

浙江工商大学 2014 /2015 学年第 2 学期考试试卷(A)

课程名称: 线性代数(文) 考试方式: 闭卷 完成时限: 120 分钟

班级名称: _____ 学号: _____ 姓名: _____.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分 值	16	18	8	6	10	12	14	10	6	100
得 分										
阅卷人										

一、单项选择题(每小题 2 分,共 16 分)

1. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$, 则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{11} - 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{21} - 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{31} - 2a_{33} \end{vmatrix} = (\quad)$.
 A. 16 B. -16 C. 8 D. -8
2. 设 A 和 B 均为 $n \times n$ 矩阵, 则必有().
 A. $|A+B| = |A| + |B|$ B. $AB = BA$
 C. $|AB| = |BA|$ D. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
3. 若矩阵 A 与 B 相似, 则().
 A. $\lambda E - A = \lambda E - B$ B. $|A| = |B|$
 C. A, B 有相同的特征向量 D. A 与 B 均与一个对角矩阵相似
4. 线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 k 的值为 ().
 A. 0 B. -2 C. -1 D. 2
5. 设 A 为三阶矩阵, $|A| = a$, 则其伴随矩阵 A^* 的行列式 $|2A^*| = (\quad)$.
 A. $2a^2$ B. $8a^2$ C. $2a^3$ D. $8a^3$
6. 设 α_1, α_2 是线性方程组 $Ax = O$ 的解, β_1, β_2 是 $Ax = b$ 的解, 则().
 A. $2\alpha_1 + \beta_1$ 是 $Ax = O$ 的解 B. $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 $Ax = O$ 的解
 C. $\beta_1 + \beta_2$ 是 $Ax = b$ 的解 D. $\beta_1 - \beta_2$ 是 $Ax = b$ 的解
7. 设向量组 α, β, γ 线性相关, 则 α, β, γ 中().
 A. 任一个都可用其余两个线性表示
 B. 至少有一个是零向量

C. 至少有一个可用其余两个线性表示

D. 任一个都不能用其余两个线性表示

8. 设 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = E$, 其中 E 为单位矩阵, 则下列正确的是 ().

A. $ACB = E$ B. $CBA = E$ C. $BAC = E$ D. $BCA = E$

二、填空题(每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设 A 是三阶方阵, 已知 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ _____.

2. 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 则代数余子式 $A_{34} =$ _____.

3. 已知 n 阶矩阵 A 满足矩阵方程 $A^2 - 2A - 3E = O$, 则 $A - E$ 可逆, 且 $(A - E)^{-1} =$ _____.

4. 若向量组 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (k, 3, 0)^T$, $\alpha_3 = (-1, 4, k)^T$ 线性相关, 则 $k =$ _____.

5. 四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$, 则 $A_{41} - A_{42} + A_{43} - A_{44} =$ _____.

6. 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|B^{-1} - 3E| =$ _____.

三、(8 分) 设行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, 计算: $A_{31} + A_{32} + 2A_{33}$

四、(6 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $AB^T - C$.

五、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 且矩阵 A, X 满足 $AX = A + 2X$, 求矩阵 X .

六、(12 分) 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求该向量组

的秩及一个极大无关组, 并写出其余向量用此极大无关组的线性表示式.

。

七. (14 分) 已知方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 3 \\ x_2 + px_3 + qx_4 = q - 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (q - 2)x_4 = q + 3 \end{cases}$$
 问 p, q 取何值时方程组有唯一解? 无

解? 有无穷多解? 在有无穷多解的情况下, 求其通解.

八、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 判断 A 是否可以对角化, 若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆

矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

九、证明题: (6 分)

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 设 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$, 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关的.

一. 选择题:

1. D 2. C 3. B 4. D 5. B 6. B 7. C 8. D

二. 填空题:

$$1. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad 2. -6 \quad 3. \frac{1}{4}(A-E).$$

4. -3 5. 0 6. 4

$$\text{三. 解: } A_{31} + A_{32} + 2A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{r_2 - r_1}{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \\ 12 & 1 & -2 \end{vmatrix} \frac{r_2 - r_1}{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -48 \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{四. 解: } AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore AB^T - C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

五. 解: 由 $Ax = A + 2x$, 得 $(A - 2E)x = A$

因为 $|A - 2E| = 1 \neq 0$, 所以 $A - 2E$ 可逆, 因此 $x = (A - 2E)^{-1} A \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$\text{由 } A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ 知, } (A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{六. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

∴极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (8分)

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \quad (10分)$$

$$\alpha_5 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 \quad (12分)$$

七. 解 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 1 & 1 & 2 & q-2 & q+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix}. \quad (4分)$$

(1) 当 $p \neq 2, q \neq 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 4 = n$, 方程组有唯一解. (6分)

(2) 当 $q = 1$ 时, $r(A) = 3, r(\bar{A}) = 4$, 方程组无解 (8分)

(3) 当 $p = 2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-4 \end{pmatrix},$$

此时, 若 $q \neq 4$, $r(A) = 3, r(\bar{A}) = 4$, 方程组无解; (10分)

若 $q = 4$, $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解,

令 $x_3 = 0$, 得特解 $\eta = (10, -7, 0, 2)^T$

令 $x_3 = 1$ 得基础解系 $\xi = (0, -2, 1, 0)^T$.

