随机过程B

陈昱
cyu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2020 年 2 月

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

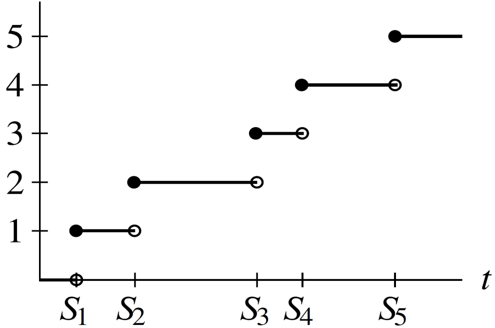
第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程，若

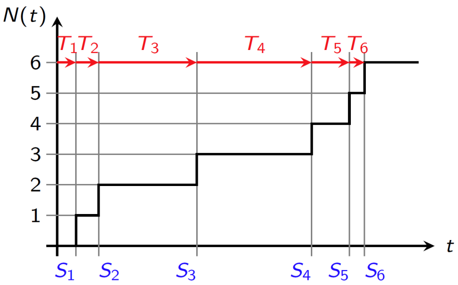
- $N(t)$ 取非负整数；(Nonnegative integer valued)
- $N(s) \leq N(t)$, $\forall s < t$; (Nondecreasing)
- 对于任意 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 表示在时间段 $(s, t]$ 内发生的事件数. (event counter)

$N(t)$是右连续轨道。



- **定义 2.1.1** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程，若
  (i) $N(0) = 0$;
  (ii) 过程具有独立增量；
  (iii) $N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, $\forall\, s, t \geq 0$; i.e., 对任意的 $s, t \geq 0$ (与s无关，平稳增量)

$$\mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$



注 (Poisson 过程的基本性质):

- 由 (i) $N(0)=0$ 知计数从时刻 0 开始.
- (iii) 为过程名称的缘由，由 (iii)，我们有
$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t, \quad \forall\, t \geq 0;$$
- 单位时间内事件发生的平均个数为
$$\lambda = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t}$$
故称 λ 为过程的强度或者速率.
- 由 (iii)知Poisson 过程具有平稳增量，从而具有平稳独立增量；
- (i) 和 (ii) 较为容易验证，(iii) 的验证较困难，我们引入 Poisson 过程的另一个描述性定义

引入记号

$$f(h)=o(h), \text{ 如果 } \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

- **定义 2.1.2** 计数过程 $\{N(t), t\geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若

(1) $N(0)=0$;

(2) 过程具有平稳增量和独立增量性质;

(3) $\mathrm{P}\left(N(h)=1\right)=\lambda h+\circ(h)$;

(4) $\mathrm{P}\left(N(h)\geq 2\right)=\circ(h)$.

$\{N(t), t\geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 记为 $\mathrm{P}(\lambda)$

引入记号

$$f(h)=o(h),\ \text{如果}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

- 定义 2.1.2 计数过程 $\{N(t), t\geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程，若

(1) $N(0)=0$;

(2) 过程具有平稳增量和独立增量性质；

(3) $\mathrm{P}\left(N(h)=1\right)=\lambda h+\circ(h)$;

(4) $\mathrm{P}\left(N(h)\geq 2\right)=\circ(h)$.

$\{N(t), t\geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程，记为 $\mathrm{P}(\lambda)$

注：

- (2) 说明在互不相交的区间内事件发生数目是相互独立的；
- (3) 说明短时间内事件发生的概率 $p=\lambda h$ 很小
- (3)+(4)说明短时间内事件不发生的概率 $1-\lambda h$; 这刚好是独立的 Bernoulli 试验模型.
- 说明事件是一件一件地发生的，在同一瞬间发生多个事件的概率为 0.

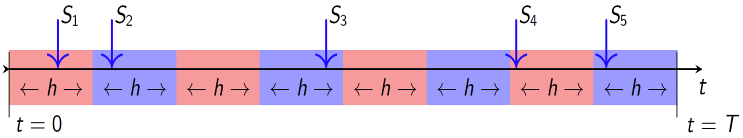
1. 考虑$[0, T]$区间，等分为n个小区间
2. $h = T/n$，第m个小区间为$((m-1)h, mh]$
3. 记A_m为第m个小区间里发生的事件数

$$A_m = N(mh) - N((m-1)h).$$

4. $[0, T]$发生的事件数为(N(0)=0)所有A_m，$m = 1, \cdots, n$的和

$$N(T) = \sum_{m=1}^{n} A_m = \sum_{m=1}^{n} N(mh) - N((m-1)h$$

看下图：$N(T) = 5, A_1, A_2, A_4, A_7, A_8$ 为1 and A_3, A_5, A_6 为0.



