSwitch[6][6]; //开关状态
//输出结果
void OutputResult(int t) {
    printf("PUZZLE #%d\n", t);
    for (int i = 0;i < 5; i++) {</pre>
         for (int j = 0; j < 6; j++) {
              printf("%d", anSwitch[i][j]);
              if( j < 5 ) printf(" ");</pre>
         printf("\n");
```

```
int main(int argc, char ** argv) {
   scanf("%d", &T);
    for (int t = 0; t < T; t++) {
        for (int i = 0; i < 5; i++)
            for (int j = 0; j < 6; j++)
                scanf("%d", &anOriPuzzle[i][j]);
       //遍历首行开关的64种状态
        for(int n = 0; n < 64; n++) {
            memcpy(anPuzzle, anOriPuzzle, sizeof(anPuzzle));
            //算出n所代表的开关状态,放到anSwitch[0]
            SwitchStatus(n, anSwitch[0]);
            //下面逐行让开关起作用,并算出下一行开关应该是什么状态,再让它们起作用.....
            for (int k = 0; k < 5; k++) {
                //算出第k行开关起作用后的结果
                ApplySwitch(anPuzzle[k], anPuzzle[k+1], anSwitch[k]);
                //第k+1行的开关状态应和第k行的灯状态一致
                memcpy(anSwitch[k+1], anPuzzle[k], sizeof(anPuzzle[k]));
```



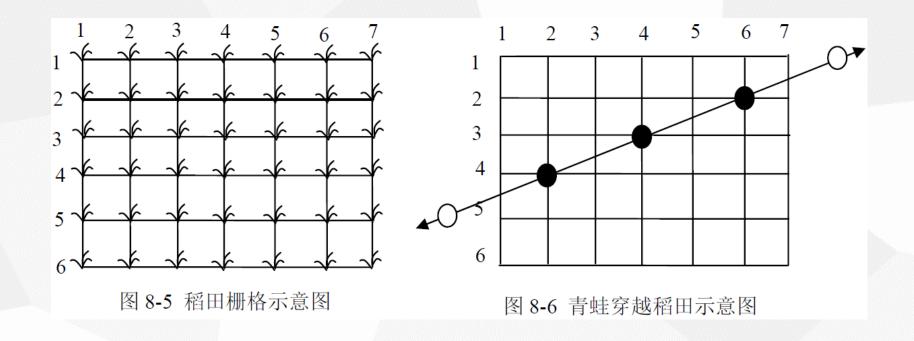
```
bool bOk = true; //记录最后一行灯是不是全灭
        //看最后一行灯是不是全灭
        for (int k = 0; k < 6; k++) {
            if (anPuzzle[4][k]) {
                bOk = false;
                break;
        if(b0k) {
            OutputResult(t+1); //输出解
            break; //找到解, 就不用再试下一种状态了
    } // for (int n = 0; n < 64; n++)
return 0;
```

- •问题描述 (P167)
 - 。在韩国,有一种小的青蛙。每到晚上,这种青蛙会跳越稻田, 从而踩踏稻子。农民在早上看到被踩踏的稻子,希望找到造成 最大损害的那只青蛙经过的路径。每只青蛙总是沿着一条直线 跳越稻田,而且每次跳跃的距离都相同。





- •问题描述 (P167)
 - 。如下图所示,稻田里的稻子组成一个栅格,每株稻子位于一个格点上。而青蛙总是从稻田的一侧跳进稻田,然后沿着某条直线穿越稻田,从另一侧跳出去。





• 问题描述

。如下图所示,可能会有多只青蛙从稻田穿越。青蛙的每一跳都恰好踩在一株水稻上,将这株水稻拍倒。有些水稻可能被多只青蛙踩踏。当然,农民所见到的是图8-8中的情形,并看不到图8-7中的直线,也见不到别人家田里被踩踏的水稻。

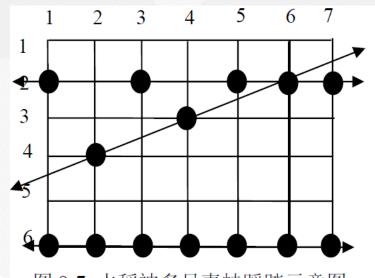


图 8-7 水稻被多只青蛙踩踏示意图

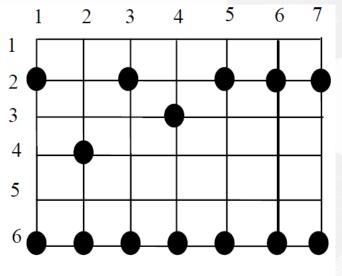


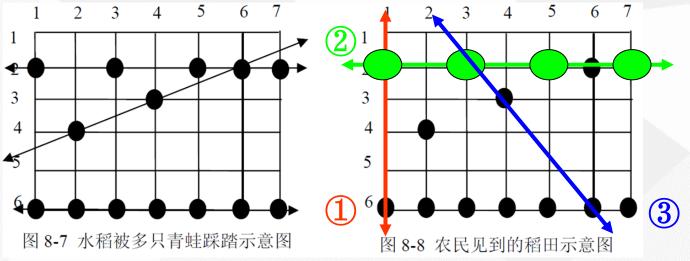
图 8-8 农民见到的稻田示意图



- 根据图示,农民能够构造出青蛙穿越稻田时的行走路径,并且只关心那些在穿越稻田时至少踩踏了3棵水稻的青蛙。因此,每条青蛙行走路径上至少包括3棵被踩踏的水稻。而在一条青蛙行走路径的直线上,也可能会有些被踩踏的水稻不属于该行走路径。
 - 1 不是一条行走路径: 只有两棵被踩踏的水稻;
 - ② 是一条行走路径,但不包括(2,6)上的水道;

③ 不是一条行走路径:虽然有3棵被踩踏的水稻,但这三棵水稻之间的距离

间隔不相等。





- 要求:请写一个程序来确定,在各条青蛙行走路径中,踩踏水稻最多的那一条上,有多少颗水稻被踩踏。例如,上图的答案是7,因为第6行上全部水稻(7株)恰好构成一条青蛙行走路径。
- •输入:从标准输入设备上读入数据。第一行上两个整数R、C,分别表示稻田中水稻的行数和列数,1≤R、C≤5000。第二行是一个整数N,表示被踩踏的水稻数量,3≤N≤5000。在剩下的N行中,每行有两个整数,分别是一株被踩踏水稻的行号(1~R)和列号(1~C),两个整数用一个空格隔开。而且,每株被踩踏水稻只被列出一次。
- 输出: 从标准输出设备上输出一个整数。如果在稻田中存在青蛙行走路径,则输出包含最多水稻的青蛙行走路径中的水稻数量,否则输出0。



• 样例输入

- 67 // R, C稻田中水稻的行数和列数
- 14 //N表示被踩踏的水稻数量
- 21//被踩踏水稻的行号和列号

• 样例输出

7 //包含最多水稻的青蛙行走路径中的水稻数量



- •解题思路: 枚举路径上的开始两点
 - 。每条青蛙行走路径中至少有3棵水稻
 - 。假设一只青蛙进入稻田后踩踏的前两棵水稻分别是(X₁, Y₁)、(X₂, Y₂)。
 - 。那么:
 - 青蛙每一跳在X方向上的步长 $dX = X_2 X_1$ 、在Y方向上的步长 $dY = Y_2 Y_1$
 - (X₁-dX, Y₁-dY)需要落在稻田之外(起点)
 - 当青蛙踩在水稻(X, Y)上时,下一跳踩踏的水稻是(X+dX, Y+dY)
 - 将路径上的最后一棵水稻记作 $(X_K, Y_K), (X_K + dX, Y_K + dY)$ 需要落在稻田之外(终点)



- •解题思路:猜测一条路径
 - 。猜测的办法需要保证: 每条可能的路径都能够被猜测到。
 - 。从输入的水稻中任取两棵,作为一只青蛙进入稻田后踩踏的前两棵水稻,看能否形成一条穿越稻田的行走路径。
 - 。猜测的过程需要尽快排除错误的答案:猜测 (X_1, Y_1) 、 (X_2, Y_2) 就是所要寻找的行走路径上的前两棵水稻。
 - 。当下列条件之一满足时,这个猜测就不成立:
 - 青蛙不能经过一跳从稻田外跳到(X₁, Y₁)上;
 - 按照 (X_1, Y_1) 、 (X_2, Y_2) 确定的步长,从 (X_1, Y_1) 出发,青蛙最多经过 (MAXSTEPS-1)步,就会跳到稻田之外。MAXSTEPS是当前已经找到 的最好答案。



- 具体实现: 选择合适的数据结构
 - 。选择合适的数据结构:采用的数据结构需要与问题描述中的概念对应
 - 方案1:

