线性代数 - 知识框架

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{可逆} \\ r(A) = n \\ A\text{的列（行）向量线性无关} \\ A\text{的特征值全不为}0 \\ Ax = 0\text{ 只有零解} \Leftrightarrow \forall x \neq 0，Ax \neq 0 \\ \forall \beta \in \mathbb{R}^n, Ax = \beta\text{总有唯一解} \\ A^T A\text{是正定矩阵} \\ A \cong E \\ A = p_1 p_2 \cdots p_s \ \ p_i\text{是初等阵} \\ \text{存在}n\text{阶矩阵}B\text{, 使得}AB = E\text{ 或 }AB = E \end{cases}$$

注：全体n维实向量构成的集合$\mathbb{R}^n$叫做n维向量空间.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{不可逆} \\ r(A) < n \\ A\text{的列（行）向量线性相关} \\ 0\text{ 是}A\text{的特征值} \\ Ax = 0\text{ 有非零解, 其基础解系即为}A\text{关于}\lambda = 0\text{ 的特征向量} \end{cases}$$

注：$|aE + bA| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(aE + bA) < n \\ (aE + bA)x = 0\text{ 有非零解} \\ \lambda = -\frac{a}{b} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{向量组等价} \\ \text{矩阵等价}(\cong) \\ \text{矩阵相似}(\sim) \\ \text{矩阵合同}(\simeq) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

√ 关于$e_1, e_2, \cdots, e_n$：

①称为$\mathbb{R}^n$的标准基，$\mathbb{R}^n$中的自然基，单位坐标向量$p_{\text{教材}152}$；

②$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关；

③$|e_1,e_2,\cdots,e_n|=1$；

④$\mathrm{tr}E=n$；

⑤任意一个n维向量都可以用$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性表示.

$\boxed{\text{行列式的定义}}$ $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

√ 行列式的计算：

①行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

②若A与B都是方阵（不必同阶），则$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=|A||B|$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

③上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积.

④关于副对角线：$\begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & a_{2n-1} & \\ a_{n1} & & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & & a_{1n} \\ & a_{2n-1} & \\ a_{n1} & & O \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n}\dots a_{n1}$

⑤范德蒙德行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\ge i\ge j\ge 1}(x_i-x_j)$

$\boxed{\text{矩阵的定义}}$ 由$m\times n$个数排成的m行n列的表$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$称为$m\times n$矩阵. 记作：$A=(a_{ij})_{m\times n}$或$A_{m\times n}$

$\boxed{\text{伴随矩阵}}$ $A^*=(A_{ij})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，$A_{ij}$为$|A|$中各个元素的代数余子式.

√ 逆矩阵的求法:

① $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$　　注：$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

②$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots A^{-1})$

③$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_3 & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_3} \\ & \frac{1}{a_2} & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix}$

√ 方阵的幂的性质：$A^mA^n=A^{m+n}$　　$(A^m)^n=(A)^{mn}$

√ 设$A_{m\times n},B_{n\times s},A$的列向量为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, B的列向量为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,

则$AB=C_{m\times s}\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}=(c_1,c_2,\cdots,c_s)\Leftrightarrow A\beta_i=c_i$　，$(i=1,2,\cdots,s)$　$\Leftrightarrow\beta_i$为$Ax=c_i$的解$\Leftrightarrow A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)=$

$(c_1,c_2,\cdots,c_s)\Leftrightarrow c_1,c_2,\cdots,c_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示. 同理：$C$的行向量能由$B$的行向量线性表示，$A^T$为系数矩阵.

√ 用对角矩阵Λ左乘一个矩阵, 相当于用Λ的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量;

用对角矩阵Λ右乘一个矩阵, 相当于用Λ的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘.