§2.1 Poisson 过程定义解释

1. 注意到定义中具有平稳增量，于是有

$$\mathrm{P}\left(A_m = k\right) = \mathrm{P}(N(mh) - N((m-1)h) = k) = \mathrm{P}(N(h) = k)$$

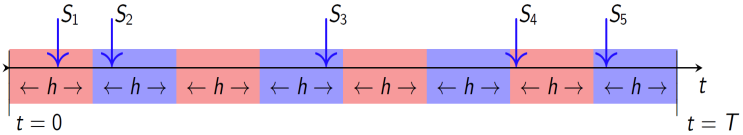
2. 由定义中的(3)和(4)

$$\mathrm{P}\left(A_m = 1\right) = \mathrm{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$
$$\mathrm{P}\left(A_m > 1\right) = \mathrm{P}(N(h) > 1) = o(h)$$

3. $o(h)$ 关于λh可以忽略不计(高阶无穷小)

$$\mathrm{P}\left(A_m = 1\right) = \lambda h, \quad \mathrm{P}\left(A_m = 0\right) = 1 - \lambda h$$

$\Rightarrow A_m$ Bernoulli 随机变量$B(1, \lambda h)$



§2.1 Poisson 过程

- 定理 2.1.1　定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.1.2

分析：($\Longleftarrow$) 仅证明 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 为此，将 $[0,t]$ 区间 k 等分：$I_{kj}, j=1,\ldots,k$. 记 N_K^* 为发生事件的区间数.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(\text{在某个区间发生事件数} \geq 2) \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\,(\text{在区间 } I_{kj} \text{ 发生事件数} \geq 2) = k\circ\left(\frac{t}{k}\right) = \circ(1).
\end{aligned}
$$

于是，$N_k^* \sim B(k, \lambda t/k + \circ(1/k))$, 且 $N_k^* \to N(t)$, $k \to \infty$. 故

$$N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t).$$

- 定理 2.1.1 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.1.2

分析：($\Longleftarrow$) 仅证明 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 为此，将 $[0, t]$ 区间 k 等分：$I_{kj}, j = 1, \ldots, k$. 记 N_K^* 为发生事件的区间数.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\text{在某个区间发生事件数} \geq 2\right) \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\left(\text{在区间 } I_{kj} \text{ 发生事件数} \geq 2\right) = k \circ \left(\frac{t}{k}\right) = \circ(1).
\end{aligned}
$$

于是，$N_k^* \sim B(k, \lambda t/k + \circ(1/k))$, 且 $N_k^* \to N(t)$, $k \to \infty$. 故

$$
N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t).
$$

证明：($\Longleftarrow$) 仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 记 $p_n(t) = \mathrm{P}(N(t) = n)$. 由

$$p_0(t+h) = \mathrm{P}(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) = p_0(t)[1 - \lambda h + \circ(h)]$$

得

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \quad t > 0. \tag{$*.1$}$$

同样，对任意 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(N(t) = n - j, N(t+h) - N(t) = j) \\ &= p_n(t)[1 - \lambda h] + p_{n-1}(t) \cdot \lambda h + \circ(h), \end{aligned}$$

化简得

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad t > 0. \tag{$*.2$}$$

记 $N(t)$ 的概率母函数为 $\mathbb{P}(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)z^n$，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}(z,t)=\cdots=-\lambda\mathbb{P}(z,t)+\lambda z\mathbb{P}(z,t)=\lambda(z-1)\mathbb{P}(z,t).$$

求解得

$$\log\mathbb{P}(z,t)=\lambda t(z-1)+c(z), \tag{$*$.3}$$

其中 $c(z)$ 待定. 由 $p_0(0)=1$, $p_k(0)=0$, $\forall\, k>0$, 得

$$\mathbb{P}(z,0)\equiv 1.$$

代入 $(*.3)$ 得 $c(z)\equiv 0$, 于是

$$\mathbb{P}(z,t)=\exp\left\{\lambda t(z-1)\right\},$$

即 $N(t)\sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. ∎

例子. 顾客依 Poisson 过程到达某商店，速率为 $\lambda = 4$人/小时。已知商店上午 9 : 00 开门。试求到 9 : 30 时仅到一位顾客，而到 11 : 30 时总计已到达 5 位顾客的概率。

解 令 t 的计时单位为小时，并以 9 : 00 为起始时刻，所求事件可表示为 $\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\}$。其概率为

$$P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\} = P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) - N(\frac{1}{2}) = 4\}$$
$$= \{\frac{e^{-4\cdot\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{1!}\}\{\frac{e^{-4\cdot 2}(4\cdot 2)^4}{4!}\} = 0.0155$$

例子. 顾客依 Poisson 过程到达某商店，速率为 $\lambda = 4$人/小时 。已知商店上午 $9:00$ 开门。试求到 $9:30$ 时仅到一位顾客，而到 $11:30$ 时总计已到达 5 位顾客的概率。

解 令 t 的计时单位为小时，并以 $9:00$ 为起始时刻，所求事件可表示为 $\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\}$ 。其概率为

$$P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\} = P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) - N(\frac{1}{2}) = 4\}$$
$$= \{\frac{e^{-4\cdot\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{1!}\}\{\frac{e^{-4\cdot 2}(4\cdot 2)^4}{4!}\} = 0.0155$$

第 2 章　　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

2.2.1 数字特征

设 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 为 强度为 λ 的 Poisson 过程. 则对 $t, s \in [0, \infty)$,

- 均值过程: $\mu_N(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$; $\mathbb{E}[N(t) - N(s)] = \lambda(t-s)$
- 方差过程 $\mathrm{Var}\,(N(t)) = \lambda t$; $\mathrm{Var}\,(N(t) - N(s)) = \lambda(t-s)$
- 协方差过程$r_N(s,t) = \lambda \min\{s, t\}$.

