归纳复习

2020年12月28日　21:54

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ （λ为常数

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

方阵行列式：P40

(1) $|A^T| = |A|$

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

(3) $|AB| = |A||B|$

逆矩阵 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

$AA^* = |A|E$, $A \cdot \frac{A^*}{|A|} = E$

∴ $\frac{A^*}{|A|}$ 即为 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

推广. P41 $|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$

∵ $AA^{-1} = E$

$|AA^{-1}| = |E| = 1$

而 $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$

∴ $|A||A^{-1}| = 1$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

矩阵乘法：

$(AB)C = A(BC)$

分配律 $\begin{cases} A(B+C) = AB + AC \text{（左提取）} \\ (B+C)A = BA + CA \text{（右提取）} \end{cases}$

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ 逆矩阵

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$　P47

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ （当A, B均可逆时）.

$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} A_{s-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$

当A可逆时.（$|A| \neq 0$ 时）.

$AB = AC \Rightarrow B = C$.

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$　P48

$|A^*| = |A|^{n-1}$ （P48）

P51–52.

分块矩阵求逆：

$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ （主对角线非零）

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ （副对角线非零）

P53 ~~分~~对角矩阵（分块）

$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{bmatrix}$

2阶 主对角 副对角

也有：$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$

P44 = 所有矩阵的逆矩阵

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ （其中 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$） ＜主对角线对调，副对角线取反＞

伴随阵求逆注意技巧 填写 P53?

初等变换（初等矩阵）

对换，倍乘，倍加

求逆：
① 增广矩阵初等变换求逆
② 分块阵求主对角阵逆
③ 伴随阵求初等矩阵的逆
④ 一般用待定系数法求逆

$A\cong B$ 指 A 和 B 经过有限次初等变换得到

则 $A\cong B$ 为等价关系 $A\cong B$ P53

∘ $A\cong A$；$A\cong B$ 则 $B\cong A$；$A\cong B$，$B\cong C$，$A\cong C$

∘ 行阶梯阵 P56
∘ 和行简化阶梯阵 P56 三者相互等价
△ 标准形矩阵 P57

∀ 矩阵经过 初等变换 →＜包括列与行变换＞ 标准形矩阵 P58
初等行变换 ＜仅限行的时候＞ 行阶梯阵行简化阶梯形矩阵

初等阵均可逆，其逆后所得仍为初等矩阵 P58

对 $A_{m\times n}$ 作 EA 初等行变换，AE 初等列变换（这是初等矩阵 E）

$A\cong B$ 的充要条件：$B=P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t$（$P_i,Q_j$ 均为初等矩阵 $i=1,\cdots,s$ $j=1,\cdots,t$）

$|A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积

∘ 可逆阵都可以经过初等行变换化为单位阵

对于可逆阵（或为方阵）A_n 构造 $n\times 2n$ 的增广阵 $(A|E)$ (A,E)

$n+n$ → 单位阵的阶数

增广阵初等变换求矩阵方程(某些变形练习)

$A_{(n\times n)}X=B_{(n\times m)}$ [这种方法要检验算 A 的 $|A|\neq 0$ 得，来判断 A 是否可逆。

$X=A^{-1}B$ (P61)

A 也是可以是某个矩阵因式

令 $P=P_s^{-1}P_{s-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}=(A^{-1})$ (即 $PA=A^{-1}A=E$) ($PE=A^{-1}E=A^{-1}$)

$\Rightarrow P(A|E)=(PA|PE)=(E|A^{-1})$

∵ 其中 $P_{i\,(n\times n)}$ $(i=1,\cdots,s)$ 为 n 阶初等矩阵(方阵)

有 P 仍是 n 阶矩阵的结论。(A^{-1} 对应)

$(A|E)$ 也是一个矩阵 $(n\times 2n)$ 的规格

$\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 2n}{(A|E)}\rightarrow C_{(n\times 2n)}=(PA|PE)=(E|A^{-1})_{n\times 2n}$

可以视作分块矩阵的乘法 (而并非是某个分配律)

• k 阶子式：(P62) $m\times n$ 规格的矩阵中取 k 行 k 列。

[是 $k\times k$ 的方阵] [数值] <k 阶子式是个行列式，即也是个数值>

一个 $m\times n$ 的矩阵的 k 阶子式有 $C_m^k C_n^k$ 个

对于包含 0 行的子式，其值为 0.

