第二章 静电场中的导体和电介质

静电场与物质的相互作用

- 物质存在形式：
  - 由基本粒子乃至原子、分子构成的实体存在形式
  - 以场的形式存在，如电场，具有能量，能量交换
  - 物质的**实体**与**场**是物质存在的**两种基本形式**
- 物质：**复杂的电荷系统**，由原子/分子/离子构成
- 电场与物质**相互作用的过程**：

电性质差异

电场

物质中的电荷在电场作用下重新分布

达到某种新的平衡

物质电荷分布改变反过来影响外电场

物质

§2.1 物质的电性质

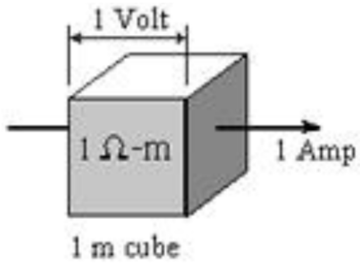
1、物质的电性质

- 各种物质电性质不同
- 早在1729年，英国人格雷发现金属和丝绸的电性质不同
  - 金属能很快把电荷转移到别的地方，使自己不带电
  - 丝绸不能转移电荷，但是可以带电
- 不同物质中，或者同一种物质在不同环境下，电子的状态不一样，导致自由电荷的转移能力差别很大，物质的导电电性能迥异。

电阻率

电阻： $R = \dfrac{U}{I}$ 单位：Ω

电阻率： $\rho = \dfrac{RS}{l}$



单位：Ωm

- 电阻率与物质的性质有关，与尺寸无关。
- 电阻率反映在一定温度压强条件下物质的导电能力，是物质的原子结构决定的属性。
- 根据电阻率，人们把材料分为导体、半导体和绝缘体。

导体

- 转移和传导电荷能力很强的材料，或者说电荷很容易在其中移动的物质。
- 电阻率在10^{-8}-10^{-6} Ωm之间
- 常见导体
  - 固体：金属、合金、石墨、人体、地等
  - 液态：电解液等
  - 气态：各种电离气体
- 导体中存在着大量的自由电子，数密度约为n_e~$10^{22}/cm^3$

绝缘体

- 转移和传导电荷能力很差的材料，或者说电荷在其中很难移动的物质。
- 电阻率在10^6-10^{18} Ωm之间
- 常见绝缘体
  - 固体：玻璃、橡胶、塑料、瓷器、云母、纸等
  - 液态：如各种油
  - 气态：未电离的各种气体

半导体

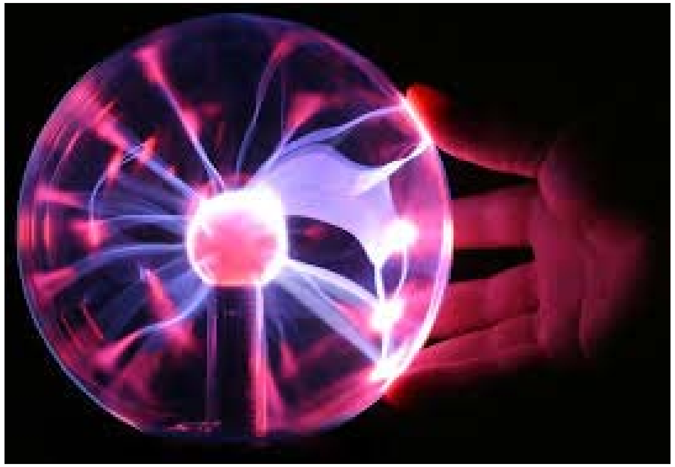
- 半导体材料的导电性能介于导体与绝缘体之间。
- 电阻率在10^{-6}-10^{6} Ωm之间
- 常见半导体有
  - Si, Ge
  - GaP, InSb, InAs,GaSb,GaAs, GaN, SiC.

超导体

- 某些金属或合金的温度降到接近绝对零度某一温度*Tc*时，其电阻突然变为零或接近于零，这种现象称为超导电现象。*Tc*称为超导体的临界温度。
- 现代超导重力仪的观测表明，超导态物体的电阻率必定小于$10^{-28}\ \Omega\ \mathrm{m}$，远远小于正常金属迄今所能达到的最低电阻率$10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$，因此，可以认为超导态的电阻率确实为零。
- 导电机制：库伯对

等离子体

- 等离子体是部分或完全电离的气体，由大量自由电子和正离子以及中性原子、分子组成。
- 物理性质主要由电磁相互作用决定。
- 等离子体在宏观上是近似电中性的，即从宏观上说，所含的正电荷与负电荷几乎处处相等。
- 物质的第四态。



载流子——可以自由移动的带电物质微粒

物质导电取决于有载流子！

- 金属导体：原子最外层的价电子，自由电子
- 电解质：载流子是正、负离子
- 电离气体：载流子是电子和正、负离子
- 绝缘材料：微量自由电子，本征离子，杂质离子
- 半导体：载流子为
  n型半导体中的自由电子
  p型半导体中的空穴
- 超导体：载流子为电子对，又称库珀对

2、电场对电荷系统的作用

■电场对物质作用 $\Longrightarrow$ 电场对物质内部电荷的作用

■外场对物质作用力：

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}.} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \rho_e \boldsymbol{E} dV, \boldsymbol{F} = \iint_S \sigma_e \boldsymbol{E} dS, \boldsymbol{F} = \int_L \lambda_e \boldsymbol{E} dl. \quad \textbf{(2.1.2)}$$

■电场$\boldsymbol{E}$为外场，即施力带电体产生的电场，不包括受力带电体的电场；

■受力带电体已经不限于试探电荷，所以受力带电体对施力电荷的分布，即对施力带电体的电场存在影响；

■ **$\boldsymbol{E}$是经过受力带电体影响之后的施力带电体的电场。**

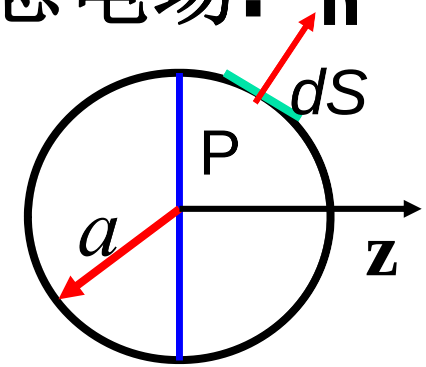
- $E = E_t - E_1$ (2.1.3)
  - E_t 施力和受力带电体的总电场
  - E_1 为受力带电体产生的电场
  - E 为施力带电体的电场，即外场
- 讨论
  - 实际问题中，E_t常易于求得，只要求得E_1，可得E。对体电荷和面电荷受力带电体这两种情况，我们只要从中分别减去体电荷元和面电荷元的贡献即可。
  - 这样做的后果是将受力带电体各部分的内力也计入到总力F之中。幸运的是，由于内力相互抵消。

- 体电荷：$E_1(r) = \rho_e r/(3\varepsilon_0)$， $r \to 0 \Rightarrow E_1 \to 0$
- 面电荷：$E_1 = \pm\sigma_e/(2\varepsilon_0)$ **(见下面例2.1)**
- 线电荷：$E_1 = \lambda_e / 2\pi\varepsilon_0 r$， $r \to 0 \Rightarrow E_1 \to \infty$

- 对受力带电体的情况：***E＝Et*** ；
- 受力带电面的：***E＝Et-E1*** ；
- 对线电荷：不能利用 ***E＝Et - E1***

[例2.1] 将一带电量为Q、半径为 a 的均匀带电球面切成两半，求两半球面间的静电力。

[解] ■由高斯定理求得球面两侧的总电场：



$$E_t=\begin{cases}\sigma_e/\varepsilon_0, & (r=a+0);\\ 0, & (r=a-0);\end{cases}$$

式中 $\sigma_e=Q/(4\pi a^2)$ 。

■由受作用面元在自身两侧产生的电场为：

$$E_1=\begin{cases}\sigma_e/(2\varepsilon_0), & (r=a+0);\\ -\sigma_e/(2\varepsilon_0), & (r=a-0).\end{cases}$$

■电场径向分量：

$$E=E_t-E_1=\sigma_e/(2\varepsilon_0) \qquad (r=a)$$

■取球坐标，使 z 轴与切割面垂直，则有:

$$\boldsymbol{E} = \sigma_e \hat{r} / (2\varepsilon_0)$$

代入式（2.1.2）求得两半球面之间的静电力为

$$\mathbf{F} = \iint_s \sigma_e \mathbf{E} dS = \iint_s \frac{\sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \hat{r} dS$$

■由对称性分析可知，上述作用力只有 z 分量:

$$F = F_z = \frac{a^2\sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

该力为正，表明两半球间的静电力为排斥力。

§2.2 静电场中的导体

1. 导体达到静电平衡的条件

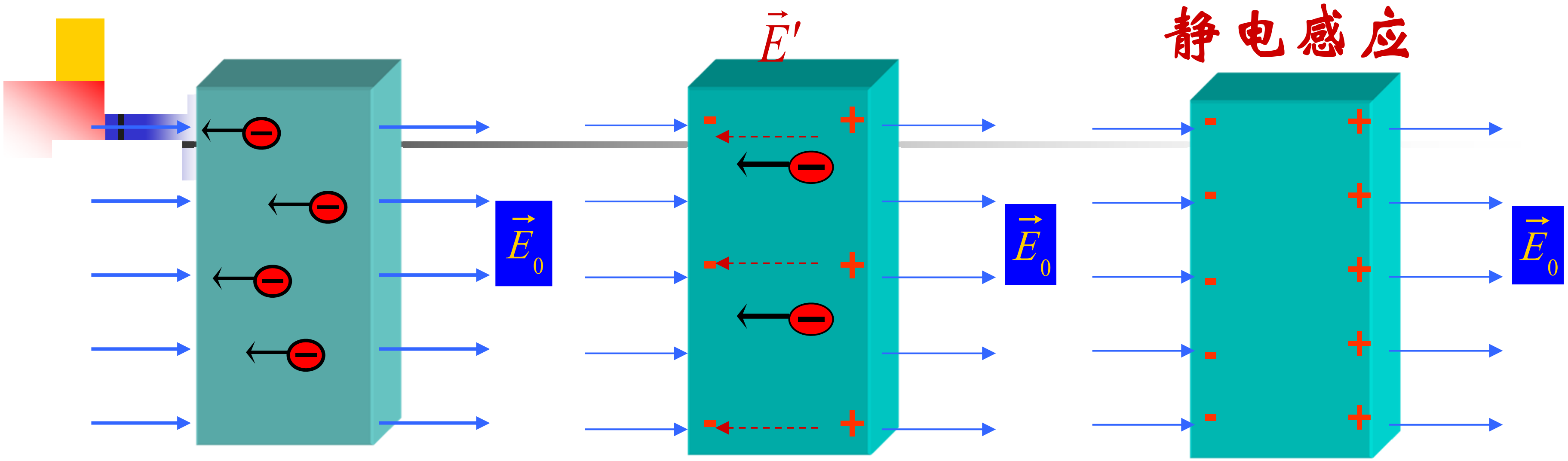
- 静电场改变导体内电荷的分布 ⟶ 电荷分布的改变将影响电场的分布 ⟶ 使得导体内电场强度处处为零，则自由电荷不再运动 ⟶

  我们说导体达到静电平衡。

  这时导体内自由电荷分布以及导体内、外的电场分布不再随时间变化。 这个过程进行得很快，大约在 $10^{-8}-10^{-10}$ s就完成了。

- 对于不存在非静电力情况下的均匀、各向同性导体，达到**静电平衡的条件**是**导体内部电场强度处处为零**。

导体的静电平衡条件



$$\vec{F}=q\vec{E}=-e\vec{E}$$

导体内部电场

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

感应电场

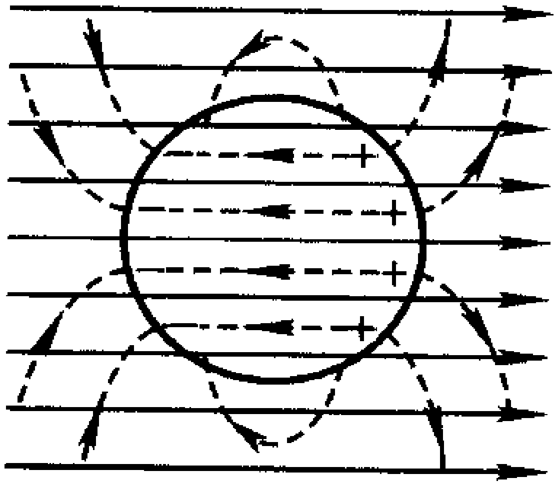
$$\vec{E}=0,$$

$$\vec{F}=0.$$

导体刚放入匀强电场中

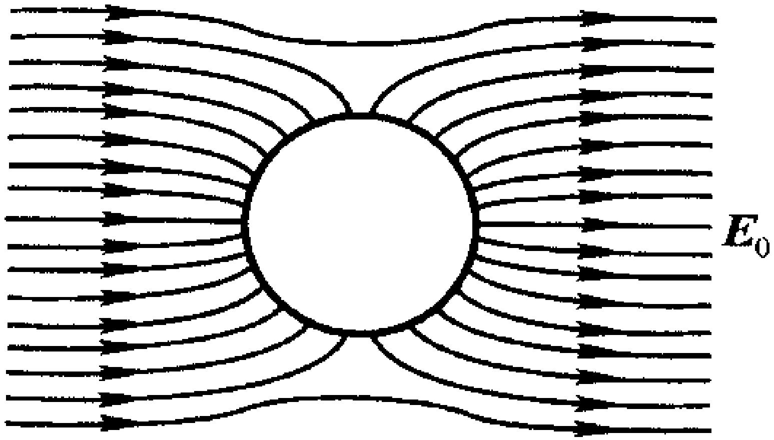
只要E不为零，自由电子作定向运动

改变电荷分布，产生附加场

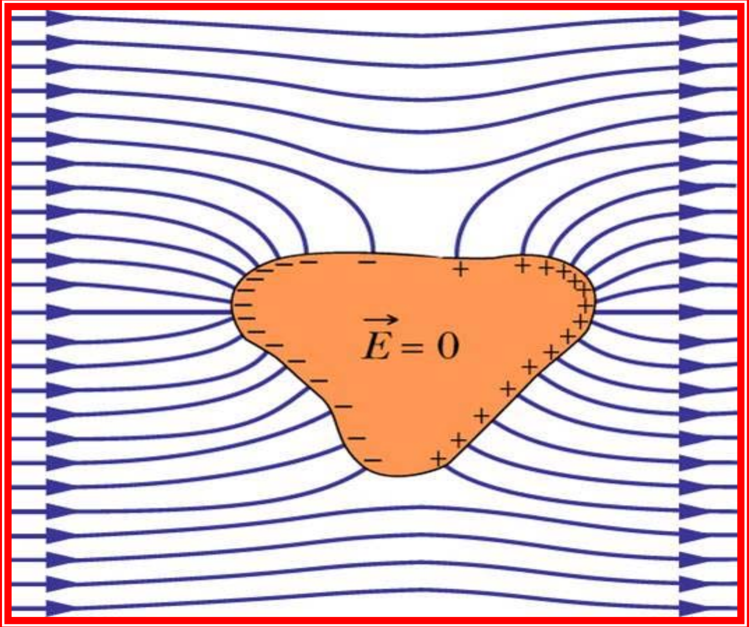


（a）感应电荷在球内的场强与外场源

在球内的场强大小相等方向相反



（b）合电场的电场线



(c)

静电场中的导体球内部和周围的电场分布

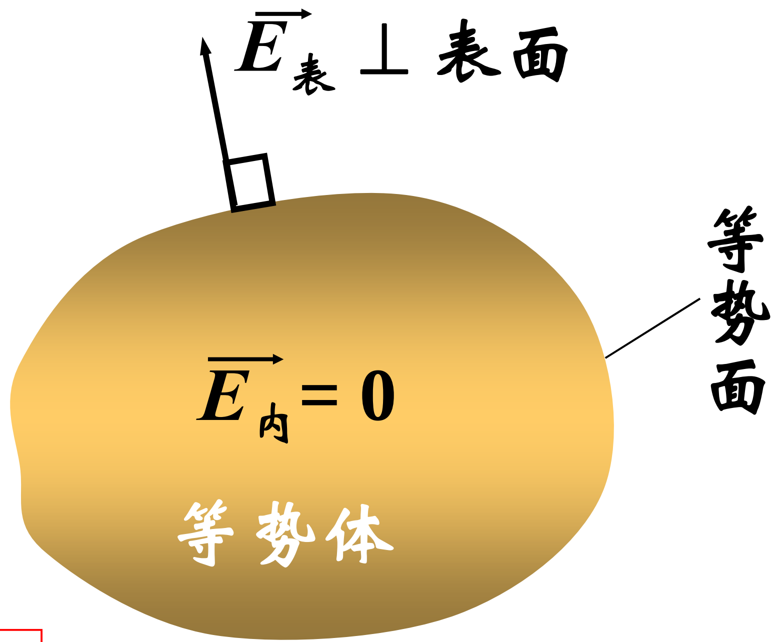
2. 处在静电平衡条件下导体的性质

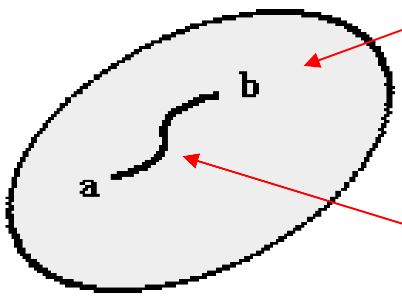
(1)内部电场

导体内部电场$E=E_0+E'=0$ (静电平衡条件)

(2) 电势分布

导体内部任意两点间电势差为零→各点等电势→导体为等势体 →表面为等势面





导体内部E=0

$$U_{ab}=\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{l}=0$$

静电平衡时的导体

(3) 整体电荷分布（实心导体）

当带电导体处于静电平衡状态时，导体内部处处没有净电荷存在，电荷密度处处为零$\rho_e=0$。

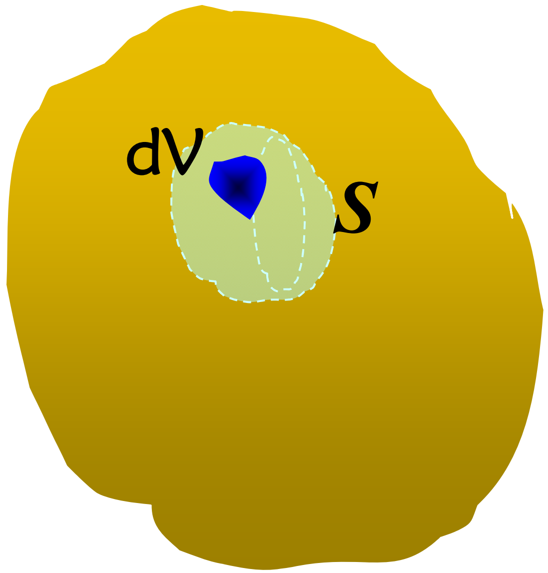
电荷只分布在导体表面。导体表面电荷的电荷层一般只有**1**至**2**个原子的厚度。

[证明]：在导体内任取体积元dV，再取任一闭合曲面S包围它，由高斯定理：

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_i ,$$

$$\because \quad \vec{E}=0, \quad \therefore \sum_i q_i = \iiint_V \rho_e \, dV = 0.$$

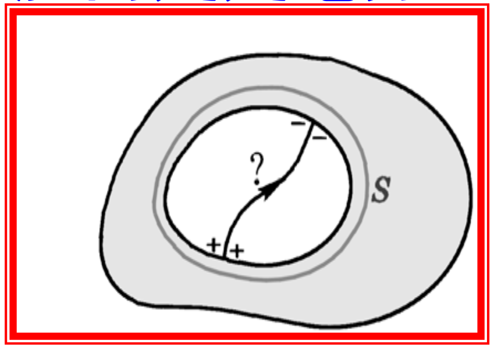
$\because$体积元dV任取,即V任取 $\qquad \therefore \rho_e = 0.$



导体空腔内没有带电体

- 包围导体空腔的导体壳内表面上处处没有电荷，电荷分布在导体外表面，空腔内处处E=0，空腔内处处电势相等。

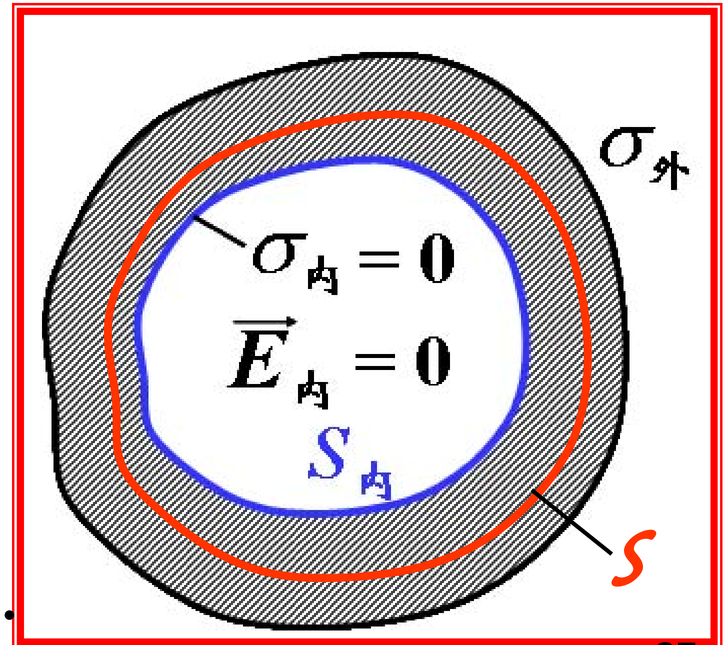
［证明］在导体中包围空腔选取高斯面S,



则： $\oiint_S \vec{E}_{导内} \cdot d\vec{s} = 0$, $\oiint_{S_内} \sigma_内 \cdot ds = 0$,

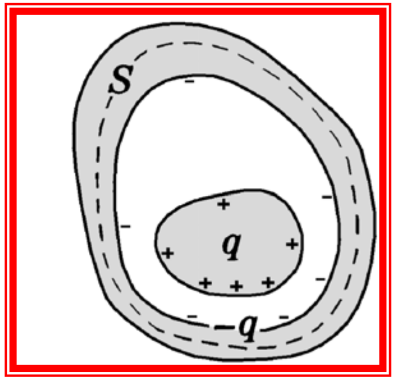
若$\sigma_内 \neq 0$，则$\sigma_内$必有正负，
便有E线从正电荷到负电荷，
导体内表面出现了电势差。
这与导体为等势体矛盾，
只能$\sigma_内 = 0$，且腔内无E线。

只能 $E_内 = 0 \rightarrow \Delta U = \int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$.



