可逼近三角范畴学习笔记

陈晓虎

目录

1 预备知识

声明: 本文中的**小直和**指的是以集合为指标的直和, I 在不加说明的情况下均表示集合, $\mathcal{T}$ 在不加说明的情况下均表示三角范畴, Σ 表示三角范畴中的平移函子, $X \in \mathcal{T}$ 表示 X 是 $\mathcal{T}$ 中的对象; 本文所出现的记号来源于 [N1] 中的 **Reminder 0.8**.

1.1 紧对象与同伦余极限

定义 1.1. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, 若存在 $G \in \mathcal{T}$ 使得对任意一族 $\mathcal{T}$ 中的对象 $\{X_i\}_{i \in I}$, 典范映射:

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{Hom}(G, X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \bigoplus_{i \in I} X_i)$$

均为同构, 则称 G 为紧对象 (compact object). 此外, 我们将 $\mathcal{T}$ 中紧对象构成的类记为 $\mathcal{T}^c$.

引理 1.1. *设 $G \in \mathcal{T}$ 是紧对象, $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ 是一族对象, $f : G \to \bigoplus_{i \in I} X_i$ 是 $\mathcal{T}$ 中的态射, 则存在 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I$ 使得 f 有分解:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & \bigoplus_{i \in I} X_i \\ & \bigoplus_{k=1}^{n} X_{i_k} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $i:\bigoplus_{k=1}^{n}X_{i_k}\to\bigoplus_{i\in I}X_i$ 是由结构态射 $e_{i_k}:X_{i_k}\to\bigoplus_{i\in I}X_i$ 诱导的典范态射.

证明. 由紧对象的定义可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\bigoplus_{i\in I}X_i)\cong\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,X_i)$, 故由 Abel 群范畴中直和的定义可知存在态射 $\varphi:\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,X_{i_k})\to\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,X_i)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\bigoplus_{i\in I}X_i)$, 使得 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\bigoplus_{i\in I}X_i)$ 可以在 $\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,X_{i_k})$ 中找到原像 σ. 再注意到下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\bigoplus_{k=1}^{n}X_{i_k}) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\bigoplus_{i\in I}X_i) \\
\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,X_{i_k}) \arrow[u, "\mathrm{can}"] \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

则立得结论. □

定义 1.2. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $G\in\mathcal{T}$ 为紧对象. 若 G 满足条件: 若 $\mathrm{Hom}(G,\Sigma^iX)=0$ 对 $\forall i\in\mathbb{Z}$ 均成立, 则 $X\cong 0$. 则称 G 为紧生成子 (compact generator).

引理 1.2. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, G 为紧生成子, $f:X\longrightarrow Y$ 为三角范畴中的态射. 若对 $\forall i\in\mathbb{Z}$, 都有 $\mathrm{Hom}(\Sigma^iG,f)$ 是同构, 则 f 是同构.

证明. 只需注意到在该引理的条件下, $\forall i\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}(\Sigma^iG,\mathrm{cone}(f))=0$. □

引理 1.3. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, G 为紧生成子, 则有:

(1) $\mathcal{T}$ 中包含 G 的对任意小直和封闭的三角子范畴只能是 $\mathcal{T}$ 本身.

(2) $\mathcal{T}^c=\langle G\rangle$.

证明. (1): 可参考 [BS] 引理 2.2.1.
(2): 可参考 [BYZZ] 命题 3.1. □

注释: 由上述引理可知, 若 G 和 H 都是 $\mathcal{T}$ 的紧生成子, 则有 $\langle G\rangle=\langle H\rangle$.

定义 1.3. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, 令:

$$X_0\xrightarrow{f_0}X_1\xrightarrow{f_1}X_2\xrightarrow{f_2}\cdots$$

为 $\mathcal{T}$ 中的序列, 于是

$$X_i\xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\-f_i\end{pmatrix}}X_i\oplus X_{i+1}\hookrightarrow\bigoplus_{i\in I}X_i$$

可以诱导典范映射 $\bigoplus_{i\in I}X_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}X_i$, 我们将其在三角范畴中的映射锥称为序列的同伦余极限 (Homotopy colimit), 记为 $\mathrm{Hocolim}(X_i)$, 即

$$\bigoplus_{i\in I}X_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}X_i\xrightarrow{p}\mathrm{Hocolim}(X_i)\longrightarrow\Sigma\bigoplus_{i\in I}X_i$$

注释: 我们将 X_k 到 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ 的结构映射记为 i_k, 则注意到 X_k 到 $\mathrm{Hocolim}(X_i)$ 有典范映射

$$p \circ i_k : X_k \longrightarrow \mathrm{Hocolim}(X_i)$$

此外还有交换图:

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[rr, "f_k"] \arrow[dr, "pi_k"'] & & X_{k+1} \arrow[dl, "pi_{k+1}"] \\ & \mathrm{Hocolim}(X_i) & \end{tikzcd}$$

证明交换性只需注意到如下复合

$$X_k \xrightarrow{i_k} \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \xrightarrow{p} \mathrm{Hocolim}(X_i)$$

为零, 且由定义可知上述复合等于如下复合:

$$X_k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -f_k \end{pmatrix}} X_k \oplus X_{k+1} \xrightarrow{(i_k, i_{k+1})} \bigoplus_{i \in I} X_i \xrightarrow{p} \mathrm{Hocolim}(X_i)$$

直接计算即可得交换性.

引理 1.4. *设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $G \in \mathcal{T}$ 为紧对象, 则有典范同构:*

$$\operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}(G, X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Hocolim}(X_i))$$

证明. 可参考 [N6] 引理 1.5. □

引理 1.5. *设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧对象, 若存在 $\mathcal{T}$ 中的序列*

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots$$

以及态射 $h_i : X_i \to X$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & & X_{i+1} \arrow[dl, "h_{i+1}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

则存在态射 $g : \mathrm{Hocolim}(X_i) \to X$, 并有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \mathrm{Hocolim}(X_i)) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, X) \\ \operatorname{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, X_i) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

其中 α 和 β 均为余极限诱导的典范态射.

证明. 记 $s : \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \to X$ 为 $g_i : X_i \to X$ 诱导的态射, 然后考虑直接计算复合

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \xrightarrow{s} X$$

可知结果为 0, 从而可以诱导出 $g : \mathrm{Hocolim}(X_i) \to X$. 交换性按常规套路验证即可. □

注释: 我们需要提前指出, 下面的引理在一般的三角范畴上也成立, 但我们觉得下面的证明可以体现操作有紧生成子的三角范畴的便利性.

引理 1.6. *设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, G 为紧生成子, 考虑 $\mathcal{T}$ 中的序列:*

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

(1) *若当 i 充分大时 $X_i \cong 0$, 则 $\mathrm{Hocolim}(X_i) \cong 0$.*

(2) *若从某个 k 开始均有 $f_k : X_k \longrightarrow X_{k+1}$ 是同构, 则则 $\mathrm{Hocolim}(X_i) \cong X_k$.*

证明. 注意到 $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\Sigma^i G$ 均为紧对象.
(1): 由引理1.4可知 $\mathrm{Hom}(\Sigma^i G, \mathrm{Hocolim}(X_i)) \cong \operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}(\Sigma^i G, X_i) = 0$, 故由紧生成子的定义立得结论.
(2): 此时有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Sigma^i G, X_k) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}(\Sigma^i G, pi_k)"] \arrow[dr, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}(\Sigma^i G, \mathrm{Hocolim}(X_i)) \\
& \operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}(\Sigma^i G, X_i) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

于是由引理1.2立得结论. □

1.2 t-结构与粘合

定义 1.4. 令 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 为 $\mathcal{T}$ 上的一对满子范畴, 若其满足如下条件:

- $\Sigma\mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\Sigma^{-1}\mathcal{T}^{\geqslant 0} \subseteq \mathcal{T}^{\geqslant 0}$.
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \Sigma^{-1}\mathcal{T}^{\geqslant 0})$.
- $\forall X \in \mathcal{T}$, 都存在分解:

$$X^{\leqslant 0} \longrightarrow X \longrightarrow X^{\geqslant 1} \longrightarrow \Sigma Y$$

  其中 $X^{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $X^{\geqslant 1} \in \Sigma^{-1}\mathcal{T}^{\geqslant 0}$.

则称 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 为 $\mathcal{T}$ 上的t-结构, 并称 $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ 为过道 (aisle), $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 为余过道 (coaisle)

注释: 我们记 $\mathcal{T}^{\leqslant -n} := \Sigma^n\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant -n} := \Sigma^n\mathcal{T}^{\geqslant 0}$. 注意到 $(\mathcal{T}^{\leqslant -n}, \mathcal{T}^{\geqslant -n})$ 也是 $\mathcal{T}$ 上的 t-结构. 此外,t-结构定义中的第三条的分解可以被推出是典范的, 即若还有 $Y \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ 和 $Z \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$ 使得 $Y \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma Y$ 是好三角, 则存在交换图:

$$\begin{tikzcd}
X^{\leqslant 0} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{\geqslant 1} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \Sigma X^{\leqslant 0} \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

其中 f 和 g 均是同构且均唯一.

引理 1.7. 令 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, 则 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp} = \mathcal{T}^{\geqslant 1}, {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\geqslant 1}) = \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. 这里的

$$(\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp} = \{Y \in \mathcal{T} \mid \forall X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathrm{Hom}(X, Y) = 0\}$$

${}^{\perp}(\mathcal{T}^{\geqslant 1})$ 的含义是类似的.

证明. 只证前一种情况, 另一个是类似的. 首先由定可知义 $\mathcal{T}^{\geqslant 1} \subseteq (\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp}$ 是显然的. 再任取 $Y \in (\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp}$, 则有典范分解

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] & Y^{\geqslant 1} \arrow[r] & \Sigma Y^{\leqslant 0} \arrow[r, "0"] \arrow[l, bend left, "0"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

于是有 $Y \cong Y^{\geqslant 1}$. □

引理 1.8. 令 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, 则:

(1) 嵌入函子 $i : \mathcal{T}^{\leqslant 0} \longrightarrow \mathcal{T}$ 有右伴随 $(-)^{\leqslant 0} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\leqslant 0}, X \mapsto X^{\leqslant 0}$.

(2) 嵌入函子 $j : \mathcal{T}^{\geqslant 0} \longrightarrow \mathcal{T}$ 有左伴随 $(-)^{\geqslant 0} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\geqslant 0}, Y \mapsto Y^{\geqslant 0}$.

证明. 可参考 [AI] Chapter I 命题 2.3. □

引理 1.9. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构. $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的小直和封闭当且仅当 $(-)^{\leqslant -1} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\leqslant -1}$ 保持小直和.

注释: $\mathcal{T}^{\leqslant n}$ 对小直和封闭是显然的, 只需注意到 $\mathcal{T}^{\leqslant n} = {}^{\perp}(\mathcal{T}^{\geqslant n+1})$.

证明. 可参考 [AI] Chapter III 引理 1.2.
$\Leftarrow$: 此时考虑 $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 中的一族对象 $\{Y_i\}_{i\in I}$, 充分考虑引理1.8, 则有:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}^{\leqslant -1}, \bigoplus_{i\in I} Y_i) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leqslant -1}}(\mathcal{T}^{\leqslant -1}, (\bigoplus_{i\in I} Y_i)^{\leqslant -1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leqslant -1}}(\mathcal{T}^{\leqslant -1}, \bigoplus_{i\in I} (Y_i)^{\leqslant -1})$$

因为 $Y_i \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, 所以 $Y_i^{\leqslant -1} = 0$, 此即说明了 $\bigoplus_{i\in I} Y_i \in (\mathcal{T}^{\leqslant -1})^{\perp} = \mathcal{T}^{\geqslant 0}$.
$\Rightarrow$: 考虑 $\mathcal{T}$ 中的一族对象 $\{X_j\}_{j\in J}$, 将分解 $X_j^{\leqslant -1} \xrightarrow{f_j} X_j \to X_j^{\geqslant 0} \xrightarrow{+1}$ 直和起来, 得到好三角

$$\bigoplus_{j\in J} (X_j)^{\leqslant -1} \xrightarrow{\oplus f_i} \bigoplus_{j\in J} X_j \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} (X_j)^{\geqslant 0} \xrightarrow{+1}$$

由于 $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 对小直和封闭, 故 $\bigoplus_{j\in J}(X_j)^{\geqslant 0} \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, 从而上述分解即为定义1.4中第三条的分解, 即 $\bigoplus_{j\in J}(X_j)^{\leqslant -1} \cong (\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1}$, 该同构的典范性只需验证 $\bigoplus_{j\in J}(X_j)^{\leqslant -1}$ 到 $(\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1}$ 的典范映射可以使下图交换即可:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\in J}(X_j)^{\leqslant -1} \arrow[r, "\oplus f_i"] \arrow[d] & \bigoplus_{j\in J} X_j \arrow[d, equal] \\
(\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1} \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J} X_j
\end{tikzcd}$$

按定义, $X_j^{\leqslant -1} \hookrightarrow \bigoplus_{j\in J}(X_j)^{\leqslant -1} \xrightarrow{\oplus f_i} \bigoplus_{j\in J} X_j$ 的复合结果为 $X_j^{\leqslant -1} \xrightarrow{f_j} X_j \hookrightarrow \bigoplus_{j\in J} X_j$, 另一方面 $X_j^{\leqslant -1} \hookrightarrow \bigoplus_{j\in J}(X_j)^{\leqslant -1} \to (\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1} \to \bigoplus_{j\in J} X_j$ 的复合结果为 $X_j^{\leqslant -1} \to (\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1} \to \bigoplus_{j\in J} X_j$ 最后再注意到 $X_j^{\leqslant -1} \to (\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1}$ 的构造为:

$$\begin{tikzcd}
X_j^{\leqslant -1} \arrow[r, "f_j"] \arrow[d] & X_j \arrow[d, hook] \\
(\bigoplus_{j\in J} X_j)^{\leqslant -1} \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J} X_j
\end{tikzcd}$$

即可完成证明. □

注释: 注意到当 $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的小直和封闭时, $\mathcal{T}^{\geqslant n}$ 自动对 $\mathcal{T}$ 中的小直和封闭, 其中 n 为任意整数. 这是因为任取 $\mathcal{T}^{\geqslant n}$ 中的一族对象 $\{X_i\}_{i\in I}$, 由 t-结构的定义知 $\Sigma^n X_i \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, 从而 $\bigoplus_{i\in I} \Sigma^n X_i \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$. 又因为 Σ 是等价函子, 故自动与直和交换, 从而 $\bigoplus_{i\in I} X_i \cong \Sigma^{-n}(\bigoplus_{i\in I} \Sigma^n X_i) \in \mathcal{T}^{\geqslant n}$.

