光的衍射

基尔霍夫衍射公式

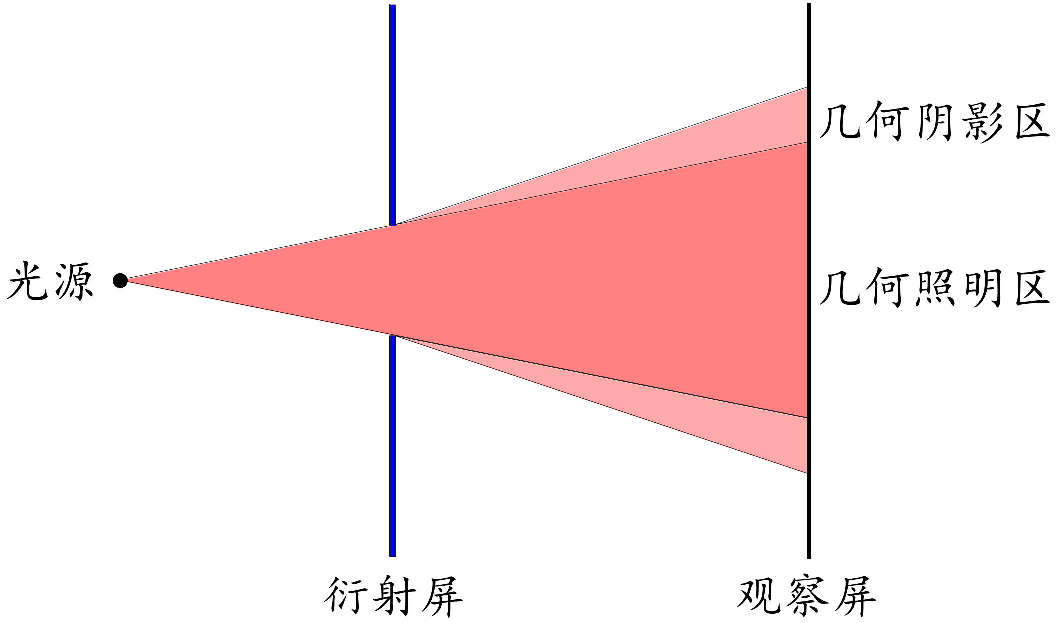
单缝衍射

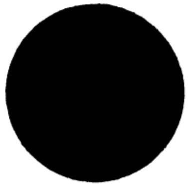
圆孔衍射

光栅

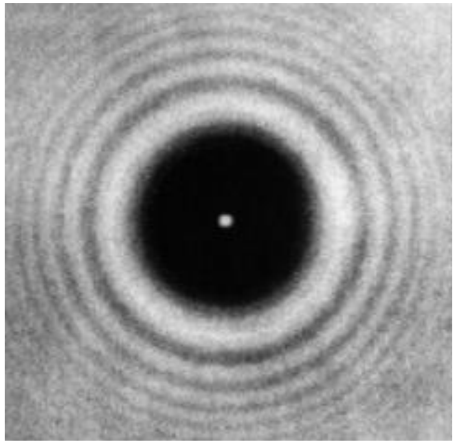
衍射装置

格里马耳迪（F.M. Grimaldi）于1863年首先观察到光的衍射现象：一个点光源照明小棍，在小棍阴影中出现了光带





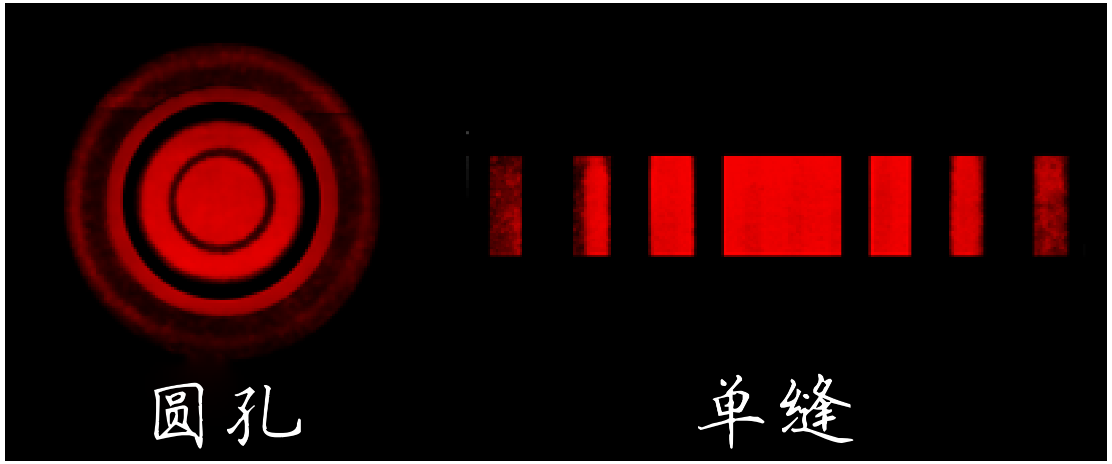
几何光学预期的投影

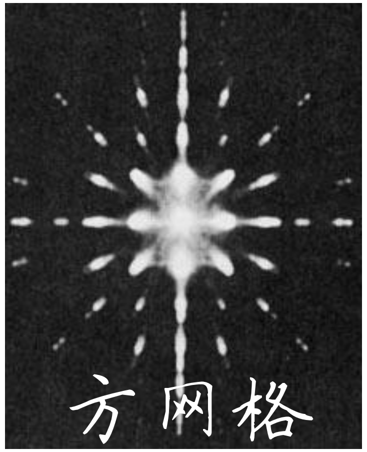


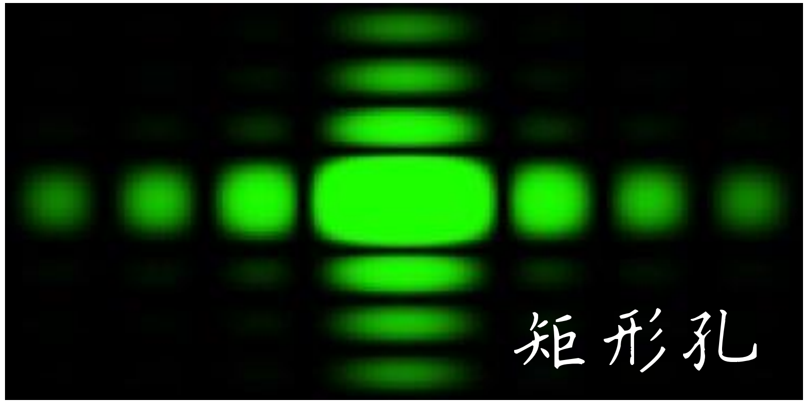
实际看到的图像

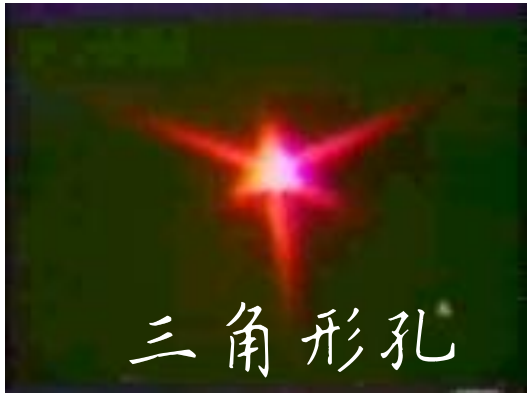
衍射系统 = 光源 + 衍射屏 + 接收屏幕

衍射现象









- 限制越严，扩展越烈

（1）$d > 10^3\lambda$

直线传播

（2）$10\lambda < d < 10^3\lambda$

衍射效应明显

（3）$d \sim \lambda$

散射

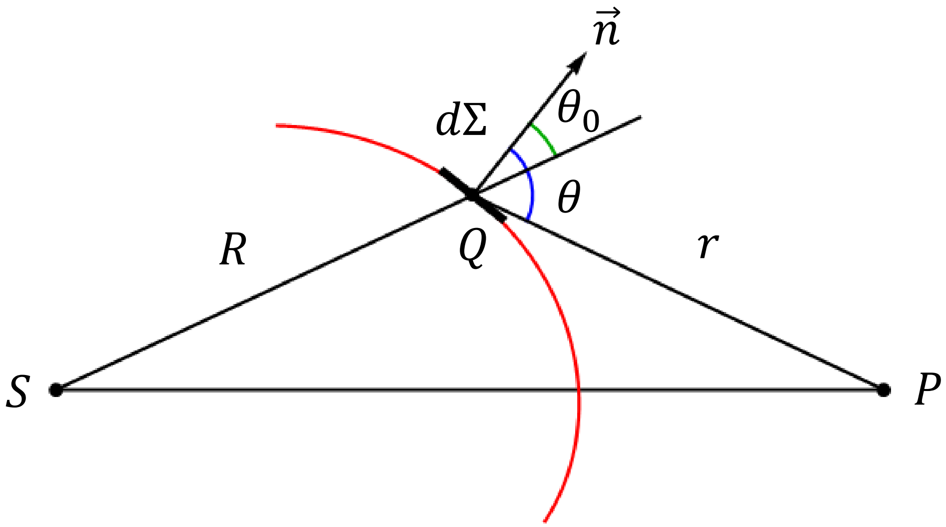
惠更斯-菲涅尔原理

Augustin Fresnel
1788～1827

◆波前S上每个面元dS都可以看成是发出球面次波的新波源；

◆波面前方空间任一点P的振动是所有这些次波在该点叠加后的合振幅。

$d\tilde{E}(P)$	$\propto \tilde{E}_0(Q)$	面元中心的复振幅
	$\propto d\Sigma$	面元的面积
