第一章 行列式

第一节 n阶行列式的定义

二阶行列式的引入

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}x_2} = b_1 a_{22}$$

$$(2) \times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}x_2} = a_{12} b_2$$

两式相减消去 x_2, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地, 消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

由方程组的四个系数确定

二阶行列式

定义 记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式.

$$\underline{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant: 行列式

二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

对于二元线性方程组

Cramer法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

如记系数行列式 $D =$ [redacted]

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{D_2}{D}$$

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

三阶行列式

定义 三阶行列式定义为:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

列标

行标

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式的计算——对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

说明

1. 三阶行列式包括 3! 项, 每一项都是位于不同行不同列的 3 个元素的乘积, 其中三项为正, 三项为负.

2. 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例2 求三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 根据对角线法则，得

$$
\begin{aligned}
D &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4 \\
&\quad -(-4)\times 2\times(-3)-1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2) \\
&= -4-6+32-24-8-4 \\
&= -14
\end{aligned}
$$

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 $D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2$

$= x^2 - 5x + 6$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得

$x = 2$ 或 $x = 3$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \boxed{b_1} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{cases}
$$

当 $D = \left| \qquad \right| \neq 0$

$$
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\quad
D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}
\quad
D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}
$$

$$
x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}
$$

例4 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

用1, 2, 3可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解

1　2　3

百位	1			2			3			3种放法
十位	1	2		1	3					2种放法
个位	1	2	3							1种放法

共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 个

n 级 排 列

定义 把 n 个不同自然数 1, 2, …, n 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 称为一个 n 级排列.

例 是级排列: 4213　五级排列: 35241

结论 n 级排列的总数有 $n!$ 个

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times n}$$

当 $n=4$ 时，$n! = 24$：

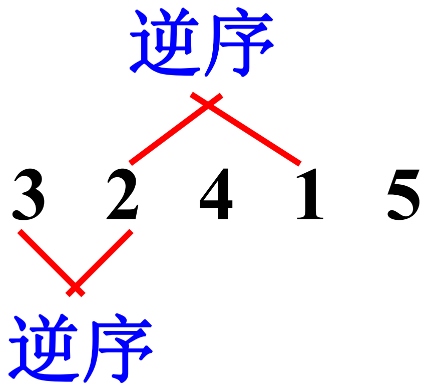
1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

逆 序

标准顺序：规定 n 个不同自然数按从小到大的排列

如：1 2 3，1 2 ⋯ n

定义 在一个排列 $i_1\, i_2 \ldots i_n$ 中，如有 $i_s > i_t$ 且 $s < t$，则称 i_s 和 i_t 构成该排列的一个逆序.



逆 序 数

定义 在排列 $i_1\, i_2\, \ldots\, i_n$ 中，所有元素逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau\,(i_1\, i_2 \ldots i_n)$

☞ **奇排列**：逆序数为**奇数**的排列

偶排列：逆序数为**偶数**的排列

逆 序 数

定义 在排列 $i_1\, i_2 \ldots i_n$ 中，所有元素逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1\, i_2 \ldots i_n)$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$\therefore\ \tau(32415) = 0 + 1 + 0 + 3 + 0 = 4$，是**偶排列**

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

计算排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 逆序数的方法:

1. 求 i_i 的逆序数 t_i: $i_1 \ldots i_{i-1}$ 中比 i_i 大的个数

2. $\tau(i_1 i_2 \ldots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$

例5 求下列排列的逆序数，判断其奇偶性

(1) 365412 (2) $n\,(n-1)\cdots 2\;1$

解 (1) $t_1=0,\ t_2=0,\ t_3=1,\ t_4=2,\ t_5=4,\ t_6=4$

$\therefore\ \tau(365412)=11$，是奇排列

(2) $t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=2,$

$\cdots$

$t_n=n-1$

$$\therefore\ \tau(n\cdots 1)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，是偶排列

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，是奇排列

排列的对换

定义 在排列 $i_1\, i_2 \dots i_n$ 中，任意对换两元素 i_s 和 i_t 的位置，其它元素不动，称为该排列的一个**对换**.

$$i_1 \dots i_s \dots i_t \dots p_n \xrightarrow{(i_s,\, i_t)} i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_n$$

注：对换必定改变排列的逆序数!

$$3\ 1\ 2 \xrightarrow{(3,\, 1)} 1\ 3\ 2 \xrightarrow{(3,\, 2)} 1\ 2\ 3$$

$\tau = 2$ $\qquad \tau = 1$ $\qquad \tau = 0$

定理1　对换改变排列的奇偶性.

推论1　任意一个排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 都可以经有限次对换变成标准顺序的排列$12\cdots n$, 且对换的次数与排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 具有相同的奇偶性.

定理2　所有 n 个元素的排列中, 奇偶排列各有一半. $(n > 1)$

证略!

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum_{(j_1,\, j_2,\, j_3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

n 阶行列式

记号：D_n, D, $\det(a_{ij})$, $|(a_{ij})|$

定义 由 n^2 个数组成 n 行 n 列的 n 阶行列式定义为:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{n!}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

注： $n=1$ 时, $D=|a_{11}|=a_{11}$

例6 求 $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 3 & 2 \\ x & x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ -x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 与 x^3 项的系数

解 $$D = \sum_{4!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

x^4 项的系数: 6

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} \qquad (-1)^{\tau(4231)} a_{14} a_{22} a_{33} a_{41}$$

x^3 项的系数: $2 + 2 = 4$

定理. 下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} \text{[redacted]} & & & \\ a_{21} & \text{[redacted]} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

证　根据定义得

$$D = \sum_{n!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$= (-1)^{\tau(12\ldots n)} a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

定理. 上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

例5　求 n 阶(反对角) 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & 0 & 0 \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　根据定义得

$$D=\sum_{n!}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$=(-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n$$

反上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

第一章 行列式

第二节 行列式的性质

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质1 行列式与它的转置行列式相等, 即

$$D^T = D$$

证略

说明 行列式中行与列具有同等的地位, 因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 交换行列式的两行(列), 行列式的值变号.

证略

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论 两行(列)完全相同的行列式, 其值为零.

证 互换相同的两行，有 $D = -D$

$$\therefore D = 0$$

性质3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k, 等于用数 k 乘此行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证略

说明 行列式的某一行(列)中所有元素若有公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例, 则行列式的值等于零.

例

求 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

解　原式 $= -2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 0$

性质4　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和.

例如
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证略

注意: 只能拆一行或一列.

例 证明
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证 由性质4，

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}
+\underbrace{\begin{vmatrix} & b_1+c_1 & \\ & b_2+c_2 & \\ & b_3+c_3 & \end{vmatrix}}_{\parallel \atop 0}
+\underbrace{\begin{vmatrix} & & c_1+a_1 \\ & & c_2+a_2 \\ & & c_3+a_3 \end{vmatrix}}_{\parallel \atop 0}
+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}
$$

$$
上式=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

性质5 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数 k 后加到另一列(行)对应的元素上去, 行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1i}} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \overset{k\times}{\longleftarrow} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行 row

列 column

$$\xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例

求 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

解　原式 $= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= -3$

重要问题：如何计算一个行列式?

方法一：定义法 $D=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 

方法二：利用行列式的性质化成上三角行列式 

1. 交换行/列
2. 提取公因子
3. 把某行/列的 k 倍加到另外一行/列

方法三：行列式的展开 

$$\text{一般行列式} \xrightarrow[\text{从左到右}]{\text{从上到下}} \text{上三角行列式}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ {\color{red}0} & * & * & * \\ {\color{red}0} & * & * & * \\ {\color{red}0} & * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ {\color{red}0} & * & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{blue}0} & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{blue}0} & * & * \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ {\color{red}0} & * & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{blue}0} & * & * \\ {\color{red}0} & {\color{blue}0} & {\color{green}0} & * \end{vmatrix}$$

例1

求 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$\overset{r_4+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 \longleftrightarrow r_4}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

例1

求 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$D=-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+2r_2} -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提出}3} -3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} -3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48$$

例2

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\mathbf{c_1 \longleftrightarrow c_3}}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\mathbf{r_4 - r_1}}{\overset{\substack{\mathbf{r_2 + r_1} \\ \mathbf{r_3 - 2r_1}}}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

例2

$$D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \longleftrightarrow r_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix} \underset{r_4 + r_2}{\overset{r_3 - 2r_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{vmatrix}$$

余子式与代数余子式

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$\underline{-a_{11}a_{23}a_{32}} \underline{-a_{12}a_{21}a_{33}} \underline{-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

余子式与代数余子式

定义 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后，余下的元素按原顺序形成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{14} \\ & & & \\ a_{31} & a_{32} & & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} & & & \\ a_{21} & & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & & \end{vmatrix},$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}\,.$$

说明　每个元素都有一个余子式和代数余子式，两者要么相等，要么互为相反数.

例1

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$M_{31}=?$ $M_{32}=?$ $M_{33}=?$ $M_{34}=?$

$A_{31}=?$ $A_{32}=?$ $A_{33}=?$ $A_{34}=?$

n阶行列式的第二定义

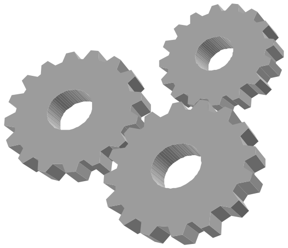
由 n^2 个数组成 n 行 n 列的 n 阶行列式定义为:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 D 计算如下:

当 $n = 1$时， $D = |a_{11}| = a_{11}$

当 $n \geq 2$时， $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$



$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式展开定理

n 阶行列式 D 等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应代数余子式乘积的和. 即:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad i=1,2,\ldots,n$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad j=1,2,\ldots,n$$

推论 若 D 的某行 (列) 所有元素全为 0, 则 $D=0$.

例1

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-48$$

$$A_{31}=-11 \qquad A_{32}=-16 \qquad A_{33}=-2 \qquad A_{34}=-8$$

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}= \ ?$$

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}= \ ?$$

$$a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}+a_{24}A_{34}= \ ?$$

$$a_{41}A_{31}+a_{42}A_{32}+a_{43}A_{33}+a_{44}A_{34}= \ ?$$

定理.

行列式某一行 (列) 的元素与另外一行 (列) 对应位置上的代数余子式乘积之和等于 0. 即:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad i\neq j$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix} \qquad D=\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots \\ a_{ni} & a_{nj} \end{vmatrix}$$

定理. $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad i\neq j$

证 因为

$$\begin{array}{r} \\ \\ 第\,i\,行 \\ \\ 第\,j\,行 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 } j \text{ 行展开}} 左边$$

$$=0$$

例2 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$D=a_{11}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

计算行列式的基本方法:

1）对角线法：行列式是低阶的，二，三阶行列式

2）按照某行（列）展开：行列式某行或者某列

含有较多的零元素，因此，展开时候只需要计算

较少的低阶或者易求的行列式

例.计算

$$
\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}
$$

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $$D=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3+r_1}{=\!=}}-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}=20(-42-12)=-1080.$$

化成上三角行列式，再利用公式计算，对角元乘积

例3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 57$$

3. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________.

解 $$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -56 + 42 - 14 = -28.$$

例2. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

求第四行各元素的余子式之和.

解:第四行各元素的余子式之和为

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=-1\ A_{41}+1\ A_{42}-1\ A_{43}+1\ A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -7(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

本题如果直接计算第四行元素余子式之和工作量太大!所以利用余子式和代数余子式的关系转换为计算代数余子式之和.而代数余子式之和就可以转换为求行列式.

3. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为 ________.

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

10. 设 $\left|a_{ij}\right|_{4\times 4}=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$，试求 $A_{41}+2A_{42}+3A_{44}$，

其中 A_{4j} 为元素 $a_{4j}\,(j=1,2,4)$ 的代数余子式.

解 $A_{41}+2A_{42}+3A_{44}=1\cdot A_{41}+2\cdot A_{42}+0\cdot A_{43}+3\cdot A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

列和（行和）相等的行列式：将所有的列（行）加到第一行上，提取公因子，再计算。

例 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 每行元素的和都相等, 把第二、三、四列都加到第一列,

$$原式=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$
原式=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}
$$

$$
= -x^2\begin{vmatrix} x & -x \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^4 .
$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 5 & 7 \\ 16 & 5 & 7 & 1 \\ 16 & 7 & 1 & 3 \\ 16 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -256\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -256\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2048.$$

例4 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 将第 2, 3, …, n 列都加到第一列, 得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例8：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{5。箭（爪）形行列式}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

目标：把第一列化为成三角形行列式

$$\xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{3}c_3+\cdots-\frac{1}{n}c_n}\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

12. 已知 n 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求其代数余子式 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 之和.

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})$$

例2 计算n阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$. （Ⅳ91—3）

解 按第一列展开，并由上、下三角形行列式得

$$原式 = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n .$$

范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$\begin{aligned}
= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1) & \quad (j=1\text{时}) \\
(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2) & \quad (j=2\text{时}) \\
(x_4-x_3)\cdots(x_n-x_3) & \quad (j=3\text{时}) \\
\cdots & \quad (j=\cdots\text{时}) \\
(x_n-x_{n-1}) & \quad (j=n-1\text{时})
\end{aligned}$$

例10　　证明范德蒙 (Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j). \qquad (1)$$

证　　用数学归纳法，

$$\because \quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j),$$

$\therefore$　**当 $n=2$ 时(1)式成立．**

假设(1)式对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，从第 n 行开始，每行减去前一行的 x_1 倍：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公 因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \ge i > j \ge 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j).$$

证毕.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) .$$

例如,
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= (2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 12 .$$

例7：

$$D=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} [x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$= [x-(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

$$D=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+n \end{vmatrix}.$$

解： （第一列加上2,3,…,n列)

$$D=\begin{vmatrix} x+\frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ x+\frac{n(n+1)}{2} & x+2 & 3 & \cdots & n \\ x+\frac{n(n+1)}{2} & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+\frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & x+n \end{vmatrix}.$$

$$=(x+\frac{n(n+1)}{2})\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+n\end{vmatrix}.$$

$$=(x+\frac{n(n+1)}{2})\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}. =x^{n-1}(x+\frac{n(n+1)}{2}).$$

例9：

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots\\ r_n-r_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=}$$

箭形行列式

$$
=\begin{vmatrix}
(a_1+a_2+\cdots a_n)-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -b & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -b
\end{vmatrix}
$$

$$
=[(a_1+a_2+\cdots a_n)-b](-b)^{n-1}
$$

例2.8 计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix},$$

解 显然当$x=0$或$y=0$时，$D=0$，当$x\neq0$和$y\neq0$时，利用展开定理，

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & y & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}=x^2y^2.$$

这种计算方法叫做加边法，此方法适用于主对角线两侧元素都相同的行列式．在第二步计算的行列式是个字行列式，其计算方法如上．

例4 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

解

$$\text{原式} = a_1 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$\text{原式} = a_1 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

每列加到第一列

$$= a_1 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$
= a_1 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}
$$

每行减去第一行

$$
= a_1 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).
$$

例9 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x+y & xy & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x+y & xy & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}$$

解 按第1列展开,

$$D_n=(x+y)D_{n-1}-xyD_{n-2} \qquad (1)$$

即 $D_n-xD_{n-1}=y(D_{n-1}-xD_{n-2})$,

$$D_n = (x+y)D_{n-1} - xy\,D_{n-2} \qquad (1)$$

即 $D_n - x D_{n-1} = y(D_{n-1} - x D_{n-2})$，

反复利用递推公式得：

$$D_n - x D_{n-1} = y^2(D_{n-2} - x D_{n-3}) = \cdots = y^{n-2}(D_2 - y D_1) \qquad (2)$$

由对称性，(1)式又可化为

$$D_n - y D_{n-1} = x^{n-2}(D_2 - y D_1) \qquad (3)$$

(1) 若 $x \neq y$， 联列(2)(3),解得

$$D_n = \frac{x^{n-1}(D_2 - yD_1) - y^{n-1}(D_2 - xD_1)}{x-y},$$

$$D_n = \frac{x^{n-1}(D_2 - yD_1) - y^{n-1}(D_2 - xD_1)}{x-y},$$

而 $D_1 = x + y$， $D_2 = \begin{vmatrix} x+y & xy \\ 1 & x+y \end{vmatrix} = x^2 + xy + y^2$，

代入得 $$D_n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}.$$

(2) 若 $x = y$，则 $D_n - xD_{n-1} = x^{n-2}(D_2 - xD_1) = x^n$，

$$D_n = xD_{n-1} + x^n = x(xD_{n-2} + x^{n-1}) + x^n = x^2 D_{n-2} + 2x^n$$

$$= \cdots\cdots = x^{n-1}D_1 + (n-1)x^n = (n+1)x^n.$$

综上所述，

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}, & \text{当 } x\neq y\\ (n+1)x^n, & \text{当 } x=y\end{cases}$$

P29，10(3) 计算n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \quad \text{(每行减去第二行)}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

例7

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&\cdots&3^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$=n!\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

$$=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$

$$\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\ \cdots[n-(n-1)]$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例4　　计算行列式　　　　　　　　　　范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})(-\frac{3}{4})(-\frac{1}{6})(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{12}) = \frac{1}{1152}.$$

例2　　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_4 - r_5 \\ r_1 - r_5}]{\substack{r_3 - r_2 \\ r_2 - r_4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_4 - 2r_1 \\ r_5 - 2r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + r_3]{r_1 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 .$$

定理2.2 （Laplace)设D是n阶行列式，在D中取定某k行（$1\le k\le n$-1），则含于此k行中的所有k阶子式与其代数余子式的乘积之和等于D.

例2.9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 利用Laplace定理计算行列式时，选择含有零元素多的行（列）展开，可以简化计算.此题选择2、5两列展开，这两列中仅有一个二阶子式值非零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-1,$$

于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} (-1)^{2+4+2+5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

例10.已知方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

求 x

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)(x-1)(3-2)(3-1)(2-1)$$

$$=0 \implies \quad x=1; x=2; x=3$$


第二章
矩阵

第一节　矩阵的概念

一、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 简称 $m \times n$ 矩阵. 记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

一般情形下，用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵.

为了标明矩阵的行数m和列数n，可用$\boldsymbol{A}_{m\times n}$表示，

或记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵。

$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 矩阵。

如果矩阵$A=(a_{ij})$的行数与列数都等于n, 则称A为**n阶矩阵**(或称**n阶方阵**).

主对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

副对角线

对于n阶方阵A, 对应一个行列式, 记作$|A|$或$\det A$.

注意 矩阵与行列式有本质区别：行列式是一个算式, 一个数字行列式表示一个**数值**, 而矩阵是一个**数表**, 它的行数和列数可以不同. 对于方阵A, 虽有行列式$|A|$, 但A和$|A|$是不同的概念, 不能混为一谈。

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

例　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解　$\because\ A=B,$

$$\therefore x=2,\ \ y=3,\ \ z=2.$$

二、几种特殊矩阵

(一) 零矩阵

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m \times n$ 零矩阵记作 $O_{m\times n}$ 或 O .

注意: 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如 $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(二) 上三角形矩阵和下三角形矩阵

方阵中，如果在主对角线之下的所有元素都是零（即当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$），

即形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & O & & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的方阵，称为**上三角形矩阵**，

类似地，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & O \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角形矩阵，

(三) 对角矩阵

如果方阵中非主对角线上的所有元素都是零（即当 $i \neq j$ 时，$a_{ij} = 0$），

即形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵，称为**对角矩阵**，

可记作 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

diagonal matrix

(四) 数量矩阵，单位矩阵

当对角矩阵的主对角上的元都相同时，

即形如 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ 的方阵，称为**数量矩阵**，

特别地，当 $\lambda = 1$ 时，称 n 阶数量矩阵

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 为 n 阶**单位矩阵**，记作 E_n 或 E。

(五) 行矩阵与列矩阵

只有一行的矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,

称为**行矩阵**(或**行向量**).

只有一列的矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,

称为**列矩阵**(或**列向量**).

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

1、定义

设有两个$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$，那末矩阵 A 与 B 的**和**记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明　只有当两个矩阵是**同型**矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、 矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的**负矩阵**，记为$-A$.

显然有 $A+(-A)=0$.

定义矩阵的减法： $A-B=A+(-B)$

二、数与矩阵相乘

1、定义

数λ与矩阵A的乘积记作 λA,规定为

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2、数乘矩阵的运算规律

（设A、B为 $m\times n$矩阵，λ,μ 为数）

$$(1)\ \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A;$$

$$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

加法和数乘合称为矩阵的**线性运算**.

例1 已知

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

求 $3A-2B$.

