浙江工商大学 2014 /2015 学年第 2 学期考试试卷(A)

课程名称：线性代数(文) 考试方式：闭卷 完成时限：120 分钟

班级名称：________________ 学号：__________ 姓名：__________.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分 值	16	18	8	6	10	12	14	10	6	100
得 分										
阅卷人										

一、单项选择题(每小题 2 分,共 16 分)

1. 设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{11}-2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{21}-2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{31}-2a_{33} \end{vmatrix}=$(　　　).

A. 16　　B. -16　　C. 8　　D. -8

2. 设A和B均为$n\times n$矩阵, 则必有(　　　).

A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $AB=BA$

C. $|AB|=|BA|$　　D. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

3. 若矩阵A与B相似, 则(　　　).

A. $\lambda E-A=\lambda E-B$　　B. $|A|=|B|$

C. A, B有相同的特征向量　　D. A与B均与一个对角矩阵相似

4. 线性方程组$\begin{cases} kx_1+x_3=0 \\ 2x_1+kx_2+x_3=0 \\ kx_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解，则$k$的值为（　　　　）.

A. 0　　B. -2　　C. -1　　D. 2

5. 设A为三阶矩阵，$|A|=a$，则其伴随矩阵A^*的行列式$|2A^*|=$(　　　　).

A. $2a^2$　　B. $8a^2$　　C. $2a^3$　　D. $8a^3$

6. 设α_1,α_2是线性方程组$Ax=O$的解，β_1,β_2是$Ax=b$的解，则(　　　).

A. $2\alpha_1+\beta_1$是$Ax=O$的解　　B. $\alpha_1+\alpha_2$是$Ax=O$的解

C. $\beta_1+\beta_2$是$Ax=b$的解　　D. $\beta_1-\beta_2$是$Ax=b$的解

7. 设向量组α,β,γ线性相关, 则α,β,γ中(　　　).

A. 任一个都可用其余两个线性表示

B. 至少有一个是零向量

C. 至少有一个可用其余两个线性表示

D.任一个都不能用其余两个线性表示

8.设n阶方阵A,B,C满足$ABC=E$，其中E为单位矩阵，则下列正确的是（　　　）.

A. $ACB=E$　B. $CBA=E$　C. $BAC=E$　D. $BCA=E$

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1．设A是三阶方阵，已知$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$A^*=$__________.

2. 已知行列式$D=\begin{vmatrix}1&4&0&-2\\0&5&3&7\\1&8&-2&0\\1&2&0&1\end{vmatrix}$，则代数余子式$A_{34}=$__________.

3. 已知n阶矩阵A满足矩阵方程$A^2-2A-3E=O$，则$A-E$可逆，且$(A-E)^{-1}=$__________.

4.若向量组$\alpha_1=(1,0,-1)^T$，$\alpha_2=(k,3,0)^T$，$\alpha_3=(-1,4,k)^T$线性相关，则$k=$_______.

5. 四阶行列式$D=\begin{vmatrix}2&-2&2&-2\\4&-2&1&5\\3&1&-1&2\\5&-2&7&-1\end{vmatrix}$，则$A_{41}-A_{42}+A_{43}-A_{44}=$________.

6.若4阶矩阵A与B相似，矩阵A的特征值为$\frac{1}{2}$，1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，则行列式$\left|B^{-1}-3E\right|=$________.

三、（8 分）设行列式$\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{vmatrix}$，计算：$A_{31}+A_{32}+2A_{33}$

四、（6 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 AB^T-C.

五、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，且矩阵 A, X 满足 $AX = A + 2X$, 求矩阵 X .

六、（12 分）已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ，求该向量组的秩及一个极大无关组,并写出其余向量用此极大无关组的线性表示式.

。

七.（14 分）已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3-7x_4=3 \\ x_2+px_3+qx_4=q-3 \\ x_1+x_2+2x_3+(q-2)x_4=q+3 \end{cases}$ 问 p, q 取何值时方程组有唯一解？无解？有无穷多解?在有无穷多解的情况下，求其通解.

八、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，(1) 判断 A 是否可以对角化，若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

九、证明题：（6 分）

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ ，$\beta_2=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ ，$\beta_3=4\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ ，证明 β_1,β_2,β_3 是线性相关的.

2014/2015 年第 2 学期期末线性代数（文）考试试卷（A 卷）**参考答案**

一．选择题：

1. D　　2 C　　3. B　　4. D　　5. B　　6. B　　7. C　　8. D

二．填空题：

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　2. -6　　3. $\frac{1}{4}(A-E)$。

4. -3　　5. 0　　6. 4

三．解： $A_{31}+A_{32}+2A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ……………………………(3 分)

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \\ 12 & 1 & -2 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=-48$$ ……..…(8 分)

四．解： $AB^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$,………………… (3 分)

$\therefore\ AB^T-C=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.………………… (6 分)

五．解：由 $Ax=A+2x$，得 $(A-2E)x=A$

因为 $|A-2E|=1\neq 0$，所以 $A-2E$ 可逆，因此 $x=\left(A-2E\right)^{-1}A$ ………………………4 分

由 $A-2E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 知，$\left(A-2E\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ………………………8 分

所以 $X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. ………………………10 分

六. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\therefore$ 极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ （8 分）

$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$ （10 分） $\alpha_5 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4$ （12 分）

七. 解 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & p & q & q-3 \\ 1 & 1 & 2 & q-2 & q+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p-2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 & q+2 \end{pmatrix}.$$ （ 4 分）

(1) 当 $p \neq 2, q \neq 1$ 时，$r(A) = r(\overline{A}) = 4 = n$，方程组有唯一解. （ 6 分）

(2) 当 $q = 1$ 时，$r(A) = 3$，$r(\overline{A}) = 4$，方程组无解 （ 8 分）

(3) 当 $p = 2$ 时，

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-4 \end{pmatrix},$$

此时， 若 $q \neq 4$，$r(A) = 3$，$r(\overline{A}) = 4$，方程组无解; （ 10 分）

若 $q = 4$，$r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$，方程组有无穷多解,

令 $x_3 = 0$，得特解 $\eta = (10, -7, 0, 2)^{\mathrm{T}}$

令 $x_3 = 1$ 得基础解系 $\xi = (0, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