导体空腔内有带电体 q

- 必有 $\sigma_{内} \neq 0$，且 $q_{内表} = -q$， $\sigma_{外}$ 可不为0



[证明] 在导体中包围空腔选取高斯面 S，则：

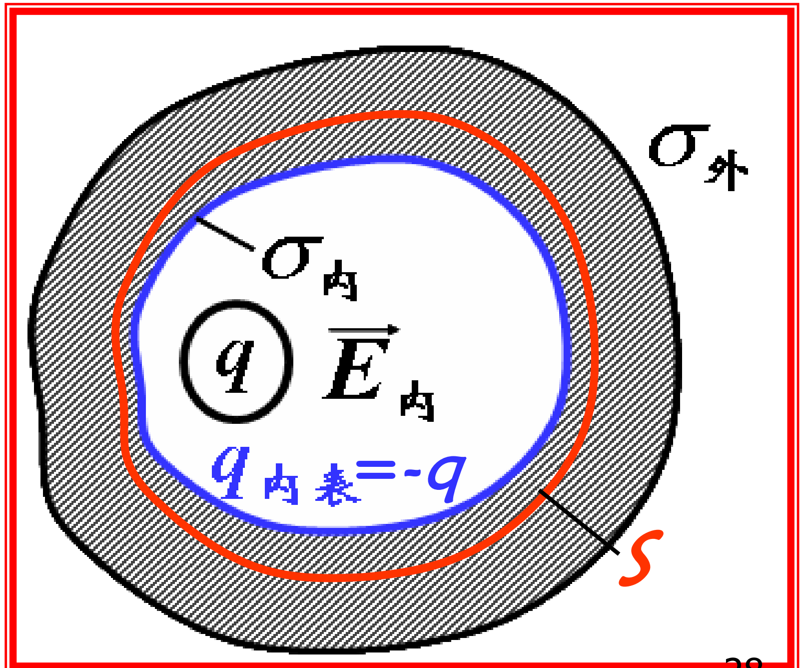
$$\oint_S \vec{E}_{导内} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q_{内表}) = 0$$

$$\therefore \quad q_{内表} = -q$$

$$\sigma_{内} \neq 0$$

$$E_{内} \neq 0$$

导体内表面上所带电荷与腔内电荷的代数和为零。

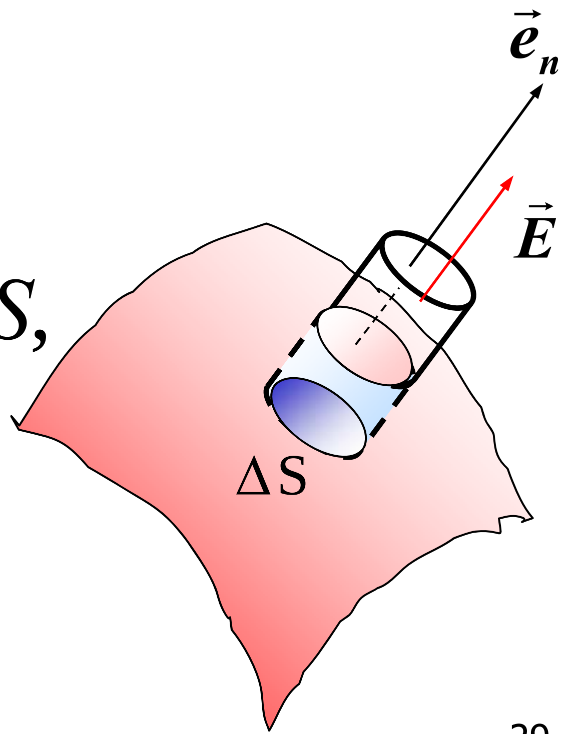


(4) 表面场强

导体表面附近的场强方向与表面垂直，大小为σ_e/ε_0

［证明］**1)** 方向：如不垂直，**E**有切向分量，电荷受力将移动→没有达到静电平衡；**2)**大小：

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \sigma_e \Delta S/\varepsilon_0,$$



$$又\iint_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \cancelto{0}{\iint_{下底}\vec{E}\cdot d\vec{S}} + \cancelto{0}{\iint_{侧面}\vec{E}\cdot d\vec{S}} = E\Delta S,$$

$$\therefore\quad E = \sigma_e/\varepsilon_0, \qquad \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\vec{e}_n.$$

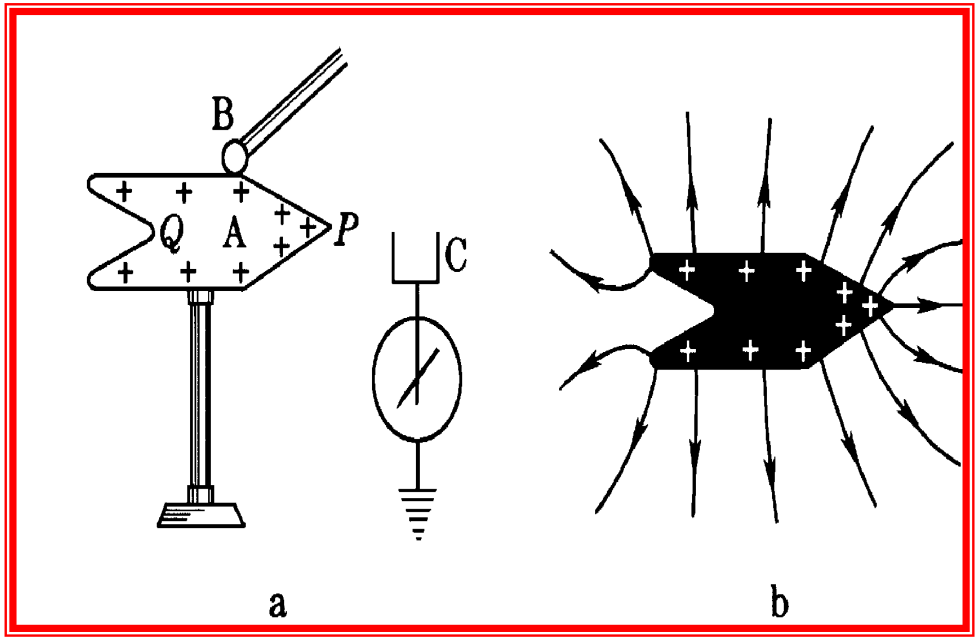
(5)表面电荷分布

- 孤立导体表面的面电荷分布很复杂
- 分布与外表面曲率和导体形状有关
- 面电荷密度与曲率之间并不存在单一的函数关系

•导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大)，电荷面密度较大；

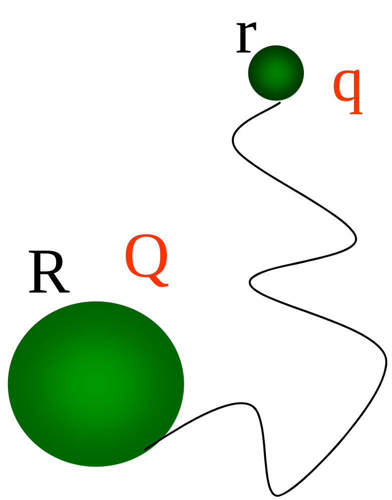
•导体表面平坦的地方(曲率较小)，电荷面密度较小

•导体表面凹进去的地方；(曲率为负)，电荷面密度更小。



[例]半径分别为R和r ($R>r$)导体球放置在相距无限远的两个地方，中间用细导线连接。导体球分别带电Q和q,求两球表面电荷面密度与曲率的关系。

[解]　两个导体所组成的整体可看成是一个孤立导体系,U相等，每个球可近似的看作为孤立导体，球表面电荷分布均匀，则两球的电势为：

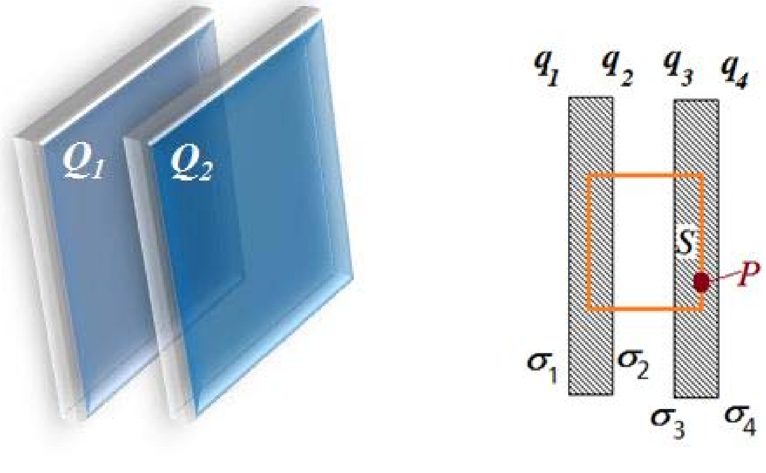


$$U_R = U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{4\pi R^2\sigma_R}{4\pi r^2\sigma_r} = \frac{R}{r},$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}.$$ 电荷面密度与半径成反比

[例]：两块相同大小的导体板平行放置，相距很近，忽略边缘效应。若带电量分别为Q_1和Q_2，求4个导体表面上的电荷。



(a) (b)

作如图高斯面:

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

P点电场强度=0:

$$E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

电荷守恒：

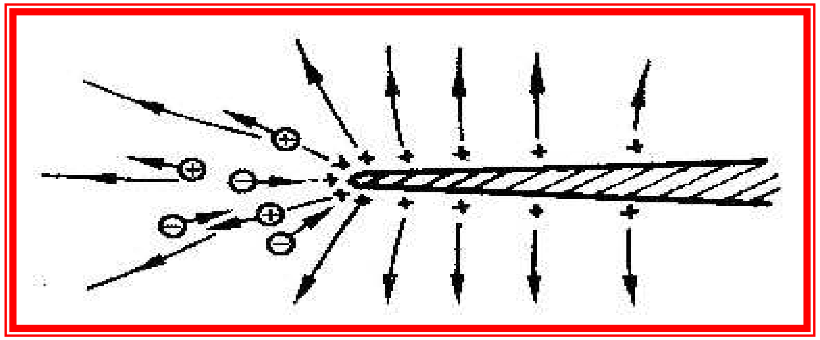
$$Q_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)S \qquad Q_2 = (\sigma_3 + \sigma_4)S$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

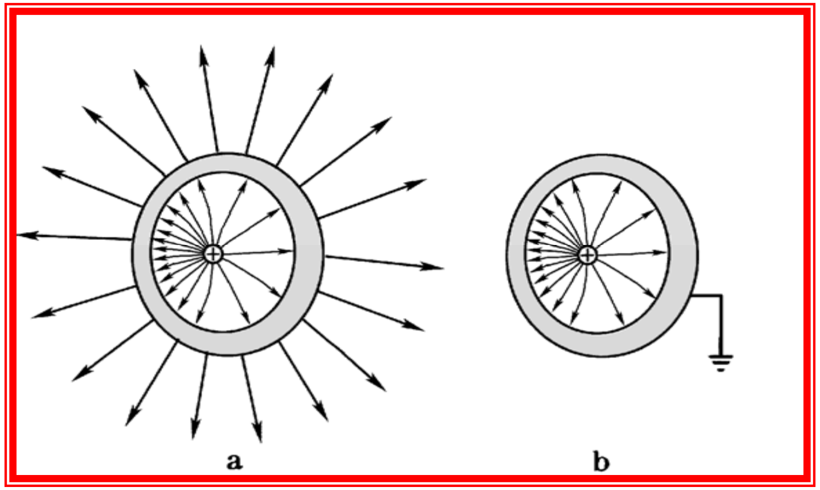
➔ $$q_1 = q_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \qquad q_2 = -q_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

3. 导体在静电场中性质的应用

- **尖端放电**　　曲率大，σ_e大，$E = \sigma_e/\varepsilon_0$ 大
  - 避雷针
  - 静电复印机
  - 场致发射显微镜
  - 范德格拉夫起电机



- **静电屏蔽**　空腔导体可以保护腔内空间不受腔外带电体的影响
  - 屏蔽室
  - 带电作业
  - 范德格拉夫起电机
- **库仑定律的精确验证**



尖端放电及其应用

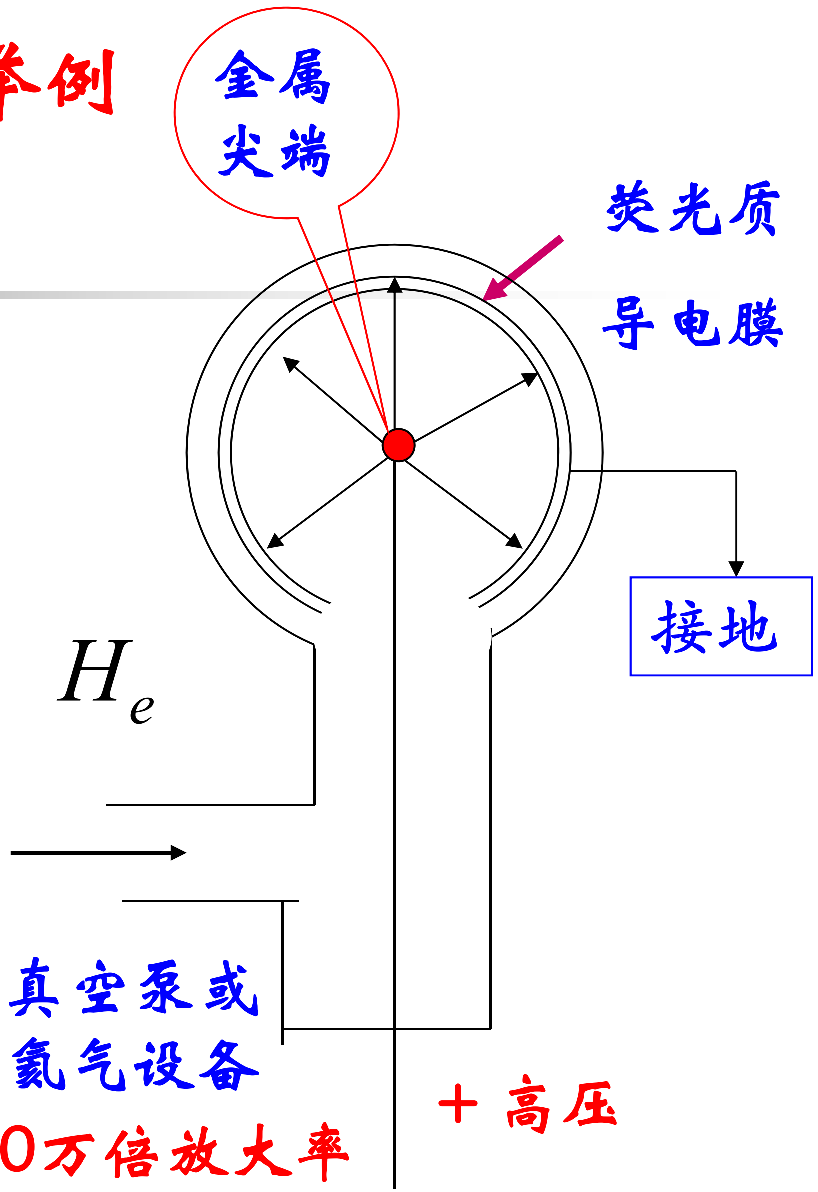
- 危害：
  - 雷击对地面上突出物体（顶端）的破坏性最大；
  - 高压设备尖端放电漏电等。
- 应用实例：
  - 避雷针
  - 高压输电中，把电极做成光滑球状
  - 范德格拉夫起电机起电原理就是利用尖端放电使起电机起电
  - 场离子显微镜（FIM）、场致发射显微镜(FEM)乃至扫描隧道显微镜(STM)等
  - 静电复印机

金属尖端的强电场的应用举例

场离子显微镜(FIM)

原理：

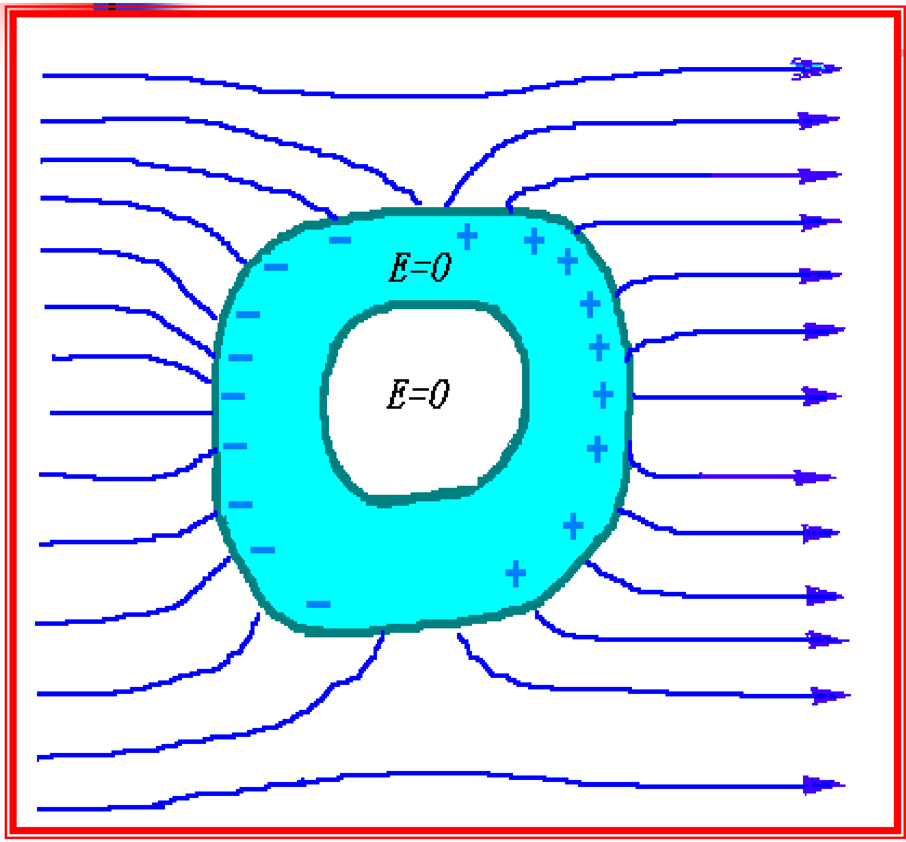
- 样品制成针尖形状
- 针尖与荧光膜之间加高压
- 样品附近有极强的电场
- E使吸附在样品的氦原子电离
- 氦离子沿电力线运动，
  撞击荧光膜引起发光
- 从而获得样品表面的图象