	$\propto \dfrac{e^{ikr}}{r}$	次波源发射球面波到达场点P
	$\propto F(\theta_0,\theta)$	倾斜因子，次波并非各向同性

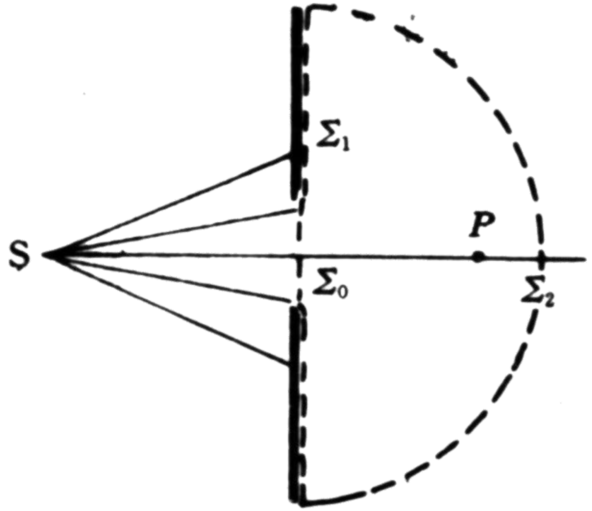


$$\boxed{\tilde{E}(P) = K \oiint_{\Sigma} \tilde{E}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma}$$

菲涅尔-基尔霍夫衍射公式

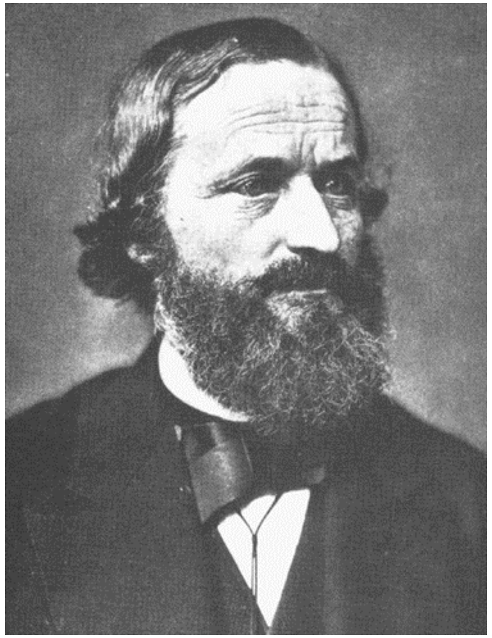
- 1880年德国物理学家基尔霍夫利用电磁理论，严格证明了

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{\lambda} \oiint_{\Sigma} \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2} \tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$



格林定律：$\int \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$

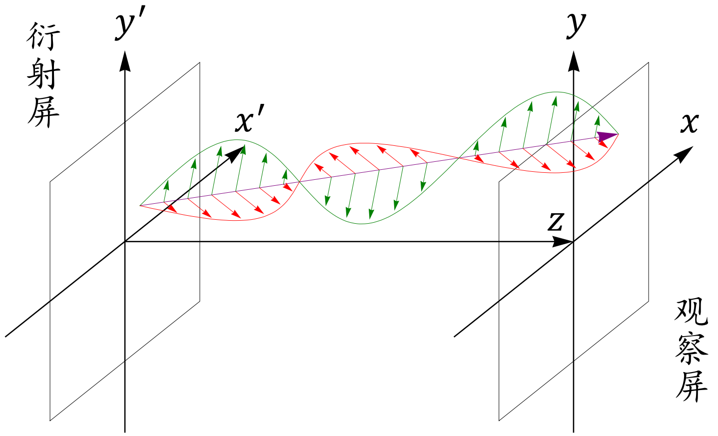
第二恒等式：$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oiint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$



