纠删码——Reed-Solomon 编码

Edited by **牛午甲**

纠删码简介

纠删码（Erasure Code）是一种编码技术。它通过计算将 n 份原始数据增加至 n+m 份数据，并能由其中的任意 n 份数据还原出原始数据，即可以容忍不多于 m 份的数据失效。纠删码可以应用于分布式存储系统中，替代多份数据拷贝的数据冗余方式，从而可以提高存储空间利用率。此外， 纠删码还可以应用于传统RAID系统中，增加数据冗余度，支持多块盘同时发生故障，从而可以提高数据可靠性；纠删码应用在网络传输中，用以提高存储系统的可靠性。相比多副本复制而言，它能以更小的数据冗余度获得更高数据可靠性， 但编码方式较复杂，需要大量计算。

数学基础

定义1 如果有限域F_q 上的m阶多项式$p(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_{m-1} x^{m-1} + x^m$不能被$F_q$上的任意多项式整除，称$p(x)$为不可约多项式。

定义2 F_{q^m}的本原元在F_q上的极小多项式称为F_q上的**本原多项式。**

> Remark：
>
> - 在环论中, 本原多项式定义为各项系数的最大公约数等于1的多项式, 与这里的定义不同.
> - 本原元类似循环群中的生成元.
> - 极小多项式即为次数最低的多项式.
> - F_q上的m次本原多项式就是F_q上的首一不可约多项式, 且有一个根$\alpha \in F_{q^m}$生成了F_q的乘法群.

定义2' 如果有限域F_q 上的不可约多项式$p(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_{m-1} x^{m-1} + x^m$能够整除$x^n - 1$的$n$的最小整数取值为$n = q^m - 1$，称$p(x)$为$F_q$上的本原多项式。

$char\ F = 2$的本原多项式:

Characteristic 2			
m		m	
2	X^2+X+1	14	$X^{14}+X^{13}+X^{12}+X^2+1$
3	X^3+X^2+1	15	$X^{15}+X^{14}+1$
4	X^4+X^3+1	16	$X^{16}+X^{15}+X^{13}+X^4+1$
5	X^5+X^3+1	17	$X^{17}+X^{14}+1$
6	X^6+X^5+1	18	$X^{18}+X^{11}+1$
7	X^7+X^6+1	19	$X^{19}+X^{18}+X^{17}+X^{14}+1$
8	$X^8+X^7+X^6+X+1$	20	$X^{20}+X^{17}+1$
9	X^9+X^5+1	21	$X^{21}+X^{19}+1$
10	$X^{10}+X^7+1$	22	$X^{22}+X^{21}+1$
11	$X^{11}+X^9+1$	23	$X^{23}+X^{18}+1$
12	$X^{12}+X^{11}+X^{10}+X^4+1$	24	$X^{24}+X^{23}+X^{22}+X^{17}+1$
13	$X^{13}+X^{12}+X^{11}+X^8+1$		

Remark： 一个m并不是只对应一个本原多项式，想查询更多的本原多项式可以使用本原多项式查询工具

定理1 若F 为有限域，则F的特征为某个素数p，并且它是p元域F_p的有限扩张。令$n=[F:F_p]$，则F中共有p^n个元素。[1]

$Extension\ Field$ 的生成[2]

对于素数域$F_p=\{0,1,2,...,p-1,p\}$ 上的本原多项式$p(x)=p_0+p_1x+...+p_{m-1}x^{m-1}+x^m$，考察它的根。由本原多项式的定义可知，$p(x)$在素数域上是不可约的，因此 $p(x)$的根不可能在素数域 F_p上找到，它们存在于一个更大的域中。下面寻找这个域：

假设α是$p(x)=0$的一个根，那么我们有：$p_0+p_1\alpha+...+p_{m-1}\alpha^{m-1}+\alpha^m=0$,

根据本原多项式的定义（定义2′），$p(x)\mid x^{p^m-1}-1$。

由$Bezout$定理，$\alpha^{p^m-1}-1=0$，即$\alpha^{p^m-1}=1$，由$n=p^m-1$的最小性（定义2′）可知α的阶为p^m-1。

