量化参数选择

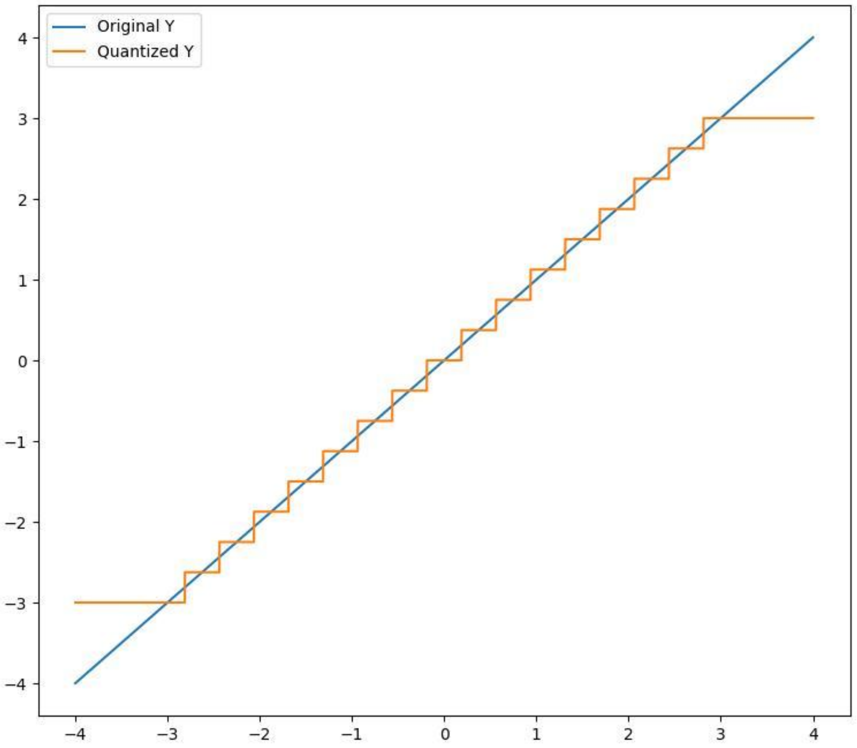
Sensetime HPC Group

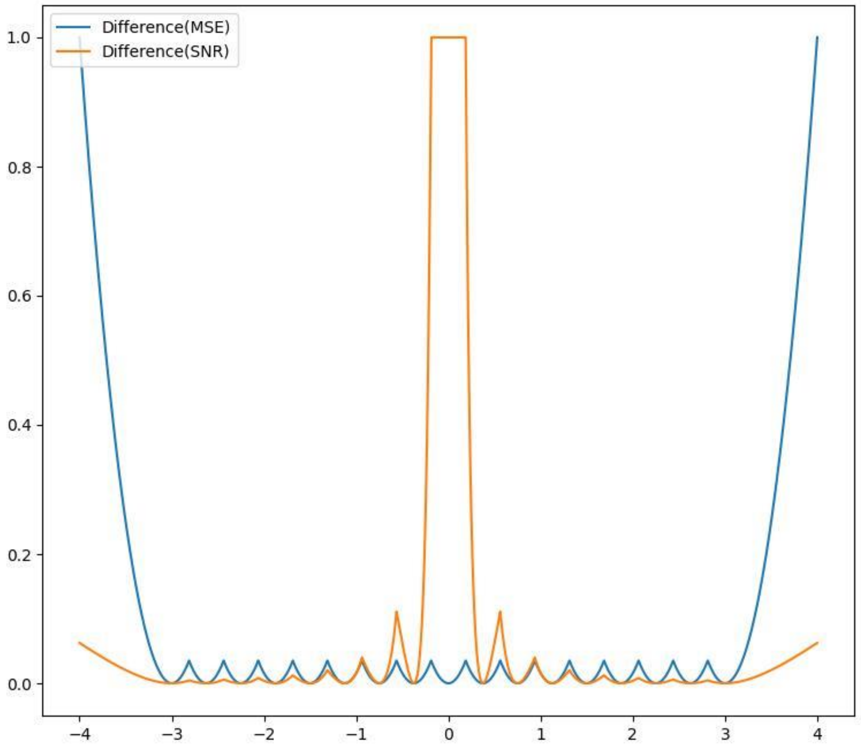
定义

- 为了研究方便，我们假定： $x_i \sim N(0,1)$ 且独立同分布

  - 我们定义量化函数 $Q(x,s) = \begin{cases} [\frac{x}{s}], & else \\ 127, & \frac{x}{s} > 127.5 \\ -127, & \frac{x}{s} < -127.5 \end{cases}$ ，额外定义截断值 $c = s * 127.5$
  - 我们定义反量化函数 $DQ(x,s) = x * s$
  - 我们定义x的量化值为 $x'(s) \triangleq DQ(Q(x,s),s)$
  - $L_{MSE} = \frac{\sum_i (x_i - x_i')^2}{N}$
  - $L_{N/S} = \frac{\sum_i \frac{(x_i - x_i')^2}{x_i^2}}{N}$

量化误差分析 - 量化函数与量化误差





量化计算例子

- $\begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 25.1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Q(x,0.1)} \begin{bmatrix} 13 & 47 & -5 \\ 21 & 6 & -11 \\ 100 & 3 & 127 \end{bmatrix} \xrightarrow{DQ(x,0.1)} \begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 12.7 \end{bmatrix}$
- $L_{MSE} = \frac{\sum_i (x_i - x_i')^2}{N} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 25.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 12.7 \end{bmatrix} \right\|_2^2}{9} = \frac{12.4^2}{9} = 17.08$
- $L_{N/S} = \frac{\sum_i \frac{(x_i - x_i')^2}{x_i^2}}{N} = \frac{12.4^2}{9 * 25.1^2} = 0.027$

量化参数选择

- 量化参数选择：选择一个合适的s，使得量化误差最小

$$s^* = \underset{s}{\operatorname{argmin}} \frac{\sum_i (x_i - x_i'(s))^2}{N}$$

- 注意到 s 与 截断值 c 之间存在固定比例关系，因此下文中我们有时也变相去求解最优截断值。

量化参数选择

- 一个简单的思路：

$$L_{MSE}=\frac{\sum_i (x_i-x_i')^2}{N}=\frac{\left\|\begin{bmatrix}1.3 & 4.7 & -0.5\\ 2.1 & 6.0 & -1.1\\ 10.0 & 0.3 & 25.1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1.3 & 4.7 & -0.5\\ 2.1 & 6.0 & -1.1\\ 10.0 & 0.3 & 12.7\end{bmatrix}\right\|_2^2}{9}=\frac{12.4^2}{9}=17.08$$

