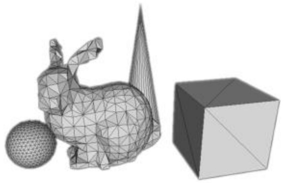


Introduction to Computer Graphics

Geometry Objects and Transformations

Ming Zeng

Software School

Xiamen University

Contact Information:

zengming@xmu.edu.cn

上节内容回顾

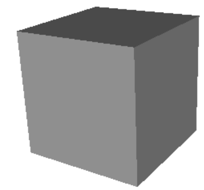
- 三维绘制（3D Rendering)
  - 如何呈现三维效果
  - 设置模型视图矩阵与投影矩阵
  - 消隐概念
  - GLUT/GLU相关函数
- 交互（Interaction）
  - GLUT回调函数
  - 菜单
  - 利用异或操作实现橡皮条技术

第四章 几何对象与变换
Geometry Objects and Transformations

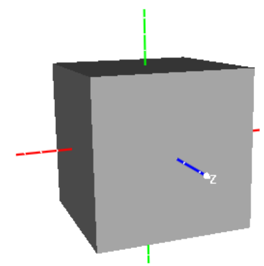
- 第一次课：几何及其表示 (更注重数学概念)
  - 与坐标无关的几何：点、标量、向量
    - 向量空间、仿射空间、欧氏空间
  - 几何的坐标表示
  - 几何在OpenGL中是如何表示的（OpenGL中各种不同标架）
- 第二次课：变换及OpenGL实现（更注重实际算法运作）
  - 几何变换的数学表示
  - OpenGL中的几何变换
  - 专题：旋转的表示及其平滑操作

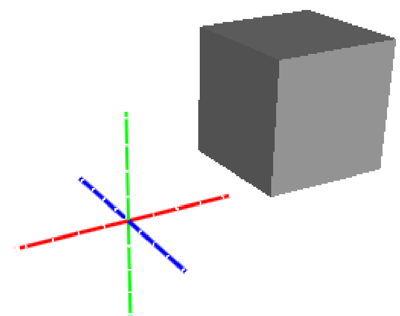
主要内容

- 本节部分内容的关联
  - 与坐标无关的几何
    - 强调几何的内在属性，与几何放在那里无关



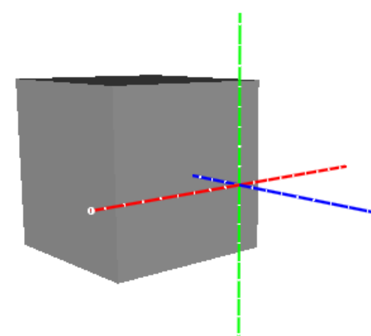
  - 几何的坐标表示
    - 通过指定标架，用坐标表示几何





  - 几何在OpenGL中是如何表示的
    - OpenGL的实现与数学表示之间的关联

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-d\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



主要内容

- 几何及其表示
  - 与坐标无关的几何：点、标量、向量
    - 向量空间、仿射空间、欧氏空间
  - 几何的坐标表示
  - 几何在OpenGL中是如何表示的（OpenGL中各种不同标架）

与坐标无关的几何

- 描述三维图形的基本几何要素
- 如何理解什么是坐标无关的几何
- 向量空间、仿射空间、欧氏空间
  - 标量
  - 向量
  - 点
  - 内积

向量空间

仿射空间

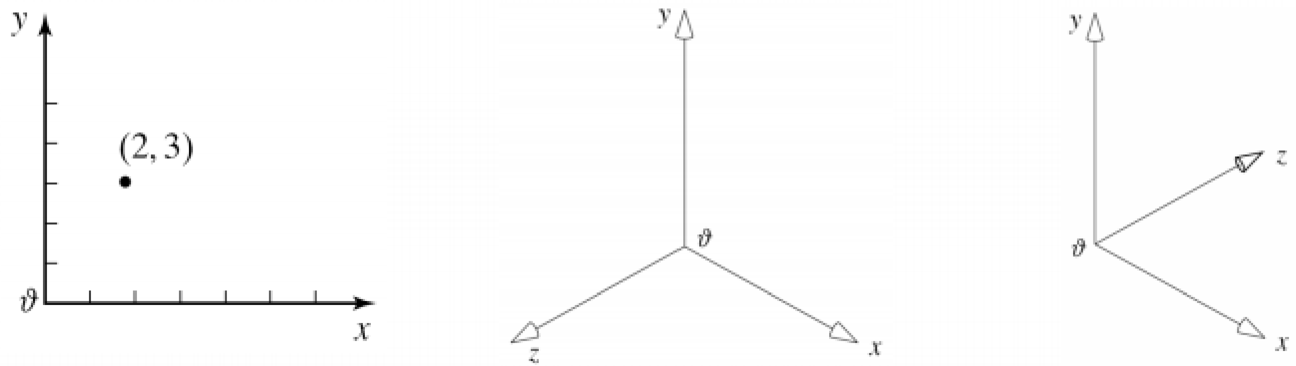
欧氏空间

基本几何要素

- 几何研究n维空间中对象之间的关系
  - 在计算机图形学中，我们对三维空间中的对象感兴趣
- 希望得到一个几何形状的最小集合，根据这个集合可以建立起更复杂的对象
- 需要三个基本元素（思考？下面详述）
  - 标量
  - 向量
  - 点