于是, 原方程组的通解为 $x = \eta + k\xi$，其中 k 为任意常数. （ 14 分）

八. 解矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

由此解得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$， ……………4 分

$\lambda_1 = 1$ 相应的特征向量为 $\alpha_1 = (0,1,1)^T$；

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 相应的特征向量为 $\alpha_2 = (0,1,0)^T$，$\alpha_3 = (1,0,1)^T$，

因为 A 有三个线性无关的特征向量，A 可以与对角阵相似. ………8 分

取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$， ………10 分

九．证明：若存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0,$$

即方程组 $\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \\ 2k_1 - k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$ …………3 分

又因为该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以, A 的秩为 $2 < 3$,方程组有非零解.所以存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3.故

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关的. …………6 分

浙江工商大学 2016 / 2017 学年第一学期考试试卷(A)

课程名称：《线性代数（文）》考试方式：闭卷 完成时限：120 分

班级名称：___________学号：_________ 姓名：

题号	一	二	三	四	总分
分值	20	15	55	10	100
得分					
阅卷人					

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1.行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$________；

2.设 A，B 为三阶方阵，且 $|A| = 2$，$|B| = -3$，则 $|3A^*B^{-1}| =$___________；

3.已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}，$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，则 $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ 的

逆矩阵 $A_1^{-1} =$_________ ；

4.若向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (0, 2, 3, 4)^T$，$\alpha_3 = (0, 0, 3, 4)^T$，则它们是线性_________；

5.设 A 是 4×3 矩阵，$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 0 & -7 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$，则参数 a, b, c 分别为_______；

6. 设 n 阶矩阵 A，满足 $A^2 - A + E = 0$，则 $(A - E)^{-1} =$ _______；

7. 两个等价的__________向量组所含的向量个数相等;

8. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系含_________个解向量;

9.矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,而 λ_1, λ_2 是 A 的两个特征值，$\lambda_1 \lambda_2 =$_____________；

10.已知 A 是三阶方阵, 且$|A+2E|=0$, $|A+3E|=0$, $|A+E|=0$， 则$r(A)=$__________.

二、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

1.下列结论中不成立的是(　　　　).

A. 若矩阵A为n阶方阵，$A=0$则 $|A|=0$　　　　B. 若$r(A)=0$ 则$A=0$

D. 若矩阵A为n阶方阵，则 $|-A|=(-1)^n|A|$　　　　D.$|AB|=|A||B|$

2．设n阶方阵 A 可逆$(n\ge 2)$，A^*是 A 的伴随矩阵，则(　　　　).

A. $|A^*|>0$　　　　B. $|A^*|\ne 0$

C. $|A|>0$　　　　D. $|A^*|=0$

3.若向量组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$秩为$r$，则（　　　　）.

A．向量组中任意$r+1$个向量线性相关

B. 向量组中任意r个向量线性无关

C. $r<s$

D. 向量组的极大线性无关组所含的向量个数小于r

4.设 A 是3×4矩阵，若(　　　　)成立，非齐次线性方程组$AX=b$必有解；

A. $r(A)=1$　　　　B. $r(A)=2$

C. $r(A)=3$　　　　D. $r(A,b)=3$

5.设n阶矩阵A与B相似，则A与B(　　　　).

A. 特征矩阵相似

B．特征向量相同

C. 特征矩阵相同

D. 相似于同一对角矩阵

三、计算题（本题共 55 分）

1. 已知四阶行列式：$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 9 & -2 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 6 & 9 \\ -2 & 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$，计算 $9A_{11}+2A_{21}+5A_{31}+4A_{41}$ 的值.　(9 分)

2.设矩阵 A 和 X 满足：$A^*X = A^{-1}+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.　(10 分)

3. 给定向量组$\alpha_1=(6,4,1,-1)^T$，　$\alpha_2=(1,0,2,3)^T$　，　$\alpha_3=(1,4,-9,-16)^T$　，$\alpha_4=(7,1,0,-1)^T$. 求（1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩并判断$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性相关性;（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$一个极大线性无关组，并将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示.(12 分)

4. 判断λ取什么值时方程组有解，若有解求出它的全部解.（在有无穷多解时用导出组的基础解系表示）

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=-2 \\ 2x_1+5x_2+9x_3=3 \\ 3x_1+7x_2+14x_3=\lambda \end{cases} \qquad (12\text{ 分}).$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 判断 A 是否可以对角化, 若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$. (12 分)

四.证明题(请写出完整证明过程)(10 分)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$. 求证：$r(A)+r(B)\le n$ 　　(10 分)

浙江工商大学 2016 / 2017 学年第一学期考试试卷(A)

参考答案

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 5!　　　　2. -36

3. $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$　　　　4.无关

5. -1，1，-7　　　　6.（$-A$）

7.无关　　　　8. 2　　　　9. $ad-bc$　　　　10. 3

二、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

D.　B　　A　C　　　C　　A

三、计算题（本题共 55 分）

1. 解：$9A_{11}+2A_{21}+5A_{31}+4A_{41}=\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$　　　　………5 分

$=\begin{vmatrix} 9 & 7 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 1 & 9 \\ 4 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=-145$　　………9 分

2. 解：$AA^*X=AA^{-1}+2AX$　　　　………2 分

$|A|X-2AX=E$　　　　$|A|=4$　　　　………4 分

$2(2E-A)X=E$　　　　………6 分

$X=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}$　　　　………8 分

$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　　………10 分

3. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ………4 分

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关 ………8 分

一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，$\alpha_3=\alpha_1-5\alpha_2$ ………12 分

4. 解：$\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\0&-1&1&7\\0&0&0&\lambda-8\end{pmatrix}$ ………4 分

