

基于 PCA 和规划类模型以及时间序列分析 的最优订购量与转运分配的探究

本文基于已有的 240 周的对于 402 家不同类别建筑材料供应商的被订购量以及供应量的数据，以及所提供的 8 家转运商的损耗率以及转运情况，展开对于最优最经济订购量的分配探究和转运者、转运量的损耗最低探究。

对于问题一 402 家供应商择优选 50 家这一问题商，我们进行了如供需比、材料比、供应总量、订购量总量、连续供应天数等 **16 个特征指标的提取**，分别进行了评判计算，并基于 **PCA 主成分分析法降维至 5 个主要成分**，解释度达总数据的 90%。我们通过 PC 内的各指标间系数、PC 之间的系数，最终得出对每一供应商的整体得分。由高到底择优选 50 家供应商作为下一轮筛选目标。最终我们利用数据拟合，得出选择效果可以达满足产能，模型效果较好。

对于问题二继续在 50 家供应商里选择更好的个数，使之满足基本生产需求。我们建立了非线性规划以及 0-1 规划的结合模型。以是否选择第 i 家供应商作为决策值，设立了 50 个对应的产能值，目标函数为 50 个决策之和最小，以 **A、B、C 类企业偏好度**为一约束条件，并根据各家供应商 240 周的**产能范围均值**，以分位数为上下限，**探究出最合理的约束产能值范围**，以此使选择的供应商产能之和满足周产能且有预留空间，建立非线性回归模型，求解，**最终筛选出 45 家更优供应商**。**对于问题二**中指定最优经济订购方案，我们分期了过去五年的数据，发现经常出现订购量显著超过供应量的情况，因此我们考虑用前五年的供应量作为参考数据。我们考虑用筛选出的 45 家供应商，继续建立**线性规划模型**，以五年的对应周为一组范围域（如 W001、W049、W097、W145、W193）来约束未来订购量。因为我们实际上是以**供应量为基准**进行转运分配任务，所以我们希望一定程度上能够减少订购量与供应量的差距。我们考虑 A、B、C 的原料损耗构建最小目标函数从而求解。**对于问题二**中的分配转运问题，我们对转运商 T1~T8 做了时序分析图，计算平均损耗，最大最小损耗的计算以及为 0 的值的统计，这些均会影响企业的选择，从而影响经济问题。因此我们构建了非线性回归模型，新增损耗最低以及单家转运辆不超 6000 立方米的约束，并对单家供应商选择转运商的数目设置决策变量，并进行了数目限制，期望由较少的转运商集中运送。

对于问题三，我们构建目标规划模型，我们新增了对于最大的 A 类量和最小的 C 类量以及总和最经济的目标函数的设置。我们对不同的目标函数**设置权重**综合求解，结果由原来的 **A:C 约为 1:2 变为 2:1**，显著地增加了原材料中 A 的供应量，得到了很好的结果。

对于问题四，我们考虑用 **ARIMA 模型**预测周期性的数据，预测未来 24 周的供应量和转运量，并基于第三问的转运配分模型求解转运配分情况以探究是否能提高产能，我们最终发现该企业的产能呈现递增状态。

关键词：线性规划 非线性规划 目标规划 ARIMA 模型 0-1 规划 PCA

一、问题背景

为决策类的多目标规划问题，在于决策供应商的配给，转运商对于供应商的分配，企业对于供应商的择优等关键点。在运用相关数学模型的同时需要有对于库存-补给的相关知识储备。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

首先，我们需要进行指标提取，构建相关的评价模型，本次，我们选取了衡量供应商竞争力、供应商市场占有率、供应商供货稳定性等多个维度的 16 个特征指标，通过 PCA 进行降维处理，我们最终以 90% 的解释度的 5 个主要成分构建整个评价函数。择优选排名前 50 的企业。

2.2 问题二的分析

问题二分为三个小问，首先为基于问题一优中择优，选择更优秀的企业，我们构建非线性规划模型，以满足生产需求并最大可能性预留为核心约束条件，引入决策变量，综合 0-1 规划建立表达求解。

第二个小问为制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案，通过对以往数据的分析，我们发现对于每家供应商，实际供应量往往小于企业的订购量，且相差较大，故我们希望缩小这一趋势，在保留激励供应商竞争的前提下建立线性规划问题。这一问的核心是最经济，那么我们需要考虑 A,B,C 三种原材料的购买比例，发现 $A > B > C$ ，由此我们构建出目标为求解最小值的总体成分目标函数。我们对数据进行更详细的分析，设置了订购量的一个范围。由此我们得出了每家企业每周订购量的最优解。

第三个小问为转运商配分问题，配分转运商和转运量，我们需要注意每家转运商每周最多只能转运 6000 立方米的材料，以及我们要保证可转运量 \geq 实际订购量，让这些订购量成分有效订购量，其次，对于转运商以往的表现，我们对其营业天数、损耗率等表现进行权重考虑，综上我们构建一个完整的非线性规划模型。

2.3 问题三的分析

问题三为多目标规划问题，我们将基于第二问，对每个小的目标函数进行权重系数考虑。并总和第二问的 2、3 小问的目标函数与条件，构建新的模型。并且，这是一个转运分配需要与订购量同时考虑的问题。我们最终得到的结果很好，发现 A 类供货量与 C 类供货量的比发生了反转，A 类供货量显著多于 C 类供货量。

2.4 问题四的分析

通过绘制数据的时序图，我们发现 A、B、C 类供应商的供应量都有很明显的时许波动性与周期性，我们建立基于 ARIMA 的预测分析模型，通过 ARIMA 的预测结果，即对于供货量与订购量的预测，并带入三中的模型进行转运规划。

三、基本假设

为了使得问题更易于理解，我们作出以下合理假设：

假设 1：题目提供的所有数据都是真实可靠的，我们的分析也只在这种情况下有效。

假设 2：近 5 年和未来 24 周的经济总体状态良好，CPI 等指标平稳波动，可以忽略宏观经济环境对该企业和供货商的影响。因此，在未来 24 周内的三类原材料运输和储存的单位费用相同，且采购单价比例不变。

假设 3：该企业在近 5 年和未来 24 周的经营状态良好，没有出现导致企业可能破产或改变以往经营战略的重大事故，即该企业在未来 24 周会延续近 5 年的生产状态。

假设 4：该企业在未来 24 周没有重大的材料科研成果，即所用原材料与近 5 年一致，总体上始终可以分为 A、B、C 三种类型。

假设 5：该企业与题目所给的 402 家供应商和 8 家转运商关系稳定，即该企业仅与题目所给的供应商和转运商进行合作。

假设 6：供货商的供货水平主要由供货商的自身条件决定，与该企业的订货量无关。

四、符号说明

在本文模型建立的过程中，我们会使用表 1 中的符号。当使用其他频率较低的符号时，我们会在使用的地方对相应符号进行详细的说明。

符号	定义
demand order_i	企业订货总量
$\overline{\text{buy}}_i$	企业平均周订货量
$\text{buy}_{\sigma i}$	企业订货总量方差
buy_{ri}	企业订货总量极差
demand ratio_i	企业需求比
supply order_i	供应商总供货量
$\overline{\text{supply}}_i$	供应商平均周供货量
$\text{supply}_{\sigma i}$	供应商周供货量方差
supply_{ri}	供应商周供货量极差
supply ratio_i	供货商供货比
$\text{supply} - \text{demand ratio}_i$	供需比
Material	材料区分指标

表 1 本文中的符号说明

五、总体数据预处理

首先，我们对附件 1 和附件 2 的数据进行了粗分析。经描述性统计，2 个附件均不含有任何缺失值和异常值。

附件 1 提供了该企业对每个供应商的订货量和相应供应商对该企业的供货量，分别都含有 402 个样本和 240 个观测周数，共计 96480 个观测值。经计算，我们发现该企业对 402 家供货商的每周总订货量和所对应的总供货量的平均差值为 5954.942。同时，所有供应商的周平均总供货量为 18333.358，该企业的周平均总订货量为 24288.3。经统计，近五年共有 189 周的周总供货量小于周总订货量，比例为 78.75%。如下图所示，近五年的每周总供货量和总订货量具有一定的时序性，随不同周次上下波动。因此，我们推测整体供货量依附于订货量波动，与与订货量的趋势大体相同并具有一定的滞后性。基于此，我们进行了后续的研究分析。

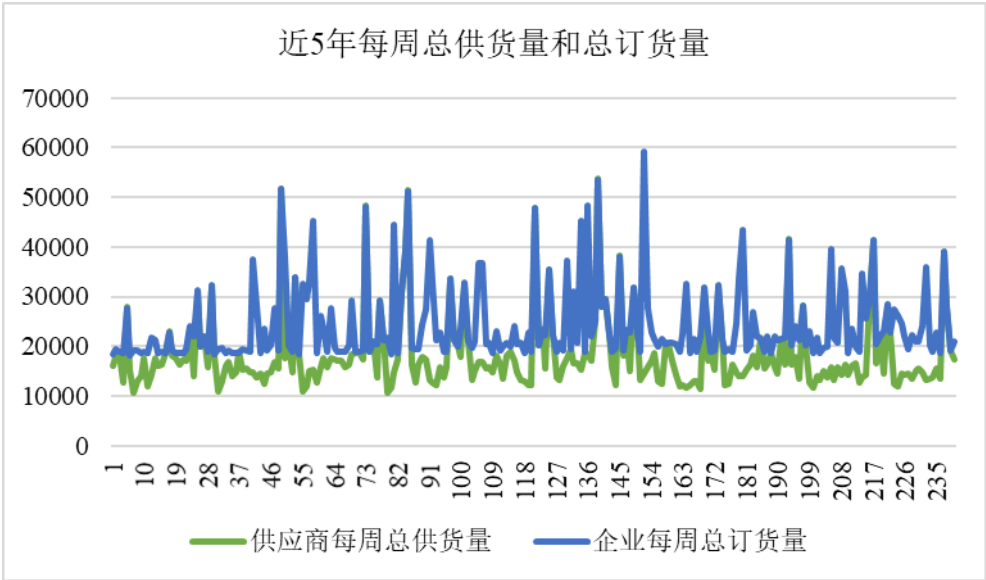


图 1 近 5 年每周供应商的总供货量和企业总订货量

附件 2 提供了 8 家转运商的运输损耗率，共有 240 个观测周数，总计 1920 个观测值。我们计算了这 8 家转运商在近五年的周平均运输损耗率，结果如下表所示。

转运商 ID	各个转运商的平均运输损耗率
T1	0.087
T2	0.658
T3	1.040
T4	0.508
T5	2.091
T6	0.878
T7	0
T8	0