√ 分块矩阵的转置矩阵：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$

分块矩阵的逆矩阵：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}CB^{-1} \\ O & B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B \end{pmatrix}$

分块对角阵相乘：$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

分块对角阵的伴随矩阵：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} BA^* & \\ & AB^* \end{pmatrix}$

√ 矩阵方程的解法($|A| \neq 0$)：设法化成$(I)AX = B$ 或 $(II)XA = B$

(I)的解法：构造$(A \vdots B) \xrightarrow{初等行变换} (E \vdots X)$

(II)的解法：将等式两边转置化为$A^T X^T = B^T$，用(I)的方法求出X^T，再转置得X

√ $Ax = 0$与$Bx = 0$同解（A, B列向量个数相同），则：

① 它们的极大无关组相对应，从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 矩阵$A_{m \times n}$与$B_{l \times n}$的行向量组等价⇔齐次方程组$Ax = 0$与$Bx = 0$同解⇔ $PA = B$（左乘可逆矩阵P）；$p_{教材101}$

矩阵$A_{m \times n}$与$B_{l \times n}$的列向量组等价⇔ $PQ = B$（右乘可逆矩阵Q）.

√ 判断$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$是$Ax = 0$的基础解系的条件：

① $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$线性无关；

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$都是$Ax=0$的解；

③ $s=n-r(A)=$ *每个解向量中自由未知量的个数.*

√ 一个齐次线性方程组的基础解系不唯一.

① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.

② 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

③ 部分相关, 整体必相关；整体无关, 部分必无关. 少相关, 则多相关

④ 原向量组无关, 接长向量组无关；接长向量组相关, 原向量组相关. 短无关, 长也无关

⑤ 两个向量线性相关⇔对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关$p_{教材114}$.

⑥ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中任一向量$\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$都是此向量组的线性组合. 至少能自己表示自己

⑦ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关⇔向量组中至少有一个向量可由其余$n-1$个向量线性表示.

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关⇔向量组中每一个向量$\alpha_i$都不能由其余$n-1$个向量线性表示.

⑧ m维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关⇔ $r(A)<n$；

m维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关⇔ $r(A)=n$.

⑨ $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$.

⑩ 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关, 则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示, 且表示法唯一.

⑪ 矩阵的行向量组的秩=列向量组的秩=矩阵的秩. 行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

行阶梯形矩阵 可画出一条阶梯线，线的下方全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素非零. 当非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其他元素都是0时，称为行最简形矩阵

⑫ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系；

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩，且不改变行向量间的线性关系.　　即：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

√ 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系：

对A施行一次初等行变换得到的矩阵，等于用相应的初等矩阵左乘A；

对A施行一次初等列变换得到的矩阵，等于用相应的初等矩阵右乘A.

$\boxed{\text{矩阵的秩}}$ 如果矩阵A存在不为零的r阶子式，且任意$r+1$阶子式均为零，则称矩阵A的秩为r. 记作$r(A)=r$

$\boxed{\text{向量组的秩}}$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩. 记作$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\boxed{\text{矩阵等价}}$ A经过有限次初等变换化为B.　记作：$A\cong B$

$\boxed{\text{向量组等价}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$可以相互线性表示.　记作：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cong(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

⑬ 矩阵A与B等价$\Leftrightarrow PAQ=B$，P,Q可逆$\Leftrightarrow r(A)=r(B)\neq> A,B$作为向量组等价，即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵A与B作为向量组等价$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\Rightarrow$

矩阵A与B等价.

线性表示，线性等价，线性相关

⑭ 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示$\Leftrightarrow AX=B$有解$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

存在解向量.

⑮ 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且$s>n$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关.

向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，且可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，则$s\leqslant n$.

⑯ 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则两向量组等价；$p_{\text{教材}94,\text{例}10}$

⑰ 任一向量组和它的极大无关组等价. 向量组的任意两个极大无关组等价.

⑱ 向量组的极大无关组不唯一，但极大无关组所含向量个数唯一确定.

⑲ 若两个线性无关的向量组等价，则它们包含的向量个数相等.