因此可以构造α 生成的集合$F=\left\{0,1,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{p^m-2}\right\}$，定义$F$中的乘法运算：$\alpha^i\cdot\alpha^j=\alpha^{i+j}=\alpha^{(p^m-1)+r}=\alpha^{p^m-1}\cdot\alpha^r=1\cdot\alpha^r=\alpha^r$，进而可以定义多项式带余除法：$x^i=q(x)\cdot p(x)+a_i(x)$，由于$deg\ p(x)=m$，所以$deg\ a_i(x)<m$，$x$用$\alpha$带入，有$\alpha^i=a_i(\alpha)=a_0+a_1\alpha+...+a_{m-1}\alpha^{m-1}$。

因此，**任意一个α的幂次方都可以表示成至多$m-1$阶的α多项式**。根据这一结论，定义F中的加法运算：

$$\alpha^i+\alpha^j=(a_{i,0}+a_{i,1}\alpha+...+a_{i,m-1}\alpha^{m-1})+(a_{j,0}+a_{j,1}\alpha+...+a_{j,m-1}\alpha^{m-1})$$

$= (a_{i,0} + a_{j,0}) + (a_{i,1} + a_{j,1})\alpha + ... + (a_{i,m-1} + a_{j,m-1})\alpha^{m-1}$（注：上面的加法是模$p$意义下的加法）

可以证明，F集合构成了一个具有p^m个元素的域，用符号F_{p^m}表示，F_{p^m}称为F_p的扩展域。

$GF(2^5)$中的元素构成及表示：

Power representation	Polynomial representation	Vector representation
0	0	(00000)
1	1	(10000)
α	α	(01000)
α^2	α^2	00100)
α^3	α^3	(00010)
α^4	α^4	(00001)
α^5	$1+\alpha^2$	(10100)
α^6	$\alpha+\alpha^3$	(01010)
α^7	$\alpha^2+\alpha^4$	(00101)
α^8	$1+\alpha^2+\alpha^3$	(10110)
α^9	$\alpha+\alpha^3+\alpha^4$	(01011)
α^{10}	$1+\alpha^4$	(10001)
α^{11}	$1+\alpha+\alpha^2$	(11100)
α^{12}	$\alpha+\alpha^2+\alpha^3$	(01110)
α^{13}	$\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$	(00111)
α^{14}	$1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$	(10111)
α^{15}	$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$	(11111)
α^{16}	$1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4$	(11011)
α^{17}	$1+\alpha+\alpha^4$	(11001)
α^{18}	$1+\alpha$	(11000)
α^{19}	$\alpha+\alpha^2$	(01100)
α^{20}	$\alpha^2+\alpha^3$	(00110)
α^{21}	$\alpha^3+\alpha^4$	(00011)
α^{22}	$1+\alpha^2+\alpha^4$	(10101)
α^{23}	$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$	(11110)
α^{24}	$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$	(01111)
α^{25}	$1+\alpha^3+\alpha^4$	(10011)
α^{26}	$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4$	(11101)
α^{27}	$1+\alpha+\alpha^3$	(11010)
α^{28}	$\alpha+\alpha^2+\alpha^4$	(01101)
α^{29}	$1+\alpha^3$	(10010)
α^{30}	$\alpha+\alpha^4$	(01001)
$\alpha^{31}=1$		

Reed-Solomon Code[3]

RS code是基于有限域的一种编码算法，有限域又称为$Galois\ Field$，是以法国著名数学家伽罗华（$Galois$）命名的，在RS code中使用$GF(2^w)$，其中$2^w \geq n+m$。

RS code的编解码定义如下：

编码： 给定n个数据块（$Data\ block$）$D_1, D_2, ..., D_n$，和一个正整数m，RS根据n个数据块生成m个编码块（$Code\ block$）$C_1, C_2, ..., C_m$。