  证明: 对 $s < t$,

$$\begin{aligned} r_N(s,t) &= \mathrm{Cov}(N(t), N(s)) \\ &= \mathbb{E}(N(t) - \mu_N(t))(N(s) - \mu_N(s)) \\ &= \mathbb{E}[N(t)N(s)] - \mu_N(t)\mu_N(s) \\ &= \mathbb{E}[N(t)N(s)] - \lambda^2 ts. \end{aligned}$$

$$s < t,\ N(t) = \underbrace{N(t) - N(s)}_{\text{与}N(s)\text{独立}} + N(s)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t)N(s)] &= \mathbb{E}[(N(t) - N(s))N(s)] + \mathbb{E}[N(s)^2] \\ &= \mathbb{E}[N(t) - N(s)]\mathbb{E}[N(s)] + (\mathbb{E}[N(s)])^2 + \mathrm{Var}\,(N(s)) \\ &= \lambda(t-s)\lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s \\ &= \lambda^2 ts + \lambda s.\end{aligned}$$

因此,

$$r_N(s,t) = \lambda s.$$

2.2.2 事件发生间隔与等待时间的分布

例子. 样本路径图

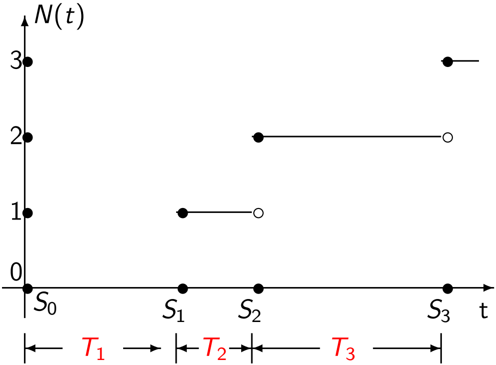


图 2.1 Poisson 过程的样本路径

§2.2 与 Poisson 过程相关的若干分布

2.2.2 事件发生间隔与等待时间的分布

事件发生时刻： $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k < \cdots$
事件发生间隔： $T_k = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 1$

▶ 定理 2.2.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

证明： $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\surd$. 对任意 $s, t > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_2 > t | T_1 = s) &= \mathrm{P}(N(t+s) = 1 | N(s) = 1, N(s-) = 0) \\
&= \mathrm{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1, N(s-) = 0) \\
&= \mathrm{P}(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t},
\end{aligned}
$$

即 T_1, T_2 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 余类似. ∎

§2.2 与 Poisson 过程相关的若干分布

2.2.2 事件发生间隔与等待时间的分布

事件发生时刻： $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k < \cdots$
事件发生间隔： $T_k = S_k - S_{k-1},\ k \geq 1$

▶ 定理 2.2.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

证明： $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\surd$. 对任意 $s, t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(T_2 > t | T_1 = s\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+s) = 1 | N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\
&= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\
&= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0\right) = e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

即 T_1, T_2 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 余类似. ∎

§2.2 事件相继发生的间隔分布

- T_1的生存分布$\Rightarrow \mathrm{P}(T_1 > t) = \mathrm{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

  $\Rightarrow$ T_1 has exponential distribution with parameter λ
- since increments are stationary and independent, likely T_i are i.i.d.

- 定理 2.2.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- 证明：求T_{i+1}的分布，对S_i取条件

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_{i+1} > t) &= \int \mathrm{P}(T_{i+1} > t | S_i = s) f_{S_i}(s) ds \\
&= \int \mathrm{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = i) f_{S_i}(s) ds \\
&= \int \mathrm{P}(N(t+s) - N(s) = 0) f_{S_i}(s) ds \\
&= \int e^{-\lambda_t} f_{S_i}(s) ds = e^{-\lambda_t}
\end{aligned}
$$

- **定理 2.2.2** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$, 则 $\{S_n, n \geq 1\}$ 服从参数为 n 和 λ 的Γ 分布 $\Gamma(n, \lambda)$.

证明：方法一：利用定理 2.2.1 和课后习题 13.
方法二：注意到

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n.$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_n \leq t) &= \mathrm{P}(N(t) \geq n) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

对上式求导，得

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(-\lambda)(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{k(\lambda t)^{k-1}\lambda}{k!} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

∎

- **定义 2.2.1** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程，若事件发生间隔序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- **定理 2.2.2** 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.2.1

证明：$\Longrightarrow$ $\surd$.