P63 [非零矩阵的秩 $r(A)\geq 1$
可记为秩为 0 的矩阵为零矩阵.]

$r(A^T)=r(A)$；$r(kA)=r(A)\ (k\neq 0)$

有结论：$A_{m\times n}, B_{m\times p}$ 则 $r(A)\leq r(A,B)$ 分块阵.

• 对于方阵：A_n，有唯一的 n 阶子式 $|A|$

(P63) 若 $r(A)=n$ 则 $|A|\neq 0$；$r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0$

即 $|A|\neq 0\Leftrightarrow r(A)=n$.

重提行简化阶梯阵： P56

→在阶梯形中非零行中第一个非零元素为1，且其所对应的列的其他元素为0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 有解判定定理（

$r(A) = r(\bar{A}) = n$ （有唯一解）

$r(A) = r(\bar{A}) < n$ （有无穷多解）

$r(A) \neq r(\bar{A})$ （无解）

→ 对于齐次方程组.

$r(A) < n$ （$\cancel{|A|=0}$）⇔方程组有非零解.（有无穷多解）

$r(A) = n$ （$\cancel{|A|\neq 0}$）⇔方程组有只有零解）（有唯一解）

也是A未必是方阵（不能用 $|A| \neq 0$ 的关系.

P84 推论 ① 齐次线性方程组中的方程个数 $m < n$（未知量个数 n）

则也有非零解，

② $m = n$ 时，有非零解 ⇔ $|A| = 0$.（克拉默法则）

矩阵的列向量组/行向量组.

α_i / β_i

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 或 $A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$

向量组的线性相关性：P84

对于 $s+1$ 个 n 维向量 $\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta$，如果有 $k_1, \cdots k_s$ 使

记 $A = (\alpha_1\ \alpha_2, \cdots \alpha_s)$　$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ =

则称 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ (A) 的一个线性组合.

分析线性方程组的解的情况

① 列出系数矩阵 A → 增广矩阵 $\bar{A}=(A,B)$ → 找出 $r(A)$ 与 $r(\bar{A})$ 并判断两者关系

<求秩的时候，要通过 $\boxed{初等行变换}$ 化成阶梯阵

求解线性方程组（的结构）

① → 系数矩阵为方阵时，$AX=B$ 类型的可以由 $(A|B)_{n\times 2n}$ → $(E|A^{-1}B)_{n\times 2n}$（P61）
$(|A|\neq 0)$

② → 对一般的矩阵则将增广矩阵化为阶梯阵，（再进一步化为行简化阶梯阵）
（判断 $r(A)$ 与 $r(\bar{A})$）
如果有（唯一）解 ⇒（可以直接读出 x 解向量的各个分量。
（例如 P85 例3）

线性相关性 P87.

从线性表出：待定系数式中的 β 替换为 0 向量：

得到 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$（0向量）

［线性相关是向量组内部的概念，不涉及 β 向量，

线性表出涉及 $s+1$ 个向量，是 β 和向量组 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 之间的关系。

当然，你可以认为，0 向量是一种特殊的 β 向量的取值。）

由于

线性无关：由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

可以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

---

n 维单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 组成的向量组是线性无关的

［线性相关性的论证都是向量组内的各个向量之间的关系）

<在后面的基础解系的求法中常常用

使得某个行列值的值为0，
可能性包括：① 该行列式包含零向列，
② 该行列式中有成比例（倍数）的两行（列）向量）

6 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ 线性相关的充要条件是线性方程组 （齐次）有s个数量分别对应 $X(x_1, x_2, \ldots x_s)$
$\boxed{AX=0}$ 有非零解（向量） $\Leftrightarrow$ $r(A)<s$

(1) $r(A)<s$，$(\alpha_1 \sim \alpha_s)$ 是线性相关的（有非零解向量）
(2) $r(A)=s$，$(\alpha_1 \sim \alpha_s)$ 仅有唯一的解向量（零向量）
即线性无关。

还是要对系数矩阵求秩（化为阶梯形）< 此处构造齐次线性方程组 $AX=0$.