表 2-1 8 家转运商的平均损耗率

同时，我们统计了这 8 家转运商的没有运输的周数，并将此认作停业周数，结果如下表所示。

转运商 ID	近 5 年的停业周数
T1	0
T2	0
T3	123
T4	138
T5	157
T6	24
T7	0
T8	37

表 2-2 8 家转运商近 5 年的停业周数

以上数据预处理有助于我们对数据的整体把握和后续处理。对于每一问的具体数据预处理，我们会在后文逐一呈现。

六、问题一的模型建立与求解

对于问题一，通过寻找保障企业生产的相关条件，我们选取了 16 个相关指标，并计算出每个供应商的对应指标数值。我们运用主成分分析进行降维分析，并提取具有 90% 解释度的指标，从而对 402 家供应商逐一评分，通过得分排序得到最重要的 50 家供应商。

6.1 数据预处理与指标提取

企业的生产情况受到多种条件的制约，针对这些条件，我们提取的影响指标如下：

1、企业订货总量（ demand order_i ）：对于单独一家供应商而言，订货总量为该企业在近 5 年内向该供应商的订货量总和。该企业向某一家供应商的订货总量越多，则该供应商的重要性越大，意味着该企业再次向其订货的可能性更大。

$$\text{demand order}_i = \sum_{j=1}^{240} \text{buy}_{\text{week}_{ij}} \quad (1)$$

其中， i 为第 i 家供应商， $\text{buy}_{\text{week}_{ij}}$ 为该企业在第 j 周向第 i 家供应商的订货量。

2、企业平均周订货量（ $\overline{\text{buy}}_i$ ）从不同维度的反映需求稳定性以及订购量大小。

$$\overline{\text{buy}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{240} \text{buy}_{\text{week}_{ij}}}{n - 1} \quad (2)$$

其中， n 为该企业在近五年的生产总周数（ $n = 240$ ）。

3、企业订货总量方差 ($\text{buy}_{\sigma i}$) 反映近五年该企业向某一家供货商的订货量的波动程度。一般而言，波动程度反映了交易的稳定性。订货总量方差越小，说明该供应商更有竞争力。

$$\text{buy}_{\sigma i} = \frac{\sum_{i=1}^{240} (\text{buy}_{\text{week}_{ij}} - \overline{\text{buy}_i})^2}{n - 1} \quad (3)$$

4、企业订货总量极差 (buy_{ri}) 反映近五年该企业向某一家供货商的订货量的离散程度，在一定程度上反映了订购量的均值。一般而言，离散程度反映了交易的稳定性。离散性越小，数据较为集中，说明该供应商更具有竞争力。

$$\text{buy}_{ri} = \max(\text{buy}_{\text{week}_{ij}}) - \min(\text{buy}_{\text{week}_{ij}}) \quad (4)$$

5、企业需求比 (demand ratio_i) 为企业向某一家供应商的订货量和同类型所有供应商的订货量的比值。同类型即为材料类型相同 (A、B、C)。供需比越大，说明该供应商在同类型的材料市场中竞争力越强。

$$\text{demand ratio}_i = \frac{\sum_{j=1}^{240} \text{buy}_{\text{week}_{ij}}}{\sum_{j=1}^{240} \text{buy}_{\text{same_week}_j}} \quad (5)$$

其中， $\text{buy}_{\text{same_week}_j}$ 为第 j 周与该供应商同类型的所有供应商的被订货总量。

6、供应商总供货量 (supply order_i)：为某一家供应商近五年的供货量总和。供货量越大，说明该供应生实力越强。

$$\text{supply order}_i = \sum_{j=1}^{240} \text{supply}_{\text{week}_{ij}} \quad (6)$$

其中， i 为第 i 家供应商， $\text{supply}_{\text{week}_{ij}}$ 为第 j 周向第 i 家供应商向该企业的供货量。

7、供应商平均周供货量 ($\overline{\text{supply}_i}$) 从不同维度反映了供货稳定性以及供货量大小。

$$\overline{\text{supply}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{240} \text{supply}_{\text{week}_{ij}}}{n - 1} \quad (7)$$

8、供应商周供货量方差 ($\text{supply}_{\sigma i}$) 反映近五年某一供应商向该企业周供货的波动幅度。该值越小，供应商供货越稳定，有较大可能性被选择。

$$\text{supply}_{\sigma i} = \frac{\sum_{i=1}^{240} (\text{supply}_{\text{week}_{ij}} - \overline{\text{supply}_i})^2}{n - 1} \quad (8)$$

9、供应商周供货量极差（ supply_{ri} ）：反应近五年某一供应商向该企业周供货的离散程度。该值越小，供应商供货数据越集中，供货量均值越有可能较大。

$$\text{supply}_{ri} = \max(\text{supply}_{\text{week}_i}) - \min(\text{supply}_{\text{week}_i}) \quad (9)$$

10、供货商供货比（ supply ratio_i ）为某一供应商供货量和同类型所有供应商供货量的比值。同类型即为材料类型相同（A、B、C）。被供货比越大，说明该供应商对同类型的材料储备量充足。

$$\text{supply ratio}_i = \frac{\sum_{j=1}^{240} \text{supply}_{\text{week}_{ij}}}{\sum_{j=1}^{240} \text{supply}_{\text{same_week}_j}} \quad (10)$$

其中， $\text{supply}_{\text{same_week}_j}$ 为第 j 周与该供应商同类型的所有供应商的供货总量。

11、供需比（ $\text{supply} - \text{demand ratio}_i$ ）：为企业向某一家供应商的订货量与供应商供货量的比值的周平均值。供需比越接近 1 越好，可以使得企业与供应商共赢。

$$\text{supply} - \text{demand ratio}_i = \frac{\sum_{j=1}^{240} \frac{\text{supply}_{\text{week}_{ij}}}{\text{buy}_{\text{week}_{ij}}}}{n - 1} \quad (11)$$

12、材料区分指标（Material）为供应商对该企业的供给材料类型。由于不同材料的原材料购买费不同，企业在选择的时候存在倾向性，这会影响企业对供应商的选择。

	A	B	C
消耗系数	$\frac{1}{0.6}$	$\frac{1}{0.66}$	$\frac{1}{0.72}$
购买系数	1.2	1.1	1.0
影响因子	2	1.67	1.39

表 3 不同类型的原材料影响因子

由上表得到， $\text{Material}_A = 2$ ， $\text{Material}_B = 1.67$ ， $\text{Material}_C = 1.39$ 。选择倾向为 $A > B > C$ 。

13、供应商被订货总周数为某一供应商在近五年被该企业订货的周数总和。

14、供应商连续供货周数为某一供应商连续供货天数的最大值，一定程度上反映了供应商的经营状况，这是企业决定供货商的条件之一。

15、供应商连续被订货周数为某一供应商连续被该企业订货天数的最大值，一定程度上反映了该企业对其的信任程度，这是企业决定供货商的条件之一。

16、供应商有效供货因子为某一供应商在近五年为企业供货的周数比。

6.2 模型的建立与求解

首先，我们对所提取的 16 个指标进行降维分析，从而抽取出 4 至 5 个主要的一级指标。我们采用主成分分析法（PCA）进行处理。

给出 402 家供应商 16 个指标的数据构成矩阵

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, i = 1 \dots 402, j = 1 \dots 16$$

其中， s_j 为标准差， y_{ij} 为标准化后的对应值。

我们得到的标准化数据矩阵如下图所示。

收购总量	企业供需比	供货商竞争力	供应商出货率	总供货量	材料	订购周数	平均周供货量	平均收购量	连续订购周数	连续供货周数	有供货周数	周供货量方差	周供货量极差	收购方差	收购极差
1	-0.277994902	-0.296181328	-0.253756073	-1.048677231	-0.263600436	-0.139745966	-0.542274987	-0.263600436	-0.277994902	-0.353720927	-0.354364423	-0.542274987	0.806099764	0.247435486	-0.260043704
2	-0.270475443	-0.133908331	-0.149307123	0.551266444	-0.258151481	1.182537871	0.095054939	-0.258151481	-0.276475443	-0.340736206	-0.339463325	0.095054939	-0.032311931	-0.090041598	-0.239987451
3	-0.004255601	-0.101073322	0.048144504	0.933664471	0.033945307	1.261700736	1.737654747	0.033945307	-0.064326491	-0.086245918	-0.101845755	1.737654747	-0.276311344	-0.766277492	-0.628314106
4	-0.268605117	-0.284934937	-0.253187621	-1.074764474	-0.26323756	-0.139745966	-0.431435	-0.26323756	-0.268605117	-0.325779593	-0.324562227	-0.431435	0.477105478	-0.009983735	-0.531717042
5	-0.155128262	-0.293077804	-0.072532177	0.882912396	-0.097872363	1.182537871	0.593834882	-0.097872363	0.155128262	0.527548435	0.539701465	0.593834882	-1.303790529	-0.733975387	-0.697729264
6	-0.27343483	-0.178539713	-0.254957391	-1.110936346	-0.26406008	-0.1261700736	-0.705324968	-0.26406008	-0.27343483	-0.370691594	-0.354364423	-0.705324968	1.298475058	0.453370876	-0.509714056
7	-0.151660641	-0.292937721	-0.043236717	1.567398904	-0.09670146	1.182537871	0.436449664	-0.09670146	-0.131608443	3.177566272	3.177566272	0.436449664	-0.284136453	-0.739925983	-0.599636993
8	-0.280663859	-0.288807633	-0.254601308	-1.133645358	-0.26379397	-1.261700736	-0.680824971	-0.26379397	-0.280663859	-0.370691594	-0.384166619	-0.680824971	0.187565302	-0.307050594	0.775770592
9	-0.268566153	-0.288409804	-0.254399967	-1.362096462	-0.264035888	-0.129745966	-0.625404971	-0.264035888	-0.268566153	-0.340736206	-0.354364423	-0.625404971	1.574127263	0.762273984	-0.885608216
10	-0.271774015	-0.296348475	-0.250473732	-0.910669901	-0.260672233	-0.129745966	-0.445289998	-0.260672233	-0.271774015	-0.295839258	-0.339463325	-0.445289998	-0.83933976	-0.570300083	-0.475419634
11	-0.28063967	-0.29330375	-0.234488151	0.46989424	-0.26272933	-1.261700736	-0.445289998	-0.26272933	-0.28063967	-0.353720927	-0.339463325	-0.445289998	-0.13821396	-0.220594946	0.827443983
12	-0.276484924	-0.291837775	-0.254879296	-1.317753371	-0.264084271	1.182537871	-0.722389966	-0.264084271	-0.276484924	-0.340736206	-0.354364423	-0.722389966	1.130947893	0.247435486	-0.382377534
13	-0.28163791	-0.290358304	-0.254482033	0.918677101	-0.263721395	-1.261700736	-0.611549979	-0.263721395	-0.28163791	-0.370691594	-0.354364423	-0.611549979	0.536599464	-0.095790169	1.86399316
14	-0.281871687	-0.296023891	-0.24361472	0.11139324	-0.264108463	1.182537871	-0.66969977	-0.264108463	-0.281871687	-0.370691594	-0.354364423	-0.66969977	1.819069933	1.277112441	3.829244452
15	-0.266666794	-0.291460068	-0.254841817	-0.972252003	-0.264108463	1.182537871	-0.680824971	-0.264108463	0.266666794	-0.353720927	-0.354364423	-0.680824971	1.623234219	0.762273984	-0.446987733
16	-0.281754796	-0.285243267	-0.254694367	0.34149876	-0.26390737	1.182537871	-0.653114974	-0.26390737	-0.281754796	-0.385662261	-0.369265321	-0.653114974	0.738656792	0.100338777	2.04886059
17	-0.278710759	-0.285496002	-0.251967465	-0.837196621	-0.261447369	1.182537871	-0.542274987	-0.261447369	-0.278710759	-0.353720927	-0.339463325	-0.542274987	0.738740696	-0.535119004	-0.018773132
18	-0.280230372	-0.28818335	-0.253197994	-0.497854864	-0.262189176	-0.129745966	-0.439144997	-0.262189176	-0.280230372	-0.340736206	-0.354364423	-0.439144997	0.369323825	0.100338777	0.727063177
19	-0.277066036	-0.293311051	-0.251426391	-1.237249473	-0.26214893	-0.129745966	-0.722389966	-0.26214893	-0.277066036	-0.353720927	-0.354364423	-0.722389966	0.545990351	-0.471918942	-0.397219781
20	-0.278930005	-0.229881665	-0.233896028	-0.927212983	-0.263044025	-1.261700736	-0.431435	-0.263044025	-0.278930005	-0.325779593	-0.354364423	-0.431435	0.231493442	0.100338777	0.236631903