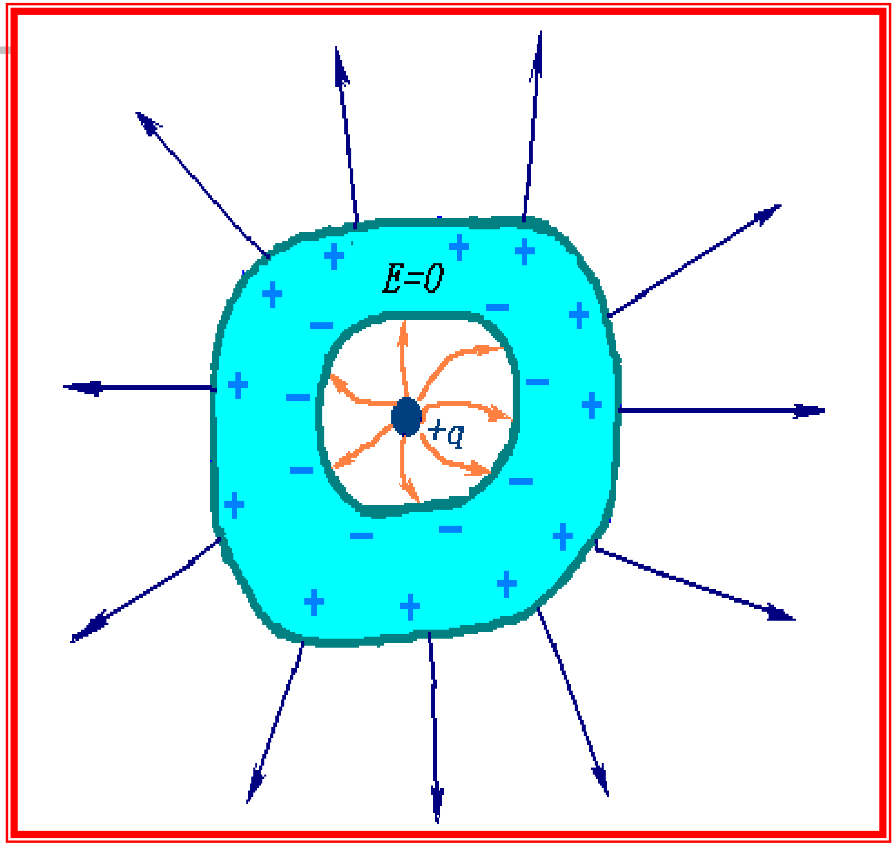


200万倍放大率

静电屏蔽

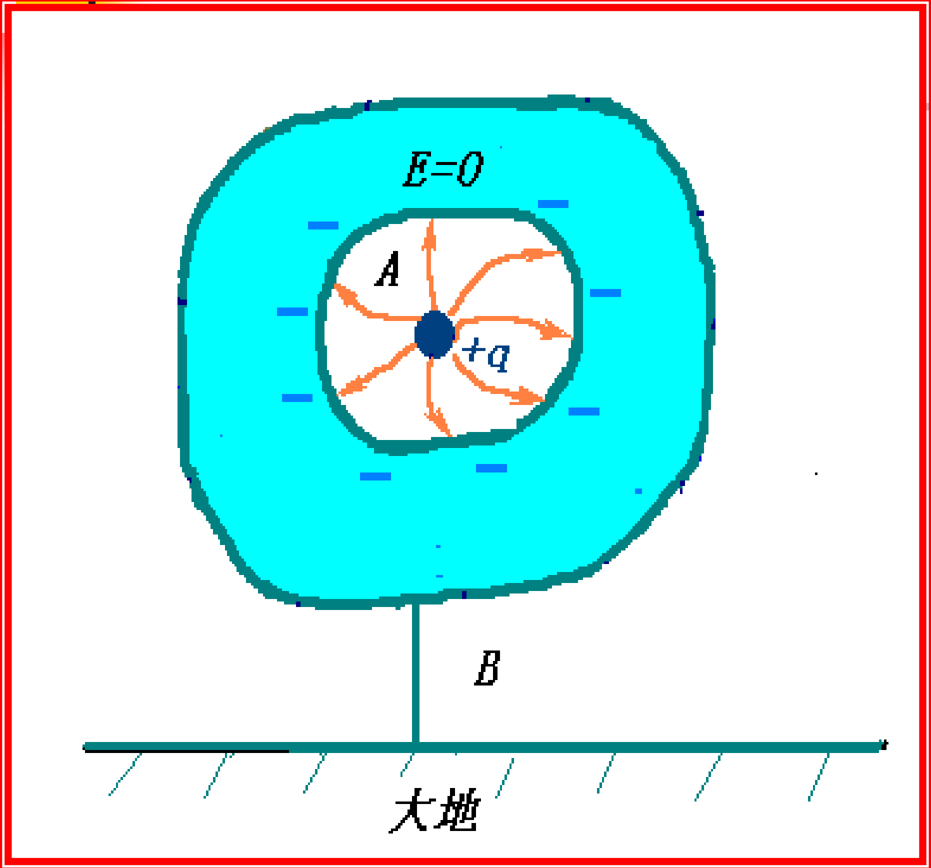
（1）腔外不影响腔内　　（2）腔内却影响腔外



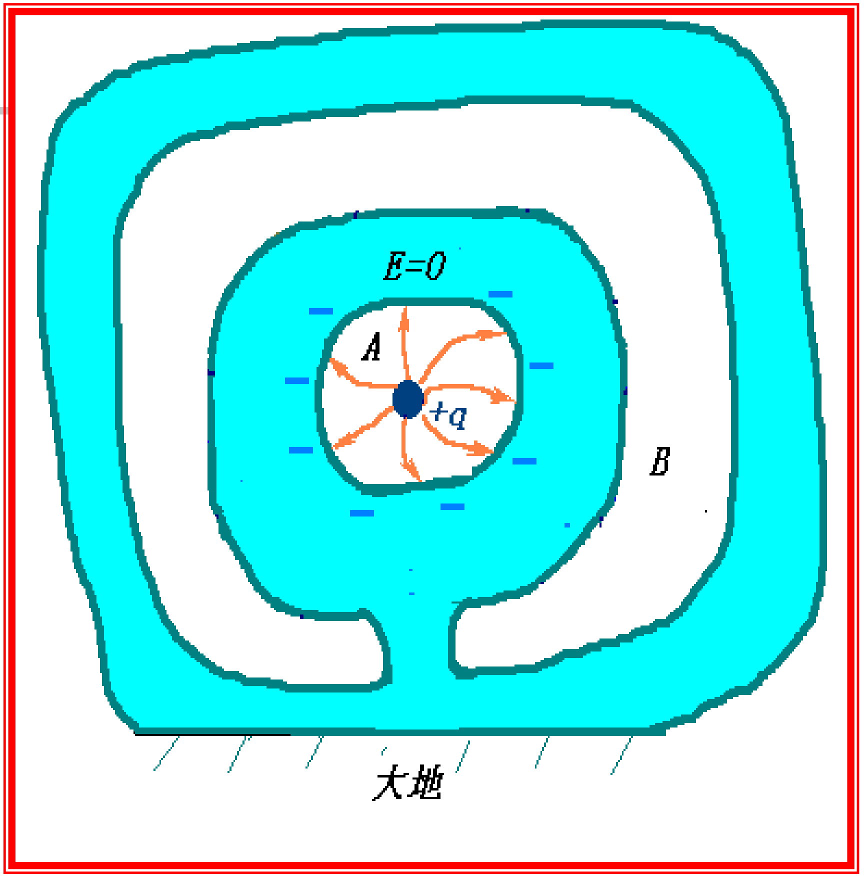


腔内无电荷　　腔内有电荷

（3）空腔接地，腔内腔外互不影响



腔内有电荷，导体腔接地



等效图

范德格喇夫起电机

- 金属薄壁的高压电极由绝缘支柱支撑着，绝缘材料制成的输电带在两个转轴间不停地运动。
- 喷电针排连接在喷电电源上，通过针尖在气体中的电晕放电，使周围与针尖极性相同的离子在电场作用下从针尖喷向输电带，使输电带充电。
- 随着输电带的运动，带上的电荷进入高压电极。极内刮电针排同高压电极相连和输电带之间所形成的电场，同样使气体电晕放电，从而使电荷转移到高压电极上去。
- 随着不停传送电荷，高压电极的电压很快地升高。

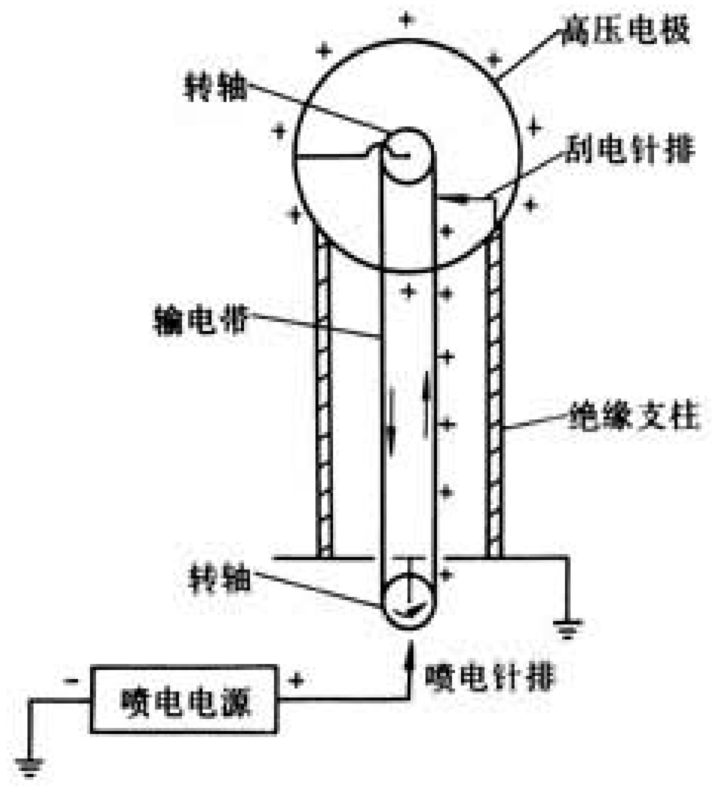
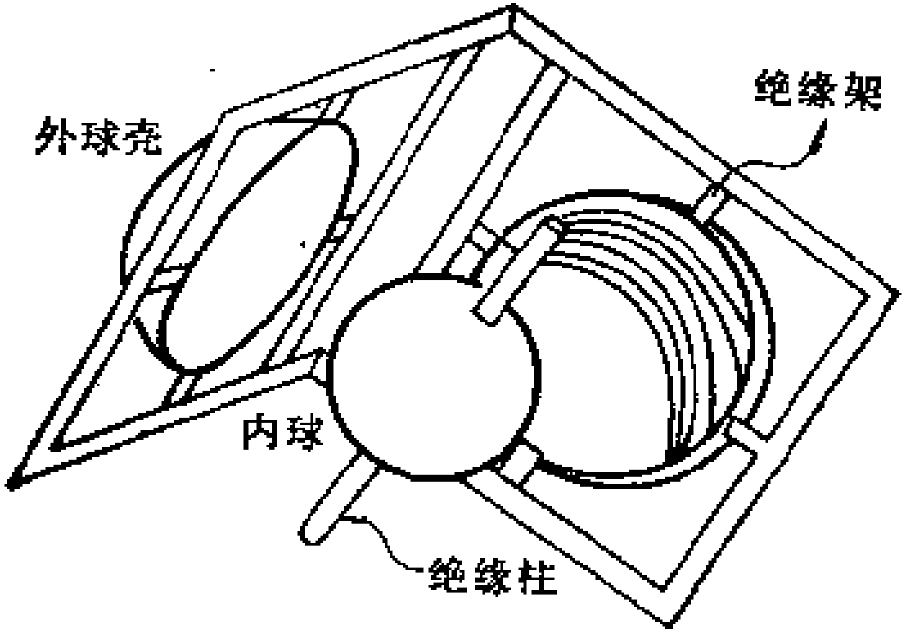


图 1　动带型静电高压发生器工作原理图

高斯定理和库仑定律的精确验证

导体内球固定在绝缘支柱上，导体外球壳为两个半球壳拼接而成。实验时，先使内球带电，然后用导线将内球与外球壳连接，使球壳带电，再抽走导线。在上述操作之后，将两半球壳打开，用精确的验电器检测内球上的电量。



卡文迪许的实验装置

§2.3　电容和电容器

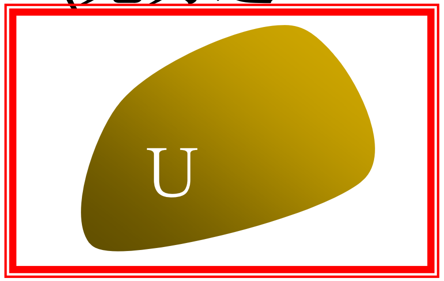
一、孤立导体的电容

- 孤立导体：空间只有一个导体，在其附近没有其它导体和带电体

Capacitor: A device used to store an electric charge.

- 电容定义：
  - 一个带有电荷为*Q*的孤立导体,其电势为U (无穷远处为电势零点)则有：

$$C = {}^{Q}\!/\!_{U}$$

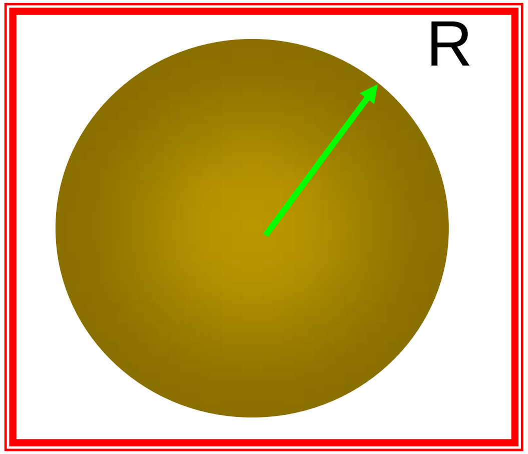


- 物理意义：
  - 电容表征使导体每升高单位电势所需的电量
  - 电容是描述导体或导体系容纳电荷的性能的物理量
  - C由导体的形状、大小及周围的环境决定(介质）
  - C的值与导体所带电量多少和电势U的大小无关

- 电容的单位:
  - C=Q/U
  - 单位：库仑/伏特，简称法拉，记作F
  - **1**μF(微法拉）＝**10**$^{-6}$F，**1**pF(微微法拉）=**10**$^{-12}$F

[例]：求孤立导体球的电容，设半径为R。

$$U=\int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



$$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$$

注:

- 孤立导体的电容越大，U一定时储存的Q越多
- 孤立导体的半径越大，电容越大

思考：用孤立导体球要得到**1F** 的电容，球半径为大？

$$C = 1\text{F} \text{时，} R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9(\text{m}) \approx 1.4\times10^3 R_E$$

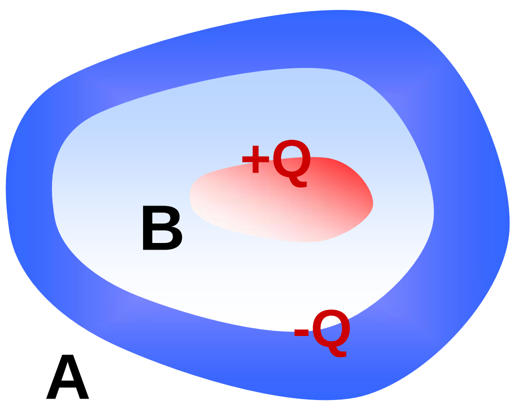
$$\text{R} = R_E\text{时，} C = 4\pi\varepsilon_0 R_E = 7\times10^{-4} F\text{，}(R_E = 6.4\times10^6 m)$$

- 孤立导体的电容一般很小，不能满足使用的需求
- 实际的电容附近存在其他导体，孤立导体近似难满足
- 导体的电势，与周围的电荷、导体及介质有关

二、电容器（capacitor）

- 构成：
  - 两个彼此绝缘而又互相靠近的导体组成的系统
  - 导体可以是金属板，金属薄膜等
  - 两个导体带有等量异号的电荷，±**Q**
  - 夹层绝缘物质可以是空气、纸、云母片以及塑料等

- 特点：
  - 增大电容值
  - 静电屏蔽



$$C = \frac{Q}{|U_A - U_B|} = \frac{Q}{U_{AB}}$$

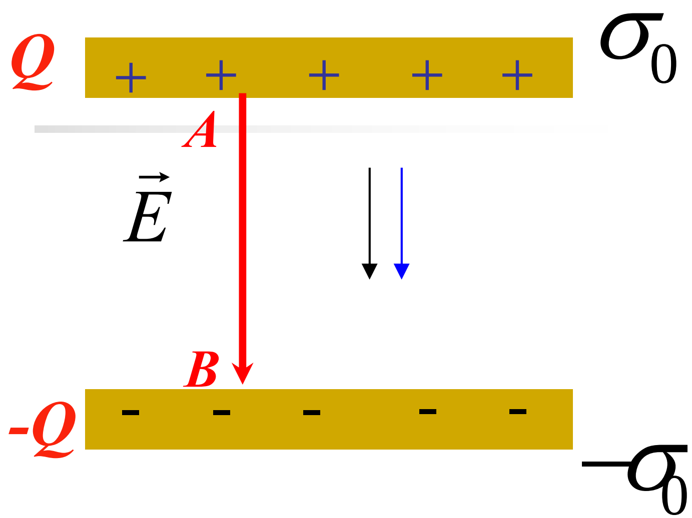
导体壳内部的场只由腔内的电量和几何条件及介质决定

- 分类
  - 结构：固定电容器、可变电容器和半可调电容器
  - 介质：无机介质、有机介质、电解电容器、液体介质
  - 用途：高频旁路、低频旁路、滤波、调谐、高频耦合、低频耦合、小型电容器。

- 作用：通交流、阻直流
  - 隔直流：作用是阻止直流通过而让交流通过。
  - 旁路：为交流电路中某些并联的元件提供低阻抗通路。
  - 滤波：将整流的锯齿波变为平滑的脉动波。
  - 整流：在预定的时间开或者关闭半导体开关元件。
  - 储能：储存电能，用于必须要的时候释放。

几种典型的电容器的电容

- 平板电容器，两极板面积 ***S***，两极间距***d***　　**(S>>d²)**



[解] 令两极板分别带电量±***Q***，则:

极间电场强度：$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

两级间电势差：$\Delta U = Ed = \dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

电容器的电容：$C = \dfrac{Q}{\Delta U} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

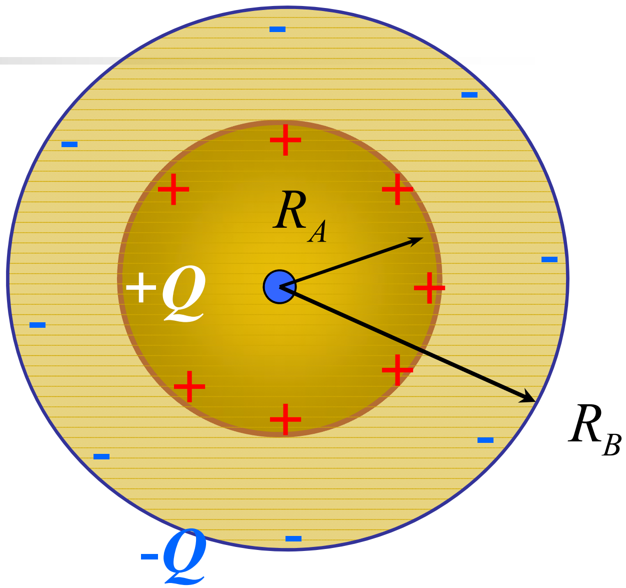
C ∝ S，S 为有效面积，即两极板相对之面积；

C ∝ 1／d，对其它形状电容器也适用；**C** 与极间介质有关

同心导体球壳

设内球面半径R_A，外球面半径R_B，带电量为Q

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$U_{AB}=U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

$$C=\frac{Q}{U_{AB}}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_AR_B}{R_B-R_A}$$