解

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & 3\\ 0 & 9 & -6 & 3\\ 12 & 0 & 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 6 & 4 & -2\\ 10 & -6 & 0 & 2\\ 2 & 4 & -10 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-11 & 0 & 5 & 5\\ -10 & 15 & -6 & 1\\ 10 & -4 & 19 & 6\end{pmatrix}$$

例2 已知

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\2&4&6&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7&5&-2&4\\5&1&9&7\\3&2&-1&6\end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 求$\boldsymbol{X}$.

解

$$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&6&-4&4\\4&-4&2&-2\\1&-2&-7&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&-2&2\\2&-2&1&-1\\\frac{1}{2}&-1&-\frac{7}{2}&-1\end{pmatrix}.$$

三、矩阵的乘法

1、定义

设$A=(a_{ij})$是一个$m\times s$矩阵，$B=(b_{ij})$是一个$s\times n$矩阵，那末规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$m\times s\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} s\times n$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\quad m\times n$$

例3 $$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

例4 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

例5

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

例6 $$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

注意 只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如，$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 有意义，

而 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 没意义。

例6

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&3\\3&1&1\\5&3&4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{DC}$

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\3&1&1\\5&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&4\\6&4&7\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CD}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{DC}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$$

2、矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $A(B+C) = AB + AC$，$(B+C)A = BA + CA$;

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ （其中k为数）;

(4) $AE = EA = A$.

注意：交换律不成立。

首先，AB有意义，不见得BA就有意义；

例如，$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

若A为$m\times n$、B为$n\times m$阶矩阵，则AB、BA均有意义，但AB为m阶方阵，BA为n阶方阵；

例如，设 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

$$BA=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n).$$

当A、B为同阶方阵时，AB、BA为同阶方阵，但仍不一定有 $AB=BA$.

例如，$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，

$$AB=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

结论：矩阵乘法交换律不成立，一般 $AB\neq BA$.

若 $AB=BA$，称A、B**可交换**，

(前提是A、B为同阶方阵).

例5 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，试求出所有与$A$可交换的矩阵。

解 设$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix},$$

令 $AB=BA$， 得 $c=0$，$a=d$，

$$\therefore B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix},\quad a,b\text{任意}.$$

从前例 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

还可看出，矩阵乘法不满足消去律：

$AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$;

或 $AB=AC \not\Rightarrow B=C$. 左消去律 $A(B-C)=O$

例如，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

同理没有右消去律：$AC=BC \not\Rightarrow A=B$.

定义 设A为n阶方阵，则A的方幂定义为

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{个}} = A^{k-1}A\,,\ k\text{为正整数}\ .$$

再规定 $A^0 = E$.

规律： $A^k A^l = A^{k+l}\ ,\ (A^k)^l = A^{kl}$.

其中k，l为任意非负整数。

注意 由于没有交换律，一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$.

因此，一般 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

$$= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2\ ,$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2\ .$$

例8 设 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,

求 A^2, B^2, C^2.

解

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

$$C^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

例9 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求 A^n.

解 设 $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

则 $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$， $B^k=O,\ k\geq 3$

$$A^n=(\lambda E+B)^n=\lambda^n E+C_n^1\lambda^{n-1}B+C_n^2\lambda^{n-2}B^2$$

解 设 $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B^k=O$，$k\geq 3$.

$$A^n=(\lambda E+B)^n=\lambda^n E+C_n^1\lambda^{n-1}B+C_n^2\lambda^{n-2}B^2$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n\lambda^{n-1}&0\\0&0&n\lambda^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}.$$

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\cdots+a_mx^m$ 是一个多项式，

A是一个n阶方阵，定义**矩阵多项式**为

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m\ .$$

例如，设 $f(x)=x^2-5x+3$，

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -15 & 12\end{pmatrix},$$

$$f(A)=A^2-5A+2E$$

$$=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -15 & 12\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

下面将线性方程组写成矩阵形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

记系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

则上述方程组可写为 $Ax = b$.

四、矩阵的转置

定义 把矩阵A的**行列互换**得到的新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T .

例8
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

若A是$m\times n$矩阵，则A^T是$n\times m$矩阵 .

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(kA)^T = kA^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$. 证略.

(4)可推广到多个矩阵:

$$(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T \cdots A_2^T A_1^T .$$

例9 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

$$\therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

例9 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解法2 $(AB)^T = B^T A^T$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

对称矩阵与反对称矩阵

定义 设A为n阶方阵，如果满足 $A^T = A$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

那末A称为**对称阵**.

例如 $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称阵.

说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

对称矩阵与反对称矩阵

定义 设A为n阶方阵，如果满足$A^T=-A$，即

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

那末A称为**反对称阵**.

例如 $A=\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称阵.

说明 反对称阵的对角元全为零.

例10 设B是一个$m\times n$矩阵, 则B^TB和BB^T都是对称矩阵.

因为B^TB是n阶方阵, 且

$$(B^TB)^T=B^T(B^T)^T=B^TB\ .$$

同理, BB^T是m阶对称矩阵.

若A、B为同阶对称阵(反对称阵), 则 λA , $A\pm B$ 仍为对称阵(反对称阵) .

A、B为同阶对称阵， AB未必对称; 只有A、B可交换， AB才对称。(证明留作练习)

练习 设A是n阶反对称矩阵, B是n阶对称矩阵, 则$AB+BA$是反对称矩阵.

证 $(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T$

$$=B(-A)+(-A)B=-(AB+BA)\ .$$

例 设A为任一方阵，证明：$A+A^T$为对称阵，$A-A^T$为反对称阵

证：由于

$$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

$$(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$$
$$= -(A - A^T)$$

故 $A+A^T$为对称阵，$A-A^T$为反对称阵

？：任一方阵都可表示成一个对称阵与反对称阵之和?

！：$$A = \frac{1}{2}[(A+A^T)+(A-A^T)]$$

例3.已知 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}),A=\alpha^T\beta$ **求** A^n

解：

$$A^n=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta$$

$$=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{n-1\text{个}}\beta$$

其中 $\beta\alpha^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$

所以

$$A^n=\alpha^T 3^{n-1}\beta$$

$$=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

五、方阵的行列式

定义　由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-2.$

运算性质　(1) $\left|A^T\right|=|A|$；(2) $|kA|=k^n|A|$；

(3) $|AB|=|A|\cdot|B|$；

(3) 推广：$|A_1A_2\cdots A_s|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

特别：$|A^m|=|A|^m$.

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{pmatrix},\quad \text{有}\quad |AB|=\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{vmatrix}=30$$

而 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10,\quad |B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$

所以 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$

第三节　矩阵的逆

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数，（或称 a 的逆）；

对方阵，有$AE=EA=A$，

单位阵E类似于1在数的乘法运算中的地位.

那么，对于矩阵A，如果存在一个矩阵 A^{-1}，

使得　$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}称为A的逆矩阵.

定义 设A是n阶方阵，如果存在n阶方阵，使得

$$AB = BA = E,$$

则称A为可逆矩阵，而B称为A的逆矩阵，记为 A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,\ \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

说明 (1) 只有方阵才可能可逆;

(2) 逆阵若存在, 则必唯一.

证 设B和C都是A的可逆矩阵，则

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$$

例如： $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

有 $$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵，同时 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆阵。

$$AB = BA = E$$

问题：(1) 什么条件下A才可逆?

(2) 如果可逆, 如何求 A^{-1} ?

若A可逆，$AB = E$, 两边取行列式,

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |E| = 1, \Rightarrow |A| \neq 0.$$

若 $|A| \neq 0$, 则称A是**非奇异**的(或**非退化**的);

否则称A为奇异的(或退化的)。

$|A| \neq 0$ 是A可逆的必要条件.

下面说明这个条件也是充分的.

定义 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的**伴随矩阵**.

性质 $AA^*=A^*A=|A|E.$

证明 回忆行列式按行展开公式:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} |A|, & i=k, \\ 0, & i\neq k. \end{cases}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & O \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E,$$

类似有，$A^*A = |A|E$.

定理 矩阵A是可逆的充分必要条件是A非奇异。当A可逆时，有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

证 充分性： 由 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$，

若 $|A|\neq 0$，则 $A(\frac{1}{|A|}A^{*})=(\frac{1}{|A|}A^{*})A=E$.

推论 若$AB=E$(或$BA=E$),则$B=A^{-1}$.

证 $|A|\cdot|B|=|E|=1$，故$|A|\neq 0$，因而A^{-1}存在，

于是 $B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}.$

逆矩阵的求法

例1 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$A^*=\begin{pmatrix}-3&&\\-4&&\\5&&\end{pmatrix}$$

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-4\\1&0\end{vmatrix}=4\neq 0,$

所以A可逆.

$\because\ A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}=-3,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=-4,\ A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}-3&3&1\\-4&0&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$$

同理可求得

$$A_{21}=3,\ A_{22}=0,\ A_{23}=-1,\quad A_{31}=1,\ A_{32}=4,\ A_{33}=-3.$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&3&1\\-4&0&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

对于3阶以上的矩阵，用**伴随矩阵法**求逆矩阵很麻烦，以后将给出另一种求法--**初等变换法**。

例2 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $|A|=ad-bc$，

故A可逆的充分必要条件是 $ad-bc\neq 0$，

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

例如，$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

例2.设 $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$ **求** A^{-1}

解： $\because |A|=2\neq 0 \therefore A^{-1}$ 存在

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\3&6\end{vmatrix}=3 \quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&3\\1&6\end{vmatrix}=-3 \quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&2\\3&6\end{vmatrix}=-6 \quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&2\\1&6\end{vmatrix}=10 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix}=2 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=-4 \quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}=2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

例3 对角阵 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可逆的充分必要条件是 $a_i \neq 0\ (i = 1, \cdots, n)$，且

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & O \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & O \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

例如，$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & -1/3 \end{pmatrix}.$

例4 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1) 方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

例5 设 $A^{-1}BA=6A+BA$，其中 $A=\begin{pmatrix}1/2 & & O\\ & 1/4 & \\ O & & 1/7\end{pmatrix}$，求 B.

解 $A^{-1}BA-BA=6A$，$\Rightarrow (A^{-1}-E)BA=6A$，

$\Rightarrow (A^{-1}-E)B=6E$，

$$\Rightarrow B=6(A^{-1}-E)^{-1}=6\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例6 设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明:$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明 由$A^2-A-2E=0$, 得$A(A-E)=2E$,

$$\Rightarrow A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E,$$

故A可逆,且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又由 $A^2-A-2E=0 \Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0$,

$\Rightarrow (A+2E)[-\frac{1}{4}(A-3E)]=E$, 故 $A+2E$ 可逆,

且 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}.$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E.$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

(4) 若A可逆,则A^T亦可逆 ,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

证明 $A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E.$

(5) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1} = E$，$\therefore |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1$，因此$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

注意 A，B可逆，$A+B$不一定可逆，即使可逆，一般

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.$$

可逆阵A若对称（反对称），则A^{-1}也对称（反对称）.

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$，对称；

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$，反对称.

设A, B, C为同阶方阵，$AB = AC$。若A可逆，则$B = C$。

对于可逆矩阵而言，矩阵乘法的消去律成立。

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

写成矩阵形式 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

若 $|A| \neq 0$，则 $x = A^{-1}b$，此即克莱姆法则。

例7 若 n 阶矩阵 A 可逆，证明 $\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$。

证 在 $\boxed{AA^* = |A|E}$ 两边取行列式得 $|A| \cdot \left|A^*\right| = |A|^n$，

因为 A 可逆，故 $|A| \neq 0$。

所以 $\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$.

例8 若 A 可逆，试证 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$。

证 由 $\boxed{A^*A=|A|E}$,

因为 A 可逆，故 $|A|\neq 0$。

$\therefore\quad A^*(\frac{1}{|A|}A)=E$,

即 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

例9 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A| = \frac{1}{2}$，求行列式

$|(3A)^{-1} - 2 \cdot A^{*}|$ 的值。(其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵)

解 $A^{*} = |A| \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1}$，

$$\therefore \quad |(3A)^{-1} - 2A^{*}| = \left| \frac{1}{3} \cdot A^{-1} - A^{-1} \right| = \left| \frac{-2}{3} \cdot A^{-1} \right|$$

$$= -\frac{8}{27} \cdot 2 = -\frac{16}{27}.$$

第四节　矩阵的分块

对于规模较大, 零较多或局部比较特殊的矩阵, 为了简化运算，经常采用**分块法**，把大矩阵分割成小矩阵. 在运算时， 把这些小矩阵当作元素一样来处理.

具体做法是：将矩阵用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},\quad \text{其中}A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

……

$$\text{其中}A_1=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

分块矩阵的运算规则

(1) 分块矩阵A与B的行数相同,列数相同, 采用相同的分块法, 有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij}与B_{ij}的行数相同 ,列数相同 ,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 那末

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

由于矩阵的加法与数乘比较简单，一般不需用分块计算。

(3) 设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数，那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

例1 设

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right),\ B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right),\quad \text{求 } AB.$$

解 把A,B分块成

$$A=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

则 $$AB=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix}B_{11} & E\\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$,

则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

形如 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$ 的分块矩阵,

称为**准上三角阵**，其中 $A_i\,(i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵 .

类似有**准下三角阵**.

$$A=\left(\begin{array}{c:cc:c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$ 准下三角阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_s \end{pmatrix}$$

准三角矩阵有如下性质:

(1) 设A、B两个同类型的准三角矩阵，则

$$A \pm B\ , \lambda A\ , AB$$

均为同类型的准三角矩阵。

(2) $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

特别，$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$ 称为**准对角矩阵**.

$$\left(\begin{array}{c:cc} 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c:cc:cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

准对角矩阵除了具有准三角阵的性质以外, 还有:

(1) $$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & O \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

特别, $$A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & O \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^k \end{pmatrix}.$$

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$， 则 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

(2) A可逆当且仅当 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$均可逆，且有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c:cc}5&0&0\\ \hdashline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$, $\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$;

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$

例3 设 $A=\left(\begin{array}{c|cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$，求 $A^2, |A|, |A^5|, A^{-1}, A^T$.

解 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$,

$$A^2=\begin{pmatrix} A_1^2 & & \\ & A_2^2 & \\ & & A_3^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

例3 设 $A=\left(\begin{array}{c|cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$，求 A^2，$|A|$，$|A^5|$，A^{-1}，A^T．

解 $|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|=3$，$|A^5|=|A|^5=243$，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

例3 设 $A=\left(\begin{array}{c|cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$，求 A^2，$|A|$，$|A^5|$，A^{-1}，A^T．

解

$$A^T=\begin{pmatrix} A_1^T & & \\ & A_2^T & \\ & & A_3^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例4 设 $P=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$,其中$A$和$B$都是可逆方阵,

证明P可逆,并求P^{-1}.

解 由A, B可逆,有$|P|=|A|\cdot|B|\neq 0$,得P可逆.

设 $P^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$,

于是 $PP^{-1}=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} AX+CW & AZ+CY \\ BW & BY \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} AX+CW & AZ+CY \\ BW & BY \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX+CW=E, \\ AZ+CY=O, \\ BW=O, \\ BY=E. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} X=A^{-1}, \\ Z=-A^{-1}CB^{-1}, \\ W=O, \\ Y=B^{-1}, \end{cases}$$

$$AZ+CY=O,\ \Rightarrow AZ=-CY,$$

因此 $P^{-1}=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

类似有 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别，$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$

第五节　矩阵初等变换

1. 矩阵的初等变换

1.矩阵的初等变换
2.初等矩阵
3.用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

什么是初等变换?

线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

用矩阵形式表示此线性方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则，线性方程组可表示为 $Ax = b$

如何解线性方程组？　可以用消元法求解。

始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换：

（1）交换方程次序；

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（3）一个方程加上另一个方程的k倍.

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换.

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算.

若记

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则对方程组的变换完全可以转换为

对矩阵B（方程组的增广矩阵）的变换.

即，求解线性方程组实质上是对增广矩阵施行3种初等运算：

统称为矩阵的初等行变换

(1) 对调矩阵的两行。

(2) 用非零常数k乘矩阵的某一行的所有元素。

(3) 将矩阵的某一行所有元素乘以非零常数k后加到另一行对应元素上。

定义　下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 对调两行（对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素 ；

（第 i 行乘 k, 记作 $r_i \times k$）

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$）.

同理可定义矩阵的**初等列变换**(所用记号是把“r”换成“c”).

初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \text{逆变换} \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \text{逆变换} \quad r_i \times \left(\frac{1}{k}\right);$$

$$r_i + kr_j \quad \text{逆变换} \quad r_i + (-k)r_j\ .$$

定义 由单位矩阵E经过**一次**初等变换，得到的矩阵称为**初等矩阵**。

初等矩阵有下列3种:

(1) 对E施以第(1)种初等变换得到的矩阵.

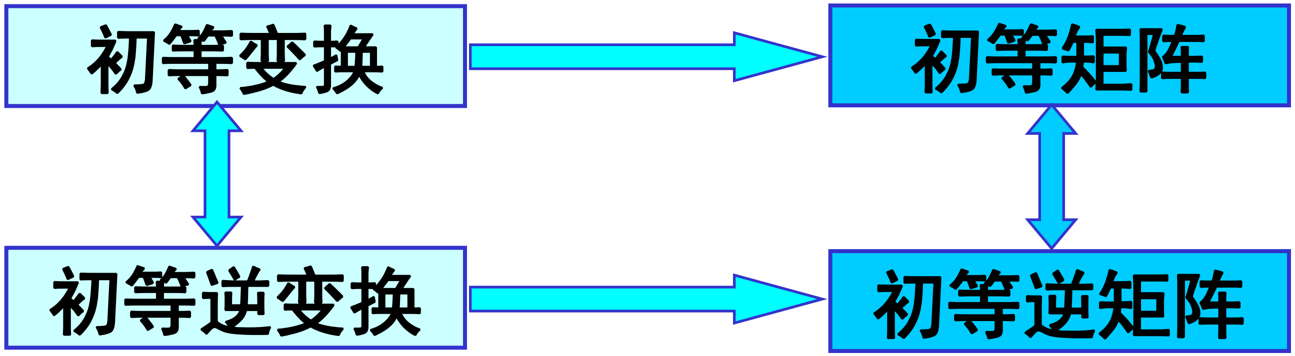
$$
E(i,j)=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} \quad & \quad & i\text{列} & \quad & \quad & \quad & j\text{列} & \quad & \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\
 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

(2) 对E施以第(2)种初等变换得到的矩阵.

$$\begin{array}{c c l} & E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & i\text{行} \\ & \quad\quad\quad\quad\quad\quad i\text{列} & \end{array}$$

(3) 对E施以第(3)种初等变换得到的矩阵.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i\text{列} & & j\text{列} & & \end{array} \\
E(i,j(k))= & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$



例1：计算

$$(1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

定理 设A为 $m\times n$ 阶矩阵，

(1) 对A施以某种初等**行**变换, 相当于用同种的m阶初等矩阵**左**乘A.

(2) 对A施以某种初等**列**变换, 相当于用同种的n阶初等矩阵**右**乘A. 证略。

例1 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+C_2}\begin{pmatrix}1&2&7\\4&5&16\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&7\\4&5&16\end{pmatrix}.$$

初等矩阵的逆矩阵还是同类型的初等矩阵：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j),$$

$$E(i(k))^{-1}=E[i(\frac{1}{k})],$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

定义 如果矩阵B可以由矩阵A经过有限次初等变换得到，则称矩阵A和B为**等价**的，记作 $A \cong B$

等价关系的性质：

（1）反身性 $A \cong A$;

（2）对称性 若$A \cong B$，则$B \cong A$;

（3）传递性 若$A \cong B$，$B \cong C$，则$A \cong C$.

※ 两个线性方程组同解,就称这两个线性方程组等价.

定理 任意一个 $m\times n$ 矩阵A都与一个形式为

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

的矩阵等价，称之为A的**标准形**。 证略。

例2 将下列矩阵化为标准形．

(1) $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

解

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+7r_2]{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \\ 0 & 0 & -20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2、初等变换的应用

求矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

的标准形矩阵.

解　对矩阵A施初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

4

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$ 为A的标准形矩阵.

1）行阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行阶梯形矩阵的特点是：

1）矩阵的所有元素全为**0**的行（如果存在的话）都集中在矩阵的最下面；

2）每行左起第一非零元素（称为首非零元）的下方元素全为**0.**

形象地说，可以在该矩阵中画一条阶梯线，线的下方元素全为**0**；每个阶梯仅有一行，阶梯数既是非零行的行数；阶梯线的竖线后面的第**1**个元素即为首非零元.

2) 行最简形矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

行最简形矩阵的特点是：

非零行的首非零元为1，且这些首非零元所在的列的其它元素全为0.

※ 一个矩阵的行最简形矩阵是唯一的.要解线性方程组,只须把增广矩阵化为行最简形矩阵.

