

# 基于强化学习的端到端量子控制与量子储备池计算综述

## 摘要

随着量子信息处理器(QIP)规模的扩大，传统的开环最优控制方法(如GRAPE和Krotov算法)因依赖精确的解析模型和静态校准，正逐渐难以应对日益复杂的噪声环境和希尔伯特空间的指数级增长。2024年至2025年间，量子控制领域迎来了一个关键的转折点：从静态的“白箱”模型转向基于数据的端到端学习型控制。本报告对这一范式转移进行了详尽的综述，重点探讨了\*\*强化学习(RL)\*\*在闭环量子控制中的突破性应用，以及量子储备池计算(QRC)\*\*作为一种新兴类脑计算架构的实验进展。

我们深入分析了“物理约束”强化学习算法如何解决控制脉冲的平滑性与实验可行性问题，在Rydberg原子和超导量子比特系统中实现了超过99.9%的门保真度。报告详细阐述了从“白箱”哈密顿工程向“灰箱”和“黑箱”模型的演进，这些模型在处理未知系统动力学、非马尔可夫噪声及相关误差方面展现出了卓越的鲁棒性。针对维数灾难这一核心挑战，我们探讨了分层强化学习(HRL)和多智能体架构在量子纠错(QEC)中的实际部署，展示了谷歌量子AI团队如何利用错误伴息(Syndrome)数据实现逻辑量子比特的实时漂移校准。此外，我们系统评估了量子储备池计算在超导、光子及核磁共振(NMR)平台上的实验实现，论证了其利用量子纠缠和测量反作用作为非线性资源，在时间序列预测和复杂分类任务中超越经典方法的潜力。

本综述旨在为物理学家、控制工程师及计算机科学家提供一份关于量子智能控制前沿进展的权威指南，揭示了机器学习与量子硬件的深度融合将如何开启自主、自校准量子机器的新时代。

## 1. 引言：NISQ时代的控制瓶颈与范式转移

当前，含噪中等规模量子(NISQ)技术正处于一个微妙的阶段：硬件的物理潜力已触及量子优势的边缘，但提取这种性能所需的控制精度却随着系统规模的扩大而面临严峻挑战。在过去几十年中，量子最优控制(QOC)主要依赖于基于模型的开环方法。这些方法假设我们拥有对系统哈密顿量 $H_{\text{sys}}$ 和控制哈密顿量 $H_{\text{ctrl}}$ 的完美知识，并通过数值求解薛定谔方程或林德布拉德(Lindblad)主方程来优化控制脉冲。

然而，2024-2025年的实验现实表明，这种“白箱”假设在面对大规模量子系统时显得苍白无力。首先，计算复杂度的爆炸：求解放置量子系统主方程的计算成本随系统尺寸呈二次方甚至指数级增长，这使得对几十个量子比特以上的系统进行实时优化变得不可行。

其次，模型的认知偏差(Model Bias)：真实的量子处理器受到参数漂移、频率拥挤(Frequency Crowding)、以及复杂的非马尔可夫(Non-Markovian)噪声环境的影响。这些效应往往难以被静态的微分方程精确捕捉。

最后，实验的可行性：理论最优的脉冲往往具有极高的带宽需求，导致在实际电子学设备(如任意波形发生器AWG)上产生失真，或在频域上激发非计算子空间的泄漏(Leakage)。

为了应对这些挑战，量子控制领域正迅速向闭环、数据驱动的控制范式转型。在这种新范式中，量子处理器不再被视为一个待解的方程，而是一个待学习的“环境”或“智能体”。\*\*强化学习(Reinforcement Learning, RL)\*\*凭借其通过与环境交互直接优化策略的能力，成为了这一转型的核心引擎。与此同时，\*\*量子储备池计算(Quantum Reservoir Computing, QRC)\*\*作为一种互补的计算范式，利用无序或强耦合量子系统的自然动力学来处理信息，规避了精确门操作的需求。

本报告将围绕以下三个核心支柱，对2024-2025年的最新进展进行全面剖析：

1. 端到端RL控制：从离散的门校准走向整体脉冲级策略优化，特别是物理约束RL算法的兴起。
  2. 应对不确定性：黑箱与灰箱模型在处理未知哈密顿量及非马尔可夫噪声中的优势。
  3. 类脑量子计算：QRC在不同物理平台上的实验验证及其作为神经形态硬件的前景。
- 