※ <然用求秩的方法判断相关性不是首选的方法>

※ ① 向量的维数n对应着方程组有几个方程
② 向量组包含的向量个数s对应着方程组中有几个未知量。

P88：(1) 如果 $s>n$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ 必线性相关。 P88例

$$\begin{array}{c|c} \text{向量维数 } n & \begin{bmatrix} a_1 & & \\ a_2 & & \\ a_3 & & \\ a_n & & \end{bmatrix} \\ & s\ (\text{未知量个数}) \end{array}$$

方程数量 n（限制条件） < 未知数数量 s（自由度）

由可以充分地判断出方程组一定有非零解
因而 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ 必线性相关 （P88）

[方阵]：
(2) $A_n=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ [A为n×n的方阵]
① 当且仅当 $|A|=0$ 时 A 线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(A_n)<n$.
（不可逆）
② $|A|\neq 0$ 时，向量组A线性无关。$\Leftrightarrow$ $r(A_n)=n$.

<其实(1)(2)都间接地和秩挂钩了，只是隐含性）
（和秩挂钩是为了知道是否有非零解）

<秩个，有效的限制条件个，自由度↓，解的数目↓）

P89. (1) 短无关 → 长无关.

<n维向量构成的向量组线性无关的话，>
$(n+i)$ 维向量构成的向量组也线性无关 $(i=1,2,\cdots)$

△ 维数增加1，则相对应的线性方程组中会多出一个方程
<注意不要与方程组的变量个数混淆>(即每个方程的未知数个数不变).

$$
\begin{array}{c}
n\text{个} \\ + \\ 1\text{个}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1s}k_s = 0 \\
a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2s}k_s = 0 \\
\cdots\cdots \\
a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{ns}k_s = 0
\end{array}\right. \\
+\ a_{(n+1)1}k_1 + a_{(n+1)2}k_2 + \cdots a_{(n+1)s}k_s = 0
\end{array}
\right.
$$

s列

对于这个向量组，当满足前n个方程时，已经可以确定仅有 $k_1=k_2=\cdots k_s$，满足。而此时方程组又至少有一解(零解，$\therefore k_1=k_2=\cdots k_s$)是其唯一解.

推论：P89-90
若 $\alpha_i=(a_{1i}, a_{2i}\cdots a_{ni})^T$ $(i=1,2,\cdots s)$ 所构成的

$$= \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)^T$ 是线性相关的，则在每个向量上减掉若干个分量，所得的 m $(m<n)$ 维向量组 $\beta_i=(a_{1i},a_{2i},a_{mi})^T$

$$= \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots\beta_m)$ 也是线性相关的. <根据限制方程组解的条件减少了，方程组的解随之放松化(即 P88 推论1)>

(3) ∵ 长有关，短有关.

P90 更进一步地：完全可以由向量组本身相互之间的关系进行刻画。

① 线性无关的条件下，即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \Rightarrow k_1=k_2=\cdots k_s$$

线性相关时

$k_1\sim k_s$ 不全为0，即 $\sum_{i}^{n}|k_i|>0$

设其中不为零的值是 k_s

则 $\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$

即 α_s 可以其它 $(s-1)$ 个向量线性表示。

② 另一面：若 $\alpha_1\sim\alpha_s$ 中有一个向量能被其它 $(s-1)$ 个向量线性表出，

设这个能表出（被表出的）向量为 α_s。

则 $\alpha_s = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}$

即有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}-1\cdot\alpha_s=0$

而 $k_s=-1\neq0$，即 $k_1\sim k_s$ 不全为0

$\left(\sum_{1}^{s}|k_i|>0\right)$

⇒ 可得出结论：P90

向量组 α_i $(i=1,2,\dots s)$ 线性相关的充要条件：

α_i 中至少有个 α_k $(k\in[1,s], k\in N)$ 能被其余 s 个向量表出

△ 相似的，有线性无关的结论（逆否命题）

═ α_i 线性无关，(α_i,β) 线性相关，则 β $\underbrace{\text{可以}}_{\text{反证法}}$ 用 α_i $\underbrace{\text{唯一}}_{\text{代入法}}$ 地线性表出