图 2 主成分分析的标准化数据矩阵（部分）

在进行分析之前，对于方差和极差，我们希望它越小越好，这与其他指标的正向性相反。因此，我们取其倒数进行降维分析。

通过计算，我们得到指标的方差-协方差矩阵如下图所示。通过观察，我们发现多数指标存在很强的相关性，意味着很适合使用主成分分析提取主成分。比如，供货商竞争力和收购总量的协方差为 0.832。

	收购总量	企业供需比	供货商竞争力	供应商出货率
收购总量	1	-0.056555419	0.831757086	0.195706873
企业供需比	-0.056555419	1	-0.045905035	-0.111045056
供货商竞争力	0.831757086	-0.045905035	1	0.203931383
供应商出货率	0.195706873	-0.111045056	0.203931383	1

图 3 指标的方差-协方差矩阵（部分）

我们用原标准化矩阵和特征向量矩阵得到主成分如下图所示。

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
1	-1.284244755	-0.339698493	-0.909240909	-0.500852348	0.363734049
2	-0.123250397	-1.016507349	0.789807185	1.28798455	0.403915566
3	1.730320119	-0.979784262	1.930483483	-0.237044641	-0.487944959
4	-1.049742302	-0.766854554	-0.776835802	-0.385672264	0.321801828
5	1.114223248	-1.140918202	1.402819049	0.834390433	0.629735218
6	-1.489612997	-0.34228589	-1.239122768	-1.390747824	-0.34563363

图 4 主成分（部分）

同时，我们检查了主成分的正交性，得到的方差-协方差矩阵如下图。

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

图 5 主成分的方差-协方差矩阵（部分）

我们通过计算得到

我们以 90%解释度为标准，选取了 5 个主成分。主成分之间的占比分别为 46.64%、13.684%、12.222%、7.079%、6.318%。

成分	初始特征值		
	总计	方差百分比	累积 %
1	7.462	46.64	46.64
2	2.189	13.684	60.324
3	1.955	12.222	72.546
4	1.133	7.079	79.625
5	1.011	6.318	85.943
6	0.945	5.906	91.849
7	0.682	4.264	96.114
8	0.213	1.33	97.444
9	0.173	1.081	98.525
10	0.134	0.839	99.363
11	0.074	0.463	99.826
12	0.028	0.173	99.999
13	0	0.001	100
14	1.33E-15	8.29E-15	100
15	-1.27E-16	-7.95E-16	100
16	-5.90E-16	-3.69E-15	100

表 4 主成分总方差解释

基于此，我们得到了评分函数（ score_k ）。

$$\text{score}_k = 0.4664\text{PC}_1 + 0.13684\text{PC}_2 + 0.12222\text{PC}_3 + 0.07079\text{PC}_4 + 0.006318\text{PC}_5 \quad (12)$$

我们通过计算得到了 5 个主成分的成分系数矩阵。

	成分矩阵				
	1	2	3	4	5
订货总量(x_1)	0.850	0.157	0.417	-0.141	0.021
企业需求比(x_2)	-0.085	-0.069	0.112	0.127	0.836

供货比(x_3)	0.880	0.160	0.298	0.001	0.017
供需比(x_4)	0.419	0.303	-0.664	-0.174	-0.003
总供货量(x_5)	0.902	0.175	0.364	-0.077	0.023
材料(x_6)	-0.044	-0.051	0.090	-0.470	-0.427
订购周数(x_7)	0.835	0.036	-0.455	0.174	-0.057
平均周供货量(x_8)	0.902	0.175	0.364	-0.077	0.023
平均收购量(x_9)	0.850	0.157	0.417	-0.141	0.021
连续订购周数(x_{10})	0.841	-0.005	-0.225	0.285	-0.030
连续供货周数(x_{11})	0.841	-0.002	-0.227	0.281	-0.028
有效供货因子(x_{12})	0.835	0.036	-0.455	0.174	-0.057
周供货量方差倒数(x_{13})	-0.590	0.451	0.379	0.414	-0.138
周供货量极差倒数(x_{14})	-0.366	0.535	0.219	0.559	-0.257
收购方差倒数(x_{15})	-0.290	0.834	-0.197	-0.273	0.152
收购极差倒数(x_{16})	-0.240	0.876	-0.211	-0.183	0.110

表 5 成分系数矩阵

我们大体可以拆分出供货商竞争力、供货商供货稳定性、企业倾向性这三个大指标作为我们的潜在变量。

每家供货商的主成分得分计算公式为：

$$\begin{aligned}
 PC_1 = & 0.849582921109382x_1 - 0.0850501061397854x_2 \\
 & + 0.880322450092212x_3 + 0.418651435176093x_4 \\
 & + 0.90217481999439x_5 - 0.044030467105677x_6 \\
 & + 0.834997801812925x_7 + 0.902174819993883x_8 \\
 & + 0.849582921116784x_9 + 0.840517368295432x_{10} \\
 & + 0.840823645464011x_{11} + 0.834997801812924x_{12} \\
 & - 0.590379830255652x_{13} - 0.365677576660836x_{14} \\
 & - 0.289601898329497x_{15} - 0.239851143906965x_{16}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 PC_2 = & 0.156536959342664x_1 - 0.0686704026751166x_2 \\
 & + 0.160119784259438x_3 + 0.303489972256141x_4 \\
 & + 0.175362937379269x_5 - 0.0510389433646647x_6 \\
 & + 0.0364117298859936x_7 + 0.175362937376921x_8 \\
 & + 0.156536959329003x_9 - 0.004953082325718x_{10} \\
 & - 0.00215912085212128x_{11} + 0.0364117298859941x_{12} \\
 & + 0.451132189058453x_{13} + 0.534748266289612x_{14} \\
 & + 0.83350677066608x_{15} + 0.875786746263589x_{16}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 PC_3 = & 0.417417391121777x_1 + 0.112402227856921x_2 \\
 & + 0.297850931491865x_3 - 0.663773788956704x_4 \\
 & + 0.364049529976297x_5 + 0.0903018038066378x_6 \\
 & - 0.455360407188256x_7 + 0.364049529972998x_8 \\
 & + 0.417417391098324x_9 - 0.225324733882022x_{10} \\
 & - 0.227014360507105x_{11} - 0.455360407188255x_{12} \\
 & + 0.378737115944668x_{13} + 0.219294137457332x_{14} \\
 & - 0.196556216061267x_{15} - 0.21126332683619x_{16}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
PC_4 = & -0.140831643374016x_1 + 0.127360079888613x_2 \\
& + 0.000861525259051481x_3 - 0.174444188655127x_4 \\
& - 0.0766975538736835x_5 - 0.470491954577778x_6 \\
& + 0.174028339186712x_7 - 0.0766975538814984x_8 \\
& - 0.14083164336949x_9 + 0.285075147944799x_{10} \\
& + 0.280530371179738x_{11} + 0.174028339186713x_{12} \\
& + 0.414246831414779x_{13} + 0.559356837281474x_{14} \\
& - 0.273483241332212x_{15} - 0.182891087006913x_{16}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
PC_5 = & 0.0205212491510512x_1 + 0.835776845962594x_2 \\
& + 0.0170361458864797x_3 - 0.00304410386424551x_4 \\
& + 0.0234039990615191x_5 - 0.426712557758777x_6 \\
& - 0.0568254982654834x_7 + 0.0234039990654614x_8 \\
& + 0.0205212491463164x_9 - 0.0300385889277084x_{10} \\
& - 0.0278132302508566x_{11} - 0.0568254982654831x_{12} \\
& - 0.137914822271504x_{13} - 0.256625763967792x_{14} \\
& + 0.15176225094471x_{15} + 0.10968386763999x_{16}
\end{aligned} \tag{17}$$

基于公式(12)-(17)，我们对每一家供货商进行评分，并将它们的得分由高到底进行排列，最终我们选取了得分前 50 名的供货商，如下表所示。

得分前 50 名的供应商					
供应商 ID	得分	供应商 ID	得分	供应商 ID	得分
S229	119.8612602	S139	51.42217	S244	34.04202
S361	111.0358549	S352	51.26084	S218	33.9843
S108	93.37468036	S247	43.61377	S266	33.56496
S140	91.3877917	S374	42.11101	S123	33.46107
S151	81.62187879	S284	41.16482	S150	32.95781
S340	74.69304233	S031	40.76747	S307	31.27005
S282	73.03212218	S365	39.89815	S314	23.68618
S275	70.76189818	S348	38.89858	S037	21.77284
S329	70.27292654	S040	38.48259	S338	21.33341
S308	68.29328102	S367	37.20202	S395	21.10682
S330	68.09113235	S055	37.04006	S114	20.90645
S131	66.4141133	S346	36.33647	S126	19.53796
S268	61.79000971	S364	36.18216	S086	17.90794
S356	61.70341459	S007	34.87076	S291	17.68378
S306	60.66007262	S080	34.85561	S189	16.00867
S194	54.70846352	S201	34.66329	S074	14.71122
S143	52.5887154	S294	34.35628		

表 6 得分前 50 名的供应商

6.3 模型的评价

我们使用主成分分析法，可以很有效地降低变量之间的相关性，因为我们所提取的指标之间有部分重复、或相关性较高的情况，我们可以利用主成分得到最有解释度的指标。此外，相比 AHP 和模糊评价法，主成分分析的主观性会