- MSE误差主要来自于网络中较大的项，这是因为边界值的MSE是发散的。因此我们可以设计足够大的s，使得所有边界值都可以被表示：

$$s_{MAX}=\frac{Max(Abs(X))}{127}=\frac{25.1}{127}=0.2$$

量化参数选择

- $\begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 25.1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Q(x,0.1)} \begin{bmatrix} 13 & 47 & -5 \\ 21 & 60 & -11 \\ 100 & 3 & 127 \end{bmatrix} \xrightarrow{DQ(x,0.1)} \begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 12.7 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 25.1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Q(x,0.2)} \begin{bmatrix} 6 & 24 & -2 \\ 10 & 30 & -6 \\ 50 & 2 & 126 \end{bmatrix} \xrightarrow{DQ(x,0.2)} \begin{bmatrix} 1.2 & 4.8 & -0.4 \\ 2.0 & 6.0 & -1.2 \\ 10.0 & 0.4 & 25.2 \end{bmatrix}$
- $L_{MSE} = \frac{\sum_i (x_i - x_i')^2}{N} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1.3 & 4.7 & -0.5 \\ 2.1 & 6.0 & -1.1 \\ 10.0 & 0.3 & 25.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.2 & 4.8 & -0.4 \\ 2.0 & 6.0 & -1.2 \\ 10.0 & 0.4 & 25.2 \end{bmatrix} \right\|_2^2}{9} = \frac{7 * 0.1^2}{9} = 0.078$
- $L_{N/S} = \frac{\sum_i \frac{(x_i - x_i')^2}{{x_i}^2}}{N} = ?$

量化参数选择 - 最大值截断

- 方案1：最大值截断：

$$s_{MAX}=\frac{Max(Abs(X))}{127}=\frac{25.1}{127}=0.2$$

- 问题：在已知$x_i \sim N(0,1)$ 且独立同分布的情况下，假设总体 X 元素数量趋近于无穷大，试问$E\{Max(X)\}$是否同样趋近于无穷大？在此情况下s_{MAX}是否也同样趋近于无穷大？

$$E\{Max(X)\}=\int_{-inf}^{+inf} uP(Max(X)=u)\,du$$

$$=C_N^1\int_{-inf}^{+inf} u\,\varphi(u)(\int_{-inf}^{u}\varphi(v)dv)^{N-1}du$$

量化参数选择 - 最大值截断

$$\lim_{N->inf}(C_N^1\int_{-inf}^{+inf}u\,\varphi(u)(\int_{-inf}^{u}\varphi(v)dv)^{N-1}du) = \sqrt{2log(N)} = inf$$

$$s_{MAX} = \frac{\sqrt{2log(N)}}{127} = \frac{inf}{127} = inf$$

$$\text{will have: } \lim_{N->inf}(E\{L_{MSE}\}) = inf$$

- 也就是说最大值截断在元素数量趋于无限时，会出现误差发散的情况。

量化参数选择 - 分位数截断

- 方案2：$k-\sigma$ 截断：

$$s_{k-\sigma} = \frac{k * \sigma}{127}$$

意义：σ 与 N无关，因此当N趋近于无穷大时，量化误差的期望是收敛的。

- 证明：

$$E\{L_{MSE}\} = \int_{-k\sigma-\frac{s}{2}}^{k\sigma+\frac{s}{2}} (x' - x)^2 \varphi(x) dx + \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} (x - k\sigma)^2 \varphi(x) dx + \int_{-inf}^{-k\sigma-\frac{s}{2}} (x + k\sigma)^2 \varphi(x) dx$$

$$E\{L_{MSE}\} = \int_{-k\sigma-\frac{s}{2}}^{k\sigma+\frac{s}{2}} (x' - x)^2 \varphi(x)dx + \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} (x - k\sigma)^2 \varphi(x)dx + \int_{-inf}^{-k\sigma-\frac{s}{2}} (x + k\sigma)^2 \varphi(x)dx$$

- 上式中第一项称为表示误差，显然存在上界，后两项称为正负截断误差，只需要证明后两项存在上界。

$$\int_{-inf}^{-k\sigma-\frac{s}{2}} (x + k\sigma)^2 \varphi(x)dx = \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} (x - k\sigma)^2 \varphi(x)dx$$

- 注意到在高斯分布中，正负截断误差相等。

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}(x-k\sigma)^2\,\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}(x-k\sigma)^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}(x-k\sigma)^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}(x^2-2k\sigma x+k^2\sigma^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx-2k\sigma\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx+k^2\sigma^2\int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 2k\sigma \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + k^2\sigma^2 \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$x = \sqrt{2}t, dx = \sqrt{2}dt$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(k\sigma+\frac{s}{2})}^{inf} t^2 e^{-t^2} dt - 2k\sigma \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(k\sigma+\frac{s}{2})}^{inf} t e^{-t^2} dt + k^2\sigma^2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(k\sigma+\frac{s}{2})}^{inf} e^{-t^2} dt$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(k\sigma+\frac{s}{2})}^{inf} t^2 e^{-t^2} dt - 2k\sigma \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(k\sigma+\frac{s}{2})}^{inf} t e^{-t^2} dt + k^2\sigma^2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(k\sigma+\frac{s}{2})}^{inf} e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = erf(x)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2 + 1) erf(\frac{x}{\sqrt{2}}) - (x - 2k\sigma) e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2+1)erf(\frac{x}{\sqrt{2}})-(x-2k\sigma)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}$$

$$x=inf\ \ ->\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2+1)$$

$$x=k\sigma+\frac{s}{2}\ ->\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2+1)erf(\frac{k\sigma+\frac{s}{2}}{\sqrt{2}})+(k\sigma-\frac{s}{2})e^{-\frac{(k\sigma+\frac{s}{2})^2}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2+1)erf(\frac{x}{\sqrt{2}})-(x-2k\sigma)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf}\boxed{<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2+1)}$$

截断误差上界

$$E\{L_{MSE}\} = \underbrace{\int_{-k\sigma-\frac{s}{2}}^{k\sigma+\frac{s}{2}} \underbrace{(x' - x)^2}_{\text{有界}} \varphi(x)dx + \int_{k\sigma+\frac{s}{2}}^{inf} \underbrace{(x - k\sigma)^2}_{\text{有界}} \varphi(x)dx + \int_{-inf}^{-k\sigma-\frac{s}{2}} \underbrace{(x + k\sigma)^2}_{\text{有界}} \varphi(x)dx}_{\text{有界}}$$