P91 (3) 少相关⇒多也相关（关于方程组未知数个数 s 的论述）

由于线性相关性是判断 $(\alpha_i)(k_i)=0$ 时，$(k_i)=0$ 向量的存在性 $(i=1,s)$

向量组 $(\alpha_i)_{(i=1,\dots,s)}$　向量 α_i　向量 (k_i)

若 $(\alpha_i)(k_i)=0$ 已存在 $(k_i)\neq0$ $(i=1,2,\dots,s)$ 向量这一解，$(\alpha_i)(k_i)+(\alpha_j)(k_j)=0$ 也至少有其（有 $(k_i,k_j)\neq0$ 的解。

换句话说，部分向量线性相关，则向量组总体也必线性相关。
$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m)$ $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m \cdots \alpha_n)$

还可以说，如果总体向量组是线性无关，那就没有包含能构成线性相关的子集向量组，$\Rightarrow$ (总体无关 $\Rightarrow$ 部分必无关)

(反证) 二者如果有某种部分向量组合线性相关，那总体就会相关，也就矛盾了。

(两个向量组之间的关系、(矩阵和矩阵) (同组))

~~[illegible]~~ P91

① 向量组之间的线性表示、(基于之前的单个向量被某个向量组线性表示)

$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 可以被 $B(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$ 线性表示是指：

A中的每个向量都可以由B中的向量线性表示

$\alpha_i = B(K_j)$ → 向量 K，$(j=1, \cdots t)$
→ 向量组

P92 即
$$\begin{cases} \alpha_1 = B(K_{j1}) \\ \alpha_2 = B(K_{j2}) \\ \vdots \\ \alpha_s = B(K_{js}) \end{cases}$$

其中 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots \beta_t)$

$\Rightarrow \beta_i = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s)$

< 这一步的规格仍与 α_i (也即 β_i) 相一致

P91

即，仍为向量而非矩阵

区别于逗号相隔 $(k_1\alpha_1, k_2\alpha_2 \cdots k_s\alpha_s)$

② 向量组等价：向量组A和向量组B可以相互表示。

~~向量A和~~
向?

矩阵：$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ → α_i $(n\times 1)$ 的向量(矩阵)
规范为 $n\times s$ → β_i

$B = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_t)$
$n\times t$

$K = (k_{ij})$ $s\times t$

可见，$\underset{(n\times t)}{B} = \underset{(n\times s)(s\times t) \to (n\times t)}{AK}$.

如果 B 由 A 表示，
可以叫它为矩阵形式
$B = AK$

P92 B能被A表示，则 $B=AK$ 成立。

之 $Kx=0$.

当B向量组线性相关时，$Kx=0$ 有非零解。

$\Leftrightarrow$ ① $r(K)<t$ （B向量组线性相关）

② $r(K)=t$ 且A线性无关，则B向量组也线性无关。

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

△ 如果B可以由A线性表示，且 $t>s$，则B是线性相关的。

（即 如果可以由数量少的向量的向量组线性表示，则向量组一定线性相关。

△ 若 A能够B线性表示，且向量组A线性无关，则 $s\le t$ （表从表示数的个数）

$n(A)$和 $n(B)$的大小关系 ⟺ 看B的线性相关性

△ 两个线性无关的等价向量组，A，B 必含有相同个数的向量 $n(A)=n(B)$

P93 如果B能被A线性表示，且 $\boxed{B=AK}$ 成立，

对于 $\boxed{KX=0}$ 齐次方程 （值得注意的是，k定理要求是K必须为方阵

即 $|K|$是方阵时。

(1) 如果 $|K|=0$，则B必定线性相关

(2) $|K|\neq 0$，则 $A\cong B$ （A等价B向量组）

P94 矩阵的秩 → 向量组的秩

（向量组的）极大线性无关组：（不含多余的向量 而又和原来的向量组等价）

↳ 如果某个部分组本身是线性无关的，而从原向量组中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关。（如果有的话）