结论　设A为$m \times n$矩阵，则A必可用初等行变换化为行阶梯形矩阵.

定理：

设A是$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘一个相应的 m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换， 相当于在A的右边乘一个相应的n阶初等矩阵。

证明：具体验证即可

设A按行分块，对A施行倍加变换，将A的第j行k倍加到第i行上，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$$

$$E(ij(k))A=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$$

另两种情形同理可证

一般记法：

$E(i,j)A$表示A的第i行与第j行对换，

$AE(i,j)$表示A的第i列与第j列对换.

$E(i(k))A$表示A的第i行乘k，

$AE(i(k))$表示A的第i列乘k.

$E(ij(k))A$表示A的第j行乘k加到第i行上，

$AE(ij(k))$表示A的第i列乘k加到第j列上.

例2： (1) 设初等矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} P_2=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\c&&&1\end{pmatrix}$$

$$P_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$P_1P_2P_3$及$(P_1P_2P_3)^{-1}$

解：(1)$P_1P_2P_3$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\c&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ c & & & 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -c & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1 & \\ -c & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1/k & & \\ 1 & & & \\ & & -c & 1 \end{pmatrix}$$

(2)已知：$A=P_1BP_2$，求A

其中$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\-2&-1&0\\5&4&3\end{pmatrix}$$

3. 用初等变换法求可逆矩阵的逆矩阵

定理： $\boxed{\text{可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单}}$ 位矩阵.

推论1： $\boxed{\text{可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积}}$

证明： 由定理，存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$

使得 $(P_s \cdots P_2 P_1) A = E$,

又因为初等矩阵可逆，所以等号两边左乘$(P_s \cdots P_2 P_1)^{-1}$

$$A = (P_s \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$$

初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，定理得证。

若方阵A可逆，则它的标准形必为单位矩阵，

即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$， $Q_1,\cdots,Q_t$，使

$$P_sP_{s-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=E,$$

初等阵是可逆的，且其逆阵仍为初等阵，于是

$$A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}EQ_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}=R_1R_2\cdots R_k,$$

其中 $R_1,R_2,\cdots,R_k$ 均为初等矩阵，

可逆阵能表成一些初等矩阵的乘积。

由 $A=R_1R_2\cdots R_k$，得 $U_kU_{k-1}\cdots U_1A=E$，

其中 $U_1,U_2,\cdots,U_k$ 均为初等矩阵，

$U_k U_{k-1} \cdots U_1 A = E$，表明：

可逆阵可经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

$U_k U_{k-1} \cdots U_1 E = A^{-1}$，表明：

如果用一系列初等行变换把可逆矩阵A化为单位矩阵E，那么同样地用这些初等行变换就把单位矩阵E化为A^{-1}.

利用初等变换求逆阵的方法：

对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\ \boxed{2}&2&1&0&1&0\\ \boxed{3}&4&3&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

注：1. 求逆时,若用初等行变换必须坚持始 终,不能夹杂任何列变换.

2. 若作初等行变换时,出现全行为0，则矩阵的行列式等于0。结论：矩阵不可逆!

另：利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \mid B) = (E \mid A^{-1}B)$$

即

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \quad \boxed{A^{-1}B}\right)$$

例4 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A\,\vdots\,B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 5r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

$$\therefore \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

练习：用初等行变换求可逆矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例7 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

解 $(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$, $\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} \\ -3 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$

例8 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，且 $AX=A+2X$，求矩阵 X.

解

$\because AX=A+2X$

$\therefore (A-2E)X=A$

又 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$,

由于 $(A-2E \mid A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3\end{array}\right),$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

如果要求$Y=CA^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}E\\CA^{-1}\end{pmatrix},\quad \text{即可得 } Y=CA^{-1}.$$

或者，$Y^T=(A^{-1})^TC^T=(A^T)^{-1}C^T$,

对(A^T,C^T)作初等行变换，

$$(A^T,C^T)\xrightarrow{\text{行变换}}(E,(A^T)^{-1}C^T),$$

即可求得Y^T，从而获得Y。

第六节　矩阵的秩

定义　在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m$，$k\le n$），位于这些行列交叉处的个 k^2 元素,不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1$，

第六节　矩阵的秩

定义　在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m$，$k\le n$），位于这些行列交叉处的个 k^2 元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例1
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6.$$

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \bullet C_n^k$ 个.

定义 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 k 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于 0，那末 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作秩 (A) 或 $r(A)$.

零矩阵的秩规定为0。

$m\times n$ 矩阵A的秩 $r(A)$ 是A中非零子式的最高阶数

矩阵秩的性质：

（1）若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\le r(A)\le \min(m,n)$；

（2）$r(A^T)=r(A)$；$r(kA)=r(A)$（$k\neq 0$）；

（3）若 A 有一个 r 阶子式不为零, 则 $r(A)\ge r$；

若 A 的所有 $r+1$ 阶子式全为零，则 $r(A)\le r$；

（4）对于 n 阶方阵 A 而言，有 $r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$；

$r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$；

可逆矩阵也称为**满秩矩阵**。

（5）设 P,Q 为可逆阵, 则 $r(PA)=r(A)$, $r(AQ)=r(A)$.

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\ -5\end{matrix} \\ \begin{matrix}4 & 7\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 在 A 中，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$

又 $\because$ A的 3 阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$，

$\therefore \quad r(A)=2$.

例3 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵， 其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$， $\therefore$ $r(B)=3$.

若矩阵的每行第一个非零元的下方及左下方全为零，则称之为**阶梯形矩阵**。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意一个矩阵都可以经过一系列的初等行变换化为阶梯形矩阵。

初等变换不改变矩阵的秩。

阶梯形矩阵的秩等于其中非零行的个数。

矩阵秩的计算方法：

用初等行变换把矩阵化为阶梯形，则该阶梯形矩阵中的非零行数就是所求矩阵的秩。

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩.

解

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 4r_2]{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ r(A) = 3\,.$$

例9 求下列矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix}.$$

解

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 9 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -35 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 $r(A)=2$.

补充题

1. 求所有与 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

2. 若方阵 A 与 B 可交换, 且 A 可逆, 则 A^{-1} 与 B 也可交换.

3. 如果方阵 A 与 B、C 均可交换，证明：A 与 BC、A 与 $B+C$ 均可交换。

4. 设 $A=E-2xx^T$,其中 $x=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$. 若 $x^Tx=1$, 求 A^T , A^2 , AA^T , A^TA , Ax .

1. 求所有与 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

解 设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ 与A可交换,

$$AB=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&a&b\\f&d&e\\i&g&h\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&a&b\\f&d&e\\i&g&h\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ d=c,e=a,f=b,g=f,d=h,i=e,$$

所以 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$，其中$a,b,c$任意。

2. 若方阵 A 与 B 可交换, 且 A 可逆, 则 A^{-1} 与 B 也可交换.

证 $AB = BA$, $\Rightarrow$ $B = A^{-1}BA$, $\Rightarrow$ $BA^{-1} = A^{-1}B$,

即 A^{-1} 与 B 也可交换.

3. 如果方阵 A 与 B、C 均可交换, 证明: A 与 BC、A 与 $B+C$ 均可交换。

证 已知 $AB = BA$, $AC = CA$,

于是 $A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA)$

$= (BC)A$, 即A与BC可交换;

$A(B+C) = AB + AC = BA + CA = (B+C)A$,

即A与 $B+C$ 可交换.

4. 设 $A=E-2xx^T$，其中 $x=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$．若 $x^T x=1$，求 A^T，A^2，AA^T，$A^T A$，Ax.

解 $A^T=(E-2xx^T)^T=E^T-2(xx^T)^T=E-2xx^T=A$;

$$A^2=(E-2xx^T)^2=E^2-4Exx^T+4(xx^T)(xx^T)$$

$$=E-4xx^T+4x(x^T x)x^T=E-4xx^T+4xx^T=E,$$

$$AA^T=A^T A=A^2=E;$$

$$Ax=(E-2xx^T)x=Ex-2x(x^T x)=x-2x=-x.$$

第三章

线性方程组

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

本章讨论方程组的求解问题:

1) 解的存在性（ 何时有解？何时无解？）

2） 解的求法（ 怎样求解？）

3） 解的个数（ 有多少个解？）

4） 解的结构（ 解与解之间的关系 ）

二、线性方程组的消元解法

克莱姆法则中,要求:

1．未知量的个数＝方程的个数

2．系数行列式 $\det A \neq 0$

而线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

如 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3 \\ 7x_1 + 0.5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$

1. 消元法

例

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=11 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=11 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4 \\ -7x_2+x_3=-1 \\ -5x_2+5x_3=-5 \end{cases} \xrightarrow[\times 7]{\times(-3)} \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4 \\ x_2-x_3=1 \\ -7x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 \qquad +x_3=1 \\ x_2-x_3=1 \\ -6x_3=6 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+ \qquad x_3=1 \\ x_2-x_3=1 \\ x_3=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 \qquad =2 \\ x_2 \qquad =0 \\ x_3=-1 \end{cases}$$

在以上求解过程中，对方程组反复进行了以下三种变换：

1. 交换两个方程的位置;
2. 用一个非零的数乘以某个方程的两边;
3. 把一个方程的若干倍 加到另一个方程上.

这三种变换的每一种 都称为线性方程组的初等变换.

对线性方程组施行初等变换后，得到的新方程组与原方程组 是同解的.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组(2.7)的系数矩阵.

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

称为方程组(2.7)的增广矩阵.

例 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=11 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$

$r(\overline{A})=3$

$r(A)=3$

未知量的个数$=3$

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\overline{A}=(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\times(-2)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

$\times(-3)$ $\times 7$ $\times\left(-\frac{1}{6}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=0 \\ x_3=-1 \end{cases}$$

例 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-x_4=6 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=6 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=8 \end{cases}$ $r(\overline{A})=3$ $r(A)=2$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}=(A \mid b)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & \bigm| & 6 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & \bigm| & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & \bigm| & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-2) \end{array} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & -10 & 8 & 0 & \vdots & -12 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & \vdots & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

对应的方程组为 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-x_4=6 \\ -5x_2+4x_3=-6 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2 \end{cases}$

此方程为矛盾方程, 无解, 故原方程也无解.

例 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2+4x_3=-5 \\ 3x_1+8x_2-2x_3=13 \\ 4x_1-x_2+9x_3=-6 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=-1-2x_3 \\ x_2=2+x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-1-2c \\ x_2=2+c \\ x_3=c \end{cases}$ $r(\overline{A})=2$

$r(A)=2$

为方程组的全部解

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3=-1 \\ \quad x_2-x_3=2 \end{cases}$

例 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$r(\overline{A}) = 2$

$r(A) = 2$

未知量的个数$=4$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-\frac{1}{2}) \\ \times(-\frac{1}{3}) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + c \\ x_2 = c \\ x_3 = \frac{1}{2} + d \\ x_4 = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2} + x_4 \end{cases}$$

为方程组的全部解

2 . 线性方程组有解 的判定定理

定理

n元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

方程组有解 $\longleftrightarrow$ $r(A) = r(\overline{A})$

方程组有唯一解 $\longleftrightarrow$ $r(A) = r(\overline{A}) = n$

方程组有无穷多解 $\longleftrightarrow$ $r(A) = r(\overline{A}) < n$ 此时，一般解中有 $n-r$ 个自由未知量.

说明: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$r(A) \neq r(\overline{A})$时，无解.

$r(A) = r(\overline{A})$时，有解 $\begin{cases} r(A) = r(\overline{A}) = n \text{ 时，有唯一解.} \\ r(A) = r(\overline{A}) < n \text{时，有无穷多个解.} \end{cases}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \times \frac{1}{a_{11}}$$

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

证 由于方程为n元线性方程组，故$\overline{A}$的第一列元素不全为零. 不妨设$a_{11} \neq 0$

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{2m} & \cdots & a'_{mm} & b'_m \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \hline 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{2m} & \cdots & a'_{mm} & b'_m \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \hline 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{array}\right)$$

$$
\bar{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a'''_{3n} & b'''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'''_{mn} & b'''_m \end{pmatrix}
$$

第r+1行, 对应的方程为:

$$0x_1+0x_2+\dots+0x_n=d_{r+1}$$

$$\overline{A}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_{r+1}\neq 0$ 时无解. 此时

$$r(A)=r \quad r\left(\overline{A}\right)=r+1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \end{vmatrix} = d_{r+1} \neq 0$$

$$r(A)\neq r\left(\overline{A}\right)$$

$$\overline{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c'_{1r+1} & \cdots & c'_{1n} & d'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c'_{2r+1} & \cdots & c'_{2n} & d'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c'_{rr+1} & \cdots & c'_{rn} & d'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_{r+1} \neq 0$ 时无解. 此时

$r(A) = r$

$r\left(\overline{A}\right) = r+1$

$r(A) \neq r\left(\overline{A}\right)$

$d_{r+1} = 0$ 时,

$r(A) = r = r\left(\overline{A}\right)$

方程组化为:

$$\begin{cases} x_1 + c'_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{1n}x_n = d'_1 \\ x_2 + c'_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{2n}x_n = d'_2 \\ \vdots \\ x_r + c'_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{rn}x_n = d'_r \end{cases}$$

$d_{r+1}=0$ 时

方程组化为：

$$r\text{个}\begin{cases} x_1 + & & & c'_{1r+1}x_{r+1}+\dots+c'_{1n}x_n=d'_1 \\ & x_2 + & & c'_{2r+1}x_{r+1}+\dots+c'_{2n}x_n=d'_2 \\ & & \vdots & \\ & & x_r + & c'_{rr+1}x_{r+1}+\dots+c'_{rn}x_n=d'_r \end{cases}$$

r个　　$n-r$个

当r=n时，即为

$$\begin{cases} x_1 = d'_1 \\ x_2 = d'_2 \\ \vdots \\ x_n = d'_n \end{cases}$$

方程组有唯一解.

$$r(A)=r(\overline{A})=r=n$$

当r<n时，方程组中有n－r个未知量可以任意取值，称为自由未知量，方程组有无穷多个解.

$$\begin{cases} x_1 = d'_1-(c'_{1r+1}x_{r+1}+\dots+c'_{1n}x_n) \\ x_2 = d'_2-(c'_{2r+1}x_{r+1}+\dots+c'_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_r = d'_r-(c'_{rr+1}x_{r+1}+\dots+c'_{rn}x_n) \end{cases}$$

$$r(A)=r(\overline{A})=r<n$$

例方程组$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = b \end{cases}$ (1) a,b取何值时，无解、有唯一解、有无穷多解；(2) 当有解时，求出其解.

解

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -a-2 & b-4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-3 \end{array}\right)$$

$a \neq -1$ 时 $r(A) = 3 = r(\overline{A})$ 有唯一解. 此时，唯一解为：

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3-b}{a+1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-\dfrac{3-b}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & -1+\dfrac{3-b}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3-b}{a+1} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \dfrac{3-b}{a+1} \\ x_2 = -1 + \dfrac{3-b}{a+1} \\ x_3 = \dfrac{3-b}{a+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad \bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array}\right) \quad a \neq -1 \text{ 时} \text{有唯一解.}$$

当 $a=-1$ 且 $b\neq 3$ 时， $r(A)=2$ $r(\bar{A})=3$ 无解；

当 $a=-1$ 且 $b=3$ 时， $r(A)=2=r(\bar{A})$ 有无穷多解，

此时，

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组化为: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = -1 + x_3 \end{cases}$ 故方程组的全部解为: $\begin{cases} x_1 = 2 - c \\ x_2 = -1 + c \\ x_3 = c \end{cases}$

n元齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.8)$$

其系数矩阵为
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
常数项矩阵为
$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

增广矩阵为:
$$\overline{A} = (A \mid O) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad \overline{A}=(A \mid O)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{A}\to \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(\overline{A})=r$

齐次线性方程组总有解(零解)

$r(A)=r(\overline{A})=r=n$时,

有唯一解(只有零解)

$r(A)=r(\overline{A})=r<n$时,

有无穷多个解(有非零解)

定理 设 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.8)$$

的系数矩阵 A 的秩为 r

(1) 如果 $r(A) = n$ 则方程组(2.8)仅有零解;

(2) 如果 $r(A) < n$ 则方程组(2.8)有非零解.

推论 如果n元齐次线性方程组(2.8)中,方程的个数少于未知量的个数,即 $m < n$, 则方程组必有非零解.

证 系数矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $\qquad r(A) \le m < n$,

故方程组有非零解.

定理 含n个未知量n个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2.9) \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

仅有零解 $\Longleftrightarrow$ 它的系数行列式 $\det A \neq 0$

有非零解 $\Longleftrightarrow$ 它的系数行列式 $\det A = 0$

证 线性方程组(2.9)仅有零解 $\Longleftrightarrow r(A) = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$

线性方程组(2.9)有非零解 $\Longleftrightarrow r(A) < n \Longleftrightarrow \det A = 0$

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \nparallel 0$$

例 确定λ的值, 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出解.

解

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$\times(-\lambda)$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(2+\lambda)$$

$\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$ 时, 有非零解.

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}\quad \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & \lambda & 0\end{array}\right)$$

$\times(-\lambda)$

$\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时,有非零解. 当 $\lambda=1$ 时

$$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1=-x_2-x_3\end{array}$$

全部解为 $\begin{cases}x_1=-c-d\\ x_2=c\\ x_3=d\end{cases}$

当 $\lambda=-2$ 时

$$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$ 全部解为: $\begin{cases}x_1=c\\ x_2=c\\ x_3=c\end{cases}$

例 方程组 $\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3 \end{cases}$ 证明：若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不等，则此线性方程组无解.

解 $\overline{A} = (A \mid B) =$

$$= \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{array}\right)}$$

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0$$

$$r(\overline{A}) = 4$$

例 方程组 $\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3 \end{cases}$ 证明：若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不等，则此线性方程组无解.

解 $\overline{A} = (A \mid B) =$

$$= \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{array}\right)}$$

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{3 \ge i > j \ge 1} (a_i - a_j) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$r(\overline{A}) = 4$ $r(A) \le 3$ $\therefore r(\overline{A}) \neq r(A)$

故此线性方程组无解.

例 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$ 确定a的值，使方程组有解，在有无穷多解时，求其解.

解 $\bar{A} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-a) \\ \times(-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \end{array}\right)$$

当 $a=1$ 时，$\bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

方程组有无穷多解

$x_1 = 1 - x_2 - x_3$

全部解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c - d \\ x_2 = c \\ x_3 = d \end{cases}$$

例 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$ 确定a的值,使方程组有解,在有无穷多解时,求其解.

解

$$\bar{A} \xrightarrow[\times \frac{1}{1-a}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \end{array}\right)$$

当 $a=1$ 时,有无穷多解;

当 $a \neq 1$ 时,

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1+a & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 1+a & 1 & 1+a \end{array}\right) \times[-(a+1)]$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 2+a & (a+1)^2 \end{array}\right)$$

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时,有唯一解;

当 $a=-2$ 时,无解.

练习1.解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \\ 5x_1+7x_2+x_3=28 \end{cases}$.

解

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

解得唯一解 $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2$.

2. 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

解

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

最后一个为矛盾方程组 $0=2$，故方程组无解.

3. t 为何值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = t \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = t + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2t + 3 \end{cases}$$

有解？并求解.

解 $$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 4 & 1 & 2 & t+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2t+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -2 & -3t+2 \\ 0 & 1 & -2 & -4t+3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -2 & -3t+2 \\ 0 & 0 & 0 & -t+1 \end{pmatrix},$$

当 $t=1$ 时，$r(A) = r(\overline{A}) = 2$，方程组有无穷多解。

4. 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \end{cases}$.

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 4 \end{pmatrix}$,

所以 $x_1=\dfrac{7}{13}$, $x_2=-\dfrac{16}{13}$, $x_3=-\dfrac{4}{13}$.

作业：

P99　习题三

1.(1)(2)(4)　　2.(2)

第二节　n 维向量

(一) n 维向量

定义 由数域F上的n个数 组成的有序数组

$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ 称为数域F上的一个n维向量.

其中的第个 i数 a_i 称为该向量的 第 i个分量.

如: $(1,\ 0,\ 3,\ -7)$ 是一个4维向量.

$(3,\ -1,\ -1)$ 是一个3维向量.

$(7,\ 0,\ 0,\ 5,\ 2)$ 是一个5维向量.

$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ 也称为n维行向量

$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为n维列向量. 如 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (-2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

若$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$则 $\alpha^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

若 $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 则 $\beta^T=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$

向量一般用希腊字母 α，β，γ，η 等表示，

带下标的小写拉丁字母a_i,b_j,c_{ij}等表示向量的分量.