如何理解什么是坐标无关的几何

- 坐标系



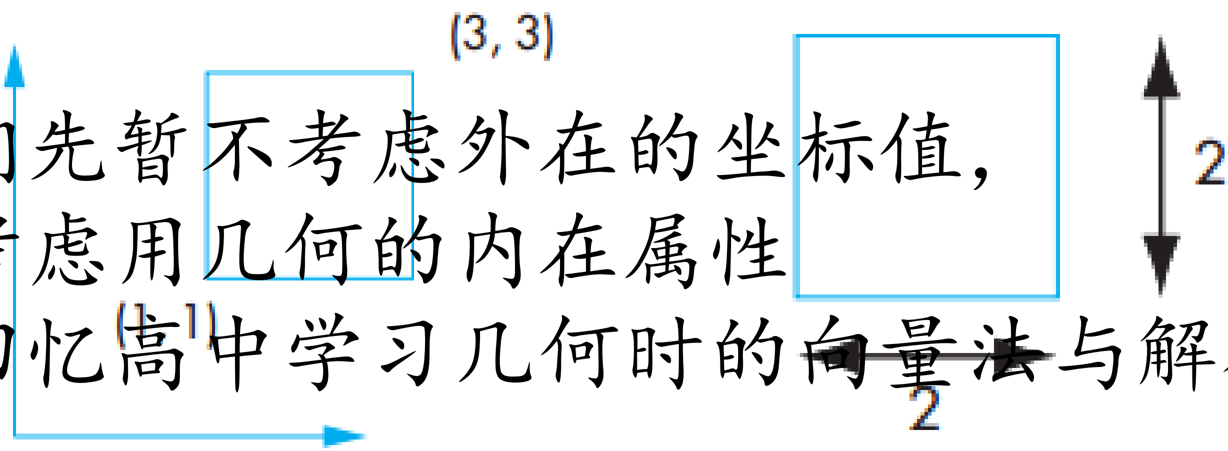
二维坐标系

三维坐标系（右手系）

三维坐标系（左手系）

如何理解什么是坐标无关的几何

- 坐标相关的几何 vs 坐标无关的几何



我们先暂不考虑外在的坐标值，
仅考虑用几何的内在属性
（回忆高中学习几何时的向量法与解析法）

坐标相关的几何　　　　坐标无关的几何

表示：用坐标(1, 1) (3, 3) 表示
改变坐标系：改变坐标值
同一个物体，在不同坐标系下有不同表示

表示：边长为2，相邻边交于一点，角度90
改变坐标系：不改变上述属性
同一个物体，只有一种表述

不同坐标系

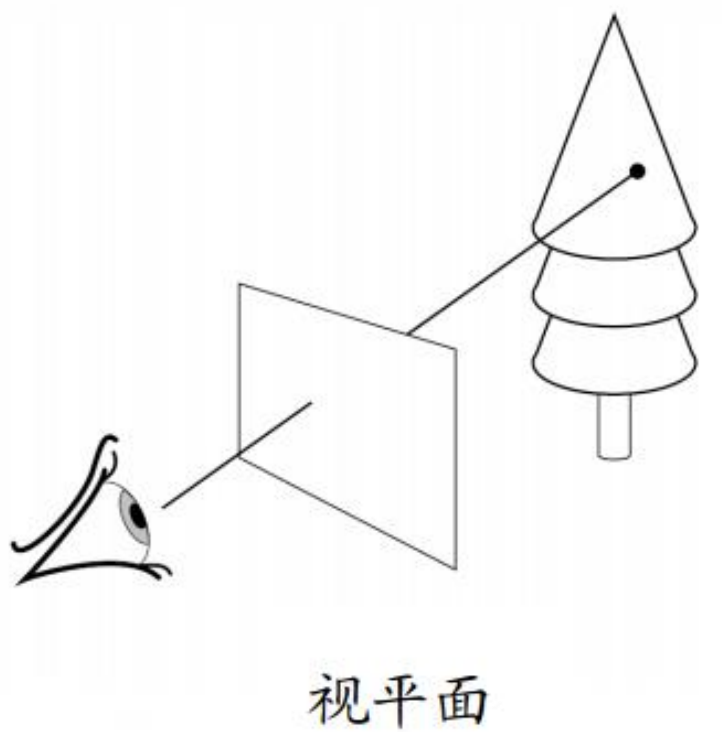
外在的坐标表示 ⟸ 内在物理属性

标量

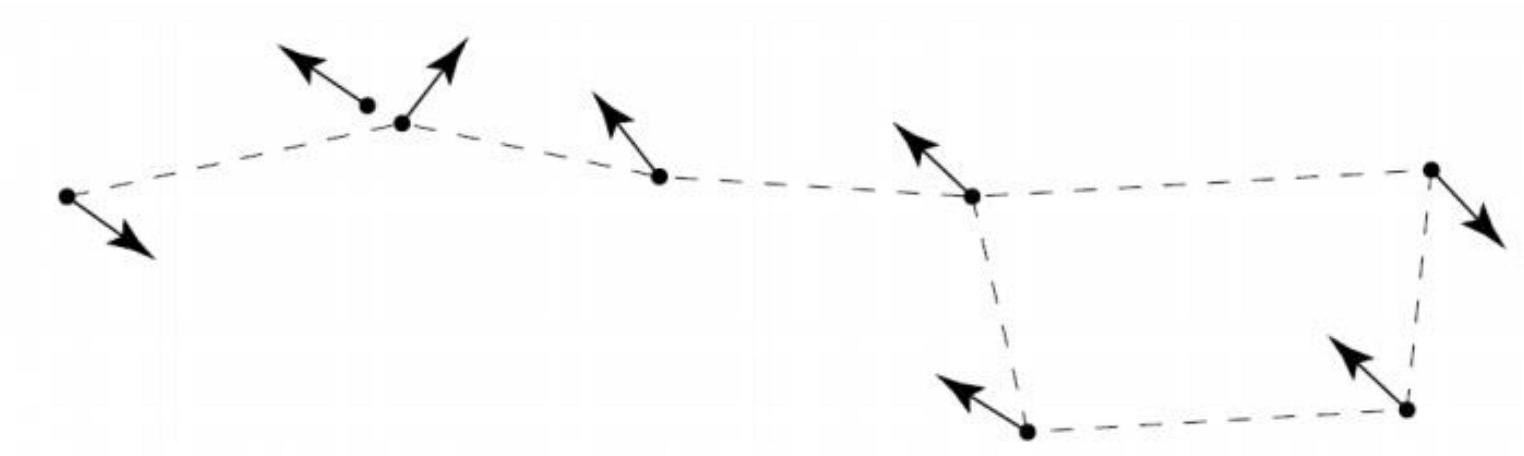
- 在几何中需要三个基本元素
  - 标量、向量、点
- 标量可以定义为集合中的成员，集合中具有两种运算：加法和乘法
  - 两种运算满足交换律、结合律、分配律
  - 加法单位元(0)和乘法单位元(1)
  - 加法逆元和乘法逆元（隐含定义了减法和除法）
- 例：实数或复数全体，通常的加法与乘法
- 标量自身没有几何属性

为什么需要向量？

- 场景：树与照相机
- 照相机需要在视平面上形成一幅图像表示这棵树。视平面上哪些点需要被激活？
- 透视投影需要利用向量来构造



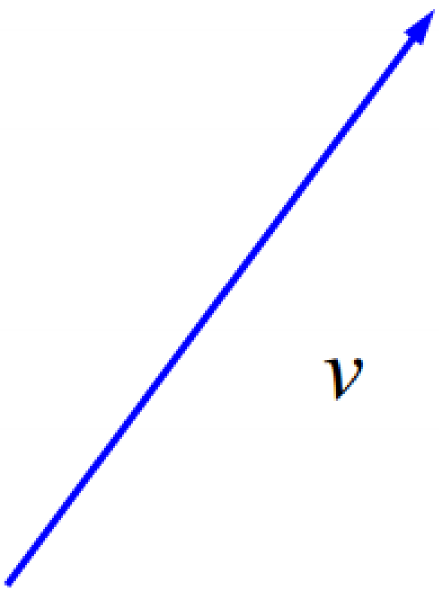
为什么需要向量?



