

第六章 电磁感应

§ 6.1 电磁感应定律

§ 6.2 动生电动势与感生电动势

§ 6.3 互感与自感

§ 6.4 暂态过程

§ 6.5 磁场的能量

§ 6.1 电磁感应定律

- 继1820年丹麦物理学家奥斯特发现了电流的磁效应后,人们便关心它的逆效应。1831年法拉第终于发现了电磁感应现象。
- 1845年才由诺埃曼 (F. E. Neumann) 和韦伯 (W. E. Weber) 将其实验成果表达为数学形式,建立了电磁感应定律。
- 这是电磁学发展史上最辉煌的成就之一。为工业革命、人类进入电气化时代做出了巨大的贡献,为后来麦克斯韦普遍电磁场理论的建立奠定了基础。

法拉第的故事：



Michael Faraday
(1791–1867)

一个穷孩子的求学经历；

挚着的追求：10年简单类比实验的失败：

静电感应、静磁感应

电流感应出电流？磁场感应出电流？

伟大的贡献：电动机、发电机、电解定律、场的概念、磁光效应。

淡薄名利：不作爵士，永作普通的法拉第。



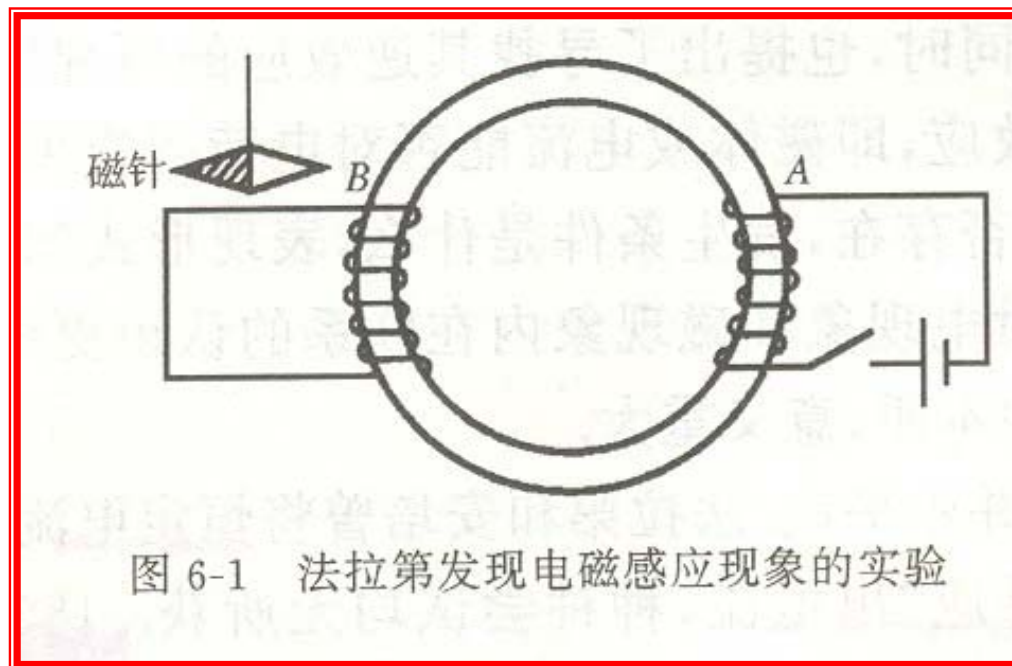
法拉第的成就：

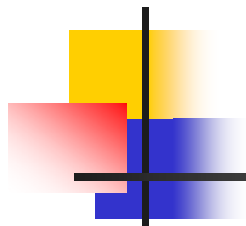
- 1、第一台电动机； 2、第一台发电机；**
- 3、法拉第电磁感应定律； 4、电解定律；**
- 5、电荷守恒——冰桶试验；**
- 6、法拉第磁致旋光效应；**
- 7、电介质、磁介质的性质；**
- 8、近距作用、磁场的概念 。**

法拉第的思想： 力统一，场概念。

一、电磁感应的发现 及其系列实验

■ 在一个偶然的机会，**1831**年，当法拉第把**电键S**闭合的瞬间，他观察到了磁针的偏转；而**S**断开瞬间，磁针会反向偏转。当**S**稳定后，磁针回到原状。他意识到这是个**非稳恒效应**。



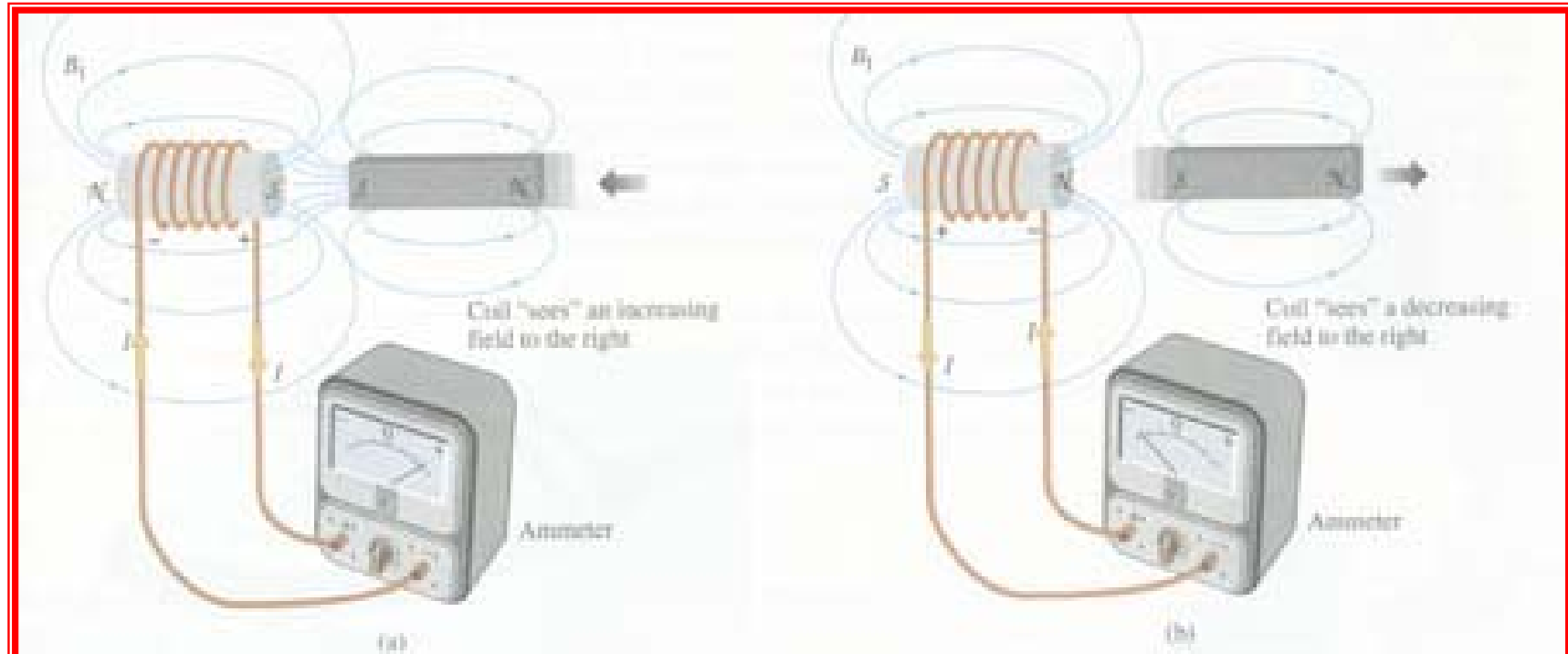


他得出结论：只有**变化**
的电流才会在另一线圈中感
应出电流，从而产生磁场，
使磁针偏转。**稳定的电流不**
可能。

深入的思考，法拉第的一系列实验

1. 是变化的电流还是变化的磁场产生感应电流？

法拉第用运动磁铁代替瞬变通电线圈





法拉第又用运动的载有稳恒电流的线圈代替运动的磁铁，两种实验的结果相同。

法拉第得出结论：

是变化的磁场产生了感应电流。

2. 是否产生的是感应电动势？

1832年，法拉第用实验证明，在相同的条件下，几何形状、大小相同而电阻不同的受感应线圈，感应电流的大小与线圈的电阻成反比， $I \propto 1/R$

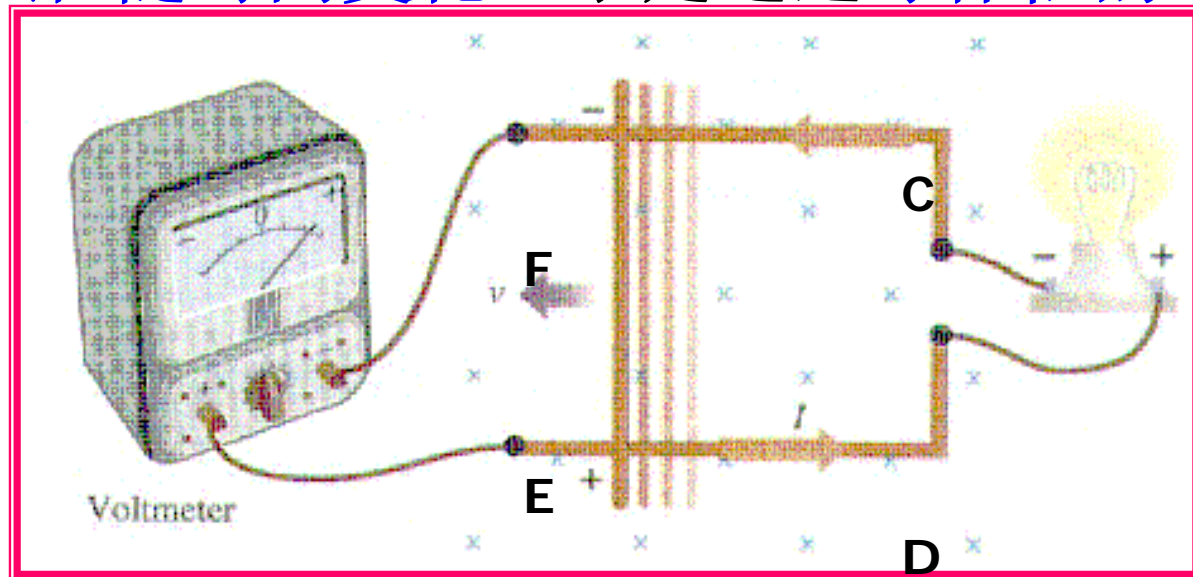
法拉第认识到：感应电动势与导体性质无关，这些线圈的感应电动势应该相同；感应电流应满足欧姆定律，便会有上面的结果。

所以变化的磁场在导体中产生的是感应电动势。而感应电流是由与导体性质无关的感应电动势产生的。

3. 变化的磁场与变化的磁通，谁更本质？

如图所示（按现代的演示），接有电压表的导体框 **CDEF** 放于均匀的磁场中，**B** 垂直于框平面，当 **EF** 以速度 **v** 向右滑动时，**电流计指针发生偏转**，速度越大偏转越厉害，**EF** 反向运动时，电压计指针反向偏转。

实验中，磁感强度 **B** 没有变化，但由于 **EF** 向右或向左运动，**导体框的面积在随时间变化**，于是通过**导体框的磁通量随时间变化**产生了**感应电动势**，从而产生了感应电流。**EF** 的速度越大，单位时间内通过导体框的**磁通量变化越大**，**电压越大**。



■ 法拉第由此得出：是变化的磁通产生了感应电动势。

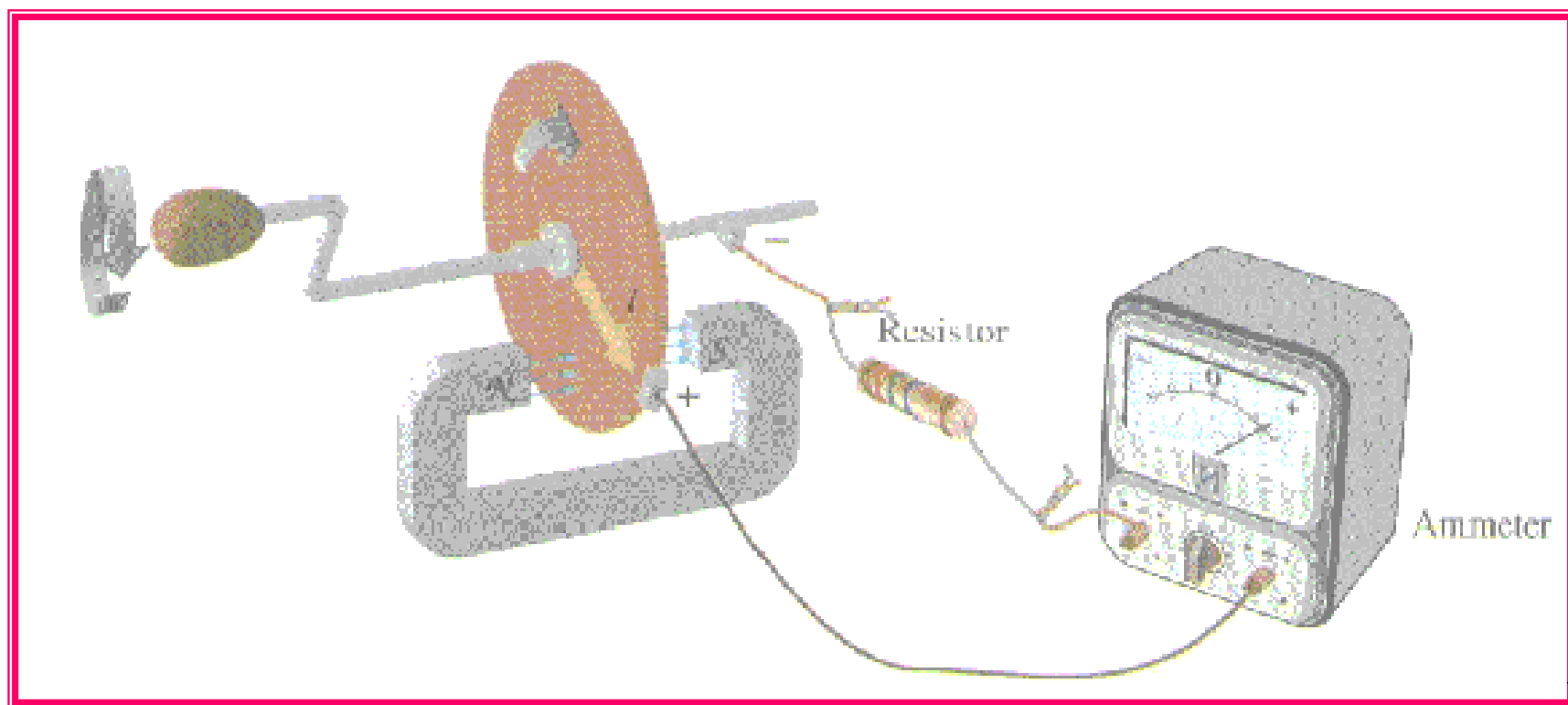
■ 从另一个角度分析，感应电动势是由于闭合导体的一段切割磁力线所产生的，根据这一分析法拉第发明了直流发电机。