当$\lambda=8$时方程组有解，且有无穷多解。 ………6 分

$\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&7&19\\0&1&-1&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　同解方程为$\begin{cases}x_1=-7x_3+19\\x_2=x_3-7\\x_3:\text{自由未知量}\end{cases}$

令$x_3=0$　　特解：$X_0=(19,-7,0)^T$ ………8 分

导出组的同解方程为$\begin{cases}x_1=-7x_3\\x_2=x_3\\x_3:\text{自由未知量}\end{cases}$

令$x_3=1$　　基础解系为：$X_1=(-7,1,1)^T$ ………10 分

原方程的全部解：X_0+kX_1　（k为任意实数） ………12 分

5. 解：A 的特征方程：$\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$

特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$ ，$\lambda_3=1$三个单根，A 可以对角化。 ………4 分

当$\lambda_1=2$ 时$(2E-A)X=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量为$\alpha_1=(1,0,0)^T$ ………6 分

当$\lambda_2=-1$时$(-E-A)X=0$

$$-E-A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量为$\alpha_2=(0,-1,1)^T$　　………8 分

当$\lambda_3=1$时$(E-A)X=0$

$$E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量为$\alpha_3=(1,0,1)^T$　　………10 分

令：$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

使得：$P^{-1}AP=\Lambda$　　………12 分

四.证明简答题(10 分)

证明：设$r(A)=r$　　$B=(B_1,B_2,\cdots B_S)$

则$AB=(AB_1,AB_2,\cdots AB_S)=0$，得: $AB_i=0$

即B_i是$AX=0$的解。$(i=1,2,\cdots,s)$　　………4 分

证明（1）若$r=0$，则$A=0$，$r(A)+r(B)\le n$　　………6 分

（2）　若$r=n$，则$AX=0$只有零解，即$B_i=0$，$B=0$　$r(B)=0$　则$r(A)+r(B)\le n$

………8 分

（3）　若$0<r<n$，$AX=0$的基础解系含$n-r$个解向量，B_i可以由$AX=0$的基础解系线性表示，$r(B)=r(B_1,B_2,\cdots B_S)\le n-r=n-r(A)$

即　$r(A)+r(B)\le n$　　………10 分

浙江工商大学 2018 / 2019 学年第一学期考试试卷(A)

课程名称: 《线性代数（文)》 考试方式: 闭卷 完成时限: 120 分

班级名称: ___________学号: _________ 姓名:

题号	一	二	三	四	总分
分值	15	15	65	5	100
得分					
阅卷人					

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若设行列式$|A|=\begin{vmatrix}1&2&0&4\\2&3&0&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$，则 $A_{14}+2A_{24}+3A_{34}+5A_{44}=$ __________，

其中 A_{i4} 为行列式对应元素的代数余子式。

2. 设 4 阶矩阵 $A=[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$ ，$B=[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$ ，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且行列式 $|A|=a,|B|=b$，则行列式 $|A+B|$ 为__________.

3、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 n 阶可逆阵 ，$R(A)=2$，则 $R(AB)=$ ________ 。

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，

$$r(A)=2,\alpha_1+\alpha_2=(1,2,1)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2)^T,$$

则 $Ax=b$ 的通解为_________.

5.已知 A 是三阶方阵,且 $|A+2E|=0,|A+3E|=0$,$|A+E|=0$，则伴随阵对应的行列式 $|A^*|=$__________.

二、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为 n 阶方阵，则下面命题正确的是　　　　　　　　　（　　　）

(A) 若 $r(A)=n$，则 $|A|=0$　　　　(B) 若 $r(A)<n$，则可能存在 B，使 $AB=E$

(C) 若 $AB = AC$，则 $B = C$　　(D) 若 $|A| \neq 0$，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$

2．设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，且 $ABC=E$ (E 为 n 阶单位矩阵)，则必有　　(　　)

（A） $BCA = E$　　（B） $BAC = E$　　（C） $CBA = E$　　（D） $ACB = E$

3.若向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 秩为 r，则（　　　　）.

（A）向量组中任意 $r+1$ 个向量线性相关

（B）向量组中任意 r 个向量线性无关

（C） $r < s$

（D）向量组的极大线性无关组所含的向量个数小于 r

4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (1,-1,1,0)^T$，$\alpha_2 = (1,1,0,1)^T$，

则必有　　(　　)

（A） A 是 3×5 矩阵　　（B） $R(A) = 2$

（C） A 是 2×4 矩阵　　（D） A 的列向量组线性无关

5. 若 A 与 B 相似，且 A 可逆，则下面说法不对的是　　(　　)

(A) A 与 B 的特征值相同　　(B) A 与 B 的特征向量相同

(C) A^{-1} 与 B^{-1} 相似　　(D) $|A| = |B|$

三、计算题 (本题共 65 分)

1.求行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值，其中 $x \cdot y \neq 0$．(8 分)

2. 已知 A、B 是三阶矩阵，且满 $AB-2B=4A$，

1) 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆，

2) 若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.（12 分）

3、 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^n$ （7 分）

4、 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{4}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{-6}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{-3}\\ \mathbf{-2}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{-6}\\ \mathbf{6}\end{pmatrix}$的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.(12 分)

5. 问 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解?

在有无穷多组解的情况下求出其通解（用基础解系表示）.（12 分）

.