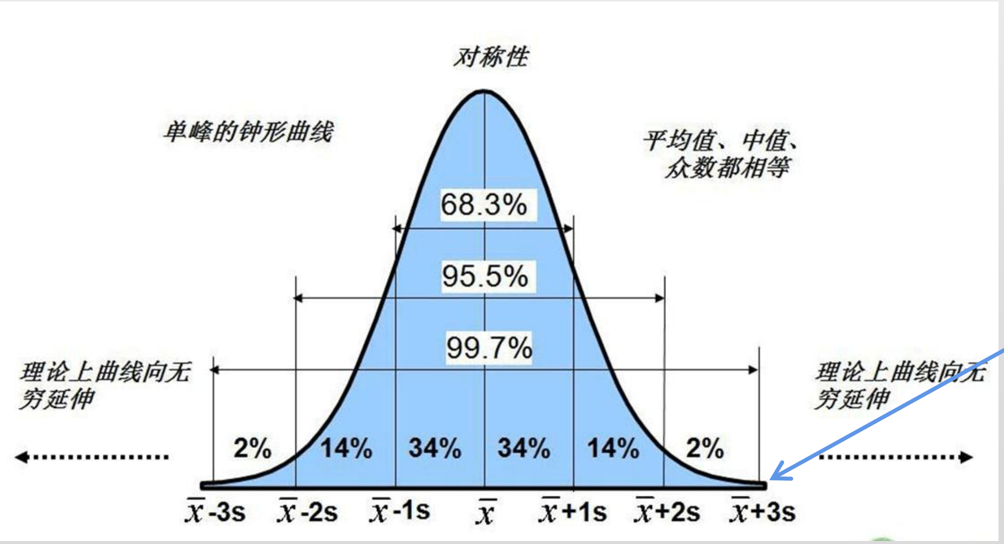
量化参数选择 - 分位数截断

- 方案2：$k-\sigma$ 截断：

$$s_{k-\sigma}=\frac{k*\sigma}{127}$$

好处：σ 与 N无关，因此当N趋近于无穷大时，量化误差的期望是有界的。（可以进一步证明收敛性）

在实践中，我们往往不使用 $\mathrm{k}\sigma$ 而是利用分位点与 $\mathrm{k}\sigma$ 之间的关系确定截断值。



以第99.99%大的值作为截断值

这个值接近于 4σ，此时的$s=\frac{4\sigma}{127}$

量化参数选择 - 最优截断

- 方案3：最优截断：

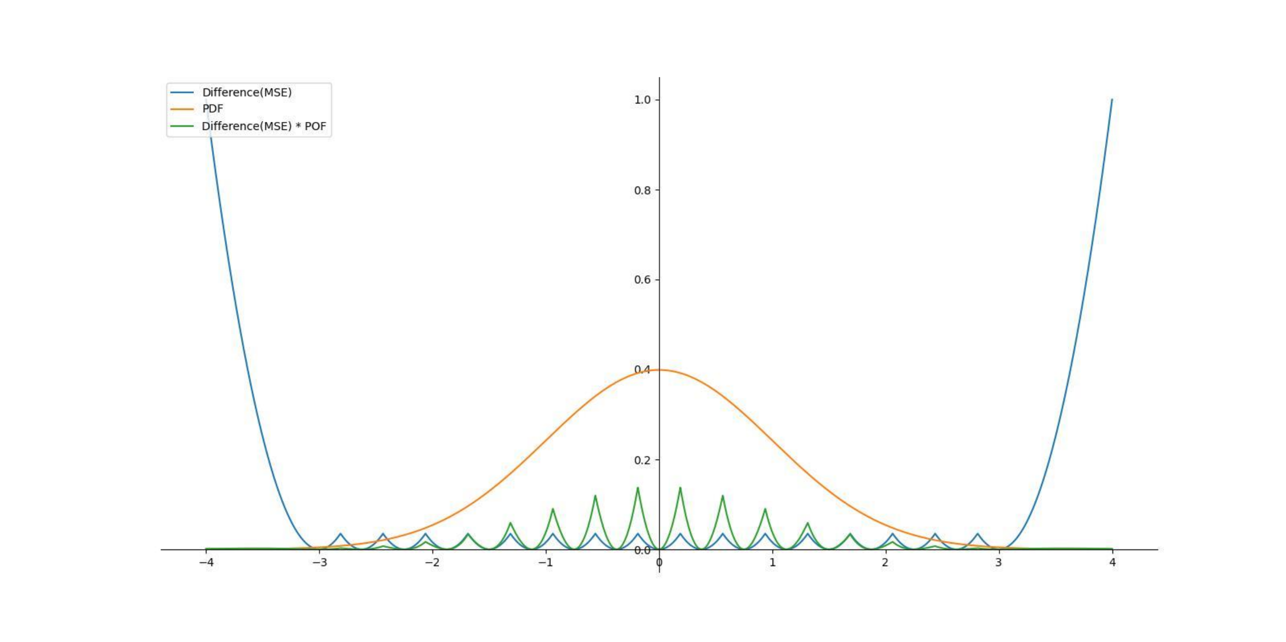
$$s_{opt} = \underset{s}{\operatorname{argmin}}\, E\{L_{MSE}\}$$

$$E\{L_{MSE}\} = \int_{c-\frac{s}{2}}^{c+\frac{s}{2}} (x' - x)^2\, p(x)\, dx + \int_{c+\frac{s}{2}}^{inf} (x - c)^2\, p(x)\, dx + \int_{-inf}^{-c-\frac{s}{2}} (x + c)^2\, p(x)\, dx$$