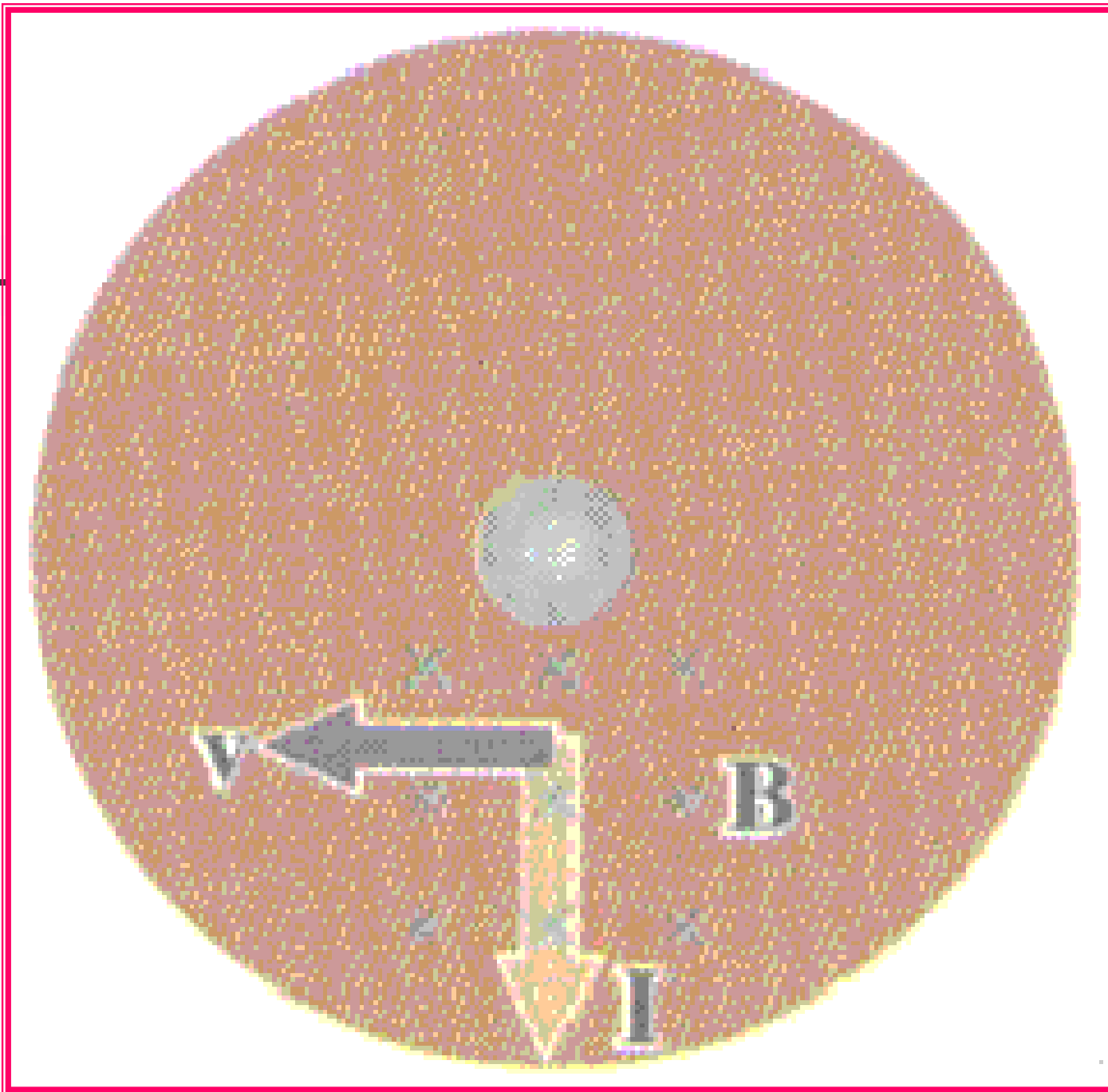
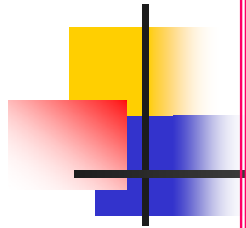
■ 同时，也了解到有两种感应电动势：感生电动势和动生电动势。

■ 并提出，即使一段导线切割磁力线，在导线两端也会产生感应电动势。

直流发电机

下图是法拉第设计的直流发电机的原理图，当导体圆盘绕轴以角速度 ω 旋转时，电流计指针发生偏转， ω 越大，偏转越厉害。





二、法拉第电磁感应定律

- 法拉第通过各种实验，不仅发现了电磁感应现象，而且深入研究了电磁感应的规律。



Michael Faraday
(1791–1867)

实验小结:

- 当通过导体回路的磁通量随时间发生变化时，回路中就有感应电动势产生，从而产生感应电流。这个磁通量的变化可以由磁场变化引起的，也可以是由于导体在磁场中运动或导体回路中的一部分切割磁力线的运动而产生的。
- (1) 电磁感应现象的实质是磁通量的变化产生感应电动势；
- (2) 感应电动势的大小与磁通量变化的快慢有关；
- (3) 感应电动势的“方向”，即由它产生的感应电流的方向，总是产生一个附加的磁通量，以阻止引起感应电动势的那个磁通量的变化。后面进一步详析。

I. 数学表达

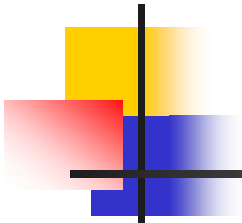
1845年，法拉第的实验研究成果先后被Neumann、Weber等人写成数学形式，后来发展成现在的形式：

$$\mathcal{E} = k \frac{d \Phi}{d t}$$

k 是常数，按所选的单位制，由实验决定。

由于 $\frac{d \phi}{d t} \propto \frac{B S}{t} \propto \frac{B l x}{t} \propto \underline{B V l}$


其量纲与 $[E][I]$ 相同，即[伏特]，与 \mathcal{E} 的单位一致，则 k 无量纲。选取SI单位制，实验确定 $k = -1$ 。



最后写成：

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

这就是法拉第电磁感应定律。



II. 几点说明

- **1.** 如果被感应的线圈是 N 匝时，各圈的感应电动势应叠加，若第 i 圈的磁通量为 ϕ_i ，则有：

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \phi_i$$

- **全磁通：**各匝磁通量相同时， $\Psi = N\phi$ 又称磁通匝链数。这时，整个线圈的总感应电动势为：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\phi}{dt}$$

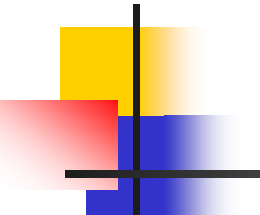
- 2. 在回路中产生感应电动势的原因是由于通过回路平面的磁通量的变化，而不是磁通量本身，即使通过回路的磁通量很大，但只要它不随时间变化，回路中依然不会产生感应电动势。通过平面s的磁通量为：

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta$$

式中 θ 是 \mathbf{B} 与 \mathbf{S} 的法线 \mathbf{n} 之间的夹角，所以，根据复合函数求微商的法则，有：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \cos \theta \frac{dB}{dt} - B \cos \theta \frac{dS}{dt} + BS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

- 上式表明，引起磁通量变化的原因可以是磁感应强度随时间变化，也可以是回路的面积随时间变化，也可以是 B 和 S 都不变，而是它们之间的夹角在随时间变化。

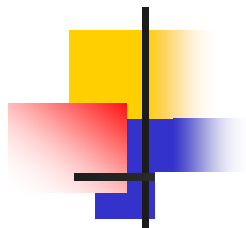


3. 法拉第电磁感应中，“ $-$ ”的物理意义在于，**负号指明了感应电动势的“方向”**，确切地说，是指明了感应电流的方向。实验证明，感应电动势的“方向”总是这样的：

- 由它引起的**感应电流**所产生的磁场通过回路的磁通量总是**阻碍**引起感应电流的那个磁通量的变化，这就是1834年**楞次推广、总结**后提出的**楞次定律**。

III. 感应电动势 “方向” 的再讨论

- 1. 为什么感应电动势的“方向”必须是楞次定律所规定的？ 它是由能量守恒定律所要求的。
- 在前面的第二个实验中，当磁铁插入线圈时，穿过线圈的磁通量增加，按照楞次定律，感应电流激发的磁通量应抵消原磁通量的改变，线圈将对磁棒产生一个排斥力，阻碍磁棒继续往下插入。所以，要使感应电流连续不断，则外界必须克服这个排斥力对磁棒做功。因此，线圈中感应电流的获得，即电能的获得，是以消耗机械能为代价的。



反之，假如感应电动势的“方向”与楞次定律规定的方向相反，那末只要磁铁稍有运动，在线圈中产生感应电流，这感应电流产生的磁通就会增强这种变化，于是能连续不断的产生感应电流，而不再消耗能量。这是不可能的，因为它违背了能量守恒定律。

所以，感应电动势的“方向”一定是楞次定律规定的方向。

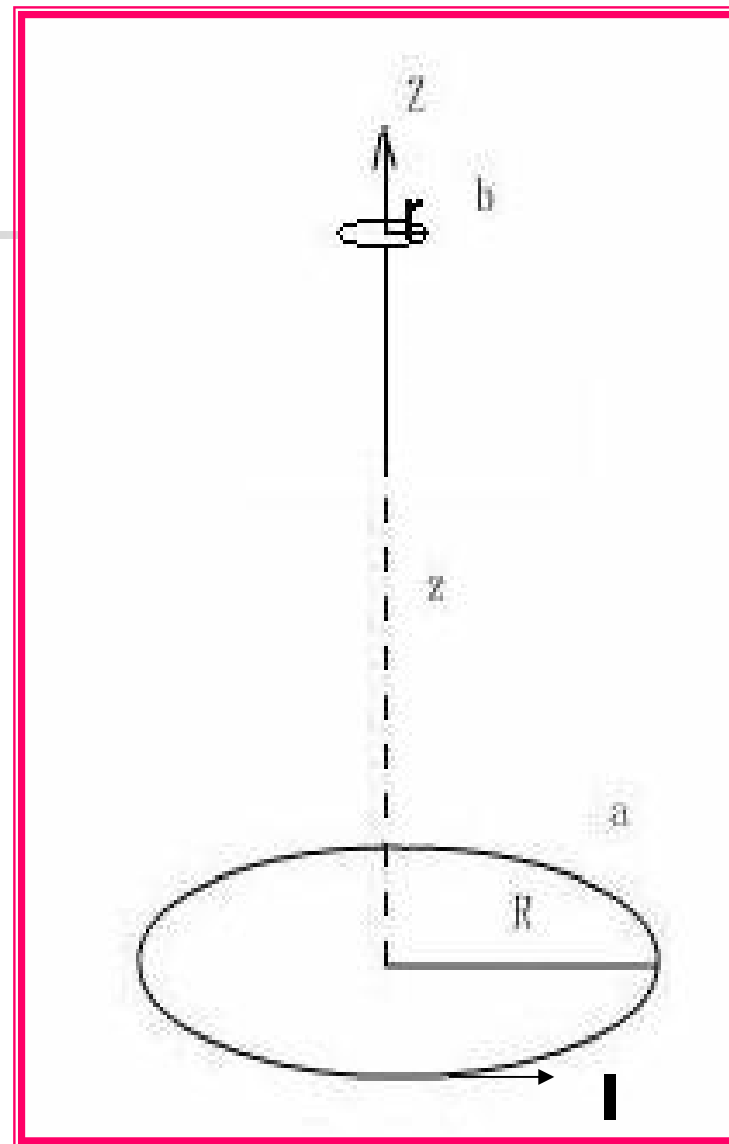
2. 如何确立感应电动势的正负问题

- 电动势 \mathcal{E} 与磁通量 Φ 的正负都与回路的绕行方向有关，所以，要讨论感应电动势和磁通量的“方向”，首先要选定回路的绕行方向。绕行方向选定后，若计算电动势为正值，表明电动势的“方向”与回路绕行的方向一致。反之，则相反。
- 但必须强调，根据上述约定，不管开始时选定怎样的绕行方向，应用法拉第定律得到的感应电动势的“方向”和数值是唯一确定的，与回路绕行方向的选取无关。下面举例说明。

【例1】 如图所示，两个半径分别为 R ， r 相距为 z 的同轴平面线圈a和b，假设 $R \gg r$ ， $z \gg R$ ，线圈a载有恒定的电流 I ，线圈b以速率 v 沿 z 轴向上运动，试计算线圈b中的感应电动势，并确定其方向。

【解】 由例4.2，载流线圈a在轴线上 z 点所产生的磁感强度为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$



B的方向沿**Z**轴的正方向，大小随**z**变化。由于 $z \gg R$ ， $R \gg r$ ，所以在线圈**b**所围的平面内，**B**可以近似看作均匀分布的。由于线圈**b**沿**Z**轴正方向以速度**v**运动，因此通过线圈**b**的磁通量发生变化，所以在线圈**b**中产生感应电动势，从而产生感应电流。

下面我们选不同的回路绕行方向来计算感应电动势：

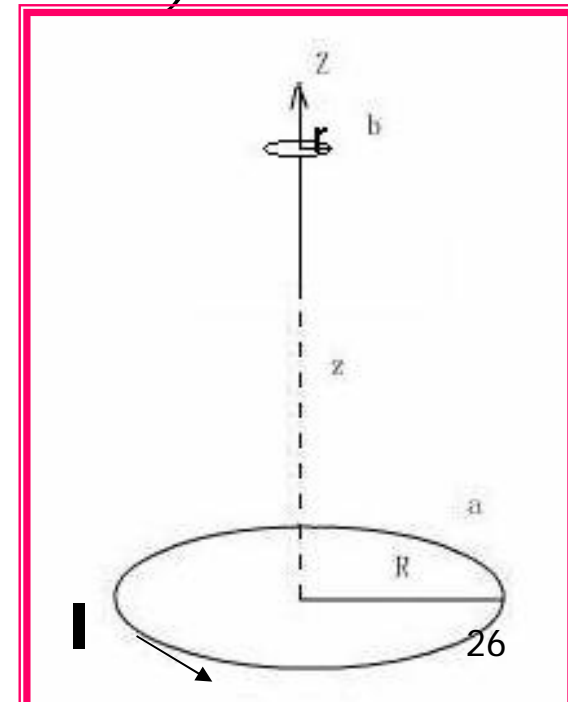
(a) 选取线圈b的绕行方向为逆时针方向

- 由右手螺旋法则，即b或S的法线n的方向为z轴的正方向，与通过线圈b的磁场B同方向，通过b的磁通量为：

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S B dS = B \pi r^2 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \pi r^2 > 0$$

因为 $z \gg R$ ，得到：

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{z^3} \pi r^2$$





根据法拉第电磁感应定律求得感应电动势为：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2} R^2 \pi r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z^3} \right) = \frac{3\pi\mu_0 I R^2 r^2}{2z^4} \frac{dz}{dt}$$

$$\because \frac{dz}{dt} = v, \quad \therefore \varepsilon = \frac{3\pi\mu_0 I R^2 r^2}{2z^4} v$$

因为 $\varepsilon > 0$ ，所以感应电流 \mathbf{I} 的方向与回路的绕行方向一致，即逆时针方向。

(b) 选取线圈b的绕行方向为顺时针方向

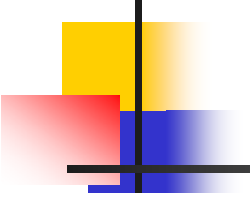
- 这时S的法向n与B的方向相反，于是通过线圈b的磁通量为：

$$\Phi = -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \pi r^2 < 0$$

于是：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3\pi\mu_0 I R^2 r^2}{2z^4} v < 0$$

- 因为 $\varepsilon < 0$ ，所以感应电流的方向与选定的回路b的绕行方向相反，即沿逆时针方向，结果与(a)相同。



■ 本例题表明，为了在解题过程中计算通过回路的磁通量和考虑电动势的“方向”，必须**先选定回路的绕行方向作为参考方向**，但应用法拉第定律得到的**感应电动势**大小和“方向”是**唯一确定的**，与回路方向的选定无关。

三、 电磁感应定律 与高斯定理的关系

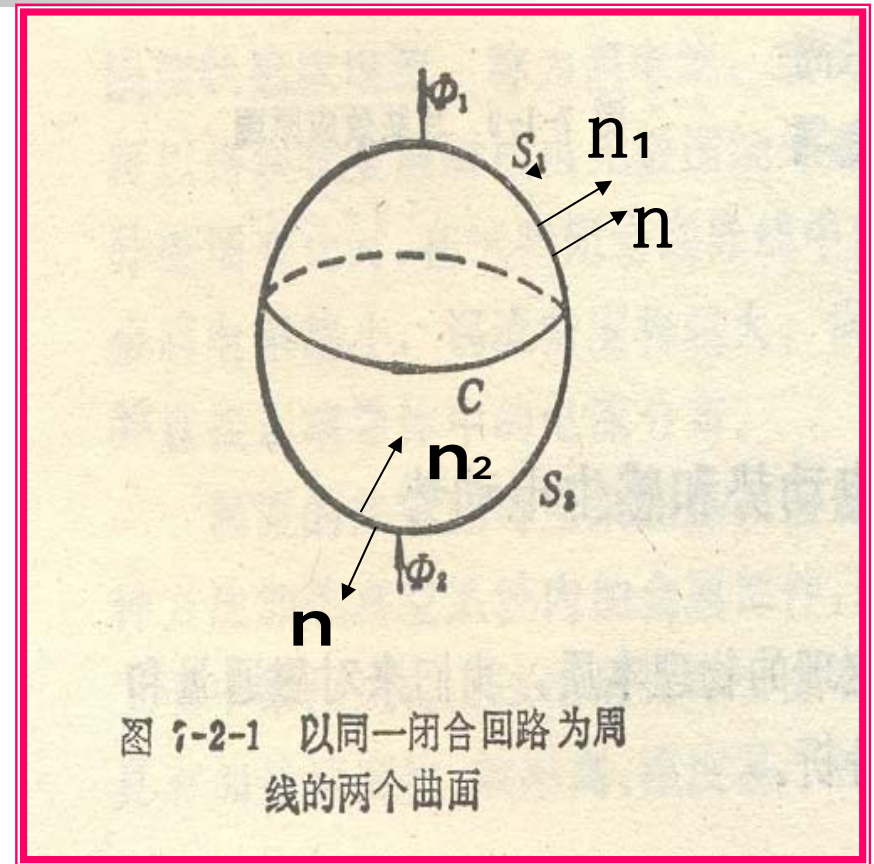
由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