北斗七星的当前位置及移动方向
箭头末尾的位置表示五万年后各星的位置

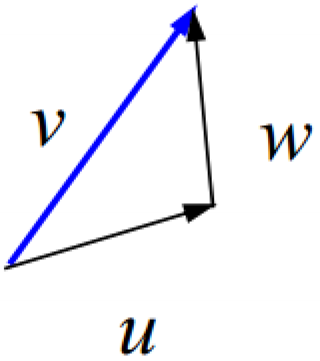
向量

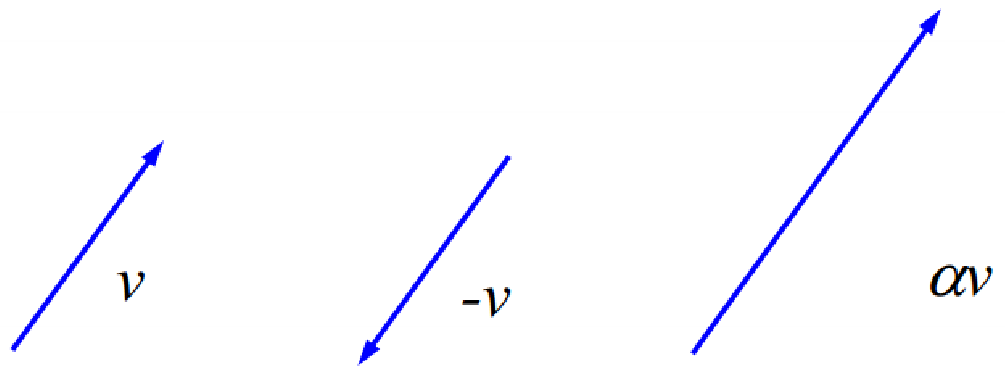
- 物理定义：向量是具有如下两种属性的量
  - 方向
  - 大小或长度: |*v*|
- 例:
  - 力
  - 速度
  - 有向线段
    - 这也是图形学中最重要的例子
    - 可以对应到其它类型上
- 用小写字母表示



向量运算

- 每个向量都有逆
  - 同样长度但是指向相反的方向
- 每个向量都可以与标量相乘
- 有一个零向量
  - 零长度，方向不定
- 两个向量的和为向量
  - 三角形法则





$$v = u + w$$
$$u = v - w$$

(线性)向量空间

- 处理向量的数学系统
- 运算一：向量-向量加法 $w = u+v$
  - 封闭性：$u, v \in V, u+v \in V$
  - 交换律：$u+v = v+u$
  - 结合律：$u+(v+w) = (u+v)+w$
  - 零向量0：$u \in V, u+0 = u$
  - 加法逆元-u：$u+(-u) = 0$

(线性)向量空间

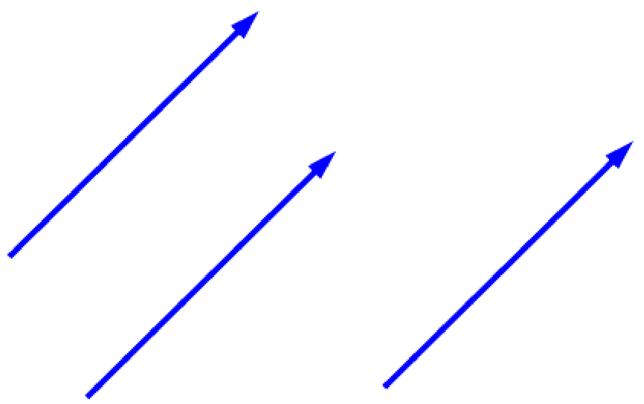
- 运算二：标量-向量乘法 $u = \alpha v$
  - 分配律： $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
  - $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta\, u$

- 在向量空间中，表达式 $v = u + 2w - 3r$ 有意义（什么几何意义？）

- 向量空间例子：有向线段、实数的n元组

向量没有位置

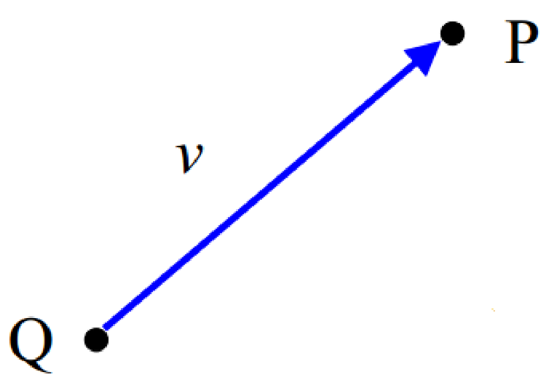
- 下述向量是相等的
  - 因为它们具有相同的方向与长度



- 对几何而言只有向量空间是不够的
  - 还需要点

点

- 空间中的位置。数学上，点没有大小和形状。
  - 用大写字母表示
- 点与向量之间可进行的运算
  - 点与点相减得到一个向量
  - 等价地，点与向量相加得到新点



$$v = P - Q$$
$$P = v + Q$$

提问：以下哪些式子有意义？

$P + 3v$, $P + 3Q - v$, $3P - 3Q + 4v$

仿射空间

- 仿射空间 = 点 + 向量空间
- 运算：
  - 向量-向量加法 → 向量
  - 标量-向量乘法 → 向量
  - 点-向量加法 → 点 （等价:点-点减法→ 向量）
  - 标量-标量运算 → 标量
  - 上述运算均是与坐标无关的
- 对于任意点P， 定义
  - $1 \cdot P = P$
  - $0 \cdot P = \mathbf{0}$ (零向量)

向量与点的线性组合

- 给定n个向量$v_1, v_2, \ldots, v_n$, 以及n个标量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,则由归纳法可以证明

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

也是向量，称为这组向量的线性组合

- 给定n个点$P_1, P_2, \ldots, P_n$,以及n个标量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,则

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

是什么？（见后面仿射组合）

- 你能用与坐标无关的定义来描述P么?