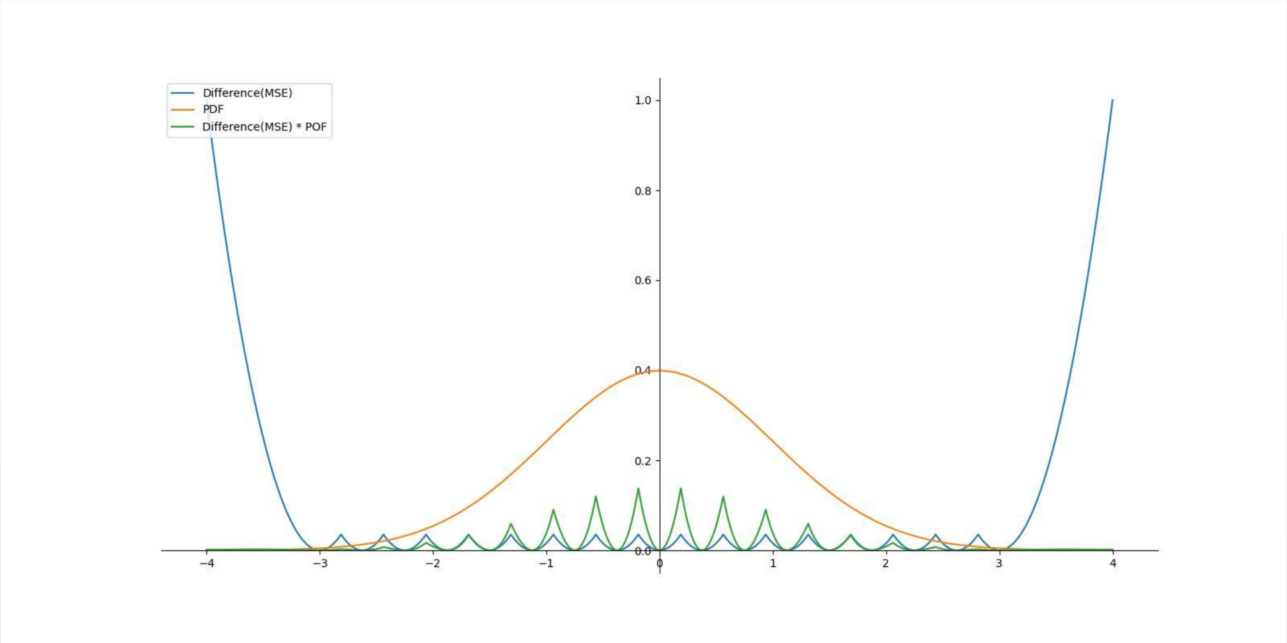
- 思考：我们已经求出了$E\{L_{MSE}\}$的表达式，能否直接解出最优的截断值c与尺度因子s？
- 此处我们不再局限于高斯分布，而直接求取广义分布 $p(x)$ 的最优截断。

- 首先处理表示误差：

$$\int_{-c-\frac{s}{2}}^{c+\frac{s}{2}} (x' - x)^2 \, p(x) \, dx$$



$$\int_{-c-\frac{s}{2}}^{c+\frac{s}{2}} (x' - x)^2 \, p(x) \, dx = \sum_i \int_{l_i}^{u_i} (x_i' - x)^2 \, p(x) \, dx$$



$$\int_{-c-\frac{s}{2}}^{c+\frac{s}{2}} (x' - x)^2 p(x) dx = \sum_i \int_{l_i}^{u_i} (x_i' - x)^2 p(x) dx$$

- 考虑到$\varphi(\mathrm{x})$原函数不存在，考虑使用常数c(i)替换$\varphi(\mathrm{x})$

$$\sum_i \int_{l_i}^{u_i} (x_i' - x)^2 \varphi(x) dx \approx \sum_i \int_{l_i}^{u_i} (x_i' - x)^2 c(i) dx = \sum_i c(i) \left. \frac{(x - x_i')^3}{3} \right|_{l_i}^{u_i}$$

$$\sum_i c(i) \left. \frac{(x - x_i')^3}{3} \right|_{l_i}^{u_i} = \frac{s^3}{12} \sum_i c(i) = \frac{s^3}{12} * \frac{P(c + \frac{s}{2}) - P(-c - \frac{s}{2})}{s}$$

$$= P(-c - \frac{s}{2} < x < c + \frac{s}{2}) \frac{s^2}{12}$$

$$\sum_i c(i) = \frac{2P(c + \frac{s}{2}) - P(-c - \frac{s}{2})}{s}$$

- 思考：为什么上式成立？

- 处理截断误差：

$$\int_{c+\frac{s}{2}}^{inf}(x-c)^2\,p(x)dx+\int_{-inf}^{-c-\frac{s}{2}}(x+c)^2\,p(x)dx$$

$$=\int_{c+\frac{s}{2}}^{inf}(x-c)^2\,dP_1(x)=(x-c)^2P(x)-\int_{c+\frac{s}{2}}^{inf}P_1(x)\,d(x-c)^2$$

$$=(x-c)^2P_1(x)-2((x-c)P_2(x)-P_3(x))\Big|_{c+\frac{s}{2}}^{inf}$$

$$E\{L_{MSE}\} =$$

$$(x-c)^2P_1(x) - 2((x-c)P_2(x) - P_3(x))\Big|_{c+\frac{s}{2}}^{inf} + (x+c)^2P_1(x) - 2((x+c)P_2(x) - P_3(x))\Big|_{-inf}^{-c-\frac{s}{2}}$$

$$+(P_1(c+\frac{s}{2}) - P_1(-c-\frac{s}{2}))\frac{s^2}{12}$$

$$E\{L_{MSE}\} = \frac{s^3}{12} * \frac{2\int_0^{k\sigma+\frac{s}{2}}\varphi(x)dx}{s} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(k^2\sigma^2+1)(1-erf(\frac{k\sigma+\frac{S}{2}}{\sqrt{2}})) + (k\sigma-\frac{s}{2})e^{-\frac{(k\sigma+\frac{S}{2})^2}{2}}$$