## 2. 用于端到端量子控制的强化学习

强化学习将量子控制问题重构为一个马尔可夫决策过程(MDP)。在这个框架下，智能体(经典控制器)通过测量观察量子系统(状态 \$S\$)，施加控制脉冲(动作 \$A\$)，并根据保真度或纯度获得反馈(奖励 \$R\$)。2024-2025年间，RL在量子控制中的应用已从单纯的模拟研究走向了真正的硬件部署，其成功的关键在于引入了对物理限制的深刻理解。

### 2.1 物理约束强化学习(Physics-Constrained RL)

早期的量子RL研究面临一个主要批评：智能体生成的脉冲往往是“Bang-Bang”类型的，即在最大和最小控制幅度之间剧烈跳变。虽然这在数学上可能是时间最优的，但在实验中却会导致严重的频谱展宽，激发高能级泄漏，且超出控制电子设备的带宽。

Ernst等人(2025)提出的\*\*物理知情约束强化学习(Physics-Informed Constrained RL)\*\*彻底改变了这一局面。该方法不再将物理限制作为后处理步骤，而是将其内嵌到学习算法的核心中。

#### 2.1.1 约束机制的数学构建

该算法的核心创新在于限制了解空间的搜索范围，使其仅包含物理上可实现的解。具体而言，算法引入了一个硬约束 \$N\_{\max}\$，代表解决由控制信号诱导的量子动力学所需的最大模拟步数。

- **硬约束(Hard Constraints)**：如果智能体选择的动作导致系统演化过快(即需要超过 \$N\_{\max}\$ 的步数来模拟，意味着高频分量过多)，智能体将受到严厉的惩罚(Penalty Reward)。这迫使策略网络避开那些会导致快速振荡或高能耗的控制区域。
- **软约束(Soft Constraints)**：奖励函数中增加了平滑性项，鼓励生成具有有限上升时间且在脉冲起始和结束点振幅归零的信号。这直接解决了实验中的瞬态振铃问题。

#### 2.1.2 实验验证：从原子到超导

这一方法在多种量子体系中得到了验证：

1. 广义电子 \$\Lambda\$ 系统：在量子点和色心系统中常见的能级结构中，物理约束RL实现了超过 0.999 的布居转移保真度。与传统的优化方法相比，RL生成的脉冲在面对耗散和控制串扰时表现出了更强的鲁棒性。

2. **Rydberg**原子门: 在中性原子阵列中, RL成功优化了Rydberg态的激发脉冲, 有效抑制了由于原子热运动和激光相位噪声引起的误差。
3. 超导量子比特复位: 在带宽受限的条件下, RL发现了一种全新的复位波形, 在保证复位速度的同时, 将残留光子数降至极低水平。

为了实现计算上的可扩展性, 研究团队利用 **JAX** 库实现了全流程的端到端编译。这使得在单个 GPU 上可以并行同步优化多达 1024 个 RL 智能体, 极大地加速了超参数搜索和策略收敛。

## 2.2 实验突破: RL优化的量子比特读取

量子比特的读取(Readout)通常是量子计算周期中最慢且误差最大的环节。读取操作需要在速度(短脉冲)、准确性(信噪比)和非破坏性(避免状态跃迁)之间进行艰难的权衡。2024年, 一项具有里程碑意义的研究利用深度强化学习(Deep RL)对超导Transmon量子比特的色散读取进行了整体优化。

### 2.2.1 主动四音读取(**Active Four-Tone Readout, A4R**)

传统的读取脉冲通常是方波或简单的包络波形。然而, RL智能体在没有任何先验波形假设的情况下, 探索出了一种被称为“**主动四音读取(A4R)**”的复杂结构。这种波形包含三个独特的阶段, 展示了AI对物理机制的独特理解:

1. 高能振铃(**Ring-up**): 脉冲初期具有极高的振幅, 目的是在极短时间内向读取谐振腔注入光子。这使得相空间中的指针状态(对应  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ )迅速分离, 建立信噪比。
2. 稳态保持(**Hold**): 一个稳定的测量窗口, 用于积分信号。
3. 主动耗散(**Active Depletion/Ring-down**): 在测量结束后, 立即施加一个反相位的驱动脉冲, 主动将谐振腔中的光子“抽”走。