•当$R_A,R_B \gg R_B-R_A$ 时，可令$R_B-R_A=d$，$R_BR_A=R^2$，则同平板电容器 $C=4\pi\varepsilon_0R^2/d=\varepsilon_0S/d$

•当$R_B \gg R_A$ 时，同孤立导体球的电容 $C=4\pi\varepsilon_0R_A$

- 同轴柱形导体壳

设长为L，带电量为Q，内半径为R_A，外半径为R_B，且 $L >> R_B - R_A$

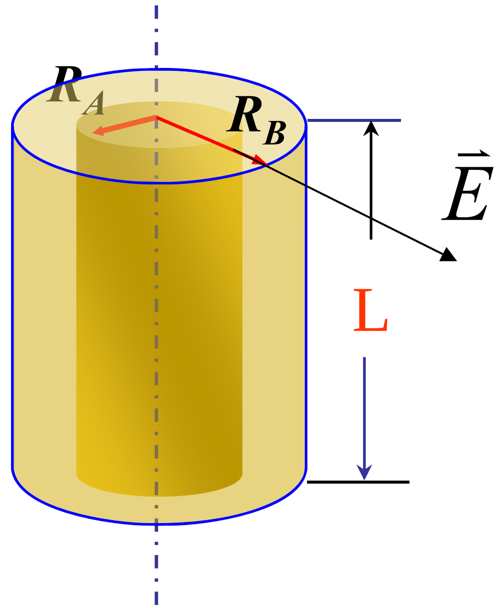
$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\because \ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \lambda = \frac{Q}{L}$$

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$C = Q / U_{AB}$$

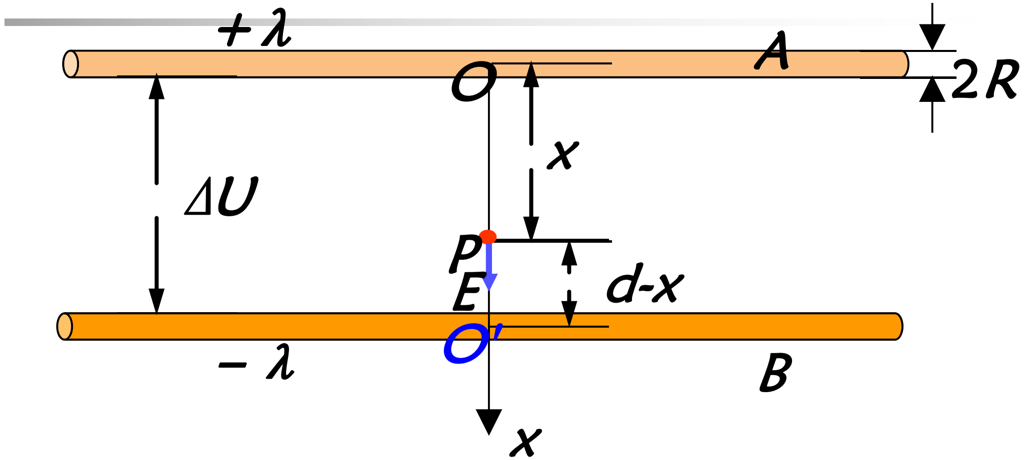


$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}}$$

■ 平行直导线

设有两个半径都为R的平行直导线,它们之间的距离为d，且d>>R, 求单位长度的电容c

解:根据场强叠加原理： +λ在x处的电场和 -λ在(d-x)处的电场相加, E的方向沿x轴的正方向,



$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x}\right)$$

$$\Delta U = \int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_R^{d-R} E dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{d-R}\left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x}\right)dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{R}$$

$$c = \frac{\lambda}{\Delta U} \approx \pi\varepsilon_0 / \ln(d/R)$$

小结

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

$$C = \varepsilon_0 S / d$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}$$

- 计算电容的一般方法：
  - 先假设电容器的两极板带等量异号电荷
  - 求出极板之间的电场强度 **E**
  - 求出极板之间的电势差 **U**
  - 代入定义式**C=Q/U**求出电容

三、电容器的连接

电容器的基本联接方式有两种：串联与并联。

1. 电容器串联

右图给出*N*个电容器串联的情况。由静电感应原理知，每一个电容器上带电量大小都是*Q*

$$Q = C_1U_1 = C_2U_2 = \cdots = C_{N-1}U_{N-1} = C_NU_N,$$

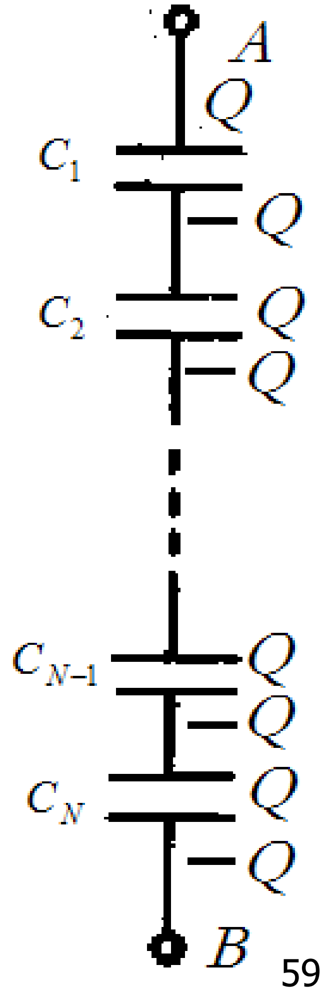
$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = \sum_{i=1}^{N} U_i = Q\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i},$$

得

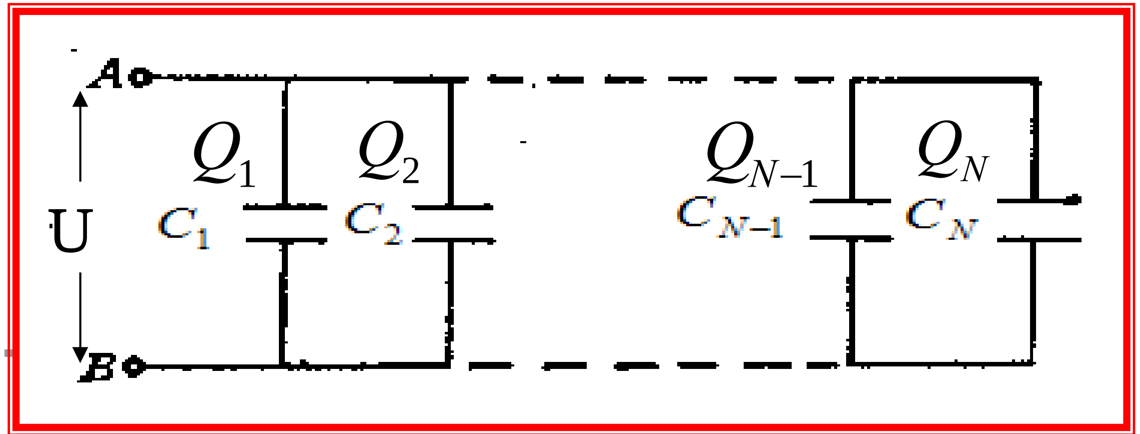
$$\frac{U}{Q} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}$$

故有

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}}$$



2. 电容器并联



右图给出N个电容器并联的情况。A、B两端**电势差为U**，**总电量大小为Q**，则

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{N-1} + Q_N$$
$$= C_1 U + C_2 U + \cdots + C_{N-1} U + C_N U.$$

总电容为C

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_{N-1} + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i .$$

并联可增加系统的电容值。相反，串联会减小电容值，但可提高整个电容器的耐压性能。

§2.4 电介质

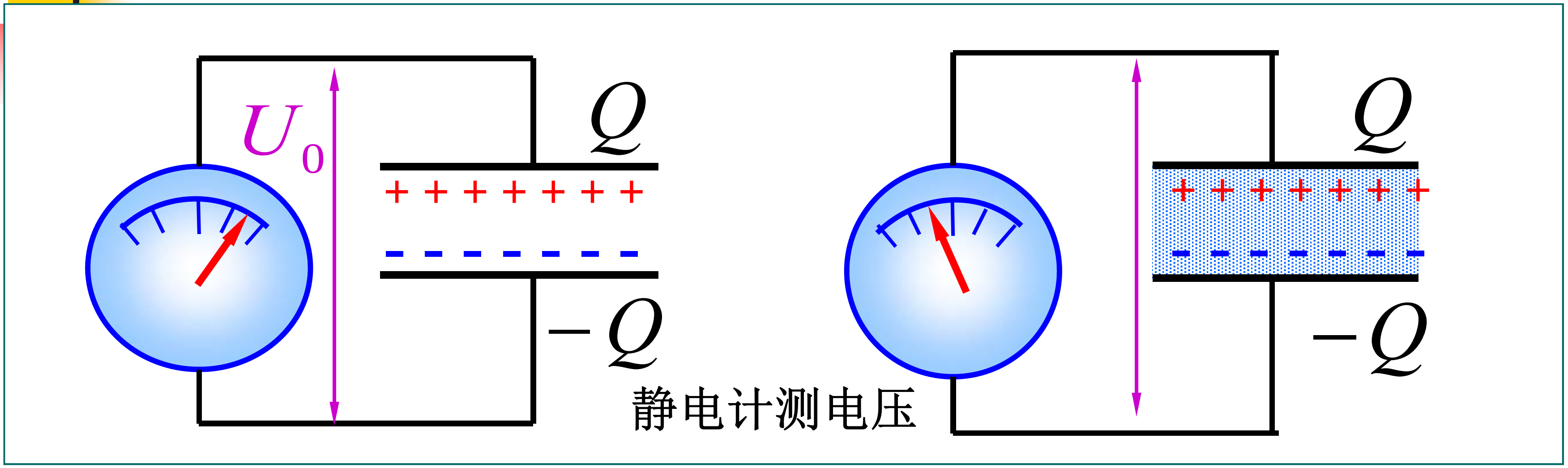
电介质 (Dielectric)

- 是由大量电中性的分子组成的电的绝缘体
- 分子中电子被原子核束缚得很紧
- **内部没有自由电荷，不能导电**
- 紧束缚的正、负电荷在外场中是否发生变化?

电场 $\longleftrightarrow$ **电介质**

相互作用?

一、法拉第实验：电介质对电场的影响



- 充电的电容器两板连接到静电器
- 静电计指针显示两板间的电势差
- 保持一切条件不变，**插入电介质**
- 静电计指示两极板间**电势差减小**

→ **介质与外电场发生相互作用**

一、法拉第实验：电介质对电场的影响

- 物理原因

$$U_0 > U$$

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

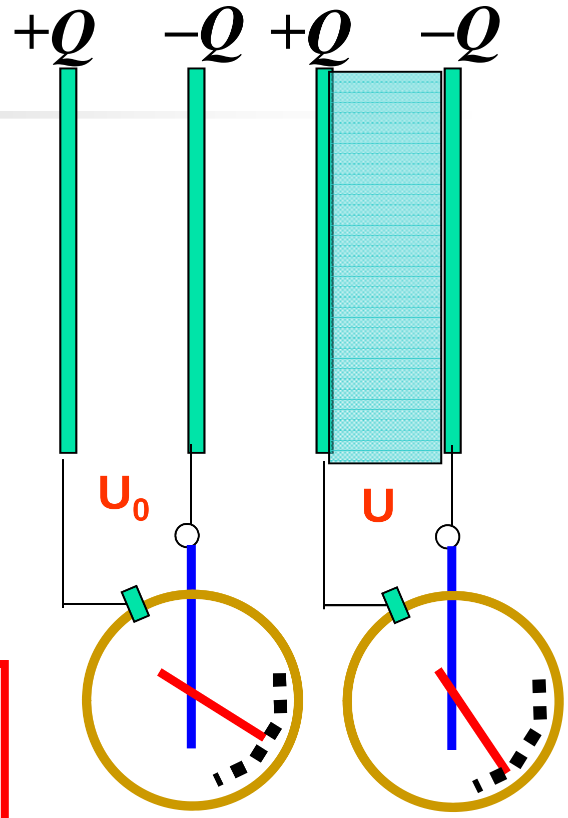
E’标志电介质的影响，它与外场E_0方向相反。

$$\vec{E}_0 > \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

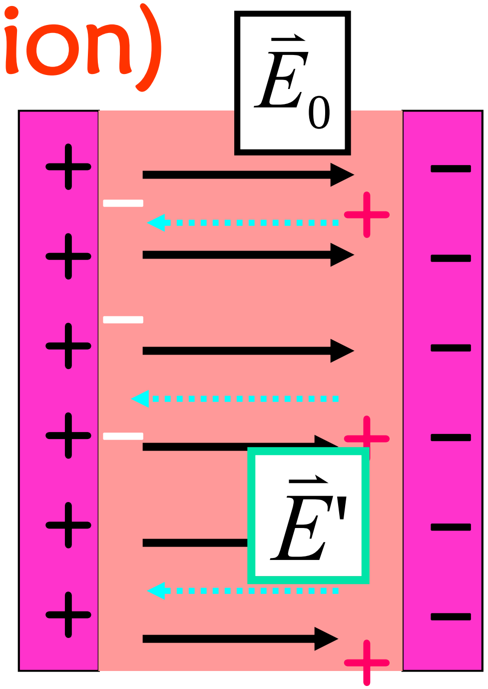
$$\because \vec{E} \neq 0,$$

$$\therefore E' \neq E_0 .$$



静电计测电压

二、介质极化 (polarization)



$\vec{E}'$与$\vec{E}_0$反向

只有电荷才能产生电场

电介质的表面出现了与极板电荷异号的电荷

极化电荷：电介质表面出现的这种电荷只能在分子范围内移动，与电介质是不可分离的，称为**极化电荷**或**束缚电荷**。

电介质在外电场作用下，其表面甚至内部出现极化电荷的现象，叫做**电介质的极化**。

电介质中的总电场为两个电场之和：$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \neq 0$

三、介质微观结构

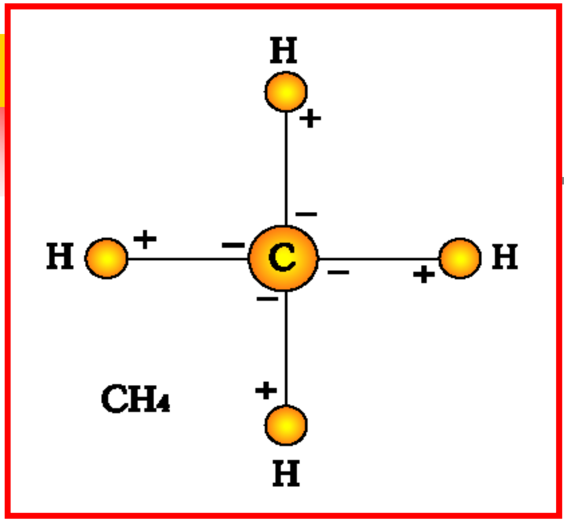
- **重心模型**：
  - 在分子中，所有正点荷和所有负点荷分别集中于两个几何点上，此点称为正、负电荷的重心。
  - 电荷分布和其重心都是对“时间”的一种平均。

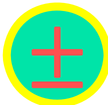
- 介质分类

  电介质分子可分为有极和无极两类

  - **无极分子**：分子电荷的正、负“重心”重合，在无外场作用下整个分子无固有电偶极矩。如：
    He, Ne, O_2, N_2, CH_4 …
  - **有极分子**：分子电荷的正、负“重心”分开，在无外场作用下整个分子有固有电偶极矩，如：
    水, HCl, NH_3, CH_3OH …

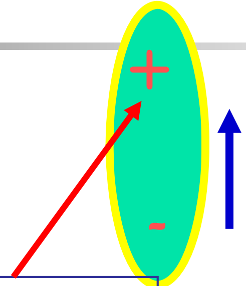
无极分子



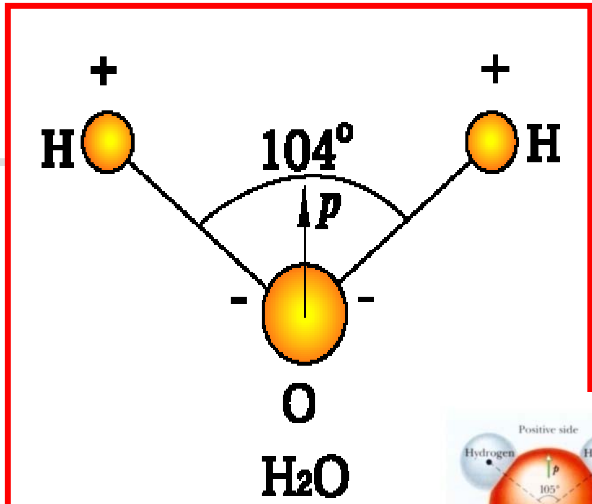


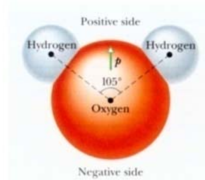
有极分子

$$\mathbf{p} = q\mathbf{L}$$

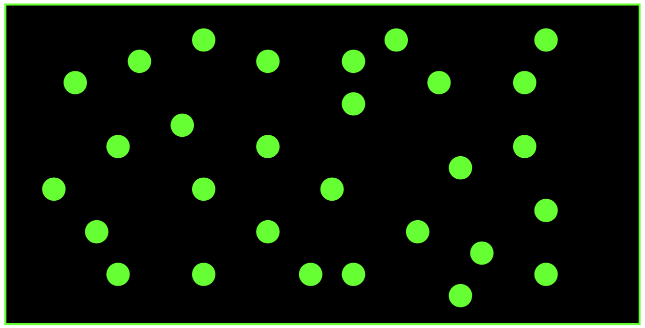


电子云的
正电中心



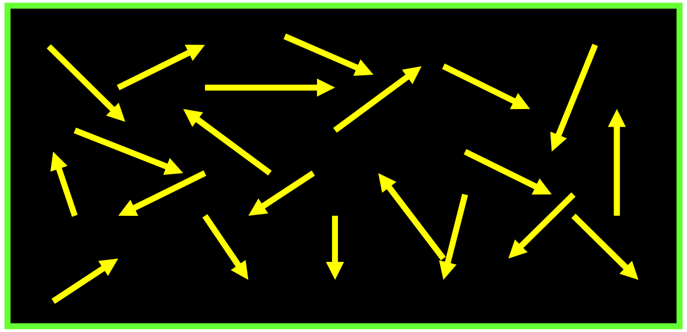


无外场时(热运动)



无序排列
对外不呈
现电性!