于是, 原方程组的通解为 $x = \eta + k\xi$, 其中 k 为任意常数. (14分)

八. 解矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

由此解得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,4分

$\lambda_1 = 1$ 相应的特征向量为 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$;

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 相应的特征向量为 $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$,

因为 A 有三个线性无关的特征向量, A 可以与对角阵相似.8分

$$\text{取 } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{.....10分}$$

九. 证明: 若存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0,$$

$$\text{即方程组} \begin{cases} k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \\ 2k_1 - k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又因为该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以, A 的秩为 $2 < 3$, 方程组有非零解. 所以存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 . 故

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关的. \dots\dots\dots 6 分

浙江工商大学 2016 / 2017 学年第一学期考试试卷(A)

课程名称:《线性代数(文)》 考试方式:闭卷 完成时限:120 分

班级名称: _____ 学号: _____ 姓名: _____

题号	一	二	三	四	总分
分值	20	15	55	10	100
得分					
阅卷人					

一、填空题(每小题 2 分,共 20 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}};$

2. 设 A, B 为三阶方阵, 且 $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|3A^*B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}};$

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, 则 $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ 的

逆矩阵 $A_1^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$

4. 若向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (0, 2, 3, 4)^T, \alpha_3 = (0, 0, 3, 4)^T$, 则它们是线性 ;

5. 设 A 是 4×3 矩阵, $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 0 & -7 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$, 则参数 a, b, c 分别为 ;

6. 设 n 阶矩阵 A , 满足 $A^2 - A + E = 0$, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$

7. 两个等价的 向量组所含的向量个数相等;

8. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系含 个解向量;

9. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 而 λ_1, λ_2 是 A 的两个特征值, $\lambda_1 \lambda_2 = \underline{\hspace{2cm}};$

10. 已知 A 是三阶方阵, 且 $|A+2E|=0$, $|A+3E|=0$, $|A+E|=0$, 则 $r(A)=$ _____.

二、单项选择(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列结论中不成立的是().

A. 若矩阵 A 为 n 阶方阵, $A=0$ 则 $|A|=0$

B. 若 $r(A)=0$ 则 $A=0$

D. 若矩阵 A 为 n 阶方阵, 则 $|-A|=(-1)^n|A|$

D. $|AB|=|A||B|$

2. 设 n 阶方阵 A 可逆($n \geq 2$), A^* 是 A 的伴随矩阵, 则().

A. $|A^*|>0$

B. $|A^*| \neq 0$

C. $|A|>0$

D. $|A^*|=0$

3. 若向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 秩为 r , 则().

A. 向量组中任意 $r+1$ 个向量线性相关

B. 向量组中任意 r 个向量线性无关

C. $r < s$

D. 向量组的极大线性无关组所含的向量个数小于 r

4. 设 A 是 3×4 矩阵, 若()成立, 非齐次线性方程组 $AX=b$ 必有解;

A. $r(A)=1$

B. $r(A)=2$

C. $r(A)=3$

D. $r(A, b)=3$

5. 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B ().

A. 特征矩阵相似

B. 特征向量相同

C. 特征矩阵相同

D. 相似于同一对角矩阵

三、计算题(本题共 55 分)

1. 已知四阶行列式: $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 9 & -2 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 6 & 9 \\ -2 & 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$, 计算 $9A_{11}+2A_{21}+5A_{31}+4A_{41}$ 的值. (9 分)

2. 设矩阵 A 和 X 满足: $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X. (10 分)

3. 给定向量组 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, 4, -9, -16)^T$, $\alpha_4 = (7, 1, 0, -1)^T$. 求 (1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩并判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性; (2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 一个极大线性无关组, 并将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示. (12 分)

4. 判断 λ 取什么值时方程组有解, 若有解求出它的全部解. (在有无穷多解时用导出组的基础解系表示)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = \lambda \end{cases} \quad (12 \text{ 分}).$$

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可以对角化, 若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆矩阵

P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. (12 分)

四.证明题(请写出完整证明过程)(10 分)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = 0$. 求证: $r(A) + r(B) \leq n$ (10 分)

浙江工商大学 2016 / 2017 学年第一学期考试试卷(A)

参考答案

一、填空题(每小题 2 分,共 20 分)

1. $5!$ 2. -36

$$3. A_1^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix} \quad 4. \text{无关}$$

5. $-1, 1, -7$ 6. $(-A)$

7. 无关

8. 2

9. $ad - bc$

10. 3

二、单项选择(每小题 3 分,共 15 分)

D. B A C C A

三、计算题(本题共 55 分)

$$1. \text{解: } 9A_{11} + 2A_{21} + 5A_{31} + 4A_{41} = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 7 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 1 & 9 \\ 4 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -145 \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$2. \text{解: } AA^*X = AA^{-1} + 2AX \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$|A|X - 2AX = E \quad |A| = 4 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$2(2E - A)X = E \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$X = \frac{1}{2}(2E - A)^{-1} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$3. A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, $\alpha_3 = \alpha_1 - 5\alpha_2$ $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

4. 解: $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 8 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

当 $\lambda = 8$ 时方程组有解, 且有无穷多解。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{同解方程为} \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 19 \\ x_2 = x_3 - 7 \\ x_3: \text{自由未知量} \end{cases}$$