G.R. Kirchhoff
1824-1887

标量菲涅尔-基尔霍夫衍射公式
当光源、接收屏与衍射屏的距离远大于波长时适用

夫琅和费衍射的积分公式



- 平行光几乎垂直入射衍射屏的夫琅和费衍射，满足傍轴条件

$$\theta_0 \approx 0, \qquad \theta \approx 0$$

- 观察屏上的复振幅为（利用了远场条件，作泰勒展开）

$$\tilde{E}(x,y) = -\cancel{\frac{i\, e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}}{\lambda\, z}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(x',y')\tilde{t}(x',y')e^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}dx'dy'$$

其中$\tilde{t}(x',y')$是屏函数，表示衍射屏对入射光波的调制，其模长$|\tilde{t}| \le 1$表示振幅透过率，相因子表示衍射屏导致的相位延迟。

夫琅和费

- 德国光学家及物理学家
- 出生于德国的 Straubing
- 他改良了光学玻璃的制造方法，透镜的打磨技术，以至望远镜和其它光学仪器的制作。同时，他亦发明了很多不同的科学仪器。⇒蔡司，施耐德
- 夫琅和费是首个详细解释太阳光谱中暗线的科学家，因而这些暗线又称为「夫琅和费线」。
- 他对光的折射及色散现象的研究使他发明了分光镜及导致光谱学的出现。

Joseph von Fraunhofer
1787 - 1826

巴比涅原理（一）

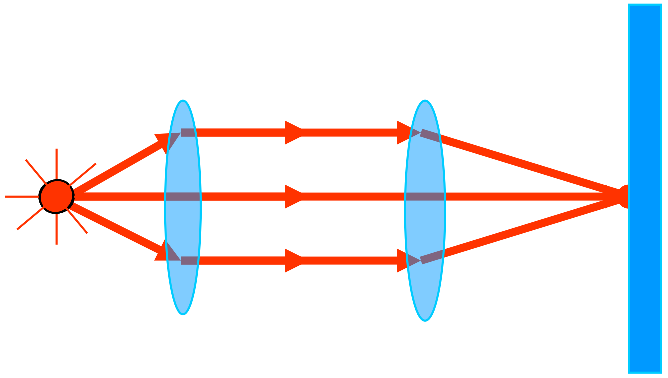
互补的衍射屏

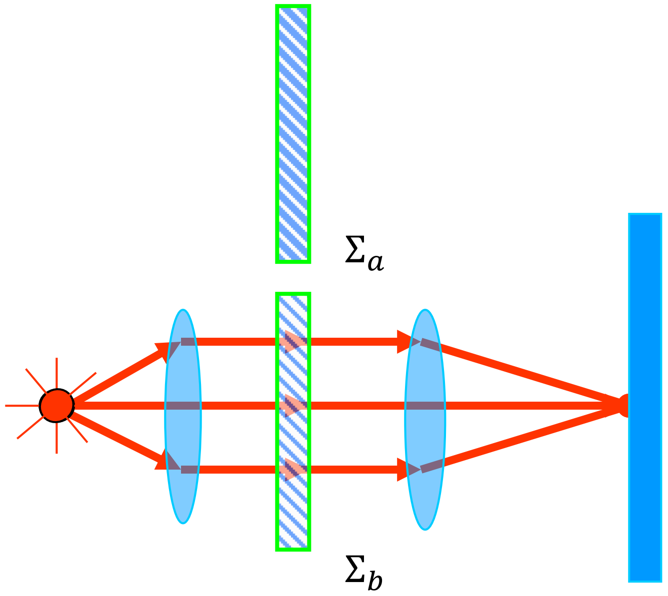
自由传播

Σ_a Σ_b Σ_0

$$\tilde{t}_a + \tilde{t}_b = 1 \Rightarrow \boxed{\tilde{E}_a(P) + \tilde{E}_b(P) = \tilde{E}_0(P)}$$

巴比涅原理（二）





没有衍射屏时，

- ✓ 只有像点亮（设透镜无限大，不考虑其衍射效应），
- ✓ 其它点$\tilde{E}_0(P) = 0$

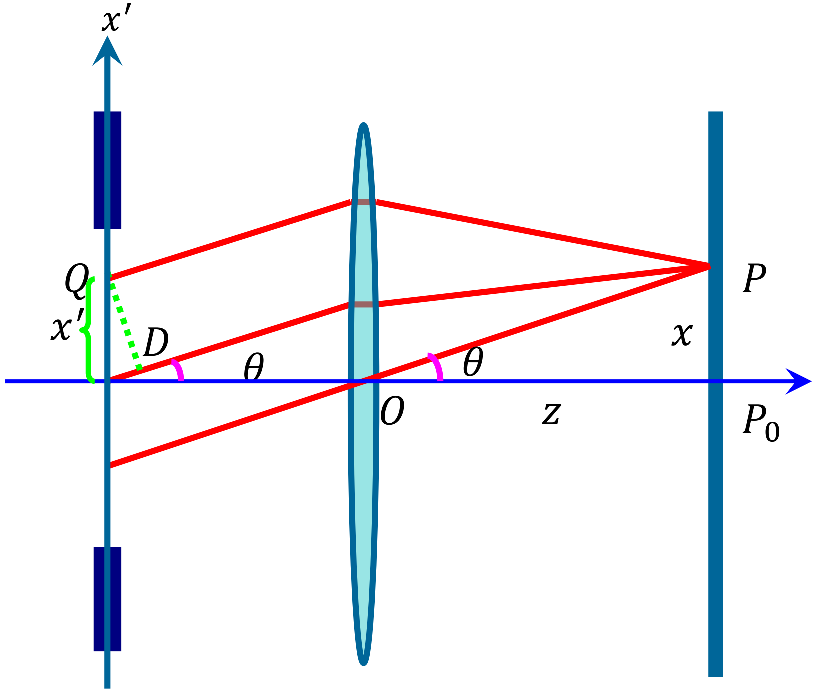
有衍射屏时，除像点外，

$$\tilde{E}_a(P) = -\tilde{E}_b(P)$$

$$I_a(P) = I_b(P)$$

衍射图样完全一样。

单缝夫琅和费衍射（一）



$$\tilde{E} = -\frac{i}{\lambda}\frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}}{z}\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}_0(x',y')\tilde{t}(x',y')e^{-i\frac{k}{z}(xx'+yy')}dx'dy'$$

$$\tilde{E}(x) \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\frac{k}{z}xx'}dx' \propto \operatorname{sinc}\frac{kax}{2z}$$