$(\Longleftarrow)$ 由指数分布无记忆性知，$\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性. 下仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 注意到 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 及

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n,$$

得

$$\mathrm{P}(N(t) \geq n) = \mathrm{P}(S_n \leq t) = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

于是, $\mathrm{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$, $n \geq 0$. ∎

- 定义 2.2.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若事件发生间隔序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- 定理 2.2.2 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.2.1

证明: $\Longrightarrow$ $\surd$.
$(\Longleftarrow)$ 由指数分布无记忆性知, $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性. 下仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 注意到 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 及

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n,$$

得

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

于是, $\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$, $n \geq 0$. ∎

定义 2.2.1 的应用：

- 利用 $S_n \le t \Longleftrightarrow N(t) \ge n$，可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(t < S_n < t+h) &= \mathrm{P}\,(N(t+h)-N(t)=1, N(t)=n-1)+\circ(h) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\lambda h+\circ(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t>0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

定义 2.2.1 的应用:

- 利用 $S_n \le t \Longleftrightarrow N(t) \ge n$, 可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(t < S_n < t+h\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+h) - N(t) = 1, N(t) = n-1\right) + \circ(h) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \lambda h + \circ(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

定义 2.2.1 的应用:

- 利用 $S_n \le t \iff N(t) \ge n$, 可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(t<S_n<t+h) &= \mathrm{P}\,(N(t+h)-N(t)=1, N(t)=n-1)+\circ(h) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \lambda h+\circ(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t)=e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t>0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

如何从得到的一条样本路径去估计λ?

参数λ的极大似然估计

若在$[0, T]$上观察Poisson过程$\{N(t), 0 \le t \le T\}$的一条路径:

$$S_1 \le \cdots \le S_n \le T.$$

由定义2.2.1, 知道S_1, $S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}$为独立同分布的参数为$\lambda$的指数分布, 于是我们可以写出似然函数($S_0 = 0$)

$$L(s_1, \cdots, s_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1} - s_i)\} = \lambda^n e^{-\lambda s_n}.$$

取对数求导得$\hat{\lambda} = n/S_n$.

如何从得到的一条样本路径去估计λ?

参数λ的极大似然估计
若在$[0, T]$上观察Poisson过程$\{N(t), 0 \le t \le T\}$的一条路径:

$$S_1 \le \cdots \le S_n \le T.$$

由定义2.2.1, 知道S_1, $S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}$为独立同分布的参数为$\lambda$的指数分布, 于是我们可以写出似然函数($S_0 = 0$)

$$L(s_1, \cdots, s_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1} - s_i)\} = \lambda^n e^{-\lambda s_n}.$$

取对数求导得$\hat{\lambda} = n/S_n$.

到达时间的条件分布

$\{N(t), t \geq 0\}$是Poisson过程，则对任何$0 < s < t$

$$P\left(T_1 \leq s | N(t) = 1\right) = \frac{s}{t}$$

由于Poisson过程具有平稳和独立增量性，已知$[0, t]$上有一个时间发生的条件下，事件发生的时间S_1应该服从$[0, t]$的均匀分布．自然想法：

1. 能否推广到$N(t) = n$的情形？
2. 是否为Poisson过程特有的现象？

2.2.3 到达时间的条件分布

- 定理 2.3.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \middle| N(t) = n\right] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

※ $\left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right)$ 的联合 pdf 为

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad \forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t.$$

2.2.3 到达时间的条件分布

- **定理 2.3.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n)\Big| N(t) = n\Big] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

※ $\big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\big)$ 的联合 pdf 为

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad \forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t.$$

预备或者回顾知识

设 $(T_1, \ldots, T_n)$ 由概率密度函数为分布函数的导数定义

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{P\{t_i \le T_i < t_i + \Delta t_i, i = 1, 2, \cdots, n\}}{\Delta t_1 \cdots \Delta t_n},$$

对条件分布类似

$$\begin{aligned} & f_{S_1, \cdots S_n | N(t) = n}(t_1, \cdots, t_n | n) \\ & = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{P\{t_i \le S_i < t_i + \Delta t_i, i = 1, 2, \cdots, n | N(t) = n\}}{\Delta t_1 \cdots \Delta t_n} \end{aligned}$$

证明 注意到对充分小的增量 Δt_i，事件 $\{N(t)=n$ 和 $t_i \le S_i < t_i+\Delta t_i,\ i=1,\cdots,n\}$意味着

(i) 在 $[t_i, t_i+\Delta t_i)$, $i=1,\cdots n$ 中恰恰发生了一件事 $\lambda\Delta t_i$

(ii) 在 $[0,t_1),[t_1+\Delta t_1,t_2),\cdots,[t_{n-1}+\Delta t_{n-1},t_n),[t_n+\Delta t_n,t]$ 中没有发生事件.
$e^{-\lambda t_1}, e^{-\lambda(t_1-t_1-\Delta t_1)},\cdots, e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-\Delta t_{n-1})}, e^{-\lambda(t-t_n-\Delta t_n)}$,