其中 **B** 可以随时间变化。

线圈 **c** 是唯一的，但是，
以线圈 **c** 为周边的曲面是
不唯一的，例如可以是
 S_1 或 S_2 。

定律成立，即要求 ε 唯一。



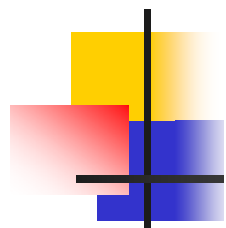
- 也就是要求： $\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \dots\dots$

- 应有 S_1 与 S_2 的法线方向应按回路C的绕行方向定，即 $\mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2$ ：

$$\iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS$$

- S_1 与 S_2 组成了 ^{S_1} 闭合曲面 S ， ^{S_2} 按通量规定 S 的法线方向 \mathbf{n} 向外， $\mathbf{n} // \mathbf{n}_1$ ， \mathbf{n} 反 $// \mathbf{n}_2$ ，

- 于是 $\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$



$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

立即可得

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这说明要使法拉第电磁感应定律成立，即 \mathbf{E} 应该是唯一的，则随时间变化的磁场 \mathbf{B} 也应满足高斯定理，所以高斯定理不仅对静磁场的情况成立，对随时间变化的磁场也成立。

§ 6.2 动生电动势与感生电动势

法拉第电磁感应定律证明，只要通过回路的磁通量随时间变化，就会在回路中产生感应电动势。而引起磁通量变化的原因不外乎有两种情况，

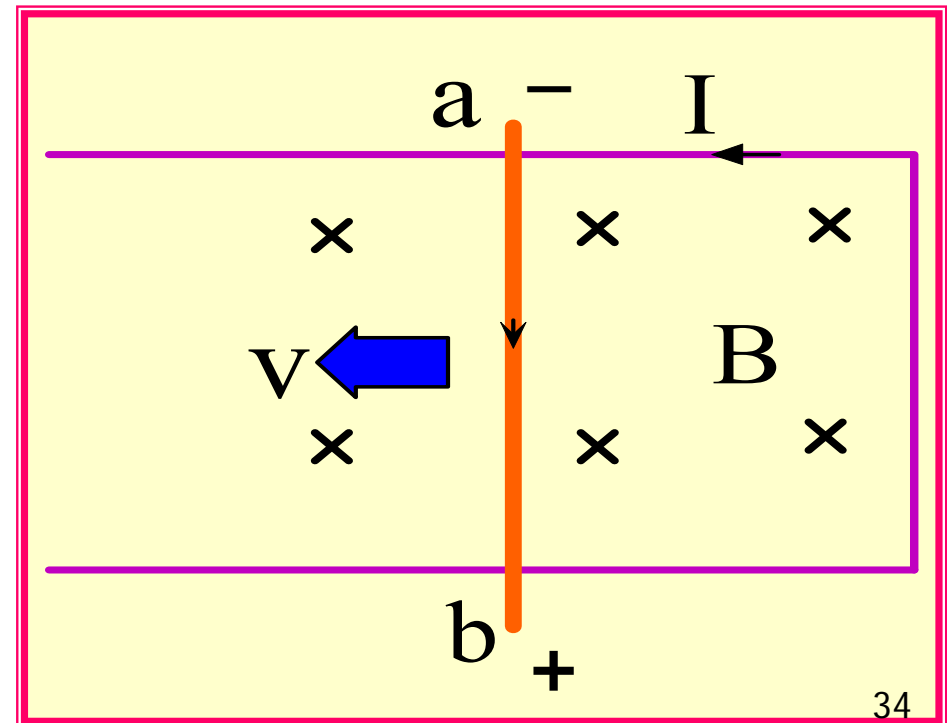
- 第一种是导体回路或其一部分在磁场中运动，使其回路面积或回路的法线与磁感应强度 B 的夹角随时间变化，从而使回路中的磁通量发生变化；
- 第二种是回路不动，磁感强度随时间变化，从而使通过回路的磁通量发生变化。
- 我们把由第一种原因在回路中产生的感应电动势称为动生电动势，而把由第二种原因在回路中产生的感应电动势称为感生电动势。

一、动生电动势

- 关于动生电动势的**产生原因**，我们可以用在磁场中运动的电荷将受到**洛伦兹力**加以解释。

如图，U形导体框置于匀强磁场 B 中，长为 L 的导体棒 ab 可以在导体框上无摩擦地滑动，**外力 F** 作用于导体棒，使之获得**向左**的速度 **v** 。

- 导体棒内的载流子也获得了速度 **v** 。



■ 由于导体棒在磁场中，所以棒中每个电子将受到洛伦兹力 f ， f 的方向垂直向上，于是电子将向上运动，从而引起负电荷在棒的上端的积累，正电荷在棒的下端的积累，导致了导体内部一个自下而上的静电场的建立。

■ 当导体棒中的电子所受磁场力等于电场力时达到平衡，ab间的电压达到一个稳定值。可见ab相当于一个电源，其电动势就是感应电动势。

- **电动势的定义**是使**单位正电荷**从电源的负极通过内部到达电源正极的过程中，**非静电力所作的功**。现在，非静电力就是**洛伦兹力** \mathbf{F} ，设单位正电荷所受的非静电力 \mathbf{K} 为：

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{q}(q\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

- 所以**动生电动势**为：

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- 由此可见，**产生动生电动势的原因**是由于导体在磁场中运动时，导体中的载流子获得了一个定向的宏观运动速度，从而受到**洛伦兹力**的结果，因此有时形象的说，当**导线作切割磁感应线运动**时，就会产生感应电动势。

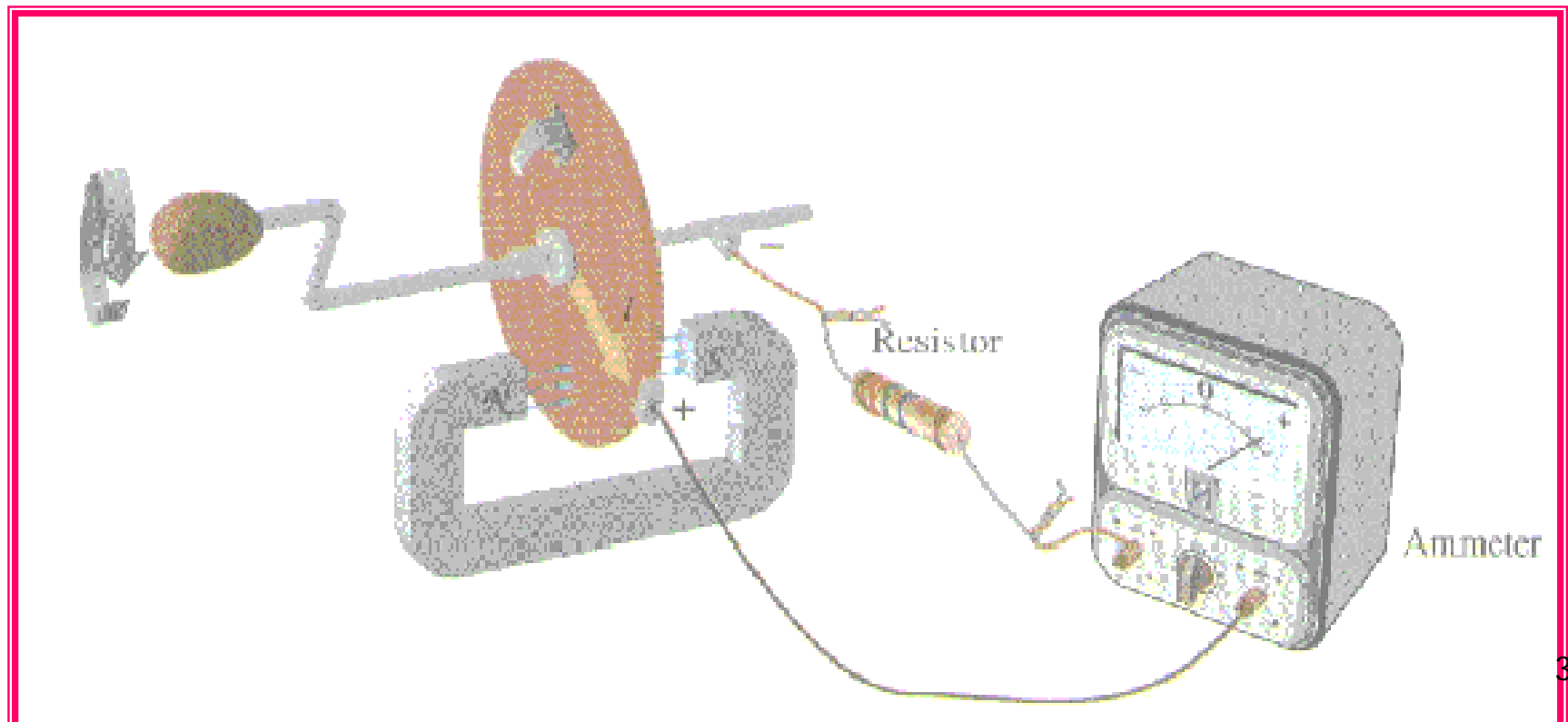
■ 在普遍情况下，一个任意形状的导体线圈**L**（不一定闭合）在任意恒定的磁场中运动或发生形变时，**dl**和**v**的大小和方向都可能是不同的，这时，**L**中的动生电动势为：

$$\varepsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

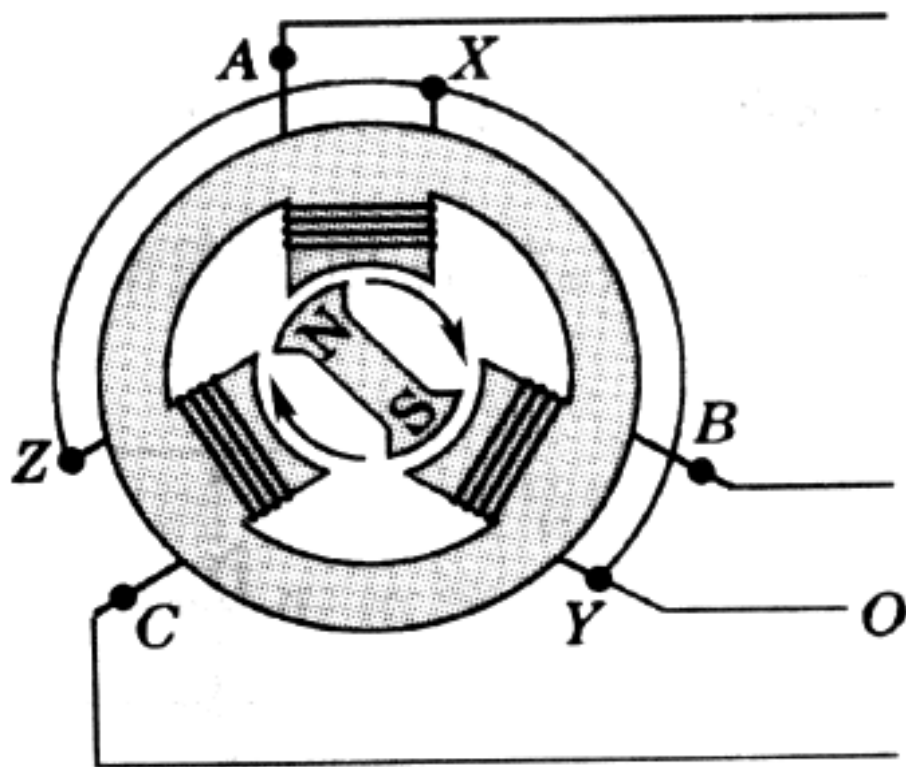
■ 综上所述，动生电动势只产生于在磁场中运动的导体上，若这个导体是闭合导体回路的一部分，则在回路中产生感应电流；若这个运动导体不构成回路，则导体两端有一定的电势差，相当于一个开路的电源。

应用：直流发电机

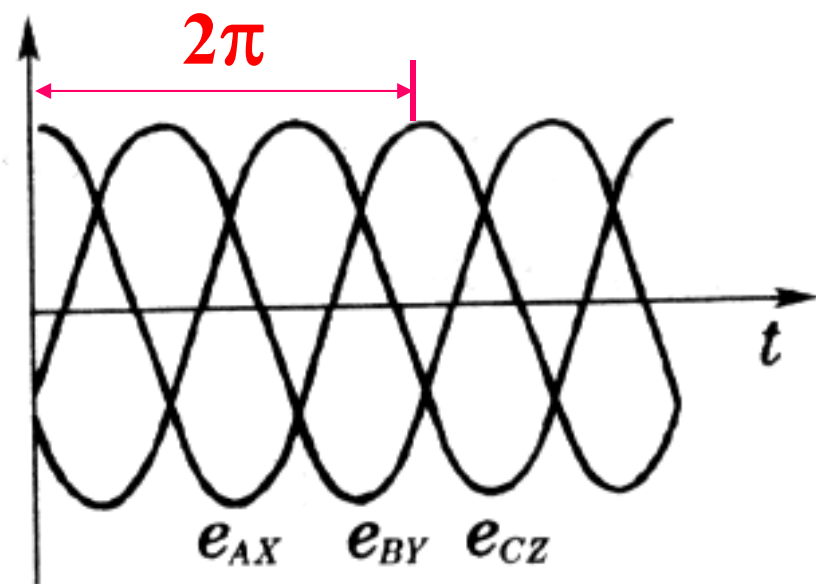
■ 下图是法拉第设计的直流发电机的原理图，当导体圆盘绕轴以角速度 ω 旋转时，电流计指针发生偏转， ω 越大，偏转越厉害。这里 $v=\omega r$ ， $dl=dr$ ，积分区间为： $0 \rightarrow R$ 。



交流发电机



a 三相交流发电机示意图



b 三相交流电波形曲线

图 5 - 103 三相交流电的产生



再论洛仑兹力不作功

- 我们知道，由于洛仑兹力始终与带电粒子的运动方向垂直，所以它对电荷是不作功的。
- 但在上面讨论动生电动势的时候，又认为动生电动势是非静电力——洛仑兹力移动单位正电荷的结果。这和洛仑兹力不作功发生矛盾？！
- 下面仔细分析一下

- 在讨论动生电动势时，我们**只考虑**了电荷随导体运动的速度 **\mathbf{v}** ，**而没有考虑**电荷受到洛伦兹力 **\mathbf{f}** 而在导体内部的运动速度 **\mathbf{u}** ，实际上，载流子的运动速度应为 **$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$** ，如图所示，电子电荷 **$-e$** 所受的洛伦兹力为：

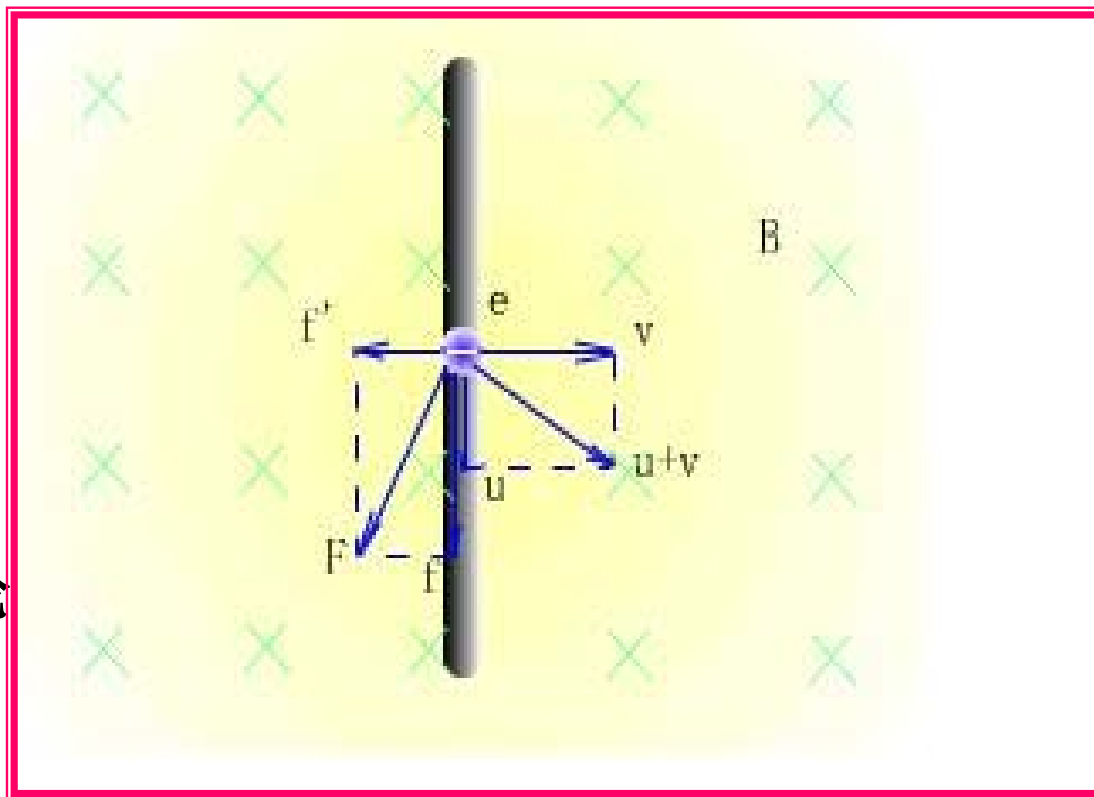
$$\mathbf{F} = -e\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

$$= -e(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}$$

$$= -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} + (-e)\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

$$= \mathbf{f} + \mathbf{f}'$$

- \mathbf{F}** 中**第一项 **\mathbf{f}**** 即我们在讨论动生电动势时的非静电力起源。而 **$\mathbf{f}' = -e\mathbf{u} \times \mathbf{B}$**