若向量的分量均为有理数,则称为有理数域上的向量;

若向量的分量均为实数,则称为实数域上的向量;

若向量的分量均为复数, 则称为复数域上的向量.

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

中的每一个方程是一个n+1 维向量。

$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \quad b_1)$ 第 1 个方程

$(a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n} \quad b_2)$ 第 2 个方程

$(a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn} \quad b_m)$ 第 m 个方程

线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$

的每一个解是一个5 维向量：$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

$(0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T \quad (0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \quad 0)^T$ 等.

线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$

的每一个解 $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ldots,x_n=c_n$

是一个n 维向量，记为 $\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ 或 $(c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵A的每一行是一个n维向量,称为A的**行向量**;

记为 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

矩阵A的每一列是一个m 维向量,称为A的**列向量**.

记为

$$\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ 或 $\beta_j = (a_{1j}, \quad a_{2j}, \quad \ldots, \quad a_{mj})^T \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

每个n维行向量$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$可看成一个1×n矩阵；每个n维列向量$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$可看成一个n×1矩阵.

定义 当两个n维向量 α和β的对应分量都相等时，称α与β**相等**，记为$\alpha=\beta$即若

$$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n) \qquad \beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

$$\alpha=\beta \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$$

注意：只有**维数相同**，且对应分量相等的两个向量才相等. $(1,1,1,1)\neq(1,1,1)$ $\qquad (1,0,3)=(1,0,3)$

定义 所有分量均为0的向量,称为**零向量**,记为

$$o=(0,0,\ldots,0)$$

1维零向量 (0) 2 维零向量 $(0,0)$

3维零向量$(0,0,0)$ 4维零向量$(0,0,0,0)$

n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$的各分量的相反数组成的n 维向量 称为**α 的负向量**, 记为 $-\alpha$ 即

$$-\alpha=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$$

如$\alpha=(3,-4,0,1)$,

则 $-\alpha=(-3,4,0,-1)$

（二） 向量的线性运算

定义 （向量的加法）两个n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$与$\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)$的各对应分量之和所组成的n维向量，称为向量α 与 β 的和，记为 $\alpha+\beta$

即 $\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \dots,\ a_n+b_n)$

如 $(1\quad 2\quad 3\quad 4)+(-1\quad 0\quad -4\quad 1)=(0,\ \ 2,\ \ -1,\ \ 5)$

注意 1. 可加条件：只有当两个向量的维数相同时才能相加.

（ 2， 6， —1 ）与（ 0， 0， 0， 0 ）不能相加

2. n维向量 ＋ n维向量＝ n维向量

由向量的加法及负向量的定义,可定义向量的减法:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(-b_1,-b_2,\ldots,-b_n)$$

$$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \ldots,\ a_n-b_n)$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\8\end{pmatrix}$$

注意:只有当两个向量的维数相同时才能相减.

(2, − 6, −1)与(0, 0)不能相减.

定义（数与向量的乘法） 设 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 是数域F上的一个n维向量，$k\in F$ 将α各分量都乘以 k 所得到的向量，称为**数k与向量α的乘积**，简称为数乘向量. 记为 $k\alpha$ 即 $k\alpha=(ka_1,\ ka_2,\ \ldots,\ ka_n)$

如 $\alpha=(2,-7,3,0)$，则 $(-3)\alpha=(-6,21,-9,0)$

数 · 向量 ＝ 向量

向量的加法、减法、数乘统称为向量的**线性运算**.

向量的线性运算实际上就是1×n矩阵或 n×1 矩阵之间的线性运算.

向量的线性运算满足以下8条算律：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ 交换律

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ 结合律

(3) $\alpha+o=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=o$

(5) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(7) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(8) $1\alpha=\alpha$

由于矩阵的线性运算满足这8条算律，而向量的线性运算实际上就是1×n矩阵 或 n×1矩阵的线性运算，故向量的线性运算也满足这8条算律.

其中α,β,γ是数域F上的n维向量，o是n维零向量，k,l是数域F中的任意数.

除了上述八条运算规则，显然还有以下性质：

(1') $0\alpha = O, kO = O$ (其中0为数零, k为任意数)；

(2') 若$k\alpha = O$,则或者$k = 0$,或者$\alpha = O$；

(3') 向量方程 $\alpha + x = \beta$ 有唯一解 $x = \beta - \alpha$. 移项规则

例1 设 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$，

其中 $\alpha_1 = (2,5,1)$, $\alpha_2 = (10,1,5)$, $\alpha_3 = (4,1,-1)$，求 α .

解 $3\alpha_1 - 3\alpha + 2\alpha_2 + 2\alpha = 5\alpha_3 + 5\alpha$,

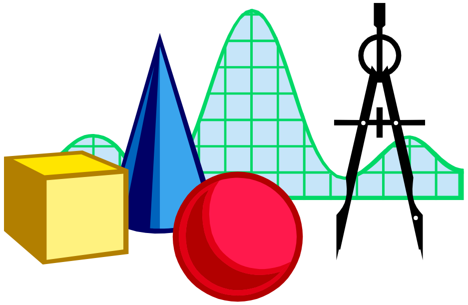
$$6\alpha = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 ,$$

$$\alpha = \frac{1}{6}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3) = (1,2,3) .$$

作业：

P99　习题三

3.



第三节 向量的线性相关性

定义 给定 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 β，若存在 s 个数 $k_1,\cdots,k_s$，使 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$，则称 β 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个**线性组合**，或称 β 能被向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **线性表示**。

如果向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量均可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表出，则称向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表出；

如果两个向量组可以互相表出,则称**等价**。

例 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}\quad \beta=\begin{pmatrix}-5\\4\\-9\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta=-5\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3=\begin{pmatrix}-5\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\9\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\-9\\0\end{pmatrix}$$

称β是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

或β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

例如, $\beta=(2,-1,1)$, $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,0)$, $\alpha_3=(0,0,1)$,

因为 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$,

即β是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合,

或者说 β 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

零向量能被任何向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示:

$$O=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_s\ .$$

向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$中每个向量可被该向量组线性表示:

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+1\cdot\alpha_i+\cdots+0\alpha_s\ .$$

例 $\varepsilon_1 = (1,0), \quad \varepsilon_2 = (0,1)$

$$\forall \alpha = (x, y)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x(1, 0) + y(0, 1) \\ &= x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 \end{aligned}$$

任一2维向量 $\alpha = (x, y)$ 都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2$

线性表示.

例 设 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$

任一向量 $\alpha=(x,y,z)$

$$\begin{aligned}\alpha&=(x,y,z)\\&=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)\\&=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\\&=x\varepsilon_1+y\varepsilon_2+z\varepsilon_3\end{aligned}$$

任一3维向量 $\alpha=(x,y,z)$ 都可以用 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ε_3 线性表示.

一般地，

$$\varepsilon_1=(1,\quad 0,\quad 0,\quad \dots\quad 0)\qquad \varepsilon_2=(0,\quad 1,\quad 0,\quad \dots\quad 0)$$

$$\varepsilon_3=(0,\quad 0,\quad 1,\quad \dots\quad 0)\cdots\ \varepsilon_n=(0,\quad 0,\quad 0,\quad \dots\quad 1)$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$称为$n$ 维单位向量组（n维基本单位向量组）

$\forall\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

$$=(a_1,0,0,\dots,0)+(0,a_2,0,\dots,0)+\dots+(0,0,0,\dots,a_n)$$

$$=a_1(1,0,0,\dots,0)+a_2(0,1,0,\dots,0)+\dots+a_n(0,0,0,\dots,1)$$

$$=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\dots+a_n\varepsilon_n$$

任一n维向量α 都可以由 单位向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$线性表示.

例 设 $\alpha_1=(2,-1,-4,1)^T \quad \alpha_2=(1,2,3,-4)^T$

$\alpha_3=(2,-1,2,5)^T \quad \beta=(2,-1,5,-4)^T$

判断 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解 设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 即

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\-4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2k_1+k_2+2k_3=2\\-k_1+2k_2-k_3=-1\\-4k_1+3k_2+2k_3=5\\k_1-4k_2+5k_3=-4\end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&2&2\\-1&2&-1&-1\\-4&3&2&5\\1&-4&5&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\0&5&0&0\\0&-0&6&9\\0&-0&0&-11\end{array}\right)$$

$\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

方程组无解,

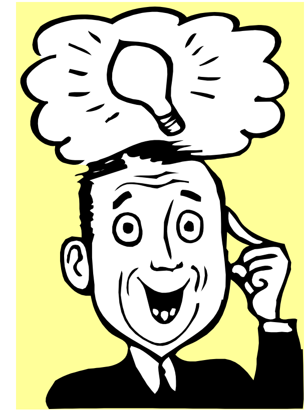
β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

看β是否能由$\alpha_1,\cdots\alpha_n$线性表示,关键是看是否有n个数$x_1,\cdots x_n$,使得 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$

$$\text{即}\quad \underset{\alpha_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} x_1 + \underset{\alpha_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} x_2 + \ldots + \underset{\alpha_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} x_n = \underset{\beta}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$



β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示 $\longleftrightarrow$ 方程组 (*) 有解.

β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示 $\longleftrightarrow$ 方程组 (*) 无解.

如果方程组 (*) 有唯一解，β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示，且表示法唯一；

如果方程组 (*) 有无穷多解，β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示，且表示法不唯一.

对线性方程组 $Ax=b$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

将系数矩阵A分块成列向量 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

则方程组改写为 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$，

线性方程组 $Ax=b$ 解的问题，等价于常数列 b 被 A 的**列向量组**线性表示的问题.

例 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$,

β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\1&1&0&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&0&-2&2\end{pmatrix}$,

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=3\\x_3=-1\end{cases},\quad \therefore\ \beta=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3.$$

例：设$\alpha_1=(1,4,0,2),\alpha_2=(2,7,1,3),\alpha_3=(0,1,-1,a),\beta=(3,10,b,4)$,

求：(1) a、b为何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

(2) a、b为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示方法唯一，写出表达式；

(3) a、b为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示方法不唯一，写出表达 式;

解：设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$,得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ \qquad x_2-x_3=b \\ 2x_1+3x_2+ax_3=4 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=b \\ 2x_1+3x_2+ax_3=4 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 若$b-2\neq 0$,则（*）无解，此时β不能由α_1、α_2、α_3表示。

(2) 若$b-2=0$,

(i)若$a-1\neq 0$,则$r=3=n=3$,(*)有唯一解。

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=0 \end{cases}$$

$$\therefore \beta=-\alpha_1+2\alpha_2.$$

(ii)若$a-1=0$,则$r=2<n=3$,

故(*)有无穷多解。

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=-1\\x_2-x_3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2c-1\\x_2=c+2\\x_3=c\end{cases},$$

$\therefore\beta=-(2c+1)\alpha_1+(c+2)\alpha_2+c\alpha_3$, c为任意的常数.

综上:(1) 当$b\neq2$时,β不能由α_1、α_2、α_3线性表示;

(2) 当$a\neq1,b=2$时,β能由α_1、α_2、α_3唯一地线性表示,

$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$;

(3)当$a=1,b=2$时,β能由α_1、α_2、α_3线性表示,表示方法不唯一

$\beta=-(2c+1)\alpha_1+(c+2)\alpha_2+c\alpha_3$.;

二、 线性相关与线性无关

例

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix}$$

称 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

$$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=o$ 很平常.

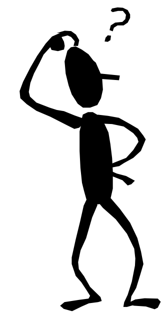
$$2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=o$

很凑巧.

例 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 称 β_1,β_2,β_3 线性无关.

$$0\beta_1+0\beta_2+0\beta_3=0\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$



$0\beta_1+0\beta_2+0\beta_3=o$ 很平常.有没有凑巧的情况?

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=k_1\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k_1\\k_2\\k_2+k_3\end{pmatrix}\underset{\text{如果}}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$$

只有当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，才有 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=o$

即只有 $0\beta_1+0\beta_2+0\beta_3=o$ 没有很凑巧的情况.

定义　对于R^n中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\ (s\geq 1)$

如果存在s个不全为0的实数$k_1,k_2,\ldots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=o$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关.

定义　R^n 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\ (s\geq 1)$

如果不是线性相关，就称为线性无关. 换句话说，

如果只有当$k_1=k_2=\ldots=k_s=0$时，才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=o$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关.

例如 $\alpha_1=(1,1,1)$ $\alpha_2=(3,3,3)$ $0\alpha_1+0\alpha_2=o$

$3\alpha_1-\alpha_2=3(1,1,1)-(3,3,3)=o$ 线性无关?

向量组α_1, α_2线性相关.

$\beta_1=(1,1,0,0)$ $\beta_2=(0,0,1,1)$ $0\beta_1+0\beta_2=o$

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2=k_1(1,1,0,0)+k_2(0,0,1,1)$$

$$=(k_1,k_1,0,0)+(0,0,k_2,k_2)=(k_1,k_1,k_2,k_2)=(0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow k_1=0,\quad k_2=0$$

只有当系数 $k_1=k_2=0$ 时, 才有 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=o$

因此向量组β_1, β_2线性无关.

例 $\alpha=(2,-1)^T \quad \beta=\left(1,-\frac{1}{2}\right)^T$

$\frac{1}{2}\alpha-\beta=o$ 即 $\frac{1}{2}\alpha+(-1)\beta=o$

α，β 线性相关.

例 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix},$

有 $3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=O$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

如何判别一个向量组是否线性相关？

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \alpha_s=\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$ 为 R^n 中的向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1s}x_s=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2s}x_s=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{ns}x_s=0 \end{cases} \quad (3.1)$$

有非零解.

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 上述齐次线性方程组仅有零解.

证 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$ $\ldots\alpha_s=\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关（无关）

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为0的数 $k_1,\ldots,k_s$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=o$

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为0的数 $k_1,\ldots,k_s$ 使 $k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\ldots+k_s\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为0的数 $k_1,\ldots,k_s$ 使

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1s}k_s=0 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2s}k_s=0 \\ \vdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\ldots+a_{ns}k_s=0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组(3.1)有非零解.（只有零解）

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}\ \cdots\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关（无关）

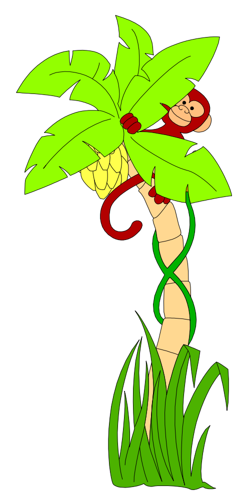
$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组

有非零解（只有零解）

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1s}x_s=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2s}x_s=0\\\quad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{ns}x_s=0\end{cases}\quad(3.1)$$

$$\Longleftrightarrow r\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ns}\end{pmatrix}<s\ \ (=s)$$

$$\begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_s\end{array}$$



当 $s=n$ 时，$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$ $\ldots\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关（无关）

$$\Longleftrightarrow \text{秩}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{matrix} \end{array} < n \; (=n) \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{matrix} \end{array} = 0 \; (\neq 0)$$

上述定理给出了判断向量组是否线性相关或者无关的方法, 通常是通过求解方程组实现.

1、首先, 将向量组按照次序排起来得到矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s),$$

2、用高斯消元法求解方程 $Ax = 0$,

3、如果有非零解则是相关的，否则是无关

特别的，如果矩阵是方的，可以借助**Crammer**法则实现，行列式为零，则向量组相关，否则无关。

例3 判断下列向量组的线性相关性:

(1) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix},$

(2) $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (1,3,6),$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(A) = 2 < 3$, 线性相关.

（2） $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(1,3,6)$,

解 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$r(A)=3$, 线性无关.

或 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ 故线性无关.

注意 (1) 写为**列**向量, 拼成矩阵;

(2) 只作**行**变换。

例 $\varepsilon_1=(1,\quad 0,\quad 0,\quad \dots\quad 0)\qquad \varepsilon_2=(0,\quad 1,\quad 0,\quad \dots\quad 0)$

$\varepsilon_3=(0,\quad 0,\quad 1,\quad \dots\quad 0)\cdots\ \varepsilon_n=(0,\quad 0,\quad 0,\quad \dots\quad 1)$

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}\neq 0$$

$\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 线性无关.

例：包含零向量的向量组一定线性相关：

$$0\cdot\alpha_1+\cdots+1\cdot O+\cdots+0\cdot\alpha_s=O.$$

例：单个向量线性相关当且仅当它为零向量；（单个非零向量线性无关）.

$$k\alpha=O,k\neq0\ \Rightarrow\ \alpha=O.$$

定理 在 $s\geq2$ 情况下，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量能被其余向量线性表示。

证 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，即存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=O,$$

不妨设 $k_1\neq0$，则 $\alpha_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\dfrac{k_s}{k_1}\alpha_s$，

即 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示；

反过来，不妨设α_1可由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，

即 $$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

于是 $$-1\cdot\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = O,$$

故$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关。

推论：向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s (s \geq 2)$线性无关的充分必要条件是其中任何一个向量都不能被其余向量组成的向量组线性表示.

特别的，两个向量α、β组成的向量组线性相关的充分必要条件是α和β的分量对应成比例.

例　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 则$\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$也线性无关。

证　设有一组数k_1,k_2,k_3， 使

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=O,$$

即 $$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=O,$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 故有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases},$$ 解之得 $k_1=k_2=k_3=0$,

由定义，$\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

例 无论$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是否线性无关, 向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3,\ \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2,\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$$

必线性相关。

证 用矩阵形式,

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

令 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

例 无论$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性无关, 向量组

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_3$$

必线性相关。

故 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, 有非零解，比如 $k_1=1,k_2=1,k_3=-2$,

所以β_1,β_2,β_3线性相关.

或$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_3)+(\alpha_2+\alpha_3)$

$$=(\alpha_1+\alpha_3)+[(\alpha_1+\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_2)]$$

$$=\beta_3+(\beta_3-\beta_2)=2\beta_3-\beta_2$$

即$\beta_1+\beta_2-2\beta_3=0$ 所以β_1,β_2,β_3线性相关.

定理 若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, 而$\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则$\beta$能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出, 且表法唯一。

证 $\because$ $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关,

$\therefore$ 存在不全为零的数 $k_0,k_1,\cdots,k_s$, 使

$$k_0\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=O,$$

若$k_0=0$, 则 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=o$,

$\because\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, $\therefore k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,

矛盾. 所以 $k_0\neq 0$, $\therefore$ $\beta=-\dfrac{k_1}{k_0}\alpha_1-\cdots-\dfrac{k_s}{k_0}\alpha_s$,

即β能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出。

定理 若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, 而$\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则$\beta$能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出, 且表法唯一。

证 再证表法唯一。设有两种表示法,

$$\beta = l_1\alpha_1+\cdots+l_s\alpha_s = k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s ,$$

$$\Rightarrow \quad (l_1-k_1)\alpha_1+\cdots+(l_s-k_s)\alpha_s = O$$

由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, $\therefore\ l_i-k_i=0, i=1,\cdots,s$,

即 $l_i=k_i, i=1,\cdots,s$, 即表法唯一。

定理 如果向量组中有一部分向量(称为部分组)线性相关,则整个向量组也线性相关.

证 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_s$ 中有一部分线性相关. 不妨设其中前r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性相关,存在不全为零的数 $k_1,k_2,\ldots,k_r$ 使

$$\underline{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+0\alpha_{r+2}+\cdots+0\alpha_s}=o$$

系数:$\underbrace{k_1,k_2,\ldots,k_r}_{\text{至少一个不等于0}},0,0,\ldots,0$不全为零

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_s$ 线性相关

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s$
中有一部分线性相关

$\Rightarrow$

整个向量组
$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s$
线性相关

逆否命题:

整个向量组
$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s$
线性无关

$\Rightarrow$

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s$
中任一部分 都线性无关

如果一个向量组线性无关, 则其任意部分组也线性无关.

部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关

整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关

定理 设n维向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}\quad \cdots\ \alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}\quad (1)$$

线性无关,则在每个向量上再添m个分量所得到的n+m维向量组

$$\alpha'_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{n1}\\a_{n+1\,1}\\\vdots\\a_{n+m\,1}\end{pmatrix}\quad \alpha'_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{n2}\\a_{n+1\,2}\\\vdots\\a_{n+m\,2}\end{pmatrix}\quad \cdots\ \alpha'_2=\begin{pmatrix}a_{1s}\\\vdots\\a_{ns}\\a_{n+1\,s}\\\vdots\\a_{n+m\,s}\end{pmatrix}\quad (2)$$

也线性无关。

即 向量组(1)线性无关,则"加长"后得到的

向量组组(2)也线性无关.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}\cdots\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\dots+a_{1s}k_s=0\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\dots+a_{2s}k_s=0\\\qquad\vdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\dots+a_{ns}k_s=0\end{cases}$$

即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_s\alpha_s=o$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关.