令 $x_3 = 0$ 特解: $X_0 = (19, -7, 0)^T$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{导出组的同解方程为} \begin{cases} x_1 = -7x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3: \text{自由未知量} \end{cases}$$

令 $x_3 = 1$ 基础解系为: $X_1 = (-7, 1, 1)^T$ $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

原方程的全部解: $X_0 + kX_1$ (k 为任意实数) $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

5. 解: A 的特征方程: $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$

特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ 三个单根, A 可以对角化。 $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

当 $\lambda_1 = 2$ 时 $(2E - A)X = 0$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量为 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$ $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 $\lambda_2 = -1$ 时 $(-E - A)X = 0$

$$-E - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量为 $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$

.....8 分

当 $\lambda_3 = 1$ 时 $(E - A)X = 0$

$$E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量为 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$

.....10 分

$$\text{令: } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使得: $P^{-1}AP = \Lambda$

.....12 分

四.证明简答题(10 分)

证明: 设 $r(A) = r$ $B = (B_1, B_2, \dots, B_s)$

则 $AB = (AB_1, AB_2, \dots, AB_s) = 0$, 得: $AB_i = 0$

即 B_i 是 $AX = 0$ 的解。 ($i = 1, 2, \dots, s$)

.....4 分

证明 (1) 若 $r = 0$, 则 $A = 0$, $r(A) + r(B) \leq n$

.....6 分

(2) 若 $r = n$, 则 $AX = 0$ 只有零解, 即 $B_i = 0$, $B = 0$ $r(B) = 0$ 则 $r(A) + r(B) \leq n$

.....8 分

(3) 若 $0 < r < n$, $AX = 0$ 的基础解系含 $n - r$ 个解向量, B_i 可以由 $AX = 0$ 的基础解系线性表示, $r(B) = r(B_1, B_2, \dots, B_s) \leq n - r = n - r(A)$

即 $r(A) + r(B) \leq n$

.....10 分

浙江工商大学 2018 / 2019 学年第一学期考试试卷(A)

课程名称:《线性代数(文)》 考试方式:闭卷 完成时限:120 分

班级名称: _____ 学号: _____ 姓名: _____

题号	一	二	三	四	总分
分值	15	15	65	5	100
得分					
阅卷人					

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 若设行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 则 $A_{14} + 2A_{24} + 3A_{34} + 5A_{44} =$ _____,

其中 A_{i4} 为行列式对应元素的代数余子式。

2. 设 4 阶矩阵 $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, $B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且行列式 $|A| = a, |B| = b$, 则行列式 $|A+B|$ 为_____.

3. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 n 阶可逆阵, $R(A) = 2$, 则 $R(AB) =$ _____。

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量,

$$r(A) = 2, \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2)^T,$$

则 $Ax=b$ 的通解为_____.

5. 已知 A 是三阶方阵, 且 $|A+2E|=0, |A+3E|=0, |A+E|=0$, 则伴随阵对应的行列式 $|A^*| =$ _____.

二、单项选择(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 A 为 n 阶方阵, 则下面命题正确的是 ()

(A) 若 $r(A) = n$, 则 $|A| = 0$ (B) 若 $r(A) < n$, 则可能存在 B , 使 $AB = E$

(C) 若 $AB=AC$, 则 $B=C$ (D) 若 $|A| \neq 0$, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$

2. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 且 $ABC=E$ (E 为 n 阶单位矩阵), 则必有 ()

(A) $BCA=E$ (B) $BAC=E$ (C) $CBA=E$ (D) $ACB=E$

3. 若向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 秩为 r , 则 () .

(A) 向量组中任意 $r+1$ 个向量线性相关

(B) 向量组中任意 r 个向量线性无关

(C) $r < s$

(D) 向量组的极大线性无关组所含的向量个数小于 r

4. 齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 1)^T$,

则必有 ()

(A) A 是 3×5 矩阵

(B) $R(A) = 2$

(C) A 是 2×4 矩阵

(D) A 的列向量组线性无关

5. 若 A 与 B 相似, 且 A 可逆, 则下面说法不对的是 ()

(A) A 与 B 的特征值相同

(B) A 与 B 的特征向量相同

(C) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(D) $|A| = |B|$

三、计算题 (本题共 65 分)

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值, 其中 $x \cdot y \neq 0$. (8 分)

2. 已知 A 、 B 是三阶矩阵, 且满足 $AB - 2B = 4A$,

1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆,

2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A . (12 分)

3、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 试求 A'' (7 分)

4、求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组,

并将其余向量用该极大无关组线性表示.(12 分)

5. 问 k 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$
 有唯一解、无解、有无穷多组解?