△ 线性无关组的极大无关组就是这个向量组自身。

△ 任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

一个向量组的极大线性无关组往往不唯一（本身线性无关的除外）

P98 ① 同一向量组的极大无关组都含有相同个数的向量.

向量组的极大无关组所含有向量的个数称为向量组的秩

〈区别于矩阵的秩〉

○ 仅含零向量的向量组必定线性相关.

而且 仅含零向量的向量组没有极大线性无关组. 规定它的秩为零.

（零阵的秩为0）

○ 向量组线性无关的充要条件是 $r(A)=n(A)=s$

（$n(A)$ 为 A 所含有的向量个数）

○ 有包含零向量的向量组 A，$r(A)<n(A)=s$（必定线性相关）

○ 矩阵的行秩和列秩相等. P97.

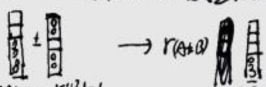
同时还和矩阵本身的秩相等 $r=r_i=r_j$.

○ P98 求向量组的极大无关组.

○ P99. ① 若 A,B 都为 $m\times n$（$A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$）（A,B 才相加）

则 $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$　　pp书pdf P388

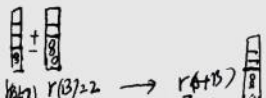
〈对此可作非严格的数量理解：



$r(A)=2$　$r(B)=1$　$\longrightarrow r(A+B)$　$r(A+B)=r(A)+r(B)=3$

~~★~~ 如果向量组 A 能由 B 线性表出，则秩 $r(A)\le r(B)$

而



$r(A)=3$　$r(B)=2$　$\longrightarrow r(A+B)=3\le r(A)+r(B)=5$

$\therefore r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

$A_{m\times l}$　$B_{l\times n}$

② $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$　　$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_l)$

$AB_{m\times n}$　　$B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$　　P99

则 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots A\beta_n)$

〈$A\beta_1=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_l)\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\ \vdots\\b_{l1}\end{bmatrix}=\cdots$

P104.

齐次线性方程组 解的结构

对于 $AX=0$

设 η_1, η_2 是其2个解. 即有 $A\eta_1=0$, $A\eta_2=0$

则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 也是其解 (k_1, k_2 为任意值)

$(\because A(k_1\eta_1+k_2\eta_2)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2=0+0=0$

△ ~~齐次~~ $AX=0$ 的 $\boxed{\text{基础解系}}$: $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s)$ (是某些向量组)

如果 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s$ 线性无关, 且 $AX=0$ 的任意解均可被 $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s)$ 线性表示

○ 基础解系不是唯一的 (类似于极大无关组)

① 对于求解齐次方程的基础解系 (系数矩阵可以不是方阵)

要将系数矩阵化为 ~~最简~~ 行简化阶梯矩阵后,

利用 $r(A)$ 与未知量个数 s: $(s-r(A))$ = 基础解系所含有的解向量的个数.

还可以将原方程同解(表)的简化阶梯形组写出:

对其中的自由变量予以赋值 (不同组的赋值, 得到不同的解向量 $\underbrace{\eta_1, \eta_2 \cdots}_{(s-r(A))\text{个}}$

全部解为 $X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ (k_i 为任意常数.