⑳ 若A是$m\times n$矩阵，则$r(A)\leq min\{m,n\}$，若$r(A)=m$，A的行向量线性无关；

相关性->可被替代性
(线性相关，可被替代(被表示))

若$r(A)=n$，A的列向量线性无关，即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

√ 矩阵的秩的性质：

①若$A\neq O\Leftrightarrow r(A)\geqslant 1$　　$0\leqslant r(A_{m\times n})\leqslant min(m,n)$

②$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$　$p_{教材101,例15}$

③$r(kA)=r(A)$　若$k\neq 0$

④$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$　　$max\{r(A),r(B)\}\leqslant r(A,B)\leqslant r(A)+r(B)$　$p_{教材70}$

⑤$r\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$　　$r\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}\neq r(A)+r(B)$

⑥$r(AB)\leqslant min\{r(A),r(B)\}$

⑦ 若$A_{m\times n},B_{n\times s}$，且$r(AB)=0\Rightarrow r(A)+r(B)\leqslant n$

⑧若A可逆$\Rightarrow r(AB)=r(B)$

若B可逆$\Rightarrow r(AB)=r(A)$

系数矩阵的列数表示线性方程的未知量的个数　系数矩阵的秩代表有效的限制变量取值的条件

⑨若$r(A_{m\times n})=n\Rightarrow\begin{cases}\Leftrightarrow Ax=0\text{ 只有零解}\\ r(AB)=r(B)\end{cases}$ 且A在矩阵乘法中有左消去律$\begin{cases}AB=O\Rightarrow B=0\\ AB=AC\Rightarrow B=C\end{cases}$；

若$r(B_{n\times s})=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$　　且B在矩阵乘法中有右消去律.

√ 初等矩阵的性质：

$\lvert E(i,j)\rvert=-1$	$\lvert E[i(k)]\rvert=k$	$\lvert E[i,j(k)]\rvert=1$

$E(i,j)^T = E(i,j)$	$E[i(k)]^T = E[i(k)]$	$E[i,j(k)]^T = E[j,i(k)]$
$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$	$E[i(k)]^{-1} = E[i(\frac{1}{k})]$	$E[i,j(k)]^{-1} = E[i,j(-k)]$
$E(i,j)^* = -E(i,j)$	$E[i(k)]^* = kE[i(\frac{1}{k})]$	$E[i,j(k)]^* = E[i,j(-k)]$

分析解的结构时，增广矩阵秩法比行列式法更为通用（行列式法只适用于方阵）

增广矩阵的秩和系数矩阵的秩相等

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)$

$<n$：$\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有无穷多解；$\Leftrightarrow$ 表示法不唯一；$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解 $\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}} |A|=0$

$=n$：$\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有唯一组解；$\Leftrightarrow$ 表示法唯一；$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解 $\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}} |A|\neq 0\Rightarrow$ 克莱姆法则

线性表示，对应线性方程组有解（无解）的等价描述

线性相关意味这这个向量组中包含不必要的向量（这些向量可以被其余向量所表示）；可见，向量组线性相关倒是说明了该向量组不是最简的（存在冗余向量）

β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow Ax=\beta$ 无解 $\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta)\end{cases}$

注：$\begin{vmatrix} Ax=\beta\text{ 有无穷多解}\left\langle\begin{matrix}\Rightarrow\\ <\neq\end{matrix}\right\rangle\text{ 其导出组有非零解}\\ Ax=\beta\text{ 有唯一解}\left\langle\begin{matrix}\Rightarrow\\ <\neq\end{matrix}\right\rangle\text{ 其导出组只有零解}\end{vmatrix}$

$\boxed{\text{线性方程组的矩阵式}}$ $Ax=\beta$

$\boxed{\text{向量式}}$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},j=1,2,\cdots,n$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\beta$$

矩阵转置的性质：	$(A^T)^T=A$	$(AB)^T=B^TA^T$	$(kA)^T=kA^T$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^T)^*=(A^*)^T$