解码： 对于任意的n和m，从n个原始数据块和m个编码块中任取n块就能解码出原始数据，即RS最多容忍m个数据块或者编码块同时丢失。

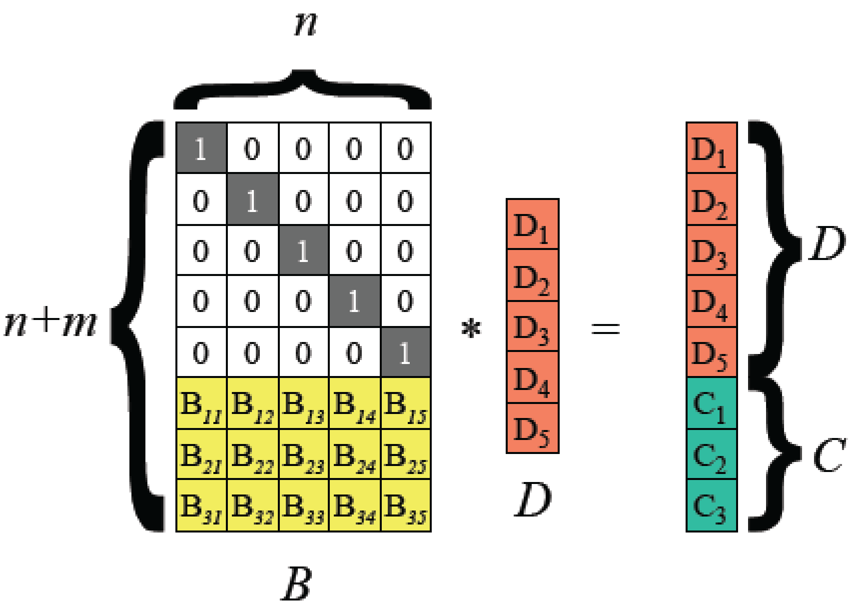
RS编解码中涉及到矩阵求逆，采用高斯消元法，需要进行实数加减乘除四则运算，无法作用于字长为w的二进制数据。为了解决这个问题， RS采用伽罗华域$GF(2^w)$中定义的四则运算法则。$GF(2^w)$域有2^w个元素， 每个元素都对应一个低于w次的多项式， 这样域上的四则运算就转换为多项式空间的运算。 $GF(2^w)$域中的加法就是XOR， 乘法通过查表实现，需要维护两个大小为$2^w - 1$的表格: log表$gflog$，反log表$gfilog$。

乘法公式： $a \cdot b = gfilog(gflog(a) + gflog(b))$ [4]

RS Code编解码原理

编码

RS 编码以 word 为编码和解码单位，大的数据块拆分到字长为 w（取值一般为 8 或者 16 位）的 word，然后对 word 进行编解码。把输入数据视为向量$(D_1, D_2, ..., D_n)$，编码后数据视为向量$(D_1, D_2, ..., , D_n, C_1, C_2, ..., C_m)$，RS 编码可视为如下图所示矩阵运算。



> **Remark：** 每个分量C_i, D_i代表一个word。

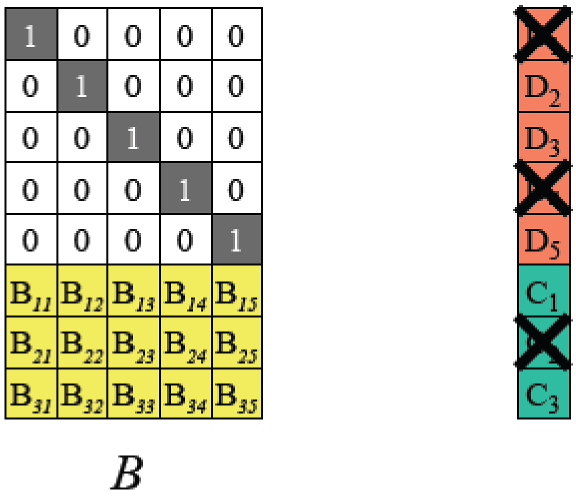
上图最左边是编码矩阵（或称为生成矩阵、分布矩阵，Distribution Matrix），编码矩阵需要满足任意n级子方阵可逆。为方便数据存储，编码矩阵上部是单位阵，下部是 m*n 矩阵。下部矩阵可