较弱，有更强的客观性，各主成分的权重为其贡献率，它反映了该主成分包含的原始数据的信息量占全部信息量的比重，这样的确定方法使更客观有效的。我们在第一步对整个矩阵进行了标准化，消除了量纲的同时使得数据更加聚集。我们可以通过对潜在变量的解释为每个主成分进行命名，得到更合理的指标结果。本次我们选取了能达到 90%解释度的主成分个数，几乎概括了全数据的信息，使得原数据损失信息较少。

由下图可知，得分前 50 名的供货商几乎包括了 402 家所有供货商的供货量，这意味着这 50 家供货商对该企业的重要性极大，而它们的供货量也是保障企业生产需求的关键。

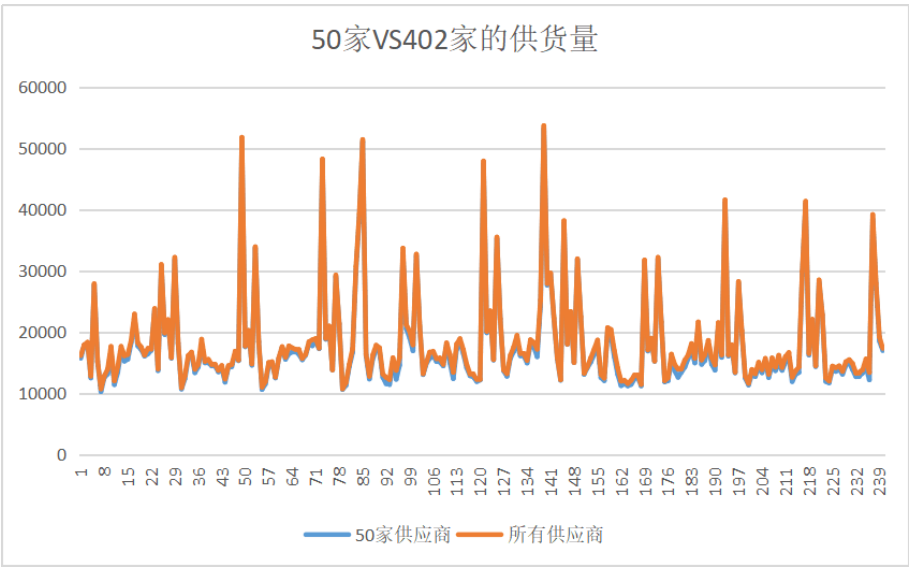


图 6 选取的 50 家供货商和 502 家供货商的供货量对比

我们所选取的 50 家供货商的周供货量和 402 家供货商的周供货量大约平均相差 500 立方米。为了保障企业的生产需求，我们希望周供货量均能达到 2.82 万立方米及以上。这 50 家供应商只有 1.8%的误差，意味着这些供货商涵盖了 98.2%的。

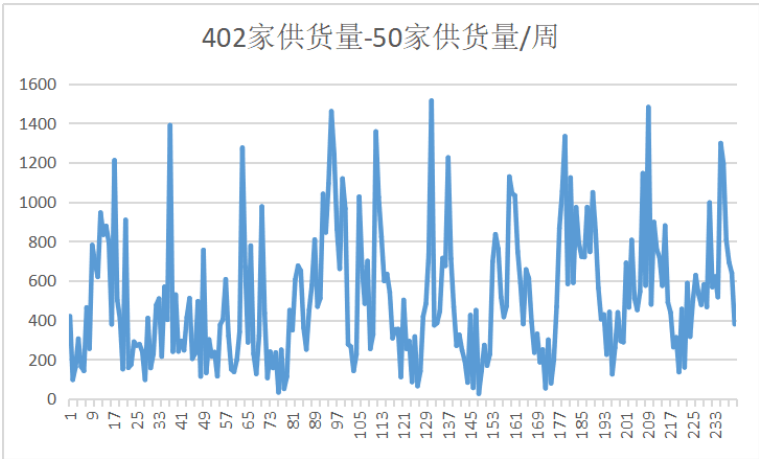


图 7 402 家供货商供货量和 50 家供货商供货量的差值

综上所述，此模型表现良好。

七、问题二的模型建立与求解

基于问题一通过 PCA 选出的最具代表性和影响力的 50 家供应商，我们进行了更进一步的筛选。我们希望以尽可能少的供应商数量，满足企业的生产需求。同时，我们采用非线性规划为企业制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案，并由此得出运输损耗最少的转运方案。

6.1 数据预处理

以企业的每周产能 2.82 万立方米为目标，我们试图对 50 家供应商进一步择优筛选。

我们对这 50 家供应商的近五年对应周次的供应量进行提取，求得每一家供应商近五年内对该企业供货量的最大值、最小值、均值和分位数（Q90、Q85、Q25）。此外，我们对这 50 家供应商的供应材料类型进行统计，共有 17 家 A 类企业（该企业的材料供应为 A 类材料），14 家 B 类企业和 19 家 C 类企业。

此外，由于企业的进一步筛选与材料类型 ABC 的数量分布有关，我们需要考虑企业在选择供货商时的倾向性——很可能出现选择 C 的数量大于选择 B 的数量大于选择 A 的数量。我们还需要做后续更详尽的分析。

由于订货量并不能完全反映一个供应商的完全能力，我们考虑用供应商的供货量作为该企业的产能衡量标准。每立方米产品需要消耗 A 类材料 0.6 立方米，或 B 类材料 0.66 立方米，或 C 类材料 0.72 立方米，因此，在我们做抉择之前，需要消除原材料使用量的影响。所以，我们分别对 A 类供应商的以上几个特征值（最大值、最小值、均值、分位数）除以 0.6，对 B 类供应商的特征值除以 0.66，对 C 类供应商的特征值除以 0.7。因此，我们所得的供货量数据由供货量数值转化为该企业的产能数值。

6.2 基于 0-1 规划和非线性规划的供应商抉择模型

6.2.1 模型的建立

首先，我们考虑产能问题，我们必须满足企业的每周产能达到 2.82 万立方米的目标，并且试图预留更多。对于某一家供应商，我们将其 240 周的供应量作为参考依据。我们在其中取得 λ_i 表示从第 i 行取得用于限制企业产能的观测值。我们分别累加它们的 Q25 分位数值，Q80 分位数值和 Q90 分位数值，将求得的产能和 2.82 万立方米进行对比，从而找到对每一家供应商的合适产能限制范围。

取用规模（分位数）所能达到的产能（立方米）	
Q25%	16708.8
Q80%	28366
Q85%	30660.8
Q90%	36083.5
Q95%	87228.6
Q100%（最大值）	400670

表 7 取用规模和所能达到的产能

最终我们选取了 Q25 和 Q90 作为产能上下限，并将此作为非线性规划的一个条件。

$$\begin{cases} (Q25)_1 < \lambda_1 < (Q90)_1 \\ \vdots \\ (Q25)_i < \lambda_i < (Q90)_i \\ \vdots \\ (Q25)_{50} < \lambda_{50} < (Q90)_{50} \end{cases} \quad (18)$$

其中， $(Q25)_i$ 为第 i 家供货商在近五年 25% 分位数的产能数值， λ_i 表示第 i 家供货商的估计周产能。

我们对企业的倾向性进行了限制。根据供应材料的不同（A、B、C 类），我们分别统计了每周供货的供应商个数，由下表可以看出平均使用 A 类供应商约为 14 家，平均使用 B 类供应商约为 14 家，平均使用 C 类供应商约为 18 家，我们可以利用这些数据作为我们进一步筛选的不同类型的供应商个数进行范围限定。这个限定将作为我们进行非线性规划的一个条件。

此外，我们还根据供应材料的不同（A、B、C 类）统计了平均缺失个数，A 类供应商的平均缺失为 3 家，B 类供应商几乎不缺失，非常平稳，C 类供应商的平均缺失为 1 家。

	最大供货个数（家）	最小供货个数（家）	平均供货个数（家）
A	17	11	14.4417
B	14	11	13.6875
C	19	15	17.5833

表 9 供应商个数

	最大缺失个数（家）	最小缺失个数（家）	平均缺失个数（家）
A	6	0	2.55833
B	3	0	0.3125
C	4	0	1.41667

表 10 供应商缺失情况

因此，我们对总体选择的供应商数目进行了限制。下限为 37 家（ $50 - 6 - 3 - 4$ ），上限为 50 家；选择 B 类供应商的数目区间为[13,14]，选择 A 类供应商的数目区间为[17 - 6,17]，选择 C 类供应商的数目区间为[19 - 3, 19]。

$$\begin{cases} 37 < x_1 + x_2 + \cdots + x_{50} < 50 \\ 11 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{14} \leq 17 \\ 13 \leq x_{15} + x_{16} + \cdots + x_{31} \leq 17 \\ 15 \leq x_{32} + x_{33} + \cdots + x_{50} \leq 19 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} 11 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{14} \leq 17 \\ 13 \leq x_{15} + x_{16} + \cdots + x_{31} \leq 17 \\ 15 \leq x_{32} + x_{33} + \cdots + x_{50} \leq 19 \end{cases} \quad (20)$$

我们还需要满足达到最小产能这一条件。因此，我们对每周供应商的产能进行假设，并以决策量等于 0 表示不选择该家供应商，以决策量等于 1 表示选择该家供应商。我们使它们的乘积之和大于 2.82 万立方米，从而满足企业的产能需求。

这是一个 0-1 规划和非线性规划结合的问题。我们设

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{不选择第} i \text{家供应商} \\ 1, & \text{选择第} i \text{家供应商} \end{cases} \quad (22)$$

由于产能取决于现有的材料库存，即供应商的供货量。因此，我们采用供应商的供货量而不是企业的订货量作为计算数据。

我们依据最小满足产能的需求构建的约束条件为

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{50} x_{50} - (28200 + a) > 0 \quad (23)$$

其中， λ_i 为第 i 家供应商的周供应量， a 为不确定的预值（范围为 $[0, 28200]$ ）。

如下图所示，我们发现在 240 周里有 87 周的产能在 28200 立方米之上，只有 11 周的产能大于两周的量，我们发现很难另限制条件的产能直接满足 2 周的量，因此我们设置了 a 进行阈值讨论，做不同的规划得到一个合适的解。