方格波的
傅立叶变换

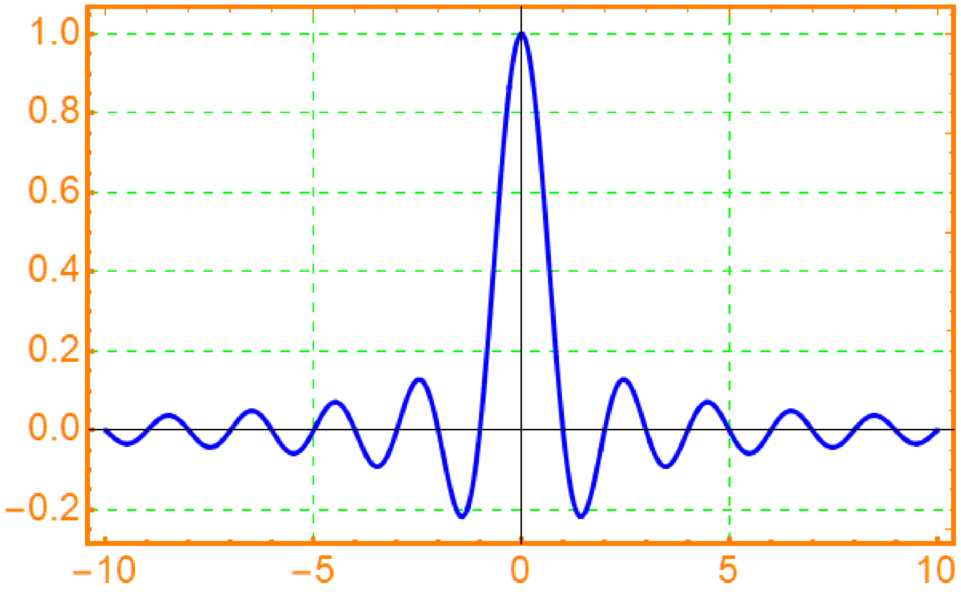
$$\frac{x}{z} \approx \sin\theta$$

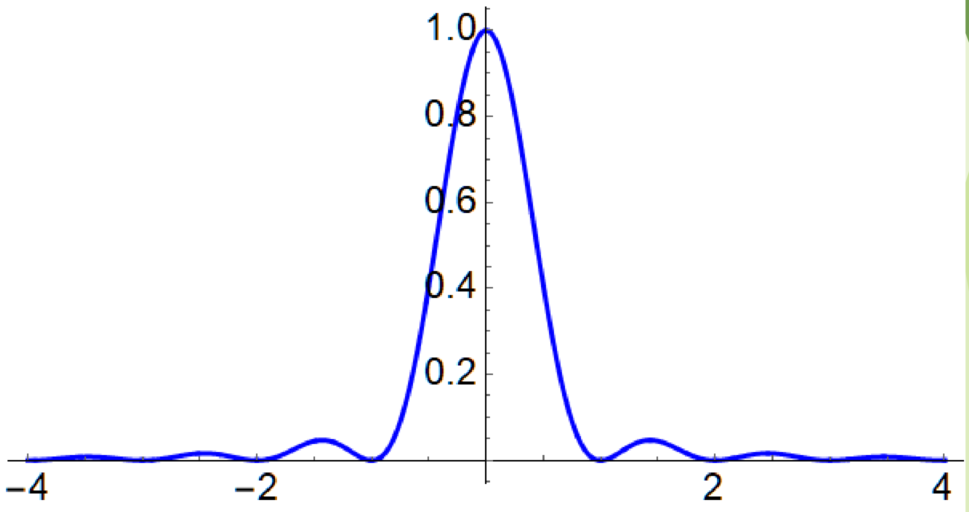
$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{ka}{2}\sin\theta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

$$\frac{kax}{2z} \approx \alpha$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 \operatorname{sinc}\alpha, \quad I = I_0 \operatorname{sinc}^2\alpha$$

单缝夫琅和费衍射（二）

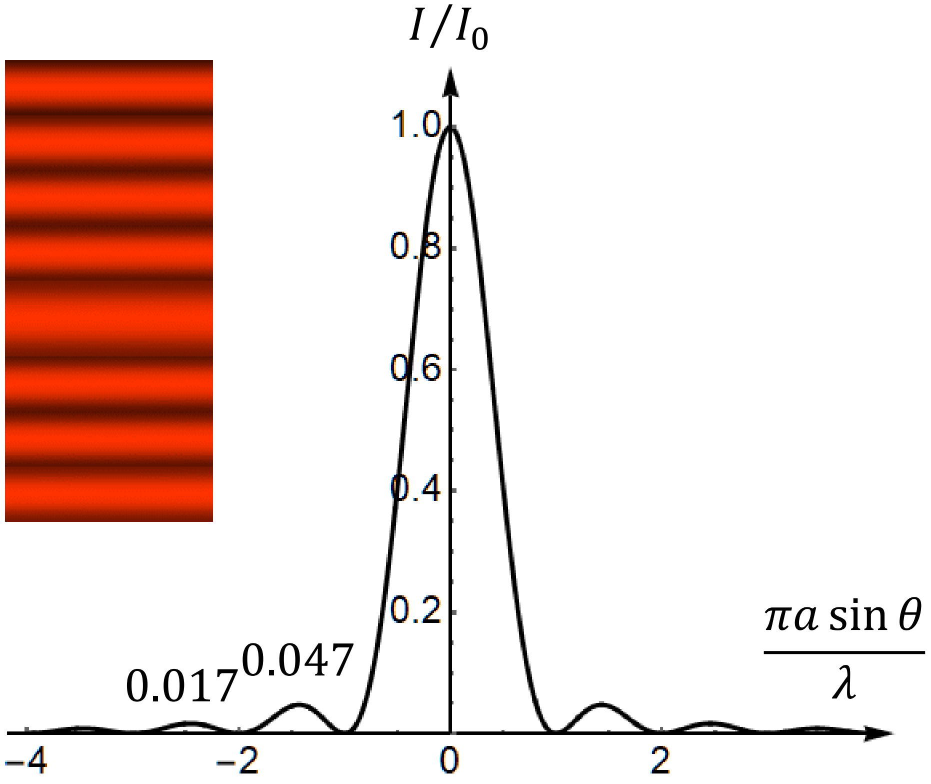


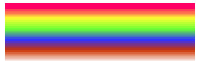


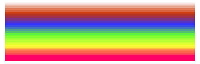
$$\tilde{E}(P) = \tilde{E}(P_0)\,\mathrm{sinc}\,\alpha$$

$$I = I_0\,\mathrm{sinc}^2\,\alpha$$

单缝夫琅和费衍射（三）







白光衍射零级斑纹相片的“紫边”

- 主极强：$\alpha = 0$
- 次极强

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \tan\alpha$$

$$\sin\theta = \pm 1.43\frac{\lambda}{a}, \pm 2.46\frac{\lambda}{a}, \pm 3.47\frac{\lambda}{a}, \cdots$$