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$,判断 A 是否可以对角化,若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.(12 分)

四.证明题 (5 分)

设A是三阶奇异矩阵，且满足线性方程组$\left(A+2E\right)x=0$有两个线性无关的解，

1）证明$\left|A+2E\right|=0$;

2）写出A的特征值，并证明A可对角化;

浙江工商大学 2018 / 2019 学年第一学期考试试卷(A)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. -1, 2、8a+8b, 3、2, 4、$\dfrac{(1,2,1)^T}{2}+k\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, 5、36

二、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

1. D 2、A　3、A　4、 B　5、B

三、计算题 (本题共 65 分)

1.求行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$的值.　(8 分)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

4 分

$$= -x^2y^2\begin{vmatrix} -\frac{1}{x}-1 & \frac{1}{-x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{-y} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x^2y^2\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{-x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{-y} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2y^2$$

4 分

2. 已知 A、B 是三阶矩阵，且满 $AB-2B=4A$，

①证明：矩阵 $A-2E$ 可逆,

②若 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A. （12 分)

解：① 由 $AB-2B=4A$,得 $(A-2E)\dfrac{(B-4E)}{8}=E$,

故$(A-2E)$可逆，且$(A-2E)^{-1}=\dfrac{B-4E}{8}$.　　…………… (4 分)

②由$(A-2E)\dfrac{(B-4E)}{8}=E$,得$(A-2E)=8(B-4E)^{-1}$,

从而$A=2E+8(B-4E)^{-1}$,　　…………… (2 分)

而$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}$, ……………　(4 分)

故$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.　　……………… (2 分)

3、已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^n$　（7）

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3 分

$\boldsymbol{A}^n=14^{n-1}\boldsymbol{A}$　　4 分

4. 用行初等变换求列秩：将所给列向量组成矩阵，并施以行变换,得到阶梯形阵.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_4]{\substack{r_2-4r\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -4 & 2\\ 0 & -3 & -4 & -6\\ 0 & -3 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-2r_4\\ r_3-r_4}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -3 & -9\\ 0 & -3 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_4-3r_1\\ \frac{1}{3}r_3}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 15\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-5r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Sigma},$$　　8 分

阶梯形矩阵的非零行数为 3，所以向量组的秩为 3.记$\boldsymbol{\Sigma}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$，显然$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是$\boldsymbol{\Sigma}$的极大线性无关组，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{A}$列极大线性无关组的.由观察法得到　　2 分

$$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3,$$

所以

$$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3.$$ 2 分

5. 问 k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2+x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解? 在有无穷多组解的情况下求出其通解. (12)

解　对其增广矩阵进行初等行变换,即

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&k&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\\0&-2&2-k&-8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&k&4\\0&-2&2-k&-8\\0&k+1&k+1&k^2+4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{k+1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&k&4\\0&-2&2-k&-8\\0&0&(k+1)(4-k)/2&k(k-4)\end{array}\right)$$

4 分

(1) 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时, $r(\overline{A})=r(A)=3$, 故方程组有唯一解;　　2 分

(2) 当 $k=-1$ 时, $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&4\\0&2&-3&8\\0&0&0&5\end{array}\right)$, 因 $r(\overline{A})\neq r(A)$, 故方程组无解;　　2 分

(3) 当 $k=4$ 时, $\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$, 因 $r(\overline{A})=r(A)=2<3$, 故方程组有无穷多组解.

所以非齐次方程组的通解为　$x=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$　$c\in R$.　　(4 分).

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$,判断 A 是否可以对角化,若可以写出对角矩阵 Λ 及可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.(12 分)

解：特征矩阵为 $\left|\lambda E - A\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda+3)^2(\lambda-6)$ ………4 分

当 $\lambda_1=-3$ 特征值为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$；　3 分

当 $\lambda_2=6$ 特征值为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^T$，　3 分

所以：$P=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$　2 分

四.证明题 (5 分)

解：1）线性方程组有非零解对应行列式为零　2 分

2)特征值为 0,-2 可对角化　3 分

线性代数(文)复习题(一)

一、填空题

1、设$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$，$|A|=2$，$|B|=3$，则$|2A-B|=$______。

2、已知向量$\alpha=(1,2,3)$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设$A=\alpha^T\beta$，其中$\alpha^T$是$\alpha$的转置，则

$A^n=$__________。

3、若向量组$\alpha_1=(1,0,-1)^T$，$\alpha_2=(k,3,0)^T$，$\alpha_3=(-1,4,k)^T$线性相关，则$k=$___。

二、单项选择题

1、矩阵A在(　　)时，其秩可能被改变。

(A) 乘以奇异矩阵　　　　　　(B) 乘以非奇异矩阵

(C) 进行初等行变换　　　　　(D) 转置

2、要使$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$都是线性方程组$AX=0$的解，只要系数矩阵$A$为(　　)。

(A) $(-2,1,1)$　　　　　　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　　　　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3、设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则(　　)。

(A) 当$r<s$时，向量组Ⅱ必线性相关　　　(B) 当$r>s$时，向量组Ⅱ必线性相关

(C) 当$r<s$时，向量组Ⅰ必线性相关　　　(D) 当$r>s$时，向量组Ⅰ必线性相关

4、设A是$m\times n$矩阵，$AX=0$是非齐次线性方程组$AX=b$所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(　　)。

(A) 若$AX=0$仅有零解，则$AX=b$有唯一解

(B) 若$AX=0$有非零解，则$AX=b$有无穷多解

(C) 若$AX=b$有无穷多个解，则$AX=0$仅有零解

(D) 若$AX=b$有无穷多个解，则$AX=0$有非零解

5、设矩阵$A_{m\times n}$的秩为$r(A)=m<n$，E_m为m阶单位矩阵，下述结论中正确的是(　　)。

(A) A的任意m个列向量必线性无关

(B) A的任意m阶子式不等于零

(C) 若矩阵B满足$BA=O$，则$B=O$

(D) A通过初等行变换，必可以化为(E_m,O)的形式

三、设行列式$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix}$，求第四行各元素余子式之和。

四、设$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，且满足$AB=A+2B$，求矩阵$B$。

五、已知A，B为3阶矩阵，且满足$2A^{-1}B=B-4E$，其中E是3阶单位矩阵。

(1)证明：矩阵$A-2E$可逆，并求其逆矩阵;

(2)若$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵$A$。

六、设向量组$\alpha_1=(1,3,2,0)^T$，$\alpha_2=(7,0,14,3)^T$，$\alpha_3=(2,-1,0,1)^T$，$\alpha_4=(5,1,6,2)^T$

(1)求向量组的秩;

(2)求向量组的一个极大无关组，并把其余向量分别用此极大无关组线性表出。

七、问a,b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1.\end{cases}$$

有惟一解，无解，有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解。

八、设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，但不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表示，证明：$\alpha_r$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表示。