分配律均要把内部的矩阵顺序逆序

<table>
<tr><td>矩阵可逆的性质：</td><td>$(A^{-1})^{-1}=A$</td><td>$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$</td><td>$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$</td><td>$|A^{-1}|$
$=|A|^{-1}$</td><td>$(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}$</td><td>$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=A^{-k}$</td><td></td></tr>
<tr><td>伴随矩阵的性质：</td><td>$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$</td><td>$(AB)^*=B^*A^*$</td><td>$(kA)^*=k^{n-1}A^*$</td><td>$|A^*|$
$=|A|^{n-1}$</td><td>$(A\pm B)^*\neq A^*\pm B^*$</td><td>$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$</td><td>$(A^k)^*=(A^*)^k$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$r(A^*)=\begin{cases} n & 若r(A)=n \\ 1 & 若r(A)=n-1 \\ 0 & 若r(A)<n-1 \end{cases}$</td><td>$|AB|=|A||B|$</td><td>$|kA|=k^n|A|$</td><td>$|A^k|=|A|^k$</td><td colspan="2">$|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$</td><td>$AA^*=A^*A=|A|E$
（无条件恒成立）</td></tr>
</table>

线性方程组解的性质：$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} (1)\ \eta_1,\eta_2 \text{是} Ax=0 \text{ 的解}, \eta_1+\eta_2 \text{ 也是它的解} \\ (2)\ \eta \text{是} Ax=0 \text{ 的解}, \text{对任意} k, k\eta \text{ 也是它的解} \\ (3)\ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k \text{是} Ax=0 \text{ 的解}, \text{对任意} k \text{ 个常数} \\ \quad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k, \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k \text{ 也是它的解} \end{array}\right\} \text{齐次方程组} \\ (4)\ \gamma \text{是} Ax=\beta \text{的解}, \eta \text{是其导出组} Ax=0 \text{ 的解}, \gamma+\eta \text{是} Ax=\beta \text{的解} \\ (5)\ \eta_1,\eta_2 \text{是} Ax=\beta \text{的两个解}, \eta_1-\eta_2 \text{是其导出组} Ax=0 \text{ 的解} \\ (6)\ \eta_2 \text{是} Ax=\beta \text{的解}, \text{则} \eta_1 \text{也是它的解} \Leftrightarrow \eta_1-\eta_2 \text{是其导出组} Ax=0 \text{ 的解} \\ (7)\ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k \text{是} Ax=\beta \text{的解}, \text{则} \\ \qquad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k \text{ 也是} Ax=\beta \text{的解} \Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=1 \\ \qquad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k \text{是} Ax=0 \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=0 \end{cases}$

√ 设A为$m\times n$矩阵, 若$r(A)=m, \Rightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,\beta) \Rightarrow Ax=\beta$一定有解，

当$m<n$时, 一定不是唯一解$\Rightarrow \frac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}} < \frac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$, 则该向量组线性相关.

m是$r(A)$和$r(A\,\vdots\,\beta)$的上限.

$\boxed{\text{标准正交基}}$ n个n维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

$\boxed{\alpha \text{与} \beta \text{正交} (\alpha,\beta)=0}$.

$\boxed{\alpha\text{是单位向量}}$ $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=1$.

√ 内积的性质： ① 正定性：$(\alpha,\alpha)\geq 0$, 且$(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=o$

② 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

③ 双线性：$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$

$\boxed{A\text{的特征矩阵}}$ $\lambda E-A$.

$\boxed{A\text{的特征多项式}}$ $|\lambda E - A| = f(\lambda)$.

√ $f(\lambda)$是矩阵A的特征多项式⇒ $f(A) = O$

$\boxed{A\text{的特征方程}}$ $|\lambda E - A| = 0$. $Ax = \lambda x \rightarrow Ax$与$x$线性相关

√ $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\sum_1^n \lambda_i = trA$，trA称为矩阵A的$\boxed{\text{迹}}$.

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的n个元素.

√ 若$|A| = 0$, 则$\lambda = 0$为A的特征值, 且$Ax = 0$的基础解系即为属于$\lambda = 0$的线性无关的特征向量.

√ $r(A) = 1 \Leftrightarrow A$一定可分解为$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, \ b_2, \ \cdots, \ b_n)$、$A^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)A$, 从而$A$的特征值为: $\lambda_1 = trA = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ $p_{指南358}$.