在有无穷多组解的情况下求出其通解 (用基础解系表示). (12 分)

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可以对角化, 若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆

矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. (12 分)

四.证明题 (5 分)

设 A 是三阶奇异矩阵, 且满足线性方程组 $(A+2E)x=0$ 有两个线性无关的解,

- 1) 证明 $|A+2E|=0$;
- 2) 写出 A 的特征值, 并证明 A 可对角化;

浙江工商大学 2018 / 2019 学年第一学期考试试卷(A)

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. -1, 2, $8a+8b$, 3, 2, 4, $\frac{(1,2,1)^T}{2} + k(1 \ 1 \ -1)$, 5, 36

二、单项选择(每小题 3 分,共 15 分)

1. D 2. A 3. A 4. B 5. B

三、计算题(本题共 65 分)

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值. (8 分)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} \quad 4 \text{ 分}$$

$$= -x^2 y^2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{x}-1 & \frac{1}{-x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{-y} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x^2 y^2 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{-x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{-y} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 y^2 \quad 4 \text{ 分}$$

2. 已知 A, B 是三阶矩阵, 且满足 $AB - 2B = 4A$,

①证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆,

②若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A . (12 分)

解: ① 由 $AB - 2B = 4A$, 得 $(A - 2E) \frac{(B - 4E)}{8} = E$,

故 $(A-2E)$ 可逆, 且 $(A-2E)^{-1} = \frac{B-4E}{8}$ (4 分)

②由 $(A-2E)\frac{(B-4E)}{8} = E$, 得 $(A-2E) = 8(B-4E)^{-1}$,

从而 $A = 2E + 8(B-4E)^{-1}$, (2 分)

$$\text{而 } (B-4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}, \text{ (4 分)}$$

$$\text{故 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ (2 分)}$$

3、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 试求 A^n (7)

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \text{ 分}$$

$$A^n = 14^{n-1} A \quad 4 \text{ 分}$$

4. 用行初等变换求列秩: 将所给列向量组成矩阵, 并施以行变换, 得到阶梯形阵.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2-4r_1 \\ r_3-r_1 \\ \frac{1}{2}r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3-r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_4-3r_3 \\ \frac{1}{3}r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma, \quad 8 \text{ 分}$$

阶梯形矩阵的非零行数为 3, 所以向量组的秩为 3. 记 $\Sigma = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, 显然 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 Σ 的极大线性无关组, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也是 A 列极大线性无关组的. 由观察法得到 2 分

$$\beta_4 = \beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3,$$

所以

$$\alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3. \quad 2 \text{ 分}$$

5. 问 k 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$
 有唯一解、无解、有无穷多组解? 在有无穷多组解

的情况下求出其通解. (12)

解 对其增广矩阵进行初等行变换, 即

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + \frac{k+1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \\ 0 & 0 & (k+1)(4-k)/2 & k(k-4) \end{array} \right) \end{aligned} \quad 4 \text{ 分}$$

(1) 当 $k \neq -1$ 且 $k \neq 4$ 时, $r(\bar{A}) = r(A) = 3$, 故方程组有唯一解; 2 分

(2) 当 $k = -1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$, 因 $r(\bar{A}) \neq r(A)$, 故方程组无解; 2 分

(3) 当 $k = 4$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, 因 $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 3$, 故方程组有无穷多组解.

所以非齐次方程组的通解为
$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in R. \quad (4 \text{ 分}).$$

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可以 diagonal 化, 若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆矩阵 P ,

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. (12 分)

解: 特征矩阵为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 (\lambda - 6) \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

当 $\lambda_1 = -3$ 特征值为 $\alpha_1 = (-2 \ 1 \ 0)^T$, $\alpha_2 = (-2 \ 0 \ 1)^T$; 3 分

当 $\lambda_2 = 6$ 特征值为 $\alpha_3 = (1 \ 2 \ 2)^T$, 3 分

所以: $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$ 2 分

四.证明题 (5 分)

解: 1) 线性方程组有非零解对应行列式为零 2 分

2) 特征值为 0, -2 可对角化 3 分

线性代数(文)复习题(一)

一、填空题

1、设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$, $|A| = 2$, $|B| = 3$, 则 $|2A - B| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、已知向量 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则

$A^n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、若向量组 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (k, 3, 0)^T$, $\alpha_3 = (-1, 4, k)^T$ 线性相关, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、单项选择题

1、矩阵 A 在()时, 其秩可能被改变。

- (A) 乘以奇异矩阵 (B) 乘以非奇异矩阵
(C) 进行初等行变换 (D) 转置

2、要使 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $AX = 0$ 的解, 只要系数矩阵 A 为()。

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3、设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则()。

- (A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关 (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关
(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关 (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关

4、设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $AX = 0$ 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是()。

- (A) 若 $AX = 0$ 仅有零解, 则 $AX = b$ 有唯一解
(B) 若 $AX = 0$ 有非零解, 则 $AX = b$ 有无穷多解
(C) 若 $AX = b$ 有无穷多个解, 则 $AX = 0$ 仅有零解
(D) 若 $AX = b$ 有无穷多个解, 则 $AX = 0$ 有非零解

5、设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论中正确的是()。

- (A) A 的任意 m 个列向量必线性无关
(B) A 的任意 m 阶子式不等于零
(C) 若矩阵 B 满足 $BA = O$, 则 $B = O$
(D) A 通过初等行变换, 必可以化为 (E_m, O) 的形式

三、设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ ，求第四行各元素余子式之和。

四、设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ，且满足 $AB = A + 2B$ ，求矩阵 B 。

五、已知 A, B 为 3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$ ，其中 E 是 3 阶单位矩阵。

(1) 证明：矩阵 $A - 2E$ 可逆，并求其逆矩阵；

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A 。

六、设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (7, 0, 14, 3)^T$ ， $\alpha_3 = (2, -1, 0, 1)^T$ ， $\alpha_4 = (5, 1, 6, 2)^T$