点的线性组合

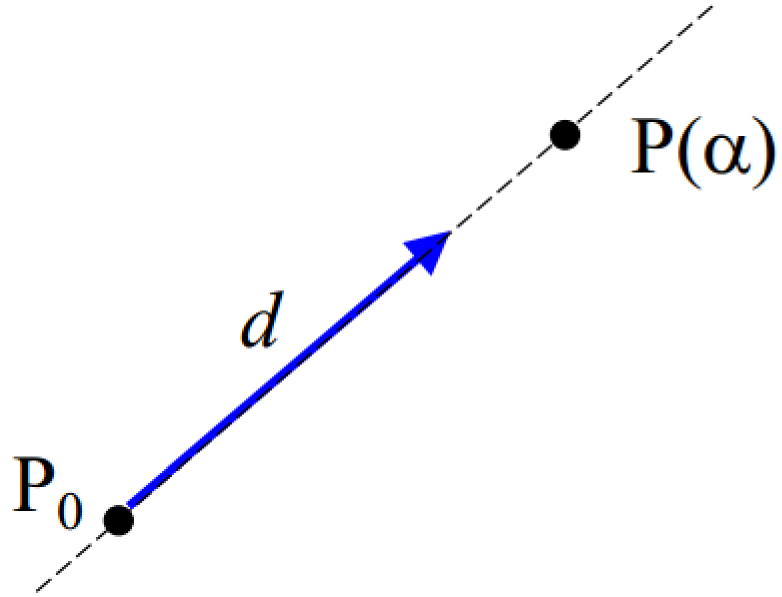
- 固定坐标系，取定其中的两点，那么$P_1 + P_2$是什么？
  - 当P_1为原点时，$P_1 + P_2$等于P_2
  - 当P_1与P_2关于原点对称时，$P_1 + P_2$为原点
  - 所以$P_1 + P_2$是与坐标系有关的表示
- 而$P_1 - P_2$无论在何种坐标系下，都表示从P_2指向P_1的向量
- 观察：为描述与坐标无关的性质，组合系数不能是任意数

点的特殊线性组合

- 由归纳法，从“点 - 点＝向量”和“标量·向量＝向量”可知当组合系数和$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0$时，点的线性组合为向量
- $\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2=P_1+\frac{1}{2}(P_2-P_1)$ = 点＋向量＝点
  - 实际上，$\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2$表示两点的中点，这是与坐标无关的定义
  - 当$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$时，点的线性组合为点，称为给定点的仿射组合
- 除此之外，其它形式的线性组合没有与坐标无关的意义

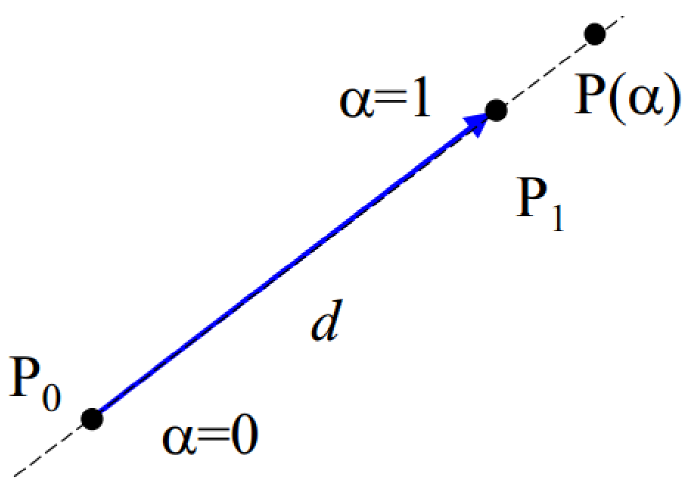
直线

- 考虑具有下述形式的所有点
  - $P(\alpha) = P_0 + \alpha\, d$
  - 即所有过P_0点，与P_0连线平行于向量d的点



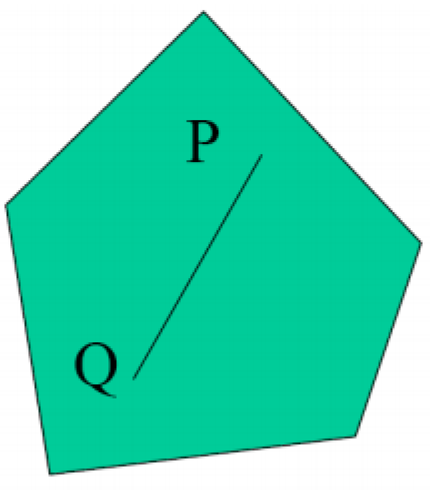
射线与线段

- 如果限定$\alpha \geq 0$, 那么P(α)就是从P_0出发，方向为 d 的射线(ray)
- 如果采用两点定义向量d, 那么
  $P(\alpha) = P_0 + \alpha\,(P_1 - P_0) = (1-\alpha)\,P_0 + \alpha\,P_1$
- 当 $0 \leq \alpha \leq 1$，那么就会得到连接P_0与P_1两点的线段(line segment)