√ 若A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，$f(A)$是多项式, 则:

① $f(A)$的全部特征值为$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$; $|f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$

② 若A满足$f(A) = 0$, 则A的任何一个特征值必满足$f(\lambda_i) = 0$.

√ 设$f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$，对$n$阶矩阵$A$规定: $f(A) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0E$为$A$的一个多项式.

√ λ是A的特征值, 则: $\begin{cases} kA \rightarrow k\lambda \\ aA + bE \rightarrow a\lambda + b \\ A^T \rightarrow \lambda \\ A^{-1} \xrightarrow{\text{分别有特征值}} \dfrac{1}{\lambda} \\ A^* \rightarrow \dfrac{|A|}{\lambda} = \dfrac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_3}{\lambda} \\ A^2 \rightarrow \lambda^2 \\ A^m \rightarrow \lambda^m \end{cases}$.

√ x是A关于λ的特征向量，则x也是$\left\{\begin{matrix} kA \\ aA+bE \\ A^{-1} \\ A^* \\ A^2 \\ A^m \end{matrix}\right.$ 关于 $\begin{matrix} k\lambda \\ a\lambda+b \\ \frac{1}{\lambda} \\ \frac{|A|}{\lambda}=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_3}{\lambda} \\ \lambda^2 \\ \lambda^m \end{matrix}$ 的特征向量.

√ A^2, A^m的特征向量不一定是A的特征向量.

√ A与A^T有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

相似是方阵的概念

$\boxed{A与B相似}$ $B=P^{-1}AP$ （P为可逆矩阵） 记为：$A\sim B$

$\boxed{A与B正交相似}$ $B=P^{-1}AP$ （P为正交矩阵）

$\boxed{A可以相似对角化}$ A与对角阵Λ相似. 记为：$A\sim\Lambda$ （称Λ是A的$\boxed{相似标准形}$）

√ A可相似对角化$\Leftrightarrow n-r(\lambda_iE-A)=k_i$ k_i为λ_i的重数$\Leftrightarrow$ A恰有n个线性无关的特征向量. 这时，P为A的特征向量拼成的矩阵，$P^{-1}AP$为对角阵，主对角线上的元素为A的特征值. 设α_i为对应于λ_i的线性无关的特征向量，则有：

$$A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}_{P}=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}.$$

注：当$\lambda_i=0$为A的特征值时，A可相似对角化$\Leftrightarrow$ λ_i的重数$=n-r(A)=Ax=0$基础解系的个数.

√ 若A可相似对角化，则其非零特征值的个数（重数重复计算）$=r(A)$.

√ 若n阶矩阵A有n个互异的特征值，则A可相似对角化.

√ 若$A\sim\Lambda\Rightarrow A^k=P\Lambda^kP^{-1}=$，$\phi(A)=P\phi(\Lambda)P^{-1}=P\begin{pmatrix}\phi(\lambda_1) & & & \\ & \phi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}$

√ 相似矩阵的性质：① $trA = trB$

② $|A| = |B|$　　从而A, B同时可逆或不可逆

③ $r(A) = r(B)$

④$A^T \sim B^T$；$A^{-1} \sim B^{-1}$　（若A, B均可逆）；$A^* \sim B^*$

⑤$A^k \sim B^k$　（k为整数）；$f(A) \sim f(B)$，$|f(A)| = |f(B)|$

⑥$A \sim B, C \sim D \Rightarrow \begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$

⑦$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 从而$A, B$有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

注:x是A关于λ_0的特征向量, $P^{-1}x$是B关于λ_0的特征向量.

√ 数量矩阵只与自己相似.

√ 对称矩阵的性质： ① 特征值全是实数, 特征向量是实向量；

② 不同特征值对应的特征向量必定正交；

注：对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

③ 必可用正交矩阵相似对角化，即：任一实二次型可经正交变换化为标准形；

④ 与对角矩阵合同，即：任一实二次型可经可逆线性变换化为标准形；

⑤ 一定有n个线性无关的特征向量, A可能有重的特征值, 该特征值λ_i的重数=$n - r(\lambda_i E - A)$）.