线性代数(文)复习题(二)

一、单项选择题

1、若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，则$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{13} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & -2a_{23} & -2a_{22} \\ -2a_{31} & -2a_{33} & -2a_{32} \end{vmatrix}$等于(　　)。

$(A)6$　　$(B)-6$　　$(C)24$　　$(D)-24$

2、下列n阶行列式的值必为零的是(　　)。

(A) 主对角元全为零

(B) 三角形行列式中有一个主对角元为零

(C) 零元素的个数多于n个

(D) 非零元素的个数小于零元素的个数

3、已知矩阵$A_{3\times 2}$，$B_{2\times 3}$，$C_{3\times 3}$则下列运算可行的是(　　)。

$(A)AC$　　$(B)CB$

$(C)ABC$　　$(D)AB-BC$

4、若A,B均为n阶非零矩阵，且$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$，则必有(　　)。

$(A)A,B$为对称矩阵　　$(B)AB=BA$

$(C)A=E$　　$(D)B=E$

5、设齐次线性方程组$\begin{cases} kx+\quad\ z=0 \\ 2x+ky+z=0 \\ kx-2y+z=0 \end{cases}$有非零解，则$k$的值为(　　)。

$(A)2$　　$(B)0$　　$(C)-1$　　$(D)-2$

6、若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则一定有(　　)。

$(A)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性相关　　$(B)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s+1}$线性相关

$(C)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性无关　　$(D)\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s+1}$线性无关

7、设A,B是同阶实对称矩阵，则AB是(　)。

(A) 对称矩阵　　(B) 非对称矩阵

(C) 反对称矩阵　　(D) 以上均不对

二、填空题

1、行列式$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$______。

2、A，B均为3阶方阵，$A=2B$，且$|A|=3$，则$|B|=$______。

3、若 A，B 为可逆矩阵，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的逆矩阵为________。

4、设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，则 $r(A)=$_______。

5、设 $\alpha_1=(-1,3,1)$，$\alpha_2=(2,1,0)$，$\alpha_3=(1,4,1)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性_____关。

三、计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

四、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 AB^T-C。

五、解矩阵方程 $AX+B=X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$。

六、试求向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1,0,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,0,1,0)^T$，$\alpha_4=(-3,-2,3,0,1)^T$，$\alpha_5=(-2,-1,3,-3,3)^T$ 的一个最大无关组，并写出其余向量用此最大无关组的线性表示式。

七、设方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+4x_4+x_5=7 \\ 2x_1+6x_2+5x_4+2x_5=5 \\ 4x_1+11x_2+8x_3+5x_5=3 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=-2 \end{cases},$$

解此方程组，并用其导出组的基础解系表示全部解。

八、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系，证明：$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也是 $AX=O$ 的一个基础解系。

九、证明：如果 $A^2=A$，但 A 不是单位矩阵，则 A 必为奇异矩阵。

线性代数(文)复习题(三)

一、填空题

1、设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&4&0&-2\\0&5&3&7\\1&8&-2&0\\1&2&0&1\end{vmatrix}$，则 $A_{34}=$________。

2、$\begin{vmatrix}0&a&0&0\\b&c&0&0\\0&0&d&e\\0&0&0&f\end{vmatrix}=$__________。

3、设 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&3&0\\2&5&0\end{pmatrix}$,则$A^{-1}=$ __________。

4、三阶矩阵 A 按列分块为 $A=(A_1,A_2,A_3)$，且 $|A|=1$，则 $|A_2-2A_3,A_2-3A_1,A_1|$ =________。

5、A 为三阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，已知 $|A|=-2$，则 $|A^*|=$______。

6、设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$，则 $r(A)=$________。

7、A 为三阶矩阵，且 $|A|=3$，则 $|2(A^{-1})^2-(2A^2)^{-1}|=$________。

8、设 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$，$\beta=(3,5,6)^T$，且有 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，则 $x_1=$______; $x_2=$______; $x_3=$______。

9、若向量组 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(3,-1,2)$，$\alpha_3=(2,3,a)$ 线性相关，则 $a=$______。

二、单项选择题

1、设 α_1,α_2 是 $AX=O$ 的解，β_1,β_2 是 $AX=B$ 的解，则(　　　)。

(A) $2\alpha_1+\beta_1$ 是 $AX=O$ 的解　　　(B) $\beta_1+\beta_2$ 是 $AX=B$ 的解

(C) $\alpha_1+\alpha_2$ 是 $AX=O$ 的解　　　(D) $\beta_1-\beta_2$ 是 $AX=B$ 的解

2、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分条件是(　　　)。

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不是零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有部分向量线性无关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) 有一组数 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$

3、设 A 是 n 阶可逆矩阵，B 是 n 阶不可逆矩阵，则(　　　)。

(A) $A+B$ 是可逆矩阵　　　　　　(B) $A+B$ 是不可逆矩阵

(C) AB 是可逆矩阵　　　　　　　(D) AB 是不可逆矩阵

4、已知 B 为可逆阵，则 $\{[(B^{-1})^T]^{-1}\}^T=($　　　)。

(A) B　　　　(B) B^T　　　　(C) B^{-1}　　　　(D) $(B^{-1})^T$

三、计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 的值。

四、已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$。

五、设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,10)$。求它们的秩，及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组表示。

六、已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 BA^T。

七、设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$。

八、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=4\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，判断 β_1,β_2,β_3 是线性相关的。

九、对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases},$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解，有唯一解和有无穷多组解。在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

十、证明题

已知 $E+AB$ 可逆，试证 $E+AB$ 也可逆，且 $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$。

线性代数(文)复习题(一)参考答案

一、填空题

1、解 $$|2A-B|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2c_1-d_1 \\ a_2 & b_2 & 2c_2-d_2 \\ a_3 & b_3 & 2c_3-d_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=2|A|-|B|=1\text{。}$$