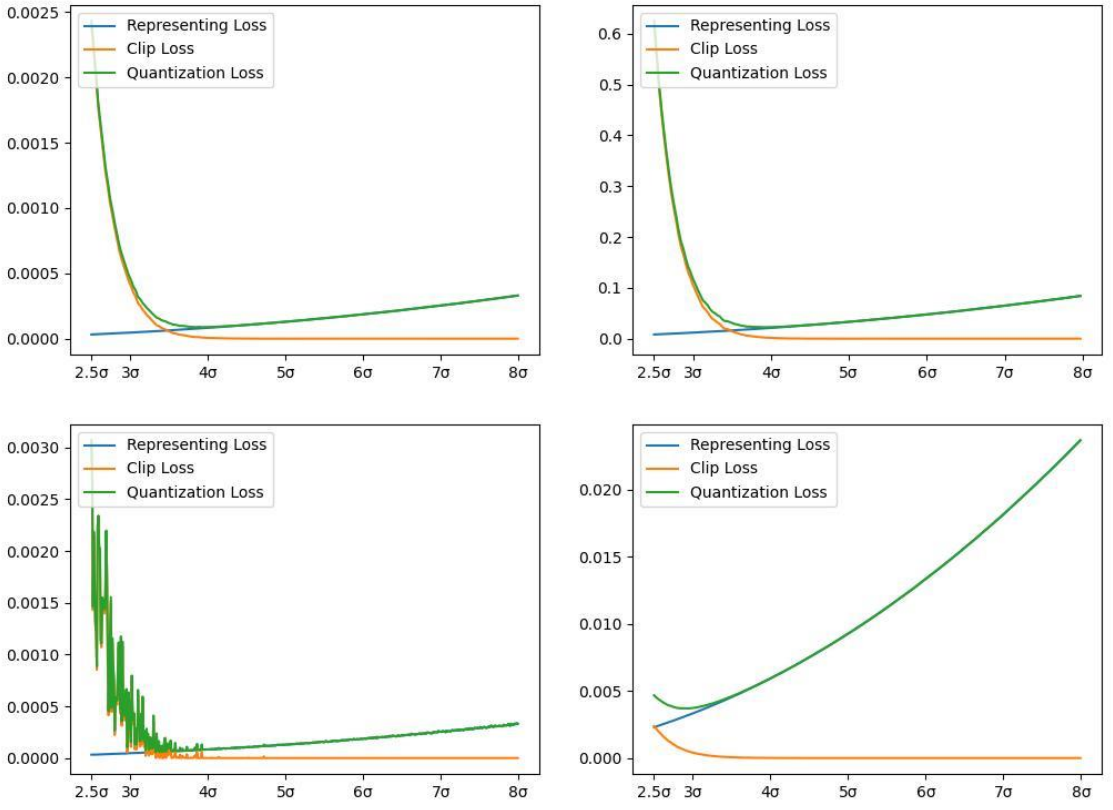
量化误差分析 - Bernard Widrow公式

$$E\{L_{MSE}\} = (x-c)^2P_1(x) - 2((x-c)P_2(x) - P_3(x))\Big|_{c+\frac{s}{2}}^{inf} + (x+c)^2P_1(x) - 2((x+c)P_2(x) - P_3(x))\Big|_{-inf}^{-c-\frac{s}{2}}$$

$$+(P_1(c+\frac{s}{2}) - P_1(-c-\frac{s}{2}))\frac{s^2}{12}$$

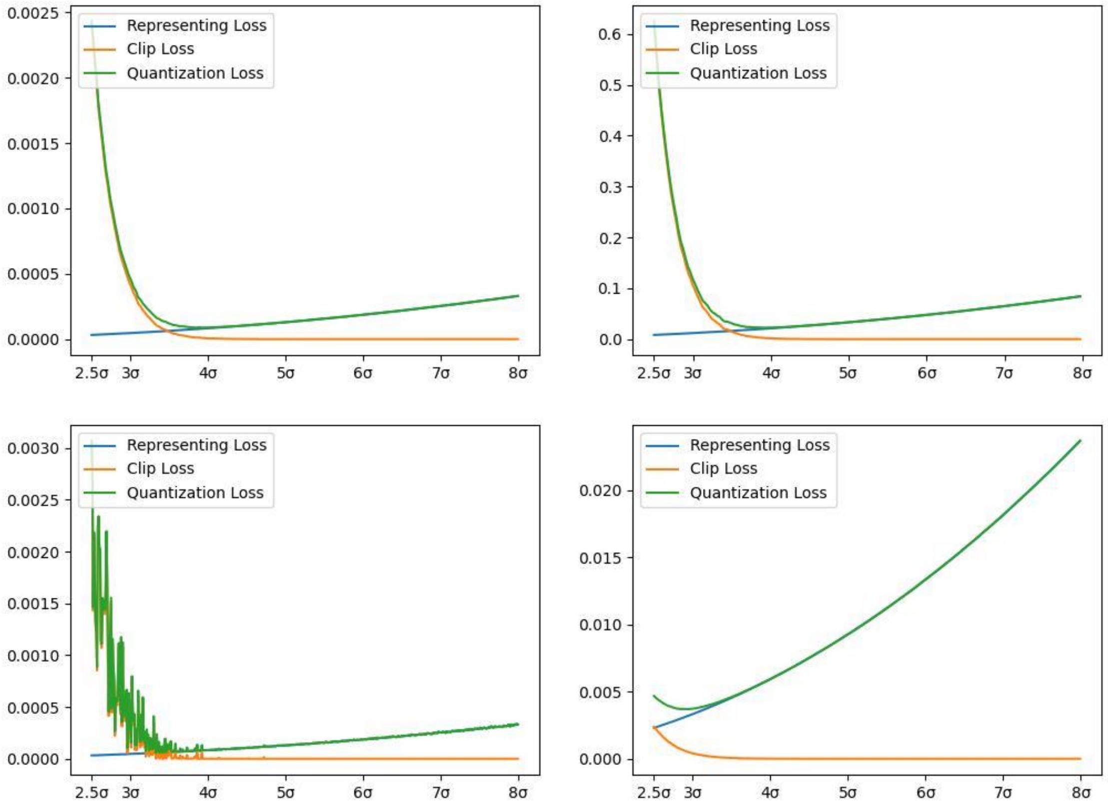
- 该等式是量化核心成果之一，该等式表明了量化误差是正负截断误差与表示误差的累计和。
- 对于高斯分布而言，截断误差随着截断值增长而指数级收敛；表示误差随着截断值增长而增长，增长速度为二次方级。
- 在截断值不变的情况下，表示误差随scale的增长而增长，增长速度为二次方级。

量化误差分析 - 截断误差C与表示误差R的关系



- 图左上：8bit定点 sigma=1时的C-R关系图
- 图右上：8bit定点 sigma=16时的C-R关系图
- 图左下：8bit定点 sigma=1时的C-R关系图（只有4096个样本点）
- 图左上：4bit定点 sigma=1时的C-R关系图

量化误差分析 - 截断误差C与表示误差R的关系



结论：

- 由于C的指数级收敛，在C-R关系图中R可以认为是一个线性增长的函数；量化参数选择实际上是C-R函数关系决定的。
- 对于不同的sigma而言，C-R关系保持稳定，可以选取相同的k*sigma作为截断点。
- 样本量较少时估计的方差较大，估计不稳定，方差主要来自于大值的阶段误差。
- 4bit与8bit的C-R性质不同，说明了4bit优化与8bit优化存在差异。