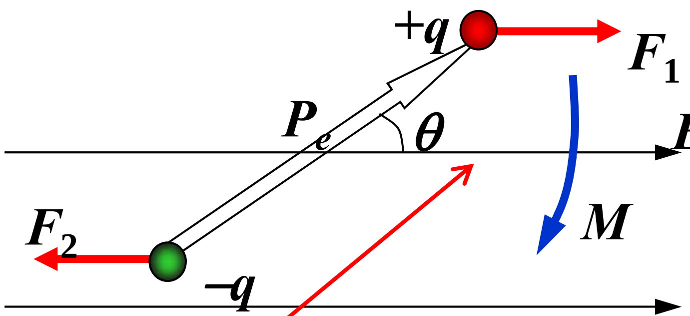
整体对外不显电性

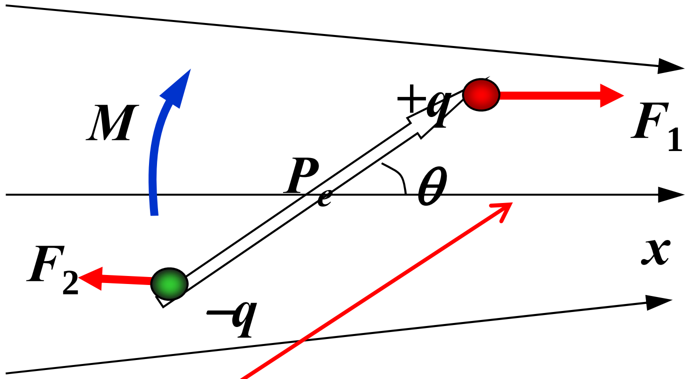


$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{L} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$$

电偶极子在E中的受力

电偶极子在E中的力矩





$\Sigma\mathbf{F} = 0$(均匀电场）；$\Sigma\mathbf{F} \neq 0$(非均匀电场）

均匀外场中电偶极子不受力；
在外电场力矩作用下，**p**总是朝向**E**一致的方向偏转。

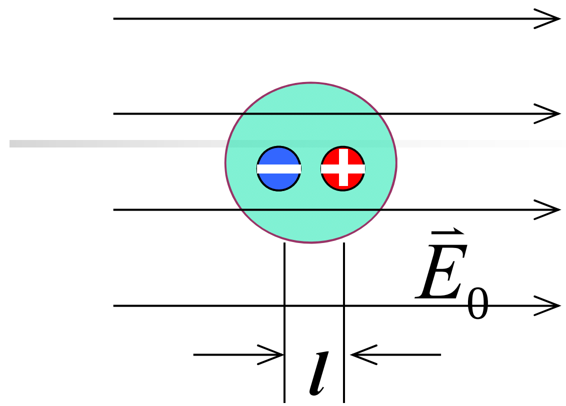
四、极化微观模型

(1) 无极分子的极化

- 在进入外电场前，无极分子的正、负电荷重心重合，没有电偶极矩。

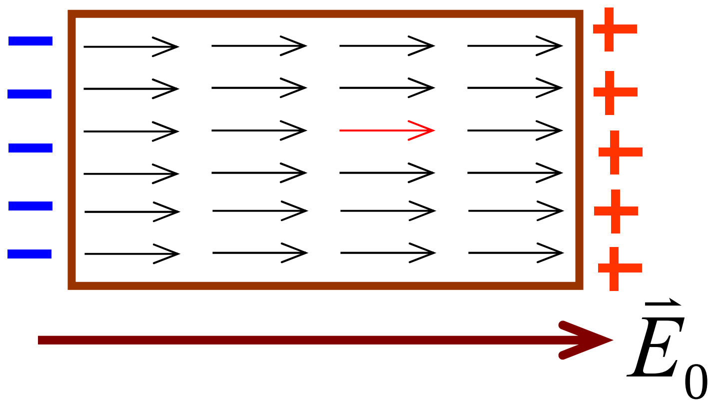
$\mathbf{p}_{分子} = 0$　　$\sum \mathbf{p}_{分子} = 0$

无极分子



- 进入外场后，在电场的作用下，正、负电荷的中心发生位移，不再重合，形成电偶极子，表面出现束缚电荷。

- 这时极化是电荷重心相对位移的结果，称为**位移极化**。



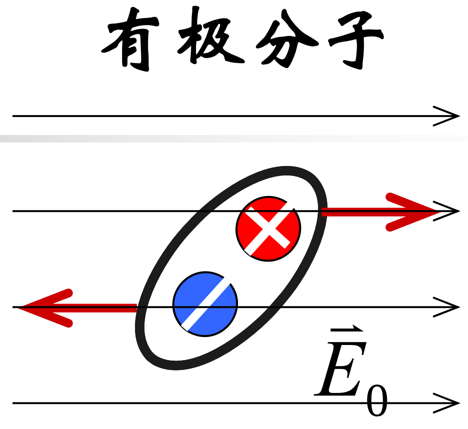
位移极化

$$\sum \vec{p}_{分子} \neq 0$$

(2) 有极分子的极化

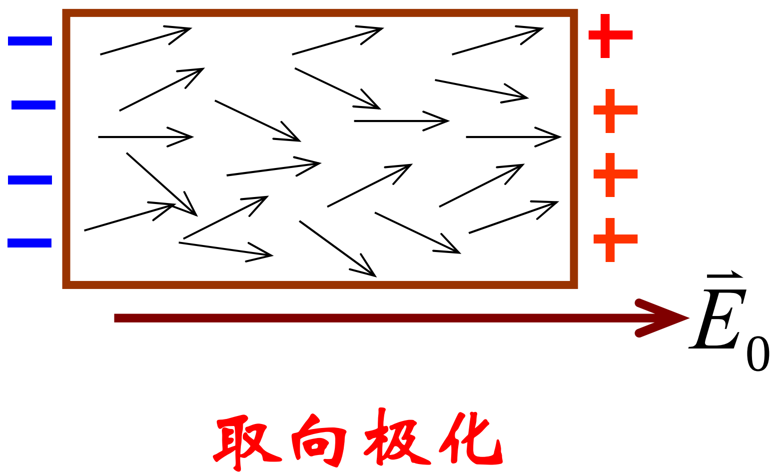
- 进入外场前有极分子就相当一个电偶极子，只是由于热运动而排列无序。

$\mathbf{p}_{分子} \neq 0$ $\sum \mathbf{p}_{分子} = 0$



- 进入外场后，分子受到力矩的作用而发生偏转，电偶极矩转向外场方向。所以，这种极化称为**取向极化**。

$\sum \mathbf{p}_{分子} \neq 0$



几点说明：

- 在外电场中，均匀介质内部各处仍呈电中性，只在介质表面出现极化电荷。
- 极化电荷不能离开电介质到其它带电体，也不能在电介质内部自由移动，它不象导体中的自由电荷能用传导方法将其引走。
- 介质极化：无电荷宏观移动，只有微观迁移，对应束缚电荷的变化；静电感应：有自由电荷的宏观移动，出现感应电荷。
- 无外场下，所具有的电偶极矩称为固有电偶极矩；有外电场时，产生的电偶极矩称感应电偶极矩（约是前者的10^{-5})。
- 无极分子只有位移极化，感生电矩的方向沿外场方向；有极分子有上述两种极化机制，取向极化远强于位移极化（约大一个量级）。
- 极化电荷的电场使介质中实际电场减弱。

电介质与导体的区别

	电介质	导体
导电性	不导电	导电
在静电场中	电子和原子核在电场力作用下在原子范围内作微观的相对位移	自由电子在电场力作用下脱离所属原子作宏观移动
静电平衡时	内部场强 $E \neq 0$	内部场强 $E = 0$

§2.5 极化强度矢量P

一、极化强度矢量P

二、P与极化电荷的关系

三、P与E的关系

一、极化强度矢量P (electric polarization)

- 引入：电介质极化后，在其内部任意一宏观体积元ΔV内$\boxed{\sum \vec{p}_{分子} \neq 0}$→如何定量描述介质的极化？

- 定义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和.

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V} \quad or \quad \vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$$

- 描述介质在外电场作用下被极化程度和方向的量
- 单位：库仑/米^2， $C \cdot m^{-2}$。

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$$

微观量

介质中一点的P(宏观量)

介质的体积元，宏观小微观大(包含大量分子)

- 极化强度是一个宏观矢量的点函数，其微观值无意义。
- 电介质中每一个点有唯一的极化强度，各处的**P**值相同，则称电介质在电场中均匀极化。
- **P**反映分子电矩$\mathbf{p}_{分子}$的大小和空间有序化程度

极化电荷

- 从原来处处电中性变成出现了宏观的极化电荷
- 可能出现在介质表面 (均匀介质),面分布
- 可能出现在整个介质中(非均匀介质),体分布

$$q'(\sigma',\rho')$$

退极化场

- 极化电荷会产生电场——附加场(退极化场)
- 极化过程中：极化电荷与外场相互影响、相互制约，过程复杂——达到平衡(不讨论过程)
- 平衡时总场决定了介质的极化程度

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

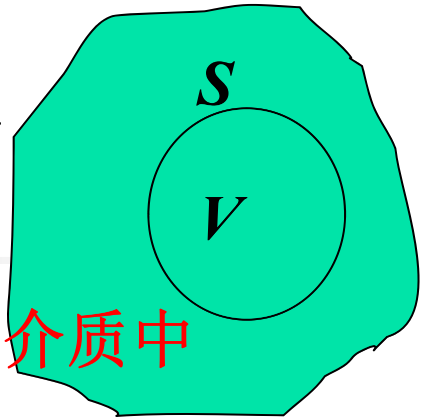
极化的后果

$$\left.\begin{cases}\vec{P} \\ q'(\sigma', \rho') \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'\end{cases}\right\}\text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——介质极化
- 它们间必有联系，这些关系——电介质极化遵循的规律

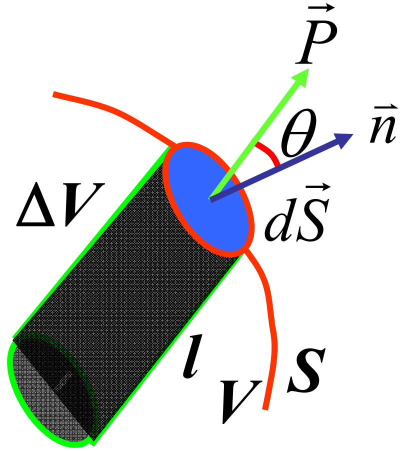
二、P与极化电荷的关系

1) P与ρ_e′关系：以位移极化为模型讨论



$\mathbf{p}_{分子} = q\mathbf{L},$ $\mathbf{P} = n\mathbf{p}_{分子} = nq\mathbf{L}$

- 在介质中取一长l、底面积dS斜柱体
- 其中 l 是平均分子正, 负电荷中心距
- 设L矢量穿过dS，每个分子对dV内电量贡献为$-q$
- dV内电量可记为为dq'，分子数密度n:



$$dq' = -nqdV = -nq(ldS\cos\theta)$$

$$= -nq\mathbf{L}\cdot d\mathbf{S} = -\mathbf{P}\cdot d\mathbf{S},$$

又 $dq' = \rho'_e dV$，两右边相等，

故：

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho'_e dV$$

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'_e$$

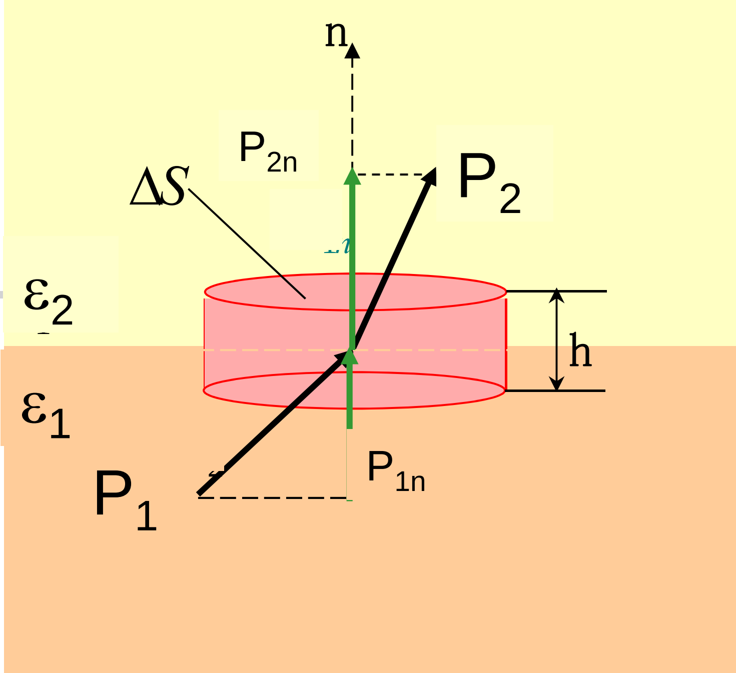
$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho'_e \, dV = -Q';$$

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'_e$$

- 均匀介质，均匀极化：**P**是常矢量， ρ'=0
- 非均匀介质：非均匀极化， **P**是空间位置矢量，ρ' ≠ 0

2) P与σ’$_e$关系

- 在介质分界面取一面元 ΔS
- 过ΔS作扁盒型高斯面，h小



$$\because \quad Q' = -\oiint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \sigma'_e dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot \mathbf{n} dS$$

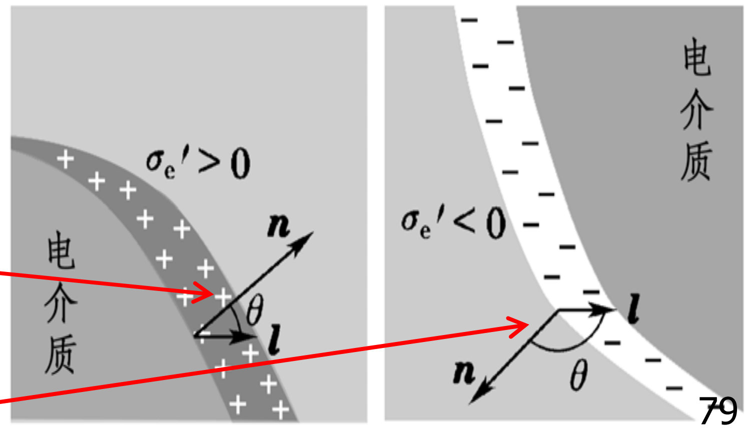
$$\sigma'_e = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot \mathbf{n}$$

电介质2为真空时

$$\sigma'_e = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} \quad (\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}, \mathbf{P}_2 = 0)$$

$$\theta < 90^\circ, \sigma'_e = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n > 0$$

$$\theta > 90^\circ, \sigma'_e = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n < 0$$



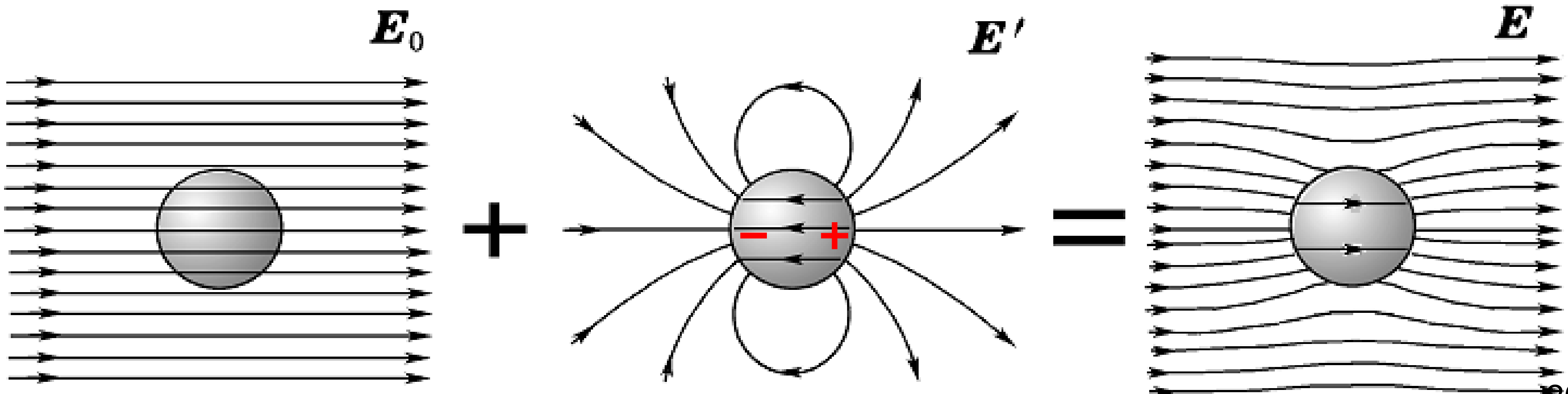
退极化场

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

$$\vec{E}_0 \longrightarrow \text{介质极化} \longrightarrow q'(\sigma'_e) \longrightarrow \vec{E}'$$

影响

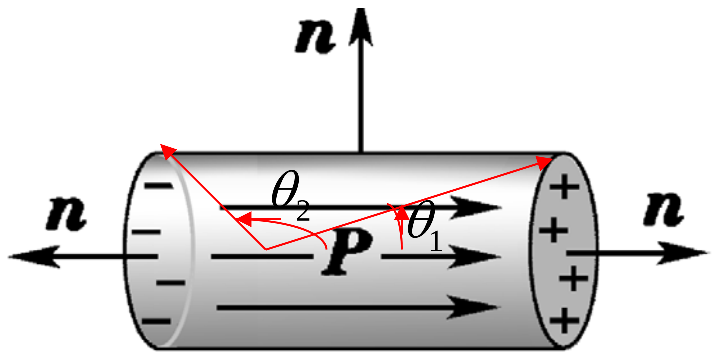
- **在电介质内部：** **E'**是由极化电荷产生的附加场，与外场**E₀**方向相反，起着减弱极化的作用，称作退极化场
- **在电介质外部：** 附加场大部分与外电场方向相同，加强



[例2.3] 沿轴均匀极化的电介质圆棒；棒长**2*l***，半径***R***，极化强度矢量**P**。求极化电荷的分布和体内轴线上的**E'**。

[解]

1) P是常数　$\rho'_e = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$



2)

$$\sigma_e' = \vec{P} \cdot \vec{n};\quad 左面\ \theta = \pi, \sigma_e' = -P$$

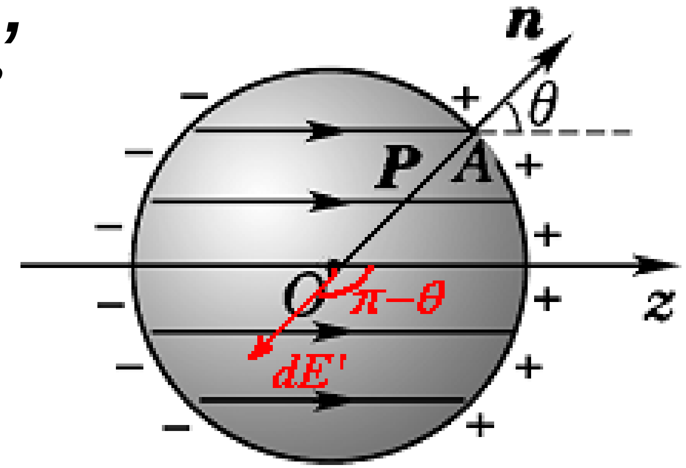
$$侧面\ \theta = \frac{\pi}{2}, \sigma_e' = 0;\quad 右面\ \theta = 0, \sigma_e' = P$$

3) 退极化场等效与两圆盘产生的电场，由[例1.10]可推出：

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}\left(2 - \cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

[例2.4] 均匀极化的电介质球，半径为R，极化强度矢量**P**, 求表面上极化电荷分布和球心处的退极化场

[解]（1）球关于z轴旋转对称,其表面任意一点的极化电荷面密度σ_e'只与θ有关,则有:



$$\sigma_e' = P\cos\theta \begin{cases} \text{右半球}, \quad \theta < 90^\circ, \sigma'_e > 0 \\ \text{左半球}, \quad \theta > 90^\circ, \sigma'_e < 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}, \sigma'_e = 0; \quad \theta = 0、\pi, \ |\sigma'_e| \text{最大} \end{cases}$$

（2）球心退极化场：(取小面元dS,极化电荷为dq')

$$dq' = \sigma' dS = P\cos\theta dS = P\cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\vec{E}' = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'}{R^3}\vec{R} \qquad \vec{E}' = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

三、P与E的关系

- 极化规律：$\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$
  - 电介质内任一点的**P**是由在该点的总电场**E**决定的。
  - 不同的电介质极化规律不同，可由实验来测定

- 介质分类：

  根据介质极化规律的不同，可将介质分为:
  - 各向同性电介质
  - 各向异性电介质
  - 铁电体
  - 永电体

- 各向同性电介质
  - P和E方向相同，且有简单的正比关系

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}}$$

  - 电极化率 $\chi_e \geq 0$
  - 当场强不是很大是， χ_e与E无关，为线性介质
  - 当场强很大时，χ_e与E有关，为非线性介质

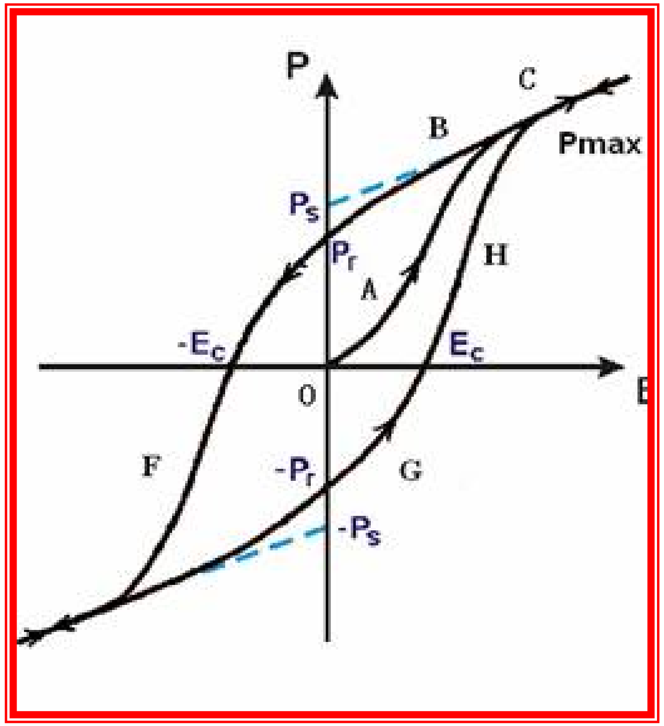
- 各向异性电介质
  - P与E不平行，关系较为复杂
  - χ_e常表示为张量形式，称做极化率张量
  - 对线性介质，极化率张量与E无关，且为对称张量

$$
\begin{cases}
P_x = (\chi_e)_{xx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{xy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{xz}\varepsilon_0 E_z, \\
P_y = (\chi_e)_{yx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{yy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{yz}\varepsilon_0 E_z, \\
P_z = (\chi_e)_{zx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{zy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{zz}\varepsilon_0 E_z.
\end{cases}
$$