以选择范德蒙德矩阵或柯西矩阵。

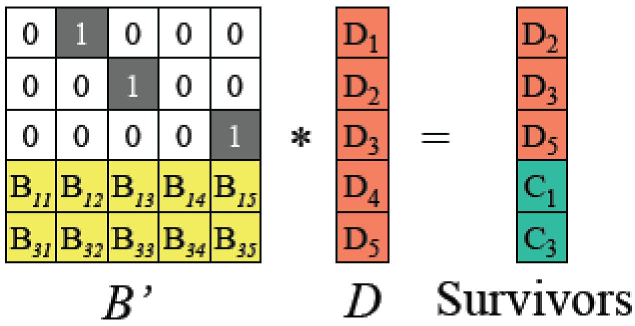
解码（数据恢复）

RS 最多能容忍数据块+校验块共m 块缺失，数据恢复的过程如下：

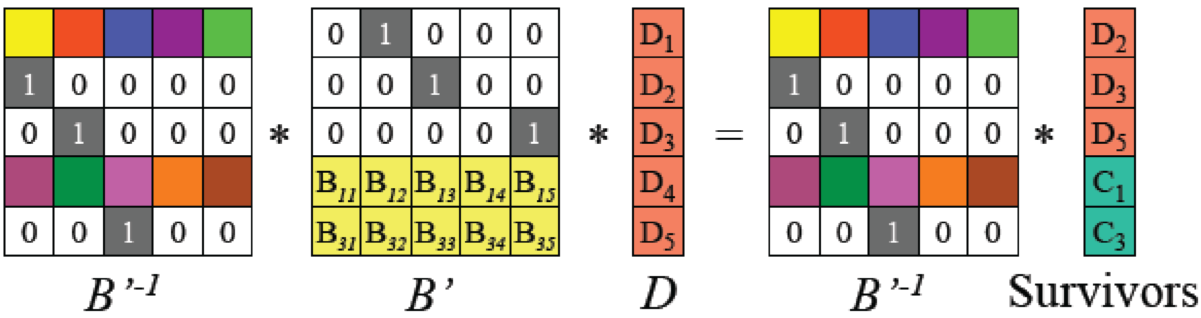
1. 假设 D1、D4、C2 丢失，从编码矩阵中删掉丢失的数据块/校验块对应的行。