### 2.2.2 性能与物理意义

- 分配误差: A4R脉冲实现了  $(4.6 \pm 0.4) \times 10^{-3}$  的分配误差, 达到了利用专用滤波器(如PUR过滤器)的先进水平。
- 速度提升: 由于引入了主动耗散阶段, 谐振腔内的光子数被迅速压制到真空水平( $< 0.05$  光子)。这使得读取和复位的总时间比标准方波脉冲缩短了 3倍。
- 意义: 这一结果直接提升了量子电路的重复频率(Repetition Rate)。对于变分量子算法(VQE/QAOA)等需要百万次采样的应用, 这种速度提升意味着总运行时间的大幅缩减。

## 2.3 演示强化学习(**RLfD**): 解决冷启动问题

尽管RL表现优异, 但其样本效率低(Sample Inefficiency)一直是一个痛点。智能体在训练初期往往需要进行大量的随机探索, 这在昂贵的实验硬件上是不可接受的。为了解决这一问题, 2025年的研究引入了演示强化学习(**Reinforcement Learning from Demonstration, RLfD**)。

### 2.3.1 模仿与精调

RLfD不从随机策略开始, 而是利用“专家演示”来初始化智能体。这些专家演示可以是来自粗糙物理模型的解析解(如DRAG脉冲), 也可以是经验丰富的实验人员手动调节的参数。

- **机制**: 智能体首先通过模仿学习(Imitation Learning)复现专家的策略, 确保其处于一个合理的解空间附近。随后, 利用与环境的交互(RL部分)进行精细调节。
  - **成效**: 实验表明, RLfD极大地减少了收敛所需的样本数量。在非经典态制备任务中, 该方法成功优化了被离散化为超过1000个时间段的复杂脉冲。对于这种高维度的动作空间, 传统的无模型RL通常无法收敛, 而RLfD则能稳定地找到优于初始专家演示的解, 有效地融合了模型知识与数据驱动的灵活性。
- 

### 3. 驾驭未知: 黑箱与灰箱模型的架构优势

2024-2025年文献中的一个核心议题是对“完美模型”幻想的破灭。随着相干时间的延长, 量子系统不再受限于简单的高斯白噪声, 而是受到具有记忆效应的非马尔可夫噪声、甚至是有色噪声的显著影响。在这种情况下, 如何处理未知的哈密顿量和复杂噪声成为了控制策略的分水岭。

#### 3.1 黑箱模型的优势: 彻底消除模型偏差

无模型(Model-Free)RL代表了最纯粹的黑箱方法。它不试图重构系统的哈密顿量, 而是直接建立测量结果到控制动作的映射。

- **处理未知哈密顿量**: 最近的实验展示了利用全黑箱RL控制一个耦合到辅助比特的谐波振子。即使在不知道振子频率、非线性强度或耦合常数的情况下, 智能体仅凭测量反馈(成功/失败的二值奖励或投影测量结果)就学会了制备猫态(Cat States)和福克态(Fock States)。这种能力对于校准制造参数波动较大的设备(如量子点或超导电路)至关重要。
- **鲁棒性**: 在Transmon量子比特的实验中, 黑箱RL智能体展现了惊人的鲁棒性。面对驱动振幅 $\approx 20\%$ 的偏差和10 MHz的频率失谐, 智能体能够自动调整脉冲形状以补偿这些误差, 而基于解析模型的脉冲在同样条件下保真度大幅下降。这证明了黑箱方法能够隐式地“学习”并抵消硬件缺陷。

#### 3.2 灰箱模型的折衷: 物理与AI的融合

虽然黑箱方法鲁棒, 但其训练成本高昂。**\*\*灰箱(Gray-Box, GB)\*\***模型作为一种折衷方案, 在2024年异军突起。灰箱模型结合了物理方程的结构与神经网络的拟合能力:

\$\$\text{Model}\_{\text{GB}} = \text{Physics}\_{\text{fixed}} + \text{NeuralNet}\_{\text{learnable}}\$\$