(1) 求向量组的秩；

(2) 求向量组的一个极大无关组，并把其余向量分别用此极大无关组线性表出。

七、问 a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1. \end{cases}$$

有惟一解，无解，有无穷多组解？并求出有无穷多组解时的通解。

八、设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示，但不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示，证明： α_r 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示。

线性代数(文)复习题(二)

一、单项选择题

1、若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$, 则 $\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{13} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & -2a_{23} & -2a_{22} \\ -2a_{31} & -2a_{33} & -2a_{32} \end{vmatrix}$ 等于()。

(A) 6 (B) -6 (C) 24 (D) -24

2、下列 n 阶行列式的值必为零的是()。

- (A) 主对角元全为零
(B) 三角形行列式中有一个主对角元为零
(C) 零元素的个数多于 n 个
(D) 非零元素的个数小于零元素的个数

3、已知矩阵 $A_{3 \times 2}$, $B_{2 \times 3}$, $C_{3 \times 3}$ 则下列运算可行的是()。

- (A) AC (B) CB
(C) ABC (D) $AB - BC$

4、若 A, B 均为 n 阶非零矩阵, 且 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, 则必有()。

- (A) A, B 为对称矩阵 (B) $AB = BA$
(C) $A = E$ (D) $B = E$

5、设齐次线性方程组 $\begin{cases} kx + z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 k 的值为()。

(A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) -2

6、若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则一定有()。

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性相关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ 线性相关
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性无关 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ 线性无关

7、设 A, B 是同阶实对称矩阵, 则 AB 是()。

- (A) 对称矩阵 (B) 非对称矩阵
(C) 反对称矩阵 (D) 以上均不对

二、填空题

1、行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、 A, B 均为 3 阶方阵, $A = 2B$, 且 $|A| = 3$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、若 A, B 为可逆矩阵, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 _____。

4、设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $r(A) =$ _____。

5、设 $\alpha_1 = (-1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 4, 1)$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性 _____ 关。

三、计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

四、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $AB^T - C$ 。

五、解矩阵方程 $AX + B = X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ 。

六、试求向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 0, 1, 0)^T$, $\alpha_4 = (-3, -2, 3, 0, 1)^T$, $\alpha_5 = (-2, -1, 3, -3, 3)^T$ 的一个最大无关组, 并写出其余向量用此最大无关组的线性表示式。

七、设方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \\ 4x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 5x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \end{cases},$$

解此方程组, 并用其导出组的基础解系表示全部解。

八、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = O$ 的一个基础解系, 证明: $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也是 $AX = O$ 的一个基础解系。

九、证明: 如果 $A^2 = A$, 但 A 不是单位矩阵, 则 A 必为奇异矩阵。

线性代数(文)复习题(三)

一、填空题

1、设四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 则 $A_{34} =$ _____。

2、 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix} =$ _____。

3、设 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____。

4、三阶矩阵 A 按列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$, 且 $|A| = 1$, 则 $|A_2 - 2A_3, A_2 - 3A_1, A_1|$
=_____。

5、 A 为三阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 已知 $|A| = -2$, 则 $|A^*| =$ _____。

6、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r(A) =$ _____。

7、 A 为三阶矩阵, 且 $|A| = 3$, 则 $|2(A^{-1})^2 - (2A^2)^{-1}| =$ _____。

8、设 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (3, 5, 6)^T$, 且有 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$, 则 $x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____; $x_3 =$ _____。

9、若向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (3, -1, 2)$, $\alpha_3 = (2, 3, a)$ 线性相关, 则 $a =$ _____。

二、单项选择题

1、设 α_1, α_2 是 $AX = O$ 的解, β_1, β_2 是 $AX = B$ 的解, 则()。

(A) $2\alpha_1 + \beta_1$ 是 $AX = O$ 的解

(B) $\beta_1 + \beta_2$ 是 $AX = B$ 的解

(C) $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 $AX = O$ 的解

(D) $\beta_1 - \beta_2$ 是 $AX = B$ 的解

2、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是()。

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不是零向量

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有部分向量线性无关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) 有一组数 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 使得 $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

3、设 A 是 n 阶可逆矩阵, B 是 n 阶不可逆矩阵, 则()。

(A) $A+B$ 是可逆矩阵 (B) $A+B$ 是不可逆矩阵

(C) AB 是可逆矩阵 (D) AB 是不可逆矩阵

4、已知 B 为可逆阵, 则 $\{[(B^{-1})^T]^{-1}\}^T = ()$ 。

(A) B (B) B^T (C) B^{-1} (D) $(B^{-1})^T$

三、计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 的值。

四、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$ 。

五、设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$ 。求它们的秩, 及其一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组表示。

六、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 BA^T 。

七、设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $(A^*)^{-1}$ 。

八、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 设 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$, 判断 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关的。

九、对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases},$$

讨论 λ 取何值时, 方程组无解, 有唯一解和有无穷多组解。在方程组有无穷多组解时, 试用其导出组的基础解系表示全部解。

十、证明题

已知 $E+AB$ 可逆, 试证 $E+AB$ 也可逆, 且 $(E+BA)^{-1} = E - B(E+AB)^{-1}A$ 。

线性代数(文)复习题(一)参考答案

一、填空题

1、解 $|2A-B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2c_1-d_1 \\ a_2 & b_2 & 2c_2-d_2 \\ a_3 & b_3 & 2c_3-d_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 2|A| - |B| = 1。$