推论. *在引理1.9的情形下, $i : \mathcal{T}^{\leqslant -1} \longrightarrow \mathcal{T}$ 和 $(-)^{\geqslant 0} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 都能保持紧对象.*

证明. 先证 $i : \mathcal{T}^{\leqslant -1} \longrightarrow \mathcal{T}$ 保持紧对象. 设 $X \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$ 是紧对象,$\{C_k\}_{k\in K}$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一族对象, 充分考虑引理1.8, 则有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(i(X), \bigoplus_{k\in K} Y_k) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leqslant -1}}(X, (\bigoplus_{k\in K} Y_k)^{\leqslant -1}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leqslant -1}}(X, \bigoplus_{k\in K}(Y_i)^{\leqslant -1}) \\
&\cong \bigoplus_{k\in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leqslant -1}}(X, Y_i^{\leqslant -1}) \\
&\cong \bigoplus_{k\in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\leqslant -1}}(i(X), Y_i)
\end{aligned}$$

此即 $i(X)$ 也是紧对象; $(-)^{\geqslant 0}$ 保持紧对象只需注意到此时嵌入映射 $\mathcal{T}^{\geqslant 0} \longrightarrow \mathcal{T}$ 保持直和, 然后就能类似地证明. □

引理 1.10. *$\mathcal{A} := \mathcal{T}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 是 Abel 范畴. 我们称其为 t-结构的heart.*

证明. 可参考 [NP] 命题 10.1.11. 为了方便读者我们描述核与余核的构造. 任取 $\mathcal{A} \ni f : X \longrightarrow Y$, 则有:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma^{-1}Z \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z \arrow[dr] & \\ \operatorname{Ker} f := (\Sigma^{-1}Z)^{\leqslant 0} \arrow[ur] & & & & & \operatorname{Coker} f := Z^{\geqslant 0} \end{tikzcd}$$

□

引理 1.11. $\mathcal{H} := [(-)^{\leqslant 0}]^{\geqslant 0} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是上同调函子.

证明. 可参考 [NP] 命题 10.1.12. □

声明: 我们令 $\mathcal{H}^k(-) := \mathcal{H}(\Sigma^k(-))$.

定义 1.5. 令 $(\mathcal{T}_1^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_1^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_2^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_2^{\geqslant 0})$ 是 $\mathcal{T}$ 上的两个 t-结构, 若存在整数 $A > 0$ 使得

$$\mathcal{T}_1^{\leqslant -A} \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_1^{\leqslant A}$$

则称这两个 t-结构等价.

注释: 不难看出 $\mathcal{T}_1^{\leqslant -A} \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_1^{\leqslant A} \Longleftrightarrow \mathcal{T}_1^{\geqslant -A} \supseteq \mathcal{T}_2^{\geqslant 0} \supseteq \mathcal{T}_1^{\geqslant A}$ 和 $\mathcal{T}_1^{\leqslant -A} \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_1^{\leqslant A} \Longleftrightarrow \mathcal{T}_2^{\leqslant -A} \subseteq \mathcal{T}_1^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant A}$

定义 1.6. 令 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, 定义:

$$\mathcal{T}^- := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leqslant m} \qquad \mathcal{T}^+ := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\geqslant -m} \qquad \mathcal{T}^b := \mathcal{T}^- \cap \mathcal{T}^+$$

注释: 注意到 $\mathcal{T}^-$、$\mathcal{T}^+$ 和 $\mathcal{T}^b$ 都是 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴.

引理 1.12. 令 $(\mathcal{T}_1^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_1^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_2^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_2^{\geqslant 0})$ 是两个等价的 t-结构, 则:$\mathcal{T}_1^- = \mathcal{T}_2^-$, $\mathcal{T}_1^+ = \mathcal{T}_2^+$, $\mathcal{T}_1^b = \mathcal{T}_2^b$.

注释: 反之不对, 可参考 [BCRPZ] 命题 5.8

引理 1.13. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构. 若 $G \in \mathcal{T}^-(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^b)$, 则 $\mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{T}^-(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^b)$.

证明. 注意到三个子范畴均为厚子范畴以及 $\mathcal{T}^c = \langle G \rangle$, 即可推出结论. □

定义 1.7. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, 定义

$$\mathcal{T}_c^- := \{F \in \mathcal{T} \mid \forall m > 0, \exists E \longrightarrow F \longrightarrow D \longrightarrow \Sigma E, \text{其中} E \in \mathcal{T}^c, D \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}\}$$

此即 $\mathcal{T}_c^- = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^+} (\mathcal{T}^c * \mathcal{T}^{\leqslant -m})$. 再定义 $\mathcal{T}_c^b := \mathcal{T}_c^- \cap \mathcal{T}^b$.

注释: 不难看出 $\mathcal{T}_c^-$ 的定义依赖 t-结构的选取, 不过等价的 t-结构定义相同的 $\mathcal{T}_c^-$. 此外 $\mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{T}_c^-$.

引理 1.14. 若 $\mathcal{T}$ 有紧生成子 G, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构且 $G \in \mathcal{T}^-$, 则 $\mathcal{T}_c^- \subseteq \mathcal{T}^-$.

证明. 由引理1.13可知 $\mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{T}^-$, 于是

$$\mathcal{T}_c^- \subseteq \mathcal{T}^c * \mathcal{T}^{\leqslant -m} \subseteq \mathcal{T}^- * \mathcal{T}^- = \mathcal{T}^-$$

□

定义 1.8. 下图为 3 个三角范畴和 6 个三角函子:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_F \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{T} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{T}_U \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

若满足:

- $(i^*, i_*), (i_*, i^!), (j_!, j^*), (j^*, j_*)$ 均为伴随对.
- $j^* i_* = 0$.
- $i_*, j_!, j_*$ 都是满忠实的函子.
- 存在自然变换 $d : i_* i^* \longrightarrow \Sigma j_! j^*$ 和 $d' : j_* j^* \longrightarrow \Sigma i_* i^!$, 使得单位和余单位对 $\forall X \in \mathcal{T}$ 都诱导典范的分解:

$$j_! j^* X \longrightarrow X \longrightarrow i_* i^* X \xrightarrow{d_X} \Sigma j_! j^* X$$

$$i_* i^! X \longrightarrow X \longrightarrow j_* j^* X \xrightarrow{d'_X} \Sigma i_* i^! X$$

  则称其为粘合 (recollement)

注释: i^* 和 $j_!$ 的右伴随函子均保直和, 故由引理1.9的推论的证明方法可知 i^* 和 $j_!$ 都保持紧对象. 此外由伴随函子的性质可知 $i^* j_! = 0$, $i^! j_* = 0$.

引理 1.15. 令 $(\mathcal{T}_F^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_F^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_U^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_U^{\geqslant 0})$ 分别是 $\mathcal{T}_F$ 和 $\mathcal{T}_U$ 上的 t-结构, 则我们可以得到 $\mathcal{T}$ 上的 t-结构:

$$\mathcal{T}^{\leqslant 0} := \{X \in \mathcal{T} \mid i^* X \in \mathcal{T}_F^{\leqslant 0},\ j^* X \in \mathcal{T}_U^{\leqslant 0}\}$$
$$\mathcal{T}^{\geqslant 0} := \{X \in \mathcal{T} \mid i^! X \in \mathcal{T}_F^{\geqslant 0},\ j^* X \in \mathcal{T}_U^{\geqslant 0}\}$$

证明. 由于三角函子和平移函子可交换, 故 $\Sigma \mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\Sigma^{-1} \mathcal{T}^{\geqslant 0} \subseteq \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 是显然的.
不难看出

$$\mathcal{T}^{\geqslant 1} := \{X \in \mathcal{T} \mid i^! X \in \mathcal{T}_F^{\geqslant 1},\ j^* X \in \mathcal{T}_U^{\geqslant 1}\}$$

取 $X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$, 于是由粘合的定义得好三角:

$$j_! j^* X \longrightarrow X \longrightarrow i_* i^* X \longrightarrow \Sigma j_! j^* X$$

注意到 $\mathrm{Hom}(i_* i^* X, Y) \cong \mathrm{Hom}(i^* X, i^! Y) = 0$, $\mathrm{Hom}(j_! j^* X, Y) \cong \mathrm{Hom}(j^* X, j^* Y) = 0$, 从而 $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 1}) = 0$ 成立.

最后任取 $X \in \mathcal{T}$, 首先有态射 $g : j^*X \longrightarrow (j^*X)^{\geqslant 1}$, 再由伴随性得 $h : X \longrightarrow j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}]$, 将其补成好三角:

$$Y \longrightarrow X \xrightarrow{h} j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \longrightarrow \Sigma Y$$

将 j^* 作用在上面得到好三角

$$j^*Y \longrightarrow j^*X \xrightarrow{j^*(h)} j^*j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \longrightarrow \Sigma j_*Y$$

考虑 $h : X \longrightarrow j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}]$ 以及伴随对 (j^*, j_*) 的定义, 得交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{counit} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(j^*j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}], (j^*X)^{\geqslant 1}) \arrow[r] \arrow[d, "(j^*h)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}], j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}]) \ni \mathrm{Id} \arrow[d, "h^*"] \\
g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(j^*X, (j^*X)^{\geqslant 1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}])
\end{tikzcd}$$

由上面的交换图可得:

$$\begin{tikzcd}
j^*X \arrow[r, "j^*h"] \arrow[dr, "g"'] & j^*j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \arrow[d, "\mathrm{counit}"] \\
& (j^*X)^{\geqslant 1}
\end{tikzcd}$$

进而有:

$$\begin{tikzcd}
j^*Y \arrow[r] & j^*X \arrow[r, "j^*h"] \arrow[d, equal] & j^*j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{counit}"] & \Sigma j_*Y \\
(j^*X)^{\leqslant 0} \arrow[r] & j^*X \arrow[r, "g"'] & (j^*X)^{\geqslant 1} \arrow[r] & \Sigma(j^*X)^{\leqslant 0}
\end{tikzcd}$$

因为 j_* 是满忠实的, 所以 $j^*j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \cong (j^*X)^{\geqslant 1}$, 从而 $j^*Y \cong (j^*X)^{\leqslant 0} \in \mathcal{T}_u^{\leqslant 0}$. 对 Y 进行相似的处理, 可以得到好三角:

$$A \longrightarrow Y \longrightarrow i_*[(i^*Y)^{\geqslant 1}] \longrightarrow \Sigma A$$

将 j^* 作用在上面, 可得 $j^*A \cong j^*Y$, 即 $j^*A \in \mathcal{T}_U^{\leqslant 0}$. 再将 i^* 作用在上面并注意到 i_* 是满忠实的函子, 可以类似地推出 $i^*A \in \mathcal{T}_F^{\leqslant 0}$.

使用八面体公理即可得到下图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & i_*[(i^*Y)^{\geqslant 1}] \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \\
& j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \arrow[r, equal] \arrow[d] & j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \arrow[d] & \\
& \Sigma Y \arrow[r] & \Sigma i_*[(i^*Y)^{\geqslant 1}] &
\end{tikzcd}$$

将 $i^!$ 和 j^* 分别作用在:

$$i_*[(i^*Y)^{\geqslant 1}] \longrightarrow B \longrightarrow j_*[(j^*X)^{\geqslant 1}] \xrightarrow{+1}$$

即可证明 $B \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. □

定义 1.9. 令 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 均为带有 t-结构的三角范畴, $F : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ 是三角函子, 若:

(1) $F(\mathcal{T}_1^{\leqslant 0}) \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant 0}$, 则称 F 为右 t-正合 (right t-exact).