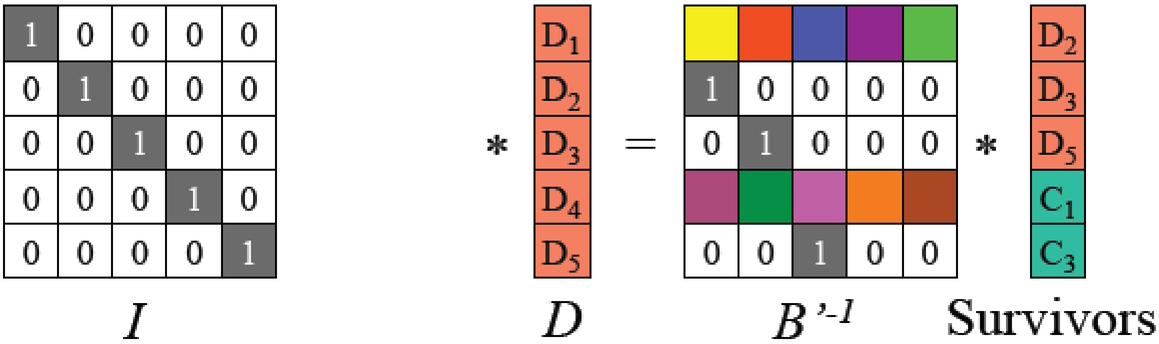
根据 RS 编码运算等式，可以得到 B' 以及等式：



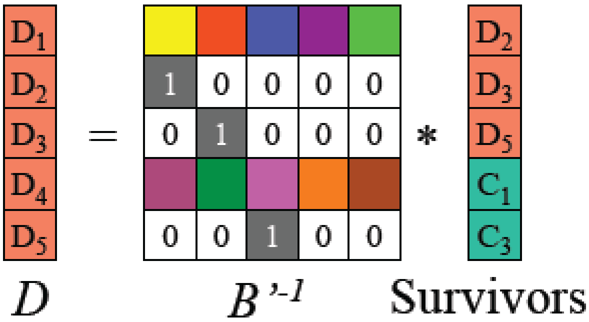
2. 由于 B' 是可逆的，记 B' 的逆矩阵为 B'^{-1}，则$B' * B'^{-1} = I$单位矩阵。两边左乘 B'^{-1}：



3. 得到如下原始数据 D 的计算公式：



从而恢复原始数据 D：



> **RS code编码的限制**
>
> 1）数据恢复代价高和数据更新代价高，因此常常针对只读数据，或者冷数据。
>
> 2）RS编码依赖于两个$2^w - 1$大小的log表， 通常只能采用16位或者8位字长，不能充分利用64位服务器的计算能力， 具体实现上可能要做一些优化。

编码矩阵

基于范德蒙德（Vandermonde）矩阵

一个 m 行 n 列的范德蒙德矩阵定义如下，其中a_i均不相同，且不为 0。容易证明它的任意的子方阵均为可逆方阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & a_3^{m-1} & \cdots & a_n^{m-1} \end{bmatrix}$$

令$a_1, a_2, ...a_n$分别为 1, 2, 3, ..., n，则得到范德蒙德矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{m-1} & 3^{m-1} & \ldots & n^{m-1} \end{bmatrix}$$

编码矩阵就是单位矩阵和范德蒙德矩阵的组合。 编码矩阵和输入数据D的乘积就是编码后的数据。

采用这种方法的算法复杂度比较高，编码复杂度为 $O(mn)$，其中 m 为校验数据个数，n 为输入数据个数。解码复杂度为$O(n^3)$。

基于柯西（Cauchy）矩阵

柯西矩阵定义如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{x_0+y_0} & \frac{1}{x_0+y_1} & \frac{1}{x_0+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_0+y_n} \\ \frac{1}{x_1+y_0} & \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_0} & \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_m+y_0} & \frac{1}{x_m+y_1} & \frac{1}{x_m+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_m+y_n} \end{bmatrix}$$

柯西矩阵的任意一个子方阵都是奇异矩阵，存在逆矩阵[5]。使用柯西矩阵，相对范德蒙德矩阵的优化主要有两点：

- 降低了矩阵求逆的运算复杂度。范德蒙矩阵求逆运算的复杂度为 $O(n^3)$，而柯西矩阵求逆运算的复杂度仅为 $O(n^2)$。
- 通过有限域转换，将 $GF(2^w)$ 域中的元素转换成二进制矩阵，将乘法转换为逻辑与，降低了乘法运算复杂度。（二进制的加法即 XOR，乘法即 AND）

基于柯西矩阵的编码矩阵如下，其中x_i 和 y_i 都是伽罗华域 $GF(2^w)$中的元素：

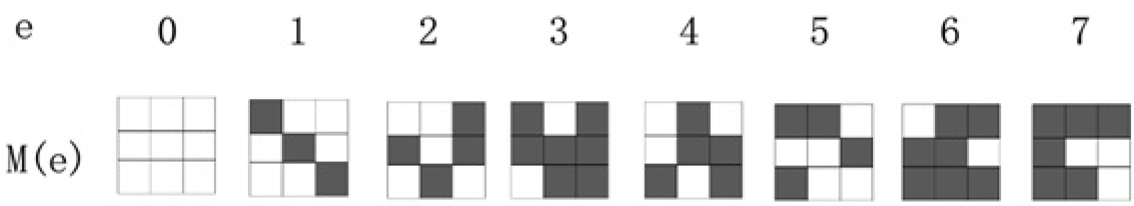
$$
Encode(D) = GD = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{x_0+y_0} & \frac{1}{x_0+y_1} & \frac{1}{x_0+y_2} & \frac{1}{x_0+y_3} \\ \frac{1}{x_1+y_0} & \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \frac{1}{x_1+y_3} \\ \frac{1}{x_2+y_0} & \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \frac{1}{x_2+y_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}
$$