- 与 **\mathbf{f}** 垂直，与导体棒的运动速度 **\mathbf{v}** 反向，即 **\mathbf{f}'** 阻碍导体棒的向右运动。要使导体棒保持以 **\mathbf{v}** 匀速运动，外力必须克服 **\mathbf{f}'** 而对棒做功。
- 所以说是**外力通过洛伦兹力传递而做功，转化为电能。**

- 下面我们证明：把正电荷从a移动到b，洛仑兹力的分力**f**所作的功加上洛仑兹力的另一分力**f'**对导体棒所做的功为零。

- 把正电荷e从a移动到b，

f的功率为： $P_1 = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$

f'的功率为： $p_2 = e(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$

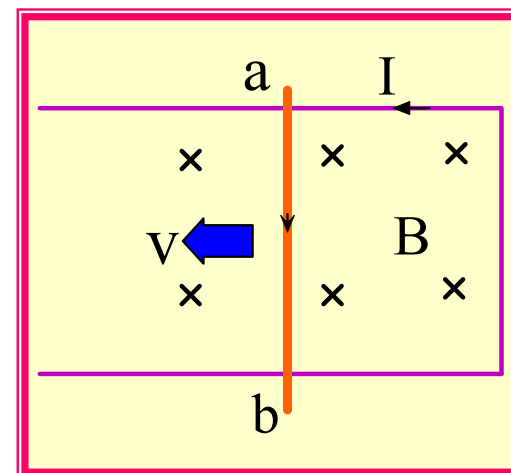
- 由矢量运算：

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

- 所以总的洛仑兹力**F**的功率为：

$$P = P_1 + P_2 = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} + e(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

- 这就证明了洛仑兹力是不作功的。



二、感生电动势

- 根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

- 当置于磁场中的**导体回路不动**，而**磁场随时间变化**时，也会在导体回路中产生感应电动势，这种感应电动势称为**感生电动势**。

- 那么产生感生电动势的**非静电力**是什么呢？
- 首先，它**不是洛伦兹力**。因为导体并没有运动，所以导体中的载流子没有定向宏观的运动速度。
- 然而当磁场变化时，导体回路中产生了感应电流，说明**带电粒子一定受到了一种力**。
- 这种力**不是磁场力**，那么**只有一种可能，是电场力**。即当磁场随时间变化时，在空间**激发了一种新的电场**，导体中的载流子在这个电场的作用下，在闭合回路中产生了感应电流。



1. 涡旋电场假说

J. C. Maxwell 在分析电磁感应现象的基础上，提出了一个大胆的假设：变化的磁场在其周围空间激发一种新的电场，这种电场是涡旋电场，或称感应电场。产生感生电动势的非静电力就是这个涡旋电场力。



2. 涡旋电场和库仑电场

- **共同之处**：它们都是一种客观存在的物质，它们对电荷都能施加力的作用。
- **不同之处**：**涡旋电场**是由变化的**磁场**激发的，而不是由**电荷**产生的；它的**电力线**是一些**闭合的曲线**，所以它的环量不为零，因而它**不是保守力场或势场**，常称为**有旋场**。而**库仑电场**是由**电荷**产生的，电力线是不**闭合的**，是保守力场，即有势场。用数学形式表示为：

- 对涡旋电场:

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

- 对库仑场有:

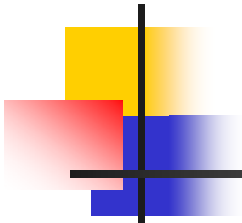
$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{库}} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- 当空间同时存在库仑电场和涡旋电场时, 总电场为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{旋}} + \mathbf{E}_{\text{库}}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

- 当空间不存在随时间变化磁场时, 既稳恒情况下, 上式回到静电场的环路定理。

- 
- 综上所述，**麦克斯韦**对感生电动势成因的解释，揭示了电磁感应定律更深层次的物理本质：

随时间变化的磁场在其周围空间激发涡旋电场，它是非保守力场，即**无势场**。



讨论上式的微分形式:

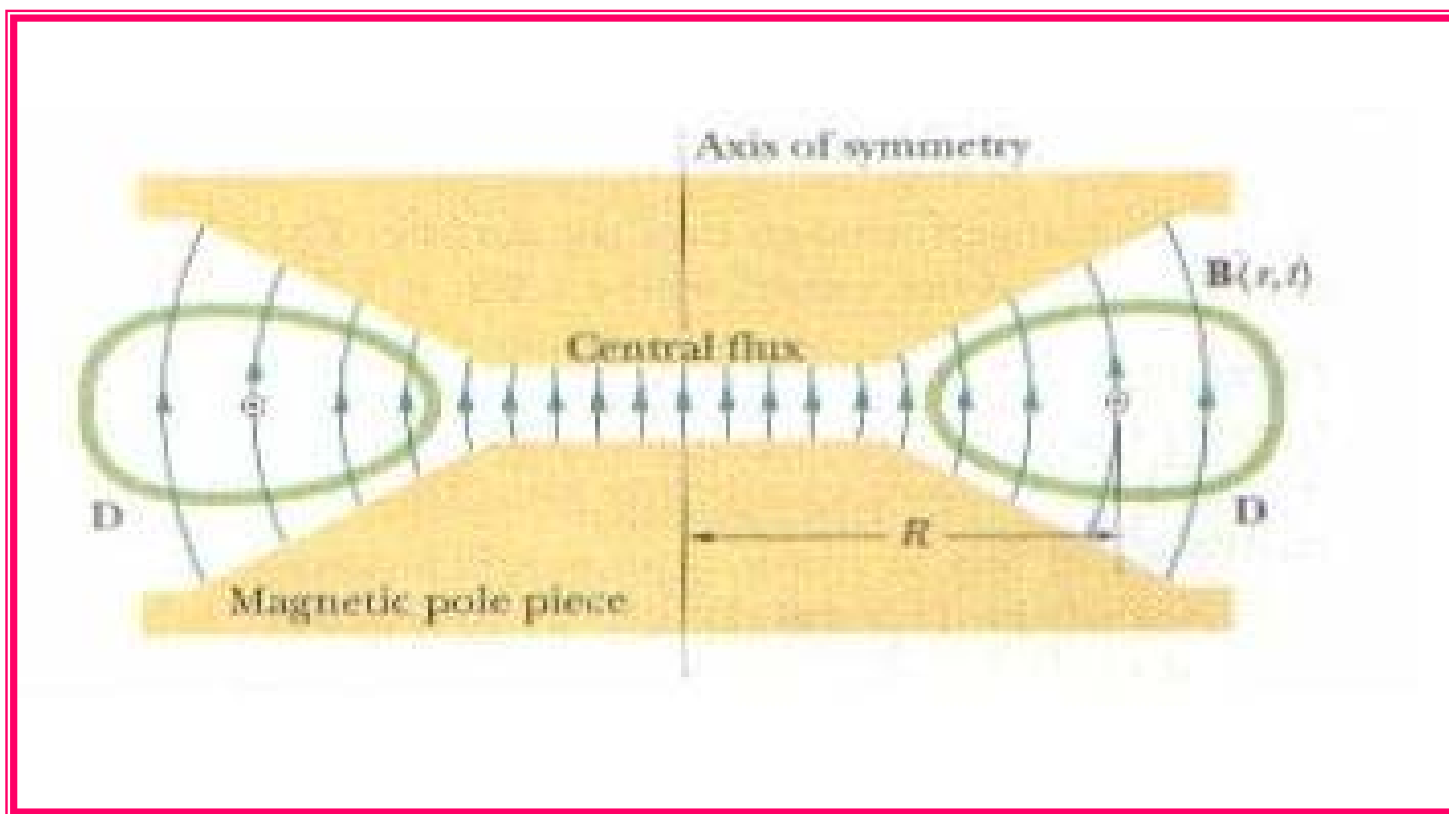
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- 公式表明，变化的磁场在空间激发涡旋电场，而与空间中是否有导体无关。

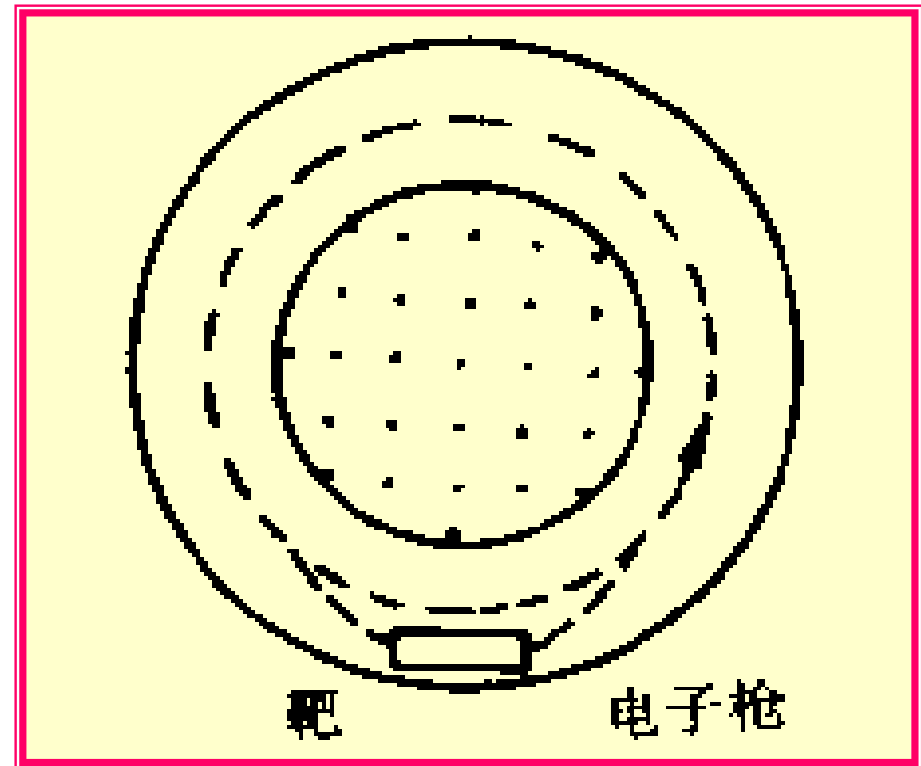
3. 验证与应用：(1) 电子感应加速器

■ 应用涡旋电场加速电子的电子感应加速器是麦克斯韦关于变化的磁场在其周围激发涡旋电场的假设的最直接的实验验证。

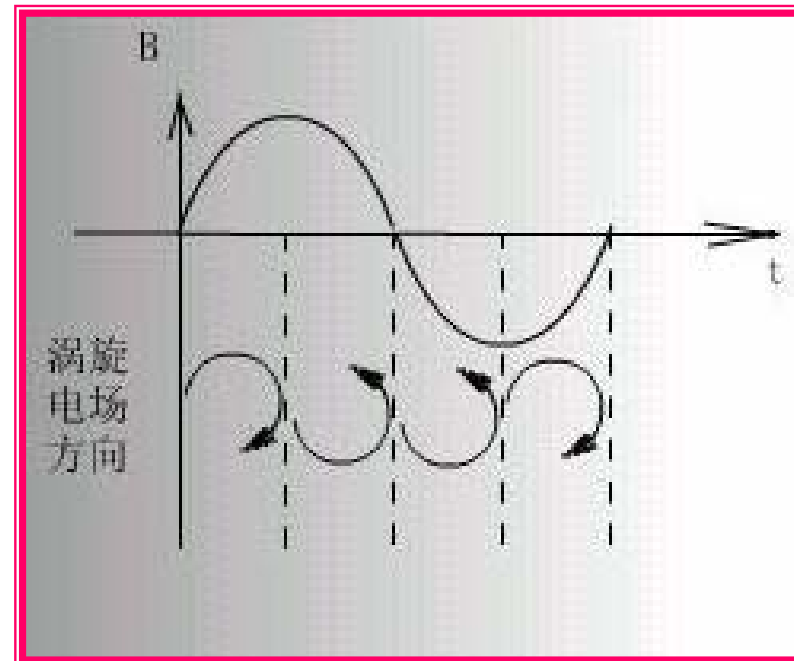
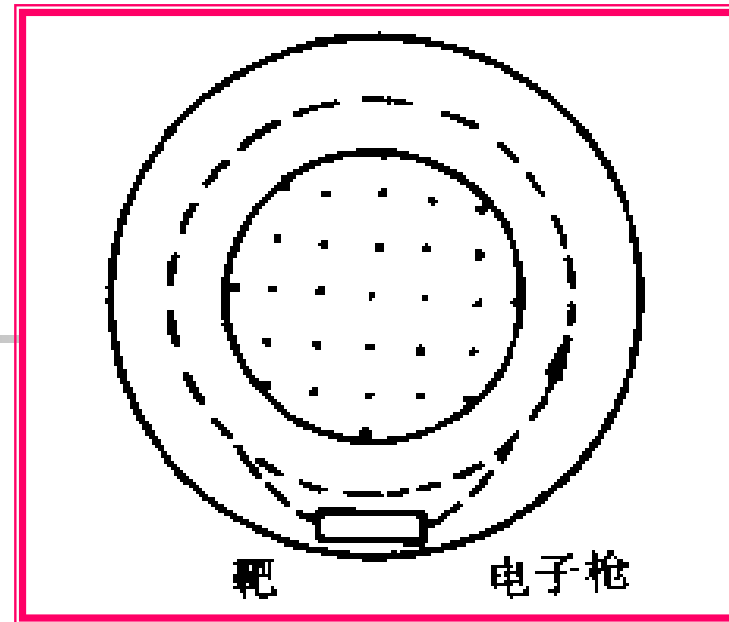


■ 圆形电磁铁的两极间有一环形真空室，在**交变电流的激励下**，两极间出现**交变磁场**。这个交变磁场激发一涡旋电场；

■ 从电子枪射入真空室的电子受到**两个力**的作用：**一是涡旋电场力**使电子沿切向加速，**二是径向的洛伦兹力**使电子做圆周运动。



- 交变磁场随时间的正弦变化导致涡旋电场方向随时间变化，如图。因为电子带负电，显然只有第一、四两个1/4周期内才能被加速。
- 但在第四个1/4周期中，由于B向下，而洛伦兹力的方向向外，不能充当向心力。
- 因此，须在每个周期的前1/4周期之末设法将电子束引出轨道而进入靶室，这就已经能使电子加速到具有足够高的能量了。



(a) 洛伦兹力提供向心力

■ 根据工程上的需要，要求被加速电子维持在稳定的圆形轨道上运动，设轨道半径为R。在轨道处的磁感应强度使电子受到洛伦兹力，它提供向心力，根据牛顿第二定律有：

$$m \frac{v^2}{R} = e v B_R$$

即

$$m v = e R B_R$$

上式表明，只要电子动量 mv 与磁感应强度成正比例增加，就能实现R不变，下面我们讨论电子动量的变化规律。

(b) 涡旋电场力为切向加速力是动量大小改变原因:

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \longrightarrow \quad -e E_{\text{旋}} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$$

■ 根据牛顿第二定律有

$$\frac{d(mv)}{dt} = -e E_{\text{旋}} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$$

■ 设初始条件为: $t = 0$ 时, $\Phi = 0$, $v = 0$, 对上式积分得:

$$mv = \frac{e}{2\pi R} \Phi = \frac{eR}{2} \bar{B} \quad (\text{使 } R \text{ 不变, 只要 } mv \propto \bar{B})$$

式中, \bar{B} 为通过电子轨道平面的平均磁感应强度, 其大小为:


$$\bar{B} \equiv \frac{\Phi}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r < R} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