$\therefore k_1=k_2=\dots=k_s=0$

证 设 $k_1\alpha_1'+k_2\alpha_2'+\dots+k_s\alpha_s'=o$

即

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{n1}\\a_{n+11}\\\vdots\\a_{n+m1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{n2}\\a_{n+12}\\\vdots\\a_{n+m2}\end{pmatrix}+\dots+k_s\begin{pmatrix}a_{1s}\\\vdots\\a_{ns}\\a_{n+1s}\\\vdots\\a_{n+ms}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\dots+k_s\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha_1',\alpha_2',\dots,\alpha_s'$ 线性无关

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}\cdots\ \alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}\quad(1)$$

一个向量组线性无关，则“加长”后得到的量组也线性无关.

$$\alpha_1'=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{n1}\\a_{n+1\,1}\\\vdots\\a_{n+m\,1}\end{pmatrix},\ \alpha_2'=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{n2}\\a_{n+1\,2}\\\vdots\\a_{n+m\,2}\end{pmatrix}\cdots\ \alpha_2'=\begin{pmatrix}a_{1s}\\\vdots\\a_{ns}\\a_{n+1\,s}\\\vdots\\a_{n+m\,s}\end{pmatrix}\quad(2)$$

一个向量组线性相关，则“缩短”后得到的量组也线性相关.

组（1）线性无关 $\Rightarrow$ 组（2）线性无关

组（2）线性相关 $\Rightarrow$ 组（1）线性相关

有关线性相关与无关的一些结论：

1. 定理　若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出，且$s>t$，则向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$必线性相关.

推论　若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\cdots\beta_t$线性表示，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$s\le t$.

2. 向量组的个数如果多于维数，则必线性相关。

例如：$\alpha_1=(-1,5)$ $\alpha_2=(2,-1)$ $\alpha_3=(3,1)$ 线性相关

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\quad \beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\\0\end{pmatrix}\quad \beta_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad \beta_4=\begin{pmatrix}7\\9\\-1\\1\end{pmatrix}\quad \beta_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \beta_6=\begin{pmatrix}6\\-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

线性相关

5个3维向量 线性相关；

2个1维向量, 3个2维向量, 4个3维向量 线性相关；

n+1个 n维向量线性相关.

例　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，证明向量组 α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，…，$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s$ 线性无关.

证　设

$$\boxed{k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\ldots+k_s(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)=o}$$

整理,得

$$\underline{(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_s)}\alpha_1+\underline{(k_2+k_3+\ldots+k_s)}\alpha_2+\underline{(k_3+\ldots+k_s)}\alpha_3+\ldots+\underline{k_s}\alpha_s=o$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关, $\therefore$

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+\ldots+k_s=0 \\ \qquad k_2+k_3+\ldots+k_s=0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad k_{s-1}+k_s=0 \\ \qquad\qquad\qquad k_s=0 \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

$\therefore$ 方程组只有零解

$$\boxed{\therefore k_1=k_2=\ldots=k_s=0}$$

$\therefore \alpha_1$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，…，$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s$ 线性无关.

例 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ $(s\geq 2)$线性无关,讨论向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\cdots$, $\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s$, $\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$ 的线性相关性.

解 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_s\beta_s=o$ 即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\ldots+k_{s-1}(\alpha_{s-1}+\alpha_s)+k_s(\alpha_s+\alpha_1)=o$$

整理,得

$$(\underline{k_1+k_s})\alpha_1+(\underline{k_1+k_2})\alpha_2+(\underline{k_2+k_3})\alpha_3+\ldots+(\underline{k_{s-1}+k_s})\alpha_s=o$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关,

$$\therefore \begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ \quad\vdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \\ k_1+k_s=0 \end{cases}$$

解 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_s\beta_s=o$ (*)

得 $\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ \quad\vdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \\ k_1+k_s=0 \end{cases}$ (**) 其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{s\times s}$$

$$=A_{s1}+A_{ss}=(-1)^{s+1}M_{s1}+(-1)^{s+s}M_{ss}=(-1)^{s+1}+1$$

当s为奇数时, $D=2\neq 0$ 方程组(**)仅有零解,

$\therefore k_1=k_2=\ldots=k_s=0$ 此时 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 线性无关.

当s为偶数时, $D=0$ 方程组(**)有非零解, 故存在不全为0的 $k_1,k_2,\ldots,k_s$ 使 (*) 式成立, 此时 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 线性相关.

第四节 向量组的秩

定义： 如果向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量均可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则称向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示；

如果（I）（II）两个向量组可以互相表示，则称向量组(I)和向量组(II)等价，记为 $(\mathrm{I})\cong(\mathrm{II})$.

等价关系的性质：

(1)反身性：任何一个向量组都和自身等价；

(2)对称性：如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_t$等价,则$\beta_1,\cdots,\beta_t$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$等价.

(3)传递性：如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_t$等价,而$\beta_1,\cdots,\beta_t$与$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$等价，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$等价.

例： $(I):\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0),$

$(II):\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1),$

验证向量组(I)和(II)等价.

证：$\because (II)$是基本向量组，$\therefore$ 每一个α_i都可以由(II)线性表示，

其中$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$， $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$， $\alpha_3=\varepsilon_1$，

即向量组(I)可由(II)线性表示；

同时易得$\varepsilon_1=\alpha_3$， $\varepsilon_2=\alpha_2-\alpha_3$， $\varepsilon_3=\alpha_1-\alpha_2$，

即向量组(II)可由(I)线性表示；

$\therefore$ 向量组(I)和(II)等价.

1. 定理　若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出，且$s>t$，则向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$必线性相关.

推论　若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\cdots\beta_t$线性表示，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$s\le t$.

两个线性无关且彼此等价的向量组，必含有相同个数的向量.

向量组的个数如果多于维数, 则必线性相关。

定义：给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_s$

从中取出r个向量 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2}\ \cdots,\ \alpha_{j_r}$

即 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的一个部分组.

若这个部分组满足：

(1) $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_r}$ 线性无关.

(2) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\ldots,\alpha_s$ 中任意一个向量 α_j

都可由 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_r}$ 线性表示.

即在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_s$ 中,再取一个向量,

添加到此部分组中, 所得到的新的部分组

$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_r},\alpha_j$ 都线性相关.

则称 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_r}$ 为原向量组的一个极大线性无关组.

例：$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(2,1,0)$，

求α_1，α_2，α_3的极大无关组.

解：易知α_1，α_2线性无关，而$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，

$\therefore \alpha_1,\alpha_2$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组.

类似可证α_1,α_3也是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组；$\alpha_2,\alpha_3$也是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组.

由此例可知，

一个向量组的极大无关组不一定唯一.

例如，设有向量组

$$\alpha_1=(1,0,2),\ \alpha_2=(0,1,1),\ \alpha_3=(3,-1,4),\ \alpha_4=(1,1,1),$$

$$\det(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\2&1&4\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$必线性相关,（向量的个数大于维数）

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组.

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$也是一个极大无关组.

注：

1、全由零向量组成的向量组没有极大无关组.

2、一个向量组线性无关的充分必要条件是它的极大无关组是它本身.

定理 一个向量组的任一极大无关组与该向量组本身等价.

证明 设该向量组为$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ (I)，而$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ $(r \le s)$ (II)是它的一个极大无关组,

首先, (II)是(I)的部分组, 当然可以被(I)线性表出.

其次, (I)中$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 可由(II)线性表出,

其余的向量 α_k $(r+1 \le k \le n)$,

由于$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_k$ 线性相关,

故α_k 可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表出, 从而 (I) 可由(II) 线性表出.

因此 (I) 与(II) 等价.

此定理说明讨论向量组之间的关系时，可由它的极大无关组代替，不必考虑“多余”的向量，使问题简化.

推论1.向量组中的任意两个极大无关组等价

证：设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的两个极大无关组分别为$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$和$\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jt}$，　由上面定理得

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}\}$$

同时$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jt}\}$

由等价的传递性,$\{\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}\}\cong\{\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jt}\}$

由前面推论可知,

推论2 向量组任意两个极大无关组所包含的向量个数相同。

定义 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数,称为该向量组的**秩**, 记为

$r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)$ 或秩$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)$

例：向量组： $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(2,1,0)$ ，

的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

若向量组(I)和(II)等价,且向量组(I)和(II)都线性无关,则s=t（即向量的个数相等）

例如，设有向量组

$$\alpha_1=(1,0,2),\ \alpha_2=(0,1,1),\ \alpha_3=(3,-1,4),\ \alpha_4=(1,1,1),$$

$$\det(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\2&1&4\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$必线性相关,（向量的个数大于维数）

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组.

$$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$$

注：

1\. 规定只含零向量的向量组的秩为零.

2.若单个向量$\alpha \neq 0$，则$r(\alpha)=1$.

3.若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则它的极大无关组是它本身，故$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$.

定理： 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$;

向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<s$.

定理 如果 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\} \cong \{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t\}$

则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s) = r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)$

等价的向量组 有相同的秩.

证 设 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=r$ 秩$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)=p$

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 的一个极大无关组为 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r}$

则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\} \cong \{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r}\}$

线性无关

$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 的一个极大无关组为 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\dots,\beta_{i_p}$

则 $\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t\} \cong \{\beta_{i_1},\beta_{i_2},\dots,\beta_{i_p}\}$

线性无关

$\therefore \{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r}\} \cong \{\beta_{i_1},\beta_{i_2},\dots,\beta_{i_p}\}$ $\therefore r = p$

即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s) = r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)$

定理 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 线性表示, 则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)$$

证 设 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=r$ 秩$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)=p$

$$\begin{tikzcd}
\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t \arrow[d, leftrightarrow] \\
\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r} \arrow[r] & \beta_{i_1},\beta_{i_2},\dots,\beta_{i_p}
\end{tikzcd}$$

$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r}$ 可以由 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\dots,\beta_{i_p}$ 线性表示.

$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r}$ 线性无关 $\therefore r\le p$

即 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)\le$ 秩$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)$

（二）向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义 矩阵的行向量组的秩称为矩阵的行秩；

矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩.

$$A=\begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

A的行向量组为 $\begin{cases}\alpha_1=(1\quad 0\quad 1\quad 0) \\ \alpha_2=(0\quad 1\quad 2\quad 3)\end{cases}$

$\alpha_3=(0\quad 0\quad 0\quad 0)$

$\alpha_4=(0\quad 0\quad 0\quad 0)$

A的行秩$=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

A的列向量组为

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\quad \beta_4=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

A的列秩$=$

$=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=2$

秩(A)$=2$

由此例可得一般结论: 阶梯形矩阵的行秩等于列秩,
其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数.

问题：矩阵的行秩 ? = 矩阵的列秩

定理：矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩。
证明：略

定理 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列秩。

定理2 对矩阵A作初等行变换化为B, 则A与B的任何对应的列向量组有相同的线性相关性, 即:

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n]=B,$$

则向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\zeta_{i_1},\zeta_{i_2},\cdots,\zeta_{i_r}$ $(1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n)$有相同的线性相关性.

定理2表明A的列向量的线性相关性可以通过它对应的阶梯行矩阵的列得到。可以用下面的例子来说明。

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \quad \text{对应}$$

的阶梯行为

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=[\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5]$$

由观察得到 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4$ 是 U 的一个极大无关组, 所以得到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 也 是 A 的列向量组的一个极大无关组。

此外，从阶梯形矩阵U 中容易凑得

$\zeta_3 = \zeta_1 + \zeta_2, \quad \zeta_5 = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_4,$ 所以对应

得到 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4.$

注意到，将向量组按列排起来就是一个矩阵，因此

定理2也提供了求向量组的秩及其极大线性无关组的一个简便而有效的方法，即解决了下面的问题

问题：给定一个向量组，求它的一个极大无关组，并将其余向量用这个极大无关组线性表示。

定理： 矩阵的行秩 = 矩阵的列秩 = 矩阵的秩，

将**向量组的秩**的计算，转化为**矩阵的秩**的计算。

基本问题：

给定一个向量组，求它的一个极大无关组，并将其余向量用这个极大无关组线性表示。

注：

1、矩阵的初等行（列）变换不改变 其列（行）向量组的线性关系。

2、求列向量组的极大无关组的方法：

（1）以向量组中各向量作为矩阵的列；

（2）对所构成的矩阵施行行初等变换，将矩阵化为阶梯型矩阵；

（3）阶梯型矩阵中，每一台阶取一列，则对应的向量所构成的向量组即为极大无关组。

例1 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix},$$

求一个极大无关组，并将其余向量用这个极大无关组线性表示.

解

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

只做行变换，化为阶梯形

$$
=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大无关组,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_4 \ ,$$

$$\overline{A} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \ \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \ ,$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & \boxed{2} & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_5 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_4 ,$$

$$\overline{A} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore\ \alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 .$$

例2 求下面向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-2\\8\\-9\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\7\end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\therefore$极大无关组为 α_1，α_2，

秩为2。

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{7}{2}\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 .$$

矩阵秩的一些结论：

1、定理 设矩阵A, B可以相乘, 则有

$$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}.$$

证 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \vdots & b_{1s} \\ b_{21} & \vdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \vdots & b_{ns} \end{pmatrix}$,

则 $AB = (b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \cdots, b_{1s}\alpha_1 + \cdots + b_{ns}\alpha_n)$,

即AB的每个列向量是A的列向量组的线性组合,

则 $AB=(b_{11}\alpha_1+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\cdots,b_{1s}\alpha_1+\cdots+b_{ns}\alpha_n)$,

即AB的每个列向量是A的列向量组的线性组合,

若向量组(I)能被向量组(II)线性表出, 则秩(I) $\leq$ 秩(II).

故 $r(AB)\leq r(A)$,

同理有 $r(AB)\leq r(B)$,

$\therefore \ r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$.

推论 若P,Q为可逆矩阵, 则有 $r(PA)=r(AQ)=r(A)$.

证

$$\left.\begin{array}{l} B=PA \Rightarrow r(B)\leq r(A) \\ A=P^{-1}B \Rightarrow r(A)\leq r(B) \end{array}\right\} \Rightarrow r(A)=r(B).$$

2、设A和B都是$m\times n$矩阵，则$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$.

证：设$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$和$\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$分别是$A$和$B$的列向量组的极大无关组，

则$A\pm B$的列向量组$\alpha_1\pm\beta_1,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n$可由$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$和$\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$线性表示，

$\therefore r(\alpha_1\pm\beta_1,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n)\le r+s$

即$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$.

若向量组(I)能被向量组(II)线性表出, 则秩(I) $\le$ 秩(II).

3、 $A_{m\times n}$和$B_{n\times t}$， 若$AB=0$,则$r(A)+r(B)\le n$. 证略.

4、 $A_{m\times n}$和$B_{n\times t}$,

$$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}.$$ 证略.

向量空间的基和坐标

向量空间的概念

定义 设V是n维向量集合，且非空，若

①若$\forall\ \alpha$，$\beta\in V$，则$\alpha+\beta\in V$；

②若$\forall\ \alpha\in V$，$\lambda\in \mathrm{R}$，则$\lambda\alpha\in V$；

则称V是一个向量空间.

注：定义中的（1）、（2）两条称为对加法及数乘两种运算封闭.

例1 验证下面的向量空间.

（1） 3维向量的全体R^3是一个向量空间.

（2）n维向量的全体R^n也是一个向量空间.

例2 验证集合

$$\mathrm{V}_0=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

是否是一个向量空间.

解　因为$\forall\ \alpha\in\mathrm{V}_0,\beta\in\mathrm{V}_0$，　$\lambda\in R$,有

$$\alpha+\beta=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}+(0,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$$

$$=(0,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{V}_0.$$

$$\lambda\alpha=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{V}_0.$$

故V_0是一个向量空间.

3 设α和 β为两个已知的 n维向量，验证集合

$$V = \{x = \lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda , \mu \in R\}$$

是一个向量空间.

解 取$x_1=\lambda_1\alpha+\mu_1\beta$, $x_2=\lambda_2\alpha+\mu_2\beta\in V$, $k\in R$.则有

$$x_1+x_2 = (\lambda_1+\lambda_2)\alpha + (\mu_1+\mu_2)\beta\in V,$$

$$k x_1=(k\lambda_1)\alpha +(k\mu_1)\beta\in V.$$

故V是一个向量空间.

注：我们称如上构成的向量空间为由α、β所生成的向量空间.

验证集合

$$\mathrm{V}_1 = \{x = (1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in R\}.$$

解　因为$\forall\ \alpha \in \mathrm{V}$,有

$$2\alpha = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n)^{\mathrm{T}} \notin \mathrm{V}_1,$$

故V_1不是一个向量空间

.

定义5.2 设有向量空间V_1及V_2，若$V_1 \subset V_2$，就称V_1是V_2的子空间.

(1) 任何由 n 维向量所组成的向量空间V,总有$V \subset R^n$,所以这样的向量空间总是R^n的子空间.

(2) 例2中的V_0也是R^n的子空间.

(3) 例3中的由n 维向量α和β 所生成向量空间也是R^n的子空间.

例 n元基本向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

因为对任意$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in R^n$，均有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是向量空间$R^n$ 的一组基（称之为R^n 的自然基）。

α在自然基下的坐标为:$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$.

由于n+1个n维向量线性相关，因此任何n个线性无关的n维向量都可以是向量空间 R^n 的一个基.

注：

1. R^n 的基不唯一；
2. α在给定的基下的坐标是唯一的。

例 已知 R^3中的一个向量组 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

其中：$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T$

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是R^3 的一个基；

（2）求向量 $\alpha=(1,2,3)^T$ 在基B下的坐标

解 （1） 只须证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 ，

所以是 R^3的一个基；

一、向量空间的基和坐标

定义 R^n是n维向量空间, 向量组$B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}\subset R^n$

若（1）B线性无关;

（2）R^n中任一向量α均可由 B 线性表示,

即存在 n在个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ ，使

$$\alpha=a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_n\beta_n \qquad (3.1)$$

则称 B是R^n的一组**基**（基底），

称有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$为向量α在基B下的坐标，记作 $\alpha_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$

(3.1)的矩阵形式：$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=B\alpha_B.$

显然B可逆.

例 n元基本向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

因为对任意$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in R^n$，均有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是向量空间$R^n$ 的一组基（称之为R^n 的自然基）。

α在自然基下的坐标为:$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$.

由于n+1个n维向量线性相关，因此任何n个线性无关的n维向量都可以是向量空间 R^n 的一个基.

注：

1. R^n 的基不唯一；

2. α在给定的基下的坐标是唯一的。

例 已知 R^3中的一个向量组 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

其中：$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T$

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是R^3 的一个基；

（2）求向量 $\alpha=(1,2,3)^T$ 在基B下的坐标

解 （1） 只须证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 ，

所以是 R^3的一个基；

例 已知 R^3中的一个向量组 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

其中：$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T$

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是R^3 的一个基；

（2）求向量 $\alpha=(1,2,3)^T$ 在基B下的坐标

解 （2）设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

$$即(\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

法1:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

故α在基下的坐标为 $(3,-1,-1)^T$。

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

法2:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

法3： $AX = B$

$$\left[A \middle| B\right] \to \cdots \to \left[E \middle| X\right]$$

略.

二、基变换公式与过渡矩阵

问题：在n 维线性空间中，任意n 个线性无关的向量都可以作为的一组基。对于不同的基，同一个向量的坐标是不同的。

那么，同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系呢？换句话说，随着基的改变，向量的坐标如何改变呢？

定义 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是n维向量空间 R^n 的两个基，

设
$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

令
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则称 A是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**过渡矩阵**。

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上式可形式地记为:

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

称上面两式为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的**基变换公式**。

例 已知 R^3 的一组基

$$\beta_1=(1,2,1)^T,\beta_2=(1,-1,0)^T,\beta_3=(1,0,-1)^T$$

求 R^3 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵。

解 因为 $\beta_1=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3$

$\beta_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2$

$\beta_3=\varepsilon_1\qquad-\varepsilon_3$

故 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

其中$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$是所求的过渡矩阵.

性质

（1）过渡矩阵是可逆矩阵；

（2）若A是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，则 A^{-1}是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵.