2、解 注意到 $\beta\alpha^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$, 故

$$A^n = \underbrace{(\alpha^T \beta)(\alpha^T \beta) \cdots (\alpha^T \beta)}_{n \uparrow \alpha^T \beta} = \alpha^T \underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T) \cdots (\beta\alpha^T)}_{(n-1) \uparrow \beta\alpha^T} \beta = 3^{n-1} \alpha^T \beta = 3^{n-1} A。$$

注: 若先写出 A , 再求 A^2, \dots, A^n , 此法不可取。

3、解 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & k & k-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = 3(k-1) - 4k = 0。$$

由此解得 $k = -3$ 。

二、单项选择题

1、解: 答案为 A 。

2、解 我们知道, 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 是齐次线性方程组 $AX = O$ 的 k 个线性无关的解向量, $AX = O$ 的任一解为向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 的线性组合, 则 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ 为 $AX = O$ 的基础解系, 且所含解向量的数目 $k = n - r(A)$, 其中 n 为矩阵 A 的列数。

由于 ξ_1, ξ_2 为 $AX = O$ 的解, 知 $n = 3$ 。又因 ξ_1 与 ξ_2 是线性无关的, 故 $k \geq 2$ 。因而 $r(A) \leq 1$, 而(A)、(B)、(C)、(D)四个选项中满足 $r(A) \leq 1$ 的矩阵只有(A)项中的 $(-2, 1, 1)$ 。

3、解 根据定理“若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 并且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性相关”, 即若多数向量可以由少数向量线性表出, 则这多数向量必线性相关, 故应选(D)。

4、解 方程组 $AX = b$ 与其对应的齐次线性方程组 $AX = O$ 的解之间有密切的关系。正确作答本题要求掌握以下结论:

(1)非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的充要条件为方程组的增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩。

(2)在非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的条件下, 解惟一的充分必要条件是齐次线性方程组 $AX = O$ 只有零解。

(3)非齐次线性方程组 $AX = b$ 的任意两个解之差是齐次线性方程组 $AX = O$ 的解。

由于题干及(A)、(B)项中均未指明 $AX = b$ 有解, 即 A 的秩不一定等于增广矩阵 \bar{A} 的秩,

故(A)、(B)两项为干扰项。由结论(3)知(D)为正确选项。

6、解 应选(C)。

由于 $r(A_{m \times n}) = m$ ，表明矩阵 A 的秩等于行数，即 A 的行向量必线性无关。根据矩阵秩的性质：行向量的秩等于列向量的秩，因此 A 的列向量的秩等于 m 。由于 $m < n$ (列数)，故一定存在 m 个列向量线性无关，但并不是任意 m 个列向量线性无关，故(A)不成立。

根据矩阵秩的等价定义， $r(A) = m$ 表明 A 至少存在一个 m 阶子式不等于零，但并不要求任意一个 m 阶子式均不等于零，故(B)不成立。

(D)也是不成立的。若(D)成立，则存在 k 个行变换 P_1, P_2, \dots, P_k ，使 $P_1 P_2 \dots P_k A = (E_m, O)$ ，即 $A = (P_1^{-1} P_2^{-1} \dots P_m^{-1}, O)$ ，说明 A 的后 $n - m$ 列均为零向量，显然题目未作这种要求。

(C)为正确选项。设 A^T 的 m 个列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，因此，方程组 $A^T X = O$ 仅有零解。若 $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ ， β_i 是 m 维行向量满足 $BA = O$ ，即

$$A^T B^T = A^T (\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T), \text{ 即 } A^T \beta_i^T = O, i=1, 2, \dots, m, \text{ 故 } B = O。$$

三、解 设 $M_{4i} (i=1, 2, 3, 4)$ 为第四行各元素余子式，对应代数余子式记为 $A_{4i} (i=1, 2, 3, 4)$ ，则

$$\begin{aligned} M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} &= -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 14 \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 28(3-4) = -28。 \end{aligned}$$

四、解 由 $AB = A + 2B$ 可得 $(A - 2E)B = A$ ，。矩阵

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{又 } |A - 2E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ 故 } A - 2E \text{ 可逆, 从而 } B = (A - 2E)^{-1} A。$$

下面用初等行变换法求 $(A - 2E)^{-1}$ 。

$$(A - 2E | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)。$$

于是 $(A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}。$

因此 $B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}。$

注 因为 $B = (A-2E)^{-1}A$ ，也可以不求 $(A-2E)^{-1}$ 而用初等行变换直接求出 B 。方法如下：

$$(A-2E|A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right)，$$

所以 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}。$

五、解 (1) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 知， $AB - 4A - 2B = O$ ，

从而 $(A-2E)(B-4E) = 8E$ ，或 $(A-2E) \cdot \frac{1}{8}(B-4E) = E$ ，

故 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B-4E)$ 。

(2) 由(1)知， $A = 2B(B-4E)^{-1}$ ，而

$$(B-4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}，$$

故 $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}。$

六、解

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -21 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[r_3 \div (-4)]{r_2 \div (-7)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_2 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

所以向量组的秩为 3。

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为其一个极大无关组, 且 $\alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3$ 。