△ 如果有 $\underset{(m\times t)}{AB=0}$, 则 $r(A)+r(B)\le n$ (其中 $A_{m\times n}$, $B_{n\times t}$)

(证):

$AB=A(b_1, b_2, \cdots b_t)=(Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_t)$; 又 $\boxed{AB=0}$

$\therefore$ ~~[illegible]~~ 均有 $Ab_i=0$ (向量) $(i=1,2,\cdots,t)$

即, b_i 是为 $AX=0$ 的解向量 ($X=b_i$)

P107 续证)

令 $p = n - r(A)$ ($n-r(A)$ 为 $AX=0$ 的基础解系包含的解向量个数)

则 $AX=0$ 的基础解系为(记为 $X = (\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{p=n-r(A)})$)

而 B 向量组可以 X 向量组表示,

那么 $r(B) \leq r(X)$ | 由定理 P92. 推论 2

$\therefore$ $r(B) \leq n - r(A)$

$\therefore$ $r(B) + r(A) \leq n$.

P107 非齐次线性方程组解的结构

导出组 $\boxed{AX=B}$ 的解记为 η_1^*, η_2^*

η 是 $AX=B$ 的导出方程组 ($AX=0$) 的解.

则 (1) $\eta_1^* - \eta_2^*$ 是 $AX=0$ 的解 ~~(…)~~

(2) $\eta_1^* + \eta$ 是 $AX=B$ 的解.
<注意是 $\eta_1^* + \eta$>

P108 ※ 如果 η^* 是 $AX=B$ 的一个(特)解. $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-r})$ 为其导出组 $AX=0$ 的基础解系 则 $AX=B$ 的全部解: $X = \underline{\eta^*} + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$ ($k_i \in R$)

$\therefore$ 当 $AX=B$ 有唯一解的充分必要条件为其 $AX=0$ 只有零解

// 总之,无论是求 $AX=0$ 还是求 $AX=B$ 的解, $AX=0$ 的解都得求.
(不过对非齐次的 $AX=B$, 还得求其增广矩阵 $\bar{A} = (A, B)$ 的行简化阶梯矩阵 ~~(…)~~ 得到简化后的同解于 $AX=B$ 的一个线性方程组.
(记为 $\bar{A}'$) 为其中的自由变量取一组值,得到 $AX=B$ 的一个特解 η^*
将 $\bar{A}'$ 矩阵中的常数项换成零. 即可得导出组 $AX=0$ 的等价简化方程组,求出其基础解系 η. 得出 η^* 为

○ 关于 $r(\bar{A}) \neq r(A)$ 时方程组无解的说明：(P16)

如 $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} & A & & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \end{array}$

$\bar{A} = (A, B)$ (不要把 $\bar{A}$ 与 B 混淆)

$\therefore r(\bar{A}) = 3.$

$r(A) = 2.$

$\therefore r(\bar{A}) = 3 > r(A) = 2$

○ 值得注意的是，自由变量的选取任意，可以由任何变量充当，(不唯一)

○ 如果系数阵是方阵的话，可以通过行列式求值，当 $|A|=0$ 得到系数阵中的参数的范围

(P121) 四、矩阵的特征值和特征向量 → 特征值是属于方阵$_{n\times n}$的概念 <特征向量与特征值是相配套的，相互依赖不可分割的。>

○ 对于方阵 A_n，必然有 $A\alpha = \lambda\alpha$

A：n阶方阵 $A_{n\times n}$；λ：数；α：向量(n维)的非零向量 $(\alpha \neq 0)$

○ 对于特殊方阵(单位阵 E_n)，由于 $E\alpha = 1\cdot\alpha$ 恒成立，

数1；向量α

$\therefore$ $\lambda=1$ 是单位阵 E_n 的一个固有特征值。

而且，任意非零的n维向量 $\alpha_{n\times 1}$ 都是 E 的 $\lambda=1$ 的特征向量

※ 到目前为止，我们要认识到，将矩阵乘法视作向量组与向量组之间的运算法，会更加合适!!(虽然是形式上).