定理 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是R^n的两个基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 A。任取 $\alpha\in R^n$，设 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，

则 $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ 称此式为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**坐标变换公式**。

证：

$$\because \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

而$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$

$$\therefore (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$ 即 $$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

例 已知 R^3的两组基：

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\ \alpha_2=(0,1,1)^T,\ \alpha_3=(0,0,1)^T$$
$$\beta_1=(1,0,1)^T,\ \beta_2=(0,1,-1)^T,\ \beta_3=(1,2,0)^T$$

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

(2) 求 $\alpha=(1,0,0)^T$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

解（1） 设 A为所求过渡矩阵，则

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$$

由于 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 是3阶可逆矩阵。于是

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$$

$$\alpha_1 = (1,1,1)^T,\ \alpha_2 = (0,1,1)^T,\ \alpha_3 = (0,0,1)^T$$

$$\beta_1 = (1,0,1)^T,\ \beta_2 = (0,1,-1)^T,\ \beta_3 = (1,2,0)^T$$

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

例 已知 R^3的两组基：

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\ \alpha_2=(0,1,1)^T,\ \alpha_3=(0,0,1)^T$$
$$\beta_1=(1,0,1)^T,\ \beta_2=(0,1,-1)^T,\ \beta_3=(1,2,0)^T$$

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

(2) 求 $\alpha=(1,0,0)^T$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

解（2） $\because$ $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]Q$

$$\text{其中}Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]Q \qquad Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\text{而}\,\alpha=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

即 α 关于 β_1,β_2,β_3 的坐标为 $(2,2,-1)^T$.

§3.5　线性方程组解的结构

对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

当 $r(\overline{A}) = r(A) <$ n时，方程组 有无数多解.

此时，方程组的不同解之间有什么关系？

如何表达它的所有解？

（一）齐次线性方程组解的结构

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{n2} = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

方程的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{n2} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{X \\ n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{O \\ m\times 1}}$$

(3.2)可简写为 $AX = O$

一般地，齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

的解有性质：

(1) 若 η_1, η_2 都是方程组(3. 2)的解， 则 $\eta_1 + \eta_2$ 也是(3. 2)的解.

(2) 若 η 是方程组(3. 2)的解， 对任意常数c，$c\eta$ 也是(3. 2)的解.

(3) 若 η_1, η_2 都是方程组(3. 2)的解， 则对任意常数 c_1, c_2，有 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ 也是(3. 2)的解.

证　方程组
$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

的矩阵形式为
$$\underset{\uparrow\ A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{\uparrow\ X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{\uparrow\ O}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}}$$

即 $AX = O$

因为η_1, η_2都是方程组(3.2)的解,所以 $A\eta_1 = O$
$A\eta_2 = O$ 所以$A(\eta_1 + \eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = O + O = O$

即$\eta_1 + \eta_2$也是(3.2)的解.

证 方程组
$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

的矩阵形式为
$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{O}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}}$$

即 $AX = O$

设η是方程组(3.2)的解，则 $A\eta = O$

所以 $\underline{A(c\eta)} = c(A\eta) = cO = \underline{O}$

即 $c\eta$ 也是(3.2)的解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

(1) 若 η_1, η_2 都是方程组(3.2)的解，则 $\eta_1 + \eta_2$ 也是(3.2)的解.

(2) 若 η 是方程组(3.2)的解，对任意常数c，$c\eta$ 也是(3.2)的解.

(3) 若 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ 都是方程组（3.2)的解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意s个常数，则 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_s\eta_s$ 也是(3.2)的解.

定义 齐次线性方程组(3.2)的一组解向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$

如果满足：

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关；

(2) (3.2)的任一解向量均可被 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性表示，

则称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 为(3.2)的一个基础解系。

由定义知：

1.基础解系即为全体解向量组的一个极大无关组。

2.如果 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 是（3.2）的一个基础解系，则

$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_s\eta_s$ 就表示（3.2）的所有解.

若齐次线性方程组(3.2）只有零解，
则基础解系不存在。

定理 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$,若 $r(A)<n$,则齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 存在基础解系,且含 $n-r$ 个向量。

证: 1)先证存在$n-r$个线性无关的解向量. 按高斯消元法的步骤对A作初等行变换, 将A化为行简化的阶梯阵U, 不失一般性, 可设

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

现对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入 $\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$.

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组解空间的一个基.

(1)证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关.

由于 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

线性无关,

所以 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 亦线性无关.

(2)证明解空间的任一解都 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示.

设$x=\xi=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_r & \lambda_{r+1} & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}^T$为上述方程组的一个解．再作 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 的线性组合，

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是$Ax=0$ 的解,故η 也是$Ax=0$的解.

下面来证明 $\xi=\eta$.

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_{n-r}$$

$$= \lambda_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

由于ξ与η都是方程$Ax = 0$的解,而$Ax = 0$又等价于

方程组 $\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

所以ξ与η都是此方程组的解，

由 $\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda_1 = c_1, \cdots, \lambda_r = c_r.$

附：求基础解系的一般方法

第一步：对方程组(1)的系数矩阵A作初等行变换，

化A为行最简形．不妨设

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

第二步：写出方程组(1)的一般解：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

$x_{r+1}, x_{r+1}, \ldots\ldots, x_n$ 为自由未知量.

第三步：用 $n-r$ 组数 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$

代入自由未知量 $(x_{r+1}, x_{r+1}, \ldots\ldots, x_n)$,

得出方程组(1)的 $n-r$ 解：

$$
\begin{cases}
\eta_1 = (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \cdots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \cdots, 0) \\
\eta_2 = (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \cdots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \cdots, 0) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{n-r} = (-c_{1n}, -c_{2n}, \cdots, -c_{rn}, 0, 0, \cdots, 1)
\end{cases}
$$

向量组$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$即为方程组(1)的一个基础解系.

例 求齐次线性方程组的通解 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

解

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

对应的方程组组为 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -x_2 + 5x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$

$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\eta_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为基础解系, 通解为 $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$ $\quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$

$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

η_1, η_2, η_3是方程组的基础解系.

方程组的全部解为:

$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$

例 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ $\quad \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \frac{3}{5}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 + \dfrac{7}{5}x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - \dfrac{4}{5}x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{7}{5}x_3 + x_4 \\ x_2 = \dfrac{4}{5}x_3 \end{cases}$

例 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$ $\quad \overline{A} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

对应的方程组为 $\begin{cases} x_1+\dfrac{7}{5}x_3-x_4=0 \\ x_2-\dfrac{4}{5}x_3=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1=-\dfrac{7}{5}x_3+x_4 \\ x_2=\dfrac{4}{5}x_3 \end{cases}$

基础解系为

$$\eta_1=\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \eta_2=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

所有解为:

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2=c_1\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

例 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ 解 $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 5 & 0 \end{array}\right)$

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

对应的方程组组为 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方程组的通解为 $c\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

小结. 对于齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$. 设 $r(A)=r$，则

(I)　$r=n$，有唯一解 (即零解)；此时无基础解系

(**II**)　$r<n$，有无穷解，即有非零解.

此时基础解系含 $n-r$ 个线性无关解向量.方程组一定有 $n-r$ 个自由未知量

(III)基础解系不唯一.如果$r(A)=r$,任意 $n-r$ 个线性无关解向量都可以作为基础解系

二、非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad Ax = b \quad (**)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

称 $Ax = \theta$ (*) 为 (**) 的导出组。

所以:

非其次方程组有解 $\Leftrightarrow$

向量b可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,b$ 等价

$\Leftrightarrow$

矩阵A与矩阵 $\overline{A}$ 的秩相等

非齐次线性方程组解的性质:

（1）若 ξ_1,ξ_2 为 $(**)$ 的解，则 $\xi_1-\xi_2$ 是 $(*)$ 的解.

证明 $\because A\xi_1=b$， $A\xi_2=b$，

$$\therefore \quad A(\xi_1-\xi_2)=A\xi_1-A\xi_2=b-b=\theta .$$

（2）若 ξ 为 $(**)$ 的解，η 为 $(*)$ 的解，则 $\xi+\eta$ 是 $(**)$ 的解.

证明 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=b+\theta=b$.

定理 如果 ξ_0 是 (**) 的一个特解，那么(**) 的任一解 ξ可表为 $\xi=\xi_0+\eta$，其中 η 是导出组 (*) 的解.
因此，当 η 取遍导出组的全部解时, $\xi_0+\eta$ 就给出 (**) 的全部解。

证明 $\xi=\xi_0+(\xi-\xi_0)$，

由上述性质可知，$\xi-\xi_0$ 为导出组 (*) 的解，记为 η，

则 $\xi=\xi_0+\eta$.

当 η 取遍导出组的全部解时, $\xi_0+\eta$ 就给出 (**) 的全部解。

当 η 取遍导出组的全部解时, $\xi_0+\eta$ 就给出(**)的全部解。

设非齐次线性方程组 $Ax=b$ (**)

满足 $r(\overline{A})=r(A)=r<n$， 则有无穷多解,

全部解的求法： 导出组 $Ax=\theta$ (*)

(1) 求出导出组 (*) 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ ，

(2) 求出原方程组 (**) 的一个特解 ξ_0 ，

则 (**) 的全部解为

$$x=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r} \text{ ,}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

•由解的结构定理可见，当$r(A)=r(\overline{A})=r<n$时，有

$\boxed{Ax=b\text{的通解}}=\boxed{Ax=b\text{的一个特解}}+\boxed{Ax=0\text{的通解}}$

即$Ax=b$的通解为：

$$x=\eta^{*}+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\xi_i,\qquad c_1,c_2,\cdots c_{n-r}\text{为任意常数.}$$

其中：η^{*}为$Ax=b$的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为$Ax=0$的基础解系.

例 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 导出组: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\times(-1)$

$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{2} \\ x_3 = x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$

方程组的一个特解为 $\gamma_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

导出组化为: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=8 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=16 \end{cases}$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 & 8 \\ 5 & 10 & 1 & -5 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=3 \\ x_3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=3-2x_2+x_4 \\ x_3=1 \end{cases}$ 导出组化为: $\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_3=0 \end{cases}$

方程组的通解为: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=8 \\ 5x_1+10x_2+x_3-4x_4=16 \end{cases}$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 & 8 \\ 5 & 10 & 1 & -4 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{\times(-5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\times(-5)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$

$$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ x_3=1 \\ x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=3-2x_2 \\ x_3=1 \\ x_4=0 \end{cases}$$

导出组化为: $\begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$

方程组的通解为: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

例　设3元非齐次方程组 $Ax=B$ 的两个特解为

$\mu_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$　$\mu_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 且 $r(A)=2$ 求方程组 $Ax=B$ 的全部解.

解:已知 $Ax=B$ 的特解 μ_1 和 μ_2,

其导出组 $Ax=O$ 的基础解系含有n−r=3−2=1个解.

$\mu_1-\mu_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是其导出组 $Ax=O$ 的解,也是导出组

的基础解系,从而方程组Ax=b的通解为 $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

例 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量, 且秩$r(A)=3$, $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，求$Ax=b$的通解。

解 导出组$Ax=0$的基础解系只有一个解向量，求法如下：

$$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)$$

$$=(2,3,4,5)^T,$$

所以$Ax=b$的通解为

$$x=(1,2,3,4)^T+k(2,3,4,5)^T，k\text{为任意常数}.$$

思考题

设A是$m\times 3$矩阵,且$R(A)=1$.如果非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量 η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

思考题解答

解 $\because A$是$m\times 3$矩阵,$R(A)=1$,

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.

令$\eta_1+\eta_2=a,\eta_2+\eta_3=b,\eta_3+\eta_1=c$,则

$$\eta_1=\frac{1}{2}(a+c-b)=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},\ \eta_2=\frac{1}{2}(a+b-c)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的基础解系中的解向量.

故$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},$$

其中k_1,k_2为任意实数.

练习 求解方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \quad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程 组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方 程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

2. 求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

解

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$R(A)=R(B)$,知方程组有解.又$R(A)=2, n-r=3$,所以方程组有无穷多解.且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5+7 \\ 2x_2=x_3+2x_4+6x_5-23 \end{cases}$$

求基础解系

令 $$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入 $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ 2x_2 = x_3 + 2x_4 + 6x_5 - 23 \end{cases}$$

依次得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

故得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

求特解

令 $x_3=x_4=x_5=0$,得$x_1=-\dfrac{9}{2},x_2=\dfrac{23}{2}$.

所以方程组的通解为

$$x = k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

另一种解法

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2\\0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23\\5 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12\end{pmatrix}$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

则原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 + 2x_5 - \dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 + \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3/2 + 2x_5 - 9/2 \\ x_2 = -x_3/2 - x_4 - 3x_5 + 23/2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

例1 求下面齐次线性方程组的一个基础解系，并用基础解系表示出全部解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&1&2&2&6\\0&-1&-2&-2&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad r(A)=2<5,$$

自由未知量取为 x_3, x_4, x_5，

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

基础解系：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

全部解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, $k_i (i = 1,\cdots,3)$ 任意。

例2 求下面齐次线性方程组的一个基础解系：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5=0 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=0 \\ \qquad\qquad 2x_3+5x_4-2x_5=0 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&4&3&1&1\\-1&-2&1&3&-3\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&2&4&-2\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&6&0\\0&0&0&7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

自由未知量取为 x_2, x_5，

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 自由未知量取为 x_2, x_5，

基础解系：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例2 求方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2 \end{cases}$ 的全部解.

解 $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -14 & 10 & -18 & 10 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $r(A)=r(\overline{A})=2<n=4$,

所以有无穷多解。选 x_3, x_4 为自由未知量,

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & \vdots & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$ 选 x_3, x_4 为自由未知量,

导出组的基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$,

特解: $\xi_0 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -5/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所以全部解为 $x = \xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$,

k_1, k_2 任意。

例3 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc:c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 5\\ 1 & -2 & -1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & -4 & 1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & -6 & 1 & 5 & 6 & 9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

选 x_2, x_4, x_5 为自由未知量,

导出组的基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\0\\1\end{pmatrix},$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc:c}1 & -2 & 1 & 1 & 4 & 5\\0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$，选 x_2, x_4, x_5 为自由未知量，

特解：$\xi_0=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$，

所以全部解为

$$x=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3,$$

k_1, k_2, k_3 任意。

例4 方程组 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(1) λ 为何值时, 无解？有唯一解？有无穷多解？

(2) 无穷多解时，求出全部解(用向量表示)。

解 $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$,

$\therefore$ 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 有唯一解;

当 $\lambda = 1$ 时, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 无解;

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

当$\lambda=-2$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

有无穷多解，全部解为

$$x=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}，\quad k为任意常数.$$

例5 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程组$Ax=b$ 的三个解向量, 且秩$r(A)=3$, $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$, 求 $Ax=b$ 的通解。

解 导出组 $Ax=\theta$ 的基础解系只有一个解向量，求法如下：

$$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)$$

$$=(2,3,4,5)^T,$$

所以 $Ax=b$ 的通解为

$$x=(1,2,3,4)^T+k(2,3,4,5)^T, \ k\text{为任意常数}.$$

例4 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程 组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方　　程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例3：求解方程组$Ax=b$,其中方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\left[A\middle|b\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}$$

解：$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}$

(1)当$a\neq-1$,$r(A)=r(\overline{A})=4$(未知量个数),有唯一解,为求解,

将$\overline{A}$进一步化为简化行阶梯型：

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&1-\dfrac{b}{a+1}\\0&1&0&0&1+\dfrac{b}{a+1}\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-\dfrac{2b}{a+1}\\0&1&0&0&1+\dfrac{b}{a+1}\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$唯一解为

$$x_1=\frac{-2b}{a+1},x_2=\frac{a+b+1}{a+1},x_3=\frac{b}{a+1},x_4=0$$

(2)当$a=-1$,且$b\neq 0$时,$r(A)=2,r(\overline{A})=3$,方程组无解

(3)当$a=-1$,且$b=0$时,$r(A)=r(\overline{A})=2<4$,方程组有无穷多解

为求解,进一步将$\overline{A}$化为简化行阶梯型：

$$\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

结构解为$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

其中c_1, c_2为任意常数

. λ, μ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_3=-1 \\ -x_1+x_2-3x_3=2 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=\mu \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷解？并在有无穷多解时写出方程组的通解

解：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-4 & \mu+2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \mu+3 \end{array}\right]$$

(I) $\lambda=5$, $\mu \neq -3$ 时，无解.

(II) $\lambda \neq 5$ 时, 有唯一解.

(III) $\lambda=5$, $\mu = -3$ 时, 有无穷解.

此时,系数矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \mu+3 \end{array}\right]$$

即:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

同解方程组为: $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ 即: $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 + 1 \\ x_3 = x_3 + 0 \end{cases}$

所以此时原方程组的通解为:

$$X = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in R$$

第四章 矩阵的相似对角化

- §4.1矩阵的特征值与特征向量
- §4.2 相似矩阵与矩阵的对角化
- §4.3 实对称矩阵的对角化

§4.1 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的基本概念

定义 设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在一个数 λ，以及一个非零 n 维列向量 α，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 为矩阵 A 的**特征值**，而 α 称为矩阵 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**。

说明： 1、特征值问题是针对**方阵**而言的；

2、特征向量必须是**非零**向量；

3、特征向量既依赖于矩阵A，又依赖于特征值 λ.

例 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ 3维向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\neq o$

$$A\alpha_1=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\alpha_1$$

2为A的特征值

α_1为A的对应于2的特征向量

若 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$k\alpha\ (k \neq 0)$ 也是 A 的属于 λ 的特征向量.

$$(\because A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha))$$

因此，$\boxed{\text{属于同一特征值的特征向量是不唯一的.}}$

若 α_1, α_2 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$\alpha_1 + \alpha_2 (\neq 0)$ 也是 A 的属于 λ 的特征向量.

$$(\because A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2))$$

综上，若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，

则 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s (\neq 0)$ 也是 A 的属于 λ 的特征向量.

属于同一特征值的特征向量是不唯一的.

但是一个特征向量能属于不同的特征值吗?

设 α 是 A 的属于两个特征值 λ_1,λ_2 的特征向量,
即 $A\alpha=\lambda_1\alpha$ 同时 $A\alpha=\lambda_2\alpha$ ，则

$$\lambda_1\alpha=\lambda_2\alpha \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\alpha=0$$

$$\because \alpha\neq 0, \quad \therefore \lambda_1-\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2 .$$

因此一个特征向量只能属于唯一的一个特征值，
即特征值是被特征向量所唯一确定的.

二、特征值与特征向量的求法

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\neq o$

$A\alpha=\lambda\alpha$ 即 $A\alpha=\lambda E\alpha$ 即 $(\lambda E-A)\alpha=o$

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为A的特征矩阵.

二、特征值与特征向量的求法

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\neq o$

$A\alpha=\lambda\alpha$ 即 $A\alpha=\lambda E\alpha$ 即 $(\lambda E-A)\alpha=o$

即 $\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(\lambda E - A)\alpha = o \iff \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

$A\alpha = \lambda\alpha \iff$ 此齐次线性方程组有非零解.

$\iff |\lambda E - A| = 0$

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是λ的n次多项式，称为 矩阵A的特征多项式.

$|\lambda E-A|=0$ 称为矩阵A的特征方程。

矩阵A的特征值，即为特征方程的根。

$$(\lambda E - A)\alpha = o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

$A\alpha = \lambda\alpha \Leftrightarrow$ 此齐次线性方程组有非零解.

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

$\Leftrightarrow$ λ满足 $|\lambda E - A| = 0$ 且 α 满足$(\lambda E - A)X = O$

求矩阵A的特征值和特征向量的步骤如下：

1）计算 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$

2) 求出 $|\lambda E-A|=0$ 的全部解，它们就是矩阵A的全部特征值.

3) 对每一个特征值 λ_0，写出齐次线性方程组

$(\lambda_0 E-A)X=o$ 即

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0-a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

求出其全部非零的解向量，即得到矩阵A的对应于特征值 λ_0 的所有特征向量。

例 求矩阵A的特征值和特征向量 $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\-2&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-1\\2&\lambda&1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$

$\lambda_1=0,\lambda_2=2$(二重)是A的特征值.

$\lambda_1=0$: $(0E-A)X=o$ $\quad AX=o$ $\quad \begin{pmatrix}\boxed{4\quad 2\quad 1}\\\boxed{-2\quad 0\quad -1}\\\boxed{1\quad 1\quad 0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overline{A}=$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&1&0\\-2&0&-1&0\\1&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-2&0&-1&0\\4&2&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&-1&0\\0&-2&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_3=0\\x_2-\frac{1}{2}x_3=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}\qquad c\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}(c\neq0)$$

是对应于0的全部特征向量

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$(二重)是A的特征值.