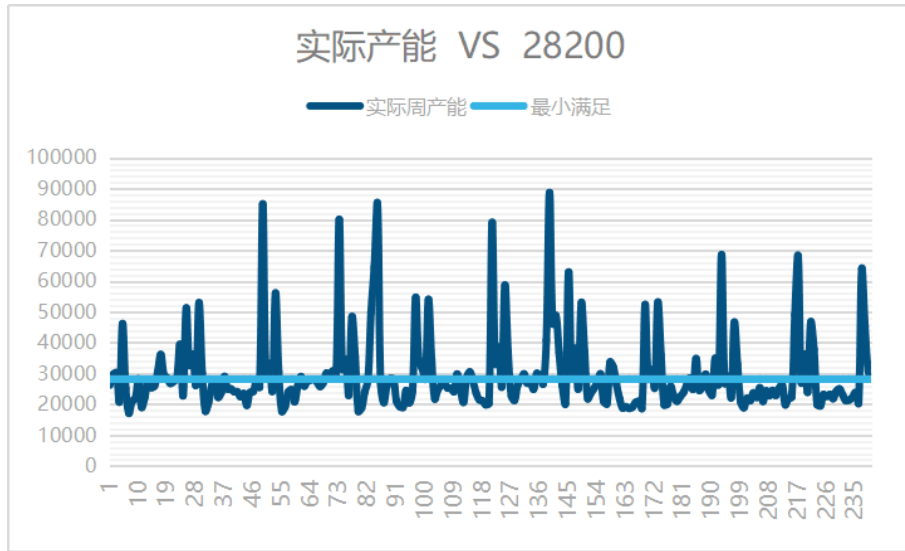


图 8 实际产能和 2.82 万立方米的理论产能

我们的目标函数为

$$\begin{aligned} \min f &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{50} x_{50} \\ &\quad (Q_{25})_1 < \lambda_1 < (Q_{90})_1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad (Q_{25})_i < \lambda_i < (Q_{90})_i \\ &\quad \vdots \\ &\quad (Q_{25})_{50} < \lambda_{50} < (Q_{90})_{50} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 37 < x_1 + x_2 + \cdots + x_{50} < 50 \\ 11 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{14} \leq 17 \\ 13 \leq x_{15} + x_{16} + \cdots + x_{31} \leq 17 \\ 15 \leq x_{32} + x_{33} + \cdots + x_{50} \leq 19 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{50} x_{50} - (28200 + a) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

6.2.2 模型的求解

我们得到了 取不同范围的筛选结果，如下表所示，最终我们决定筛选掉 6 家供应商，分别为：S329、S108、S151、S374、S037。

分位数	淘汰供应商 ID	淘汰个数
Q90%	S329、S143、S352、S007、S307、 S291、S340、S268、S356、S306、S194	2.55833
Q85%	S329、S307、S291、S108、S151、 S374、S294、S037	0.3125
Q80%	S329、S108、S151、S374、S037	1.41667

表 11 淘汰供应商

由 S329 的分位数可知，位于 25%分布的值为 5.0，位于 90 的分布值为 23.3，整体数据规模太小，对于企业的参考意义不大，综上筛去。

由 S108 的分位数可知，位于 25%分布的值为 13.3，位于 90 的分布值为 50.3，整体数据规模同样太小，对于企业的参考意义不大，综上筛去。

由 S151 的分位数可知，位于 25%分布的值为 0，说明该行值为 0 的周次太多了，该供应商营业天数或者综合能力较低，综上筛去。

由 S374 的分位数可知，位于 25%分布的值为 3.3，位于 90 的分布值为 13.3，整体数据规模太小，且其 PCA 的评分为 42.1101，并不高，对于企业的参考意义不大，综上筛去。

由 S037 的分位数可知，位于 25%分布的值为 3.3，位于 90 的分布值为 20.0，整体数据规模太小，且其 PCA 的评分为 21.772，并不高，对于企业的参考意义不大，综上筛去。

6.3 满足产能时最经济的订购规划模型

6.3.1 模型的建立

为了得到最经济的原材料订购方案，我们将制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案。此时，我们需要考虑 ABC 的原材料成本比，也就是 1.2, 1.1, 1 的比例。同时，我们所求的使订购方案，即订货量，我们的订货量要至少能达到每周的产能，考虑到库存问题，由时序图可以卡出，企业的订货存在周期性的性质。也就是当消耗达到最大的时候，库存最小的时候会一次性订购较多的货物。那么我们不能用五年的平均数据来限定我们的订购量，而需要用五年里每各对应周次，即 5 个一组的数据（如：W001,W49,W97,W145,W92）这样的每 5 个一组的数据来限定订购量，这样会有一个明显的区间差，但是很符合我们的实际需求，即库存需求的关系。

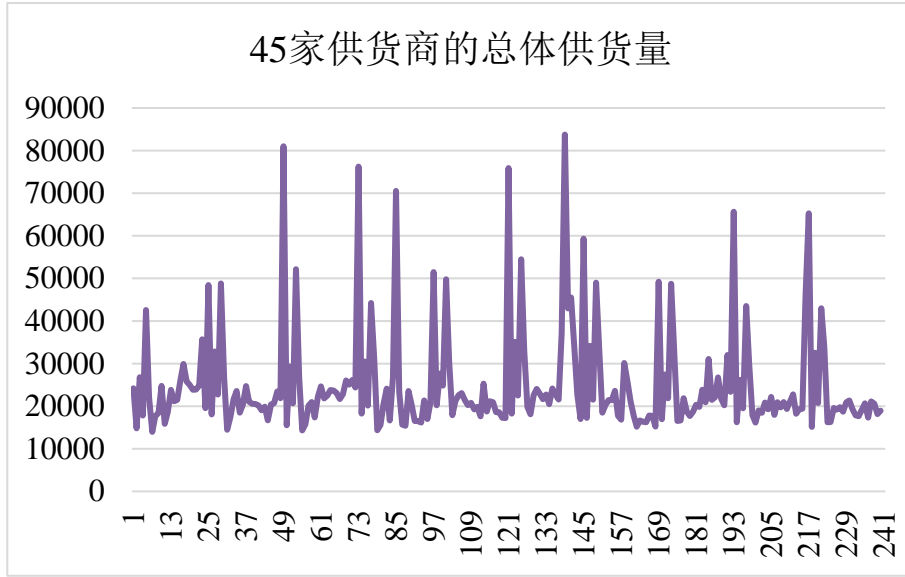


图 9 45 家供货商的总体供货量

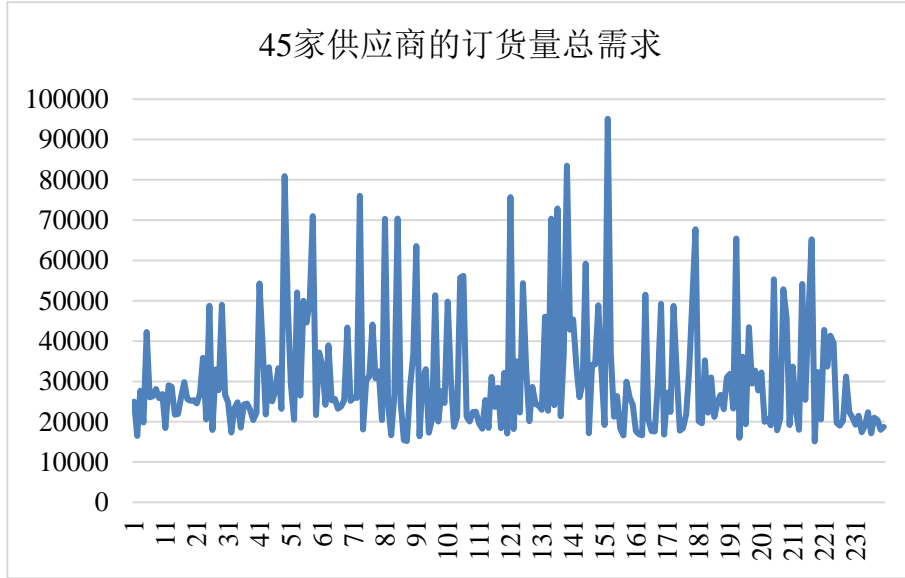


图 10 45 家供货商的订货量总需求

经过实际数据分析，剔除第一年的周次（考虑到第一年的数据与后四年有明显差异，推测可能是在上升期，还未达平稳），我们利用后四年观察时序变化。我们发现第 49 周、第 73 周、第 97 周、第 121 周、第 145 周、第 167 周、第 193 周、第 217 周的订货量都很大，供货量也很大，与周围的周次有显著差异，我们推测在一年的每个年初，每半年需求量显著激增。这说明我们考虑近 5 年对应周次的数据进行区间限定较为合理，而不是考虑均值。

对于每一家供应商，我们选取某一供应商的对应周次（比如 W001、W049、W097），求得每一家供应商该区间的最大值和最小值作为每一周。

$$\begin{aligned} y_{ij} &< \max \left(k_{\text{week}_{0+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{48+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{96+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{144+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{192+i}}^{ij} \right) \\ \min \left(k_{\text{week}_{0+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{48+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{96+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{144+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{192+i}}^{ij} \right) &< y_{ij} \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $k_{\text{week}_{0+i}}^{ij}$ 为第 i 家供应商近五年所提取对应第 i 个周次的订货量。

我们不能单一地以 2.82 万立方米作为周产能的限制条件, 因为企业每周的订货量和供货商的供货量是动态的。因此, 我们选择某一供应商近五年的平均产能 (取自供货量)。

$$\frac{\sum_{i \in A}^{n(A)} y_{ij}}{0.6} + \frac{\sum_{i \in B}^{n(B)} y_{ij}}{0.66} + \frac{\sum_{i \in C}^{n(C)} y_{ij}}{0.72} > \varphi_j \quad (26)$$

其中, φ_j 为近五年内第 j 周的平均产能 (取自供货量)。

根据以上约束条件, 我们建立了线性规划模型。目标函数为:

$$\begin{aligned} \min f = & 1.2 \left(\sum_{i \in A}^{n(A)} \sum_{j=1}^{24} \sum_{i=1}^{45} y_{ij} \right) + 1.1 \left(\sum_{i \in B}^{n(B)} \sum_{j=1}^{24} \sum_{i=1}^{45} y_{ij} \right) + \left(\sum_{i \in C}^{n(C)} \sum_{j=1}^{24} \sum_{i=1}^{45} y_{ij} \right) \\ \text{s. t. } & \begin{cases} \min \left(k_{\text{week}_{0+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{48+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{96+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{144+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{192+i}}^{ij} \right) < y_{ij} \\ y_{ij} < \max \left(k_{\text{week}_{0+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{48+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{96+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{144+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{192+i}}^{ij} \right) \\ \frac{\sum_{i \in A}^{n(A)} y_{ij}}{0.6} + \frac{\sum_{i \in B}^{n(B)} y_{ij}}{0.66} + \frac{\sum_{i \in C}^{n(C)} y_{ij}}{0.72} > \varphi_j \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