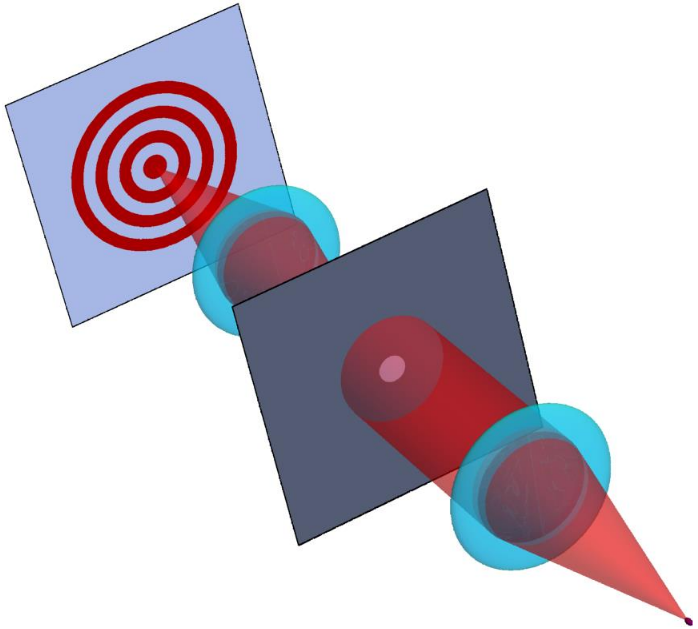
- 暗条纹：$\operatorname{sinc}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = m\pi, \sin\theta = m\lambda/a$
- 零级亮斑的半角宽：$\Delta\theta = \lambda/a$，是高阶亮斑的2倍
- 特点：

① 零级衍射斑集中了90%的光能

② 半角宽与缝宽a成反比，当缝宽很大时，衍射斑几乎收缩为几何光学的象点

③ 半角宽与波长λ成正比，几何光学是波动光学的短波极限

圆孔夫琅和费衍射



- 圆孔衍射的强度

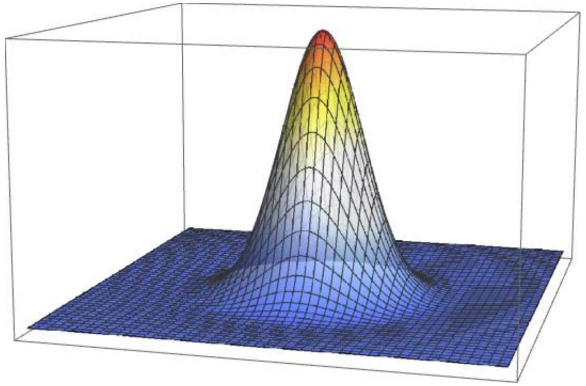
$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2, \qquad x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta$$