(2) $F(\mathcal{T}_1^{\geqslant 0}) \subseteq \mathcal{T}_2^{\geqslant 0}$, 则称 F 为左 t-正合 (left t-exact).

(3) 若 F 既右 t-正合又左 t-正合, 则称其t-正合 (t-exact).

注释: 在引理1.15的情形下, i^* 和 $j_!$ 均右 t-正合, i_* 和 j^* 均 t-正合, $i^!$ 和 j_* 均左 t-正合.

引理 1.16. 考虑定义1.8中的粘合图, 若 $(\mathcal{T}_F^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_F^{\geqslant 0})$, $(\mathcal{T}_F'^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_F'^{\geqslant 0})$ 是 $\mathcal{T}_F$ 上等价的 t-结构, $(\mathcal{T}_U^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_U^{\geqslant 0})$, $(\mathcal{T}_U'^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_U'^{\geqslant 0})$ 是 $\mathcal{T}_U$ 上等价的 t-结构, 则 $(\mathcal{T}_F^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_F^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_U^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_U^{\geqslant 0})$ 诱导出的 t-结构与 $(\mathcal{T}_F'^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_F'^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_U'^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_U'^{\geqslant 0})$ 诱导的 t 结构是等价的.

引理 1.17. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ 为本质小的满子范畴, 则对 $\forall X \in \mathcal{T}$, $\exists P \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$ 以及非零态射 $h : Q_X \to X$ 使得 $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, h) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Q_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X)$ 是满射.

证明. 在 $\mathcal{A}$ 的对象类上定义等价关系: $X \sim Y$ 当且仅当 $X \cong Y$. 将 X 的等价类记为 $[X]$, 并定义 $\mathcal{A}' := \{[X] \mid X \in \mathcal{A}\}$. 由于 $\mathcal{A}$ 本质小, 故 $\mathcal{A}'$ 是集合. 任取 $X \in \mathcal{T}$, 记 $I_X := \{(P, f) \mid P \in \mathcal{A}', 0 \neq f : P \to X\}$, 于是有 $Q_X := \bigoplus_{P \in I_X} P$, 以及由 $f : P \to X$ 诱导的非零态射 $Q_X \longrightarrow X$. 显然 $Q_X \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$ 以及 $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, h) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Q_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X)$ 是满射. □

引理 1.18. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧对象, 记 $\mathcal{S} := \overline{\langle G \rangle}^{(-\infty,0]}$, 则 $(\mathcal{S}, \Sigma[(\mathcal{S})^{\perp}])$ 是 t-结构.

注释: 下面的证明源于 [KN] 定理 12.1, 需指出 [KN] 证明的情形更广, 但在这份笔记中为了方便起见, 我们只选取了一个紧对象进行证明.

证明. 我们只需验证 t-结构定义中的第三条, 前两条是显然满足的.
任取 $M \in \mathcal{T}$, 将引理1.17中的 $\mathcal{A}$ 取成 $G(-\infty, 0]$ 后可知存在 $f_0 : S_0 \longrightarrow M$, 其中 $S_0 \in \mathcal{S}$. 将其延申成好三角:

$$S_0 \xrightarrow{f_0} M \xrightarrow{g_0} Y_0 \longrightarrow \Sigma S_0$$

继续考虑 $S_1 \longrightarrow Y_0$ 以及八面体公理, 得:

$$\begin{tikzcd}
 & & S_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & S_1 \arrow[d] \\
S_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, equal] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma S_0 \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"] & M \arrow[r, "g_1"] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X_1 \arrow[d] \\
 & & \Sigma S_1 \arrow[r, equal] & \Sigma S_1
\end{tikzcd}$$

容易看出 $X_1 \in \mathcal{S}$. 将上述过程不断进行下去, 即可得到下图:

$$\begin{tikzcd}
X_0 := S_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, equal] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X_0 \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X_1 \arrow[d] \\
X_2 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X_2 \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

接下来考虑 3×3 引理, 即得:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{\infty} M \arrow[r] \arrow[d, "1-\mathrm{shift}"'] & \bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i \arrow[r] \arrow[d, "1-\mathrm{shift}"] & \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma X_i \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma M \arrow[d] \\
\bigoplus_{i=1}^{\infty} M \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{\infty} Y_i \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma X_i \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Sigma M \arrow[d] \\
M \arrow[r] \arrow[d, "+1"'] & \mathrm{Hocolim}(Y_i) \arrow[r] \arrow[d, "+1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "+1"'] & \Sigma M \arrow[d, "+1"'] \\
{} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

很显然 $\Sigma^{-1}X \in \mathcal{S}$. 由引理1.4可知, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n G, \mathrm{Hocolim}(Y_i)) \cong \mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n G, Y_i)$$

而根据第一段最后的叙述, 可知

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n G, Y_i) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n G, Y_{i+1})$$

从而 $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n G, Y_i) = 0$, 此即 $G(-\infty, 0] \in {}^{\perp}[\mathrm{Hocolim}(Y_i)]$. 注意到 ${}^{\perp}[\mathrm{Hocolim}(Y_i)]$ 还对扩张和小直和封闭, 从而 $\mathcal{S} \in {}^{\perp}[\mathrm{Hocolim}(Y_i)]$, 也就证明了 $\mathrm{Hocolim}(Y_i) \in \mathcal{S}^{\perp}$. □

注释: 注意到 $\mathcal{S}^{\perp} = G(-\infty, 0]^{\perp} = \mathcal{T}_G^{\geqslant 1}$, 故 $\mathcal{S}^{\perp}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的小直和封闭. 下面给出引理1.18的一般情形的表述和证明, 该部分来源于 [CNSH] 定理 2.3.3.

命题 1.19. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}^c$ 是本质小的满子范畴并有 $\Sigma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, 则 $(\mathrm{Coprod}(\mathcal{A}), \Sigma[\mathrm{Coprod}(\mathcal{A})^{\perp}])$ 是 $\mathcal{T}$ 上的 t-结构且 $\mathrm{Coprod}(\mathcal{A})^{\perp}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的小直和封闭.

证明. 前两条显然成立, 只需验证 t-结构定义中的第三条. 任取 $X \in \mathcal{T}$, 我们的证明思路是构造序列:

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \cdots$$

其中 $X_i \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$. 以及态射 $h_i : X_i \to X$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & & X_{i+1} \arrow[dl, "h_{i+1}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

这样我们就有了态射 $h : \mathrm{Hocolim}(X_i) \to X$, 将其在 $\mathcal{T}$ 中延申成好三角即可完成证明.
第一步我们构造上述序列和交换图. 将引理1.17中的 $\mathcal{A}$ 就考虑成本命题条件中的 $\mathcal{A}$, 可知存在 $X_1 \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$ 以及 $h_1 : X_1 \to X$ 使得 $\forall A \in \mathcal{A}$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, h_1)$ 是满射. 采用归纳法, 现在假定 $h_n : X_n \to X$ 已经被构造且 $X_n \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$, 然后我们来构造 $h_{n+1} : X_{n+1} \to X$: 将 $h_n : X_n \to X$ 延申成 $\mathcal{T}$ 中的好三角 $Y_n \xrightarrow{\alpha_n} X_n \xrightarrow{h_n} X \xrightarrow{+1}$, 将引理1.17中的 $\mathcal{A}$ 就考虑成本命题条件中的 $\Sigma^{-1}\mathcal{A}$, 则可得 $\beta_n : Z_n \to Y_n$, 其中 $Z_n \in \Sigma^{-1}\mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$. 记 $\gamma_n = \alpha_n \circ \beta_n : Z_n \to X_n$, 并将其延申成 $\mathcal{T}$ 中的好三角, 得 $Z_n \xrightarrow{\gamma_n} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \to \Sigma Z_n$, 因为 $X_n, \Sigma Z_n \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$, 所以 $X_{n+1} \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})$. 然后注意到 $h_n\gamma_n = (h_n\alpha_n)\beta_n = 0$, 故存在 $h_{n+1} : X_{n+1} \to X$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "h_n"'] & & X_{n+1} \arrow[dl, "h_{n+1}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

于是由归纳法可知我们成功构造一开始想要构造的序列和交换图, 进而有了 $h : \mathrm{Hocolim}(X_i) \to X$.
第二步, 我们断言当 $Y \in \Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 时, 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X_n)$ 满足 $h_n f = 0$, 则必有 $f_n f = 0$. 看图:

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "0"] & \\ Y_n \arrow[r] & X_n \arrow[r, "h_n"'] & X \arrow[r, "+1"] & {} \end{tikzcd}$$

于是 f 可以经过 Y_n 分解, 再由 $Z_n \to Y_n$ 的构造以及 Y 的取法, 得 f 可经过 Z_n 分解, 从而显然有 $f_n f = 0$.
第三步, 我们断言当 $Y \in \Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 时, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, h) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, \mathrm{Hocolim}(X_i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X)$ 是单射. 由引理1.5可知我们只需证典范映射 $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X)$ 是单射. 回忆 Abel 群范畴中的余极限的具体的构造公式, 以及第二步的断言, 即可完成本断言的证明.
第四步, 我们断言当 $Y \in \mathcal{A}$ 时, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, h) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, \mathrm{Hocolim}(X_i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X)$ 是满射, 进而由 $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, h)$ 是同构. 由 $X_1 \to X$ 的构造可知, 任意 $k : Y \to X$ 都可经过 X_1 分解, 所以可以直接按右消去律验证典范映射 $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X)$ 是满射.
最后记 $A := \mathrm{Hocolim}(X_i)$, 并将 $h : A \to X$ 延申成 $\mathcal{T}$ 中的好三角:$A \to X \to C \to \Sigma A$. 任取 $G \in \mathcal{A}$, 并将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, -)$ 作用在 $A \to X \to C \to \Sigma A$ 上, 得正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, A) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma A) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma X)$$

由第四步的断言可知 α 是同构, 由第三步的断言可知 β 是单射, 从而 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, C) = 0$. 由 G 取法的任意性可知 $C \in \mathcal{A}^{\perp} = \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})^{\perp}$. 此外由 $\mathcal{A}^{\perp} = \mathrm{Coprod}(\mathcal{A})^{\perp}$ 和 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}^c$ 可知 $\mathrm{Coprod}(\mathcal{A})^{\perp}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的直和封闭. □

定义 1.10. 若 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, 则我们将按引理1.18的方法构造的 t-结构记为 $(\mathcal{T}_G^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_G^{\geqslant 0})$, 并将与它等价的 t-结构构成的等价类称为 preferred 等价类.

引理 1.20. 设 G 和 H 均为 $\mathcal{T}$ 的紧生成子, 则 $(\mathcal{T}_G^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_G^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_H^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_H^{\geqslant 0})$ 等价.

证明. 由引理1.3后的注释可知, $\langle G\rangle = \langle H\rangle$, 于是存在正整数 A 使得 $G \in \langle H\rangle_A^{[-A,A]}$, $H \in \langle G\rangle_A^{[-A,A]}$, 再按定义验证即可. □

定义 1.11. 令 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, 若 $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leqslant n} = 0$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\geqslant n} = 0$, 则称该 t-结构是非退化的 (nondegenerate), 反之则称为退化的.

注释: 很显然等价的 t-结构要么都退化, 要么都非退化.

引理 1.21. 若 $\mathcal{T}$ 有紧生成子 G, 且当 n 充分大时有 $\mathrm{Hom}(\Sigma^{-n}G, G) = 0$, 则 $\mathcal{T}$ 中 preferred 等价类中的 t-结构均为非退化的.

证明. 只需证明 $(\mathcal{T}_G^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_G^{\geqslant 0})$ 非退化. 任取 $0 \neq X \in \mathcal{T}$, 由紧生成子的定义可知有非零态射 $\Sigma^l G \longrightarrow X$, 其中 $l \in \mathbb{Z}$, 这就说明了 $X \notin (\mathcal{T}_G^{\leqslant -l})^{\perp} = \mathcal{T}_G^{\geqslant -l+1}$; 再由条件可知存在 $C > 0$ 使得 $\mathrm{Hom}(G, \mathcal{T}_G^{\leqslant -C}) = 0$, 从而 $\mathrm{Hom}(\Sigma^l G, \mathcal{T}_G^{-C-l}) = 0$, 这就说明了 $X \notin \mathcal{T}_G^{\leqslant -C-l}$. □

1.3 技术引理

注释: 下面的引理来源于 [N5] 引理 1.6, 证明过程来源于陈红星教授在讨论班上的指导.