■ 故得到:

$$\begin{cases} mv = \frac{eR}{2} \bar{B} \\ mv = eR B_R \end{cases}$$

$$\longrightarrow B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$$

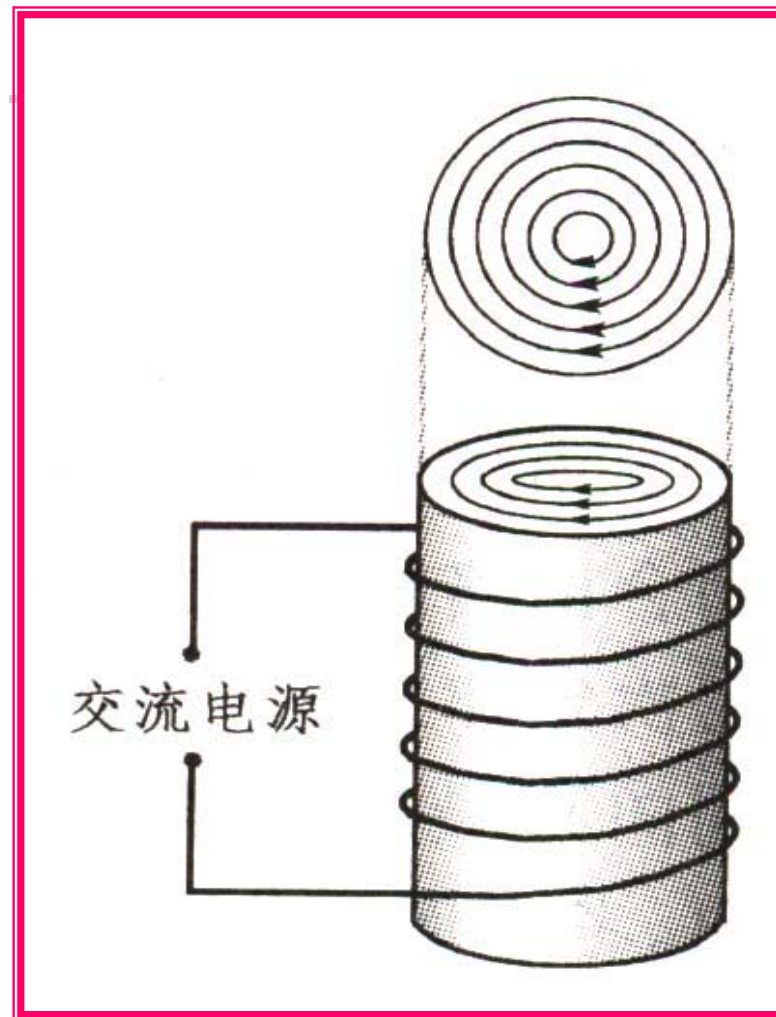
这可以通过设计电磁铁的外形实现

- 
- 注意！电动力学告诉我们，凡是电荷作加速运动，就会辐射电磁波而损失能量。电子速率越大，加速器尺寸越小，辐射损失就越厉害。只有补偿了这一辐射损失，才能使电子保持其速率。
 - 电子速率越大，需要补充的能量就越大，这便限制了对电子加速能够达到的最大速率 V_{\max} 。

(2) 涡电流

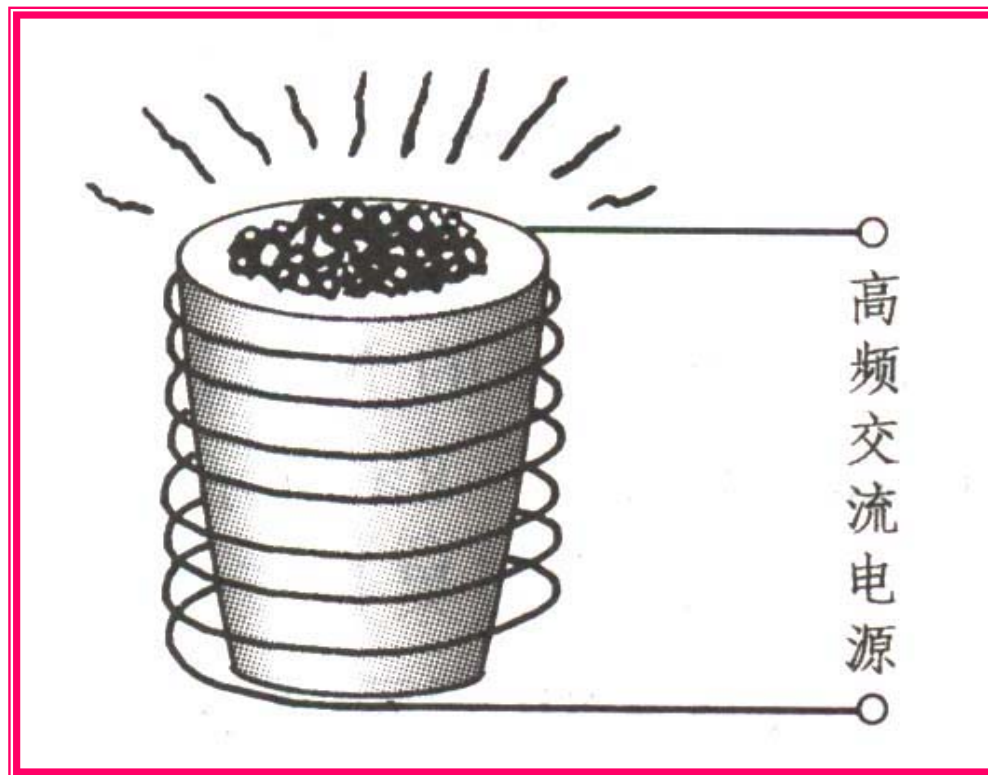
前面我们讨论了法拉第电磁感应定律，随时间变化的磁场可以在其周围空间激发变化的涡旋电场。

所以，当把块状金属置于随时间变化的磁场中时，金属中的载流子将在涡旋电场的作用下运动而形成电流，这种电流呈涡旋状，因此称为涡电流。



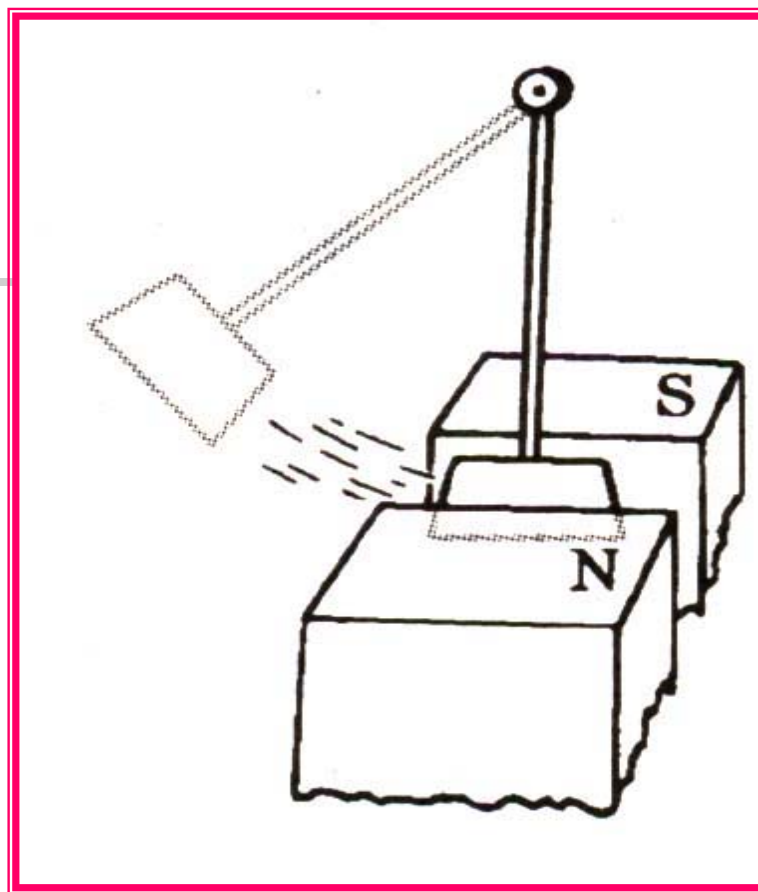
(a) 感应加热

- 因为金属的电阻很小，所以不大的感应电动势便可产生较强的涡电流。从而可以在金属内产生大量的焦耳热，这就是感应加热的原理。



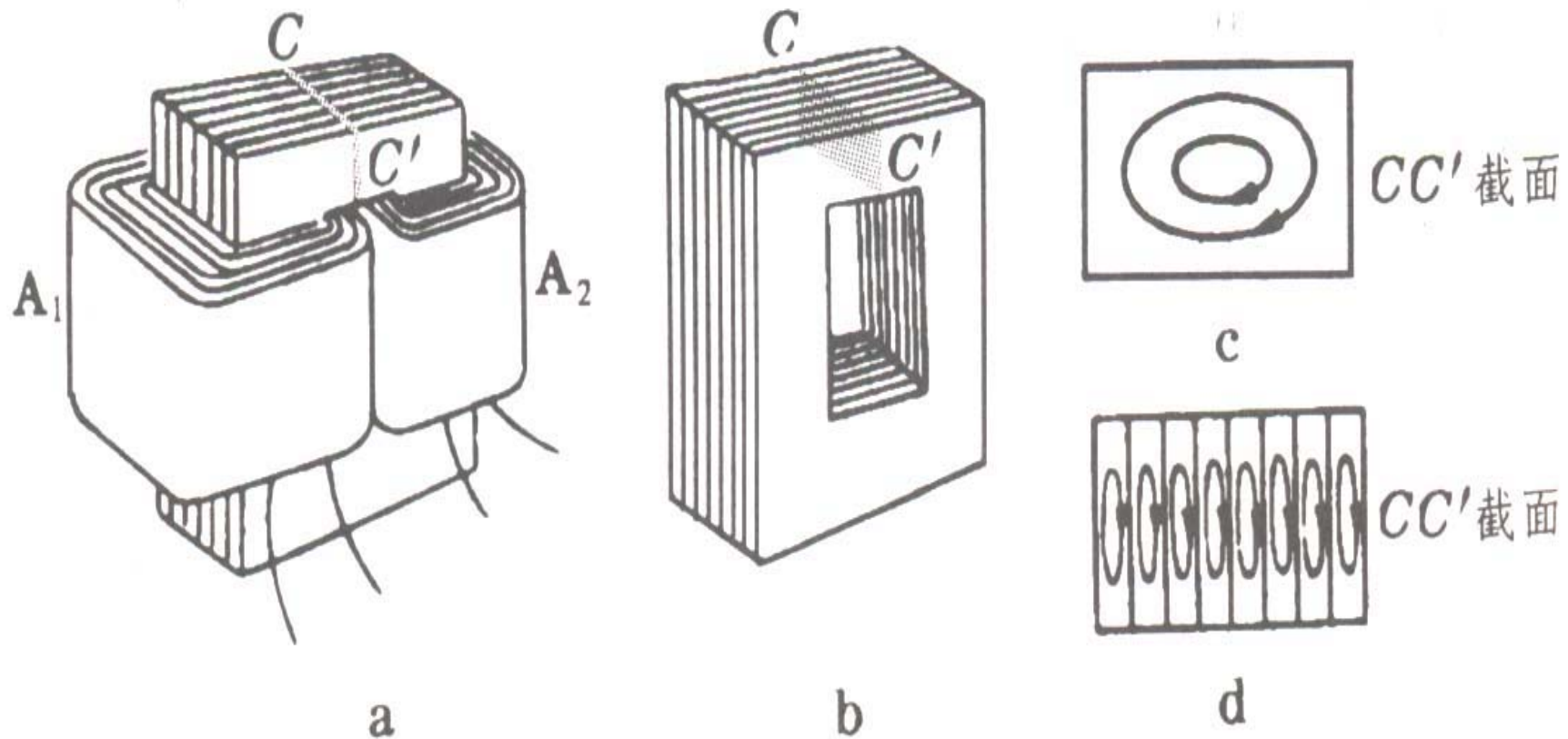
(b) 电磁阻尼

- 如图为一**傅科摆**，它是一块可以在**电磁铁的两极间**摆动的**铜板**，当电磁铁**未通电**时，摆要摆动多次才停下。但电磁铁**一旦通电**，摆很快停下，这种现象称为电磁阻尼。

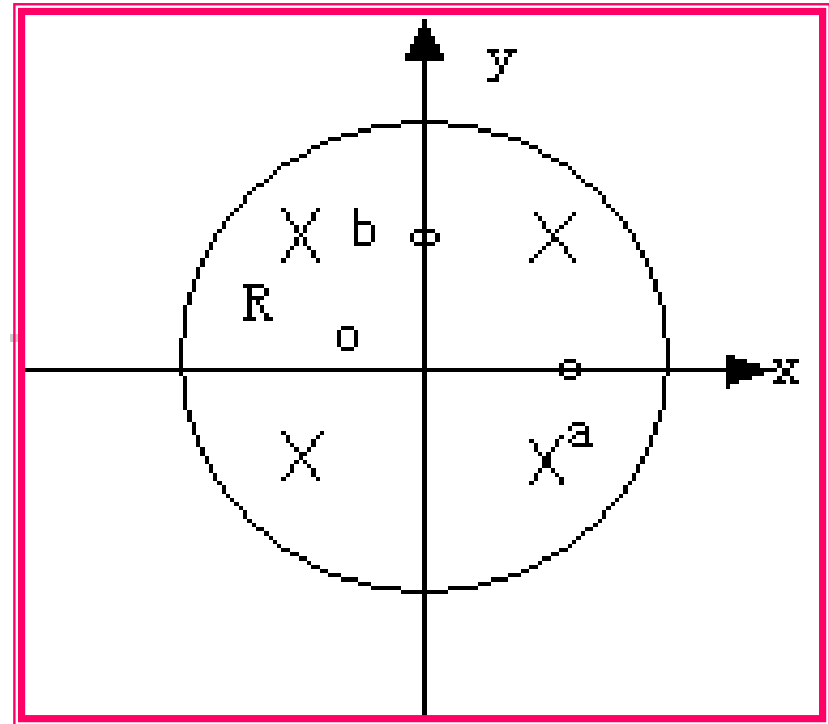


- **原因是：**当摆的一部分进入磁场时，前半部分的磁通量在增大，而后半部分还没有进入磁场；**前半部分产生向上的电流，受力方向与运动方向相反**，阻碍摆的运动。电磁阻尼常用于电学测量仪表，使指针能迅速稳定。

(C) 涡电流的危害



[例6.4] 如图右，磁感应强度 **B** 在圆内均匀，且以恒定速率随时间变化。若 dB/dt 已知，求 **a** 、 **b** 两点间的电势差 ($Oa = Ob = r$)。



(1) **a** 、 **b** 之间用跨过第二、三、四象限的**圆弧导线**相连；

(2) **a** 、 **b** 之间用跨过第一象限的**圆弧导线**相连；

(3) **a** 、 **b** 之间**没有导线**连接。

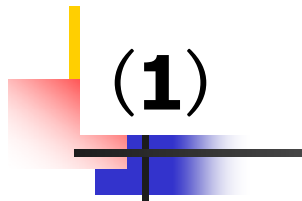
[解] 取半径为 **r** 、绕行方向为**逆时针**的圆形回路，由**感生电动势公式**得：

$$E_{\text{旋}} \cdot 2\pi r = - \left(- \frac{dB}{dt} \right) \pi r^2 = \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

由上式解出：

$$E_{\text{旋}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

a 、 b 之间有导线连接时, 因开路电压等于电动势:

(1)  $V_{ab} = \mathcal{E} = \int_b^a \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{3\pi r^2}{4} \frac{dB}{\partial t}.$
(2→3→4)

(2) $V_{ab} = \mathcal{E} = \int_b^a \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\pi r^2}{4} \frac{dB}{\partial t}.$

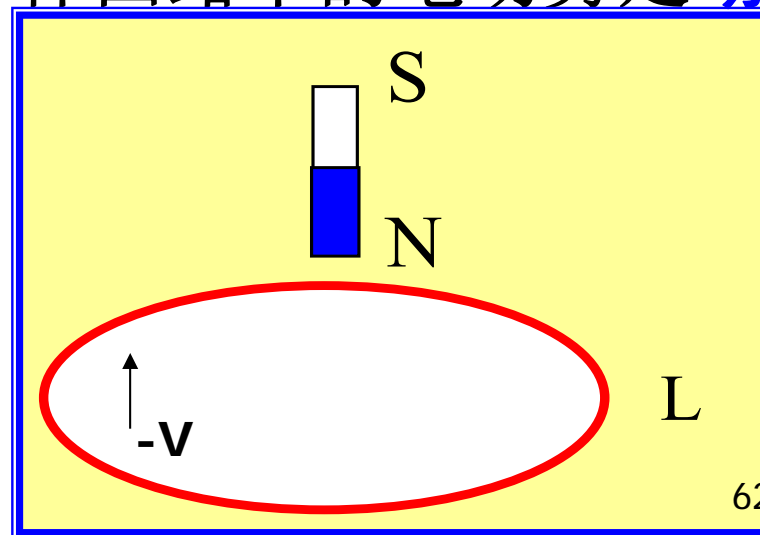
(3) a 、 b 之间没有导线连接, 即无电路; 这时又没有空间电荷分布, 则 $\mathbf{E}_{\text{势}} = \mathbf{0}$, 以至