比如：

$$\underset{3\times n}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_3\beta_1 \end{pmatrix}$$

提一下：

向量：$\alpha_i\,(1\times n)$；$\beta_j\,(n\times 1)$

$$\underset{1\times n}{\alpha_i}\ \underset{(n\times 1)}{\beta_j} \Rightarrow (\ ) = \underset{(1\times 1)}{\boxed{\alpha_i\beta_j}}$$

两个向量(一个行向量与一个列向量<同维数n>)乘积结果为 1×1 的值(数值.

更一般地：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m)$$

$\alpha_i\,(1\times n)$ $\beta_i\,(n\times 1)$ → $\boxed{\alpha_i\beta_i}\,(1\times1)$

P122 对于 $A^2=A$，有 $\lambda=1$ 或 0

$\because$ $A\alpha=\lambda\alpha$

$\therefore$ $A^2\alpha = A\cdot(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$

又 $\because$ $A^2=A$

$\therefore$ $A^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha = \lambda^2\alpha$

$\therefore (\lambda-\lambda^2)\alpha = 0 \quad (\alpha\neq 0)$

$\therefore \lambda = 1$ 或 0

△ 求取特征值 λ；与相应 λ 下的特征向量 α 之间的关系.

P122-123 ※

由于 $A\alpha=\lambda\alpha$.

则 $0 = \lambda\alpha - A\alpha = (\lambda E-A)\alpha$.

$\therefore$ 有 $(\lambda E - A)\alpha = 0 \quad (\alpha\neq 0)$

可见，α 是 $\underbrace{(\lambda E-A)}_{方阵(n\times n)}$ 的非零解.

又因为 $(\lambda E-A)X=0$ 有非零解仅当 $|\lambda E-A|=0$

即 A 的特征值 λ 为方程 $|\lambda E-A|=0$ 的根.

$(\lambda E-A)$ 是一个方程.

P123 △特征多项式：对于 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

称 $f(\lambda)=|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} (\lambda-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (\lambda-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (\lambda-a_{nn}) \end{vmatrix}$

① 称为方阵 A_n 的特征多项式. ② 又称，$f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$ 为 A_n 的特征方程

第2个典型例子（求特征值）

① P124
$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

② P123
$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

观察发现有2个0在同一行(列)

对于② $= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}(-1)^{2+2}$

$= (\lambda-2)^2(\lambda+1)$

对于① $= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix}(-1)^{3+3}$

$= (\lambda+1)[\lambda(\lambda+2)-(-1)]\cdot 1$

$= (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1)$

$= (\lambda+1)^3$

▷ 求解所有特征值后，分别将 (λ_i) 代入：$(i=1,2,\cdots)$

$\underbrace{\lambda E - A}_{(\text{矩阵})_{n\times n}}$

得到矩阵 $(\lambda_i E - A)_{n\times n} \xrightarrow{\text{化为行简化阶梯形}}$

再求得 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 这一齐次方程的基础解系.

▷ 求得
- 极大无关组：（可见典型题 P98 例2）其实相当于极大无关组的向量组是从被分析的向量组中选取出来的。（为了得到极大无关组，）
- 基础解系：[对行简化等价同解方程组进行求解求出，得到解向量的过程。]

特点是都不唯一

只需要得到A的等价阶梯矩阵即可从A中取出极大无关组的若干个向量成员。
但往往我们要用得到（确定的）极大无关组来表示无关组之外的其它向量，还要得到行简化的阶梯矩阵.

P124 矩阵的迹. 记为 $tr(A)$

↳ 是对于方阵(n阶方阵) $A_{n\times n}$ 的 n个特征值 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

(包括重特征值)

(1)

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \quad (n\times n)$$

有 对角线上的元素之和为特征值之和:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)}_{\text{迹}}$$

<揭示了方阵的迹和特征值之和的关系>

(2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$ <揭示了方阵 A_n 的特征值和方阵行列式值的关系>

方阵特征值与方阵可逆性:

由于 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A_n|$, ∴若 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0$, 则 $|A_n| \neq 0$, 方阵 A_n 可逆

P125 如果, 对于 α 和 $k\alpha$, $A\alpha = \lambda_0\alpha$, 则有 $A(k\alpha) = \lambda_0(k\alpha)$.