引理 1.22. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{T}$ 是满子范畴. 若:

(1) $\forall s \in \mathcal{S}$, $s \to x \in \mathcal{X}$ 总能经过 $\mathcal{A}$ 中的对象分解. $s \to z \in \mathcal{Z}$ 总能经过 $\mathcal{C}$ 中的对象分解.

(2) $\forall d \in (\Sigma^{-1}\mathcal{C}) * \mathcal{S}$, $d \to x \in \mathcal{X}$ 总能经过 $\mathcal{A}$ 中的对象分解.

则 $\forall s \in \mathcal{S}$, $s \to y \in \mathcal{X} * \mathcal{Z}$ 总能经过 $b \in \mathcal{A} * \mathcal{C}$ 分解.

证明. 考虑 $f: s \to y$, 其中 $s \in \mathcal{S}$, $y \in \mathcal{X} * \mathcal{Z}$. 由条件可知存在如下交换图:

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d] & \\ x \arrow[r] & y \arrow[r] & z \arrow[r] & \Sigma x \end{tikzcd}$$

其中 $x \in \mathcal{X}$, $z \in \mathcal{Z}$, $c \in \mathcal{C}$. 将上图按三角范畴的定义补齐成好三角间的态射:

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "u"] \arrow[d] & s \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma d \arrow[d] \\ x \arrow[r] & y \arrow[r] & z \arrow[r] & \Sigma x \end{tikzcd}$$

注意到 $d \in (\Sigma^{-1}C) * \mathcal{S}$, 故由条件 (2) 可知存在如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "v"'] \arrow[dd] & s \arrow[r] \arrow[dd, "f"'] & c \arrow[r] \arrow[dd] & \Sigma d \arrow[dd] \\
a \arrow[dr, "w"'] & & & & \\
 & x \arrow[r, "s"] & y \arrow[r] & z \arrow[r] & \Sigma x
\end{tikzcd}$$

其中 $a \in \mathcal{A}$. 由 u 和 v 可以诱导态射 $d \to s \oplus a$, 将其补成好三角:

$$d \longrightarrow s \oplus a \xrightarrow{(g,-h)} s' \longrightarrow \Sigma d$$

故由 [N7] 引理 1.4.4 可得如下好三角的交换图:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & s \arrow[r] \arrow[d, "g"] & c \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma d \arrow[d] \\
a \arrow[r, "h"'] & s' \arrow[r] & c \arrow[r] & \Sigma a
\end{tikzcd}$$

其中 $s' \in \mathcal{A} * C$. 容易验证:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "0"'] & s \oplus a \arrow[r, "(g,-h)"] \arrow[dr, "(f,-sw)"] & s' \arrow[r] & \Sigma d \\
 & & y &
\end{tikzcd}$$

故存在 $k : s' \to y$ 使得 $\begin{tikzcd} s \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & s' \arrow[r, "k"] & y \end{tikzcd}$. □

引理 1.23. 设 $\mathcal{T}$ 有任意小直和, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}^c$ 是满子范畴, 则

(1) $\forall s \in \mathcal{T}^c$, $s \to x \in \mathrm{Coprod}_n(\mathcal{B})$ 总能经过 $\mathrm{coprod}_n(\mathcal{B})$ 中的对象分解.

(1) $\forall s \in \mathcal{T}^c$, $s \to x \in \mathrm{Coprod}(\mathcal{B})$ 总能经过 $\mathrm{coprod}(\mathcal{B})$ 中的对象分解.

证明. (1): 使用归纳法. 当 $n = 1$ 时, $\mathrm{Coprod}_1(\mathcal{B}) = \mathrm{Add}(\mathcal{B})$, 故由引理1.1立得结论. 现假设结论对对 n 成立, 令

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}^c,\ \mathcal{A} = \mathrm{coprod}_1(\mathcal{B}),\ C = \mathrm{coprod}_n(\mathcal{B}),\ \mathcal{X} = \mathrm{Coprod}_1(\mathcal{B}),\ Z = \mathrm{Coprod}_n(\mathcal{B})$$

则由引理1.22立得结论.

(2): 令 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ 为满子范畴, 并满足条件:$\forall s \in \mathcal{T}^c$, $s \to r \in \mathcal{R}$ 总能经过 $\mathrm{coprod}(\mathcal{B})$ 中的对象分解. 于是只需证 $\mathrm{Coprod}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{R}$, 而这只需利用 $\mathrm{Coprod}(\mathcal{B})$ 的定义, 我们分几步证明:

第一步我们断言 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}$. 这几乎是显然的, 因为任给 $s \to b$, 其中 $s \in \mathcal{T}^c$, $b \in \mathcal{B}$, 总有分解 $s \to b \xrightarrow{\mathrm{Id}} b$.

第二步我们断言 $\mathrm{Add}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$. 取 $\mathcal{R}$ 中的一族对象 $\{r_i\}_{i\in I}$, 由引理1.1可知任取 $s \in \mathcal{T}^c$ 并给定 $f : s \to \bigoplus_{i\in I} r_i$ 总有分解:

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & \bigoplus_{i\in I} r_i \\
 & \bigoplus_{k=1}^{n} r_{i_k} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

注意到每个 $s \to r_{i_k}$ 都能经过某个 $c_{i_k} \in \mathrm{coprod}(\mathcal{B})$ 分解, 于是 $s \to \bigoplus_{k=1}^{n} r_{i_k}$ 可经过 $s \to \bigoplus_{k=1}^{n} c_{i_k}$ 分解, 这就完成了本断言的证明.
第三步我们断言 $\mathcal{R}$ 对扩张封闭. 令

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}^c,\ \mathcal{A} = \mathcal{C} = \mathrm{coprod}(\mathcal{B}),\ \mathcal{X} = \mathcal{Z} = \mathcal{R}$$

只需注意到 $\mathcal{A} * \mathcal{C} = \mathrm{coprod}(\mathcal{B}) * \mathrm{coprod}(\mathcal{B}) = \mathrm{coprod}(\mathcal{B})$, 则可由引理1.22立得结论. □

引理 1.24. *设 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ 是满子范畴且满足条件 $\Sigma\mathcal{S} = \mathcal{S}$. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ 是另一满子范畴, 我们归纳定义 $\mathcal{A}(m)$:*

(1) $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}(m+1) = \mathcal{A}(m) * \Sigma^m \mathcal{A}$.

如果 $\forall F \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 都有分解 $E_1 \xrightarrow{g_1} F \to D_1 \to \Sigma E_1$, 其中 $E_1 \in \mathcal{A}$, $D_1 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\leqslant -1}$, 则存在序列:

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$$

以及态射 $g_i : E_i \longrightarrow F$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & E_{i+1} \arrow[dl, "g_{i+1}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

其中 $E_i \in \mathcal{A}(i)$, $D_i := \mathrm{Cone}(g_i) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\leqslant -i}$.

证明. 我们只构造 E_2, 其余过程是类似的. 注意到 $\Sigma^{-1} D_1 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 于是由条件可知存在好三角 $E' \to D_1 \to D_2 \xrightarrow{+1}$, 其中 $E' \in \Sigma\mathcal{A}$, $D_2 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{-2}$, 于是由八面体公理得交换图:

$$\begin{tikzcd} & & E' \arrow[r, equal] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\ E_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & D_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E_1 \arrow[d] \\ E_2 \arrow[r, "g_2"] & F \arrow[r] & D_2 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E_2 \arrow[d] \\ & & \Sigma E' \arrow[r, equal] & \Sigma E' \end{tikzcd}$$

不难看出 $E_2 \in \mathcal{A}(2)$. □

注释: 在实际使用上述引理时, 多数时候我们令 $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. 此外注意到, 若 $\mathcal{A} = \overline{\langle G \rangle}^{[-A,A]}$, 则按极小性验证即可得 $\Sigma^m \mathcal{A} = \overline{\langle G \rangle}^{[-m-A,-m+A]}$, 故由归纳法可知 $\mathcal{A}(m) \subseteq \overline{\langle G \rangle}^{[1-m-A,A]}$; 若 $\mathcal{A} = \overline{\langle G \rangle}_A^{[-A,A]}$, 则由归纳法可知 $\mathcal{A}(m) \subseteq \overline{\langle G \rangle}_{mA}^{[1-m-A,A]}$. **相关推论的具体表述可以参考 [N1] 中的推论 2.2**.

引理 1.25. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构且存在整数 B 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-B}G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$. 令 $F \in \mathcal{T}$, 且有序列:

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$$

以及态射 $g_i : E_i \longrightarrow F$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & E_{i+1} \arrow[dl, "g_{i+1}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

若 $D_i := \mathrm{Cone}(g_i) \in \mathcal{T}^{\leqslant -i}$, 则有 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \cong F$.

证明. 首先可知在条件下, 总有如下复合为零:

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \xrightarrow{\tilde{g}} F$$

其中 $\tilde{g}$ 由 $\{g_i\}$ 诱导, 故 $\mathrm{Hocolim}(E_i)$ 到 F 有 (非典范的) 映射 $g : \mathrm{Hocolim}(E_i) \to F$. 考虑引理1.4可得如下交换图:

$$\begin{tikzcd} \operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, E_i) \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, F) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, \mathrm{Hocolim}(E_i)) \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, g)"'] & \end{tikzcd}$$

其中的 can 各自表示由泛性质诱导的典范态射. 再注意到 $\forall i \geqslant 0, \mathcal{T}^{\leqslant -i} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 于是对任意 $n \geqslant B$, 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-n}G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$, 调整一下即得, 当 $\ell + i \geqslant B$ 时有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, \mathcal{T}^{\leqslant -i}) = 0$ 成立. 因为 $D_i \in \mathcal{T}^{\leqslant -i}$, 故对任意整数 ℓ, 当 i 充分大时, 总有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, g_i) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, E_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, F)$ 为同构. 由正向极限 $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, E_i)$ 的具体构造可知, 对任意整数 ℓ, 当 i 充分大时, 总有典范映射 $\operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, E_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, E_i)$ 是同构, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-\ell}G, -)$ 将 $g : \mathrm{Hocolim}(E_i) \to F$ 映成同构, 从而由引理1.2可知 $\mathrm{Hocolim}(X_i) \cong F$. □

2 (弱) 可逼近三角范畴

2.1 基本性质

定义 2.1. 令 $\mathcal{T}$ 有紧生成子 G, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构. 若存在整数 $A > 0$ 使得:

1. $\Sigma^A G \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\mathrm{Hom}(\Sigma^{-A}G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$.
2. $\forall F \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 都存在好三角 $E \longrightarrow F \longrightarrow D \longrightarrow \Sigma E$, 其中 $E \in \overline{\langle G \rangle}^{[-A,A]}$, $D \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$.

则称 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴 (weakly approximable). 若上面的条件 2 中要求 $E \in \overline{\langle G \rangle}_A^{[-A,A]}$, 则称 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴.

命题 2.1. 设 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴, 则定义中的 t-结构 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 在 preferred 等价类中.

证明. 由 $\Sigma^A G \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ 可知 $G(-\infty, -A] \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 从而 $\mathcal{T}_G^{\leqslant -A} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. 由引理1.24及后面的注释, 可知对 $\forall F \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 存在序列

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$$

其中 $E_m \in \overline{\langle G \rangle}^{[1-m-A,A]} \subseteq \overline{\langle G \rangle}^{(-\infty,A]}$ 再由引理1.25可知有好三角:

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \longrightarrow F \longrightarrow \Sigma \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \xrightarrow{+1}$$

故 $F \in \mathcal{T}_G^{\leqslant A}$, 由 F 的选取可知 $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_G^{\leqslant A}$. □

命题 2.2. *设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}_1^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_1^{\geqslant 0})$ 和 $(\mathcal{T}_2^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_2^{\geqslant 0})$ 是两个等价的 t-结构, 若存在整数 $A > 0$ 使得 $\mathcal{T}$ 相对于 G 和 $(\mathcal{T}_1^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_1^{\geqslant 0})$ 构成 (弱) 可逼近三角范畴, 则适当扩大 A 可以使得 $\mathcal{T}$ 也相对于 G 和 $(\mathcal{T}_2^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_2^{\geqslant 0})$ 也构成 (弱) 可逼近三角范畴.*

证明. 由等价 t-结构的定义可知存在整数 $B > 0$ 使得 $\mathcal{T}_2^{\leqslant -B} \subseteq \mathcal{T}_1 \leqslant 0 \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant B}$, 于是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A-B}G, \mathcal{T}_2^{\leqslant 0}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A}G, \mathcal{T}_2^{\leqslant -B}) = 0$, 此外也不难看出 $\Sigma^{A+B}G \in \mathcal{T}_2^{\leqslant 0}$.
再任取 $F \in \mathcal{T}_2^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_1^{\leqslant B}$, 于是有 $\Sigma^B F \in \mathcal{T}_1^{\leqslant 0}$, 故由引理1.24及后面的注释, 得好三角 $\Sigma^B E_{2B+1} \to \Sigma^B F \to \Sigma^B D_{2B+1}$, 其中 $\Sigma^B E_{2B+1} \in \overline{\langle G \rangle}^{[-2B-A,A]}$, $\Sigma^B D_{2B+1} \in \mathcal{T}_1^{\leqslant -2B-1}$, 于是 $E_{2B+1} \in \overline{\langle G \rangle}^{[-B-A,B+A]}$, $D_{2B+1} \in \mathcal{T}_1^{\leqslant -B-1} \subseteq \mathcal{T}_2^{\leqslant -1}$.
证明可逼近的方法完全类似, 只需注意到此时构造的 $E_{2B+1} \in \overline{\langle G \rangle}_{(2B+1)A}^{[-B-A,B+A]}$, 故将 A 替换成 $\max[A+B, A(2B+1)]$ 即可. □