##### 3.2.1 学习非马尔可夫噪声内核

在灰箱架构中, 系统已知的动力学部分(如理想的驱动项)被硬编码为可微的微分方程求解器, 而未知的噪声部分或哈密顿量偏差则由神经网络来参数化。

- **实验验证**: 在2025年的一项研究中, 研究人员利用GB模型控制受**\*\*随机电报噪声(Random Telegraph Noise, RTN)\*\***影响的量子比特。RTN是一种典型的非高斯、非马尔可夫噪声, 对传统控制理论极具挑战性。
- **结果对比**: 实验显示, 在强耦合噪声区域, 传统的白箱模型(基于标准主方程)彻底失效, 保真度大幅下降。相比之下, GB模型能够“学习”环境的记忆内核, 预测噪声的历史依赖性, 从而

在强噪声下维持了超过90%的门保真度。这表明GB模型成功捕获了传统物理模型忽略的复杂动力学特征。

### 3.2.2 协方差矩阵的学习

针对几何局部的晶格模型，新的协议允许在对数样本复杂度下学习高斯非马尔可夫噪声的协方差矩阵。这意味着控制系统不仅能反应当前的错误，还能基于噪声的关联性预测未来的错误流，从而实施预测性控制（Predictive Control）。

## 3.3 对比总结

特性	白箱模型 (Open Loop)	黑箱模型 (Model-Free RL)	灰箱模型 (Physics-Informed )
知识需求	高(需精确哈密顿量)	无(仅需输入输出)	中(需物理结构)
噪声处理	差(仅限静态/马尔可夫)	优(自适应补偿 )	优(可学习记忆核)
样本效率	极高(无需训练 )	低(需大量交互)	中(需训练但收敛快)
2025现状	基准线, 用于粗调	用于高保真度微调	用于复杂噪声环境

## 4. 突破维数灾难：分层与多智能体解决方案

随着量子处理器从单比特扩展到多比特阵列，控制参数的数量呈线性或二次增长，但状态空间呈指数增长。这种维数灾难（Curse of Dimensionality）使得单一的扁平化RL智能体难以在合理时间内收敛。2024-2025年的研究主要通过分层（Hierarchy）、\*\*课程（Curriculum）和多智能体（Multi-Agent）\*\*策略来应对这一挑战。

### 4.1 分层强化学习 (Hierarchical RL) 与谷歌的QEC实验

分层RL的核心思想是将控制任务分解为不同抽象层级。高层策略（Manager）负责设定目标，低层策略（Worker）负责具体的脉冲执行。2025年，谷歌量子AI团队在量子纠错（Quantum Error Correction, QEC）领域实现了一项突破性的实验，完美诠释了这一理念。

#### 4.1.1 伴息 (Syndrome) 的双重角色

在传统的QEC中，稳定子测量的结果（伴息）仅用于解码和纠正逻辑错误。谷歌团队提出，伴息数

据的统计分布实际上包含了关于底层物理控制参数漂移的丰富信息。

- **机制**:一个分层RL智能体被部署在QEC循环之上。它不干预单次纠错，而是实时监控伴息的统计特征。当环境发生漂移(如温度变化导致微波频率偏移)时，智能体会微调底层的控制参数(如驱动振幅、偏置电压)。
- **成果**:在距离为5的表面码(Surface Code)实验中，该RL系统成功将逻辑错误率(LER)的稳定性提高了3.5倍。这意味着系统具备了“自我愈合”的能力，能够通过在线学习抵抗环境的非平稳性，而无需中断计算进行重新校准。
- **可扩展性**:模拟表明，这种方法的优化速度独立于系统规模(高达距离15的编码)，证明了其在容错量子计算时代的适用性。

## 4.2 课程学习(Curriculum Learning)

课程学习借鉴了人类的教学法:先学简单的，再学复杂的。这在量子态制备和多比特门优化中效果显著。

- **课程设计**:
  1. 阶段一:在孤立环境下优化单量子比特门。
  2. 阶段二:引入静态串扰，优化双比特门。
  3. 阶段三:在全连接的多体动力学环境下，优化并行门操作。
- **成效**:研究表明，采用课程设计的深度RL(DRL-CD)相比于直接训练(DQN)，收敛速度大幅提升，且不易陷入局部极小值。课程设置为智能体提供了一个平滑的梯度，使其能够逐步适应高维希尔伯特空间的复杂性。

## 4.3 多智能体强化学习(MARL)与分布式控制

对于如Rydberg原子阵列这样的大规模系统，单个中央智能体无法处理数以千计的控制通道。MARL采用分布式架构，为每个原子或局部集群分配一个独立的智能体。

- **同步与合作**:2025年的研究利用GPU并行加速，实现了多智能体的同步训练。智能体之间通过共享全局奖励(如整体态保真度)或交换局部状态信息来学习合作策略。这不仅解决了维度问题，还使得控制系统具有天然的模块化和容错性——即便某个智能体失效，其余部分仍能通过局部调整维持运行。