$\lambda_1=2$： $(2E-A)X=o$ $$\begin{pmatrix}\boxed{-2 \quad -2 \quad -1}\\ \boxed{2 \quad 2 \quad 1}\\ \boxed{-1 \quad -1 \quad 2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_3=0\end{cases}$$

对应于2的全部特征向量为$d\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$

例 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量。

解 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0,$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=2$(二重根), $\lambda_2=-1$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \quad \lambda_1 = 2(\text{二重根}), \lambda_2 = -1 .$$

对 $\lambda_1 = 2$，解方程组$(2E - A)X = 0$,

$$2E - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \therefore 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \therefore x_3 = 4x_1 - x_2 \end{array}$$

相应齐次线性方程组的基础解系为

$\alpha_1 = (1, 0, 4)^T$，$\alpha_2 = (0, 1, -1)^T$，

因此属于特征值$\lambda_1 = 2$的全部特征向量为

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2不全为零)；

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \quad \lambda_1 = 2(\text{二重根}),\ \lambda_2 = -1\,.$$

对 $\lambda_2 = -1$，解方程组$(-E-A)X=0$,

$$-E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_3 = (1\,,0\,,1)^T$,

因此属于特征值$\lambda_2 = -1$的全部特征向量为$k_3\alpha_3(k_3 \neq 0)$.

例1 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量。

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)=0,$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-1, \lambda_3=1$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$$

对 $\lambda_1 = 2$，$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

因此属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1 (k_1 \neq 0)$；

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1 .$$

对 $\lambda_2 = -1$，$-E-A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

因此属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k_2\alpha_2 (k_2 \neq 0)$；

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} \qquad \lambda_1=2, \lambda_2=-1, \lambda_3=1.$$

对 $\lambda_3=1$，$E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

因此属于特征值 $\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$。

注： 前两例都有二重特征值，但二重特征值相应的齐次线性方程组的基础解系所含的线性无关的解向量的个数却不相同，这在方阵对角化问题的讨论中起关键作用.

对角阵、上三角阵、下三角阵，它们的特征值即为主对角元。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

三、特征值与特征向量的性质

性质1 （1）设α是矩阵A的属于特征值λ_0的特征向量，则对任意常数$k \neq 0$，$k\alpha$也是A的属于λ_0的特征向量；

(2) 若α,β都是A的属于特征值λ_0的特征向量，则$k\alpha + l\beta$ $(k,l$不全为零$)$也是A的属于λ_0的特征向量。

证 $A\alpha = \lambda\alpha$

$$\Rightarrow A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha).$$

$$A\alpha = \lambda\alpha, A\beta = \lambda\beta$$

$$\Rightarrow A(k\alpha + l\beta) = kA\alpha + lA\beta = k\lambda\alpha + l\lambda\beta = \lambda(k\alpha + l\beta).$$

(2) 可推广到多个特征向量.

性质2 属于不同特征值的特征向量线性无关。

只证两个特征向量的情况.

证 $A\alpha=\lambda\alpha,\ A\beta=\mu\beta,\ \alpha\neq O,\ \beta\neq O,\ \lambda\neq\mu,$

设 $k\alpha+l\beta=O$ **(1)**

则 $A(k\alpha+l\beta)=k(A\alpha)+l(A\beta)=\lambda k\alpha+\mu l\beta=O,$ **(2)**

$(1)\times\lambda-(2)$ 消去 α, 得 $(\lambda-\mu)l\beta=O,$

$\because\ \lambda-\mu\neq 0,\ \beta\neq O,\Rightarrow\ l=0,$

代入(1), 得 $k=0$, 证得 α,β 线性无关.

推广 属于各个特征值的线性无关的向量合在一起仍线性无关。

性质3 矩阵 A 与它的转置 A^T 有相同的特征值。

证 $|\lambda E - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$,

说明 A 与 A^T 有相同的特征多项式,

从而有相同的特征值.

注意: 尽管 A 和 A^T 的特征值相同，但一般它们的特征向量是不同的。

性质4 设λ_0是矩阵A的特征值，α是相应的特征向量，则

（1）$k\lambda_0$是kA的特征值（k是任意常数）；

（2）λ_0^m是A^m的特征值（m是正整数）；

（3）当A可逆时，$\lambda_0 \neq 0$，λ_0^{-1}是A^{-1}的特征值.

且α仍然是矩阵kA、A^m、A^{-1}的相应于特征值$k\lambda_0$、λ_0^m、λ_0^{-1}的特征向量。

证 (2) $A\alpha = \lambda_0\alpha \Rightarrow A(A\alpha) = A(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(A\alpha) = \lambda_0(\lambda_0\alpha)$,

即 $A^2\alpha = \lambda_0^2\alpha$,

重复这个过程, 可得 $A^3\alpha = \lambda_0^3\alpha$, $\cdots$, $A^m\alpha = \lambda_0^m\alpha$.

性质4 设λ_0是矩阵A的特征值，α是相应的特征向量，则

（1）$k\lambda_0$是kA的特征值（k是任意常数）；

（2）λ_0^m是A^m的特征值（m是正整数）；

（3）当A可逆时，$\lambda_0 \neq 0$，λ_0^{-1}是A^{-1}的特征值.

且α仍然是矩阵kA、A^m、A^{-1}的相应于特征值$k\lambda_0$、λ_0^m、λ_0^{-1}的特征向量。

证 (3) $A\alpha = \lambda_0\alpha \Rightarrow A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}(\lambda_0\alpha) = \lambda_0 A^{-1}\alpha$,

即 $\alpha = \lambda_0 A^{-1}\alpha$, $\Rightarrow$ $A^{-1}\alpha = \lambda_0^{-1}\alpha$.

例3 设 λ_0 是矩阵 A 的特征值，α 是相应的特征向量,

多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s$,

则 $p(\lambda_0)$ 是矩阵多项式 $p(A)$ 的特征值，α 仍为相应的特征向量。 证略

例如, 矩阵A的有一个特征值为2, 则 $A^3-2A+3E$ 有一个特征值为：$2^3-2\cdot 2+3=7.$

例4 若 $A^2=A$, 则 A 的特征值为 0 或 1。

证 $A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow A^2\alpha=\lambda^2\alpha$, 车

而 $A^2=A$, $\Rightarrow$ $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$, $\Rightarrow (\lambda^2-\lambda)\alpha=\theta$,

$\Rightarrow \lambda^2-\lambda=0$, $\Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

练习： 若 $A^2=E$, 则 A 的特征值为 1或−1。

例5 若矩阵 A 可逆，且特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值。

解 $A^* A = |A| E \Rightarrow A^* = |A| A^{-1}$,

由性质4, A^* 的特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

四、特征多项式的性质

n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

λ 的最高次项必在 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$ 中出现,

其余的项 λ 的次数最高是 $n-2$,

故有 $f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$,

而常数项 $f(0)=|-A|=(-1)^n|A|$,

所以 $f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$.

$$f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|.$$

另一方面, 设矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 则

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

比较系数得

性质5 (1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$; (2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$.

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为 A 的**迹**，记为 $\mathrm{tr}(A)$.

推论 方阵A可逆的充分必要条件是A的特征值全不为零.

例6 设 A 为 3 阶方阵，$\mathrm{tr}(A)=7$，特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=3$，

求：另一特征值 λ_3； A^* 的全部特征值；

行列式 $|A^*|, |A^2|, |A^{-1}|, |A^T|$。

解 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A)=7 \Rightarrow \lambda_3=3$；

$$\frac{|A|}{\lambda_i}$$

$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=9$；

A^*的特征值是：$\lambda_1'=9, \lambda_2'=3, \lambda_3'=3$；

$|A^*|=\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'=81$；（或$|A^*|=|A|^{3-1}=81$）

$|A^2|=|A|^2=81$； $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{9}$；

$|A^T|=|A|=9$.

例4，已知三阶方阵 A的三个特征值为1, -2, 3，则$|A|=$ ___,

A^{-1} 的特征值为 ______， A^T 的特征值为 ______，

A^* 的特征值为______, A^2+2A+E 的特征值为______.

解： 因为$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-6$, 由$|\lambda E-A|=|\lambda E-A^T|$，

知 A与 A^T有相同的特征值, 所以A^T 的特征值为1, 2, 3,

A^{-1} 的特征值为 $1/\lambda$ ，A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$，矩阵多项式

$f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$， 从而可写出各自具体内容.

应填 <u>-6;1, -1/2, 1/3； 1, -2, 3； -6, 3, -2； 4, 1, 16.</u>

练习：已知3阶方阵A的特征值为：1、－1、2，

则矩阵 $B = A^3 - 2A^2$ 的特征值为：$\underline{\quad -1,-3,0 \quad}$，

行列式 $|B| = \underline{\quad 0 \quad}$.

第二节 相似矩阵与矩阵的对角化

一、相似矩阵及其性质

定义 对于n阶方阵A和B，若存在n阶**可逆**方阵P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称A与B **相似**, 记为 $A \sim B$.

矩阵的“相似”关系具有以下特性：

(1) 反身性：对任何方阵 A，总有 $A \sim A$ (令 $P = E$ 即可)；

(2) 对称性：若 $A \sim B$，则有 $B \sim A$；

证 $P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.

(3) 传递性：若 $A \sim B$, 且 $B \sim C$, 则有 $A \sim C$.

证 $P^{-1}AP = B, Q^{-1}BQ = C$

$$\Rightarrow Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ) = C .$$

相似矩阵的性质：

定理 相似矩阵有相同的特征多项式，从而特征值相同.

证 $P^{-1}AP = B \Rightarrow |\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP|$

$$= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |P| = |\lambda E - A|.$$

推论1 相似矩阵的行列式相等；

推论2 相似矩阵的迹相等；

推论3 若矩阵A与一个对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，

则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 即为 A 的全部特征值。

例: 已知$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & x & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$相似，求$x, y$.

解： $\because A \sim B$

$$\therefore \begin{cases} |A| = |B| \\ tr(A) = tr(B) \end{cases}$$

即$\begin{cases} x-4=-6y \\ 2+x=y-1 \end{cases}$

解得:$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

注意： 特征值相同的矩阵不一定相似.

例如，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值相同，

但它们不相似，因为对任意可逆阵P，$P^{-1}EP=E$，

即与 E 相似的矩阵只有它自己。

相似矩阵的其它性质：

相似矩阵的秩相等；$P^{-1}AP=B$，

$$\boxed{\text{若}P, Q\text{为可逆矩阵，则有 } r(PA)=r(AQ)=r(A).}$$

若 $A \sim B$，则

$A^T \sim B^T$；

$kA \sim kB$，其中 k 为任意常数；

$A^m \sim B^m$，其中 m 为任意正整数；

$p(A) \sim p(B)$，其中 $p(x)$ 为任一多项式；

它们的特征矩阵 $\lambda E - A$ 和 $\lambda E - B$ 也相似；

A, B 同为可逆或不可逆，可逆时它们的逆矩阵及伴随矩阵也分别相似。

证明留作练习.

二、矩阵与对角矩阵相似的条件

由于相似矩阵有很多相同的性质，因此我们会考虑一个矩阵能否和另一个较简单的矩阵相似.

较简单的矩阵：单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵.

但如果 $A \sim E$， 则∃可逆矩阵P， $P^{-1}AP = E$，

即$A = PEP^{-1} = E$.

这说明只有单位矩阵和单位矩阵相似.

类似的可证明只有数量矩阵才和数量矩阵相似.

因此，对一般的矩阵我们只能讨论它是否能够和对角矩阵矩阵相似，即矩阵能否对角化的问题.

二、矩阵与对角矩阵相似的条件

如果一个矩阵能与一个对角阵相似, 称该矩阵可以**对角化**。

问题： 1.是否所有的n阶方阵都能对角化？

如果不是什么样的矩阵能对角化？

2.若n阶方阵A能对角化，即存在可逆阵P，

使 $P^{-1}AP=\Lambda$(对角矩阵),

那么可逆阵P的结构如何？如何求出？

3.和A相似的对角阵结构如何？

二、矩阵与对角矩阵相似的条件

如果一个矩阵能与一个对角阵相似, 称该矩阵可以**对角化**。

定理 n阶矩阵A与一个对角阵相似的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证 必要性：设A与一个对角阵相似, 即存在一个可逆阵P, 使

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$P^{-1}AP = \Lambda$， 即 $AP = P\Lambda$，

将矩阵 P 按列分块，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$，

即得 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$，$i = 1,2,\cdots,n$，

说明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的分别对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量，

由于 P 可逆，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。必要性得证。

上述步骤倒过来写，即得充分性证明。

推论1 如果矩阵A的特征值互不相同，则A必可对角化.

因为属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

注意: 这个条件是充分的而不是必要的.

如果A的特征方程有**重根**，此时不一定有n个线性无关的特征向量，从而矩阵A不一定能对角化；但如果能找到n个线性无关的特征向量，A还是能对角化.

推论 2 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是对每一个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n-n_i$. （证略）

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -3 \\ -3 & \lambda+2 & -3 \\ -6 & \lambda+2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -3 \\ -3 & \lambda+2 & -3 \\ -3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\left[(\lambda-1)^2-9\right] = (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-4)$$

$$= (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

例 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}$

$=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$

特征值: $\lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=4$

$\lambda=-2$ $(-2E-A)X=o$

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$x_1-x_2+x_3=0$

$\Downarrow$

$x_1=x_2-x_3$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}$$

是对应于－2的两个线性无关的特征向量

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 3 & -3 & 0\\ -3 & 3 & -3 & 0\\ -6 & 6 & -6 & 0\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}$

$=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$

特征值: $\lambda_1=\lambda_2=-2,\ \lambda_3=4$

$\lambda=4$ $(4E-A)X=o$

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ -3 & 9 & -3\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3\\ x_2=\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

$\boxed{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}}$ 是对应于4的特征向量

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & -3 & 0\\ -3 & 9 & -3 & 0\\ -6 & 6 & 0 & 0\end{array}\right)\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{2}x_3=0\\ x_2-\dfrac{1}{2}x_3=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\qquad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}$$

特征值: $\lambda_1=\lambda_2=-2,\ \lambda_3=4$ $\qquad =(\lambda+2)^2(\lambda-4)$

对应于-2的两个线性无关的特征向量: $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$

对应于4的特征向量: $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 令$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$

P可逆,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

线性无关,矩阵A可对角化.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix} \qquad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

特征值: $\lambda_1=\lambda_2=-2,\ \lambda_3=4$ $\qquad =(\lambda+2)^2(\lambda-4)$

对应于−2的两个线性无关的特征向量: $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$

对应于4的特征向量: $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 令 $P_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ P_1可逆,

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

线性无关, 矩阵A可对角化.

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$，求可逆阵$P$，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda-3&-3\\-3&-6&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-3\\-6&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

对 $\lambda_1 = 0$，$0E - A = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

特征向量 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T,$

对 $\lambda_2 = -1$，$-E - A = -\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

特征向量 $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T,$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

特征向量 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T$,

特征向量 $\alpha_2=(-1,1,0)^T$,

对 $\lambda_3=9$，$9E-A=\begin{pmatrix}8 & -2 & -3\\ -2 & 8 & -3\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 11 & -6\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

特征向量 $\alpha_3=(1,1,2)^T$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

$\alpha_1 = (-1,-1,1)^T$, $\alpha_2 = (-1,1,0)^T$, $\alpha_3 = (1,1,2)^T$,

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

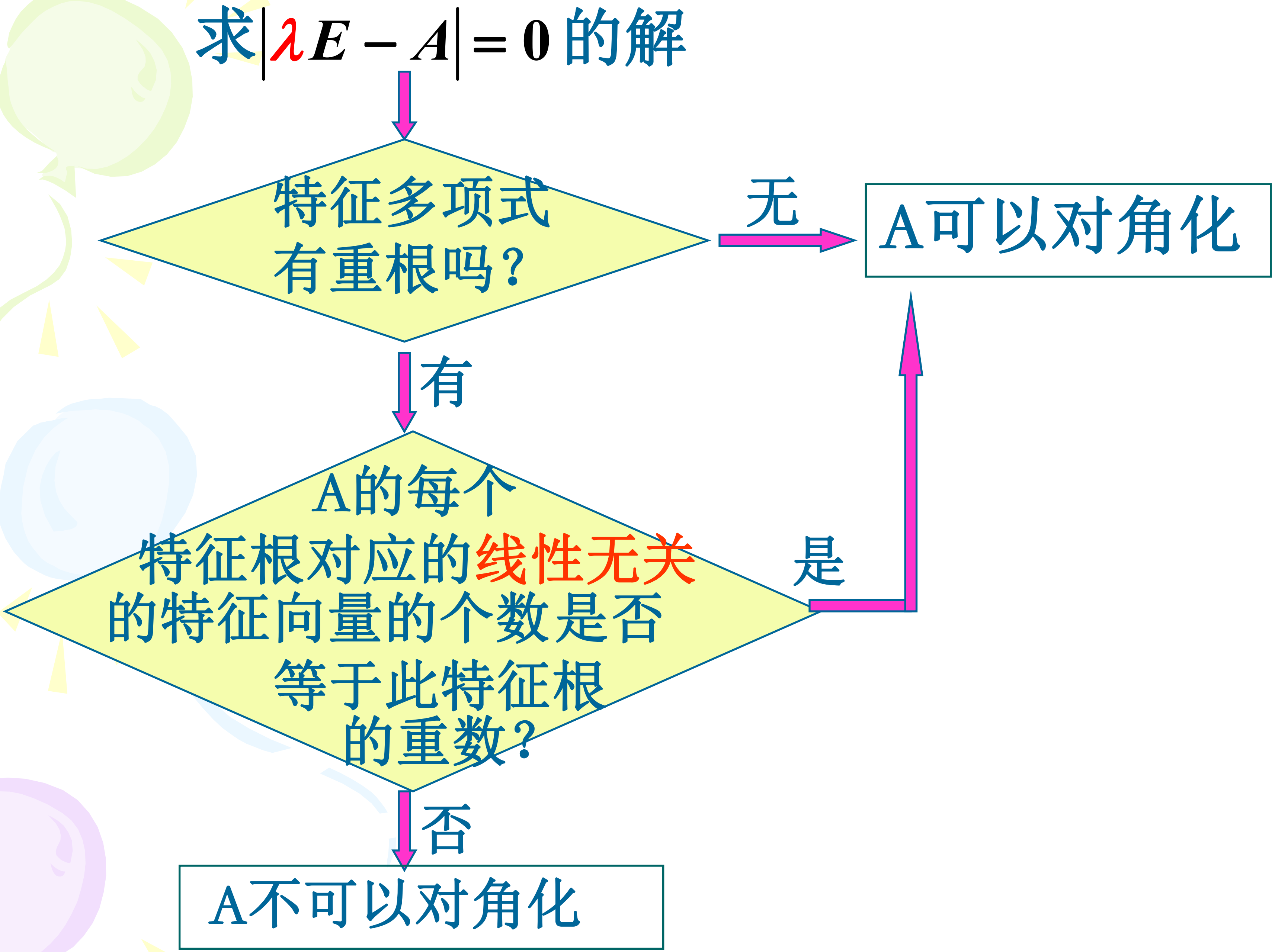
则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$.

例3 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 能否对角化，若能，求可逆阵P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ 2 & \lambda & 1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$，

对 $\lambda_1=2$，$2E-A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

只有一个线性无关的特征向量，所以不能对角化.


求$|\lambda E-A|=0$的解
特征多项式
有重根吗?
无
A可以对角化
有
A的每个
特征根对应的线性无关
的特征向量的个数是否
等于此特征根
的重数?
是
否
A不可以对角化

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与矩阵（　　）相似.

$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 A为对角矩阵,A的主对角线上的元素为$1,1,2$
也是A的特征值.

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

B的特征值为$1,1,2$　C、D的特征值也是$1,1,2$

即看B、C、D中 哪个能对角化.

例 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与(　　)相似.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-C|=|\lambda E-D|=(\lambda-1)^{2}(\lambda-2)^{1}$$

2是1重特征值. 对应于2, B,C,D都有1个线性无关的特征向量.

1是2重特征值. 对应1, 有2个线性无关的特征向量时, 才可对角化.

对应1,看B,C,D中,哪个有2个线性无关的特征向量.

例 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与(　　)相似.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-C|=|\lambda E-D|=(\lambda-1)^{2}(\lambda-2)^{1}$$

$\lambda=1$

$$(1E-B)X=o\qquad \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

矩阵B对应于1的特征向量为 $c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad c\neq 0$

矩阵B不与A相似.

例 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与(　　)相似.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-C|=|\lambda E-D|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^1$$

$\lambda=1$

$$(1E-C)X=o \quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad x_3=0$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为矩阵C对应于1的线性无关的特征向量.

矩阵C与A相似.

例 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 与(C)相似.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-C|=|\lambda E-D|=(\lambda-1)^{2}(\lambda-2)^{1}$$

$\lambda=1$

$$(1E-D)X=o \quad \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{cases}x_3=0\\x_2=0\end{cases}$$

$d\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $d\neq 0$ 为矩阵D对应于1的特征向量.

矩阵D不与A相似.

一般来说，求矩阵的高次幂比较困难，但若矩阵A能对角化，即存在可逆阵P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda,$$

则 $A=P\Lambda P^{-1}$，于是

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^n P^{-1},$$

转化为对角阵求幂.