命题 2.3. *若 $\mathcal{T}$ 相对于紧生成子 G 构成 (弱) 可逼近三角范畴, $H \in \mathcal{T}$ 为另一紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 为 preferred 等价类中的 t-结构, 则 $\mathcal{T}$ 也相当于 H 和 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 构成 (弱) 可逼近三角范畴.*

证明. 由命题2.2可知, 我们可以假定存在整数 $A > 0$ 使得 $\mathcal{T}$ 相对于 G 和 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 构成 (弱) 可逼近三角范畴. 由引理1.3后的注释可知 $\langle G \rangle = \langle H \rangle$, 于是按定义可以找到正整数 B 使得 $G \in \langle H \rangle_B^{[-B,B]}$, $H \in \langle G \rangle_B^{[-B,B]}$. 因为 $\Sigma^A G \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A}G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$, 故有 $\langle G \rangle_B^{[-A-2B,-A]} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\langle G \rangle_B^{[A,A+2B]}, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$. 再注意到 $\Sigma^{A+B}H \in \langle G \rangle_B^{[-A-2B,-A]}$ 及 $\Sigma^{-A-B}H \in \langle G \rangle_B^{[A,A+2B]}$, 从而有 $\Sigma^{A+B} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A-B}H, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$. 最后还是由 $G \in \langle H \rangle_B^{[-B,B]}$ 可知

$$\overline{\langle G \rangle}^{[-A,A]} \subseteq \overline{\langle H \rangle}^{[-A-B,A+B]}, \qquad \overline{\langle G \rangle}_A^{[-A,A]} \subseteq \overline{\langle H \rangle}_{AB}^{[-A-B,A+B]}$$

从而不难整理出结果. □

引理 2.4. *设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 为 t-结构, 若存在整数 $A > 0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A}G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$, 则对任意 $H \in \mathcal{T}^c$, 一定存在依赖 H 的整数 $B > 0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-B}H, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$.*

证明. 还是注意到 $H \in \mathcal{T}^c = \langle G \rangle$, 然后证明方法和命题2.3类似. □

命题 2.5. *设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 为 t-结构, 若存在整数 $A > 0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A}G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$, 则 $\mathcal{T}_c^- \subseteq \mathcal{T}$ 是三角子范畴.*

证明. 很显然 $\mathcal{T}_c^-$ 是加法范畴且对平移封闭, 下面只需证明 $\mathcal{T}_c^-$ 对扩张封闭. 取好三角 $R \to S \to T \to \Sigma R$, 其中 R 和 T 均属于 $\mathcal{T}_c^-$, 下证 $S \in \mathcal{T}_c^-$.
因为 $T \in \mathcal{T}_c^-$, 故对任意 $m > 0$, 都有分解 $T' \to T \to T'' \to \Sigma T'$, 其中 $T' \in \mathcal{T}^c$, $T'' \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$, 于是由引理2.4可知存在 $B > 0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T', \mathcal{T}^{\leqslant -B}) = 0$. 再对 R 取分解 $R' \to R \to R'' \to \Sigma R'$, 其中 $R' \in \mathcal{T}^c$, $R'' \in \mathcal{T}^{\leqslant -m-B}$, 观察下图:

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & T'' \arrow[r, "+1"] & {} \\ \Sigma R' \arrow[r] & \Sigma R \arrow[r] & \Sigma R'' \arrow[r, "+1"] & {} \end{tikzcd}$$

因为 $\Sigma R'' \in \mathcal{T}^{\leqslant -m-B-1} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant -B}$, 故 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T', \Sigma R'') = 0$, 从而我们可以补齐上图得到如下交换图:

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ \Sigma R' \arrow[r] & \Sigma R \end{tikzcd}$$

将上图置于左下角使用 3×3 引理, 得

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma R' \arrow[d] \\ S' \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d] & S'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma S' \arrow[d] \\ T' \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & T'' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma T' \arrow[d] \\ \Sigma R' \arrow[r] & \Sigma R \arrow[r] & \Sigma R'' \arrow[r] & \Sigma^2 R' \end{tikzcd}$$

其中每一行每一列均为好三角. 注意到 $R', T' \in \mathcal{T}^c$, 从而 $S' \in \mathcal{T}^c$. $T'' \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$, $R'' \in \mathcal{T}^{\leqslant -m-B} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant -m}$, 从而 $S'' \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$, 故好三角 $S' \to S \to S'' \to \Sigma S'$ 可帮助我们完成证明. □

命题 2.6. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 为 t-结构, 若存在整数 $A > 0$ 使得 $\Sigma^A G \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ 以及 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A} G, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$, 则 $\mathcal{T}_c^-$ 是厚子范畴.

证明. 由命题2.5可知 $\mathcal{T}_c^-$ 是三角子范畴, 故只需证其对直和项封闭. 设 $S \oplus T \in \mathcal{T}_c^-$, 下证 $S \in \mathcal{T}_c^-$.
首先我们断言对任意 $n \geqslant 0$, 有 $S \oplus \Sigma^{2n+1} S \in \mathcal{T}_c^-$. 使用归纳法, 当 $n = 0$ 时, 注意到 $T \xrightarrow{\mathrm{Id}} T \to 0 \to \Sigma T$ 和 $S \xrightarrow{0} S \to S \oplus \Sigma S \to \Sigma S$ 均为好三角, 将二者直和起来即得好三角:$S \oplus T \to S \oplus T \to S \oplus \Sigma S \to \Sigma(S \oplus T)$, 因为 $\mathcal{T}_c^-$ 是三角子范畴, 故有 $S \oplus \Sigma S \in \mathcal{T}_c^-$. 现假设已有 $S \oplus \Sigma^{2n+1} S \in \mathcal{T}_c^-$. 此外注意到 $\Sigma^{2n+2}(S \oplus \Sigma S) \cong \Sigma^{2n+2} S \oplus \Sigma^{2n+3} S \in \mathcal{T}_c^-$, 于是将好三角 $\Sigma^{2n+1} S \xrightarrow{\mathrm{Id}} \Sigma^{2n+1} S \to 0 \to \Sigma^{2n+2} S$ 和 $\Sigma^{2n+2} S \xrightarrow{0} S \to S \oplus \Sigma^{2n+3} S \to \Sigma^{2n+3} S$ 直和起来, 即可得到 $S \oplus \Sigma^{2n+3} S \in \mathcal{T}_c^-$.
然后由引理1.14可知 $\mathcal{T}_c^- \subseteq \mathcal{T}^-$, 于是必存在某个 $\ell > 0$ 使得 $S \oplus \Sigma S \in \mathcal{T}^{\leqslant \ell}$, 所以有 $S \in \mathcal{T}^{\leqslant \ell}$, 从而对任意 $m > 0$, 都有 $\Sigma^{\ell+m} S \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$, 故当 $2n + 2 \geqslant \ell + m$ 时, 有 $\Sigma^{2n+2} S \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$.
最后由于 $S \oplus \Sigma^{2n+1} S \in \mathcal{T}_c^-$, 我们可以得到好三角 $K \to S \oplus \Sigma^{2n+1} S \to P \to \Sigma K$, 其中 $K \in \mathcal{T}^c$, $S \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$.

使用八面体公理得:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma^{2n+1}S \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & & \\ K \arrow[r] \arrow[d, equal] & S\oplus\Sigma^{2n+1}S \arrow[r] \arrow[d, "(1,0)"] & P \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\ K \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\ & \Sigma^{2n+2}S \arrow[r, equal] & \Sigma^{2n+2}S \arrow[d, "+1"] & \\ & & {} & \end{tikzcd}$$

于是由 $P, \Sigma^{2n+2}S \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$ 可知 $Q \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$, 从而好三角 $K \to S \to Q \to \Sigma K$ 可以帮助我们完成证明. □

引理 2.7. 令 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴, 固定紧生成子 G, t-结构 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 以及正整数 A, 再令 $m > 1$ 为另一整数. 于是 $\mathcal{T}^c \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \mathrm{smd}(\langle G\rangle^{[1-m-A,A]} * \langle G\rangle^{(-\infty,-m+A]})$. 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $\mathcal{T}^c \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \mathrm{smd}(\langle G\rangle^{[1-m-A,A]}_{mA} * \langle G\rangle^{(-\infty,-m+A]})$.

证明. 由引理2.1可知 $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \mathcal{T}_G^{\leqslant A} = \overline{\langle G\rangle}^{(-\infty,A]}$. 取 $K \in \mathcal{T}^c \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 因为 $K \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 故由引理1.24后的注释可知存在好三角 $E_m \to K \to D_m \to \Sigma E_m$, 其中 $E_m \in \overline{\langle G\rangle}^{[1-m-A,A]}$, $D_m \in \mathcal{T}^{\leqslant -m} \subseteq \overline{\langle G\rangle}^{(-\infty,-m+A]}$. 当 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴时可假定 $E_m \in \overline{\langle G\rangle}^{[1-m-A,A]}_{mA}$. 即 $K \in \overline{\langle G\rangle}^{[1-m-A,A]} * \overline{\langle G\rangle}^{(-\infty,-m+A]}$, 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴则 $K \in \overline{\langle G\rangle}^{[1-m-A,A]}_{mA} * \overline{\langle G\rangle}^{(-\infty,-m+A]}$. 设

$$\mathcal{X}_1 = \mathrm{Coprod}(G[1-m-A,A])$$

$$\mathcal{X}_2 = \mathrm{Coprod}_{mA}(G[1-m-A,A])$$

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Coprod}(G(-\infty,-m+A])$$

注意到 $\mathcal{Z} = \mathrm{smd}(\mathcal{Z})$, 故 $\mathcal{Z} = \overline{\langle G\rangle}^{(-\infty,-m+A]}$, 此外:

$$\overline{\langle G\rangle}^{[1-m-A,A]} = \mathrm{smd}(\mathcal{X}_1), \quad \overline{\langle G\rangle}^{[1-m-A,A]}_{mA} = \mathrm{smd}(\mathcal{X}_2)$$

于是 $K \in \mathrm{smd}(\mathcal{X}_i) * \mathcal{Z} \subseteq \mathrm{smd}(\mathcal{X}_i * \mathcal{Z})$, 其中 $i = 1, 2$(取决于 $\mathcal{T}$ 是否是可逼近的). 于是有态射 $K \xrightarrow{f} K' \xrightarrow{g} K$, 其中 $K' \in \mathcal{X}_i * \mathcal{Z}$ 且 $gf = 1_K$. 再设

$$\mathcal{A}_1 = \mathrm{coprod}(G[1-m-A,A])$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathrm{coprod}_{mA}(G[1-m-A,A])$$

$$\mathcal{C} = \mathrm{coprod}(G(-\infty,-m+A])$$

综合考虑引理1.22和引理1.23, 则可知 f 可分解为 $K \to K'' \to K'$, 其中 $K'' \in \mathcal{A}_i * \mathcal{C}$. 最后由于 $K \to K'' \to K' \to K$ 复合之后为恒等映射, 从而 K 是 K'' 的直和项, 这就完成了证明. □

引理 2.8. 令 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴, 固定紧生成子 G, t-结构 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 以及正整数 A. 则存在整数 $B > 0$ 使得 $\mathcal{T}^c \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \langle G\rangle^{[-B,B]} * \mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $\mathcal{T}^c \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0} \subseteq \langle G\rangle_B^{[-B,B]} * \mathcal{T}^{\leqslant -1}$.