2、解 注意到$\beta\alpha^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$，故

$$A^n=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)}_{n\text{个}\alpha^T\beta}=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{(n-1)\text{个}\beta\alpha^T}\beta=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}A\text{。}$$

注：若先写出A，再求A^2，…，A^n，此法不可取。

3、解 由α_1，α_2，α_3线性相关，则有

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & k & k-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & k-1 \end{vmatrix}=3(k-1)-4k=0\text{。}$$

由此解得$k=-3$。

二、单项选择题

1、解：答案为$\boldsymbol{A}$。

2、解 我们知道，若ξ_1，ξ_2，…，ξ_k是齐次线性方程组$AX=O$的k个线性无关的解向量，$AX=O$的任一解为向量ξ_1，ξ_2，…，ξ_k的线性组合，则ξ_1，ξ_2，…，ξ_k为$AX=O$的基础解系，且所含解向量的数目$k=n-r(A)$，其中n为矩阵A的列数。

由于ξ_1，ξ_2为$AX=O$的解，知$n=3$。又因ξ_1与ξ_2是线性无关的，故$\boldsymbol{k\geq 2}$。因而$\boldsymbol{r(A)\leq 1}$，而(A)、(B)、(C)、(D)四个选项中满足$\boldsymbol{r(A)\leq 1}$的矩阵只有(A)项中的$(-2,1,1)$。

3、解 根据定理“若α_1，α_2，$\ldots\alpha_s$可由β_1，β_2，$\ldots\beta_t$线性表出，并且$s>t$，则α_1，α_2，…，α_s必线性相关”，即若多数向量可以由少数向量线性表出，则这多数向量必线性相关，故应选(D)。

4、解 方程组$AX=b$与其对应的齐次线性方程组$AX=O$的解之间有密切的关系。正确作答本题要求掌握以下结论：

(1)非齐次线性方程组$AX=b$有解的充要条件为方程组的增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩。

(2)在非齐次线性方程组$AX=b$有解的条件下，解惟一的充分必要条件是齐次线性方程组$AX=O$只有零解。

(3)非齐次线性方程组$AX=b$的任意两个解之差是齐次线性方程组$AX=0$的解。

由于题干及(A)、(B)项中均未指明$AX=b$有解，即A的秩不一定等于增广矩阵$\overline{A}$的秩，

故(A)、(B)两项为干扰项。由结论(3)知(D)为正确选项。

6、解 应选(C)。

由于$r(A_{m\times n})=m$，表明矩阵A的秩等于行数，即A的行向量必线性无关。根据矩阵秩的性质：行向量的秩等于列向量的秩，因此A的列向量的秩等于m。由于$m<n$(列数)，故一定存在m个列向量线性无关，但并不是任意m个列向量线性无关，故(A)不成立。

根据矩阵秩的等价定义，$r(A)=m$表明A至少存在一个m阶子式不等于零，但并不要求任意一个m阶子式均不等于零，故(B)不成立。

(D)也是不成立的。若(D)成立，则存在k个行变换P_1，P_2，$\cdots$，P_k，使$P_1P_2\cdots P_kA=(E_m,O)$，即 A$=(P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_m^{-1},O)$，说明$A$的后$n-m$列均为零向量，显然题目未作这种要求。

(C)为正确选项。设A^T的m个列向量为α_1，α_2，$\cdots$，α_m，则α_1，α_2，$\cdots$，α_m线性无关，因此，方程组$A^TX=O$仅有零解。若$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$，$\beta_i$是$m$维行向量满足$BA=O$，即$A^TB^T=A^T(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T)$，即$A^T\beta_i^T=O,i=1,2,\cdots,m,$故$B=O$。

三、解 设$M_{4i}(i=1,2,3,4)$为第四行各元素余子式，对应代数余子式记为A_{4i} (i=1,2,3,4)，则

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-7(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=7\times2\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}$$

$$=14\times2\begin{vmatrix}3&4\\1&1\end{vmatrix}=28(3-4)=-28。$$

四、解 由$AB=A+2B$可得$(A-2E)B=A$,。矩阵

$$A-2E=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix},$$

又 $|A-2E|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq0$，故$A-2E$可逆，从而$B=(A-2E)^{-1}A$。

下面用初等行变换法求$(A-2E)^{-1}$。

$$(A-2E|E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&2&-2&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)。$$

于是 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$。

因此 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$。

注 因为$B=(A-2E)^{-1}A$，也可以不求$(A-2E)^{-1}$而用初等行变换直接求出B。方法如下：

$$(A-2E|A)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right),$$

所以 $B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$。

五、解 (1) 由$2A^{-1}B=B-4E$知，$AB-4A-2B=O$，

从而 $(A-2E)(B-4E)=8E$，或 $(A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E$，

故$A-2E$可逆，且$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(2) 由(1)知，$A=2B(B-4E)^{-1}$，而

$$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故 $A=2\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$。

六、解

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&7&2&5\\3&0&-1&1\\2&14&0&6\\0&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-4)]{r_2\div(-7)}\begin{pmatrix}1&7&2&5\\0&3&1&2\\0&0&1&1\\0&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&7&2&5\\0&3&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&7&0&3\\0&3&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&3&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\div 3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量组的秩为 3。

α_1，α_2，α_3为其一个极大无关组，且$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3$。

七、解　对方程组的增广矩阵进行初等行变换：

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right),$$

当$a\neq 1$时，$r(\overline{A})=r(A)=4$，方程组有惟一解。

当$a=1$，$b\neq -1$时，$r(A)=2<r(\overline{A})=3$，方程组无解。

当$a=1$，$b=-1$时，$r(\overline{A})=r(A)=2<4$，方程组有无穷多组解，这时，得同解方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_2+2x_4=1.\end{cases}$$

令$x_3=x_4=0$，由此得到一个特解为：$\eta_0=(-1,1,0,0)^T$。

另外，原方程组的导出组的同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_2+2x_4=0.\end{cases}$$