则由独立增量和平稳增量有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left\{t_i \le S_i < t_i+\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n; | N(t)=n\right\} \\
&\quad= \frac{\mathrm{P}\left\{t_i \le S_i < t_i+\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n; N(t)=n\right\}}{\mathrm{P}\left(N(t)=n\right)} \\
&\quad= \frac{\lambda\Delta t_1\cdots\lambda\Delta t_n e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2-t_1-\Delta t_1)}\cdots e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-\Delta t_{n-1})} e^{-\lambda(t-t_n-\Delta t_n)}}{e^{\lambda t}(\lambda t)^n/(n!)} \\
&\quad= \frac{n!}{t^n}\left(\Delta t_1\cdots\Delta t_n\cdot e^{\lambda\sum_{i=1}^n \Delta t_i} + o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)\right),
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,\cdots S_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n) \\
&= \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!\Delta t_1\cdots\Delta t_n\cdot e^{\lambda\sum_{i=1}^n \Delta t_i} + o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)}{t^n\Delta t_1\cdots\Delta t_n} \\
&= \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!}{t^n} e^{\lambda\sum_{i=1}^n \Delta t_i} = \frac{n!}{t^n}.
\end{aligned}
$$

∎

注 直观上，在给定 $(0,t]$ 上发生 n 个事件的条件下，如果将n 个事件发生时刻看作是不排序的随机变量，那么可以看作是相互独立并且是服从 $(0,t]$ 上均匀分布的随机变量.

因此我们有

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,\cdots S_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n) \\
= & \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!\Delta t_1\cdots\Delta t_n\cdot e^{\lambda\sum_{i=1}^n\Delta t_i}+o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)}{t^n\Delta t_1\cdots\Delta t_n} \\
= & \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!}{t^n}e^{\lambda\sum_{i=1}^n\Delta t_i} = \frac{n!}{t^n}.
\end{aligned}
$$

∎

注 直观上，在给定 $(0,t]$ 上发生 n 个事件的条件下，如果将n 个事件发生时刻看作是不排序的随机变量，那么可以看作是相互独立并且是服从 $(0,t]$ 上均匀分布的随机变量.

- 定理 2.3.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \,\middle|\, S_{n+1} = t\right] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned}
&[(S_1, S_2, \ldots, S_n) | S_{n+1} = t] \\
&= [(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\
&\stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t-) = n] \\
&\stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t) = n]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 定理 2.3.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n)\Big| S_{n+1} = t\Big] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned}
&[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \\
&\quad = [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\
&\quad \stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n] \\
&\quad \stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t) = n]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 定理 2.3.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 P(λ)，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \,\middle|\, S_{n+1} = t\right] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned}
&[(S_1, S_2, \ldots, S_n) | S_{n+1} = t] \\
&\quad = \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\
&\quad \stackrel{\mathrm{d}}{=} \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t-) = n] \\
&\quad \stackrel{\mathrm{d}}{=} \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t) = n]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

推论: 设$N(t)$为参数λ的Poisson过程, S_n为其达到时刻, 则我们有对任意$[0,\infty)$上的可积的函数f

$$E\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f\left(S_k\right)\right\}=\lambda\int_0^{\infty} f(t)dt$$

- 【例 2.3(A)】 假设乘客按 P(λ) 过程到达火车站，火车于时刻 t 开出. 求 $(0,t]$ 时段到达乘客的等待时间总和的期望，即

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right].$$

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right]=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)\right]\right\}=\mathbb{E}\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

- 【例 2.3(A)】 假设乘客按 P(λ) 过程到达火车站，火车于时刻 t 开出. 求 $(0,t]$ 时段到达乘客的等待时间总和的期望，即

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right].$$

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right]=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)\right]\right\}=\mathbb{E}\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

▶【例 2.3(C)】 一元件易收到冲击，冲击按 P(λ) 过程到达，第 i 个冲击带来的损伤为 D_i. 假设 $\{D_i, i \geq 1\}$ iid, 且独立于 P 过程，损伤随时间按负指数衰减，且可以叠加. 于是 t 时刻元件的总损伤为

$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)}, \quad \alpha > 0,$$

求 $\mathbb{E}D(t)$.

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}[D(t)|N(t)=n] = \mathbb{E}D \cdot e^{-\alpha t}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k} = n \cdot \mathbb{E}D \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

▶【例 2.3(C)】 一元件易收到冲击，冲击按 P(λ) 过程到达，第 i 个冲击带来的损伤为 D_i. 假设 $\{D_i, i \geq 1\}$ iid, 且独立于 P 过程，损伤随时间按负指数衰减，且可以叠加. 于是 t 时刻元件的总损伤为

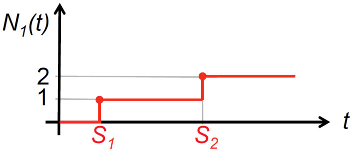
$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)}, \quad \alpha > 0,$$

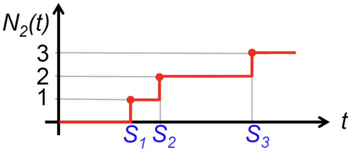
求 $\mathbb{E}D(t)$.