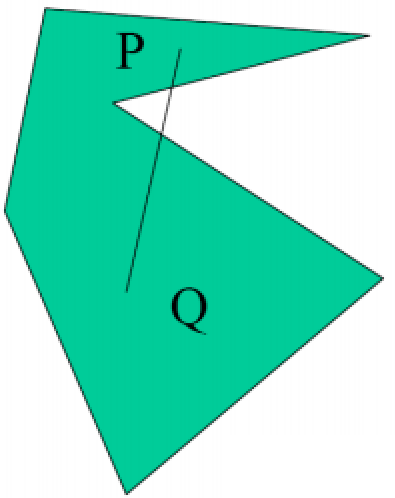


凸性

• 一个对象为凸的(convex)，当且仅当在对象中任何两点的连接线段也在该对象内



凸



非凸

仿射和

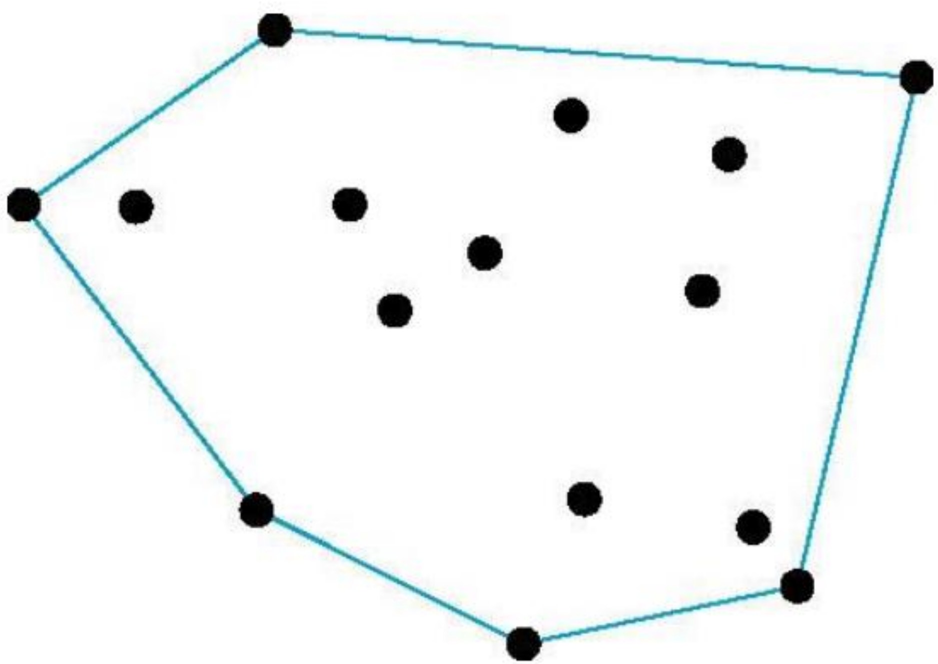
- 考虑“和”式

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

- 当 $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ 时上述和式有意义，此时结果称为点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的仿射和 (affine sum)
  - 另外，如果 $\alpha_i \geq 0$，那么得到 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的凸包(convex hull)

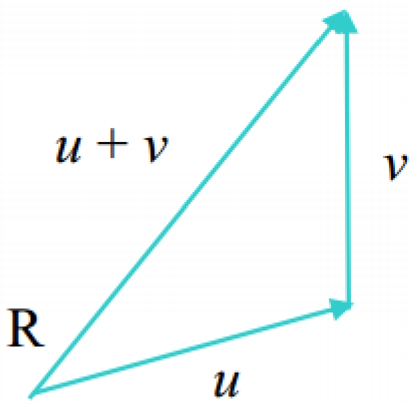
凸包

- 最小的包含$P_1, P_2, \ldots, P_n$的凸体
- 如下图：黑色点的凸组合构成了蓝色区域围住的点集（称为这些黑色点的凸包）

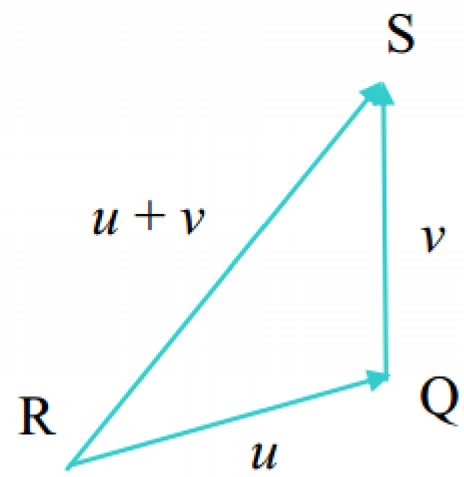


平面

- 平面是由一个点与两个不平行的向量或者三个不共线的点确定的

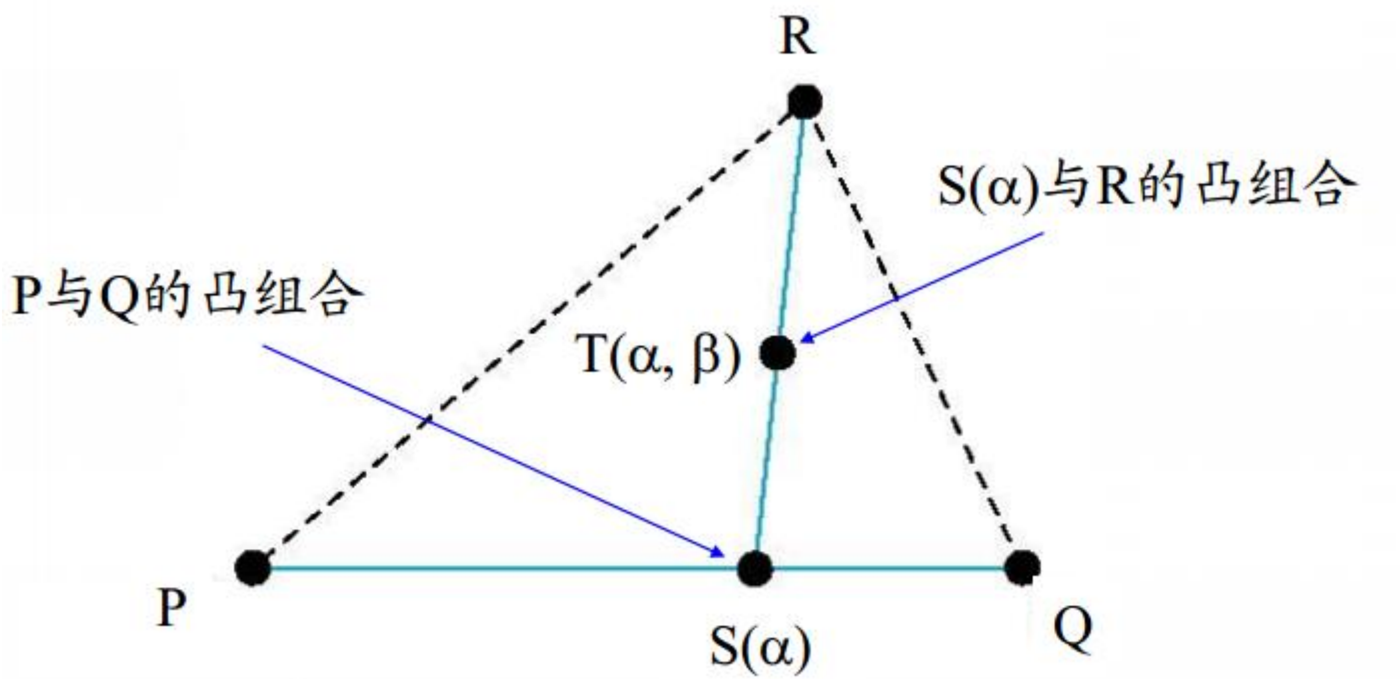


$P(\alpha, \beta) = R + \alpha u + \beta v$



$P(\alpha, \beta) = R + \alpha(Q - R) + \beta(S - Q)$

三角形



$$S(\alpha) = \alpha P + (1-\alpha)Q$$

$$T(\alpha, \beta) = \beta S(\alpha) + (1-\beta)R$$

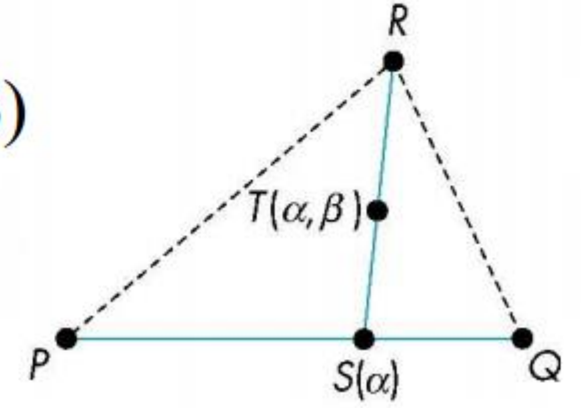
当$0 \le \alpha, \beta \le 1$时定义在三角形内的点

重心坐标

$$S(\alpha) = \alpha P+(1-\alpha)Q$$

$$\begin{aligned}T(\alpha, \beta) &= \beta S(\alpha)+(1-\beta)R \\ &= \beta\alpha P+\beta(1-\alpha)Q+(1-\beta) \\ &= \alpha_1 P+\alpha_2 Q+\alpha_3 R \\ &= T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\end{aligned}$$