$\boxed{\text{正交矩阵}}$　$AA^T = E$

√ A为正交矩阵$\Leftrightarrow$ A的n个行（列）向量构成$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基.

√ 正交矩阵的性质：① $A^T = A^{-1}$；

② $AA^T = A^T A = E$；

③ 正交阵的行列式等于 1 或-1；

④ A是正交阵, 则A^T，A^{-1}也是正交阵；

⑤ 两个正交阵之积仍是正交阵；

⑥ A的行（列）向量都是单位正交向量组.

$\boxed{\text{二次型}}$ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $a_{ij}=a_{ji}$，即A为对称矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$\boxed{A\text{与}B\text{合同}}$ $B=C^TAC.$ 记作：$A\simeq B$ （*A,B为对称阵,C为可逆阵*）

$\boxed{\text{正惯性指数}}$ 二次型的规范形中正项项数p；$\boxed{\text{负惯性指数}}$二次型的规范形中负项项数$r-p$；

$\boxed{\text{符号差}}$ $2p-r$. （r为二次型的秩）

√ 两个矩阵合同的充分必要条件是：它们有相同的正负惯性指数.

√ 两个矩阵合同的充分条件是：$A\sim B$

√ 两个矩阵合同的必要条件是：$r(A)=r(B)$

√ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$经过$\left\{\begin{array}{l}\textit{正交变换}\\ \textit{合同变换}\\ \textit{可逆线性变换}\end{array}\right.$ $x=Cy$化为$f=\sum_1^n d_i{y_i}^2$$\boxed{\text{标准形}}$.

√ 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的正交变换有关, 但非零系数的个数是由 $\underbrace{r(A)}_{\text{正惯性指数+负惯性指数}}$ 唯一确定的.

√ 当标准形中的系数d_i为-1 或 0 或 1 时, 为$\boxed{\text{规范形}}$.

√ 实对称矩阵的正（负）惯性指数等于它的正（负）特征值的个数.

√ 惯性定理：任一实对称矩阵A与唯一对角阵$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$合同.

√ 用正交变换法化二次型为标准形:

① 求出A的特征值、特征向量；

② 对n个特征向量正交化、单位化；

③ 构造C（正交矩阵）, 作变换$x = Cy$, 则$(Cy)^T A(Cy) = y^T C^T ACY = y^{-1} C^T ACY = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$新的二次型为$f = \sum_1^n d_i {y_i}^2$, Λ的主对角上的元素d_i即为A的特征值.

$\boxed{\text{施密特正交规范化}}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关,

$$\text{正交化}\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{({\alpha_2}^T \beta_1)}{({\beta_1}^T \beta_1)} \beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{({\alpha_3}^T \beta_1)}{({\beta_1}^T \beta_1)} \beta_1 - \dfrac{({\alpha_3}^T \beta_2)}{({\beta_2}^T \beta_2)} \beta_2 \end{cases}$$

单位化：$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \qquad \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \qquad \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

技巧：取正交的基础解系，跳过施密特正交化。例如：$x_1 + x_2 - x_3 = 0$取$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{正定二次型}}$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$不全为零，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$.

$\boxed{\text{正定矩阵}}$ 正定二次型对应的矩阵.

√ $f(x)=x^TAx$为正定二次型⇔（之一成立）：

① $\forall x\neq 0$ ，$x^TAx>0$；

② f的正惯性指数为n；

③ A的特征值全大于0；

④ A的所有顺序主子式全大于0；

⑤ A与E合同，即存在可逆矩阵C使得$C^TAC=E$；

⑥ 存在正交矩阵C，使得$C^TAC=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ （λ_i大于0）.

⑦ 存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$；

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ A为正定矩阵的必要条件：$a_{ii}>0$ ； $|A|>0$.

√ 若A为正定矩阵$\Rightarrow A^T,A^{-1},A^*$也是正定矩阵.

√ 若A,B为正定矩阵⇒ $A+B$为正定矩阵，但AB,BA不一定为正定矩阵.

【完】