应用定理 2.3.1:

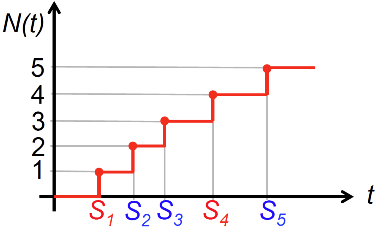
$$\mathbb{E}[D(t)|N(t)=n] = \mathbb{E}D \cdot e^{-\alpha t}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k} = n \cdot \mathbb{E}D \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda_i)$，$i = 1, 2$, 且两个过程相互独立，记





- 则 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 也是Poisson过程



- 定理 2.3.2 设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda_i)$， $i = 1, 2$, 且两个过程相互独立，记

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

则

$$\{N(t), t \geq 0\} \text{ 为 } \mathrm{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

※ 利用指数分布的无记忆性说明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性

- 定理 2.3.2 设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda_i)$，$i = 1, 2$, 且两个过程相互独立，记

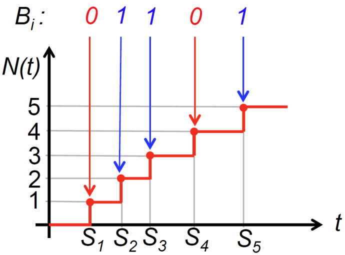
$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

则

$$\{N(t), t \geq 0\} \text{ 为 } \mathrm{P}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right).$$

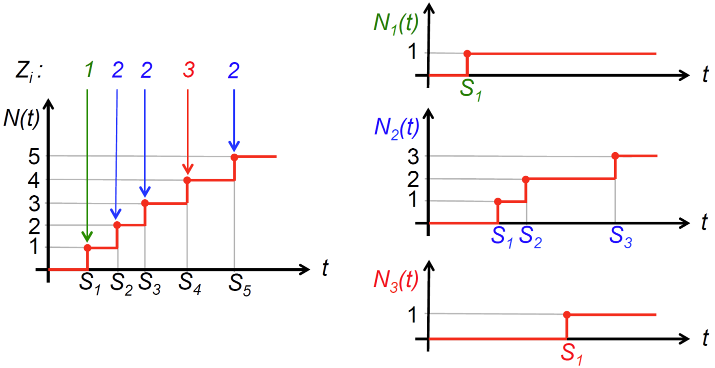
※ 利用指数分布的无记忆性说明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性

- 设$B_{\mathbb{N}}=B_1,B_2,\ldots$ 是一列Bernoulli (p) 随机变量序列.
- $N(t)\sim HPP(\lambda)$独立于$B_{\mathbb{N}}$.
- $M(t):=\sum_{i=1}^{N(t)}B_i$也是Poisson过程，参数为$\lambda p$.



- 设$Z_{\mathbb{N}} = Z_1, Z_2, \ldots$是独立同分布的序列，且$Z_i \in \{1, \ldots, m\}$.
- $N(t) \sim HPP(\lambda)$独立于$Z_{\mathbb{N}}$.
- $N_k(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}\{Z_i = k\}$, $k = 1, \ldots, m$.
- 则我们有

$$N_k(t) \sim HPP(\lambda \mathrm{P}(Z_i = k))$$



定理 2.3.1 的应用：Poisson 过程事件分类

设时刻 s 发生的事件以概率 $p(s)$ 划入 I 型，以概率 $1-p(s)$ 划入 II 型.
$N_i(t) = (0,t]$ 时段发生的 i 型事件个数，$i=1,2$.

- 命题 2.3.2 设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，且

$$N_1(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p t), \qquad N_2(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(1-p)t),$$

其中

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s, \quad t>0.$$

※ 命题 2.3.2 可以推广到分成有限或可列类事件情形

定理 2.3.1 的应用：Poisson 过程事件分类

设时刻 s 发生的事件以概率 $p(s)$ 划入 I 型，以概率 $1-p(s)$ 划入 II 型.

$N_i(t) = (0,t]$ 时段发生的 i 型事件个数，$i=1,2$.