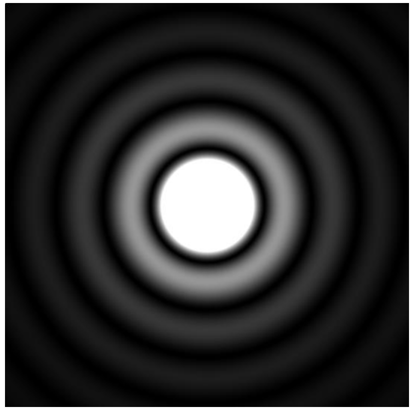
- 艾里斑（中央极大）

占有全部光能的83.8%，中间是几何光学的像点。

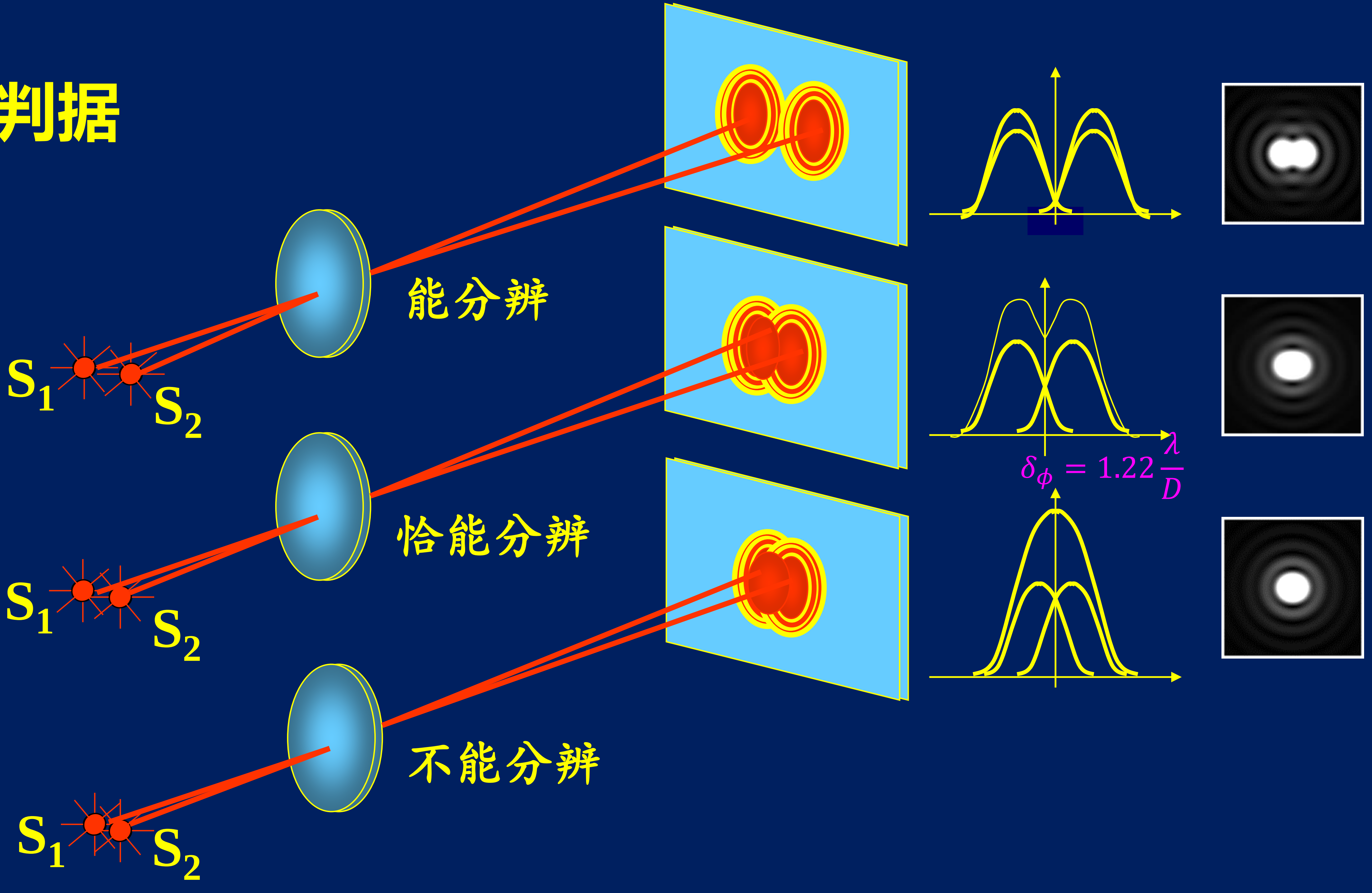
艾里斑半径

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$





瑞利判据



人眼的Airy Disk

- 最敏感的黄绿光波长

$$\lambda = 0.55\mu m$$

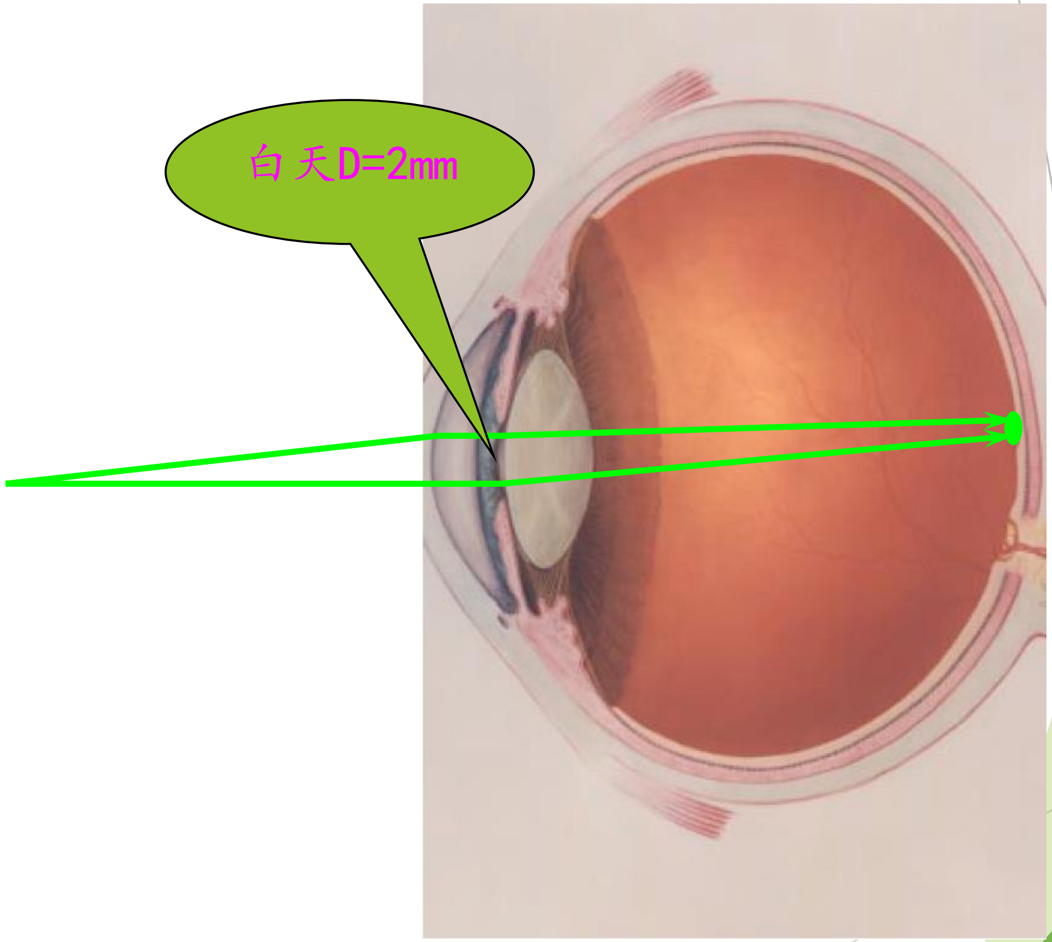
- 角分辨率

$$\delta\phi = 1.22\frac{\lambda}{D} \approx 1'$$

- ⇒最经济的感光细胞距离

$$D' = f\delta\phi = 7\mu m$$

- 实际上黄斑处的视锥细胞密度最高，约15万个/平方毫米，细胞间距约3μm(夜晚瞳孔放大1倍)，这是自然选择的结果

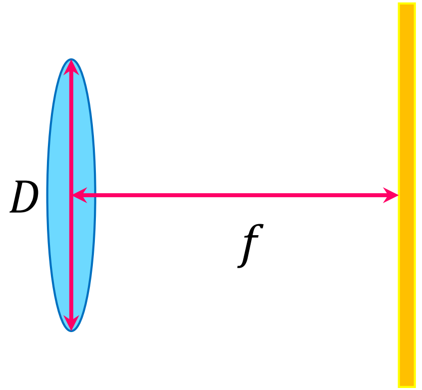


数码相机的像素密度

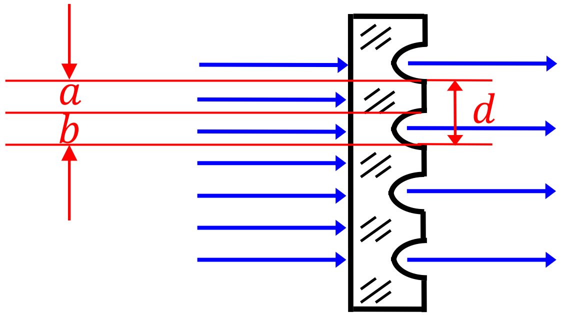
- 通光孔径D
- 像方焦距f
- 光圈系数$F=\frac{f}{D}$
- 平行光入射时，光斑半径

$$d=1.22\frac{\lambda}{D}f=1.22F\lambda$$

- 按瑞利判据图像传感器的像素距离，应取为光斑半径。
- 补充习题：评估你的手机像素是否超过了镜头的衍射极限。



光栅的衍射



- 光栅是具有周期性空间结构或光学性能的衍射屏
- 透射型光栅不透光部分的宽度a
- 透光部分宽度b
- 光栅常数$d = a + b$
- 刻线密度：

　几十条/毫米～几千条/毫米，用电子束刻制可达10^4条/毫米

- 利用基尔霍夫衍射公式

$$\tilde{E}(x) \propto \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\frac{a}{2}+nd}^{\frac{a}{2}+nd} e^{-i\frac{k}{z}xx'} dx'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{k}{z}xnd}\right) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\frac{k}{z}xx'} dx'$$

$$\tilde{E}(x) \propto \frac{e^{-iNdk\frac{x}{z}} - 1}{e^{-idk\frac{x}{z}} - 1} \operatorname{sinc} \alpha$$

$$\Downarrow \quad \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta , \qquad d\frac{k}{z}x \approx \delta$$

$$\tilde{E} \propto e^{-i\frac{N-1}{2}\delta} \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} \operatorname{sinc} \alpha$$