柯西编解码过程优化

在基于范德蒙矩阵的编码中，我们可以采用对数、反对数表的方法，将乘法运算转换成了加法运算，并且在伽罗华域中，加法运算转换成了 XOR 运算。

柯西编解码为了降低乘法复杂度，采用了**有限域上的元素都可以使用二进制矩阵表示**的原理，将乘法运算和加法运算分别转换成了伽罗华域上AND 运算和XOR 运算，提高了编解码效率。

从数学的角度，在迦罗华有限域中，任何一个F_{2^w}上的元素都可以映射到 $F_2^{w\times w}$，即可以采用一个二进制矩阵的方式表示 $GF(2^w)$ 中的元素。例如 $GF(2^3)$ 域中的元素可以表示成 $GF(2)$ 域中的二进制矩阵：



上图中，黑色方块表示逻辑 1，白色方块表示逻辑 0。

关于上例的生成过程

由于上例是对$GF(2^3)$中的元素作转换，结合前面数学基础部分的介绍，先找到$F_2[x]$中的一个三次本原多项式x^3+x+1。则根据扩展域生成的推导过程可知，$GF(2^3)$中所有元素都可以表示为关于α的、次数不超过2的多项式，其中α是本原多项式的根。对$GF(2^3)$中所有元素作多项式带余除法（即$mod\ x^3+x+1$）：

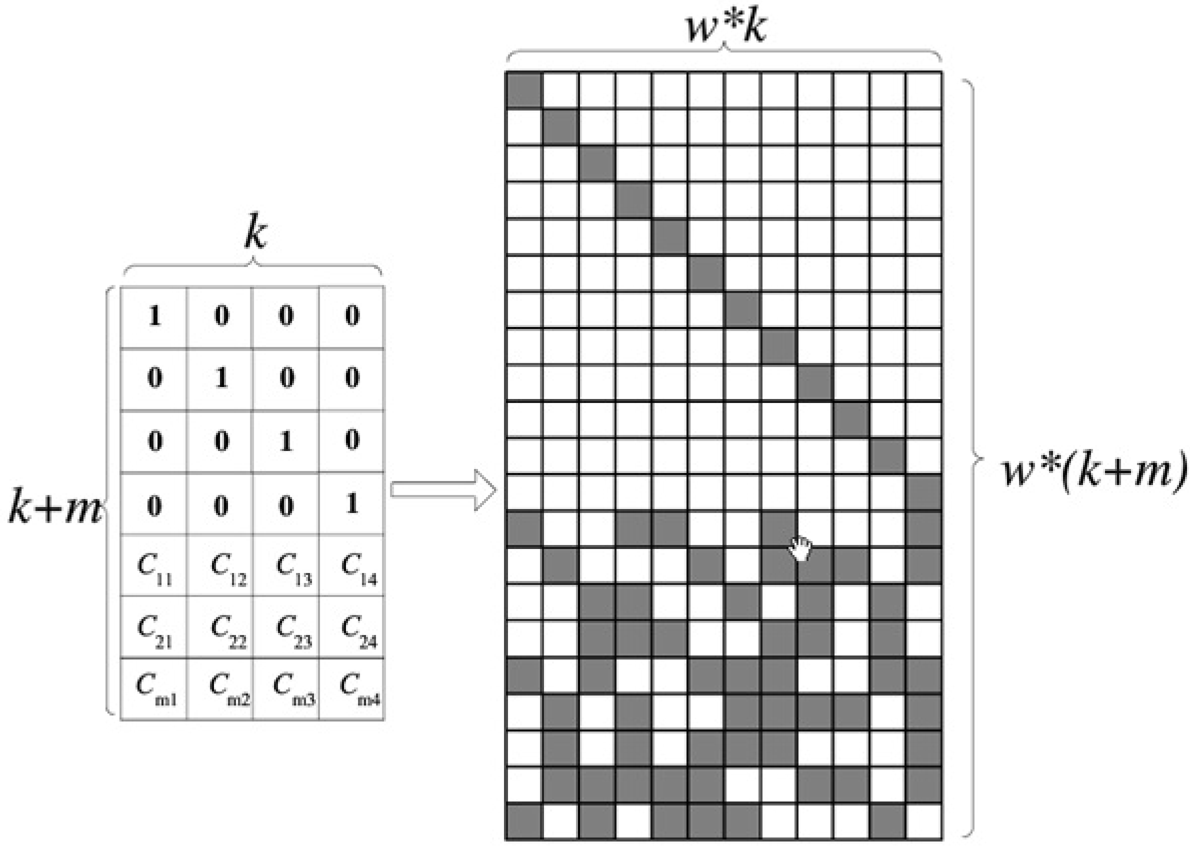
幂次形式	余数形式	二进制形式	十进制形式
0	0	000	0
1	1	001	1
α	α	010	2
α^2	α^2	100	4
α^3	$\alpha+1$	011	3
α^4	$\alpha^2+\alpha$	110	6
α^5	$\alpha^2+\alpha+1$	111	7
α^6	α^2+1	101	5