对称张量，即 $(\chi_e)_{xy} = (\chi_e)_{yx}$，$(\chi_e)_{xz} = (\chi_e)_{zx}$，$(\chi_e)_{yz} = (\chi_e)_{zy}$。

- 铁电体
  - 极化状态不仅决定于电场，还与极化历史有关
  - 铁电体极化过程中极化强度矢量P随外场的变化曲线是非线性的，出现电滞回线，有剩余极化强度；
  - 极化强度P和电场强度E有复杂的非线性关系，χ_e不是常量，它随E变，最大可达几千；
  - 当温度超过某一温度时，铁电性消失，这一温度叫做居里温度；
  - 铁电体同时也是压电体，但压电体不一定是铁电体
  - 典型的铁电体有酒石酸钾钠单晶、钛酸钡陶瓷等

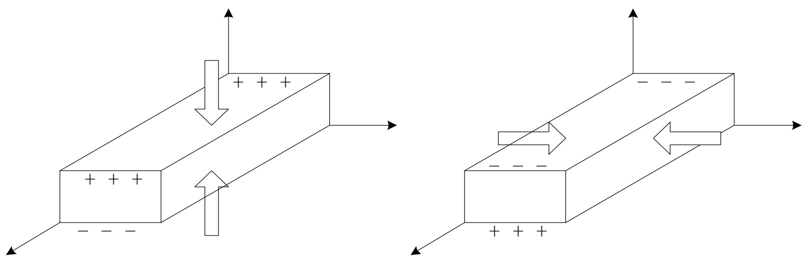
电滞回线



C：饱和点

P_r：剩余极化强度

- 正压电效应
  - 当晶体受到某固定方向外力的作用时，内部就产生电极化现象, 同时在某两个表面上产生符号相反的电荷；
  - 当外力撤去后，晶体又恢复到不带电的状态
  - 当外力作用方向改变时，电荷的极性也随之改变；晶体受力所产生的电荷量与外力的大小成正比。



- 逆压电效应
  - 对晶体施加交变电场引起晶体机械变形的现象，又称电致伸缩效应。

驻极体（永电体）

- 一种具有持久性极化的固体电介质。
- 如当蜡和松香的混合物在外加的强电场中从融熔态固化后，再除去外电场时，混合物固体会长期保持极化状态
- 驻极体可以在周围空间产生电场，因此可以类比于永磁体的一种带电体。
- 室温下驻极体的极化状态可以长期保存，但在高温下则衰减得很快。
- 驻极体可作为静电场的源，如在电容式声电换能器中, 可用驻极体代替电容的一个极板, 从而省去了直流偏压。

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$

电极化率

- P与E 是否成正比(线性与非线性)
  - 凡χ_e不含E的介质——线性介质
  - 凡χ_e含E的介质——非线性介质
- 介质性质是否随空间坐标变 （空间均匀性）
  - χ_e—与空间坐标无关：均匀介质；
  - χ_e—坐标的函数：非均匀介质
- 介质性质是否随空间方位变（方向均匀性）
  - χ_e—标量：各向同性介质；
  - χ_e—张量：各向异性介质
- 以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质
  - 空气：各向同性、线性、一般是非均匀介质
  - 水晶：各向异性、线性介质
  - 酒石酸钾钠、钛酸钡：各向同性非线性介质——铁电体

感应、自由　　极化、束缚

- **感应电荷**：导体中自由电荷在外电场作用下作宏观移动使导体的电荷重新分布——感应电荷
  - 特点：导体中的感应电荷是自由电荷，可以从导体的一处转移到另一处，也可以通过导线从一个物体传递到另一个物体

- **极化电荷**：电介质极化产生的电荷
  - 特点：极化电荷起源于原子或分子的极化，因而总是牢固地束缚在介质上，既不能从介质的一处转移到另一处，也不能从一个物体传递到另一个物体。若使电介质与导体接触，极化电荷也不会与导体上的自由电荷相中和。因此往往称极化电荷为束缚电荷。

束缚电荷 ⟺ ? 极化电荷　否！

- 用摩擦等方法使绝缘体带电
  - 绝缘体上的电荷——束缚电荷
  - 实际上它是一种束缚在绝缘体上的自由电荷
  - 并非起源于极化，因而可能与自由电荷中和
- 介质在随时间变化的电场作用下
  - 由极化产生的极化电荷——束缚电荷(约束在原子范围内)
  - 不可能与自由电荷中和
  - 但它能变化并产生电流——极化电流，由$\partial P/\partial t$决定
- 自由、束缚是指电荷所处的状态；
- 感应、极化或摩擦起电是指产生电荷的原因

[例2.5]平行板电容器间充满极化率为χ_e的均匀线性各向同性介质，极板自由电荷面密度为σ_{e0}，求介质的σ'_e、P、E 和电容C

[解] 关键是求E ,注意: $\mathbf{E}_0, \mathbf{P}, \mathbf{E}'$和$\mathbf{E}$均与极板垂直

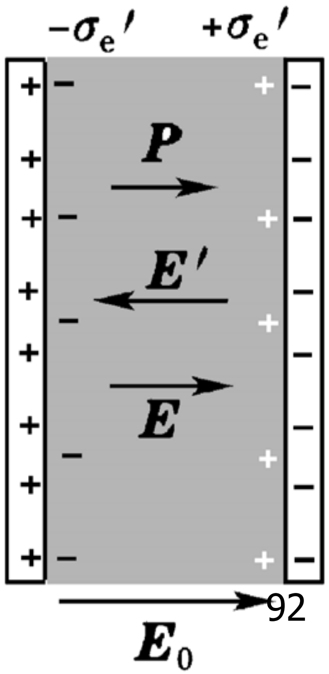
$$E = E_0 + E', \quad E_0 = \sigma_{e0}/\varepsilon_0, \quad E' = -\sigma'_e/\varepsilon_0 = -P/\varepsilon_0 = -\chi_e E$$

$$\therefore E = E_0/(1+\chi_e) = \sigma_{e0}/[(1+\chi_e)\varepsilon_0]$$

$$\sigma'_e = P = \chi_e \varepsilon_0 E = \frac{\chi_e \sigma_{e0}}{1+\chi_e}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_{e0} S}{Ed} = \frac{(1+\chi_e)\varepsilon_0 S}{d} = (1+\chi_e)C_0 = \varepsilon_r C_0$$

令$\varepsilon_r \equiv (1+\chi_e)$，称相对介电常数



§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

- 高斯定理
- 环路定理
- 电位移线
- 举例应用

真空中静电场的基本定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q,$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0.$$

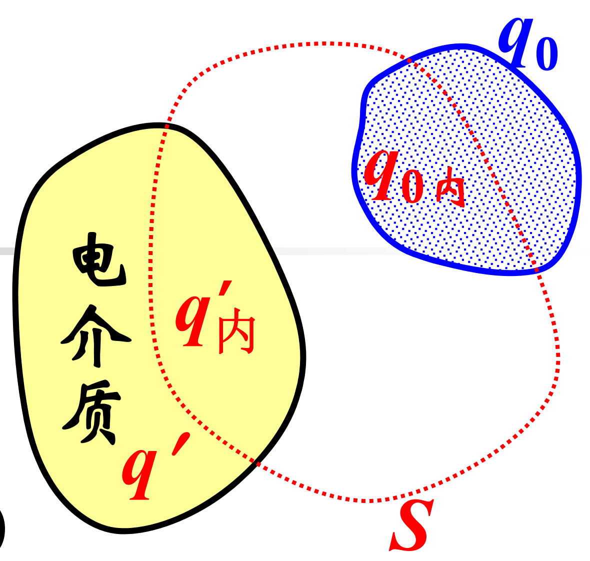
- 电介质在外场中会被极化，出现极化电荷

- 不但自由电荷要激发电场 $\mathbf{E_0}$，电介质中的束缚电荷同样也要在它周围空间激发电场$\mathbf{E'}$（无论电介质内部或外部）

- 由电场强度叠加原理，在有电介质时，某点的总电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

一、高斯定理



$$\left.\begin{array}{l} q_0 \rightarrow \mathbf{E}_0 \\ q' \rightarrow \mathbf{E}' \end{array}\right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right)$$

又 $Q' = \sum q'_{内} = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$

$$\Rightarrow \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{0内} - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \quad \oiint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0内}$$

令 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 称D为电位移矢量

于是有： 单位是C/m^2 (库每平方米)

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0内} = Q_0$$

电介质中的高斯定理

对各向同性介质： $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$

$$\therefore \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$$

ε为绝对介电常数，

ε_r为相对介电常数。

如果是带电体，令ρ_{e0}为自由电荷密度，ρ'_e为极化电荷密度，ρ_e为总电荷密度：

$$\rho_e = \rho_{e0} + \rho'_e$$

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V (\rho_{e0} + \rho'_e) dV$$

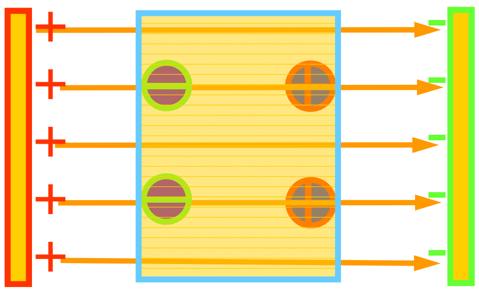
由前结果 $\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_{e0} dV = Q_0$

可得电介质中高斯定理微分表达式：

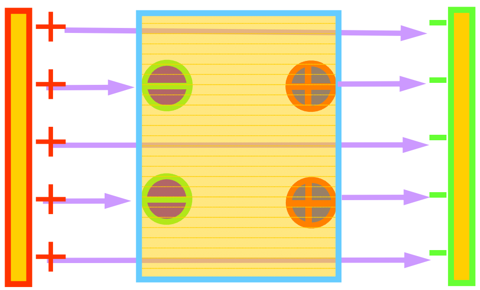
$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{e0} + \rho'_e), \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{e0}}$$

三、电位移线

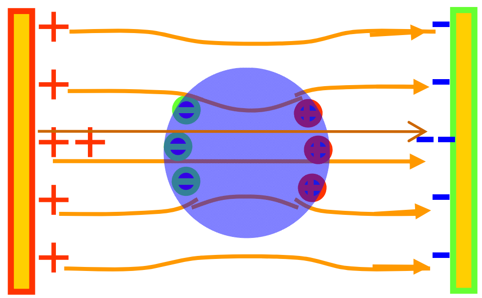
- D矢量，是表述有电介质时电场性质的一个辅助量，在有电介质时的电场中，各点的场强都对应着一个电位移矢量。
- 仿照电场线的画法，可以作一系列电位移线，线上每点的切线方向就是该点电位移矢量的方向，并令垂直于 线单位面 积上通过的 线条数，在数值上等于该点电位移D的大小。
- D线和E线：



电位移线

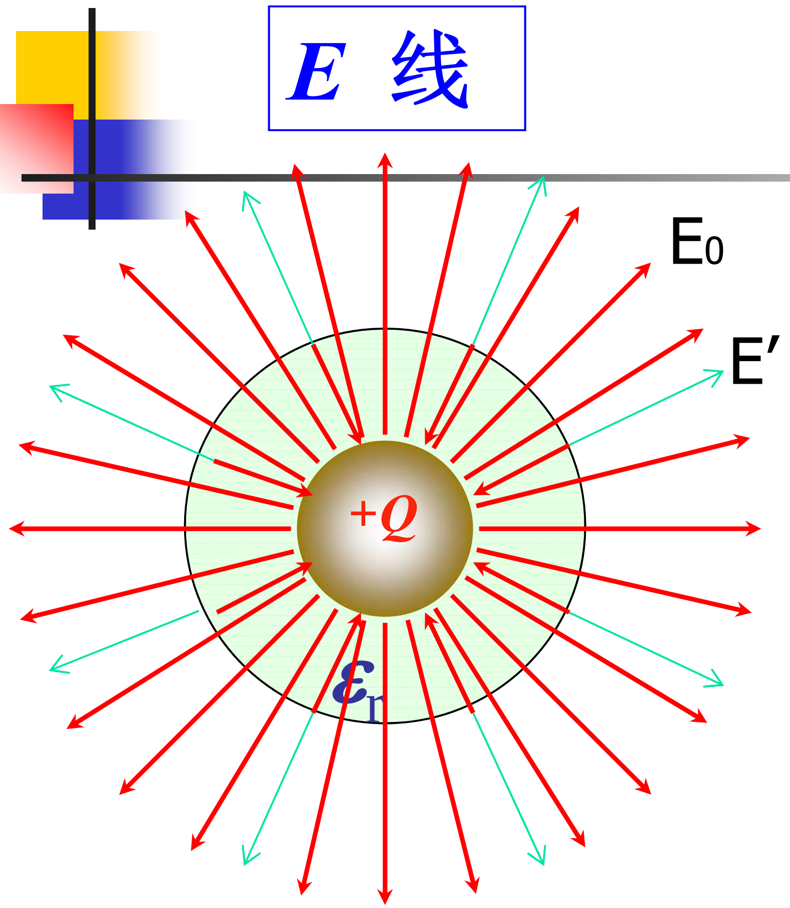


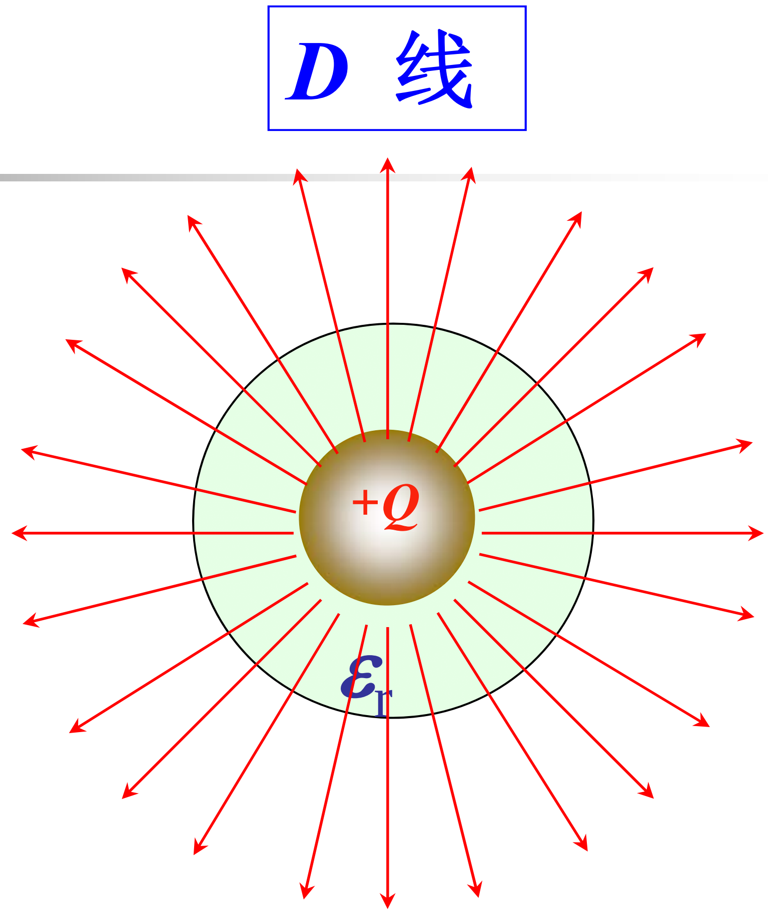
电场强度线



线性非均匀介质的D线

线性均匀各向同性介质情况





电力线(E线)不但与自由电荷有关，而且与束缚电荷有关

电位移线(D线)却只与自由电荷有关

二、环路定理

- 电介质的存在，只是增加了一些新的场源(电荷)
- 电介质的存在，并没有改变电场的基本性质
- 静电平衡时，自由电荷和极化电荷满足库仑定律，产生的电场都是静电场
- 总电场的保守场性质不变，所以仍满足环路定理：

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=0 \Longrightarrow \nabla\times\mathbf{E}=0$$

其中$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'$

介质中静电场仍然是一个无旋的保守场。

四、举例

[例2-6-1]证明均匀线性各向同性介质内ρ_0=0处必有ρ'= 0。

[解] $\because \Delta q'_{内} = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$

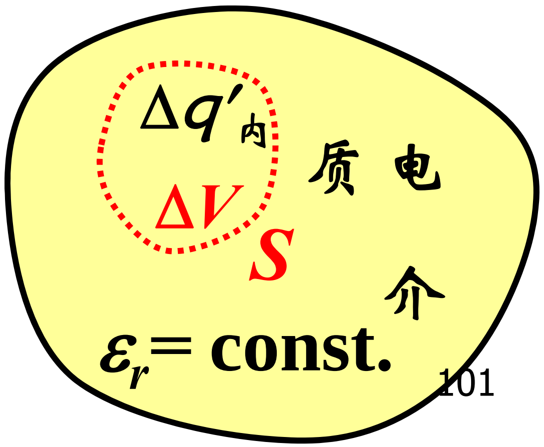
又 $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon} = (1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}$

$$\Delta q'_{内} = -\oiint_S (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}\cdot d\vec{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\cdot \Delta q_{0内}$$

$$\rho' = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q'_{内}}{\Delta V} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\cdot \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q_{0内}}{\Delta V}$$

$$= (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\rho_0$$

$\therefore \rho_0 = 0 \rightarrow \rho' = 0$。



[例2-6-2]求相对介电常数为 ε_r 的无限大均匀线性各向同性电介质中点电荷 q的场分布。

[解]：q的场是球对称场，可以以电荷为球心，作球形高斯面

$$\boxed{\begin{gathered}\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \\ D\cdot 4\pi r^2 = q\end{gathered}} \longrightarrow \boxed{D = \frac{q}{4\pi r^2}} \longrightarrow \boxed{E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{4\varepsilon\pi r^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}}$$

$$\boxed{U = U_0/\varepsilon_r} \longrightarrow \boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E_0}$$

介质内场强削弱了 $1/\varepsilon_r$ 倍；电容增加了 ε_r 倍， ε_r 又称为电容率。

[例2-6-3] 导体球R_1、Q_0和均匀线性各向同性介质球壳R_2、ε_r. 求E、σ'_e、U

[解]一维对称问题。分三个区分别讨论。

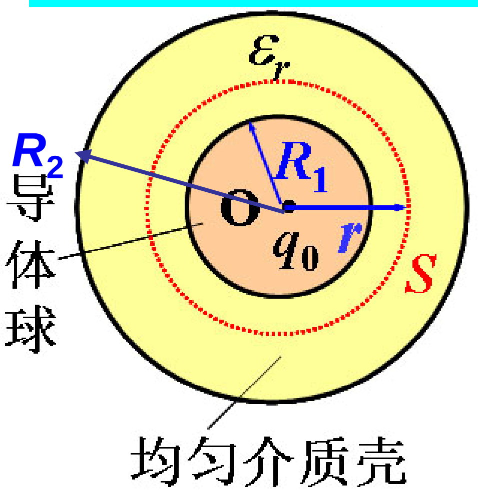
1) 利用高斯定理：$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = D\cdot 4\pi r^2 = Q_0$