```
struct {
    int x, y;
} plants[5000];
```

• 方案2:

int plantsRow[5000], plantsCol[5000];

• 显然方案1更符合问题本身的描述



- 具体实现: 设计的算法要简洁
 - 。尽量使用C提供的函数完成计算的任务:猜测一条行走路径时,需要从当前位置(X,Y)出发上时,看看(X+dX,Y+dY)位置的水稻水稻是否被踩踏。
 - 。方案1: 自己写一段代码,看看(X+dX, Y+dY)是否在数组plants中;
 - 。方案2: 先用QSORT对plants中的元素排序,然后用BSEARCH从中查找元素(X+dX,Y+dY)
 - 。显然基于方案2设计的算法更简洁、更容易实现、更不容易出错误。
 - 。 通常, 所选用的数据结构对算法的设计有很大影响。



- 具体实现
 - 。注意,一个有n个元素的数组,每次取两个元素,遍历所有取法的代码写法:

```
for(int i = 0; i < n - 1; i++)

for(int j = i + 1; j < n; j ++) {

a[i] = ...;

a[j] = ...;
```

。二分查找函数, 查到返回地址, 查不到返回空指针:

void *bsearch(const void *key, const void *base, size_t nelem, size_t width, int
(_USERENTRY *fcmp)(const void *, const void *));

。数组的内容应根据 fcmp 所对应的比较函数升序排序。