这里， $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1, \alpha_i>=0$



$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$称为T点的重心坐标表示

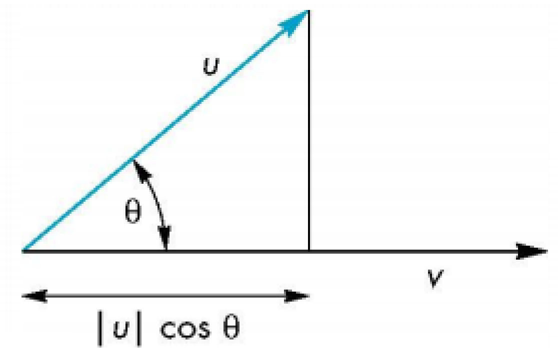
提问：

（1）给定三角形三个点的坐标及T的重心坐标，如何求T的坐标

（2）给定三角形三个点的坐标及T的坐标，如何求T的重心坐标

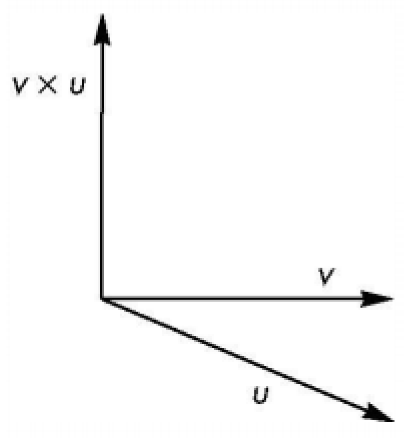
向量的内积

- 欧氏空间是向量空间的扩展，通过定义内积运算，增加了长度或者距离的度量
  - 仿射空间中未度量两个点的距离，或者说向量空间中未度量向量的长度
- 内积或点积： $u \cdot v = |u|\,|v| \cos\theta$, θ为两个向量的夹角
  - 正交： $u \cdot v = 0$ 等价 u 垂直 v
  - 向量长度的平方： $|u|^2 = u \cdot u$
  - 夹角的余弦$\cos\theta = u \cdot v / (|u|\,|v|)$
  - $|u| \cos\theta$ v 是u在v上的正交投影



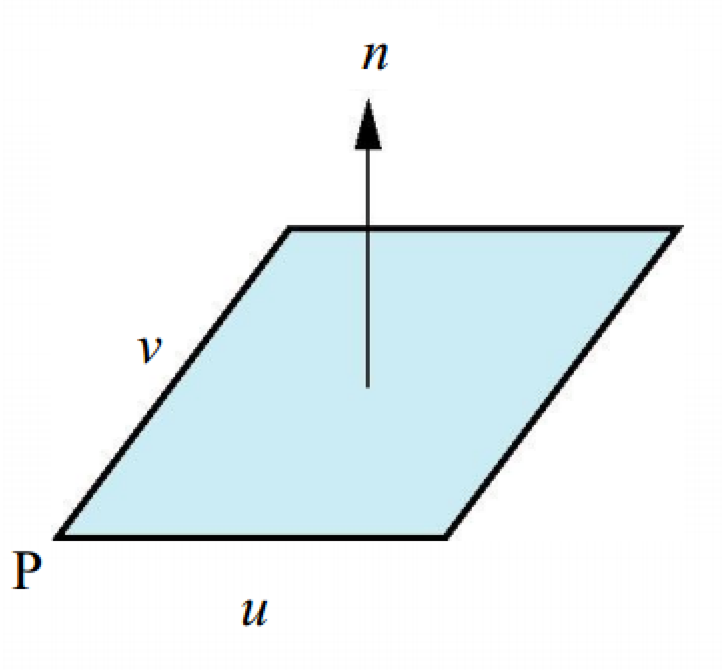
向量的外积

- 外积或叉积： $u \times v$为向量，其长度等于$|u|$ $|v|\sin\theta$，方向垂直于u, v所在的平面，并且保证$u, v, u \times v$成为右手系，其中θ为两个向量的夹角。
  - $u \times v = \mathbf{0}$ 等价于 $u \,//\, v$
  - 夹角的正弦 $|\sin\theta| = |u \times v|/(|u|\,|v|)$



法向量

- 每个平面都有一个垂直于自身的向量n
- 在平面的点与二向量形式
  $P(\alpha, \beta) = R + \alpha u + \beta v$
  中，可以应用向量的外积得到
  $n = u \times v$
  - 平面方程的等价形式：
  $(P(\alpha, \beta)-R) \cdot n=0$



主要内容

- 几何及其表示
  - 与坐标无关的几何：点、标量、向量
    - 向量空间、仿射空间、欧氏空间
  - 几何的坐标表示
    - 向量空间的标架
    - 仿射空间的标架
    - 基与标架的变换
    - 齐次坐标
  - 几何在OpenGL中是如何表示的（OpenGL中各种不同标架）

几何的坐标表示

- 到现在为止我们只是讨论几何对象，而没有使用任何参考标架，例如坐标系
- 需要一个参考标架把点和对象与物理世界中的对象联系在一起
  - 例如，点在哪儿？如果没有参考系的话，就无法回答这个问题
  - 世界坐标
  - 照相机坐标

坐标系

- n维向量空间的一组基$v_1, v_2, \ldots, v_n$定义了一个坐标系(coordinate system)
- 一个向量v可以表示为$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$
- 标量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$就称为$v$相对于给定基的表示(representation)，也称坐标（coordinate)
  - 可以把表示写成标量的列矩阵