选定0、1、2所对应的二进制矩阵作为一组基，由于$4=2\times 2$，通过矩阵乘运算可以得到4对应的矩阵，再通过XOR运算立即得到其他元素对应的矩阵。

Remark：

- 0和1作为零元和幺元，所对应的矩阵必须是全零矩阵和单位阵；生成元α所对应的矩阵A必须满足$p(A)=0$，其中$p(x)$是选定的本原多项式（多项式环通用性质：x用A带入）。
- 当一个m对应有多个本原多项式时，**选取不同的本原多项式会导致$GF(2^w)$中元素的幂次形式到余数形式的映射的改变，但是映射仍然是双射。**
- **幂次形式和余数形式才是域中元素的真实形式，二进制形式可以理解成向量，十进制形式仅仅相当于标号，计算乘法、加法时没有实际意义。**

通过这种转换，$GF(2^w)$域中的矩阵就可以转换成 $GF(2)$ 域中的二进制矩阵。生成矩阵的阵列转换表示如下：



在 $GF(2^w)$ 域中的编码矩阵为 $F_{2^w}^{k\times(k+m)}$，转换到 $GF(2)$ 域中，使用二进制矩阵表示，编码矩阵变成了 $F_2^{wk\times w(k+m)}$ 二进制矩阵。采用域转换的目的是简化$GF(2^w)$ 域中的乘法运算。在 $GF(2)$域中，乘法运算变成了AND运算，加法运算变成了XOR运算，可以大大降低运算复杂度。

和基于范德蒙矩阵的编解码中可能使用的对数/反对数方法相比，基于柯西矩阵的编解码**不需要构建对数或反对数表**，可以支持 w 为很大的伽罗华域空间。采用这种有限域转换的方法之后，柯西编码运算可以表示如下：

使用柯西矩阵要优于范德蒙德矩阵的方法，柯西矩阵的运算复杂度为 $O(n\cdot(n-m))$，解码复杂度为 $O(n^2)$。

小结

RS Code简单来说就是构造一个双射$\varphi: GF(2^w)\to F_2^{w\times w}$，将一个数据块（1Byte或1half-word）变成二进制矩阵，再执行上述算法生成编码块，进行存储、维护，需要还原为数据的时候再将φ^{-1}作用在二进制矩阵上即可。

参考文献

[1]近世代数引论（第4版）冯克勤、李尚志、章璞编著.

[2]信道编码系列(三)：伽罗华域(Galois Fields)

[3]Erasure Code - EC纠删码原理

[4]RS（纠删码）技术浅析及Python实现

[5]Cauchy行列式与类似Hilbert矩阵的逆矩阵