证明. 取 $K \in \mathcal{T}^c \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 固定 $m = 4A+1$, 于是使用引理2.7可得好三角 $E \to K \oplus L \to D \to \Sigma E$, 其中 $E \in \langle G\rangle^{[-5A,A]}$, $D \in \langle G\rangle^{(-\infty,-3A-1]}$. 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $E \in \langle G\rangle^{[-5A,A]}_{(4A+1)A}$. 由 $D \in \langle G\rangle^{(-\infty,-3A-1]}$ 不难看出 $D \in \mathcal{T}^c$, 同时因为 $G \in \mathcal{T}^{\leqslant A}$, 所以 $D \in \mathcal{T}^{\leqslant -2A-1}$. 再令 $m = 6A$ 后对 $\Sigma^{-2A-1}D$ 使用引理2.7, 旋转之后得好三角 $E' \to D \oplus M \to D' \to \Sigma E'$, 此时 $E' \in \langle G\rangle^{[-9A,-A-1]}$, $D' \in \langle G\rangle^{(-\infty,-7A-1]}$, 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $E' \in \langle G\rangle^{[-9A,-A-1]}_{6A^2}$. 将 $0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0$ 与 $E \to K \oplus L \to D \to \Sigma E$ 直和得到新的好三角 $E \to K \oplus L \oplus M \to D \oplus M \to \Sigma E$, 再使用八面体公理得:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E' \arrow[r, equal] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d] & K \oplus L \oplus M \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \oplus M \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E \arrow[d] \\
E'' \arrow[r] & K \oplus L \oplus M \arrow[r] & D' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E'' \arrow[d] \\
 & & \Sigma E' \arrow[r, equal] & \Sigma E'
\end{tikzcd}
$$

故又可得新的好三角 $E \to E'' \to E' \to \Sigma E$, 其中

$$E'' \in \langle G\rangle^{[-5A,A]} * \langle G\rangle^{[-9A,-A-1]} \subseteq \langle G\rangle^{[-9A,A]}$$

若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $E'' \in \langle G\rangle^{[-9A,A]}_{10A^2+4A}$. 再注意到 $D' \in \langle G\rangle^{(-\infty,-7A-1]} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant -6A-1}$, $E' \in \langle G\rangle^{[-9A,-A-1]} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant -1}$, 故好三角 $E' \to D \oplus M \to D' \to \Sigma E'$ 保证了 $D \oplus M \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$, 从而有 $M \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 我们将上述讨论得的内容总结如下:

(i) $E \in \langle G\rangle^{[-5A,A]}$, $E'' \in \langle G\rangle^{[-9A,A]}$, $D \in \langle G\rangle^{(-\infty,-3A-1]} \subseteq \mathcal{T}^{\leqslant -2A-1}$, $M \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$, $D' \in \mathcal{T}^{\leqslant -6A-1}$.

(ii) 当 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴时, $E \in \langle G\rangle^{[-5A,A]}_{4A^2+4A}$, $E'' \in \langle G\rangle^{[-9A,A]}_{10A^2+4A}$.

观察下图:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & K \oplus L \arrow[r] \arrow[d] & D \\
E'' \arrow[r] & K \oplus L \oplus M \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}
$$

其中 $K \oplus L \to K \oplus L \oplus M$ 为 $0 : K \to K \oplus M$ 和 $1_L : L \to L$ 的直和. 由 E 和 D 的范围可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, D') = 0$, 从而我们可以得到交换图:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d] & K \oplus L \arrow[d] \\
E'' \arrow[r] & K \oplus L \oplus M
\end{tikzcd}
$$

再使用 3×3 引理可得:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d] & K\oplus L \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
E'' \arrow[r] \arrow[d] & K\oplus L\oplus M \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
\tilde{E} \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & K\oplus \Sigma K\oplus M \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & D'' \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "+1"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

由 D 和 D' 的范围可知 $D''\in\mathcal{T}^{\leqslant -2A-2}$, 由 E 和 E'' 的范围可知 $\tilde{E}\in\langle G\rangle^{[-9A,A]}$, 当 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴时, $\tilde{E}\in\langle G\rangle^{[-9A,A]}_{14A^2+8A}$. 最后考虑可裂好三角:$\Sigma K\oplus M\to K\oplus\Sigma K\oplus M\to K\to\Sigma^2K\oplus\Sigma M$, 再使用八面体公理:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & K\oplus \Sigma K\oplus M \arrow[r] \arrow[d] & D'' \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\tilde{E} \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{D} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& \Sigma^2K\oplus\Sigma M \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma^2K\oplus\Sigma M \arrow[d] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}$$

因为 $\Sigma^2K,\Sigma M\in\mathcal{T}^{\leqslant -2}$, $D''\in\mathcal{T}^{\leqslant -2A-2}$, 所以 $\tilde{D}\in\mathcal{T}^{\leqslant -2}$, 从而好三角 $\tilde{E}\to K\to\tilde{D}\to\Sigma\tilde{E}$ 可以帮助我们完成证明. □

命题 2.9. 令 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴, 固定紧生成子 G, t-结构 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 以及正整数 A. 再令 B 为引理2.8中选定的 B, 则 $\mathcal{T}_c^-\cap\mathcal{T}^{\leqslant 0}\subseteq\langle G\rangle^{[-B,B]}*\mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $\mathcal{T}_c^-\cap\mathcal{T}^{\leqslant 0}\subseteq\langle G\rangle^{[-B,B]}_B*\mathcal{T}^{\leqslant -1}$.

证明. 任取 $F\in\mathcal{T}_c^-\cap\mathcal{T}^{\leqslant 0}$. 因为 $F\in\mathcal{T}_c^-$, 所以存在好三角 $K\to F\to D_1\to\Sigma K$, 其中 $K\in\mathcal{T}^c$, $D_1\in\mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 于是由旋转后的好三角 $\Sigma^{-1}D_1\to K\to F\to D_1$ 以及 $F\in\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ 可知 $K\in\mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 从而 $K\in\mathcal{T}^c\cap\mathcal{T}^{\leqslant 0}$. 再由引理2.8可知有好三角 $E\to K\to D_2$, 其中 $E\in\langle G\rangle^{[-B,B]}$, $\mathcal{D}_2\in\mathcal{T}^{\leqslant -1}$, 使用八面体公理:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & D_2 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E \\
& D_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & D_1 \arrow[d] & \\
& \Sigma K \arrow[r] & \Sigma D_2 &
\end{tikzcd}$$

由 $D_1,D_2\in\mathcal{T}^{\leqslant -1}$ 可知 $D\in\mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 故好三角 $E\to F\to D\to\Sigma E$ 可帮助我们完成证明. □

推论. 令 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴, 固定紧生成子 G, t-结构 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 以及正整数 A. 再令 B 为引理2.8中选定的 B, 于是对任意 $F \in \mathcal{T}_c^- \cap \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, 总存在序列:

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$$

以及态射 $g_i : E_i \longrightarrow F$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & E_{i+1} \arrow[dl, "g_{i+1}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

其中 $E_m \in \langle G \rangle^{[1-m-B,B]}$, $D_m := \mathrm{cone}(g_i) \in \mathcal{T}^{\leqslant -m}$. 并有同构 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \cong F$. 若 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴, 则 $E_m \in \langle G \rangle_{mB}^{[1-m-B,B]}$.

证明. 命题中的序列一旦存在, 就可由引理1.25得到同构 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \cong F$, 所以我们只需构造出序列. 由命题2.9可知存在好三角 $E_1 \to F \to D_1 \to \Sigma E_1$, 其中 $E_1 \in \langle G \rangle^{[-B,B]}$, $D_1 \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 注意到 $\langle G \rangle^{[-B,B]} \subseteq \mathcal{T}^c$ 以及 $\mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{T}_c^-$, 故 $E_1 \in \mathcal{T}_c^-$, 从而由 $\mathcal{T}_c^-$ 是三角子范畴可知 $D_1 \in \mathcal{T}_c^- \cap \mathcal{T}^{\leqslant -1}$. 于是将引理1.24中的 $\mathcal{S}$ 取成 $\mathcal{T}_c^-$, $\mathcal{A}$ 取成 $\langle G \rangle^{[-B,B]}$ 即可推出结论. □

2.2 例子

在这一部分, 我们介绍一些判定三角范畴是 (弱) 可逼近三角范畴的方法, 并计算一些例子.

引理 2.10. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子. 若 $\forall n > 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma^n G) = 0$, 则 :

$$\mathcal{T}_G^{\leqslant 0} = \{X \in \mathcal{T} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma^n X) = 0, \forall n > 0\}$$

证明. 记 $A := \{X \in \mathcal{T} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma^n X) = 0, \forall n > 0\}$. 由 $\mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$ 的定义可知 $\mathcal{T}_G^{\leqslant 0} \subseteq A$. 再任取 $X \in A$, 考虑 t-结构定义中的第三条, 得好三角:$X^{\leqslant 0} \to X \to X^{\geqslant 1} \to \Sigma X^{\leqslant 0}$, 对 $\forall n > 0$ 将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-n} G, -)$ 作用在上面, 即得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-n} G, X^{\geqslant 1}) = 0$, 又因为 $X^{\geqslant 1} \in \mathcal{T}_G^{\geqslant 1}$, 故 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n G, X^{\geqslant 1}) = 0$, 故由紧生成子的定义得 $X^{\geqslant 1} \cong 0$, 从而 $X \cong X^{\geqslant 0} \in \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$. □

命题 2.11. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子. 若 $\forall n > 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma^n G) = 0$, 则 $\mathcal{T}$ 为可逼近三角范畴.

证明. 此时有 t-结构 $(\mathcal{T}_G^{\leqslant 0}, \mathcal{T}_G^{\geqslant 0})$, 注意到 $\Sigma G \in \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1} G, \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}) = 0$. 不难看出我们只需对 $X \in \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$ 且 $X \notin \mathcal{T}_G^{\leqslant -1}$ 的对象验证分解性. 由引理2.10可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, X) \neq 0$, 故将引理1.17中的 $\mathcal{A}$ 取成 $\{G\}$, 即可得态射 $S \to X$, 其中 $S \in \overline{\langle G \rangle}_1^{[0,0]}$. 将其延申成好三角:$S \to X \to Y \to \Sigma S$, 不难看出 $Y \in \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$. 在将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, -)$ 作用到好三角上，得正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, S) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma S)$$

由 S 的构造可知第一个态射是满射, 由条件可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma S) = 0$, 从而 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, Y) = 0$. 所以由2.10可知 $Y \in \mathcal{T}_G^{\leqslant -1}$. □

引理 2.12. 令 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ 是满子范畴, 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 均对扩张封闭且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}, \Sigma\mathcal{B}) = 0$, 则 $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ 对扩张封闭.

证明. 证明方法完全类似于2.5. 考虑好三角 $X_1 \to X \to X_2 \to \Sigma X_1$, 其中 $X_1, X_2 \in \mathcal{A} * \mathcal{B}$. 于是有好三角 $A_1 \to X_1 \to B_1 \to \Sigma A_1$ 和 $A_2 \to X_2 \to B_2 \to \Sigma A_2$, 其中 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. 再观察下图:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] & \Sigma A_2 \\
\Sigma A_1 \arrow[r] & \Sigma X_1 \arrow[r] & \Sigma B_1 \arrow[r] & \Sigma^2 A_1
\end{tikzcd}$$

由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}, \Sigma\mathcal{B}) = 0$ 以及好三角的性质不难看出有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\
\Sigma A_1 \arrow[r] & \Sigma X_1
\end{tikzcd}$$

再使用 3×3 引理即可. □

命题 2.13. 设 $G \in \mathcal{T}$ 为紧生成子, 若 $\forall n > 1$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma^n G) = 0$, 则 $\mathcal{T}$ 为弱可逼近三角范畴.

证明. 令 $\mathcal{A} = \mathrm{Coprod}(G)$, $\mathcal{B} = \mathrm{Coprod}(G(-\infty, 0])$. 不难看出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}, \Sigma^2\mathcal{B}) = 0$, 故由引理2.12可知 $\mathcal{A} * \Sigma\mathcal{B}$ 也对扩张封闭. 此外, 因为 $\mathcal{A}$ 和 $\Sigma\mathcal{B}$ 都对 $\mathcal{T}$ 中的直和封闭, 故 $\mathcal{A} * \Sigma\mathcal{B}$ 也对 $\mathcal{T}$ 中的直和封闭. 注意到 $G(-\infty, 0] \in \mathcal{A} * \Sigma\mathcal{B}$, 于是 $\mathcal{T}_G^{\leqslant 0} = \overline{\langle G \rangle}^{(-\infty,0]} \subseteq \mathcal{A} * \Sigma\mathcal{B}$, 此即 $\forall X \in \mathcal{A} * \Sigma\mathcal{B}$, 都存在好三角 $A \to X \to B \to \Sigma A$, 其中 $A \in \mathcal{A} \subseteq \overline{\langle G \rangle}^{[0,0]}$, $B \in \Sigma\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_G^{\leqslant -1}$. 最后注意到 $\Sigma^2 G \in \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-2}G, \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}) = 0$, 从而 $\mathcal{T}$ 是弱可逼近三角范畴. □

例 2.1. 令 R 为含幺环, 记 $D(R) := D(R\text{-Mod})$, 则 $D(R)$ 为可逼近三角范畴. 不难注意到 R 即为 $D(R)$ 的紧生成子, 于是这个结论可以直接由命题2.11推出. 同时我们也可以给一个直接的构造, 考虑 $D(R)$ 上的典范 t-结构:

$$D(R)^{\leqslant 0} := \{X \in D(R) \mid \forall n > 0,\ H^n(X) = 0\}$$

$$D(R)^{\geqslant 0} := \{X \in D(R) \mid \forall n < 0,\ H^n(X) = 0\}$$

不难看出 $\Sigma R \in D_R^{\leqslant 0}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1}R, D_R^{\leqslant 0})$. 再任取 $F \in D(R)^{\leqslant 0}$, 则其必有自由分解:

$$\cdots \longrightarrow F^{-3} \longrightarrow F^{-2} \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

考虑暴力截断:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & F^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^{-3} \arrow[r] \arrow[d, equal] & F^{-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & F^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & F^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^{-3} \arrow[r] & F^{-2} \arrow[r] & F^{-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

故可得到好三角 $E \to F \to D$, 其中 $E \in \overline{\langle R\rangle}_1^{[0,0]}$, $D \in D(R)^{\leqslant -1}$.