光栅衍射的振幅和光强

- 实振幅

$$\tilde{E} \propto e^{-i\frac{N-1}{2}\delta} \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} \operatorname{sinc}\alpha$$

$$E = E_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \operatorname{sinc}\alpha$$

是多缝干涉因子和单缝衍射因子之积。

- 光强

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\,, \qquad \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

- 光强的变化主要由多缝干涉因子确定

$$g(\delta) = \begin{cases} N^2, & \delta = 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \\ \left(\dfrac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2, & \delta \neq 2m\pi \end{cases}$$

单缝因子是缓变函数，多缝因子变化迅速（因为 N 很大）

- 光强极值点

$$g'(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 2m\pi \\ \dfrac{\sin N\delta/2}{\sin^3\delta/2}\left(N\sin\dfrac{\delta}{2}\cos\dfrac{N\delta}{2} - \cos\dfrac{\delta}{2}\sin\dfrac{N\delta}{2}\right), & \delta \neq 2m\pi \end{cases}$$

极值点

$$0 = g'(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 2m\pi \\ \dfrac{\sin N\delta/2}{\sin^3\delta/2}\left(N\sin\dfrac{\delta}{2}\cos\dfrac{N\delta}{2} - \cos\dfrac{\delta}{2}\sin\dfrac{N\delta}{2}\right), & \delta \neq 2m\pi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \delta = 2m\pi \\ \text{或}\cot\dfrac{\delta}{2} = N\cot\dfrac{N\delta}{2}\ \text{且}\ \sin\dfrac{\delta}{2} \neq 0 \\ \text{或}\sin\dfrac{N\delta}{2} = 0 \,\&\, \sin\dfrac{\delta}{2} \neq 0 \end{cases}$$

主极大

次极大

两个极大之间有N-2个

$\Updownarrow$

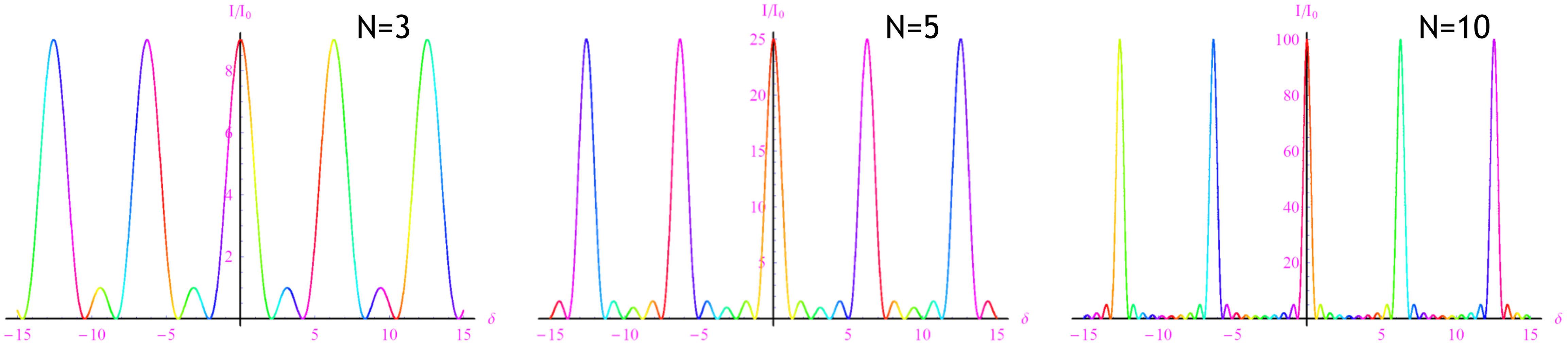
$$\delta = 2\pi(m + n/N), m = 0, \pm1, \pm2, \cdots; n = 1,2,\cdots, N-1.$$

所有的零点（极小）

（两极大间有N-1个）

12:10:10

光栅方程



若只看多缝干涉因子，

- 主极大的亮度与N^2成正比
- 主极大宽度随N增大而变窄
- 主极大是暗背景上的亮线，正适合作高精度测量使用

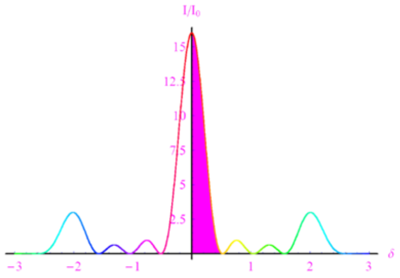
◆ 光栅方程（主极大的位置）

$$\delta = 2m\pi \Rightarrow \boxed{d\sin\theta = m\lambda}$$

◆ 主极大的半角宽（到相邻零点的角距离）

$$\Delta\delta = 2\pi(m + 1/N) - 2m\pi = 2\pi/N$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m} \approx \frac{\lambda}{Nd}$$



例题

◆以波长为589. 3 nm的钠黄光垂直入射到光栅上，测得第二级谱线的偏角为28. 1°. 用另一未知波长的单色光入射时，其第一级谱线的偏角为13. 5°，

（1） 试求未知波长；

（2） 试问未知波长的谱线最多能观测到第几级？

[解]（1）设$\lambda_0 = 589.3\text{nm}$，$\theta_0 = 28.1°$，$k_0 = 2$，$\theta = 13.5°$，$k = 1$，而$\lambda$为未知波长，则按题意可列出如下的光栅方程：