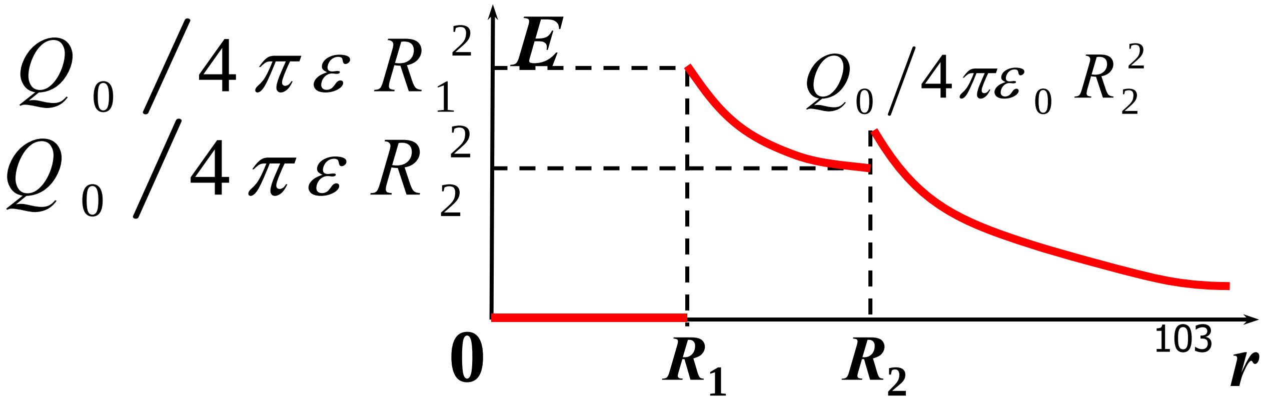
$$\vec{D} = 0 \qquad \vec{E}_I = 0 \qquad (r < R_1)$$

$$\vec{D} = \frac{Q_0\vec{r}}{4\pi r^3} \qquad \vec{E}_{II} = \frac{Q_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3} \qquad (R_1 \le r \le R_2)$$

$$\vec{D} = \frac{Q_0\vec{r}}{4\pi r^3} \qquad \vec{E}_{III} = \frac{Q_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r > R_2)$$

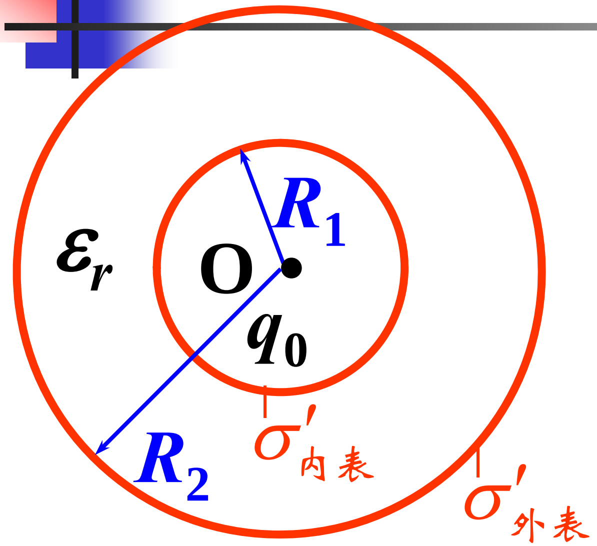
思考
为什么曲线不连续？





2) 下面求极化电荷q'的分布：

在介质内部：$\varepsilon_r =$ 常数，$\rho_0 = 0 \Rightarrow \rho'_e = 0$



$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 \vec{r} / 4\pi\varepsilon r^3$$

$$\sigma'_{内表} = P_n \Big|_{r=R_1} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi\varepsilon R_1^2$$

$$\sigma'_{外表} = P_n \Big|_{r=R_2} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi\varepsilon R_2^2$$

即 $\sigma'_{内表} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\sigma_{e0} / \varepsilon$

3) 导体球的电势：

$$U = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_{III} \cdot d\vec{r}$$

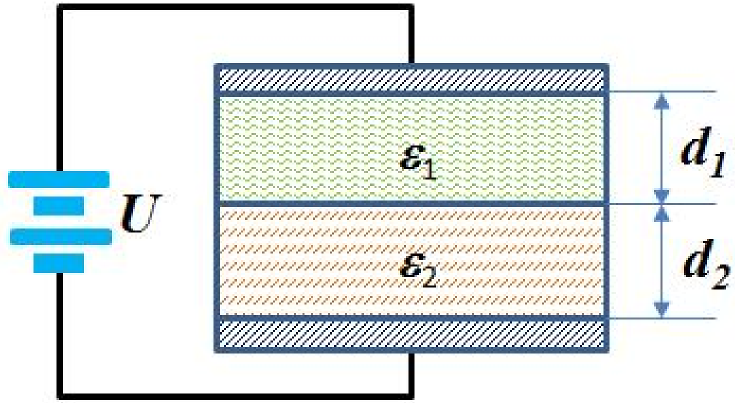
$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

小结：

真空	有介质
$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q$	$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$
静电荷(自由、极化)	自由电荷

- 各向同性线性介质中D 正比于 E
- 普遍情况下,两者关系不简单，不一定成正比关系

【例】平行板电容器内充满两层均匀电介质，电容器所加电压为U。求：（1）电容器的电容；（2）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。



【解】设极板上自由电荷密度为$\pm\sigma_0$

则两种电介质中的电位移矢量为：

$$D_1 = D_2 = \sigma_0$$

可得电场强度为：

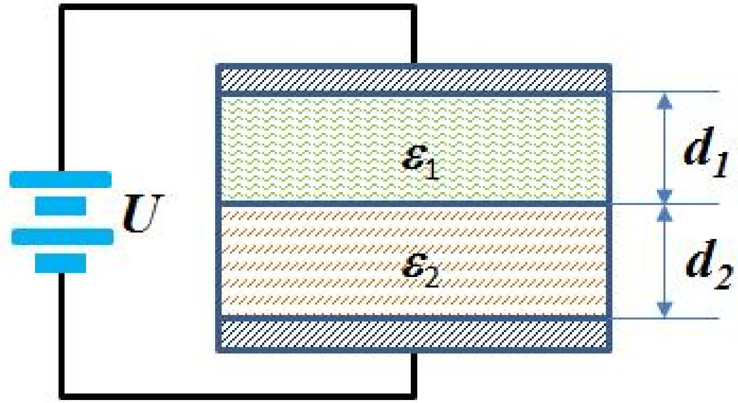
$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} \qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_2}$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

电位移矢量连续，电场强度成比例！

电势差为：

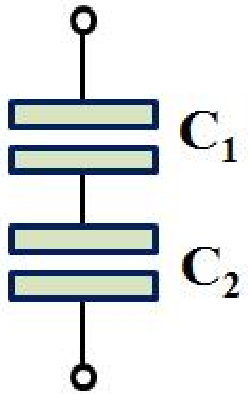
$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \sigma_0 \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)$$



电容为：$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_0 S}{\sigma_0 \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} \right)}$$

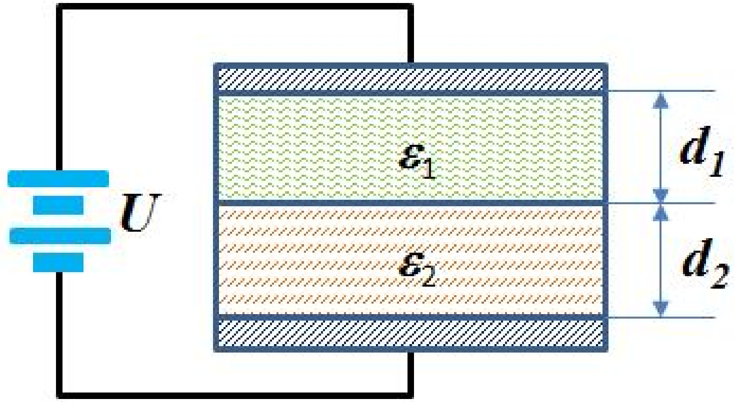
两个电容串联：

$$C_1 = \frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0 S}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0 S}{d_2}$$



$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} \right)}$$

上极板与电介质1交界面处的电荷：



- 自由电荷密度：

$$\sigma_0 = CU/S$$

- 极化电荷密度：

$$\sigma' = -P_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0$$

- 总电荷密度：

$$\sigma = \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_0 \sigma_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1}}$$

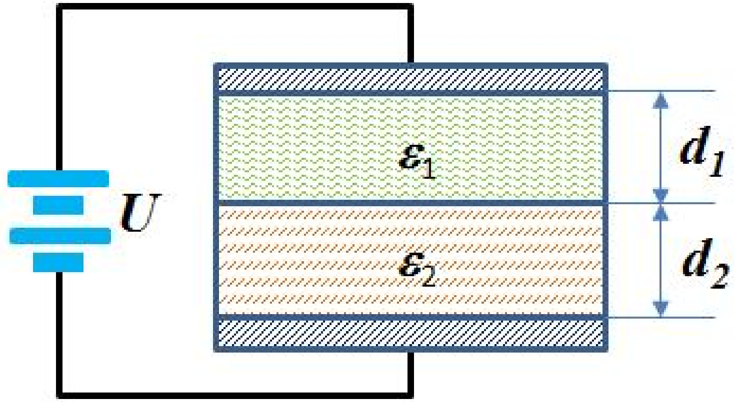
$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1}}$$

总电荷密度小于自由电荷密度

下极板与电介质2交界面处的电荷：

- 自由电荷密度：

$$-\sigma_0 = -CU/S$$



- 极化电荷密度：

$$\sigma' = P_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_2} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\sigma_0$$

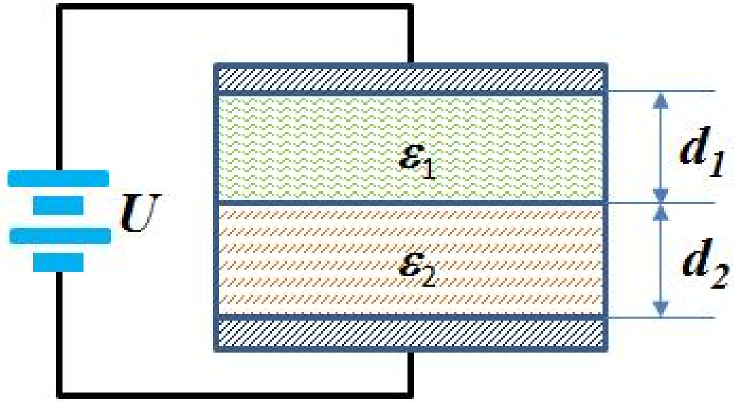
- 总电荷密度：

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_2 = -\frac{\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_2} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r2}}$$

$$\sigma = -\sigma_0 + \sigma' = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r2}}$$

上极板总电荷密度不等于下极板

电介质1与电介质2交界面处的电荷：



- 自由电荷密度：

$D_2 - D_1 = 0$ $\boxed{D_1 = D_2}$

- 极化电荷密度：

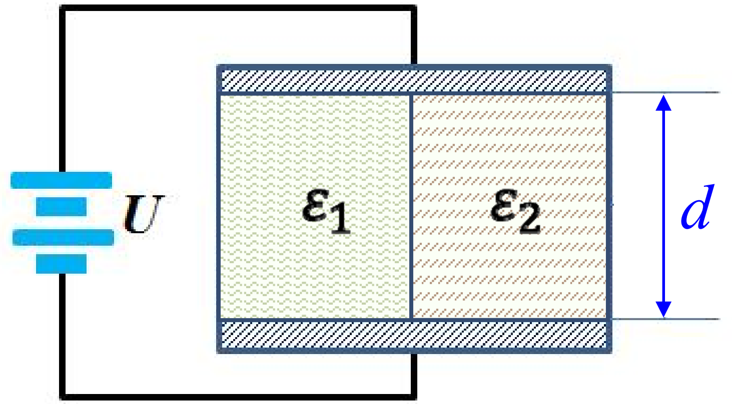
$$\sigma' = -(P_2 - P_1) = -\left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\sigma_0 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0$$

- 总电荷密度：

$$\sigma = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\sigma_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0 \neq 0$$

【例】平行板电容器内充满两列均匀电介质，电容器所加电压为U。求：（1）电容器的电容；（2）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。



【解】两种电介质中的电场强度为：

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

$$\boxed{E_1 = E_2}$$

则两种电介质中的电位移矢量为：

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 U}{d}$$

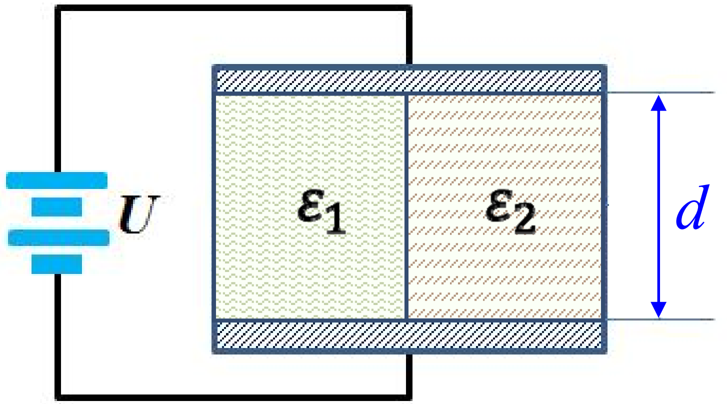
$$D_2 = \frac{\varepsilon_2 U}{d}$$

$$\boxed{\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

电场强度连续，电位移矢量成比例！

极板与两种电介质交界面上的自由电荷密度：

$$\sigma_{01} = D_1 = \frac{\varepsilon_1 U}{d}$$

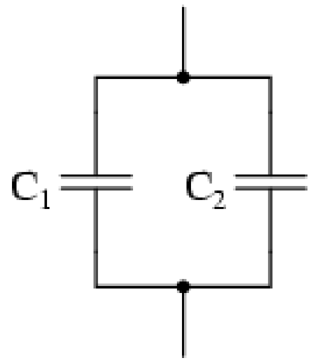


$$\sigma_{02} = D_2 = \frac{\varepsilon_2 U}{d}$$

电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(\sigma_{01} + \sigma_{02})S/2}{U} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d}$$

两个电容并联：



$$C = C_1 + C_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d}$$

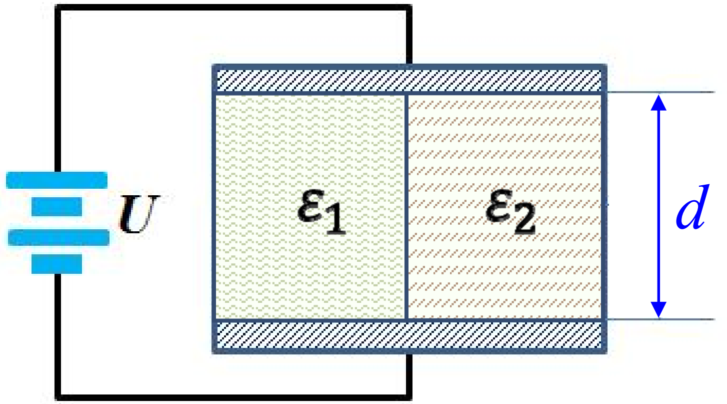
极板与两种电介质交界面上的自由电荷密度：

$$\sigma_{01} = D_1 = \frac{\varepsilon_1 U}{d} \qquad \sigma_{02} = D_2 = \frac{\varepsilon_2 U}{d}$$

极化电荷密度：

$$\sigma_1' = -P_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{U}{d}$$

$$\sigma_2' = -P_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{U}{d}$$

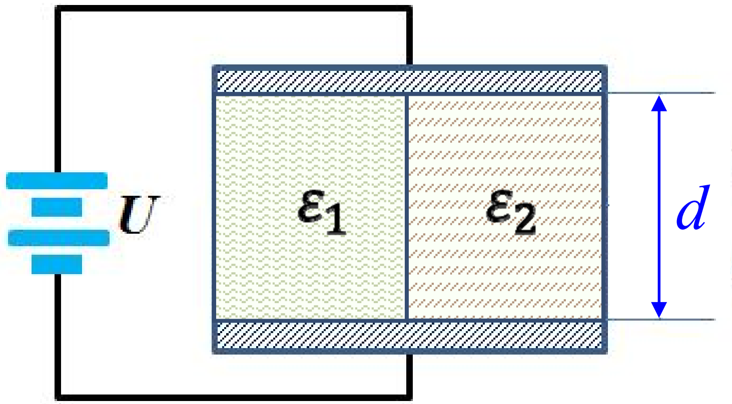


总电荷密度：

$$\sigma_1 = \sigma_{01} + \sigma_1' = \frac{\varepsilon_0 U}{d} \qquad \sigma_2 = \sigma_{02} + \sigma_2' = \frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_0 U}{d} = \varepsilon_0 E_1 = \sigma_2$$

- 自由电荷密度不同，极化电荷不同
- 总电荷密度相同



§2.7 边值关系和唯一性定理

一、边值关系

电场强度　电位移矢量　电势

二、唯一性定理

三、应用举例

一、边值关系

- 电场内存在多种介质→介质间的交界面→极化电荷
- 介质未充满电场空间→导体和介质的交界面→极化和自由电荷

- 交界面的存在会影响整个空间的电场分布
→研究电场在交界处的行为十分重要

- **将电场的基本方程用到交界面上**，研究界面两边电场改变的一般规律，即“边值关系”。

（1）电场强度

在介质交界面取一较小的矩形环路用环路定理:

$$\oint_{矩形} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{E}_1\cdot(-\Delta l\cdot \vec{e}_t) + \vec{E}_2\cdot(\Delta l\cdot \vec{e}_t)$$

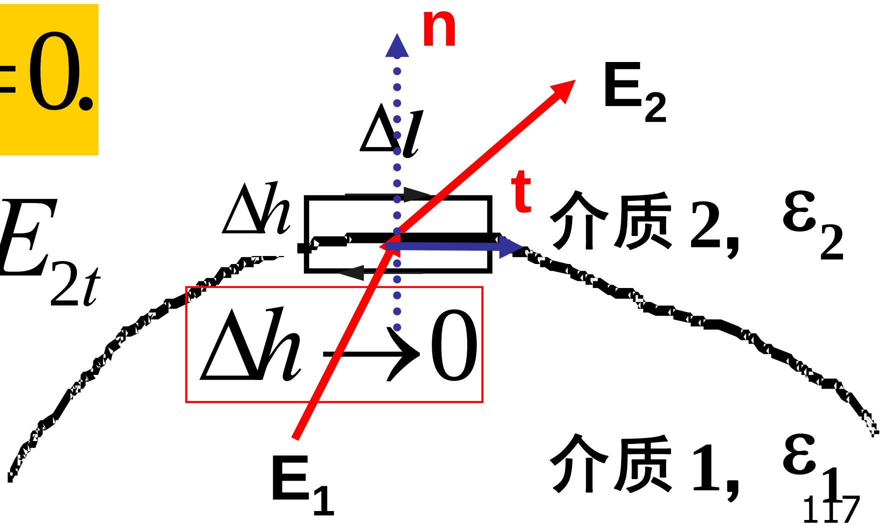
$$= (E_{2t} - E_{1t})\Delta l \equiv 0 \longrightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

界面两边电场强度的切向分量总是相等。

或写成 $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$

$$D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t};\ \ D_{2t} = \varepsilon_2 E_{2t}$$

$$\boxed{D_{1t}/D_{2t} = \varepsilon_1/\varepsilon_2}$$



（2）电位移矢量

利用高斯定理，跨界面作**柱形高斯面**：

$$\oiint_{\text{柱面}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_2\cdot(\Delta S\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{D}_1\cdot[\Delta S\cdot(\mathbf{-n})]$$

n: 1→2

$$= (D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_0 \Delta S \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0}$$

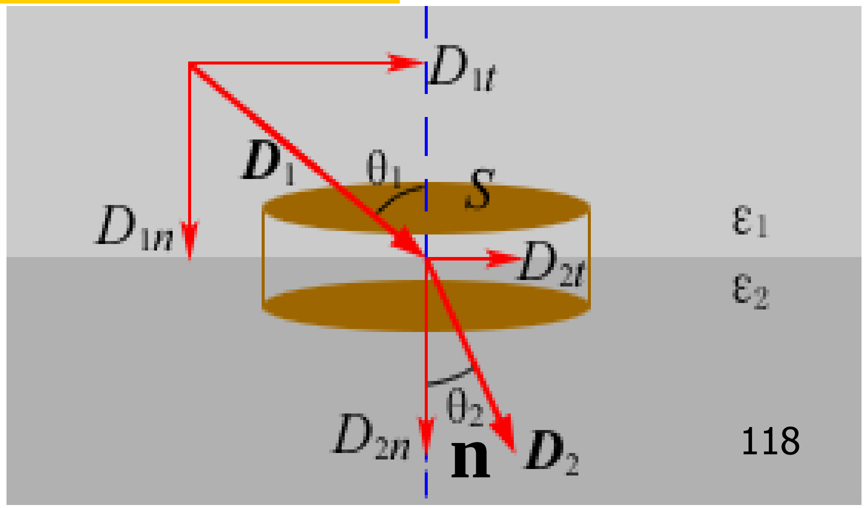
■在电介质界面上，一般σ_0=0，即无自由电荷，所以：

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{或} \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$$

$$\because (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\vec{n} = \sigma'_e \quad (+)$$

$$\therefore (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{n} = \sigma_e/\varepsilon_0$$