最优估计存在的问题

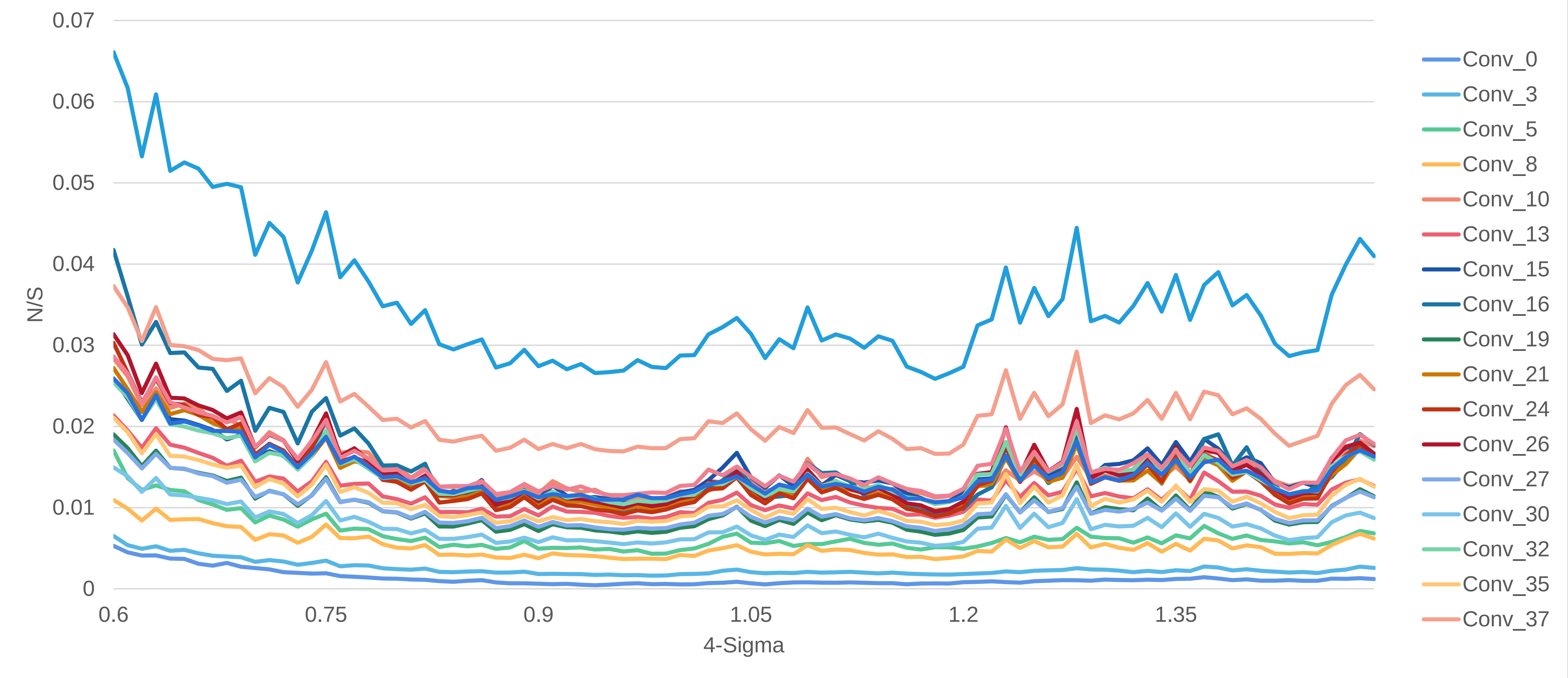
$$E\{L_{MSE}\} =$$

$$(x-c)^2P_1(x) - 2((x-c)P_2(x) - P_3(x))\Big|_{c+\frac{s}{2}}^{inf} + (x+c)^2P_1(x) - 2((x+c)P_2(x) - P_3(x))\Big|_{-inf}^{-c-\frac{s}{2}}$$

$$+(P_1(c+\frac{s}{2}) - P_1(-c-\frac{s}{2}))\frac{s^2}{12}$$

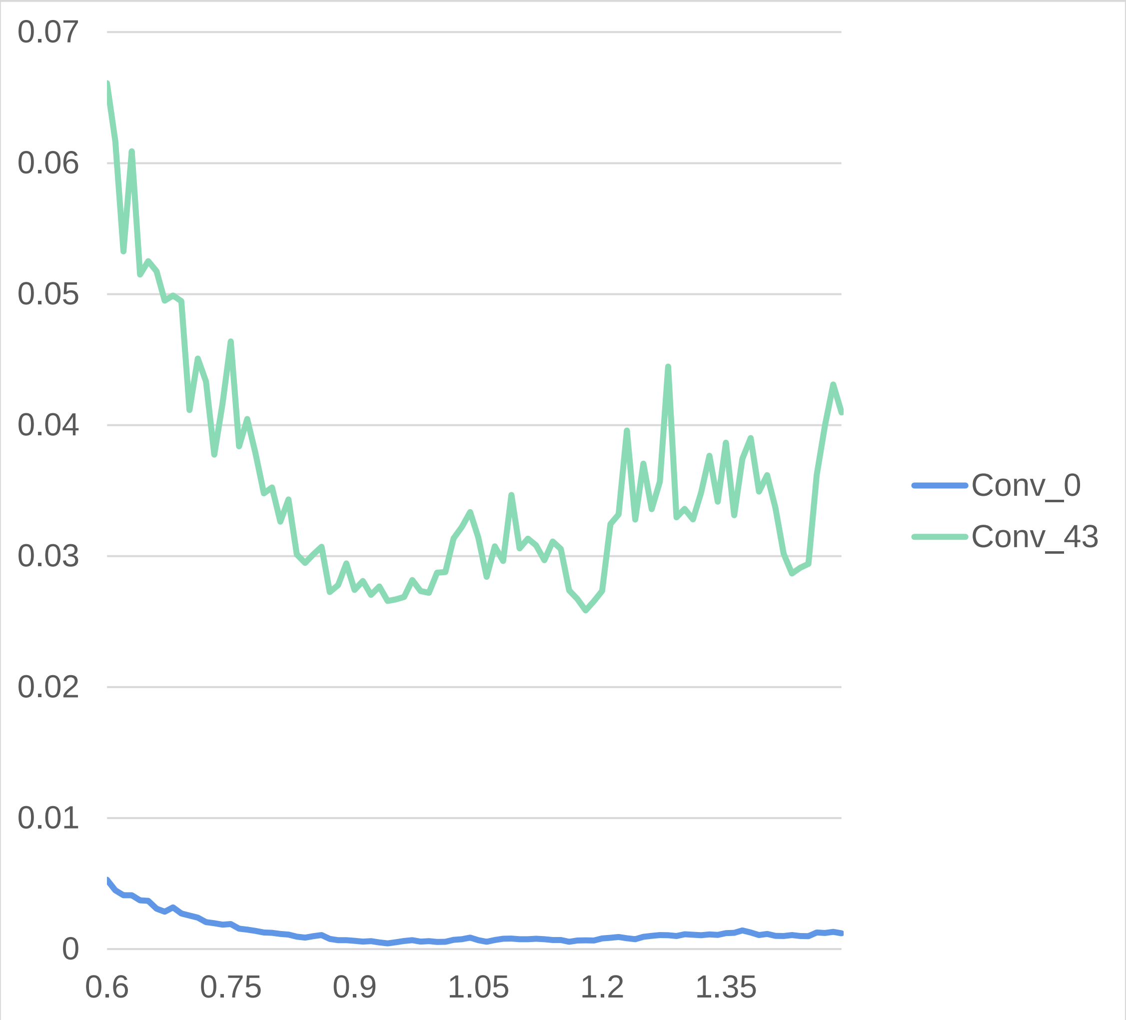
- 最优截断要求pdf的三阶积分，并求导令上式为0，对于大部分分布而言，无法顺利求得解析解。
- 同时在很多情况下，局部的MSE最优并不是全局MSE最优的。
- 数据量小时，估计的方差很大。