$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E}_{\text{势}} \cdot d\mathbf{l} = 0$

三、电磁感应和相对性原理

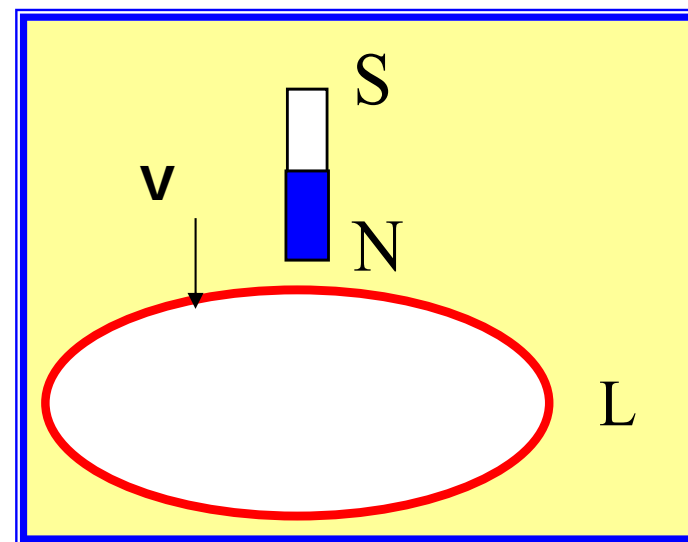
- 考虑以速度 \mathbf{v} 相对运动着的线圈L和磁棒，在线圈L中产生感应电动势的情况，如图所示。我们选**2个坐标系**： S 系固定在磁棒上， S' 系固定在线圈L上，从**2个惯性系中静止的观察者的角度**出发分析：
- **1.** 对于 **S 中静止的观察者**，看到的是：**磁铁是静止的**，而线圈以速度 $-\mathbf{v}$ 向着磁棒运动，即线圈在磁棒产生的磁场 \mathbf{B} 中运动，所以他认为导体回路中的电动势是**动生电动势**，来源于**磁场的洛伦兹力**，其大小为：

$$\mathcal{E} = - \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$



- **2.** 相对于**S'**中**静止**的**观察者**看到的是：
线圈**L**是**静止**不动的，磁棒以速度**v**向着线圈运动，所以使磁场的空间分布随时间变化，穿过静止的导体回路的**磁通量随之发生变化**，因此认为导体回路中的电动势是**感生电动势**，来源于**涡旋电场**。其大小为：

$$\varepsilon' = \oint_{L'} \mathbf{E}'_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l}' = - \iint_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \cdot d\mathbf{S}'$$



- 两种坐标系产生两种不同的看法，原因何在？
- 爱因斯坦的狭义相对论认为：电磁场是一个整体，将它划分为电场和磁场只有相对意义，这种划分与观测者所在的参考系、即所在的惯性系有关，正如一个矢量在不同坐标系中有不同的分量一样。电磁场作为一个整体，在不同惯性系中满足同样的规律。所以狭义相对论才从根本上解决了这一矛盾的看法。



§ 6.3 互感与自感

一、互感

- 当一个线圈中的电流发生变化时，将在周围空间产生变化的磁场，从而在它附近的另一个线圈中产生感应电动势，这种现象称为互感现象。
- 一个线圈中的互感电动势的大小不仅与另一个线圈中电流改变的快慢有关，而且与两个线圈的结构及它们之间的相对位置有关。

- 如图，**线圈1**产生的磁场 **B_1** ，它穿过**线圈2**的磁通匝链数为 **Ψ_{12}** ，
- 若线圈的形状、大小、相对位置均保持不变，周围无磁性物质，则根据**毕奥-萨伐尔定律**可知： **$\Phi \propto B \propto I$**

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1$$

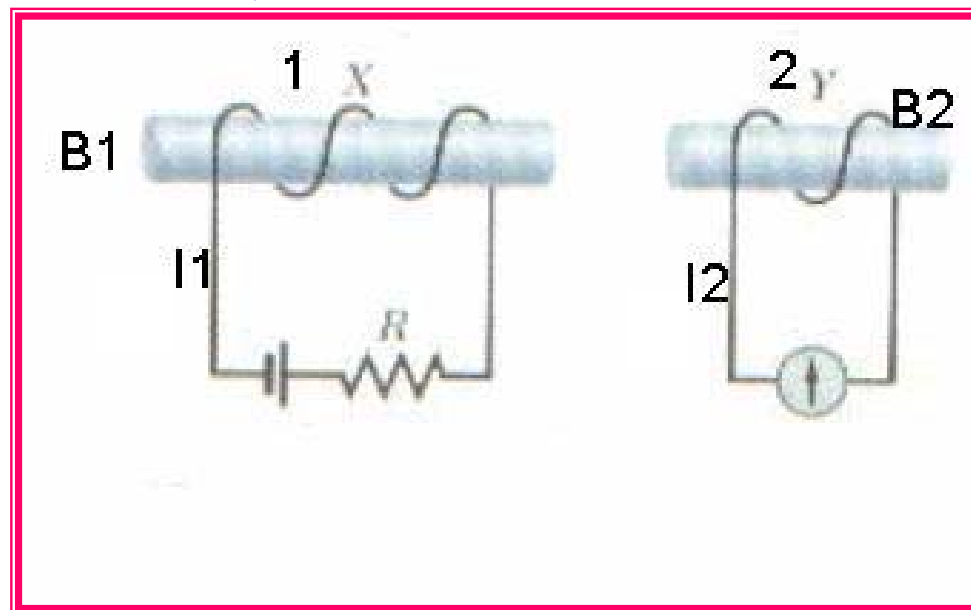
式中， **M_{12}** 为比例系数。

- 同理有

$$\Psi_{21} = M_{21} I_2$$

- 可以证明**互感系数**，简称**互感**：

$$M_{12} = M_{21} = M$$



- 根据法拉第电磁感应定律，1和2中的感应电动势分别为：

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

- 互感系数的单位为亨利，用H表示。

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$$

- 证明互感系数 $M_{12} = M_{21} = M$

- 我们假设两线圈都是单匝线圈，因为： $\Psi_{12} = M_{12} I_1$

而

$$\Psi_{12} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2$$

- 式中 B_1 为线圈1中电流 I_1 产生的磁感应强度(继续！未完)



式中 \mathbf{B}_1 为线圈1中电流产生的磁感应强度，磁感应强度 \mathbf{B} 有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

由数学知，可引入矢量 \mathbf{A} 来表示，
即：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

\mathbf{A} 称为磁场 \mathbf{B} 的矢量势。

- 对于载流线圈，**矢量势**与电流的关系为：

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} dV}{r}$$

对应**电势U**公式 $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_e dV}{r}$

- 因为 $\mathbf{J} dV = JSd\mathbf{l} = I d\mathbf{l}$

- 所以 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\mathbf{l}}{r}$, $\Psi_{12} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2$

- 根据矢量分析中的斯托克斯定理，得：

$$\Psi_{12} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{r} \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

- 由此可见，互感系数只取决于两个线圈的形状、大小、和相互位置，而与线圈所载的电流无关。

- 同理我们可以得到

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{S}_1 \\ &= \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_2 \bullet d\mathbf{l}_1}{r}\end{aligned}$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \bullet d\mathbf{l}_1}{r}$$

- 由于 $d\mathbf{l}_1$ 和 $d\mathbf{l}_2$ 是相互独立的，所以积分的次序不影响积分结果，因此，

$$M_{12} = M_{21} = M$$



二、自感

■ 当一个线圈中的电流发生变化时，它所激发的磁场穿过每匝线圈自身平面的磁通量也随之发生变化，从而使线圈产生感应电动势，这种因线圈中的电流发生变化而在线圈自身中引起感应电动势的现象，称为自感应现象，所产生的感应电动势称为自感电动势。

- 设线圈中通有电流 I ，在线圈的形状、大小保持不变，周围没有铁磁物质的情况下，根据毕奥-萨伐尔定律可知，穿过线圈的磁通匝链数 Ψ 与电流 I 成正比，即：

$$\Psi = LI$$

- 式中， L 为比例常数，称为自感系数，简称自感。
- 当电流 I 随时间变化时，在线圈中产生的自感电动势为：

$$\varepsilon = - \frac{d\psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

- 自感 L 的单位与互感相同。

[例3.1]如图，同轴电缆由半径分别为**R1**，**R2**的两个无限长同轴柱面组成，两柱面通过大小相等方向相反的电流，求单位长度上电缆的自感系数。

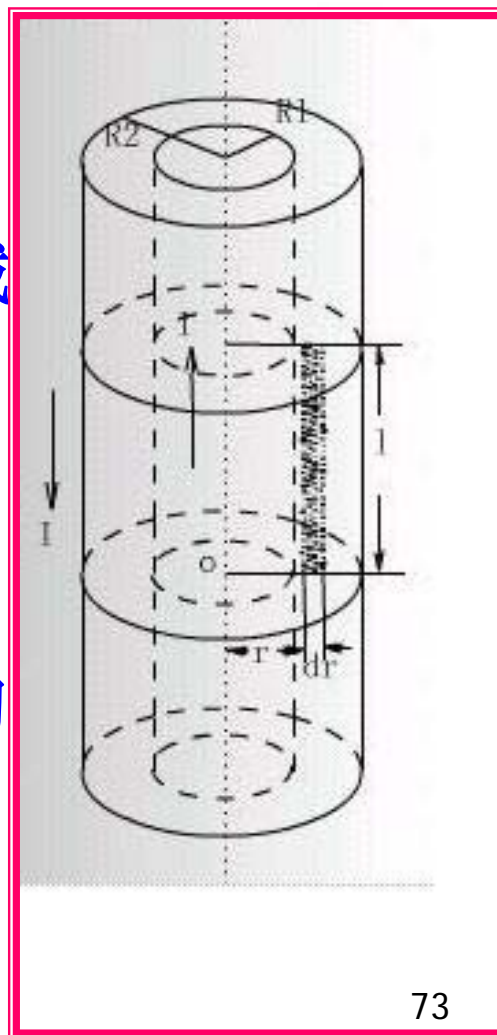
[解]根据安培回路定律，有 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
r为场点到轴线的距离。

■ 在两柱面之间作长为**l**，宽为dr的纵截面，通过此截面的磁通量为：

$$d\Psi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Bl dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

■ 通过长为**l**的两圆柱面之间的纵截面的磁通量为：

$$\Psi = \iint_S d\Psi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I l \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$





根据自感定义，长为 l 的同轴线的自感为：

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

所以，单位长度同轴电缆的自感为：

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

由此可见，线圈的自感只与它的几何量有关，而与通过的电流无关。



三、连接问题

1、两个串联线圈的自感

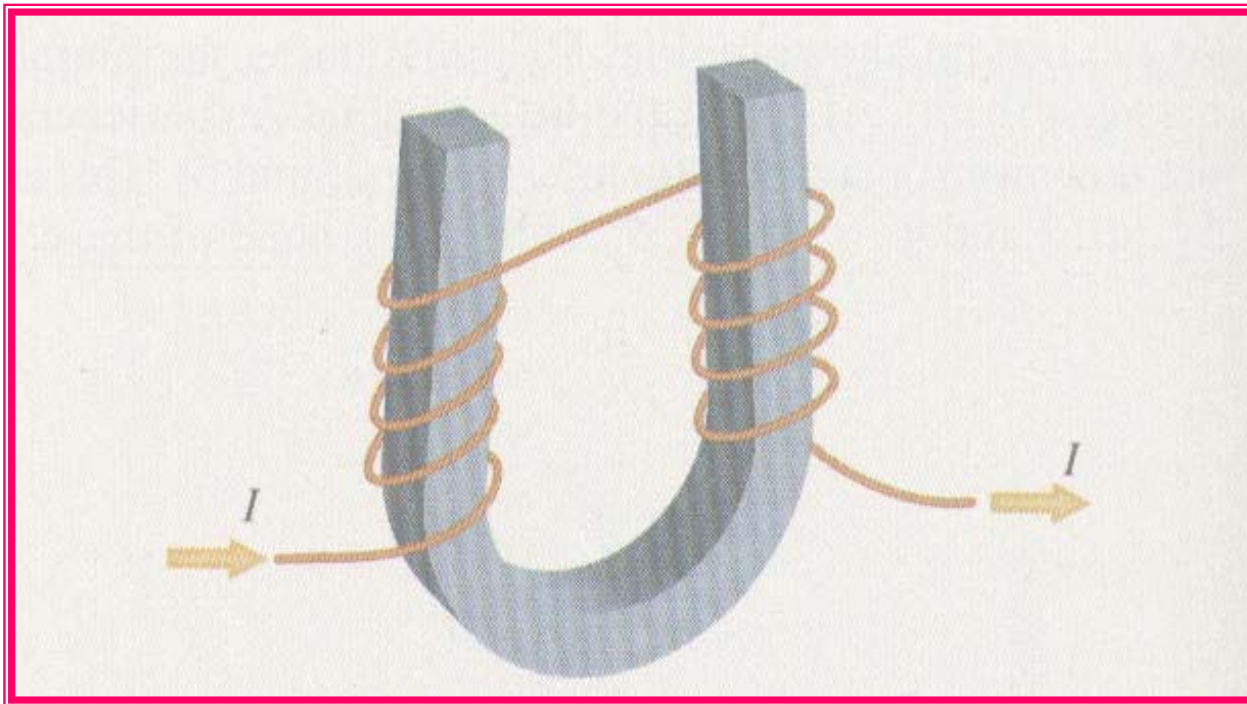
两个自感分别为 L_1 ， L_2 的线圈，它们的互感为 M ，由这两个线圈串联等效于一个自感线圈，但新线圈的自感不等于两线圈自感之和。而且大小还与接法有关，有顺接和逆接两种方式。

下面我们分别讨论它们的自感：

顺接情况

当两个线圈顺接时，两线圈电流的磁通互相加强，每个线圈的磁通匝链数都等于自感和互感磁通匝链数之和，即

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{21}, \quad \Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{12}$$



- 考虑到串联时流过两个线圈的电流相等，都为 I ，所以每个线圈中产生的感应电动势为：

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\left(L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}\right) = -(L_1 + M) \frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\left(L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}\right) = -(L_2 + M) \frac{dI}{dt}$$

- 两个串联线圈的总电动势等于每个线圈的感应电动势之和：

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

- 根据自感系数的定义，两个线圈的串联等效于一个自感线圈，其自感系数为： $L = L_1 + L_2 + 2M$
- 由此可见，两线圈顺接，其等效自感大于两个线圈的自感之和。

逆接情况

- 对于逆接情况，两线圈电流的磁通互相削弱，

$$\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{21}, \quad \Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{12}$$

- 感应电动势为：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\left(L_1\frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt}\right) = -(L_1 - M)\frac{dI}{dt} \\ \mathcal{E}_2 &= -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\left(L_2\frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt}\right) = -(L_2 - M)\frac{dI}{dt} \\ \mathcal{E} &= -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{dI}{dt}; \quad L = L_1 + L_2 - 2M\end{aligned}$$

- 其等效自感系数小于两线圈自感之和，且应有 $L > 0$ ，所以 $M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ 。

2、并联

引入同名端与异名端的定义：

当两线圈的电流从同名端流入（或流出）时，同一线圈的自感磁通和互感磁通同向。

反之，若两线圈的电流从异名端流入（或流出）时，同一线圈的自感磁通和互感磁通反向。

按上面的定义，刚讲过的串联中的顺接，即是电流从同名端流入（或流出）；逆接，即是电流从异名端流入（或流出）。（当两个线圈在一起时，为并联时方便，一般都标出同名端，否则要从两线圈的绕行方向来判断。）

同名端并接: $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $I = I_1 + I_2$

故有:
$$\begin{cases} \varepsilon = -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \right) = -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \right), \\ \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}, \end{cases}$$

由这两式可解出:

于是得:
$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = -\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt}, \quad L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

异名端并接:

总自感的表达式可以简单地将上式中的M代之以-M得到:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

由 $L > 0$, $\therefore L_1 L_2 - M^2 > 0$,

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2},$$

$$\text{令 } M \equiv k \sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1,$$

k称为**耦合系数**。K=0表示无耦合；K=1表示理想耦合。变压器的原线圈和副线圈之间接近理想耦合， $K \approx 1$ ，且 $L_1 \neq L_2$ ，于是并联后 $L \approx 0$ ，意味着‘短路’。所以，**不能将变压器的原线圈和副线圈并联！**