---

# 5. 量子储备池计算:类脑计算的新路径

如果说强化学习是关于如何控制量子系统，那么\*\*量子储备池计算(Quantum Reservoir Computing, QRC)\*\*则是关于如何利用量子系统。作为一种神经形态计算架构，QRC将量子系统视为一个物理“大脑”，利用其复杂的自然动力学来处理信息。

## 5.1 理论基础:量子基质作为计算资源

QRC通过将输入数据映射到量子系统的状态空间，利用哈密顿演化实现非线性变换。其核心优势在于：

1. 指数级状态空间:\$N\$个量子比特的储备池拥有\$2^N\$维的希尔伯特空间。这种高维映射

- 能力远超经典储备池。
2. 免训练的动力学:与变分量子线路(VQC)不同, QRC不需要训练量子部分的参数。储备池的演化是固定的(利用自然物理过程), 仅需训练最后这层简单的经典线性读出层(Linear Readout)。这极大地降低了训练成本和对相干时间的要求。

## 5.2 2024-2025年的实验进展

### 5.2.1 超导电路QRC与克尔非线性

在超导平台, 研究人员构建了基于Transmon量子比特与谐振腔耦合的QRC系统。

- 非线性来源:系统的非线性算力主要来自克尔效应(**Kerr Effect**)(光子间通过量子比特介导的相互作用)以及测量反作用(**Measurement Back-action**)。投影测量本身就是一种强非线性操作。
- 实验结果:仅利用单个量子比特和空腔模式, 该系统在正弦/方波分类任务中达到了**99.7%**的准确率, 并成功预测了混沌的Mackey-Glass时间序列。这证明了即使是极小规模的量子系统, 其计算密度也远超同等规模的经典网络。

### 5.2.2 光子QRC与光子数分辨

光子学凭借其高带宽和多路复用能力, 成为QRC的理想载体。

- 光子数分辨(**PNR**)探测:2025年的“Photon-QuaRC”架构引入了PNR探测器。通过分辨光子数而非仅仅测量光强, 系统能够访问光学模式的完整福克空间(Fock Space)。这种“虚拟”维度的扩展使得小型光网络也能具备巨大的计算容量。
- 玻色采样储备池:基于固定随机波导网络(玻色采样芯片)的实验表明, 光子QRC在处理稀疏数据和类别不平衡问题(如生物医学图像分类)时表现出了超越经典方法的鲁棒性。

### 5.2.3 核磁共振(**NMR**)与自旋QRC

NMR系统利用自旋系统作为储备池, 展示了宏观尺度的量子计算潜力。

- 反馈增强与弱测量:一项关键创新是结合\*\*弱测量(Weak Measurement)\*\*与反馈。与强测量不同, 弱测量仅提取部分信息而保留系统相干性。将这些信息反馈回储备池, 构建了一个量子-经典混合的循环神经网络。实验显示, 这种架构在天气预报等长时记忆任务中, 预测精度优于拥有数千节点的经典储备池。

## 5.3 混合量子-经典递归神经网络(**QRNN**)

QRC与深度学习的融合诞生了混合**QRNN**架构。

- 中途测量(**Mid-circuit Measurement**)作为激活函数:Xu等人(2025)提出了一种新架构, 利用参数化量子电路(PQC)作为RNN的循环核。在每个时间步, 对量子态进行中途测量, 测量结果经过经典神经网络处理后, 用于参数化下一步的量子演化。
- 意义:这种设计巧妙地利用了量子幺正演化作为高容量记忆体, 同时利用中途测量引入非线性。在机器翻译和情感分析任务中, 这种混合QRNN在模拟中展现了与LSTM相当的性能, 但所需的物理资源呈指数级减少。