令 $k\alpha = \alpha'$

$A\alpha' = \lambda_0\alpha'$

即 $k\alpha$ 也是方阵A的,属于特征值 λ_0 的特征向量

∴ 一个特征向量只唯一对应于一个特征值. (一个特征值可对应任意多的特征向量).

↓ 表明若两个方阵有相同的特征值,却不保证有相同的特征向量.

P125

∵ 方阵 A^T 与方阵A有相同的特征值.

P125–P126上下（可见复杂的定积描述）

△对于 $A_{(n)}\alpha=\lambda\alpha$ 中的λ与α，有：

① $(kA_n)_{n\times n}\cdot\alpha=(k\lambda)\alpha$ $(k\in R)$

② $A_{n\times n}^m\alpha=\lambda^m\alpha$ $m\in N^*$ $(m=1,2\cdots m)$

③ $|A|\neq0$时，$A_{n\times n}^{-1}\alpha=\lambda^{-1}\alpha$

④ $|A|\neq0$时 $A_{n\times n}^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$

△ A_n的m个互不相同的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，$\alpha_1,\cdots\alpha_m$分别是属于$\lambda=\lambda_i$ $(i=1,\cdots m)$的特征向量。
则$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关。（P126注）

△属于各个特征值λ_i的$\boxed{\text{线性无关的向量}}$合在一起仍线性无关。

△ A_n的k重特征值$\lambda_{(k)}$，对应于$\lambda_{(k)}$的线性无关特征向量不超过k个。

△ A_n的线性无关的特征向量的个数$\leq n$。

P127. 相似矩阵（对角化）

△对于A_n和B_n若存在P_n使得：

$$P^{-1}AP=B\quad(PAP^{-1}=B)$$

则称A与B相似$(A\sim B)$

<此外，有
$$\begin{cases}A\sim A\\ A\sim B\Rightarrow B\sim A\\ A\sim B,B\sim C\Rightarrow A\sim C\end{cases}$$

（P128）△ $B\sim A$，$B\,\boxed{\text{不唯一}}$

<互相似的矩阵有相同的特征值（∵有相同的特征多项式）

P128 $A \sim B$，有

① $|A|=|B|$

② $tr(A)=tr(B)$ （迹相等）

③ $r(A)=r(B)$

④ $A^T \sim B^T$

⑤ $A^m \sim B^m$

⑥ （A与B有一致的可逆性）且 $A^{-1} \sim B^{-1}$

$A^* \sim B^*$

P129

方阵可相似对角化：

（λE所组成的是对角阵，不一定能所有的？对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$）

◦ 如果 A_n 相似于某个对角矩阵 /

◦ A_n 可对角化的充要条件：A_n 有 n 个线性无关的特征向量.

◦ 由于，若 A_n 有 n 个互不相同的特征值，则必有 n 个线性无关的特征向量，故 A_n 可对角化.（一个充分条件）

◦ 更一般的：$A_n \sim \Lambda$ 的充要条件：A_n 的每个k重特征值对应的线性无关的特征向量个数恰等于其重数

k重 $(k \geq 1, \cdots k \leq n)$

（步）n阶矩阵 A_n 的对角化方法（步骤

① 解 $|\lambda E - A| = 0$，得到 A 的所有特征值 λ_i

② 对于不同 λ_i，分别解出！~~对应~~ $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的基础解系，

（分别））

判断：如果每个 λ_i 的重数 = 基础解系中向量的个数 $n - r(A_n)$ 则 $A_n \sim \Lambda$ 可行，

（注）显然地，如果 A 的所有 λ_i 都是单根，必定可以对角化.

③ 如果可以对角化，则

① $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为 A 的所有线性无关的特征向量.

② $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

A_n 的所有特征值 λ_i 来填充 Λ

(5)若 A 可逆，则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

是个数

证明 $\because AA^{-1} = E$，$\therefore |A| \cdot |A^{-1}| = 1$，因此 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.