七、解 对方程组的增广矩阵进行初等行变换:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right),
\end{aligned}$$

当 $a \neq 1$ 时, $r(\bar{A}) = r(A) = 4$, 方程组有惟一解。

当 $a = 1, b \neq -1$ 时, $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解。

当 $a = 1, b = -1$ 时, $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 4$, 方程组有无穷多组解, 这时, 得同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = 0$, 由此得到一个特解为: $\eta_0 = (-1, 1, 0, 0)^T$ 。

另外, 原方程组的导出组的同解方程组为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

依次令 $x_3 = 1, x_4 = 0; x_3 = 0, x_4 = 1$ 得到一个基础解系: $\eta_1 = (1, -2, 1, 0)^T, \eta_2 = (1, -2, 0, 1)^T$ 。

于是原方程组的通解为:

$$\eta = \eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

九、证 用反证法。若

$$\alpha_r = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1}, \quad (1)$$

又已知

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1} + l_r\alpha_r, \quad (2)$$

将(2)代入(1)，整理得

$$\beta = (l_1 + k_1l_r)\alpha_1 + \cdots + (l_{r-1} + k_{r-1}l_r)\alpha_{r-1},$$

这与 β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表示的假设矛盾，所以得证 α_r 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表示。

线性代数(文)复习题(二)参考答案

一、单项选择题

1、解 根据行列式的性质, 有

$$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{13} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & -2a_{23} & -2a_{22} \\ -2a_{31} & -2a_{33} & -2a_{32} \end{vmatrix} = (-2)^3(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-2)^3(-1) \times 3 = 24。$$

故选(C)。

2、解 答案为 **B**。

3、解 两矩阵 A 与 B 可以相乘的条件是: 矩阵 A 的列等于矩阵 B 的行, 依此条件, 应选(C)。

4、解 因为 $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$, 矩阵的乘法一般不满足交换律, 只有当 $AB = BA$ (A 与 B 可交换) 时, 上式成立, 故选(B)。

5、解 该齐次线性方程组有 3 个方程, 3 个未知数, 则根据克莱姆法则, 当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2k - 4 = 0$$

时, 有非零解。故选(A)。

6、解 本题要求掌握以下结论:

(1) 若在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中, 由部分向量构成的向量组线性相关, 则整个向量组必线性相关(部分相关整体必相关);

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则任意抽取部分向量构成的向量组必无关(整体无关部分必无关)。

因此, (A)、(C) 均不能肯定, (D) 也是不一定的。故选(B)。

7、解 答案为 **D**。

二、填空题

1、解法 1 利用反对角行列式 $\begin{vmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ & \ddots & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n。$

解法 2 由于此行列式只有 4 阶, 也可以按某一行(列)展开后计算结果。

2、解 因为 $B = \frac{1}{2}A$, 所以 $|B| = \left|\frac{1}{2}A\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |A| = \frac{3}{8}。$

3、应填 $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}。$

注 应记住以下几个常用结论:

$$(1) \text{ 若 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ 且 } A_i \text{ 均可逆, 则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{ 若 } A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ A_s & & \end{pmatrix}, \text{ 且 } A_i \text{ 均可逆, 则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}.$$

$$(3) \text{ 若 } X = \begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}, \text{ 且 } A, C \text{ 均可逆, 则 } X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(4) \text{ 若 } X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \text{ 且 } A, C \text{ 均可逆, 则 } X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(5) \text{ 若 } X = \begin{pmatrix} O & A \\ C & B \end{pmatrix}, \text{ 且 } A, C \text{ 可逆, 则 } X^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

$$(6) \text{ 若 } X = \begin{pmatrix} B & A \\ C & O \end{pmatrix}, \text{ 且 } A, C \text{ 可逆, 则 } X^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \end{pmatrix}.$$

4、解 因为

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 A 的秩为 2。

5、线性相关。

$$\text{解 因为 } |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 所以 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关.}$$

$$\text{三、解 原式} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 6.$$

$$\text{四、解 } AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } AB^T - C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

五、解 由 $AX + B = X$, 可得 $(A - E)X = -B$, 而

$$(A - E | -B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array} \right),$$

所以 $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ 。

六、解 由

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_5-r_1]{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_5-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_5+2r_3]{-\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_5+2r_4]{\frac{1}{4}r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+3r_4]{r_3+4r_4, r_2+2r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。
 \end{aligned}$$

所以取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为一个极大无关组，且 $\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$ 。

七、解 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & 8 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 4 & \frac{71}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$

令 $x_4 = x_5 = 0$ ，由此得到原方程组的一个特解：

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{71}{2} \\ 2 \\ -\frac{11}{2} \\ -\frac{9}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

令 $x_4 = 1, x_5 = 0; x_4 = 0, x_5 = 1$ 得到导出组的一个基础解系：

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ 2 \\ -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

所以原方程组的全部解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \gamma$ ，其中 k_1, k_2 为任意常数。

八、证 显然 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均为 $AX = O$ 的解。

令 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ ，即

$$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0，$$

$$(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0。$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = O$ 的一个基础解系，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}。$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关，且个数与原基础解系中所含的向量个数同为 3，故也为基础解系