§ 6-4 暂态过程 （电感的应用）

- 似稳条件与似稳电路
- **RL**电路的暂态过程
- **RC**电路的暂态过程
- **RLC**电路的暂态过程

一、似稳条件与似稳电路

1、似稳条件

似稳电路是一种非稳恒电路，有非稳恒电源，但是这电源随时间变化很慢。设电路的尺寸为 ℓ ，电源变化的频率为 f ，电场的传播速度为 C ，当

$$\frac{1}{f} \gg \frac{\ell}{c} \Rightarrow \frac{c}{f} \gg \ell \Rightarrow \lambda \gg \ell$$

则可近似认为电路对电源变化的响应不需要时间，在这种近似下，电流将随电动势同步变化，二者的关系和稳恒电路的情况相同，称此电路为似稳电路。上式即似稳条件，可写成：

$$\lambda \gg \ell$$

【例】市电 $\frac{3 \times 10^5}{50} = 6000(km) \gg 600(km)$ (似稳电路尺寸)

2、似稳电路方程：基本定律、定理的应用

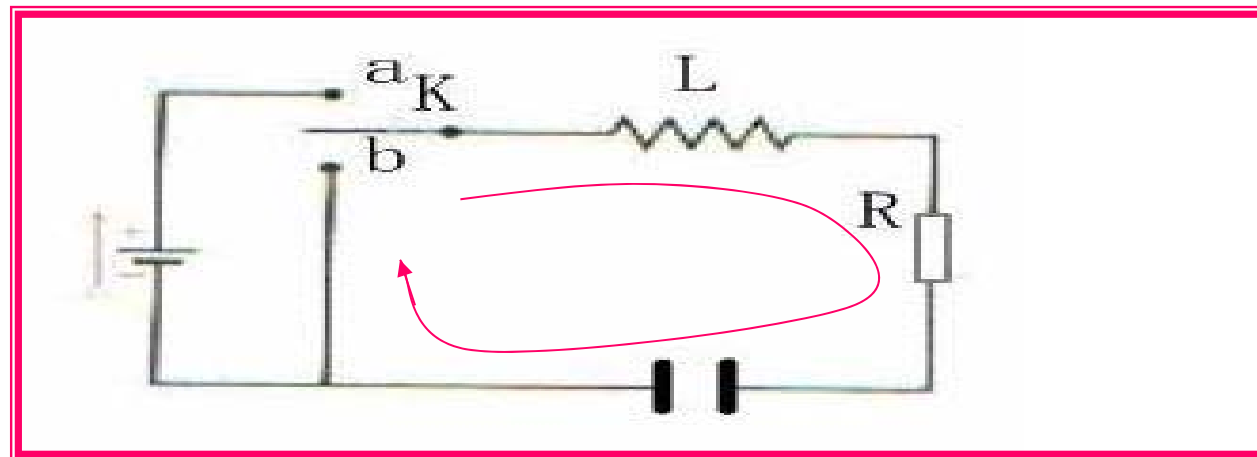
I、欧姆定律：

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E}_{\text{位}} + \mathbf{E}_{\text{旋}} + \mathbf{K})$$

$$\therefore \mathbf{E}_{\text{位}} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{E}_{\text{旋}} - \mathbf{K}$$

II、环路定理：

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{源}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{阻}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{容}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{感}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



(1) 电源中:

$$\mathbf{E}_{\text{旋}} = 0; \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0; \quad \therefore \mathbf{E}_{\text{位}} = -\mathbf{K}$$

$$\text{故} \quad \int_{\text{源}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\text{源}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{E}$$

(2) 电阻中:

$$\mathbf{E}_{\text{旋}} = 0; \quad \mathbf{K} = 0; \quad \therefore \mathbf{E}_{\text{位}} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}$$

$$\text{故} \quad u_R = \int_{\text{阻}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{阻}} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{\mathbf{j}S}{\sigma S} d\ell = iR$$

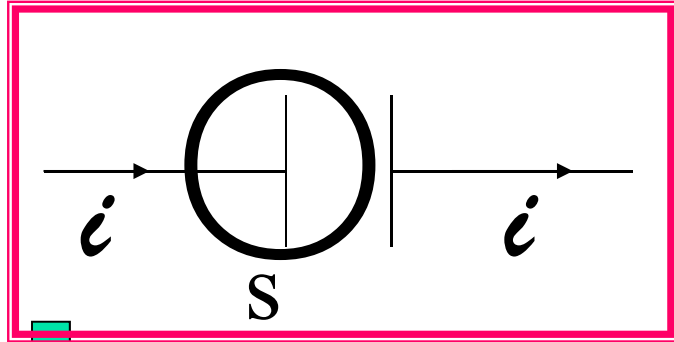
(3) 电容中:

$\mathbf{E}_{\text{旋}} = 0; \quad \mathbf{K} = 0; \quad \sigma = 0; \quad \mathbf{j} = 0; \quad \mathbf{E}_{\text{位}} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{0}{0} \text{ (不定式)}$

只能用定义: $u_c = \frac{q}{C}$

由电荷守恒定律:

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt},$$


$$-i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i dt,$$

$$\therefore u_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

(4) 电感中：有L，M

$$\mathbf{K} = 0; \quad \sigma \rightarrow \infty, \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0; \quad \therefore \mathbf{E}_{\text{位}} = -\mathbf{E}_{\text{旋}}$$

$$\text{故 } u_L = \int_{\text{感}} \mathbf{E}_{\text{位}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\text{感}} \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{E}_L$$

$$\text{由电磁感应定律： } \mathcal{E}_L = - \left(L \frac{d\dot{i}}{dt} + M \frac{d\dot{i}'}{dt} \right)$$

$$\text{于是： } u_L = \left(L \frac{d\dot{i}}{dt} + M \frac{d\dot{i}'}{dt} \right)$$

取回路方向为**顺时针方向**，将以上的分析结果代入环路定理得：

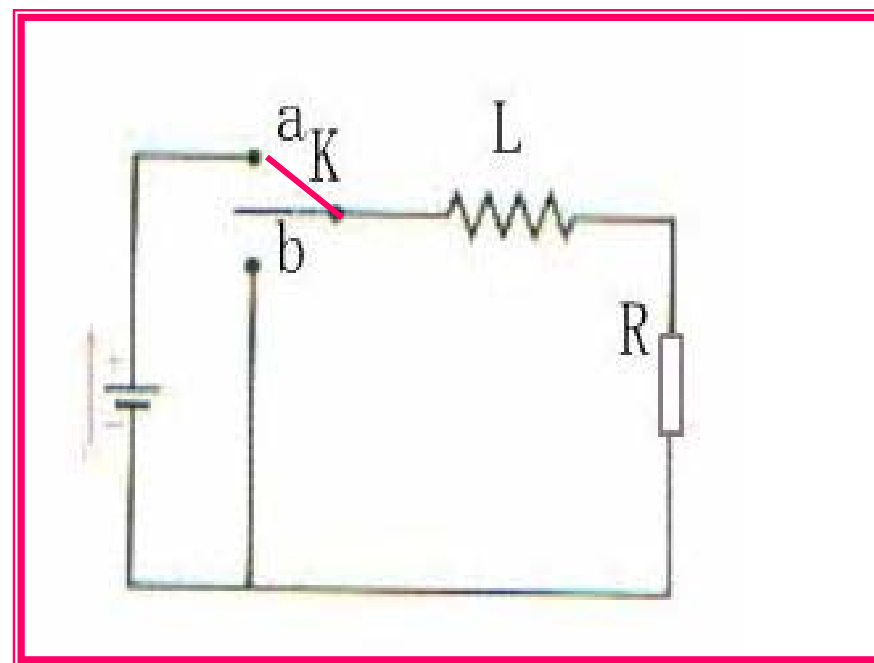
$$-\mathcal{E} + u_R + u_C + u_L = 0,$$

$$\therefore \mathcal{E} = iR + \frac{1}{C} \int i dt + \left(L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \right).$$

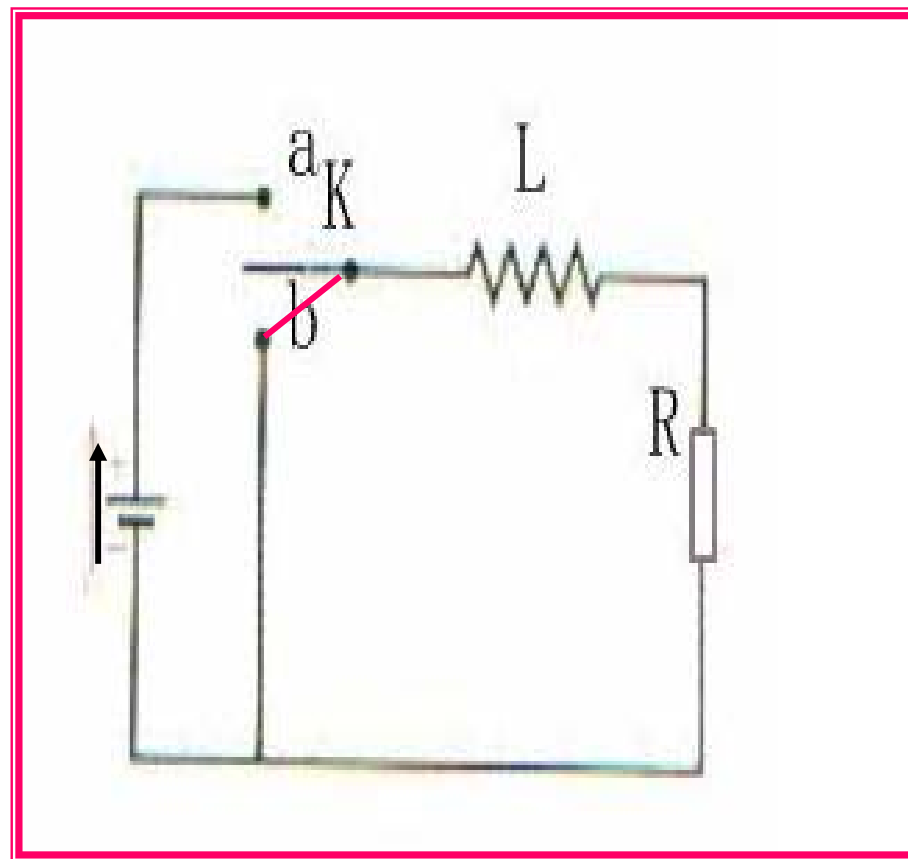
这就是**似稳电路的基本方程**，它可以应用于解似稳电路问题。当然，也可应用于解似稳电路的**闭、开**过程，即**暂态过程**。

二、RL电路的暂态过程

如图，当电键K合到a点时，电路中的电流从零开始增长（充电），所以在线圈中将产生感应电动势，从而产生感应电流，这个感应电流阻碍原电流的增长，所以使回路中的电流不能立即达到稳定值 I_0 ，也就是说，当直流电动势接入电路后，电流值从零增长到稳定值需要一个短暂的过程，这个过程叫暂态过程。



当电流达到稳定值后，如突然把电键从**a**断开、合到**b**，即把电源电动势突然从电路中撤去，电路中的电流开始下降（**放电**），此时线圈中也将产生**感应电动势**，阻碍原电流的下降，所以回路中的电流不能立即降为零，这个过程也叫**暂态过程**。



先讨论充电过程

- 如果电路中**没有线圈**，当**K**合上时（直流电动势突然引入回路的情况），回路中的电流几乎立即达到稳定值

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

- 现在回路中**有线圈**存在，当**K**合到**a**点时，回路中的电流从无到有随时间变化，所以 $\frac{di}{dt} \neq 0$ ，于是在线圈中产生自感电动势

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

- 这个感应电动势和原电动势串联在电路中，选取**顺时针**方向为电流方向，由似稳电路的**基本方程**得到：

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

- 我们用分离变量法求解这个一阶线性常系数非齐次微分方程

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L}i = \frac{R}{L} \left(\frac{\varepsilon}{R} - i \right)$$

- 初始条件为: $i \Big|_{t=0} = 0$

- 分离变量得: $\frac{di}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = \frac{R}{L} dt$ 两边积分: $-\ln \left(\frac{\varepsilon}{R} - i \right) = \frac{R}{L} t + C_1$

- 利用初始条件 $t=0, i=0$, $C_1 = -\ln \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)$

代入上式得:

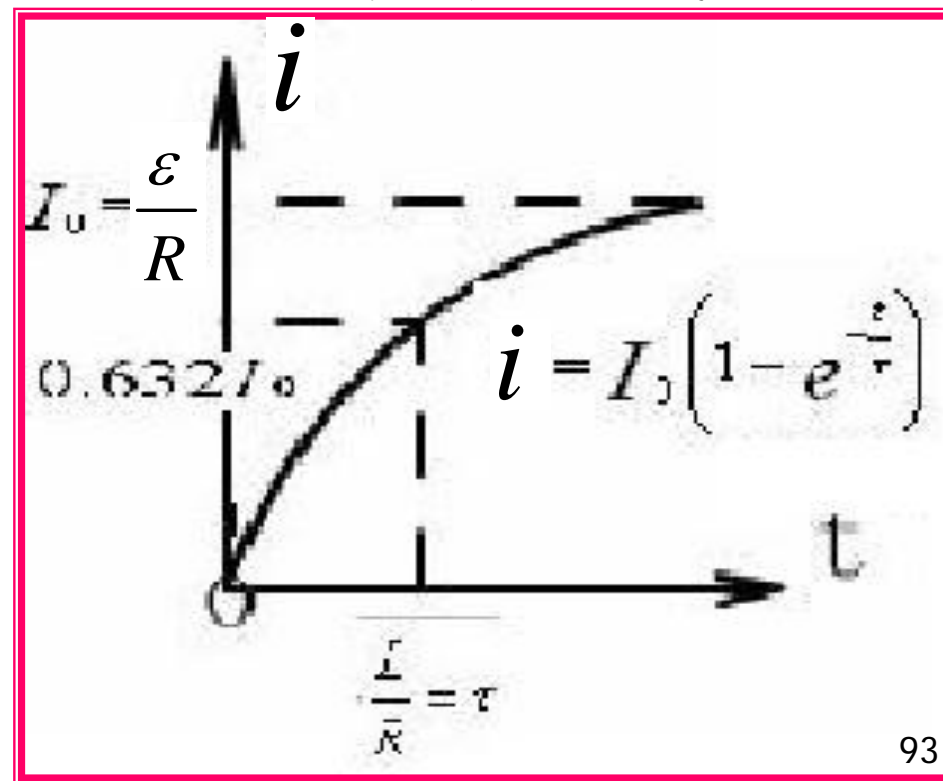
$$\ln \left(\frac{\frac{\varepsilon}{R} - i}{\frac{\varepsilon}{R}} \right) = -\frac{R}{L} t,$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

■ 而 $\frac{\varepsilon}{R} = I_0$, 令 $\frac{L}{R} = \tau$ 得到: $i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

■ 这就是在开关接通后电路中电流 i 的变化规律, 下图画出了 i 随时间 t 的变化曲线:

■ 在 **RL** 电路的暂态过程中, 电流 i 以指数方式随时间 t 增长, 最后达到稳定值。



- 从理论上说，要达到稳定值 I_0 须经过无限长的时间。

- 但实际上，

当 $t = \tau = \frac{L}{R}$, $i = I_0 (1 - e^{-1}) = 0.63 I_0$

- 即经过时间 τ ，电流以达到稳定值的**63%**，所以 τ 是反映电流达到稳定值的**63%**所须的时间，称为回路的时间常数。

再讨论放电过程

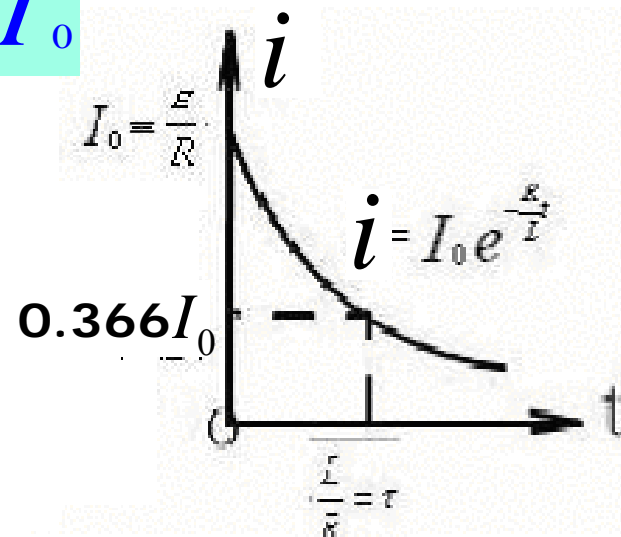
- 当电流达到稳定值后，突然把电键合到**b**，电源突然从回路中撤去，电流从 I_0 急剧下降，于是 $di/dt \neq 0$
- 线圈中产生感应电动势，企图阻碍电流的减少，仍取顺时针方向为回路的绕行方向，回路方程为：

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0 \quad \text{初始条件为: } i|_{t=0} = I_0$$