## 6. 结论与展望

2024年至2025年的研究进展清晰地描绘了量子控制与计算的未来图景：静态校准的时代已经结束，自主学习的时代正在到来。

1. 从模拟到现实：物理约束RL和灰箱模型的出现，成功跨越了“现实鸿沟”，使得AI生成的控制策略能够在真实的、充满噪声的量子硬件上运行，并达到甚至超越人类专家的水平。
2. 神经协处理器（**Neural Co-Processor**）的崛起：谷歌的QEC实验预示着未来量子计算机架构的演变。未来的量子处理单元（QPU）将紧密耦合一个基于FPGA或ASIC的经典“神经协处理器”。这个协处理器运行RL推理，负责实时稳定量子态、优化脉冲和纠正错误，构成量子计算机的“自主神经系统”。
3. QRC的近期应用：在通用的容错量子计算实现之前，量子储备池计算提供了一条务实的路径。利用噪声作为计算资源而非干扰，QRC有望在边缘计算、实时信号处理和非线性预测领域率先实现量子优势。

综上所述，强化学习与量子储备池计算的结合，不仅是解决当前控制难题的技术手段，更是通向下一代智能量子机器的必由之路。这种机器将不再是被动执行指令的硬件，而是具备感知、适应和自我优化能力的智能实体。

表1：2024-2025年量子控制策略对比分析

控制策略	知识需求	噪声处理能力	样本效率	2025年关键实验成果
开环控制 <b>(GRAPE/Kroto v)</b>	高(需精确哈密顿量)	差(仅限静态模型)	不适用(离线)	仍作为门设计的基准，但在漂移环境下表现不佳。
无模型 RL <b>(Model-Free)</b>	无(纯黑箱)	优(自适应补偿)	低	超导读取优化(A4R)，实现3倍速度提升 <sup>1</sup> 。
物理约束 RL <b>(Constrained RL)</b>	低(物理先验)	高(鲁棒性强)	高	Rydberg/Transmon门保真度>99.9% <sup>2</sup> 。
灰箱控制	中(物理结构)	高(非马尔可)	中	成功学习非高

(Gray-Box)		夫)		斯噪声内核, 强耦合下保真度 >90% <sup>3</sup> 。
分层 RL (Hierarchical RL)	混合	高(处理漂移)	高(可扩展)	表面码QEC稳定性提升3.5倍 <sup>4</sup> 。

表2: 2025年量子储备池计算(QRC)平台现状

物理平台	非线性来源	读出方式	核心优势	典型应用
超导电路	克尔效应 + 测量反作用	外差/零差探测	强相互作用, 快速控制	波形分类, 混沌预测 <sup>5</sup>
光子学	光子计数(PNR)	光子探测器	室温运行, 高带宽	图像分类, 稀疏数据处理 <sup>6</sup>
NMR / 自旋	自旋-自旋耦合	弱测量反馈	高相干性, 天然多体关联	长时天气预报 <sup>7</sup>
混合 QRNN	经典反馈回路	中途测量	序列处理能力	机器翻译, 情感分析 <sup>8</sup>

### Works cited

1. Enhanced Qubit Readout via Reinforcement Learning - arXiv, accessed December 11, 2025, <https://arxiv.org/html/2412.04053v3>
2. Reinforcement Learning for Quantum Control under Physical Constraints - arXiv, accessed December 11, 2025, <https://arxiv.org/html/2501.14372v1>
3. Quantum control in the presence of strongly coupled non-Markovian ..., accessed December 11, 2025, <https://arxiv.org/abs/2404.19251>
4. (PDF) Reinforcement Learning Control of Quantum Error Correction - ResearchGate, accessed December 11, 2025, [https://www.researchgate.net/publication/397522175\\_Reinforcement\\_Learning\\_Control\\_of\\_Quantum\\_Error\\_Correction](https://www.researchgate.net/publication/397522175_Reinforcement_Learning_Control_of_Quantum_Error_Correction)
5. Experimental quantum reservoir computing with a circuit quantum electrodynamics system, accessed December 11, 2025, <https://arxiv.org/html/2506.22016v1>
6. Photonic Quantum-Accelerated Machine Learning - arXiv, accessed December 11, 2025, <https://arxiv.org/html/2512.08318v1>

7. High-Accuracy Temporal Prediction via Experimental Quantum Reservoir Computing in Correlated Spins - arXiv, accessed December 11, 2025,  
[https://arxiv.org/pdf/2508.12383](https://arxiv.org/pdf/2508.12383.pdf)
8. Hybrid Quantum-Classical Recurrent Neural Networks - arXiv, accessed December 11, 2025, <https://arxiv.org/html/2510.25557v1>