其中, y_{ij} 为第 i 家供货商在第 j 周提供的供货量。

6.3.2 模型的求解

我们分别使用订货量和供货量的数据带入上述规划模型对未来 24 周的订购量进行预测。

图 11 展示的是根据供货量的预测结果。我们所预测的订购曲线位于近五年的供货量曲线之间, 且大致波动趋势一致, 拟合效果较好。

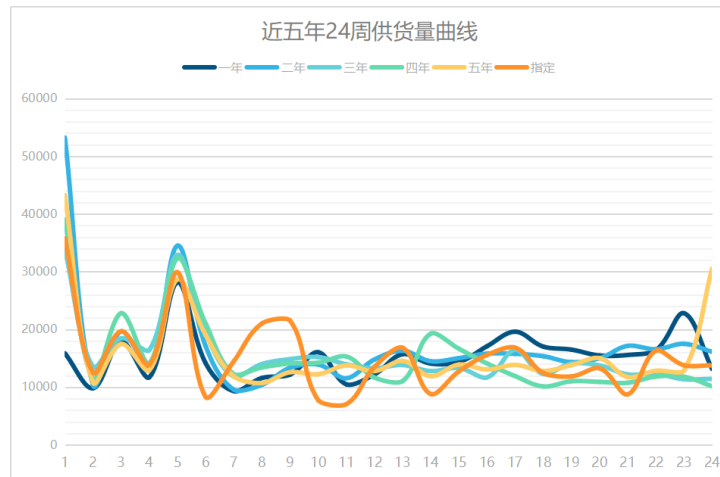


图 11 近五年的供货量曲线

同时，我们根据订货量对未来 24 周的订货量总和进行了预测。预测结果如下图所示。

年份	24周订货量总量	年份	24周供货量总量
第一年	410584.7	第一年	367024.1
第二年	568496.1	第二年	411284.9
第三年	441903.1	第三年	373088.5
第四年	475445.4	第四年	371180.5
第五年	509302.8	第五年	382918.4
制定	512462.07	制定	366215.0291

图 12 24 周订货量总量和供货总量预测

我们认为最好的情况是供货量和订货量相差不大。由上图可以看出，相差最大的时候可以达到 15 万立方米，相差最小的时候为 6 万立方米左右。供货量明显小于订货量，而企业实际用于生产的材料总量为供货量。因此，我们为公司制定的未来 24 周订购量由供货量所得，具体详情可见附件 A。

6.4 产能和经济前提下的最佳转运方案

6.4.1 模型的建立与求解

首先，我们对转运商进行分析。由此可见，每个转运商的最大损耗率均为 5%，但是最小损耗率和平均转运损耗率差别较为明显。其中，最小损耗率位于 0.1%至 0.8%之间，平均转运损耗率位于 0.5%至 3%。结合最小损耗率和平均损耗率可知，T1、T5 和 T7 可能有较大的可能性频繁地产生较大的转运损耗。

转运商 ID	MAX	MIN	MEAN
T1	5	0.7841	1.965095417
T2	5	0.1773	1.016897917
T3	5	0.1295	0.552594017
T4	5	0.111	1.677088235
T5	5	0.2899	2.906491566
T6	5	0.11	0.863002778
T7	5	0.6289	2.114417083
T8	5	0.1695	1.042585222

表 12 转运商的运输损耗描述性统计

对于是否选择某一个转运商，这是一个 0-1 规划。我们设

$$t_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{第}k\text{周第}i\text{家供应商不选择第}j\text{家转运商} \\ 1, & \text{第}k\text{周第}i\text{家供应商选择第}j\text{家转运商} \end{cases} \quad (28)$$

我们依据上一问所求得的供货量作为实际的目标转运总量。

$$\sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} \geq \phi_{ik} \quad (29)$$

其中， a_{ijk} 为第 k 周第 j 家转运商对第 i 家供应商的转运量， ϕ_{ik} 为第 i 家供应商在第 k 周的目标转运总量（上一小问求得的订货量）。

考虑到每周每个转运商每周的最大转运量为 6000 立方米，我们设置了一个约束条件。

$$\sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} < 6000 \quad (30)$$

同时，由于每周都有一定量的材料需要运输，且最大的目标转运总量为 135741 立方米。因此，即使所有转运商都提供力所能及的转运量，都需要由 3 家转运家来完成转运，因此每周参与运输工作的转运商应该位于 $[0,3]$ 的区间内。因此，我们对此限定了一个约束条件。

$$0 \leq \sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 t_{ijk} \leq 3 \quad (31)$$

为了尽可能的减少转运损失率，我们计算了近五年每家转运商的平均对应周损耗率（如：W001,W49,W97,W145,W92），记为 d_j ，其中 j 为第 j 家转运商。由此，我们的目标函数为：

$$\begin{aligned} \min f &= d_j \times \left(\sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} \right) \\ s. t. &\begin{cases} 0 < \sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 t_{ijk} < 3 \\ \sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} < 6000 \\ \sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} > \phi_{ik} \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

6.4.1 模型的评价

经检查，我们每周对于第 j 家转运商的转运量均小于 6000 立方米，且所有转运商的转运总量均大于目标转运总量，满足转运要求。

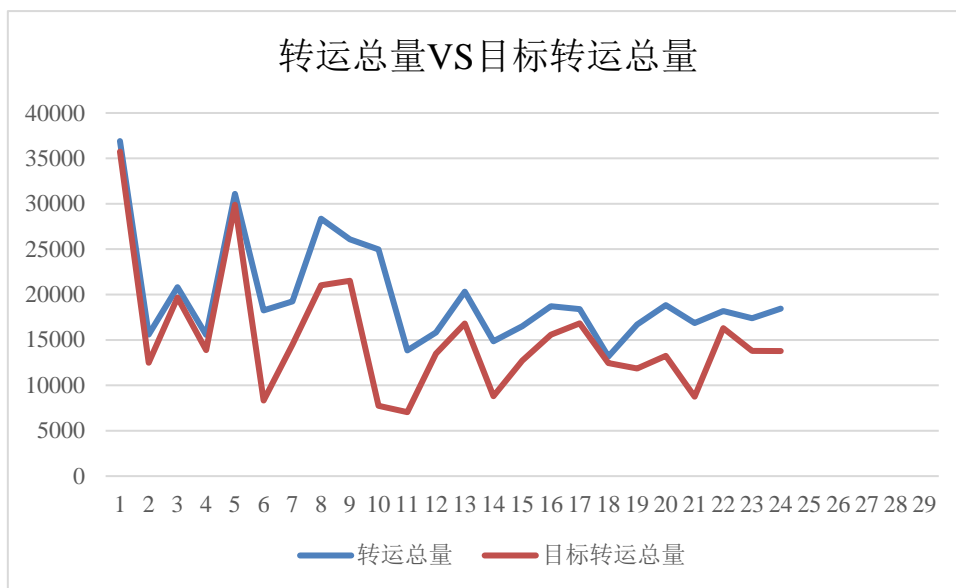


图 13 转运总量和目标转运总量

八、问题三的模型建立与求解

问题三约束了 AC 的比例，希望提高 A 的比例并降低 C 的比例，由题目，相同体积的材料 A 和材料 C，材料 A 制造的产能比材料 C 多，故我们应当提高 A/C，增大产能。在问题二中我们进行了问题的拆分，问题三合并了问题二的后 2 个小问，我们只需要建立一个大型的规划函数，再增加响应的制约条件，即可求解。

7.1 模型的建立

为了保证企业的生产产能，并尽可能地在此基础上降低企业的成本和减少运输造成的损耗。

我们将总目标函数分解为三个部分，我们考虑用设置权重的方法对每个小目标函数进行约束，最终合成总目标函数。

首先，我们设置使 A 类材料供货量最大的目标函数。由于我们的总目标函数构建为 MIN 类型，我们欲对 MAX 的 A 类材料取负，是它们呈现同样变化趋势。

$$\min f_1 = -\max \left(\sum_{i \in A}^{n(A)} \gamma_{ik} \right) \quad (33)$$

其中， γ_{ik} 为第 k 周第 i 个供应商的被订购量（A 类材料）。

我们继续构建使 C 类材料供货量尽量小的目标函数。

$$\min f_2 = \sum_{i \in C}^{n(C)} \gamma_{ik} \quad (34)$$

其中， γ_{ik} 为第 k 周第 i 个供应商的被订购量（C类材料）。

我们继续构建使损耗最低的目标函数。

$$\min f_3 = d_j \times \left(\sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} \right) \quad (35)$$

其中， d_j 为第 j 家转运商的近五年的平均对应周损耗率， a_{ijk} 为第 k 周第 j 家转运商对第 i 家供应商的转运量， t_{ijk} 为决策变量。

最后，我们构建订购最经济的目标函数。

$$\min f_4 = 1.2 \left(\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^{24} \sum_{i=1}^{45} \gamma_{ij} \right) + 1.1 \left(\sum_{i \in B} \sum_{j=1}^{24} \sum_{i=1}^{45} \gamma_{ij} \right) + \left(\sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{24} \sum_{i=1}^{45} \gamma_{ij} \right) \quad (36)$$

因此，最终我们建立的加权总目标函数为

$$\min f = P_1 \times f_1 + P_2 \times f_2 + P_3 \times f_3 + P_4 \times f_4 \quad (37)$$

其中， P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 为加权系数。

接下来，我们罗列约束条件。

首先，A类订货量要大于C类订货量。

$$\sum_{i \in A} \gamma_{ik} > \sum_{i \in C} \gamma_{ik} \quad (38)$$

其次，订购总量要达到最小产能要求，即 2.82 万立方米，并最好有预留空间。

$$\frac{\sum_{i \in A} \gamma_{ik}}{0.6} + \frac{\sum_{i \in B} \gamma_{ik}}{0.66} + \frac{\sum_{i \in C} \gamma_{ik}}{0.72} > \varphi_j \quad (39)$$

其中， φ_j 为近五年内第 j 周的平均产能（取自供货量）。

然后，我们对于订购量的范围也要约束。

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &< \max \left(k_{\text{week}_{0+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{48+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{96+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{144+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{192+i}}^{ij} \right) \\ \min \left(k_{\text{week}_{0+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{48+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{96+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{144+i}}^{ij} + k_{\text{week}_{192+i}}^{ij} \right) &< y_{ij} \end{aligned} \quad (40)$$

其中， $k_{\text{week}_{0+i}}^{ij}$ 为第 i 家供应商近五年所提取对应第 i 个周次的订货量。

为了满足最好一家供应商只被一家转运商运输，因此我们对此转运商的数目做了限定。

$$0 \leq \sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 t_{ijk} \leq 3 \quad (41)$$

考虑到每周每个转运商每周的最大转运量为 6000 立方米，我们设置了一个约束条件。

$$\sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} < 6000 \quad (42)$$

最后，我们要满足一家供应商的所有转运量大于订购量。

$$\sum_{i=1}^{45} \sum_{j=1}^8 a_{ijk} t_{ijk} \geq \gamma_{ik} \quad (29)$$

其中， a_{ijk} 为第 k 周第 j 家转运商对第 i 家供应商的转运量， γ_{ik} 为第 i 家供应商在第 k 周的目标转运总量（我们欲求的订货量）。

7.2 模型的评价

通过以上模型，我们求得了一个规划结果，在满足企业生产产能的前提下，最大程度地降低成本和运输损耗率。

对于订货量而言，在原数据集中 C:A 的比例大约为 2:1，但在我们新构建的模型规划下，C:A 的比例大约为 1:2。

原材料类型	在模型中的新订购比例	原材料类型	在附件中的原订购比例
A	0.460655892	A	0.276680273
B	0.279606023	B	0.276095118
C	0.259738085	C	0.447224609