$$d\sin\theta_0 = 2\lambda_0$$

$$d\sin\theta = \lambda$$

解得

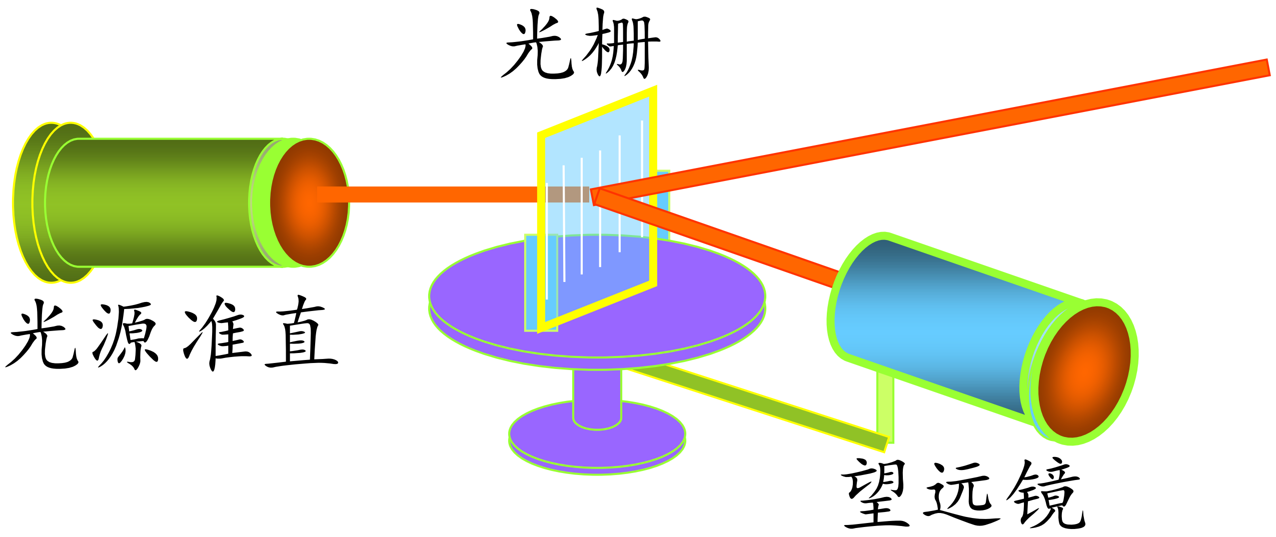
$$\lambda = 2\lambda_0\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} = 584.9\text{nm}$$

(2) 由光栅方程可以看出，k的最大值由条件$|\sin\theta| \le 1$决定。对波长为584.9nm的谱线，该条件给出

$$k \le \frac{d}{\lambda} = \frac{2\lambda_0}{\lambda\sin\theta_0} = 4.3$$

∴最多能观测到第四级谱线。

应用：光栅光谱仪



构造：

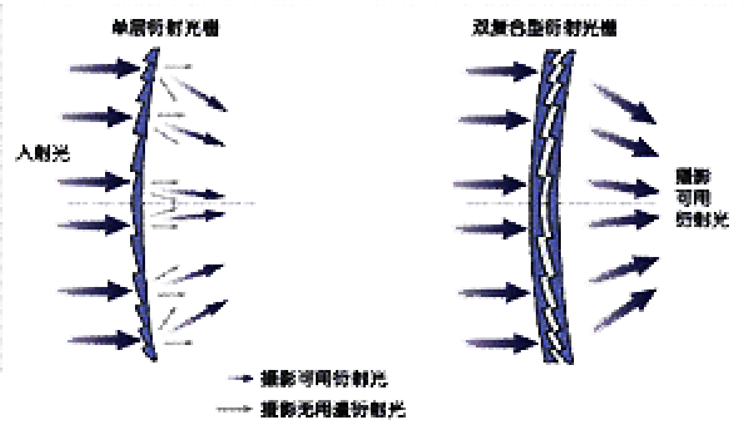
1）准直部分——产生平行光

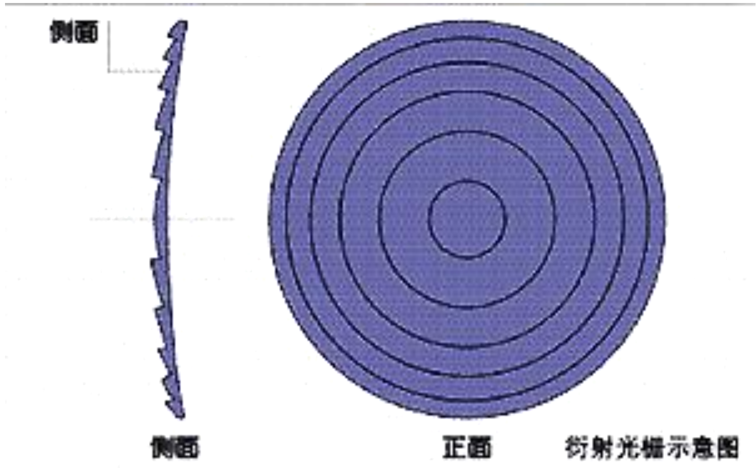
2）分光器件——光栅

• 12:10:11

应用：衍射透镜

相位型衍射光栅上，环绕光轴的各同心圆光栅间距设计为向外逐渐缩小的布局



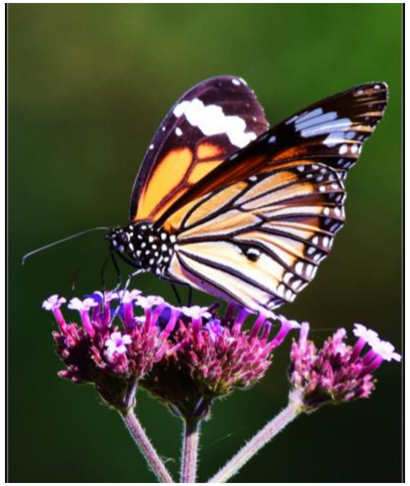


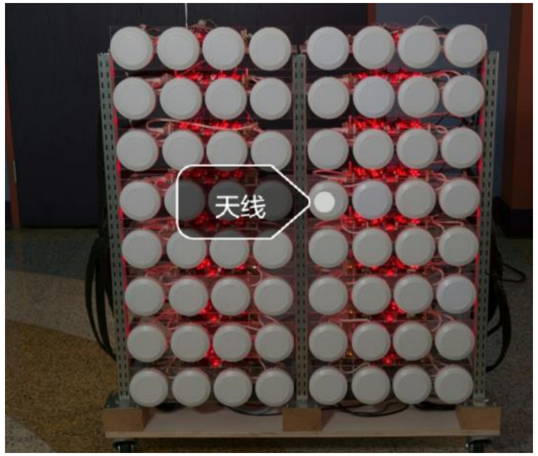
复合型衍射透镜对衍射光栅的厚度、间距、位置配合等诸多控制精度都必须达到1/1000 毫米以下。

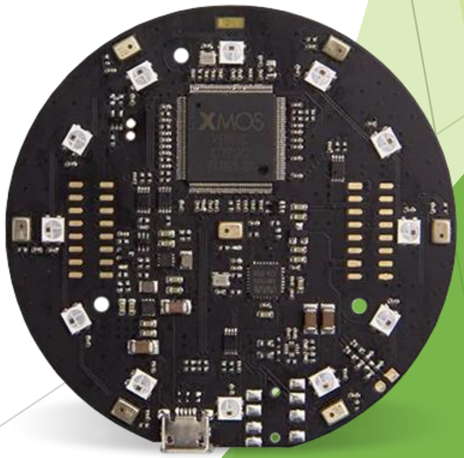
轻便、消色差

高维光栅

光盘，蝴蝶与甲虫翅膀，蛋白石（一种天然光子晶体）
Cobra dane雷达，Massive MIMO天线，廉价麦克风阵列







- 12:10:11