局部最优截断与全局最优截断



局部最优截断与全局最优截断

- 在resnet18的结果中我们不难发现：conv0的误差（局部量化误差）与conv43的误差（全局量化误差）之间的关系难以被建模，显然局部最优截断难以保证全局最优。



枚举最优截断

- 方案4：枚举截断值：

$$E\{L_{MSE}\} = \int_{-c-\frac{s}{2}}^{c+\frac{s}{2}} (x' - x)^2 \varphi(x) dx + \int_{c+\frac{s}{2}}^{inf} (x - k\sigma)^2 \varphi(x) dx + \int_{-inf}^{-c-\frac{s}{2}} (x + c)^2 \varphi(x) dx$$

- 考虑实际求解上述方程的最小值存在困难，可以直接改为直接用样本计算MSE，枚举截断值并从中取优。
  1. 初始化枚举候选点，例如C=[0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 ... 20.0]
  2. 从C任取一个候选点 c'，带入上式，求 $L_{MSE}|_{c'} = \sum(x'_i - x_i)^2$
  3. 寻找一个最合适的 c^* ，使得 $L_{MSE}|_{c^*}$ 最小，作为截断值
- 算法复杂度为O(NM)，其中N为元素个数，M为候选点个数。
- 实践中我们使用直方图统计优化该算法，经过优化的算法复杂度为O(M)。

枚举最优截断

- 是否存在其他损失函数可以用来确定截断值？例如寻找最优SNR，最优KL散度？

$$L_{KL} = \int_{-inf}^{inf} p(x) log \frac{p(x)}{q(x)}, \quad where\ q(x) = \frac{P(u_i) - P(l_i)}{s}$$

- 此处额外定义 $l_1 = -inf, u_{254} = inf$
  1. 初始化枚举候选点，例如C=[0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 ... 20.0]
  2. 从C任取一个候选点 c'，带入上式，求 $L_{KL}|_{c'} = \sum Count(l_i, u_i, X) log(\frac{Count(l_i,u_i,X)}{Count(l_i,u_i,X')})$
  3. 寻找一个最合适的 c^* ，使得 $L_{KL}|_{c'}$ 最小，作为截断值

- 算法复杂度为O(NM)，其中N为元素个数，M为候选点个数。
- 实践中我们使用直方图统计优化该算法，经过优化的算法复杂度为O(M)。

- $Count(l_i, u_i, X)$：统计X中有多少个元素落入区间$(l_i, u_i]$

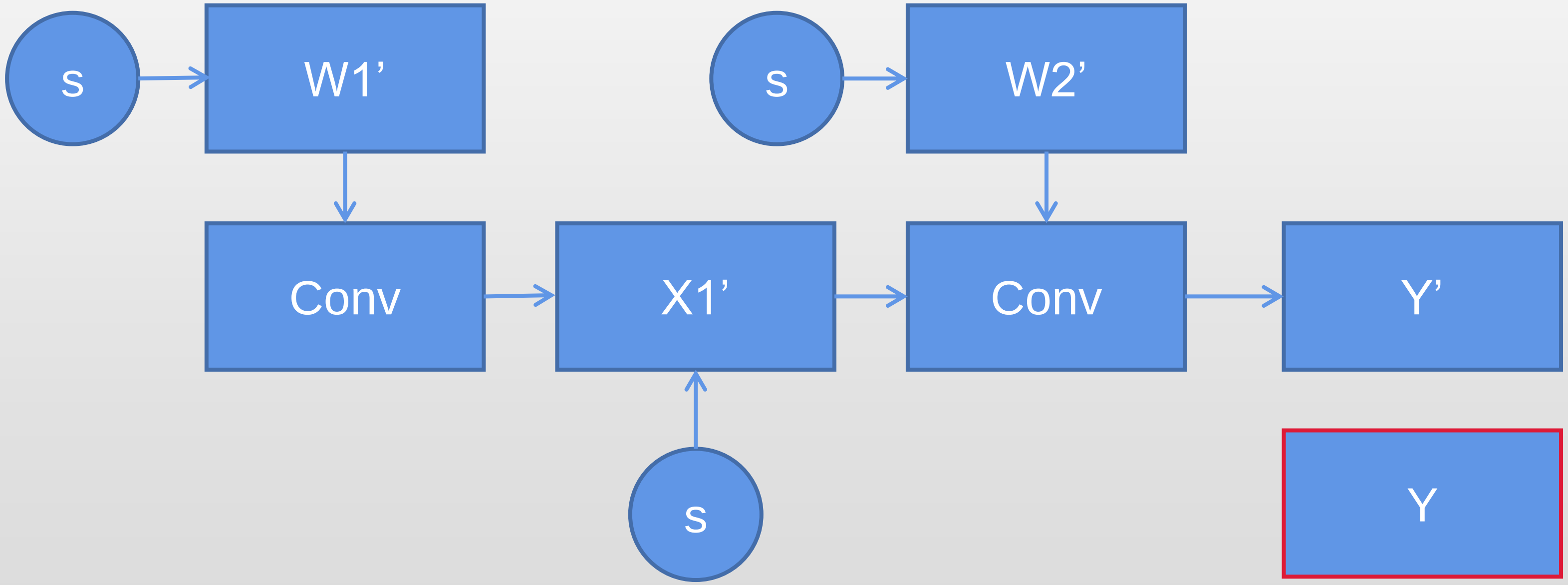
基于梯度优化的截断值

- 方案5：梯度优化截断值
  - 我们定义量化函数 $Q(x,s) = \begin{cases} [\frac{x}{s}], & else \\ 127, & \frac{x}{s} > 127.5 \\ -127, & \frac{x}{s} < -127.5 \end{cases}$ ，额外定义截断值 $c = s * 127.5$
  - 我们定义反量化函数 $DQ(x,s) = x * s$
  - 我们定义x的量化值为 $x'(s) \triangleq DQ(Q(x,s),s)$
- 思考：为了解决全局最优的问题，能否使用梯度优化 s?