- 命题 2.3.2　设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，且

$$N_1(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p t), \qquad N_2(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(1-p)t),$$

其中

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s, \quad t>0.$$

※　命题 2.3.2 可以推广到分成有限或可列类事件情形

证明：对任意 $m, n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\left(N_1(t)=m, N_2(t)=n\right) \\
= \ & \underbrace{\mathrm{P}\left(N_1(t)=m, N_2(t)=n \mid N(t)=m+n\right)}_{\Delta_{m,n}} \cdot \mathrm{P}\left(N(t)=m+n\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{m,n} &= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } S_1, S_2, \ldots, S_{m+n} \text{ 时刻发生事件} \\ \text{划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \middle| N(t)=m+n \right) \\
&= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } U_{1:(m+n)}, U_{2:(m+n)}, \ldots, U_{(m+n):(m+n)} \text{ 时刻} \\ \text{发生事件划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \right) \\
&= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } U_1, U_2, \ldots, U_{m+n} \text{ 时刻发生} \\ \text{事件划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \right) \\
&= \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}) \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}|U)] = \mathbb{E}p(U) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\,(N_1(t)=m, N_2(t)=n) \\ &= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s)\equiv p$, 则 $\{N_1(t), t\ge 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda p)$, $\{N_2(t), t\ge 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$, 且相互独立.

其中

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}) \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}|U)] = \mathbb{E}p(U) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{P}\,(N_1(t)=m, N_2(t)=n)$$
$$= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \quad \blacksquare$$

▶※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s)\equiv p$, 则 $\{N_1(t), t\geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda p)$, $\{N_2(t), t\geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$, 且相互独立.

其中

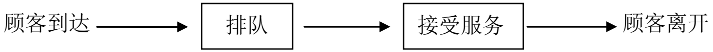
$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\left(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}\right) \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{P}\left(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型} | U\right)] = \mathbb{E}p(U) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是

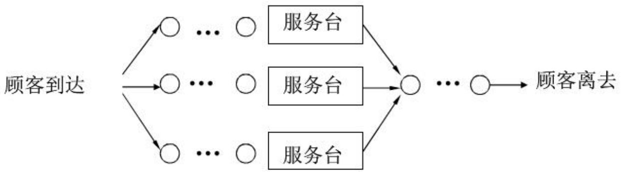
$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(N_1(t) = m, N_2(t) = n\right) \\ &\quad = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

▶※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s) \equiv p$，则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda p)$，$\{N_2(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$，且相互独立.

随机服务系统



如： （1） 多服务台并联



（2） 多服务台串联

随机服务系统分类： D.G. Kendall 于 1953 年提出的分类方法，基于顾客到达间隔时间、服务时间分布和服务台个数三个特征. 记号：

$$X/Y/Z,$$

- X 处填写表示顾客相继到达时间间隔分布的代码，
- Y 处填写表示服务时间分布的代码，
- Z 处填写系统服务台的个数.

X 可取“M”、“GI”、“D”等，Y 可取“M”、“G”、“D”等，其中

- M —— 指数分布（其无记忆性决定过程的 Markov 性）
- GI —— 一般相互独立的时间间隔分布
- D —— 确定的时长，退化分布
- G —— 服务时间的一般分布

随机服务系统分类： D.G. Kendall 于 1953 年提出的分类方法，基于顾客到达间隔时间、服务时间分布和服务台个数三个特征. 记号：

$$X/Y/Z,$$

- X 处填写表示顾客相继到达时间间隔分布的代码,
- Y 处填写表示服务时间分布的代码,
- Z 处填写系统服务台的个数.

X 可取“M”、“GI”、“D”等，Y 可取“M”、“G”、“D”等，其中

- M —— 指数分布（其无记忆性决定过程的 Markov 性）
- GI —— 一般相互独立的时间间隔分布
- D —— 确定的时长，退化分布
- G —— 服务时间的一般分布

随机服务系统分类： Kendall 扩充记号

$$X/Y/Z/A/B/C \quad \text{或} \quad [X/Y/Z]:[A/B/C],$$

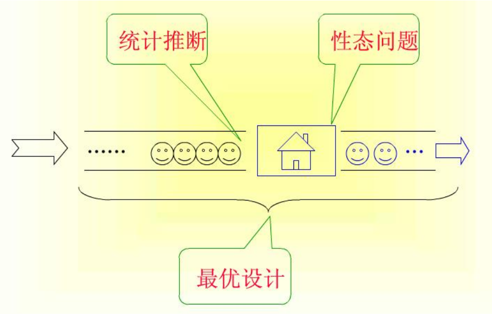
其中前三项意义同前不变，

- A 处填写系统容量限制数 N，
- B 处填写顾客源数目 m，
- C 处填写系统服务规则， 常见的有如下四种：
  (1) 先到先服务 (FCFS, First Come First Serve)
  (2) 后到先服务 (LCFS, Last Come First Serve)
  (3) 有优先权的服务 (PR, Priority)
  (4) 随机服务 (SIRO, Service in Random Order)