命题 2.14. 令 $\mathcal{T} = D(R)$, t-结构为 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0}) = (D(R)^{\leqslant 0}, D(R)^{\geqslant 0})$, 则此时 $\mathcal{T}_c^- = K^-(R\text{-proj})$, $\mathcal{T}_c^b = K^{-,b}(R\text{-proj})$

证明. $K^-(R\text{-proj}) \subseteq \mathcal{T}_c^-$ 是显然的, 只需考虑暴力截断即可. 另一边首先我们注意到 $\mathcal{T}^c = K^b(R\text{-proj})$, 故对 $X \in \mathcal{T}_c^-$, 于是可假定 X 形如:

$$\cdots \longrightarrow X^{-2} \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d^0} X^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

由定义 $X \in \mathcal{T}^c * \mathcal{T}^{\leqslant -2}$, 故分析同调群可知 $H^0(X) \in R\text{-mod}$. 再考虑 0 位置的温和截断, 即可得 $D(R)$ 好三角:

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant -1}X : \cdots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ker} d^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & X^{-1} \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\tau_{\geqslant 0}X : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H^0(X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

旋转一下即得 $\Sigma^{-1}\tau_{\geqslant 0}X \to \tau_{\leqslant -1}X \to X \to \tau_{\geqslant 0}X$, 分别对 $\Sigma^{-1}\tau_{\geqslant 0}X$ 和 $\tau_{\leqslant -1}X$ 考虑投射分解, 并回忆投射分解以及映射锥的构造, 则可由在 $D(R)$ 中 $X \cong \operatorname{Cone}(\Sigma^{-1}\tau_{\geqslant 0}X \to \tau_{\leqslant -1}X)$ 可知 X 在 $D(R)$ 中同构于如下复形:

$$P : \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

其中每一项都是投射模且 $P^0 \in R\text{-proj}$. 考虑暴力截断得到的好三角:$P^{\geqslant 0} \to P \to P^{\leqslant -1} \to \Sigma P^{\geqslant 0}$, 显然 $P^{\geqslant 0} \in \mathcal{T}_c^-$, 故由是三角子范畴可知 $P^{\leqslant -1} \in \mathcal{T}_c^-$, 从而同构于 -1 位置是有限生成投射模的投射复形, 所以可以递归的证明 $X \in K^-(R\text{-proj})$. 此外 $\mathcal{T}_c^b = K^{-,b}(R\text{-proj})$ 由定义显然. □

接下来我们给出一个是弱可逼近三角范畴但不是可逼近三角范畴的例子.

例 2.2. 取 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \in D(\mathbb{Z}\text{-Mod})$, 其中 p 是素数. 令 $\mathcal{T} = \overline{\langle \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\rangle}^{(-\infty,\infty)}$, 于是 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是 $\mathcal{T}$ 的紧生成子, 我们将 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 记为 G. 不难看出 $\forall n > 1$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(G, \Sigma^n G) = 0$, 故由命题2.13可知 $\mathcal{T}$ 是弱可逼近三角范畴, 下面证明 $\mathcal{T}$ 不是可逼近三角范畴.

反证其是可逼近三角范畴, 故由定义可知存在整数 $A > 0$ 使得 $\forall X \in \mathcal{T}_G^{\leqslant 0}$, 都存在非零态射 $X_1 \to X \to X_2 \to \Sigma X_1$, 其中 $X_1 \in \overline{\langle G\rangle}_A^{[-A,A]}$, $X_2 \in \mathcal{T}_G^{\leqslant -1}$. 我们断言:$\forall Z \in \overline{\langle G\rangle}_A^{[-A,A]}$, 都有 $p \cdot H^0(Z) = 0$. 由 Z 的取法可知存在 $Z' \in \mathcal{T}$ 使得 $Z \oplus Z' \cong Z_1 * Z_2 * \cdots * Z_A$ 其中 $Z_i \in \operatorname{Coprod}(G[-A,A])$, 故由 $p \cdot H^0(Z_i) = 0$ 以及扩张的定义可知 $p^A \cdot H^0(Z) = 0$.

再断言 $\mathbb{Z}/P^{A+1}Z \in \mathcal{T}$. 注意到有 $\mathbb{Z}$-模上的正合列 $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$, 故可得到 $D(\mathbb{Z}\text{-Mod})$ 中的好三角:$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{+1}$, 又因为 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$, 故由 $\mathcal{T}$ 的扩张闭的性质可知 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$, 由此可以归纳地证明 $\mathbb{Z}/p^{A+1}\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

最后断言任取 $M \in \mathcal{T}_G^{\leqslant -1}$, 当 $\forall n \geqslant 0$ 时, 都有 $H^n(M) = 0$. 构造 $\mathcal{S} := \{X \in \mathcal{T} \mid \forall n \geqslant 0, H^n(X) = 0\}$, 显

然有 $G(-\infty,-1]\subseteq\mathcal{S}$ 且 $\mathcal{S}$ 对扩张和直和封闭, 从而 $\mathcal{T}_G^{\leqslant -1}\subseteq\mathcal{S}$.
考虑 $\mathbb{Z}/p^{A+1}\mathbb{Z}$ 在可逼近三角范畴的定义下的分解:$Z\to\mathbb{Z}/p^{A+1}\mathbb{Z}\to M\xrightarrow{+1}$, 取零位置的同调群即得满射 $H^0(Z)\to\mathbb{Z}/p^{A+1}\mathbb{Z}$, 但由 $H^0(Z)$ 可被 p^A 零化可知不可能是满射, 矛盾.

3 可表定理

声明: 在这一章中, R 表示交换诺特环, $\mathcal{T}$ 表示 R-线性三角范畴 ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y)$ 是 R-模), 函子均为 R-线性函子.
注释: 在开始正式内容前, 我们需要一些预备性的引理. 回忆之前提到的内容: 设 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, $\mathcal{A}$ 是该 t-结构的 heart, 则由引理1.11可知存在上同调函子 $\mathcal{H}:=[(-)^{\leqslant 0}]^{\geqslant 0}:\mathcal{T}\to\mathcal{A}$. 记 $\mathcal{H}^k(-):=\mathcal{H}(\Sigma^k(-))$, 由定义不难看出 $\mathcal{H}(\Sigma^k(-))=\Sigma^k[(-)^{\leqslant k}]^{\geqslant k}$.

引理 3.1. 设 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, $F\in\mathcal{T}^-$. 若存在 $i\in\mathbb{Z}$ 使得 $\forall k>-i$, 都有 $\mathcal{H}^k(F)=0$, 则 $F\in\mathcal{T}^{\leqslant -i}$.

证明. 由 $F\in\mathcal{T}^-$ 可知存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $F\in\mathcal{T}^{\leqslant n}$. 若 $n\leqslant -i$, 则结论显然. 现假设 $n>-i$, 注意到对任意 $k\in\mathbb{Z}$, 都有分解:$(F^{\leqslant k})^{\leqslant k-1}\to F^{\leqslant k}\to(F^{\leqslant k})^{\geqslant k}=\Sigma^{-k}\mathcal{H}^k(F)\xrightarrow{+1}$, 然后我们断言 $(F^{\leqslant k})^{\leqslant k-1}\cong F^{\leqslant k-1}$. 由八面体公理得下图:

$$\begin{tikzcd}
(F^{\leqslant k})^{\leqslant k-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & F^{\leqslant k} \arrow[r] \arrow[d] & (F^{\leqslant k})^{\geqslant k} \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
(F^{\leqslant k})^{\leqslant k-1} \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
 & F^{\geqslant k+1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "+1"'] & F^{\geqslant k+1} \arrow[d, "+1"'] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

不难看出 $K\in F^{\geqslant k}$, 从而由第二行是好三角以及 t-结构的分解性质, 可推出 $(F^{\leqslant k})^{\leqslant k-1}\cong F^{k-1}$, 断言成立. 故由条件可知, 当 $k>-i$ 时, 有 $F^{\leqslant k-1}\cong F^{\leqslant k}$, 从而可以递归的得到 $F^{\leqslant -i}\cong F^{\leqslant n}\cong F$. □

注释: 一般的我们有 $(F^{\leqslant a})^{\leqslant b}\cong(F^{\leqslant b})^{\leqslant a}$, 具体证明可以参考 [NP] 的命题 10.1.8.

引理 3.2. 设 $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构, $G\in\mathcal{T}$ 是生成子且存在整数 $A>0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\mathcal{T}^{\leqslant -A})$.

(1) 若 $F\in\mathcal{T}^-$ 且对 $\forall k\in\mathbb{Z}$, 都有 $\mathcal{H}^k(F)=0$, 则 $F\cong 0$.

(2) 若 $\mathcal{T}^-\ni f:E\to F$ 且对 $\forall k\in\mathbb{Z}$, 都有 $\mathcal{H}^k(f)$ 是同构, 则 f 是同构.

证明. (1): 由引理3.1可知 $F\in\bigcap_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{T}^{\leqslant i}$, 故由条件可知 $\forall i\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i G,F)=0$. 最后由生成子的定义可知 $F\cong 0$.
(2): 将 $f:E\to F$ 延申成好三角:$E\to F\to\mathrm{Cone}(f)\to\Sigma E$, 不难看出对 $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^k(\mathrm{cone}(f))=0$, 从而由 (1) 立得结论. □

引理 3.3. 令 $\mathcal{T}$ 有小直和, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构且 $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的直和封闭, $\mathcal{A}$ 是该 t-结构的 heart. 我们有如下结论:

(1) 函子 $(-)^{\leqslant 0}$ 和 $(-)^{\geqslant 0}$ 均和直和交换.

(2) $\mathcal{A}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的直和封闭且 $\mathcal{H}(-)$ 与直和交换.

(3) 令 $\{f_i : A_i \to B_i\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一族单态射, 则典范映射 $\oplus f_i : \bigoplus_i A_i \to \bigoplus_i B_i$ 也是单态射.

(4) 设 $E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$ 是 $\mathcal{T}$ 中的序列, 则 $\forall k \in \mathbb{Z}$, 都有 $\mathcal{A}$ 中的正合列:

$$0 \longrightarrow \operatorname*{colim}_i \mathcal{H}^k(E_i) \longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathrm{Hocolim}(E_i)) \longrightarrow \operatorname*{colim}_i{}^1 \mathcal{H}^{k+1}(E_i) \longrightarrow 0$$

证明. (1): 由引理1.8可知 $((-)^{\geqslant 0}, j)$ 是伴随对, 其中 $j : \mathcal{T}^{\geqslant 0} \to \mathcal{T}$ 是嵌入函子, 故由伴随对的性质可知 $(-)^{\geqslant 0}$ 与直和交换. $(-)^{\leqslant 0}$ 与直和交换是引理1.9的直接推论.

(2): $\mathcal{A}$ 对 $\mathcal{A}$ 中的直和封闭是条件的直接推论, $\mathcal{H}(-)$: 与直和交换是 (1) 的直接推论.

(3): 将 $f_i : A_i \to B_i$ 补充 $\mathcal{T}$ 中的好三角: $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow \Sigma A_i$, 因为好三角的直和还是好三角, 故

$$\bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{\oplus f_i} \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} C_i \longrightarrow \Sigma \bigoplus_{i\in I} A_i$$

仍是好三角. 由引理1.10中对 heart 中的核的描述可知

$$\mathrm{Ker}(\oplus f_i) = \Big(\Sigma^{-1}\big(\bigoplus_{i\in I} C_i\big)\Big)^{\leqslant 0} = \Big[\Big(\Sigma^{-1}\big(\bigoplus_{i\in I} C_i\big)\Big)^{\leqslant 0}\Big]^{\geqslant 0} = \mathcal{H}^{-1}\big(\bigoplus_{i\in I} C_i\big) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}^{-1}(C_i) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ker}\, f_i$$

从而立得结论.

(4): 考虑好三角:

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \longrightarrow \mathrm{Hocolim}(E_i) \longrightarrow \Sigma \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$

将 $\mathcal{H}^k(-)$ 作用在上面得到正合列:

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(E_i) \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(E_i) \longrightarrow \mathcal{H}^k(\mathrm{Hocolim}(E_i)) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{k+1}(E_i) \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{k+1}(E_i)$$

注意到第一个态射的余核即为 $\operatorname*{colim}_i \mathcal{H}^k(E_i)$, 最后一个态射的核即为 $\operatorname*{colim}_i{}^1 \mathcal{H}^{k+1}(E_i)$, 从而立得结论. □

引理 3.4. 设 $\mathcal{A}$ 为余完备的 Abel 范畴, $E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$ 是 $\mathcal{A}$ 中的序列, 若存在 $k \in \mathbb{N}^+$ 使得当 $i \geqslant k$ 时都有 f_i 是同构, 则 $1 - \mathrm{shift} : \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$ 是单射.