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)$,

对 $\lambda_1=3$，$3E-A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

对 $\lambda_2=-1$，$-E-A=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}3 & \\ & -1\end{pmatrix},$$

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{100} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1 & 3^{100}-1\\ 3^{100}-1 & 3^{100}+1\end{pmatrix}.$$

第三节 实对称矩阵的对角化

一、内积的定义及性质

1、定义：

设有n维向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,

实数

$$\alpha^T\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

称为向量 α和β 的 **内积**，记作 (α,β).

如$\alpha=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, 则$(\alpha,\beta)=4\times1+0+(-1)\times(-1)+0$
$=5.$

2、内积的运算性质

$\left(\text{其中}\alpha,\beta,\gamma\text{为}n\text{维向量},k\text{为实数}\right)$:

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\beta,\alpha)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$,当且仅当$\alpha=O$时有$(\alpha,\alpha)=0$.

3、向量的长度

定义： 对R^n中向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$， 非负实数

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

称为向量α的长度, 或向量α的模或范数, 记为$\|\alpha\|$

如$\alpha=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\|\alpha\|=\sqrt{4^2+0^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{21}$

$\|\alpha\|\geq 0$　　　$\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2$

$$\|\alpha\|=0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=\dots=a_n=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=o$$

例 在2维空间R^2 中 $\varepsilon_1=(1,0)$ $\varepsilon_2=(0,1)$

$$\|\varepsilon_1\|=\sqrt{1^2+0^2}=1 \qquad \|\varepsilon_2\|=\sqrt{0^2+1^2}=1$$

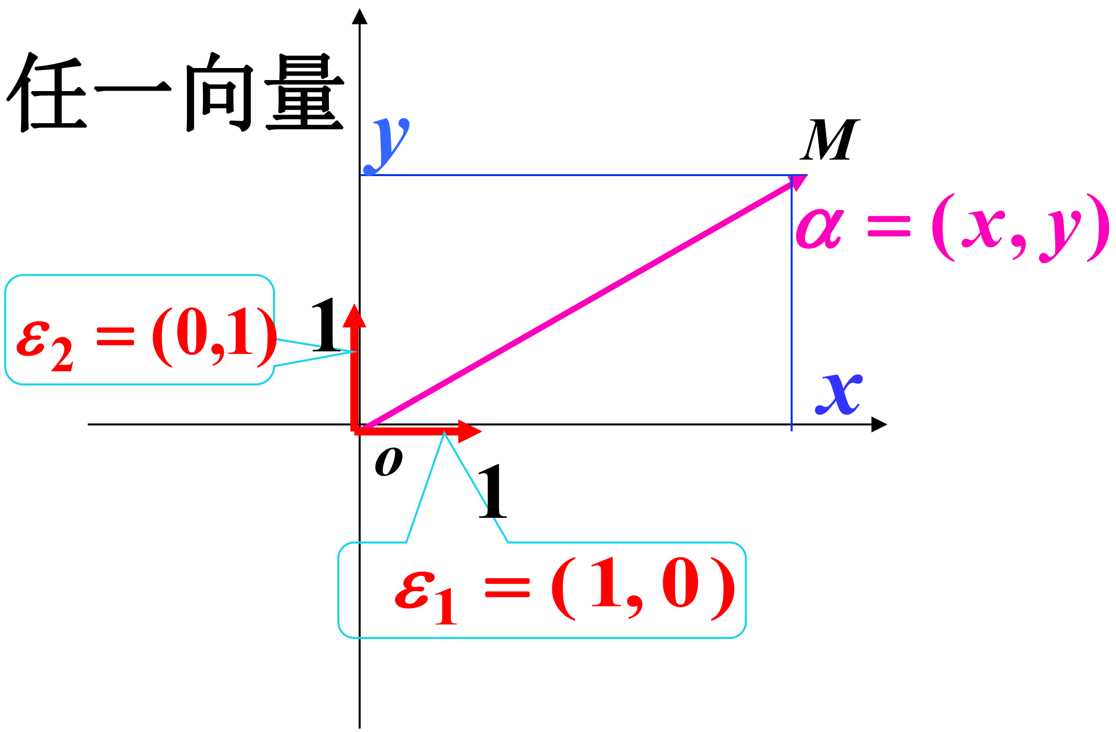
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是单位向量.

长度为1的向量称为是单位向量.

设 $\alpha=(x,y)$ 是 R^2 中任一向量

$\alpha=\overrightarrow{OM}$

$$\|\alpha\|=\sqrt{x^2+y^2}=\left|\overrightarrow{OM}\right|$$



一般地，在 n 维空间R^n中

$$\varepsilon_1=(1\quad 0\quad 0\quad \ldots\quad 0)$$
$$\varepsilon_2=(0\quad 1\quad 0\quad \ldots\quad 0)$$
$$\varepsilon_3=(0\quad 0\quad 1\quad \ldots\quad 0)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_n=(0\quad 0\quad 0\quad \ldots\quad 1)$$

$$\|\varepsilon_1\|=\sqrt{1^2+0^2+\ldots+0^2}=1 \qquad \|\varepsilon_2\|=\sqrt{0^2+1^2+\ldots+0^2}=1$$

$$\ldots\ \|\varepsilon_n\|=\sqrt{0^2+0^2+\ldots+1^2}=1$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$都是单位向量.

向量的长度具有以下性质：

(1) $\|\alpha\| \geq 0$ $\qquad \|\alpha\| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = o$

(2) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$ （k为实数）

(3) 对任意向量α和β，有 $|\alpha^T\beta| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$|\alpha^T\beta| = |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|$$

$$\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} = \|\alpha\|\|\beta\|$$

$$k\alpha = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

$$\|k\alpha\| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \dots + (ka_n)^2}$$

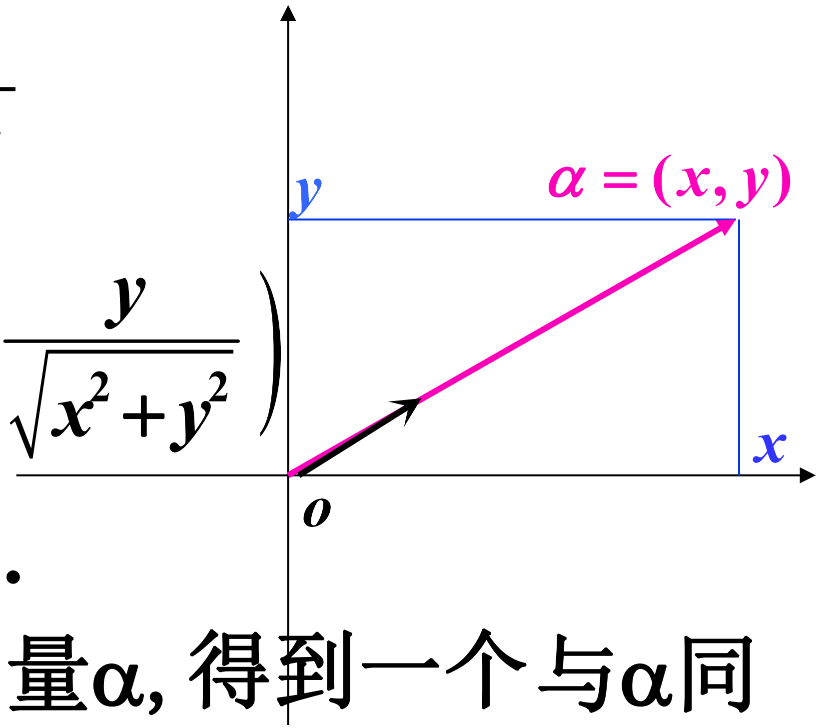
$$= \sqrt{k^2(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \dots + a_n{}^2)}$$

$$= |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = |k|\|\alpha\|$$

对R^n中任意**非零**向量α，$\|\alpha\| \neq 0$, $\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是单位向量.

事实上，$\left\|\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right\| = \left|\dfrac{1}{\|\alpha\|}\right|\|\alpha\| = \dfrac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1$

如 $\alpha = (x, y)$ $\quad \|\alpha\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\alpha = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

是与 α 同方向的单位向量 .

用非零向量α的长度去除向量α，得到一个与α同方向的单位向量，称为把向量α**单位化**。如

$\alpha = (4, 0, -1, 2)^T$ $\quad \|\alpha\| = \sqrt{21}$ $\quad \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha = \left(\dfrac{4}{\sqrt{21}}, \dfrac{0}{\sqrt{21}}, \dfrac{-1}{\sqrt{21}}, \dfrac{2}{\sqrt{21}}\right)^T$

定义： $\theta = \arccos \dfrac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$ 称为向量α和β的夹角.

定义： 若向量α，$\beta \in \mathbf{R}^n$，且$(\alpha, \beta) = 0$,则称α和β正交(或垂直).

例 $o = (0, 0, \ldots, 0)^T$ $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$

$$(\alpha, O) = a_1 0 + a_2 0 + \ldots + a_n 0 = 0$$

$\therefore \alpha$和零向量正交（或 $\alpha \perp o$）

零向量与任一向量正交.

例 在R^3 中 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$

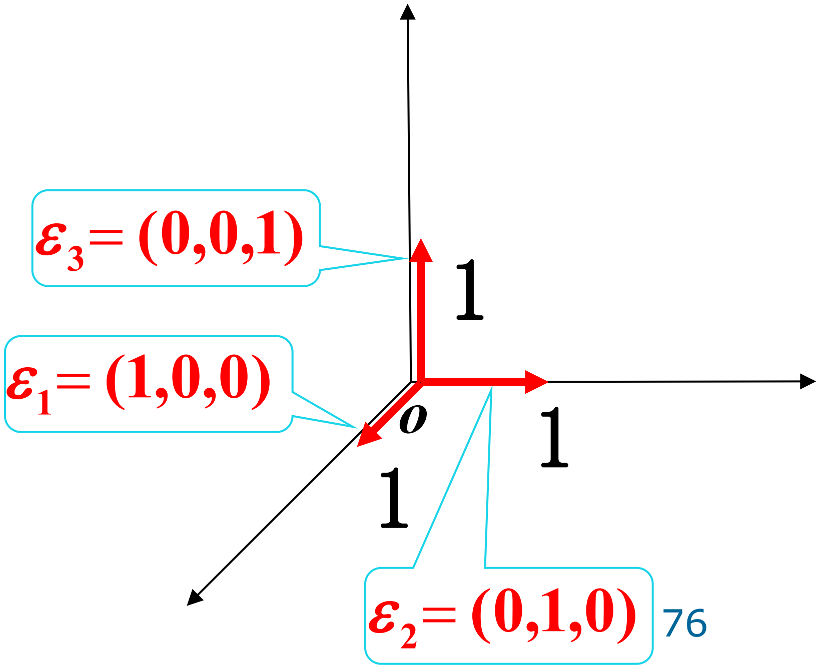
$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_3)=0$ $(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=0$

即R^3 中的单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
两两正交，称为R^3 中的正交单位向量组.

一般地，R^n 中的单位向量组

$$\varepsilon_1=(1\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 0)$$
$$\varepsilon_2=(0\quad 1\quad 0\quad \dots\quad 0)$$
$$\varepsilon_3=(0\quad 0\quad 1\quad \dots\quad 0)$$
$$\varepsilon_n=(0\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 1)$$

两两正交. 称为R^n 中的正交单位向量组.



定义： 如果R^n中的非零向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ $(s\geq 2)$ 两两正交，即 $(\alpha_i,\alpha_j)=0$ $(i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots,s)$

则称向量组α_1，α_2, …, α_s 为正交向量组.

注意： 正交向量组中，每个向量都不是零向量。

如 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$ $\alpha_2=(2,2,0)^T$ $\alpha_3=(0,0,1)^T$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是R^3中的正交向量组.

定义： 如果一个正交向量组中，每个向量都是单位向量，则该向量组称为正交单位向量组.

如 $\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}},0\right)^T$ $\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$

$\alpha_3=(0,0,1)^T$ $\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\alpha_3$ 是正交单位向量组.

结论1 若 $\alpha \perp \beta$ 则对任何实数k, l，有 $k\alpha \perp l\beta$

结论2 若α_1， $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 为正交向量组，则

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \ldots, \frac{\alpha_s}{\|\alpha_s\|}$$ 是正交单位向量组.

定理： 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

证： 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=O$,

$$则(\alpha_i,O)=(\alpha_i,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)$$

$$=k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_{i-1}(\alpha_i,\alpha_{i-1})$$

$$+k_i(\alpha_i,\alpha_i)+k_{i+1}(\alpha_i,\alpha_{i+1})+\cdots+k_s(\alpha_i,\alpha_s)$$

$$=k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$$

$\because \alpha_i\neq O,\quad \therefore (\alpha_i,\alpha_i)>0$

$\therefore k_i=0,(i=1,2,\cdots,s)$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

定理: 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

注: 正交向量组一定线性无关，但是线性无关的向量组不一定正交.

如$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,1)^T$线性无关，

但$(\alpha_1,\alpha_2)=1+2+1=4$,

因此向量组α_1,α_2不是正交向量组.

二、标准正交基及正交矩阵

1、标准正交基

定义： 在R^n中, n个向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中，任意两个都正交；

(2) $\|\alpha_j\|=1, \quad j=1,2,\ldots,n$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为R^n 的一个标准正交基.

如 $\varepsilon_1=(1, 0, \ldots, 0),$

$\varepsilon_2=(0, 1, \ldots, 0),$

$\vdots$

$\varepsilon_n=(0, 0, \ldots, 1)$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 为R^n 的一个标准正交基.

2、施密特正交化方法

定理： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，

令 $\beta_1=\alpha_1$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1；$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2;$$

$$\vdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

则（1）$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$是正交向量组，

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s\}$$

2、施密特正交化方法

定理： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，

令 $\beta_1=\alpha_1$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2;$$

$\vdots$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

则 （1）$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$ 是正交向量组，

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s\}$$

（2）单位化：

令$\eta_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1$, $\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2$, $\cdots$, $\eta_s=\frac{1}{\|\beta_s\|}\beta_s$,

则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是标准正交向量组.

例 求与 $\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(1,0,1,0)$, $\alpha_3=(-1,0,0,1)$
$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$等价的单位正交的向量组.

解 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=(1\quad 0\quad 1\quad 0)-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad 0\quad 0)=\left(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\quad 0\right)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\left(\frac{-1}{2}\right)\beta_1-\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)\beta_2=\alpha_3+\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{3}\beta_2$$

$$=(-1\quad 0\quad 0\quad 1)+\frac{1}{2}(1\quad 1\quad 0\quad 0)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 1\quad 0\right)=\left(-\frac{1}{3}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{3}\quad 1\right)$$

$$\beta_4=\alpha_4-\left(\frac{0}{}\right)\beta_1-\left(\frac{0}{}\right)\beta_2-\left(\frac{0}{}\right)\beta_3=\alpha_4=(1,-1,-1,1)$$

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 两两正交, 与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 等价.

再将$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 单位化.

$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(1,0,1,0)$, $\alpha_3=(-1,0,0,1)$ $\alpha_4=(1,-1,-1,1)$

$\beta_1=(1,1,0,0)$ $\beta_2=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1,0\right)$ $\beta_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$ $\beta_4=(1,-1,-1,1)$

再将β1，β2，β3，β4单位化：

$$\eta_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$$

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1,0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},0\right)$$

$$\eta_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)=\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\eta_4=\frac{1}{\|\beta_4\|}\beta_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是单位正交向量组，且与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$等价.

3、正交矩阵

定义 设n 阶实矩阵Q 满足 $Q^TQ=E$ 则称Q为正交矩阵.

例 单位矩阵E为正交矩阵 $E^TE=EE=E$

说明 （1） 正交矩阵一定是方阵.

（2）正交矩阵必是实矩阵,

即正交矩阵的元素都是实数.

（3）由 $Q^TQ=E$, Q可逆, $Q^{-1}=Q^T$

$\therefore QQ^T=QQ^{-1}=E$

正交矩阵具有下列性质：

(1) 若Q是正交矩阵，则Q的行列式的值等于1或-1.

证 $Q^TQ=E$ $\quad |Q|^2=|Q^T||Q|=|Q^TQ|=|E|=1$

$\therefore |Q|=\pm 1$

(2)若Q为正交阵，则Q可逆，且$Q^{-1}=Q^T$也是正交矩阵.

证 $(Q^{-1})^TQ^{-1}=(Q^{-1})^TQ^T=(QQ^{-1})^T=E^T=E$

(3) 若P, Q都是n 阶正交矩阵，则PQ也是正交矩阵.

证 $(PQ)^T(PQ)=Q^T\boxed{P^TP}Q=Q^TEQ=Q^TQ=E$

∴PQ 是正交矩阵。

定理 设Q为n阶实矩阵，则Q为正交矩阵的充要条件是：Q的列向量组是单位正交向量组.

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{matrix}$$

$Q^TQ=E \Longleftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是单位正交向量组.

$\Longleftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$两两正交，

且$\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\ldots=\|\alpha_n\|=1$

$$Q^TQ=\begin{array}{c}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{array}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1}\\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow\end{array}\\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}\end{array}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots\alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots\alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots\alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$1=\alpha_1^T\alpha_1=\alpha_2^T\alpha_2=\cdots=\alpha_n^T\alpha_n \quad \|\alpha_1\|^2=\|\alpha_2\|^2=\cdots=\|\alpha_n\|^2=1$$

$$\therefore \|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\cdots=\|\alpha_n\|=1$$

$i\neq j$时，$\alpha_i^T\alpha_j=0 \quad \alpha_i\perp\alpha_j$

三、实对称矩阵的相似对角化

并非所有方阵都可对角化, 但是**实对称矩阵**必可对角化.

A为对称矩阵 $\longleftrightarrow$ $A^T = A$

如 $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

定理 实对称矩阵的特征值都是实数.

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是相互正交的.

即若A是实对称矩阵, A的两个特征值 λ_1, λ_2

$$A\alpha = \lambda_1 \alpha \quad A\beta = \lambda_2 \beta \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ 则 } \alpha \perp \beta$$

证 $\lambda_1(\beta^T \alpha) = \beta^T \lambda_1 \alpha = \beta^T A \alpha = \beta^T A^T \alpha = (A\beta)^T \alpha$

$$= (\lambda_2 \beta)^T \alpha = \lambda_2 (\beta^T \alpha)$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta^T \alpha) = 0$$

$$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\therefore \beta^T \alpha = 0 \text{ 即 } \alpha \perp \beta$$

定理 实对称矩阵可对角化.

即若设A是n阶实对称矩阵,则存在n阶正交矩阵Q,使得 $Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

定理 设A是n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Q，使得

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

如何求n阶正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$？

步骤如下：

1) 由特征方程$|\lambda E-A|=0$求出矩阵A的全部特征值；

2) 对每一个特征值λ_i (n_i重)，解齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)X=O$，得到相应的n_i个线性无关的特征向量；

求特征向量的步骤

3) 利用施密特正交化方法将λ_i对应的线性无关的特征向量正交化、单位化，得到标准正交向量；

4) 将这些标准正交向量按列排成n阶矩阵，便是所求的正交矩阵Q.

例 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

特征值: $-1, 2, 5$

特征向量分别为:

$-1:\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad 2:\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad 5:\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交

将它们单位化

$-1:\eta_1=\dfrac{1}{3}\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\quad 2:\eta_2=\dfrac{1}{3}\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\quad 5:\eta_3=\dfrac{1}{3}\alpha_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

η_1,η_2,η_3 为单位正交向量组

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ Q为正交矩阵

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 求正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)^1$

特征值：0,0,3

$\lambda=0:\ \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \lambda=3:\ \gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\gamma\perp\alpha_1\qquad \gamma\perp\alpha_2\qquad$ 将 α_1,α_2 正交化.

例 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 求正交矩阵Q, 使 $Q^{-1}AQ$为对角矩阵.

特征值 0,0,3 $\lambda=0:\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\lambda=3:\gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\gamma\perp\alpha_1$ $\gamma\perp\alpha_2$

将 α_1,α_2 正交化. 令

$\lambda=0:\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\beta_1\perp\beta_2$ $\gamma\perp\beta_1$ $\gamma\perp\beta_2$ 再将 β_1,β_2,γ 单位化.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad \lambda=0:\ \beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\quad \lambda=3:\ \gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

特征值：0,0,3

β_1,β_2,γ 两两正交. 再将它们单位化.

$$\underbrace{\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\quad \eta_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}}_{\text{对应于}\lambda=0}\quad \underbrace{\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{\text{对应于}\lambda=3}$$

η_1,η_2,η_3 两两正交，为单位向量.

令

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Q为正交矩阵.

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\Lambda$$