随机服务系统举例：

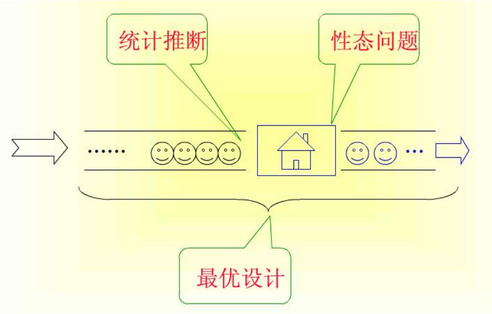
- $M/G/k$ 系统：顾客到达时间间隔服从指数分布（到达过程为 Poisson 过程），服务台提供的服务时间具有一般的分布，系统有 k 个服务台.
- $\mathrm{GI}/D/\infty$ 系统：顾客到达时间间隔独立且具有一般分布（到达过程为更新过程），服务台提供的服务时间是固定常数，系统有无穷多个服务台.
- $M/G/1/N/\infty/\mathrm{FCFS}$ 系统

随机服务系统研究：



系统指标：平均队长、平均服务时间、平均等待时间、流失顾客比例、期望休闲期长度、期望忙期长度，等

随机服务系统研究：



系统指标：平均队长、平均服务时间、平均等待时间、流失顾客比例、期望休闲期长度、期望忙期长度，等

- 【例】 设 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 证明 $nT_{1:n}$, $(n-1)(T_{2:n}-T_{1:n})$, ..., $(n-k+1)(T_{k:n}-T_{(k-1):n}), \ldots, T_{n:n}-T_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

※ 引入 Poisson 过程，再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型：

- 设 n 个元件寿命分别为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 元件一旦失效立即用同一型号元件替换，每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段失效的元件个数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$, 其首个事件（失效）发生时刻为 $T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时，扔掉该元件，把该时刻点记为时间起点（0点），考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件，一旦失效立即给与替换，则 $T_{2:n} - T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$, 且独立于 $T_{1:n}$.
- 余下略.

▶【例】 设 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 证明 $nT_{1:n}$, $(n-1)(T_{2:n}-T_{1:n})$, …, $(n-k+1)(T_{k:n}-T_{(k-1):n}), \ldots, T_{n:n}-T_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

※ 引入 Poisson 过程，再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型：

- 设 n 个元件寿命分别为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 元件一旦失效立即用同一型号元件替换，每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段失效的元件个数，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$, 其首个事件（失效）发生时刻为 $T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时，扔掉该元件，把该时刻点记为时间起点（0点），考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件，一旦失效立即给与替换，则 $T_{2:n}-T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$, 且独立于 $T_{1:n}$.
- 余下略.

▶ 【例】 设 $T_1, T_2, \dots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$，证明 $nT_{1:n}$，$(n-1)(T_{2:n}-T_{1:n})$，$\dots$，$(n-k+1)(T_{k:n}-T_{(k-1):n}), \dots, T_{n:n}-T_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

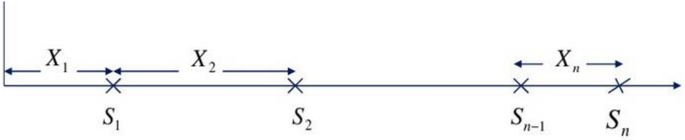
※ 引入 Poisson 过程，再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型：

- 设 n 个元件寿命分别为 $T_1, T_2, \dots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$，元件一旦失效立即用同一型号元件替换，每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0,t]$ 时间段失效的元件个数，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$，其首个事件（失效）发生时刻为 $T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时，扔掉该元件，把该时刻点记为时间起点（0 点），考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件，一旦失效立即给与替换，则 $T_{2:n}-T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$，且独立于 $T_{1:n}$.
- 余下略.

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程



T_1

Poisson 过程的一个自然推广

▶ 定义 3.1.1 设 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$, 记 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $n \geq 1$. 定义一个计数过程

$$N(t) = \sup\{n : \; S_n \leq t, \; n \geq 0\}, \quad t \geq 0,$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一个更新过程.

※

- "事件" vs "更新". 站在更新点看未来, 过程未来演化规律相同.
- "$F(0) < 1$" 避免平凡情形发生, 且 $\mu = \mathbb{E}X \in (0, +\infty]$.
- 于一点发生的更新数可以是一个随机变量, 服从 $\text{Geo}^*(\overline{F}(0))$. 注意 0 点与其它点的差异.
- $N(t) < \infty$, 且 $N(t) = \max\{n : \; S_n \leq t, n \geq 0\}$.

- $N(t)$ 分布:

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = F^{(n)}(t),$$

$$\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t), \quad n \geq 0.$$

- 更新函数: $m(t) = \mathbb{E}N(t)$

▶ 命题 3.2.1 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$.

证明　注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) &= \mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) - \mathrm{P}\left(N(t) \geq n+1\right) \\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t).\end{aligned}$$

※ $F^{(0)}(t) = 1_{[0,\infty)}(t)$, 常数 0 退化随机变量的 cdf

因此我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n+1)}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)F^{(n)}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

■

方法二： 注意到

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{S_n\le t\}}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[1_{\{S_n\le t\}}]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\{S_n\le t\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t).\end{aligned}$$

∎