九、证 用反证法。

假设 A 可逆，且其逆矩阵为 A^{-1} 。因为 $A^2 = A$ 。所以

$$A^2 - A = A(A - E) = O，$$

即 $A^{-1}A(A - E) = O$ 。

由此得 $A - E = O$ ， $A = E$ ，这与 A 不是单位矩阵矛盾！因此 A 不可逆，即 $|A| = 0$ ，所以 A 必为奇异矩阵。

线性代数(文)复习题(三)参考答案

一、填空题

1、解 $A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$

2、应填 abdf。

解 按第一行或第一列展开即可。

3、解 设 $B_1 = (2)$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $B_1^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)$, $B_2^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 。

于是 $A^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 0 & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

4、解 交换该行列式中两列的位置, 则

$$\text{原式} = -|A_1, A_2 - 3A_1, A_2 - 2A_3| = -|A_1, A_2, A_2 - 2A_3| = -|A_1, A_2, -2A_3| = -(-2)|A| = -2。$$

5、解 $|A^*| = |A||A^{-1}| = \frac{(-2)^3}{-2} = 4。$

6、解 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

所以 $r(A) = 3。$

7、解 原式 $= \left| 2(A^{-1})^2 - \frac{1}{2}(A^{-1})^2 \right| = \left| \frac{3}{2}(A^{-1})^2 \right| = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{|A|^2} = \frac{3}{8}。$

8、 $x_1 = \underline{1}; x_2 = \underline{-3}; x_3 = \underline{2}。$

9、解 因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则有

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = -7a + 35 = 0,$$

解得 $a = 5。$

二、单项选择题

1、解 根据非齐次方程组解的性质可知选(C)。

2、解 选项(A), (B)都只是向量组线性无关的必要条件, 而不是充分条件。选项(D)

是错误的, 若将“有一组数”改为“当且仅当”时才为正确。所以选(C)。

3、解 由题设知 $|A| \neq 0$, $|B| = 0$, 所以 $|AB| = |A||B| = 0$, 即 AB 是不可逆矩阵, 应选(D)。
但是当 A 可逆, B 不可逆时, $A+B$ 是否可逆不能一概而论, 例如,

若取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 可逆, B 不可逆, 但 $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是不可逆的。

若取 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 C 不可逆的, 但 $A+C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是可逆的。故(A),(B)是不正确的。

4、解 $\{[(B^{-1})^T]^{-1}\}^T = \{[(B^T)^{-1}]^{-1}\}^T = (B^T)^T = B$, 故选(A)。

$$\begin{aligned} \text{三、解} \quad & \text{原式} \frac{r_1 - 2r_2}{r_4 + r_2} \begin{vmatrix} 0 & -11 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第1列展开}} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -11 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & \frac{c_1 + c_2}{-} \begin{vmatrix} -6 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 40。 \end{aligned}$$

四、解 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E) = (A+2E)^{-1}[(A-2E)(A+2E)]$

$$= [(A+2E)^{-1}(A-2E)](A+2E) = E(A+2E) = A+2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}。$$

$$\text{五、解} \quad (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以所求向量组的秩为3, 取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为其一个极大无关组, 且

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2。$$

$$\text{六、解} \quad BA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}。$$

七、解 由 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$ 和 $|A^{-1}| = -1$, 又因为 A 是 A^{-1} 的逆矩阵, 可以求得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}。$$

八、解 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关的, 则存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0,$$

即方程组
$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \\ 2k_1 - k_2 + 3k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解。又因为该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 A 的秩为 $2 < 3$, 方程组有非零解。所以存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 。故

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关的。

九、解 因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2,$$

(1) 当 $\lambda \neq -2$ $\lambda \neq 1$ 时, 由克莱姆法则知方程组有唯一解。

(2) 当 $\lambda = -2$ 时, 对增广矩阵作高斯消元, 有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

第一个方程矛盾, 故方程组无解。

(3) 当 $\lambda = 1$ 时, 有

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $r(A) = r(\bar{A}) = 1 < 3$, 故方程组有无穷多组解。又由此可得与原方程组同解的方程组为 $x_1 = -2 - x_2 - x_3$ 。令 $x_2 = x_3 = 0$, 得其特解 $u_0 = (-2, 0, 0)^T$ 。

与原方程组的导出组同解的方程组为 $x_1 = -x_2 - x_3$ 。由此可得基础解系为 $v_1 = (-1, 1, 0)^T$, $v_2 = (-1, 0, 1)^T$ 。

原方程组的全部解为

$$x = u_0 + k_1 v_1 + k_2 v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 是任意常数。}$$

十、证 因为

$$\begin{aligned}
(E+BA)(E-B(E+AB)^{-1}A) &= E+BA-B(E+AB)^{-1}A-BAB(E+AB)^{-1}A \\
&= E+BA-B(E+AB)(E+AB)^{-1}A=E+BA-BA=E。
\end{aligned}$$

故可知 $E+BA$ 是可逆，且 $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$ 。

注 本题若没有给出条件：已知 $E+AB$ 可逆，一般的证法如下：

因为 $(E+AB)A=A+ABA=A(E+BA)$ ，故

$$A=(E+AB)^{-1}A(E+BA)，$$

而 $E=E+BA-BA=(E+BA)-B(E+AB)^{-1}A(E+BA)=E-B(E+AB)^{-1}A(E+BA)$ 。

由此知 $E+BA$ 也可逆，且 $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$ 。