证明. 首先注意到 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$ 可以视为如下序列的余极限:

$$E_1 \longrightarrow E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \longrightarrow \cdots$$

其中每个态射均为典范嵌入. 固定正整数 j, 我们将由

$$E_s \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -f_s \end{pmatrix}} E_s \oplus E_{s+1} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{j+1} E_i$$

其中 $s=1,2,\cdots,j$ 诱导出的映射记为 $g_j:\bigoplus_{i=1}^{j}E_i\to\bigoplus_{i=1}^{j+1}E_i$. 不难看出 $1-\mathrm{shift}=\operatorname*{colim}_j g_j$. 不妨假设从 f_1 起态射即为同构, 则每个 g_j 均为可裂单态射, 从而 $\operatorname*{colim}_j g_j$ 是可裂单态射, 立得结论. □

定义 3.1. 我们将引理3.4中的序列称为稳定 (stable)序列.

引理 3.5. 令 $\mathcal{T}$ 有小直和, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是 t-结构且 $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ 对 $\mathcal{T}$ 中的直和封闭. 设

$$E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{f_2}E_3\longrightarrow\cdots$$

是 $\mathcal{T}$ 中的序列, 若对任意 $\ell\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^\ell(E_1)\longrightarrow\mathcal{H}^\ell(E_2)\longrightarrow\mathcal{H}^\ell(E_3)\longrightarrow\cdots$ 均为稳定序列, 则 $\operatorname*{colim}_i\mathcal{H}^\ell(E_i)\cong\mathcal{H}^\ell(\mathrm{Hocolim}(E_i))$.

证明. 由引理3.3(4) 和引理3.4立得. □

定义 3.2. 令 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$ 是对同构类封闭的满子范畴且满足 $\Sigma\mathcal{B}=\mathcal{B}$. 若函子 $H:\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to R\text{-Mod}$ 满足条件: 任给好三角 $x\to y\to z\to\Sigma x$, 其中 $x,y,z\in\mathcal{B}$, 都有 $H(z)\to H(y)\to H(x)$ 是 R-Mod 中的正合列. 则称 H 为$\mathcal{B}$-上同调函子. 再令 $G\in\mathcal{B}$, 若 H 还满足条件:

(1) $\forall i\in\mathbb{Z}$, $H(\Sigma^iG)\in R\text{-mod}$.

(2) 当 $i\ll 0$ 时, $H(\Sigma^iG)=0$.

则称 H 为G-局部有限 (locally finite)函子. 若 G-局部有限函子 H 还满足条件: 当 $i\gg 0$ 时有 $H(\Sigma^iG)=0$. 则称 H 为G-有限函子.

声明: 在定义3.2的记号和约定下, 若 $\forall G\in\mathcal{B}$, H 都是 G-(局部) 有限函子, 则将 H 简称为 (局部) 有限函子.

注释: 在定义3.2的记号和约定下, 若 $G'\in\langle G\rangle$ 且 H 是 G-(局部) 有限函子, 则 H 是 G'-(局部) 有限函子.

引理 3.6. 设 $G\in\mathcal{T}$ 为紧生成子, $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ 是位于 preferred 等价类中的 t-结构. 若存在整数 $A>0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-A}G,\mathcal{T}^{\leqslant 0})=0$ 且 $\forall i\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,\Sigma^iG)\in R\text{-mod}$, 则任取 $F\in\mathcal{T}_c^-$, 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,F):[\mathcal{T}^c]^{\mathrm{op}}\to R\text{-Mod}$ 是局部有限的 $\mathcal{T}^c$-上同调函子.

证明. 可表函子一定是上同调函子, 所以只需验证其余的条件. 由引理2.4可知, 任取 $K\in\mathcal{T}^c$, 都存在 $B>0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-B}K,\mathcal{T}^{\leqslant 0})=0$. 再由引理1.14可知 $F\in\mathcal{T}_c^-\subseteq\mathcal{T}^-$, 于是存在 $A>0$ 使得 $\Sigma^AF\in\mathcal{T}^{\leqslant 0}$. 从而可知当 $i\leqslant -A-B$ 时, 均有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^iK,F)=0$. 构造:

$$\mathcal{L}:=\{L\in\mathcal{T}^c\,|\,\forall i\in\mathbb{Z},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^iG,L)\in R\text{-mod}\}$$

容易看出 $G\in\mathcal{L}$ 且 $\mathcal{L}$ 对扩张和直和项封闭, 从而 $\mathcal{T}^c=\langle G\rangle\subseteq\mathcal{L}$. 再任取 $L\in\mathcal{T}^c$, 构造:

$$\mathcal{K}(L):=\{K\in\mathcal{T}^c\,|\,\forall i\in\mathbb{Z},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^iK,L)\in R\text{-mod}\}$$

同理可得 $\mathcal{T}^c = \langle G \rangle \subseteq \mathcal{K}(L)$, 即任取 $K, L \in \mathcal{T}^c$, 都有 $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, L) \in R$-mod.
现固定 $K \in \mathcal{T}^c$, 因为 $F \in \mathcal{T}_c^-$, 所以必有好三角 $L \to F \to D \to \Sigma L$, 其中 $L \in \mathcal{T}^c$, $D \in \mathcal{T}^{\leqslant -i-B-1}$, 将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, -)$ 作用在上面得正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, \Sigma^{-1} D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, L) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, D)$$

由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-B} K, \mathcal{T}^{\leqslant 0}) = 0$ 可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, D) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, \Sigma^{-1} D)$ 于是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^i K, L) \in R$-mod. □

定义 3.3. 在引理3.6的记号和约定下, 设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ 为满子范畴, 考虑序列:

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \cdots$$

若 $\forall m \in \mathbb{N}^+$, $E_m \in \mathcal{B}$ 且当 $i \geqslant -m$ 时, $\mathcal{H}^i(E_m) \to \mathcal{H}^i(E_{m+1})$ 是同构, 则称 $\{E_*\}$ 为强 $\mathcal{B}$-逼近系 (strong approximating system). 若有 $F \in \mathcal{T}$ 以及态射 $g_i : E_i \longrightarrow F$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & E_{i+1} \arrow[dl, "g_{i+1}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

并且当 $i \geqslant -m$ 时, $\mathcal{H}^i(E_m) \to \mathcal{H}^i(F)$ 是同构, 则称 $\{E_*\}$ 是 F 的强 $\langle G \rangle_n$-逼近系.

注释: 上述定义源自 [N1] 中的定义 7.3, 我们认为上述定义在指标的处理上有些微妙, 因为原文中想表达的是上述定义体现了命题2.9后的推论的某些性质.

引理 3.7. *在定义3.3的约定和记号下, 我们有:*

(1) *取 $F \in \mathcal{F}^-$, 并设 F 有强 $\langle G \rangle_n$-逼近系 $\{E_*\}$, 则有 (非典范) 的同构 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \to F$.*

(2) *$\forall F \in \mathcal{T}_c^-$ 都有强 $\mathcal{T}^c$-逼近系.*

(3) *设 $\{E_*\}$ 为任一强 $\langle G \rangle_n$-逼近系, 则它必是 $F := \mathrm{Hocolim}(E_i)$ 的强 $\langle G \rangle_n$-逼近系, 此时 $F \in \mathcal{T}_c^-$.*

证明. (3): 令 $F = \mathrm{Hocolim}(E_i)$. 注意到 $\forall i \in \mathbb{N}^+$, $E_i \in \langle G \rangle_n \subseteq \mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{T}^-$, 不妨假设 $E_1 \in \mathcal{T}^{\leqslant n}$. 由条件可知当 $i \geqslant -1$ 时, 对 $\forall m \in \mathbb{N}^+$, 态射 $\mathcal{H}^i(E_1) \to \mathcal{H}^i(E_m)$ 是同构, 故由 E_1 的位置可知, 当 $i > n$ 时有 $\mathcal{H}^i(E_m) = 0$. 而引理3.1告诉我们此时 $E_m \in \mathcal{T}^{\leqslant n}$, 从而同伦余极限 $F \in \mathcal{T}^{\leqslant n}$. 由条件和引理**??**可知, 对 $\forall i \in \mathbb{Z}$, 都有 $\operatorname{colim}_i \mathcal{H}^i(E_m) \cong \mathcal{H}^i(F)$, 故当 $i \geqslant -m$ 时, 有 $\mathcal{H}^i(E_m) \cong \mathcal{H}^i(F)$. 将 $E_m \to F$ 延申成好三角 $E_m \to F \to D_m \to \Sigma E_m$, 故当 $i \geqslant -m$ 时有 $\mathcal{H}^i(D_m) = 0$, 再由 F 的位置可知 $D \in \mathcal{T}^-$, 从而由引理3.1可知 $D_m \in \mathcal{T}^{\leqslant -m-1}$. 最后由 $E_m \in \mathcal{T}^c$ 和 m 的任意性可知 $F \in \mathcal{T}_c^-$.
(1): 首先一定有态射 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \to F$, 由条件和引理**??**可知对 $\forall i \in \mathbb{Z}$, 都有 $\operatorname{colim}_i \mathcal{H}^i(\mathrm{Hocolim}(E_i)) \cong \mathcal{H}^i(F)$. 再由 (3) 可知 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \in \mathcal{T}_c^-$, 故由 t-结构的选取可知该态射在 $\mathcal{T}^-$ 中, 最后由引理**??**可知 $\mathrm{Hocolim}(E_i) \to F$ 是同构.
(2): 任取 $F \in \mathcal{T}_c^-$, 故存在好三角 $E_1 \xrightarrow{g_1} F \to D_1 \to \Sigma E_1$, 其中 $E_1 \in \mathcal{T}^c$, $D_1 \in \mathcal{T}^{\leqslant -3}$. 观察正合列 $\mathcal{H}^{i-1}(D_1) \to \mathcal{H}^i(E_1) \to \mathcal{H}^i(F) \to \mathcal{H}^i(D_1)$ 显然当 $i \geqslant -1$ 时有 $\mathcal{H}^{i-1}(D_1) = \mathcal{H}^i(D) = 0$, 故

$\mathcal{H}^i(E_1) \cong \mathcal{H}^i(F)$. 下面我们构造 E_2 和 $f_1 : E_1 \to E_2$. 由 $E_1 \in \mathcal{T}^c$ 和引理2.4可知存在 $N > 0$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_1, \mathcal{T}^{\leqslant -N}) = 0$. 因为 $F \in \mathcal{T}_c^-$, 故存在好三角 $E_2 \xrightarrow{g_2} F \to D_2 \to \Sigma E_2$ 使得 $E_2 \in \mathcal{T}^c$, $D_2 \in \mathcal{T}^{-N-4}$, 类似地我们可以说明当 $i \geqslant -2$ 时 $\mathcal{H}^i(E_2) \cong \mathcal{H}^i(F)$. 再由 $E_1 \xrightarrow{g_1} F \to D_2$ 复合为 0 可知 g_1 可分解为 $E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{g_2} F$, 归纳下去即可完成证明. □

参考文献

[N1] Amnon Neeman, Triangulated categories with a single compact generator and a brown representability theorem, Preprint, 2018, arXiv:1804.02240v4.

[N2] Amnon Neeman, Gluing approximable triangulated categories.

[N3] Amnon Neeman, The categories $\mathcal{T}^c$ and $\mathcal{T}_c^b$ determine each other.

[N4] Amnon Neeman, The category $[\mathcal{T}^c]^{\mathrm{op}}$ as functors on $\mathcal{T}_c^b$.

[N5] Amnon Neeman, Strong generators in $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ and $\mathcal{D}^b_{\mathrm{coh}}(X)$.

[N6] Amnon Neeman, The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel.

[N7] Amnon Neeman, Triangulated Categories.

[CNSH] Alberto Canonaco, Amnon Neeman, Paolo Stellari, The passage among the subcategories of weakly approximable triangulated categories.

[BYZZ] 鲍炎红, 叶郁, 章璞, 张跃辉, Brown 可表示定理及其应用.

[BS] Brooke Shipley, Stefan Schwede, Stable model categories are categories of modules.

[NP] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, Sheaves on manifolds.

[AI] Apostolos Beligianis, Idun Reiten, Homological and homotopical aspects of torsion theories.

[BCRPZ] Rudradip Biswas, Hongxing Chen, Kabeer Manali Rahul, Chris J. Parker, Junhua Zheng, Bounded t-structures, finitistic dimensions, and singularity categories of triangulated categories.

[KN] Bernhard Keller, Pedro Nicolas, Weight structures and simple dg modules for positive dg algebras.