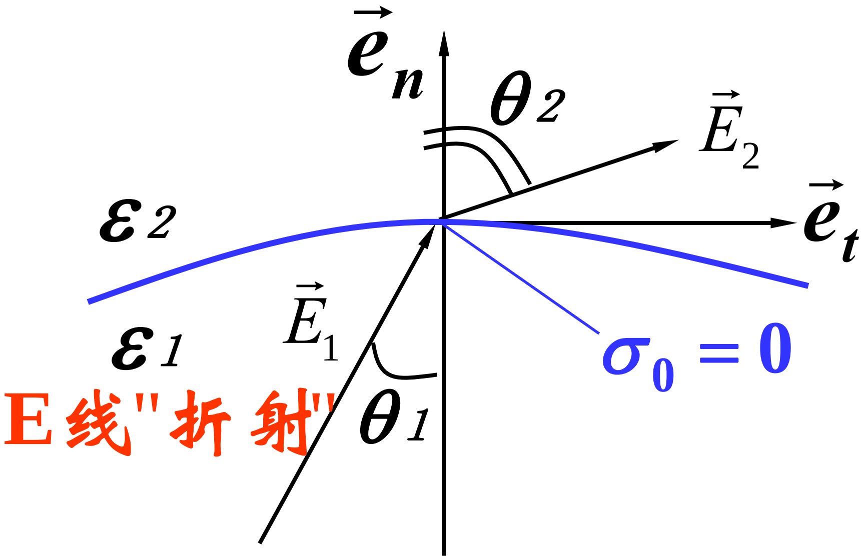
σ_e为总面电荷密度



电场线在界面上的折射

若$\sigma_0=0$，则 $D_{1n}=D_{2n}\rightarrow\varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n}$,

又 $E_{1t}=E_{2t}$



$$\therefore\frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\mathrm{tg}\,\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

电场线在穿过介质界面时会产生**类似光线折射**的现象

若$\varepsilon_1<\varepsilon_2$,则$\theta_1<\theta_2$

（3）电势

- 在介质分界面两侧取距界面为h的 1，2 两点
- 其连线平行法线，两点的电势分别为U_1和U_2
- 当h→0时，两点的电势差为0，即：

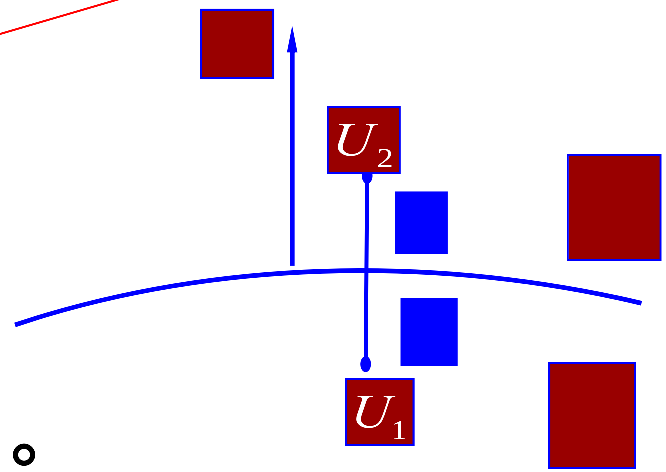
$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= E_{1n} h + E_{2n} h$$

$$= E_{1n} h (1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2)$$

$$\xrightarrow{h \to 0} U_1 - U_2 = 0$$

$$\boxed{U_1 = U_2}$$



介质界面两侧电势总是连续的。

小结

1、E的切向分量连续

- 界面一点上的法线方向只有一个，而该点的切线方向却有无数多个，结论对任一切线方向成立

$$\begin{cases} E_{1t}=E_{2t} \\ \dfrac{D_{1t}}{D_{2t}}=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

2、对无自由电荷的界面，*D*的法向分量连续

$$\begin{cases} \boldsymbol{D_{1n}=D_{2n}} \\ \boldsymbol{\dfrac{E_{1n}}{E_{2n}}=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \end{cases}$$

3、介质界面两侧的电势总是连续的

$$U_1=U_2$$

4、极化强度矢量和极化面电荷

$$\sigma'_e=-(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot\vec{n}$$

二、唯一性定理

- 求解静电场问题
  - 给定空间电荷的分布,如何知道空间各处的电场?
  - 原则:库仑定律+叠加原理→空间各点电场强度E

- 实际情况:
  - 要知道每个导体表面的面电荷分布很困难
  - 即使知道σ_e,但E是矢量,使得计算极为繁杂
  - 容易确定的是每个导体的电势或者总电量

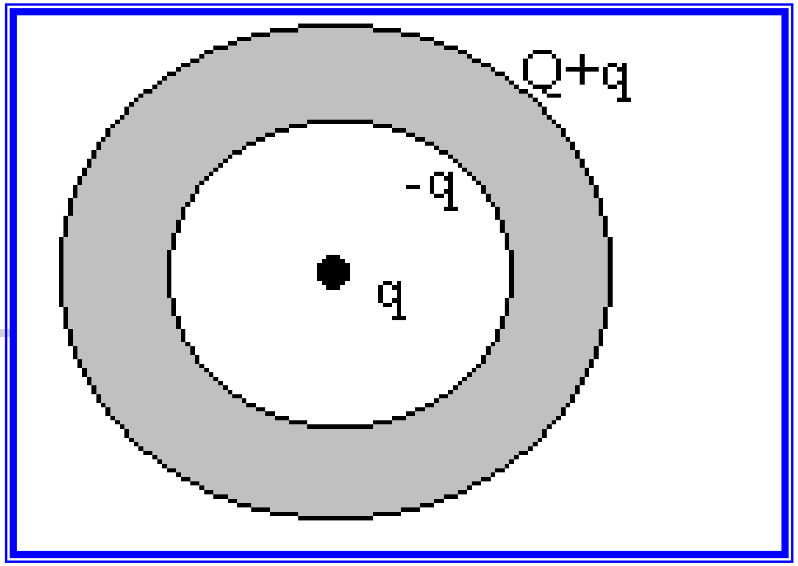
- 求解思路: 先求得U, 再利用$\mathbf{E}=-\nabla U$得$\mathbf{E}$

基本方程：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho_e/\varepsilon_0\,,\qquad \mathbf{E}=-\nabla U\,.$$

$$\nabla^2 U=-\rho_e/\varepsilon_0\rightarrow\text{泊松方程}$$

$$\nabla^2 U=0\rightarrow\text{拉普拉斯方程}$$



- 将问题转换为求解一个标量函数的二阶偏微分方程
- 但仅有此方程不能确定空间U分布,还需边界条件.

典型的静电场问题： 即在满足一定边界条件下求解空间电场分布的问题。

对于静电场，给定什么样的条件，空间存在确定的电场解？ ——唯一性定理

带电导体系——唯一性定理

- 当给定电场的边界条件，**即给定**包围电场空间的**边界面S上的电势U_S**，**给定**S内各导体的形状、大小及各导体之间的相对位置，**同时再给定**下列两条件之一：

 (1) S面内每个导体的电势U_i

 (2) S面内每个导体上的总电量q_i

 （其中$i=1,2,\ldots\ldots$为导体的编号）

- 则在以S为边界面的空间内由高斯定理和环路定理确定的**静电场解是唯一的**。

含电介质体系——唯一性定理

- 当给定空间边界面S上的电势U_S，给定S面内各均匀介质按区域分布的情况和各电介质的介电常数ε_i，给定S内各导体的形状、大小及各导体之间的相对位置，同时再给定下列两条件之一：

  (1) S面内每个导体的电势U_i

  (2) S面内每个导体上的总电量q_i

  （其中$i=1,2,\ldots\ldots$为导体的编号）

- 则边界面S所包围的空间内静电场解是唯一的。

唯一性定理的含意

满足一定的条件件和边界条件件的、存在于空间的电场分布应该是唯一的,即给定这些条件后，不可能存在不同的静电场分布。

- 证明:
  - 利用反证法论证见书中**P345**
  - 理论证明在电动力学中给出

几点说明

- 唯一性定理提出了定解的充分必要条件。
  - 求解时，我们总要判断问题的边界条件是否足够
  - 当满足必要的边界条件时，则可断定解是唯一的
  - 不同的方法得到的解在形式上可能不同，但等价

- 唯一性定理对于解决实际问题有着重要的意义。
  - 因为它告诉我们，哪些因素可以完全确定静电场
  - 对于许多实际问题，往往需要根据给定的条件作一定的分析，提出尝试解。
  - 如果所提出的尝试解满足唯一性定理所要求的条件，它就是该问题的唯一正确的解。

三、应用举例

研究分区均匀线性各向同性介质的电场求解问题：

- 介质界面与电场线重合的情况
- 介质界面与等势面重合的情况
- 其他情况：电动力学方法处理

介质界面与电场线重合

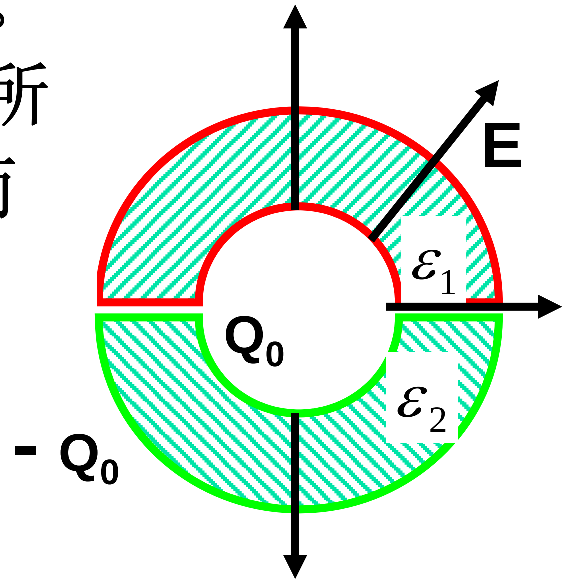
- 见右下图，带电量为Q_0的球形电容器。E与介质界面重合，则P在界面上没有法向分量，则两种介质**分界面上极化面电荷为0**。

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\sigma'_e = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\vec{n}$$

- σ'_e只可能存在于介质和导体的**边界面**上。
- 而导体静电平衡要求导体内的**E恒为0**，所以导体表面的自由电荷会自动调整，从而**维持总电荷面密度分布形式不变**：

$\therefore$**介质中** $\boxed{E = \alpha E_0}$，其中α是个常数。



- 为确定α因子，我们要用到高斯定理：

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i \alpha \iint_{S_i} \varepsilon_i \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = Q_0$$

$$\alpha \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i E_0 \cdot dS = Q_0$$

式中S为包含某导体面的高斯面，S_i是S的一部分，它位于第i种介质之中；Q_0为该导体所带的自由电荷量，在真空中所产生的电场为E_0。

- 对E_0一维对称性问题，则E也有一维对称性，不必引入α，使得问题简化。这时可利用高斯定理直接计算电场强度E。

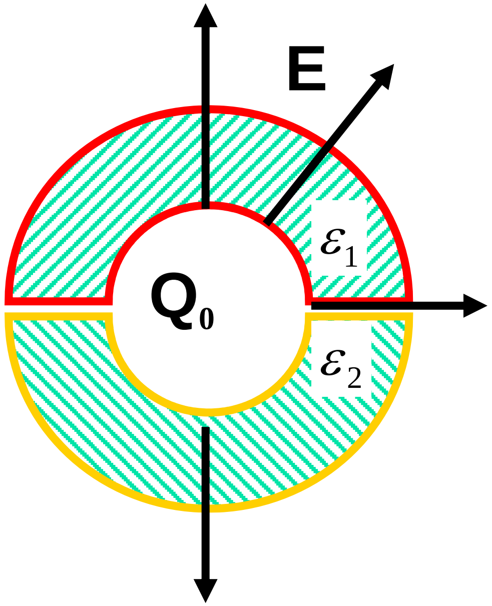
[例2-7-1]球形电容器带电量Q_0，极板间充满介电常数分别为ε_1和ε_2的两种介质，求介质中的D和E

[解]介质界面与电场线重合，且是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r^2(D_1 + D_2)$$

$$= E(2\pi r^2\varepsilon_1 + 2\pi r^2\varepsilon_2) = Q_0,$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_0\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3},$$



$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E} = \frac{\varepsilon_1 Q_0\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3},$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E} = \frac{\varepsilon_2 Q_0\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}.$$

[例2-7-2]平行板电容器，带电Q_0，板间距d，长度a，宽度b＝b_1+b_2。介电常数为ε_1和ε_2。求C和极板上自由电荷σ_e

[解]介质界面与电场线重合，且是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：

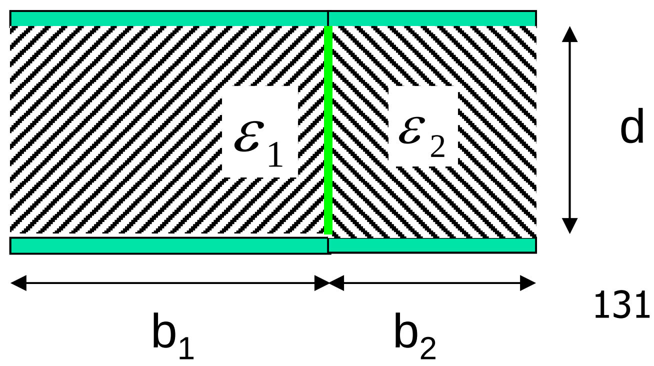
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = E(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2)a = Q_0 \qquad \Rightarrow E=\frac{Q_0}{(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2)a},$$

$$C=\frac{Q_0}{Ed}=\frac{(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2)a}{d}, \qquad \sigma_{e1}=D_{n1}=\varepsilon_1 E=\frac{\varepsilon_1 Q_0}{(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2)a},$$

$$\sigma_{e2}=D_{n2}=\varepsilon_2 E=\frac{\varepsilon_2 Q_0}{(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2)a}.$$

自由电荷 $\sigma_{e1}\neq\sigma_{e2}$

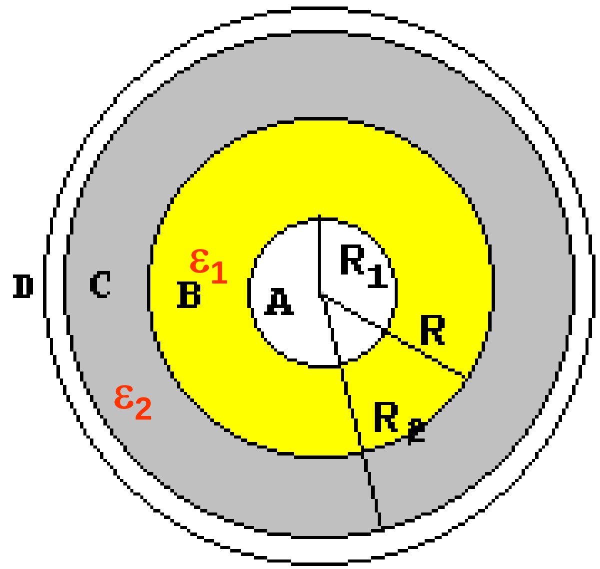
自由电荷在极板上分布是不均匀的，但这种不均匀性正好由极化电荷所补偿，总面电荷密度是均匀分布的。电容器内电场仍是均匀分布的。

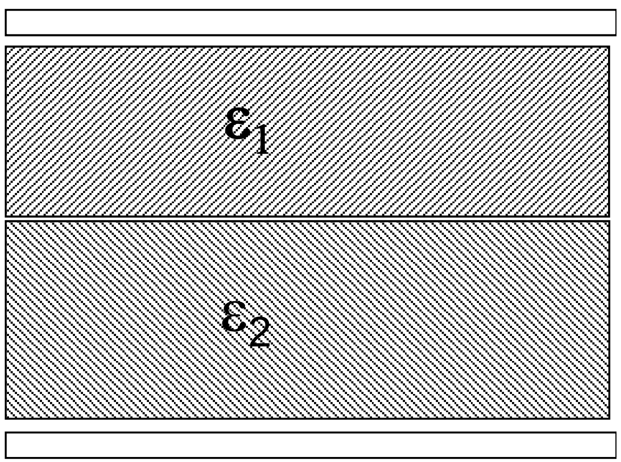


介质界面与等势面重合

- 介质界面与等势面重合 ⟷ 介质界面与电场线垂直，见右两图问题
- 由D的法向分量连续，猜介质中 $\boxed{D=\varepsilon_0 E_0}$ ，可证明 D 和 $\varepsilon_0 E_0$ 同时满足高斯定理和环路定理，见P59。
- E_0为自由电荷的电场，其计算完全等同于真空中的静电场。
- 处理步骤：
  - 首先去掉介质，计算自由电荷产生的电场E_0
  - 利用 $\mathbf{E}_i=\varepsilon_0\mathbf{E}_0/\varepsilon_i$ 求出$\mathbf{E}_i$

$$(\mathbf{D}=\varepsilon_i\mathbf{E}_i, \text{且 } \mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}_0)$$





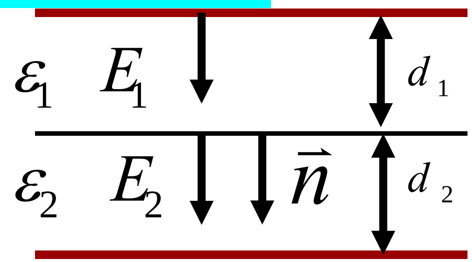
[例2-7-3]平行板电容器，两板间充满厚度分别为d_1、d_2，介电常数为ε_1，ε_2的两层介质；板间电压为U。求**1**）两板间的电场；**2**）介质分界面处的总面电荷密度；**3**）介质分界面处的自由面电荷密度？

[解] 介质界面与电场线垂直，$\mathbf{E}_i = \mathbf{D}/\varepsilon_i = \varepsilon_0 E_0/\varepsilon_i$

1) $U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \varepsilon_0 E_0 d_1/\varepsilon_1 + \varepsilon_0 E_0 d_2/\varepsilon_2,$

$$\therefore \quad E_0 = \frac{U}{\varepsilon_0(d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2)} \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1},\ E_2 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_2}.$$

2) $\vec{n}\cdot(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma_t/\varepsilon_0,\qquad \sigma_t = \varepsilon_0(E_2 - E_1)$

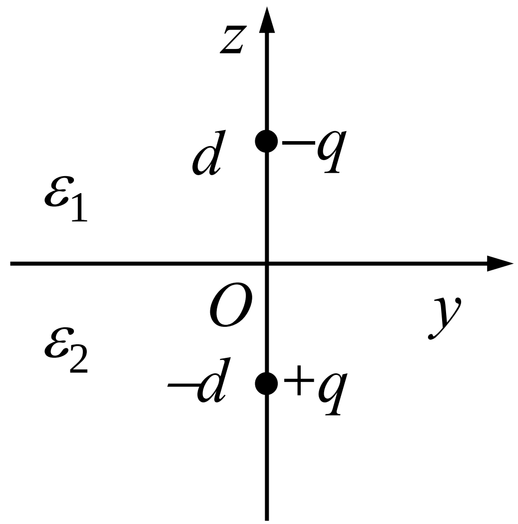


3) $\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0,$

$$\because \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_1 = \vec{D}_2,\ \therefore \quad \sigma_0 = 0.$$

[例2 .7.4]如右图所示，一无限大平面（ z ＝ 0 ）将介电常量分别为ε_1和ε_2的介质隔开，在 z 轴上$z=\pm d$的位置分别放置点电荷$\mp q$，求空间电场分布。

[解] 当去掉介质，xoy平面恰好为两点电荷的电场的等势面；又**E**0、**P**、**E**方向相同，因此，本题属于介质界面与等势面重合的情况。先求：



$$E_{0x}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_{0y}=\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_{0z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z+d}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}-\frac{z-d}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$\because \mathrm{D}=\varepsilon_0\mathrm{E}_0$$

$\therefore \mathbf{E}=\mathbf{D}/\varepsilon_1=(\varepsilon_0/\varepsilon_1)\mathbf{E}_0$（ z ＞ 0 ），$\mathbf{E}=\mathbf{D}/\varepsilon_2=(\varepsilon_0/\varepsilon_2)\mathbf{E}_0$（ z ＜ 0 ）

其他情况

- 介质界面与电场线和等势面都不重合，一般用：电动力学方法处理

- 对于某些具有特定几何形状的介质面的问题，可以利用电像法求解