表 13 A 类材料供应商和 C 类材料供应商比例

对于供货量而言，未来 24 周订货量位于近五年的供货量之间，趋势大致符合以往经验。

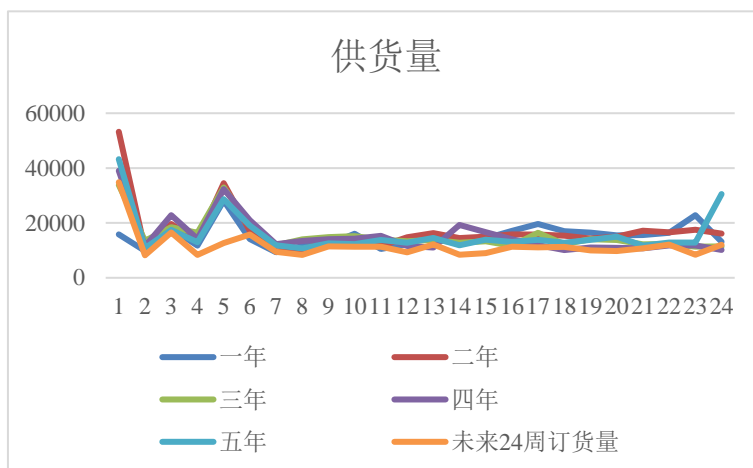


图 14 在模型中的供货量

对于转运总量而言，转运总量略大于订货总量。从下图可以看出，二者拟合程度较好。

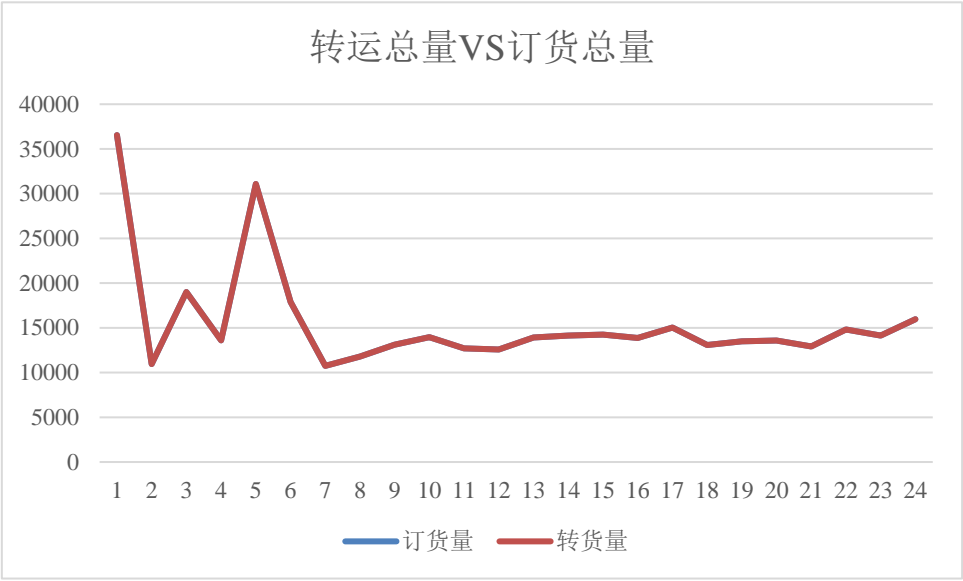


图 15 在模型中的转货总量与订货总量

九、问题四的模型建立与求解

8.1 模型的建立

关于预测未来产能是否能够提高的问题，我们先对 A,B,C 类供应商的时序图绘制折线图。

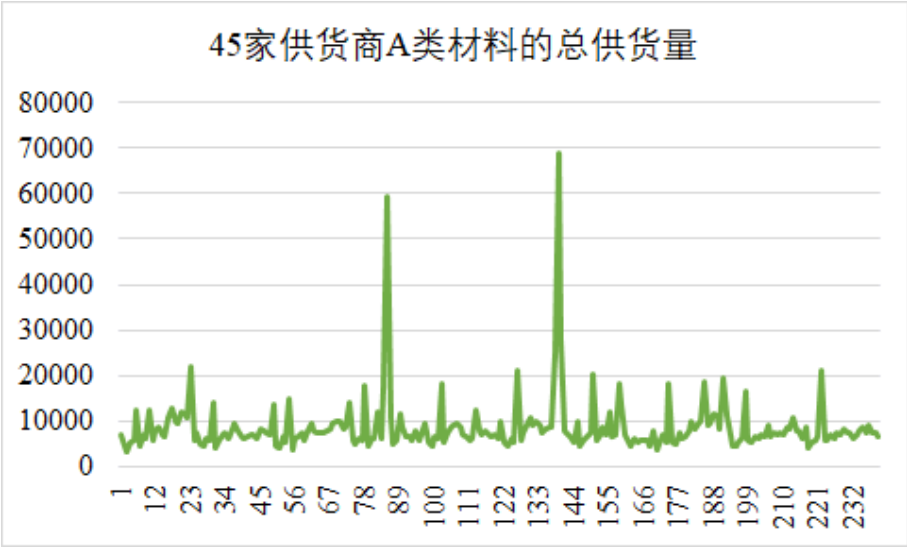


图 16 45 家供货商 A 类材料的总供货量

可以发现 A 类供货商有一定的周期的波动性，可以看出有较为规律的类似季节、月份因素。

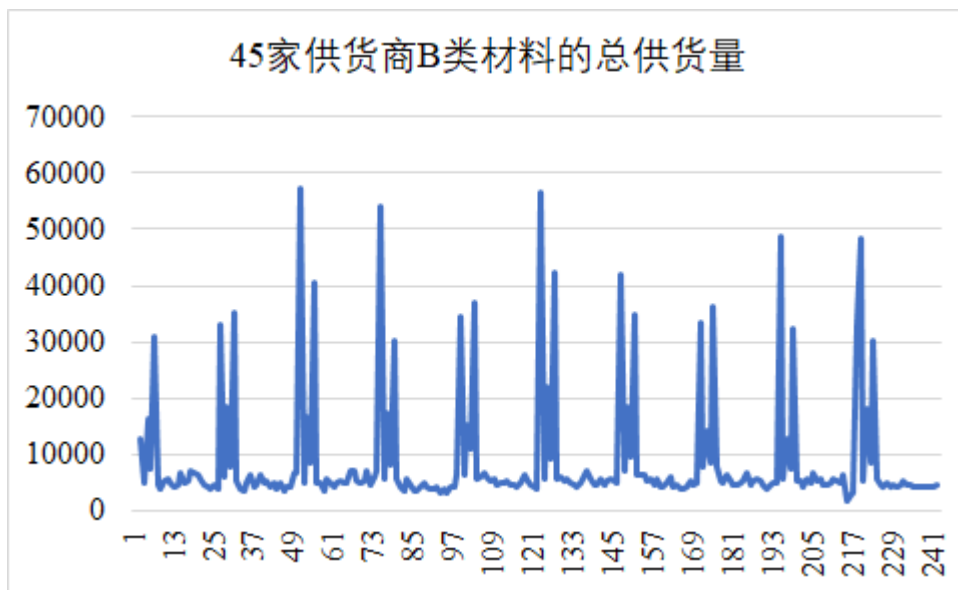


图 17 45 家供货商 B 类材料的总供货量

可以发现 B 类供货商有很明显的规整的周期波定性，有前所研究的 B 类供货量企业停止供货天数最少，可以看出 B 类供货商最受企业欢迎，其稳定的周期波定性也是其中还一个因素。

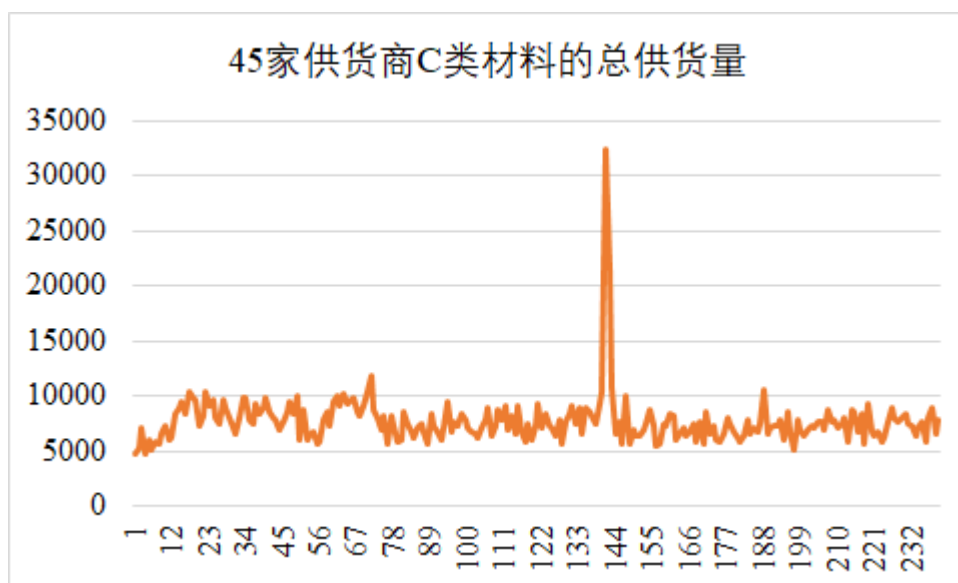


图 18 45 家供货商 C 类材料的总供货量

可以发现当 C 类供应商剔除了 W144 这个异常点后有较为明显的周期波定性，且整个数据与在一个范围内，也很适合做时间序列分析。

8.2 模型的求解

考虑到供货库存关系以及需求量变化，我们认为这两项数据受季节定长的月份等因素影响呈递变化，具有一定的趋势项，因此我们欲建立 $ARIMA(p,d,q)$ 模型预测未来周供货量及周订货量的未来变化趋势。以 S140 供应商为例，首先我们对数据进行预处理，作出原始序列的序列图，可以看出原始数据其实已经比较平稳，我们通过差分处理绘制出 1 阶差分、2 阶差分后、3 阶差分的曲线，