依次令$x_3=1$，$x_4=0$;$x_3=0$，$x_4=1$得到一个基础解系：$\eta_1=(1,-2,1,0)^T$，$\eta_2=(1,-2,0,1)^T$。

于是原方程组的通解为：

$$\eta=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}。$$

九、证　用反证法。若

$$\alpha_r=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}\,, \qquad (1)$$

又已知

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+l_r\alpha_r\,, \qquad (2)$$

将(2)代入(1)，整理得

$$\beta=(l_1+k_1l_r)\alpha_1+\cdots+(l_{r-1}+k_{r-1}l_r)_r\,\alpha_{r-1}\,,。$$

这与 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示的假设矛盾，所以得证 α_r 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示。。

线性代数(文)复习题(二)参考答案

一、单项选择题

1、解　根据行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{13} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & -2a_{23} & -2a_{22} \\ -2a_{31} & -2a_{33} & -2a_{32} \end{vmatrix} = (-2)^3(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-2)^3(-1)\times 3 = 24 \text{。}$$

故选(C)。

2、解　答案为$\boldsymbol{B}$。

3、解　两矩阵A与B可以相乘的条件是：矩阵A的列等于矩阵B的行，依此条件，应选(C)。

4、解　因为$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$，矩阵的乘法一般不满足交换律，只有当$AB=BA$(A与B可交换)时，上式成立，故选(B)。

5、解　该齐次线性方程组有3个方程，3个未知数，则根据克莱姆法则，当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2k-4=0$$

时，有非零解。故选(A)。

6、解　本题要求掌握以下结论：

(1)若在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中，由部分向量构成的向量组线性相关，则整个向量组必线性相关(部分相关整体必相关);

(2)若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则任意抽取部分向量构成的向量组必无关(整体无关部分必无关)。

因此，(A)、(C)均不能肯定，(D)也是不一定的。故选(B)。

7、解　答案为$\boldsymbol{D}$。

二、填空题

1、解法1　利用反对角行列式$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$。

解法2　由于此行列式只有4阶，也可以按某一行(列)展开后计算结果。

2、解　因为$B=\dfrac{1}{2}A$，所以$|B|=\left|\dfrac{1}{2}A\right|=(\dfrac{1}{2})^3|A|=\dfrac{3}{8}$。

3、应填$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ \hline A^{-1} & O \end{pmatrix}$。

注　应记住以下几个常用结论：

(1)若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，且 A_i 均可逆，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$。

(2)若 $A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$，且 A_i 均可逆，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$。

(3)若 $X=\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$，且 A，C 均可逆，则 $X^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$。

(4)若 $X=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$，且 A，C 均可逆，则 $X^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$。

(5)若 $X=\begin{pmatrix} O & A \\ C & B \end{pmatrix}$，且 A，C 可逆，则 $X^{-1}=\begin{pmatrix} -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$。

(6)若 $X=\begin{pmatrix} B & A \\ C & O \end{pmatrix}$，且 A，C 可逆，则 $X^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \end{pmatrix}$。

4、解　因为

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 A 的秩为 2。

5、线性<u>相</u>关。

解　因为 $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

三、解　原式 $=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=6$。

四、解　$AB^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$，所以 $AB^T-C=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$。

五、解　由 $AX+B=X$，可得 $(A-E)X=-B$，而

$$(A-E\,|-B)=\left(\begin{array}{ccc:cc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right),$$

所以 $X=\begin{pmatrix}5&-3\\4&-2\\3&-3\end{pmatrix}$。

六、解　由

$$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&-3&-2\\0&1&1&-2&-1\\1&1&0&3&3\\0&0&1&0&-3\\1&1&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-r_1\\r_5-r_1}}\begin{pmatrix}1&0&1&-3&-2\\0&1&1&-2&-1\\0&1&-1&6&5\\0&0&1&0&-3\\0&1&-1&4&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\r_5-r_2}}\begin{pmatrix}1&0&1&-3&-2\\0&1&1&-2&-1\\0&0&-2&8&6\\0&0&1&0&-3\\0&0&-2&6&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}r_3\\r_4-r_3\\r_5+2r_3}}\begin{pmatrix}1&0&1&-3&-2\\0&1&1&-2&-1\\0&0&1&-4&-3\\0&0&0&4&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}r_4\\r_5+2r_4}}\begin{pmatrix}1&0&1&-3&-2\\0&1&1&-2&-1\\0&0&1&-4&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3+4r_4\\r_2+2r_4\\r_1+3r_4}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-2\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-r_3\\r_{1-r_3}}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

所以取α_1，α_2，α_3，α_4为一个极大无关组，且$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3$。

七、解　$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&3&-2&4&1&7\\2&6&0&5&2&5\\4&11&8&0&5&3\\1&3&2&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&-\dfrac{19}{2}&4&\dfrac{71}{2}\\0&1&0&4&-1&-11\\0&0&1&-\dfrac{3}{4}&0&-\dfrac{9}{4}\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

令$x_4=x_5=0$，由此得到原方程组的一个特解：

$$\gamma=\begin{pmatrix}\dfrac{71}{2}\\-11\\-\dfrac{9}{4}\\0\\0\end{pmatrix}。$$

令$x_4=1$，$x_5=0$;$x_4=0$，$x_5=1$得到导出组的一个基础解系：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{19}{2}\\-4\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

所以原方程组的全部解为$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\gamma$，其中$k_1,k_2$为任意常数。

八、证　显然β_1,β_2,β_3均为$AX=O$的解。

令$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0,$$

$$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0。$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$AX=O$的一个基础解系，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ \qquad k_2+k_3=0\\ \qquad\qquad k_3=0\end{cases}。$$