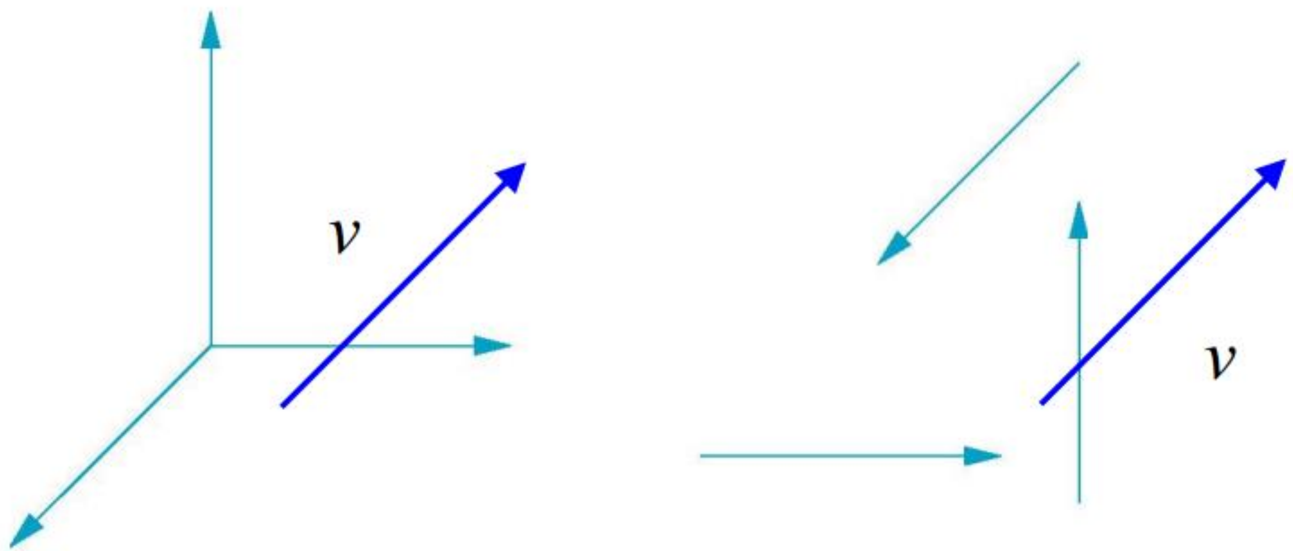
$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

示例

- $v = 2v_1 + 3v_2 - 4v_3$
- $\mathbf{a} = [2, 3, -4]^T$
- 注意上述表示是相对一组特定的基而言的
- 例如，在OpenGL中刚开始是相对于世界坐标系表示向量的，稍后要把这个表示变换到照相机坐标系(或者称为视点坐标系)中

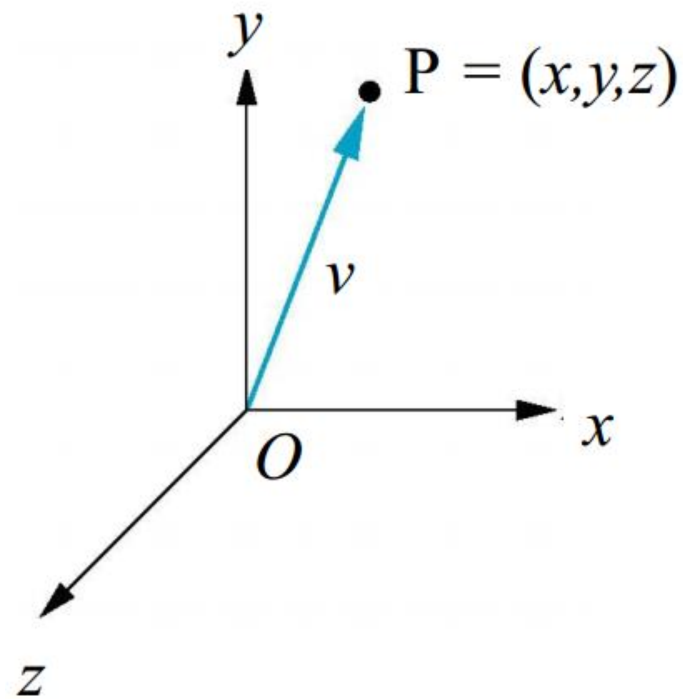
坐标系

- 哪个正确？
  - 都正确，因为向量没有固定位置
- 向量空间没有点，坐标系没有原点



标架

- 坐标系是不足以表示点的
- 如果要在仿射空间中考虑问题，那么可以在基向量组中增加一个参考点(称为原点)，从而构成一个标架(frame)
  - 标架 = 原点 + 坐标系
  - *v*和P



在标架中的表示

- 标架是由$(O, v_1, v_2, \ldots, v_n)$确定的
- 在这个标架中，每个向量可以表示为

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

- 每个点可以表示为

$$\mathrm{P} = O + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

点与向量的混淆

- 考虑点与向量

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

$$P = O + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

它们看起来都具有相似的表示:

$$v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T$$

$$P = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]^T$$

形式上一样，但是含义不同！这导致点与向量很容易混淆在一起

- 区别：向量没有固定位置，点是固定的

统一的表示

- 改写前面的表示 (注意：O是原点不是零向量)

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$
$$= [v_1, v_2, \ldots, v_n, O] \cdot [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0]^T$$
$$P = O + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$
$$= [v_1, v_2, \ldots, v_n, O] \cdot [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 1]^T$$

从而得到n+1维齐次坐标(homogeneous coordinates)表示

$$v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0]^T$$
$$P = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 1]^T$$

齐次坐标

- 四维齐次坐标的一般形式为

$$\mathbf{p} = [x, y, z, w]^T,$$

可以通过下述方法给出三维点(当$w \neq 0$):

$x \leftarrow x/w, y \leftarrow y/w, z \leftarrow z/w$ （*透视除法*）

当$w = 0$时，表示对应的是一个向量

- 齐次坐标是所有计算机图形系统的关键
  - 所有标准变换(旋转、平移、放缩)都可以应用4×4阶矩阵的乘法实现
  - 硬件流水线体系采用四维表示

变换坐标系

- 考虑同一个向量w相对于两组不同基**v**和**u**的表示。假设表示分别是

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3]^T \text{ 基：} \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$$

$$\mathbf{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \text{ 基：} \quad \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$$

其中

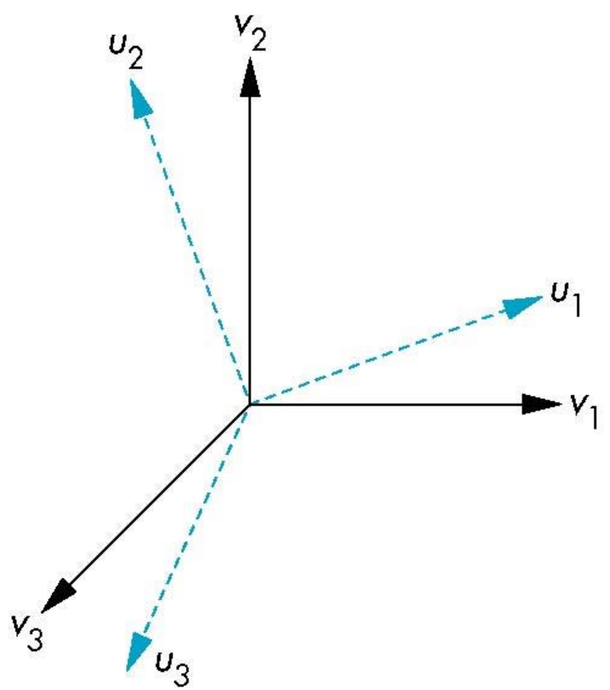
$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [v_1, v_2, v_3][\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3]^T$$

$$= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = [u_1, u_2, u_3][\beta_1 , \beta_2 , \beta_3]^T$$