```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int r, c, n;
struct PLANT {
    int x, y;
};
PLANT plants[5001];
PLANT plant;
int myCompare(const void *ele1, const void *ele2);
int searchPath(PLANT secPlant, int dX, int dY);
int main(int argc, char** argv) {
    int i,j, dX, dY, pX, pY, steps, max = 2;
    scanf("%d%d", &r, &c);
    scanf("%d", &n);
    for (i = 0; i < n; i++)
         scanf("%d%d", &plants[i].x, &plants[i].y);
    qsort(plants, n, sizeof(PLANT), myCompare);
```



```
for (i = 0; i < n - 2; i++) //plants[i]是第一个点
     for (j = i + 1; j < n -1; j++) { // plants[j]是第二个点
        dX = plants[j].x - plants[i].x;
        dY = plants[j].y - plants[i].y;
        pX = plants[i].x - dX;
        pY = plants[i].y - dY;
        if (pX <= r \&\& pX >= 1 \&\& pY <= c \&\& pY >= 1)
              continue; //第一点的前一点在稻田里,说明本次选的第
                        //二点导致的步长不合理,取下一个点作为第二点
        if (plants[i].x + (max - 1) * dX > r)
              break; //x方向过早越界了。说明本次选的第二点不成立。
                        //如果换下一个点作为第二点,x方向步长只会更大,更不成立,所以应该
                        //认为本次选的第一点都是不成立的,那么取下一个点作为第一点再试
        pY = plants[i].y + (max - 1) * dY;
        if ( pY > c || pY < 1)
              continue; //y方向过早越界了,应换一个点作为第二点再试
        steps = searchPath(plants[j], dX, dY); //看看从这两点出发,一共能走几步
        if (steps > max) max = steps;
if (max == 2) max = 0;
printf("%d\n", max);
 return 0;
```



```
//判断从 secPlant点开始,步长为dx,dy,那么最多能走几步
int searchPath(PLANT secPlant, int dX, int dY) {
    PLANT plant;
    int steps;
    plant.x = secPlant.x + dX;
    plant.y = secPlant.y + dY;
    steps = 2;
    while (plant.x <= r && plant.x >= 1 && plant.y <= c && plant.y >= 1) {
        if (!bsearch(&plant, plants, n, sizeof(PLANT), myCompare)) {
             // 每一步都必须踩倒水稻才算合理,否则这就不是一条行走路径
             steps = 0; break;
        plant.x += dX;
        plant.y += dY;
        steps++;
    return steps;
```



```
int myCompare(const void *ele1, const void *ele2) {
    PLANT *p1, *p2;
    p1 = (PLANT*) ele1;
    p2 = (PLANT*) ele2;
    if (p1->x == p2->x)
        return (p1->y - p2->y);
    return (p1->x - p2->x);
}
```



◎ 作业

- •1. 计算对数(P171)
 - 。给定两个正整数a和b。可以知道一定存在整数x,使得x<=log_ab<x+1求出x。输入数据保证x不大于20
- 2. 数字方格(P171)
 - 。任给一个整数n(0 n 100), 找到三个满足下列条件的正数 a1、a2、a3, 使得a1+a2+a3最大:
 - $0 \le a1$, a2, $a3 \le n$;
 - a1 + a2 是2 的倍数;
 - a2 + a3 是3 的倍数;
 - · a1 + a2 + a3 是5 个倍数。



◎ 作业

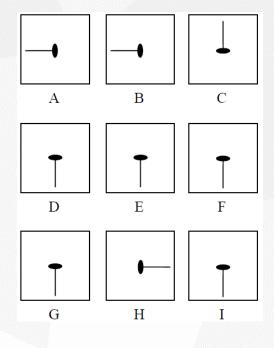
• 3. 画家问题(P171)

。有一个正方形的墙,由N*N个正方形的砖组成,其中一些砖是白色的,另外一些砖是黄色的。Bob是个画家,想把全部的砖都涂成黄色。但他的画笔不好使。当他用画笔涂画第(i,j)个位置的砖时,位置(i-1,j)、(i+1,j)、(i,j-1)、(i,j+1)上的砖都会改变颜色。请你帮助Bob判断能否将所有的砖都涂成黄色,并且在能将所有的砖都涂成黄色时计算出最少需要涂画多少块砖。



◎ 作业

- 5. 拨钟问题(P172)
 - 。有9个时钟,排成一个3*3的矩阵,各时钟指针的起始位置可以是12点、3点、6点、9点,如图8-9所示。共允许有9种不同的移动。如图8-10所示,每个移动会将若干个时钟的指针沿顺时针方向拨动90度。给定这9个时钟指针的其始位置,请计算最少需要用最少个移动才能将9个时钟的指针都拨到12点的位置,并输出你采用的移动序列。



移动	影响的时钟
1	ABDE
2	ABC
3	BCEF
4	ADG
5	BDEFH
6	CFI
7	DEGH
8	GHI
9	EFHI