解得$k_1=k_2=k_3=0.$

所以β_1,β_2,β_3线性无关，且个数与原基础解系中所含的向量个数同为3，故也为基础解系

九、证　用反证法。

假设A可逆，且其逆矩阵为A^{-1}。因为$A^2=A$。所以

$$A^2-A=A(A-E)=O,$$

即　$A^{-1}A(A-E)=O$。

由此得$A-E=O$，$A=E$，这与A不是单位矩阵矛盾！因此A不可逆，即$|A|=0$，所以A必为奇异矩阵。

线性代数(文)复习题(三)参考答案

一、填空题

1、解　$A_{34}=-\begin{vmatrix}1&4&0\\0&5&3\\1&2&0\end{vmatrix}=-6$

2、应填 $\underline{\boldsymbol{abdf}}$ 。

解　按第一行或第一列展开即可。

3、解　设 $B_1=(2)$，$B_2=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$，则 $B_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，　$B_2^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}5&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$。

于是　$A^{-1}=2\begin{pmatrix}0&B_2^{-1}\\B_1^{-1}&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&-5&3\\0&2&-1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-10&6\\0&4&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$。

4、解　交换该行列式中两列的位置，则

原式$=-\left|A_1,A_2-3A_1,A_2-2A_3\right|=-\left|A_1,A_2,A_2-2A_3\right|=-\left|A_1,A_2,-2A_3\right|=-(-2)|A|=-2$。

5、解　$\left|A^*\right|=\left||A|A^{-1}\right|=\frac{(-2)^3}{-2}=4$。

6、解　$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以　$r(A)=3$。

7、解　原式$=\left|2(A^{-1})^2-\frac{1}{2}(A^{-1})^2\right|=\left|\frac{3}{2}(A^{-1})^2\right|=(\frac{3}{2})^3\frac{1}{|A|^2}=\frac{3}{8}$。

8、$x_1=\underline{\mathbf{1}}$；$x_2=\underline{\mathbf{-3}}$；$x_3=\underline{\mathbf{2}}$。

9、解　因为向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关，则有

$$\begin{vmatrix}1&3&2\\2&-1&3\\3&2&a\end{vmatrix}=-7a+35=0，$$

解得 $a=5$。

二、单项选择题

1、解　根据非齐次方程组解的性质可知选(C)。

2、解　选项(A)，(B)都只是向量组线性无关的必要条件，而不是充分条件。选项(D)

是错误的，若将“有一组数”改为“当且仅当”时才为正确。所以选(C)。

3、解　由题设知$|A|\neq 0$，$|B|=0$，所以$|AB|=|A||B|=0$，即AB是不可逆矩阵，应选(D)。但是当A可逆，B不可逆时，$A+B$是否可逆不能一概而论，例如，

若取$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则$A$可逆，$B$不可逆，但$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$是不可逆的。

若取$C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则$C$不可逆的，但$A+C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$是可逆的。故$(A),(B)$是不正确的。

4、解　$\{[(B^{-1})^T]^{-1}\}^T=\{[(B^T)^{-1}]^{-1}\}^T=(B^T)^T=B$，故选$(A)$。

三、解　原式$\underline{\underline{\frac{r_1-2r_2}{r_4+r_2}}}\begin{vmatrix}0&-11&5&-5\\1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\0&-1&1&0\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第1列展开}}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-11&5&-5\\1&1&-5\\-1&1&0\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{c_1+c_2}}-\begin{vmatrix}-6&5&-5\\2&1&-5\\0&1&0\end{vmatrix}=-(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-6&-5\\2&-5\end{vmatrix}=40。$$

四、解　$(A+2E)^{-1}(A^2-4E)=(A+2E)^{-1}[(A-2E)(A+2E)]$

$$=[(A+2E)^{-1}(A-2E)](A+2E)]=E(A+2E)=A+2E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}。$$

五、解　$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&-\frac{1}{3}&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以所求向量组的秩为3，取$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为其一个极大无关组，且

$$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2，\qquad \alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2。$$

六、解　$BA^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&-3&-1\\1&1&7\end{pmatrix}$。

七、 解　由$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A$和$|A^{-1}|=-1$，又因为$A$是$A^{-1}$的逆矩阵，可以求得

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}，所以\quad (A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\3&0&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}。$$

八、解　若β_1,β_2,β_3是线性相关的，则存在一组不全为零的数k_1,k_2,k_3使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0,$$

即方程组 $\begin{cases}k_1+2k_2+4k_3=0\\2k_1-k_2+3k_3=0\\k_1+k_2-k_3=0\end{cases}$，

有非零解。又因为该方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以A的秩为$2<3$，方程组有非零解。所以存在一组不全为零的数k_1,k_2,k_3。故β_1,β_2,β_3是线性相关的。

九、解　因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

(1)当$\lambda\neq-2$ $\lambda\neq1$时，由克莱姆法则知方程组有唯一解。

(2)当$\lambda=-2$时，对增广矩阵作高斯消元，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&-9\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{pmatrix},$$

第一个方程矛盾，故方程组无解。

(3)当$\lambda=1$时，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见$r(A)=r(\overline{A})=1<3$，故方程组有无穷多组解。又由此可得与原方程组同解的方程组为$x_1=-2-x_2-x_3$。令$x_2=x_3=0$，得其特解$u_0=(-2,0,0)^T$。

与原方程组的导出组同解的方程组为$x_1=-x_2-x_3$。由此可得基础解系为$v_1=(-1,1,0)^T$，$v_2=(-1,0,1)^T$。

原方程组的全部解为

$$x=u_0+k_1v_1+k_2v_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中k_1,k_2是任意常数。

十、证　因为

$$(E+BA)(E-B(E+AB)^{-1}A)=E+BA-B(E+AB)^{-1}A-BAB(E+AB)^{-1}A$$
$$=E+BA-B(E+AB)(E+AB)^{-1}A=E+BA-BA=E\text{。}$$

故可知$E+BA$是可逆，且$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$。

注　本题若没有给出条件：已知$E+AB$可逆，一般的证法如下：

因为$(E+AB)A=A+ABA=A(E+BA)$，故

$$A=(E+AB)^{-1}A(E+BA)\text{，}$$

而　$E=E+BA-BA=(E+BA)-B(E+AB)^{-1}A(E+BA)=E-B(E+AB)^{-1}A(E+BA)$。

由此知$E+BA$也可逆，且$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$。