用第一组基表示第二组基

- 每个基向量u_1, u_2, u_3都可以用第一组基表示出来

$$u_1 = \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2 + \gamma_{13}v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2 + \gamma_{23}v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31}v_1 + \gamma_{32}v_2 + \gamma_{33}v_3$$



矩阵形式（Matrix Form）

所有系数定义了一个3 x 3阶矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

因此，两组基通过下式联系在一起

$$[u_1, u_2, u_3]=[v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}\mathbf{M}^{T}$$

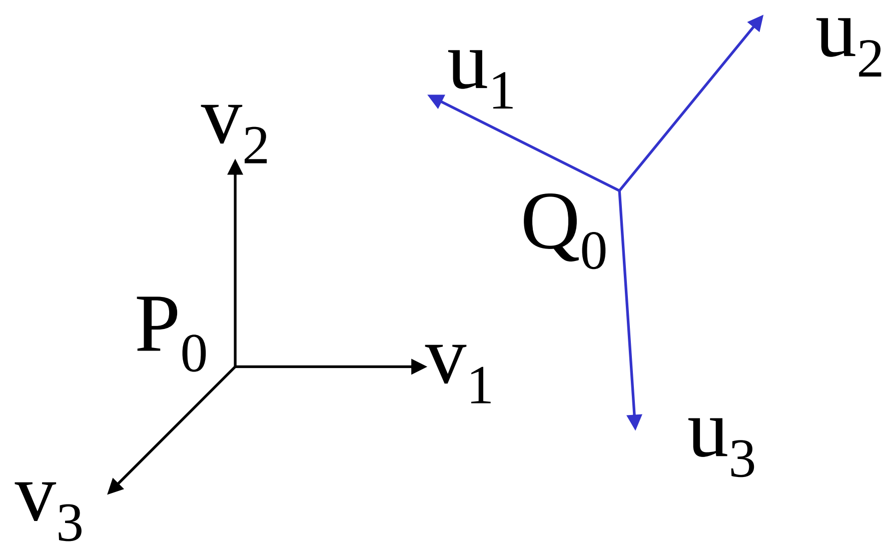
标架变换（Change of Frames）

- 可以对同时表示点与向量的齐次坐标进行类似的操作

考虑两个标架

(P_0, v_1, v_2, v_3)

(Q_0, u_1, u_2, u_3)



- 任何点和向量都可以用它们中的一个表示出来
- 例如用P_0, v_1, v_2, v_3 表示Q_0, u_1, u_2, u_3

用一个标架表示另一个标架

扩展基变换

$$u_1 = \gamma_{11}v_1+\gamma_{12}v_2+\gamma_{13}v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21}v_1+\gamma_{22}v_2+\gamma_{23}v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31}v_1+\gamma_{32}v_2+\gamma_{33}v_3$$
$$Q_0 = \gamma_{41}v_1+\gamma_{42}v_2+\gamma_{43}v_3 +\gamma_{44}P_0$$

定义4 x 4矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

得到

$$[u_1, u_2, u_3, Q_0]=[v_1, v_2, v_3, P_0]M^T$$

表示的变换

在这两个标架中，任意点或者向量具有相同形式的表示

$$\mathbf{a}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \alpha_4]^T$$ 在第一个标架下

$$\mathbf{b}=[\beta_1\ \beta_2\ \ \beta_3\ \beta_4]^T$$ 在第二个标架下

对于点$\alpha_4=\beta_4=1$，对于向量$\alpha_4=\beta_4=0$

经推导，可以得到

$$\mathbf{a}=\mathbf{M}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{M}^{-T}\mathbf{a}$$

主要内容

- 几何及其表示
  - 与坐标无关的几何：点、标量、向量
    - 向量空间、仿射空间、欧氏空间
  - 几何的坐标表示
    - 向量空间的标架
    - 仿射空间的标架
    - 基与标架的变换
    - 齐次坐标
  - 几何在OpenGL中是如何表示的（OpenGL中各种不同标架）

OpenGL中的标架

- 根据绘制流水线中出现的先后顺序：
  – 对象或模型标架 4D
  – 世界标架 4D
  – 眼或照相机标架 4D
  – 裁剪标架 4D
  – 规范化设备标架 3D
  – 窗口或屏幕标架 2D

OpenGL中的表示

- 在模型标架中定义各个对象
- 把对象放置到应用程序场景（世界标架）中，用模型变换改变它们的大小、方向和位置
- 用视图变换把场景变换到照相机标架中
  - 标架变换对应到一个仿射变换，从模型坐标->世界坐标->眼坐标的变换都可以用4x4矩阵表示
  - OpenGL把模型变换和视图变换合并为模-视变换，对应矩阵为模-视矩阵

OpenGL中的表示

- 投影变换把场景变换到裁剪标架中，视见体变换为裁剪立方体，然后把视见体外的对象从场景里裁剪掉
- 顶点的齐次裁剪坐标经过透视除法，即用w分量去除其他分量，得到三维的规范化设备坐标表示
- 根据视口信息，把规范化设备坐标变换为三维的窗口坐标
  - 窗口坐标单位是像素，保留了深度信息
- 去掉深度分量，就得到了二维的屏幕坐标

世界标架与相机标架

- 提及表示的时候，所指的是由n个标量构成的有序数组，即n元组
- 这样标架的改变就是由一个4x4阶矩阵定义
- 在OpenGL中开始的基本标架是世界标架
- 最终我们是在照相机标架中表示几何体，这是用模型-视图矩阵进行变换的
  - 照相机位于眼标架的原点
  - y轴正方向：照相机的观察正向
  - z轴负方向：照相机正对的方向
  - x轴与y轴、z轴正交，构成右手标架
- 初始状态时这两个标架是相同的 (**M = I**)

相机的移动

当物体位于z=0平面两侧时，我们必须移动照相机标架： (x, y, z) ⟶ (x, y, z-d)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$