- 方程分离变量，然后两边积分得：

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

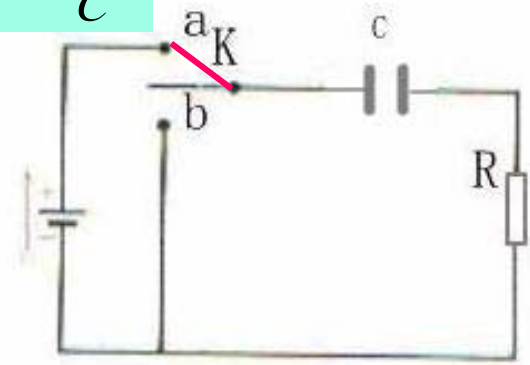
$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- 式中， τ 为回路的时间常数，这就是当电源电动势突然撤去后，回路中电流的变化规律，它以指数的形式随时间下降，当 **$t = \tau$** 时，**电流下降到37%**。

三、RC电路的暂态过程

- RC电路的暂态过程就是电容器通过电阻的充电或放电过程。先讨论电源电动势突然接入电路的情况，如图，把电键K突然合到a点，电容器将被充电，随着电量q的逐渐增加，电容器两极板的电压 $U_c = \frac{q}{C}$ 也随之增加。



- 电路的充电电流为: $i = \frac{dq}{dt}$

- 由基本方程有 $\frac{q}{C} + iR = \varepsilon$

- 因此，充电过程中q满足的微分方程为:

$$\begin{cases} R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \\ q|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

- 当电路充电完成后，把电键**K**从**a**点突然接到**b**点，于是电容器将**放电**，电路中存在放电电流，同时电路中两极板上的电荷由 **q_0** 减至零。

- **放电**过程中 **q** 所满足的微分方程为：

$$\begin{cases} R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \\ q|_{t=0} = q_0 \end{cases}$$

- 用**分离变量法**并利用初始条件求解方程得到：

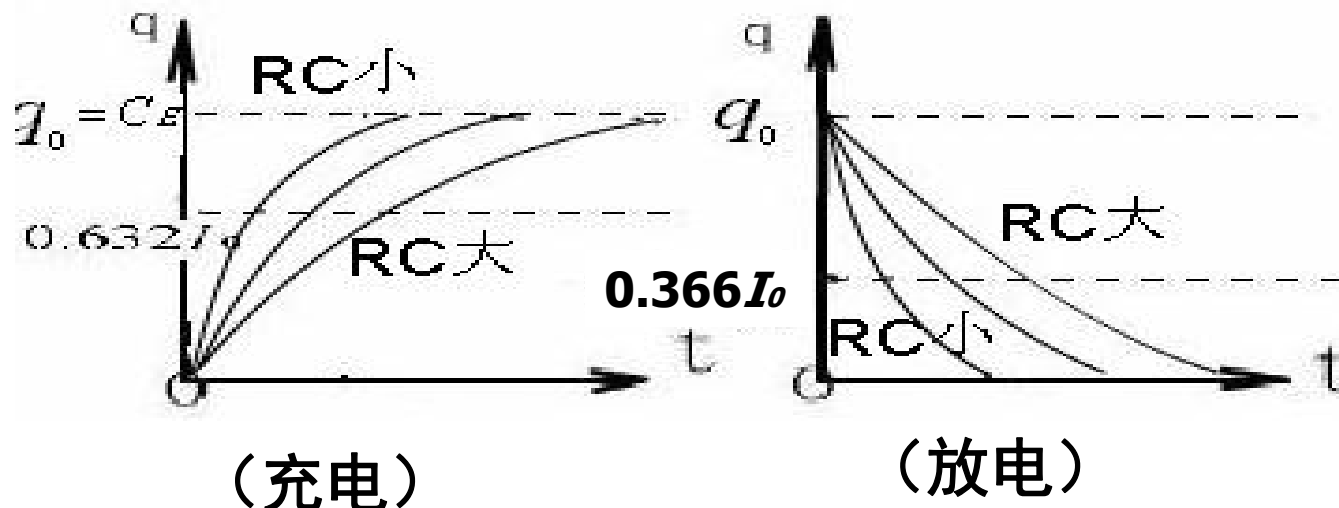
$$q = \begin{cases} C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) & \text{(充电)} \\ C\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{(放电)} \end{cases}$$

- 式中， $q_0 = C\varepsilon$ ， $\tau = RC$ 称为**RC**电路的**时间常数**。

- 由此得到充、放电过程中电容器两端电压为：

$$U_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \begin{cases} \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) & \text{(充电)} \\ \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{(放电)} \end{cases}$$

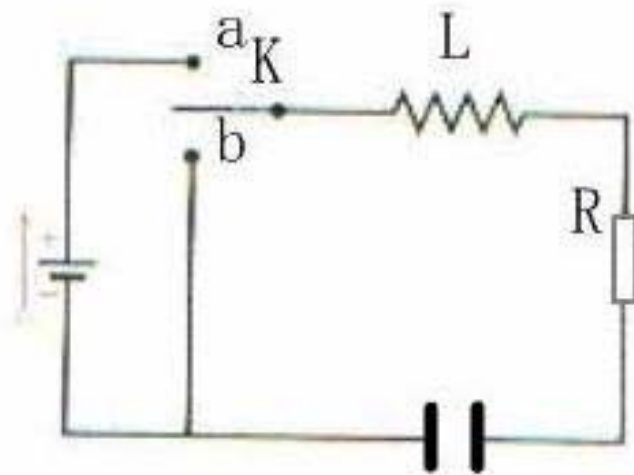
- 上式就是**RC**电路在电源电动势接入或撤去时，电容器两端电压的变化规律。下图为**q**与时间**t**的关系曲线：



四、RLC电路的暂态过程

- 如图所示，当**RLC**电路中突然接入或撤去电源时，我们讨论电容器两极板上的电荷的变化，类似于前面的讨论，电容器上的电荷满足的微分方程为：

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad \text{充电} \\ L \frac{d^2 q'}{dt^2} + R \frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C} = 0 \quad \text{放电} \end{array} \right.$$



充电的情况

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

- 等式两边同时除以L，并令

$$\beta \equiv \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$q_0 \equiv C\varepsilon$$

- 得到：

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0$$

- 此方程为**阻尼振荡方程**， β 为阻尼系数， ω_0 为电路的固有频率，

求解方程的两个初始条件为：

$$\begin{cases} q \big|_{t=0} = 0 \\ \frac{dq}{dt} \big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

- 可用**算子法**解此方程，解的最终形式取决于 β ， ω_0 的相对大小，下面**分3种情况**给出结果：

(1) 欠阻尼 $\beta < \omega_0$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0$$

■ 当 $\beta < \omega_0$ 时，称为欠阻尼，其解为：

$$q = q_0 - q_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right)$$

(阻尼振荡解)

■ 式中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

(2) 过阻尼 $\beta > \omega_0$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0$$

- 当 $\beta > \omega_0$ 时，称为过阻尼，其解为：

$$q = q_0 - \frac{1}{2\gamma} q_0 e^{-\beta t} \left[(\beta + \gamma) e^{\gamma t} - (\beta - \gamma) e^{-\gamma t} \right]$$

- 式中 $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ，

- 这时， q 随时间单调上升，且 β 越大上升越慢， $\beta = \frac{R}{2L}$

- 当 $\beta \rightarrow \infty$ (即 $L \rightarrow 0$) 时，上式回到 **RC** 电路情况。



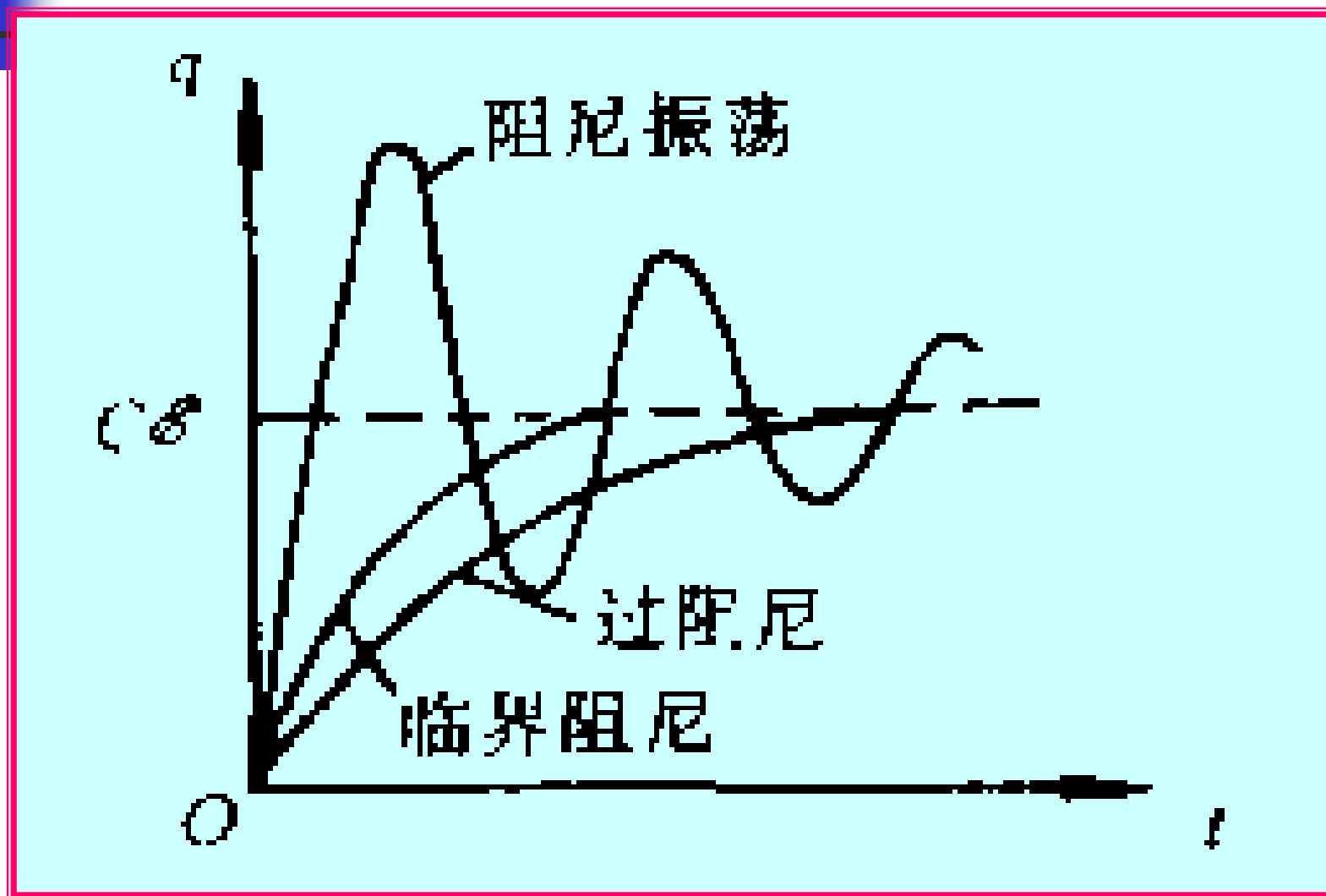
(3) 临界阻尼 $\beta = \omega_0$

- 当 $\beta = \omega_0$ 时，称为临界阻尼，此时的解为：

$$q = q_0 - q_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}$$

- 这时， q 也随时间单调上升，但比过阻尼情况上升的快。

上述3种电路充电时 q 随时间 t 的变化曲线



放电的情况

- 下面我们再简单讨论当电路达到稳定后，突然撤去电源电动势，电容器放电的情况，此时，电路方程式可以写为：

$$\frac{d^2 q'}{dt^2} + 2\beta \frac{dq'}{dt} + \omega_0^2 q' = 0$$

- 初始条件为：

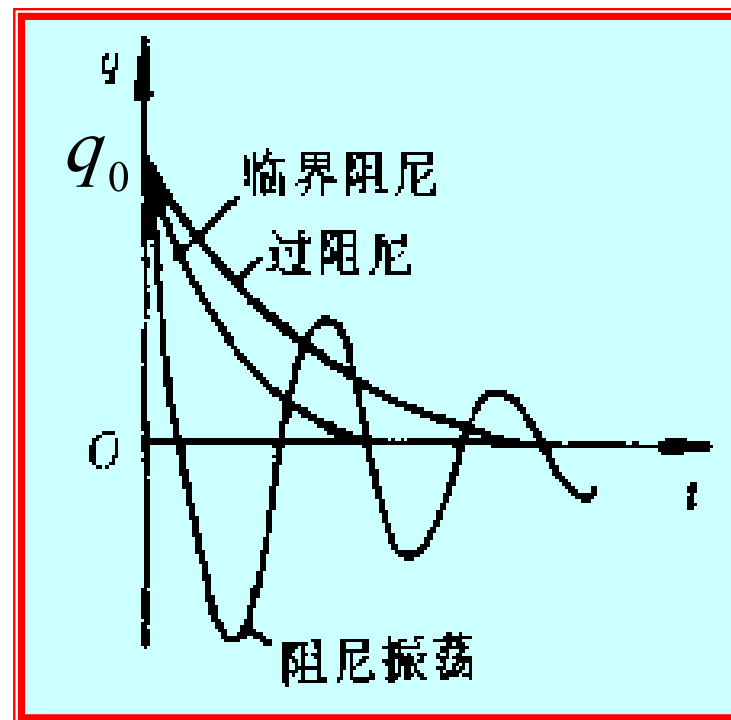
$$\begin{cases} q|_{t=0} = q_0 \\ \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

- 相应的解为： $q' = q_0 - q$

- 式中， q 为充电情况的电荷解， q' 的解同 q 一样分为3种情况。

(1) 电阻 $R \neq 0$ 情况 ($\beta \neq 0$)

- 现在我们考虑电路中有电阻 R 存在对上述过程的影响，由于电流通过 R 时要消耗一部分能量，当 $\beta < \omega_0$ ，所以形成阻尼振荡；
- 当电阻数值达到一定值时，使 $\beta = \omega_0$ 时，电荷衰减过程不再具有周期性，这便是临界阻尼情况；
- 当电阻继续增大，使 $\beta > \omega_0$ 时，放电过程进行的更慢，这便是过阻尼情况。

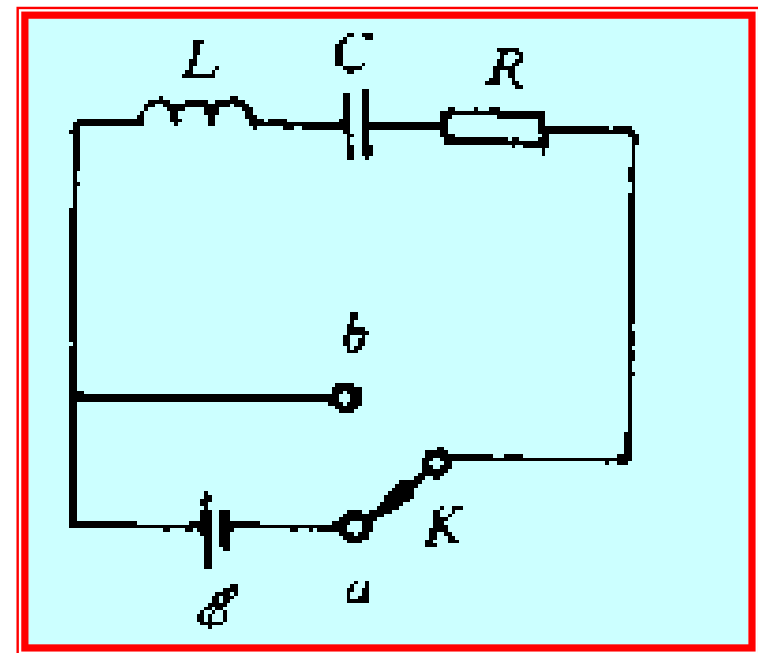


(2) 电阻 $R=0$ 的情况 ($\beta=0$)

- 当电容器充电完毕，突然把电键接到**b**点时，电容器开始放电，先假定电阻 $R=0$ ，电键未接到**b**点之前，电容器中储有电场能量为：

$$\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

- 线圈内没有磁场能量。



- 电阻 **$R=0$** ，当电键接到**b**点时，电容器通过线圈放电，于是一方面电容器所储的能量逐渐减小，另一方面，由于放电时有电流通过线圈，所以线圈中的磁场能逐渐增加，根据能量守恒定律，最后达到线圈中磁能最大，并等于电容器放电前的能量。

- 但是过程至此没有完结，当电容器放电完毕，在自感电动势的驱动下，电流将持续下去使电容器反向充电，如此过程反复进行，形成等幅的自由振荡。

- 数学上，由 $\beta=0$ 的电路方程，加放电的初始条件，可解得： $q = q_0 \cos \omega_0 t$ 与上分析一致。