发现 1 阶差分后为平稳时间序列。因此我们建立 $d = 1$ 的 ARIMA 模型。

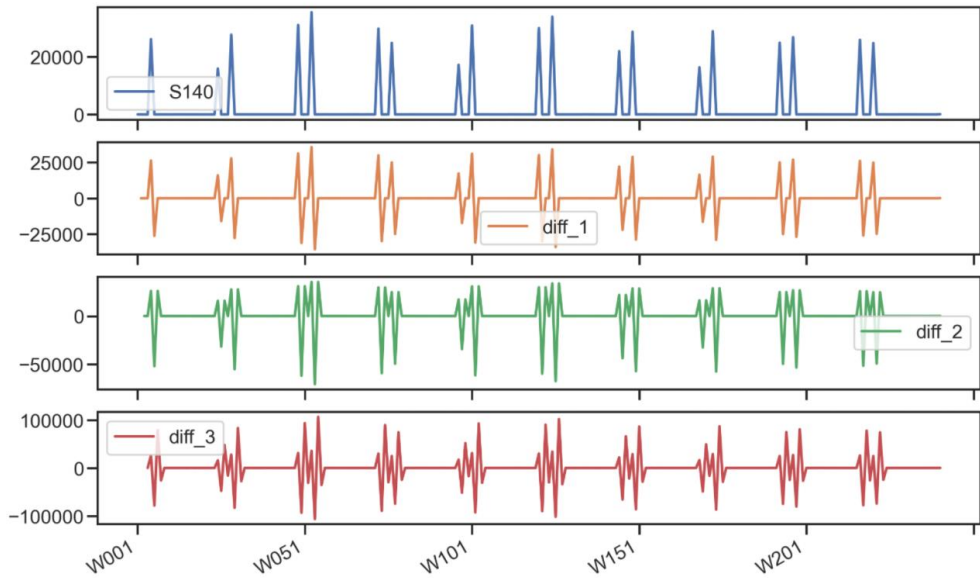


图 19 S140 的原始序列以及一、二、三阶差分的序列图

我们继续对模型确定阶数， p 和 q 分别为 ARIMA 模型中的自回归项数和移动平均项数，为筛选最优参数组合，我们采用了判断 d 次差分后平稳序列自相关（ACF）和偏自相关（PACF）系数的截尾，拖尾，和重叠，并结合建立不同参数模型进行比较的方法来确定最佳模型结构。由下图可以看出 $p = 1, q = 1$ 时效果最佳。

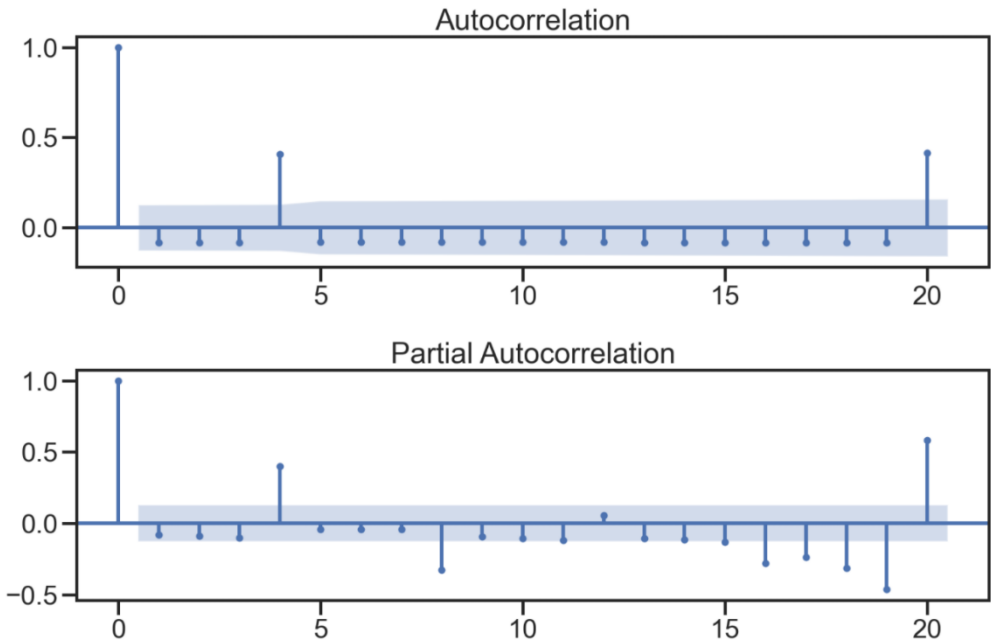


图 20 S140 的 ACF 和 PACF 图

我们利用拟合优度最优的 ARIMA (1, 1, 1) 模型 d 对数据进行拟合预测。我们分别对这 45 家供应商重复同样的操作，从而得出未来 24 周的周订购量和供货量。

附录

附录 1 参考文献

- [1] 司守奎, 孙兆亮.《数学建模算法与应用》第二版
[2] 孟海龙,陈祖怡,李俊恒,黄家轩,陈见标.基于层次分析法的服装供应商的评价和选择[J].中国储运,2021(09):158-160.

附录 2 代码

2.1 问题一PCA的R代码

```
data<-read.csv(file =  
"C://Users//Lenovo//Desktop//CUMCM2021Probelms//C//A_all.csv",header=TRUE,s  
ep=",",na.strings = "")  
head(data)  
colnames(data)  
dim(data)
```

```
X<-data[, (3:18)]  
head(X)  
colnames(X)
```

```
##标准化处理  
X.s<-scale(X)  
X.s  
write.csv(X.s,"111.csv")  
##得到方差-协方差矩阵  
X.var<-var(X.s)  
X.var  
write.csv(X.var,"112.csv")
```

```
##得到方差-协方差矩阵的特征值和特征向量  
EP=eigen(X.var)  
#得到特征值  
eigenvalues=EP$values  
#得到特征向量  
V=EP$vectors
```

```
##得到PC  
PC = X.s%*% V  
write.csv(PC,"PC.csv")  
head(PC)  
round(var(PC),3)
```

```

##得到各个成分的占比
round(100*eigenvalues/sum(eigenvalues),3)
cumsum(round(100*eigenvalues/sum(eigenvalues),3))

##检查特征向量是否正交
round(crossprod(V,V))
V.r = round(V,3)
V.r
a<-round(crossprod(V.r))

```

2.2 问题二第一小问的Lingo代码

Model:

```

Min=x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17+x18
+x19+x20+x21+x22+x23+x24+x25+x26+x27+x28+x29+x30+x31+x32+x33+x34+x3
5+x36+x37+x38+x39+x40+x41+x42+x43+x44+x45+x46+x47+x48+x49+x50;
a1*x1+a2*x2+a3*x3+a4*x4+a5*x5+a6*x6+a7*x7+a8*x8+a9*x9+a10*x10+a11*x11
+a12*x12+a13*x13+a14*x14+a15*x15+a16*x16+a17*x17+a18*x18+a19*x19+a20*
x20+a21*x21+a22*x22+a23*x23+a24*x24+a25*x25+a26*x26+a27*x27+a28*x28+a
29*x29+a30*x30+a31*x31+a32*x32+a33*x33+a34*x34+a35*x35+a36*x36+a37*x3
7+a38*x38+a39*x39+a40*x40+a41*x41+a42*x42+a43*x43+a44*x44+a45*x45+a46
*x46+a47*x47+a48*x48+a49*x49+a50*x50-1*28200>0;
a1>1987.5;
a2>1799.583333333333;
a3>1163.333333333333;
a4>5;
a5>904.583333333333;
a6>994.583333333333;
a7>625;
a8>974.1666666666667;
a9>954.583333333333;
a10>645.833333333333;
a11>551.6666666666667;
a12>771.6666666666667;
a13>811.6666666666667;
a14>445.4166666666667;
a15>729.583333333333;
a16>649.583333333333;
a17>171.6666666666667;
a18>13.3333333333333;
a19>437.9166666666667;

```

a20>355;
a21>3.333333333333333;
a22>169.5833333333333;
a23>263.3333333333333;
a24>226.6666666666667;
a25>7.916666666666667;
a26>170;
a27>92.9166666666667;
a28>88.3333333333333;
a29>143.3333333333333;
a30>131.6666666666667;
a31>26.6666666666667;
a32>46.6666666666667;
a33>0;
a34>116.6666666666667;
a35>70;
a36>53.3333333333333;
a37>41.6666666666667;
a38>36.6666666666667;
a39>6.666666666666667;
a40>0;
a41>5;
a42>0;
a43>3.333333333333333;
a44>0;
a45>5;
a46>0;
a47>3.333333333333333;
a48>5;
a49>0;
a50>0;
a1<3026;
a2<2772.6666666666667;
a3<1391;
a4<16.6666666666667;
a5<1215.3333333333333;
a6<1388.6666666666667;
a7<1781.3333333333333;
a8<1257.3333333333333;
a9<1255.3333333333333;
a10<1170;
a11<1083;
a12<1176.6666666666667;
a13<998.3333333333333;

$a_{14} < 1466.333333333333;$
 $a_{15} < 1040.333333333333;$
 $a_{16} < 780.333333333333;$
 $a_{17} < 965.666666666667;$
 $a_{18} < 35;$
 $a_{19} < 836.333333333333;$
 $a_{20} < 443.333333333333;$
 $a_{21} < 40.3333333333334;$
 $a_{22} < 470;$
 $a_{23} < 324.333333333333;$
 $a_{24} < 310;$
 $a_{25} < 393.666666666667;$
 $a_{26} < 217;$
 $a_{27} < 272.333333333333;$
 $a_{28} < 116.666666666667;$
 $a_{29} < 183.333333333333;$
 $a_{30} < 177;$
 $a_{31} < 41.6666666666667;$
 $a_{32} < 231.666666666667;$
 $a_{33} < 0;$
 $a_{34} < 150;$
 $a_{35} < 166.666666666667;$
 $a_{36} < 162;$
 $a_{37} < 48.3333333333333;$
 $a_{38} < 51.6666666666667;$
 $a_{39} < 11.6666666666667;$
 $a_{40} < 13.3333333333333;$
 $a_{41} < 13.6666666666667;$
 $a_{42} < 193.666666666667;$
 $a_{43} < 11.6666666666667;$
 $a_{44} < 362.666666666667;$
 $a_{45} < 15;$
 $a_{46} < 77.6666666666668;$
 $a_{47} < 11.6666666666667;$
 $a_{48} < 15;$
 $a_{49} < 116.666666666667;$
 $a_{50} < 67;$
 $37 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} +$
 $x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35}$
 $+ x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} + x_{50};$
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19}$
 $+ x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36}$
 $+ x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} + x_{50} < 50;$
 $13 \leq x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31};$

```

x18+x19+x20+x21+x22+x23+x24+x25+x26+x27+x28+x29+x30+x31<=14;
11<=x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17;
x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17<=17;
16<=x32+x33+x34+x35+x36+x37+x38+x39+x40+x41+x42+x43+x44+x45+x46+x47
+x48+x49+x50;
x32+x33+x34+x35+x36+x37+x38+x39+x40+x41+x42+x43+x44+x45+x46+x47+x48
+x49+x50<=19;
@bin(x1);@bin(x2);@bin(x3);@bin(x4);@bin(x5);@bin(x6);@bin(x7);@bin(x8);@b
in(x9);@bin(x10);@bin(x11);@bin(x12);@bin(x13);@bin(x13);@bin(x14);@bin(x1
5);@bin(x16);@bin(x17);@bin(x18);@bin(x19);@bin(x20);@bin(x21);@bin(x22);@
bin(x23);@bin(x24);@bin(x25);@bin(x26);@bin(x27);@bin(x28);@bin(x29);@bin(
x30);@bin(x31);@bin(x32);@bin(x33);@bin(x34);@bin(x35);@bin(x36);@bin(x37)
;@bin(x38);@bin(x39);@bin(x40);@bin(x41);@bin(x42);@bin(x43);@bin(x44);@bi
n(x45);@bin(x46);@bin(x47);@bin(x48);@bin(x49);@bin(x50);
end

```