$$\frac{dx'}{ds} = ?$$

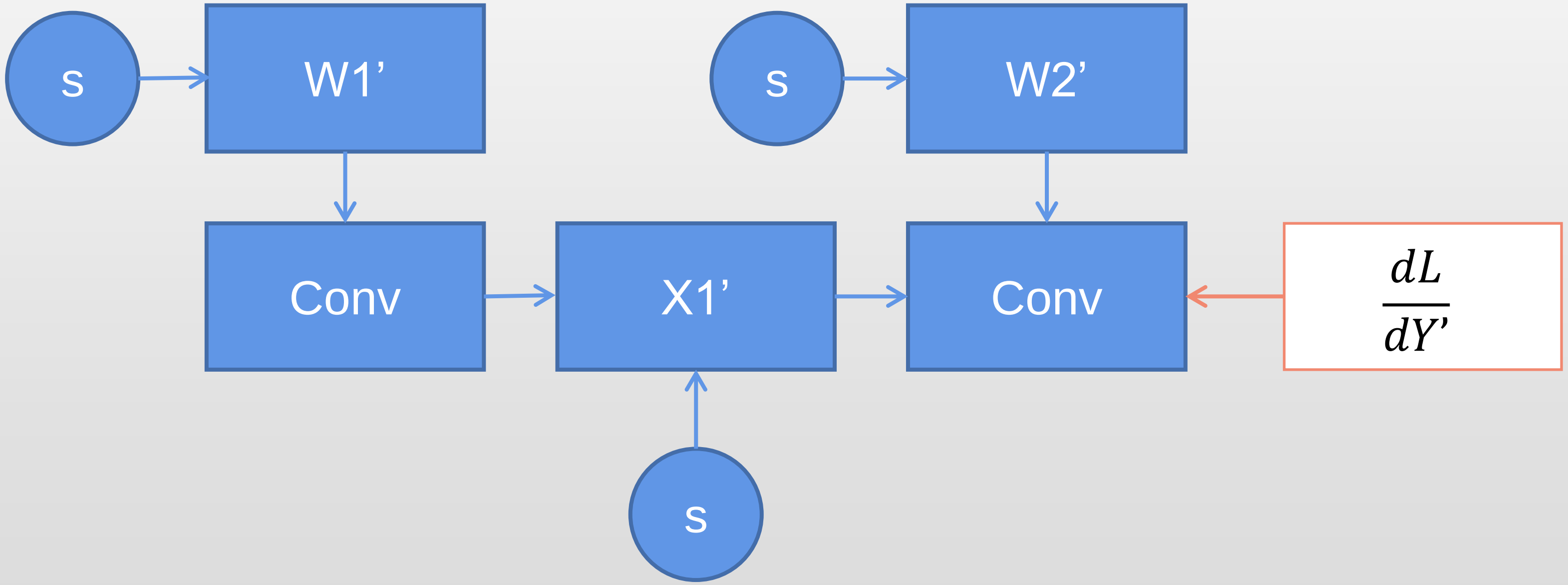
基于梯度优化的截断值

- 对于任意一个网络而言，我们总是能收集到量化后的网络输出Y’，以及量化前的网络输出Y。
- 因此我们可以直接计算L=MSE(Y’, Y)，形成损失函数并求导



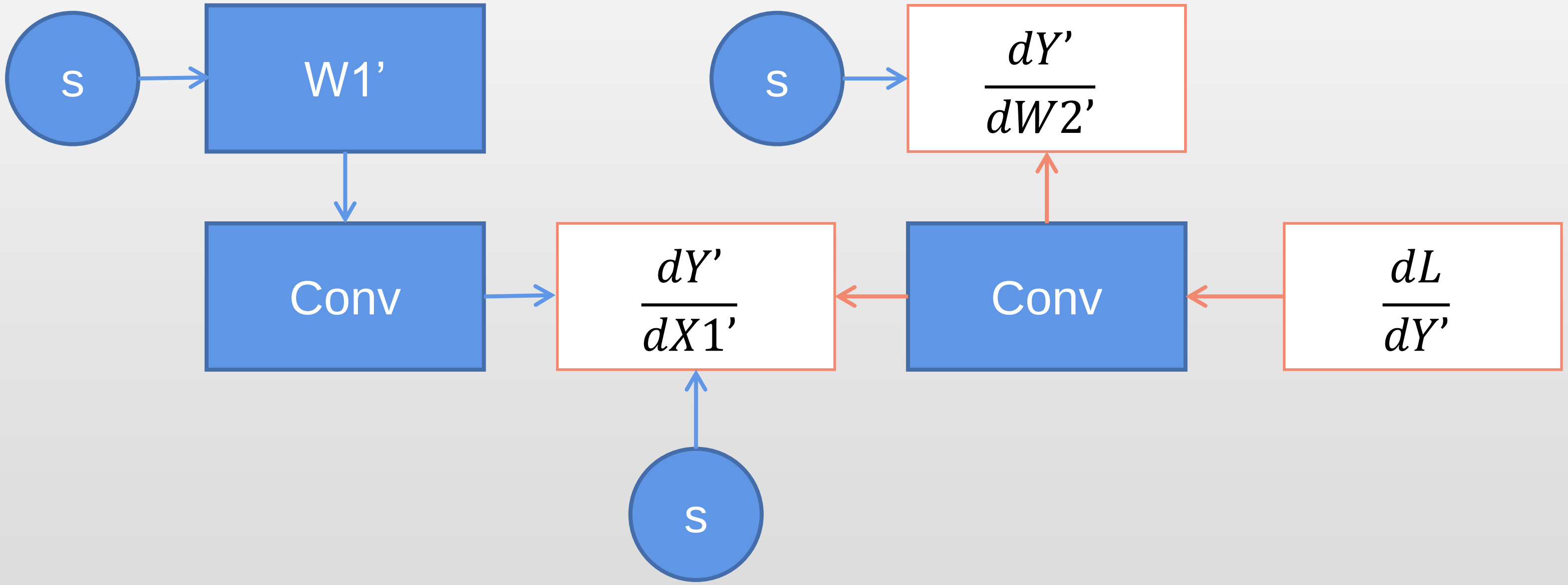
基于梯度优化的截断值

- 对于任意一个网络而言，我们总是能收集到量化后的网络输出Y’，以及量化前的网络输出Y。
- 因此我们可以直接计算L=MSE(Y’, Y)，形成损失函数并求导



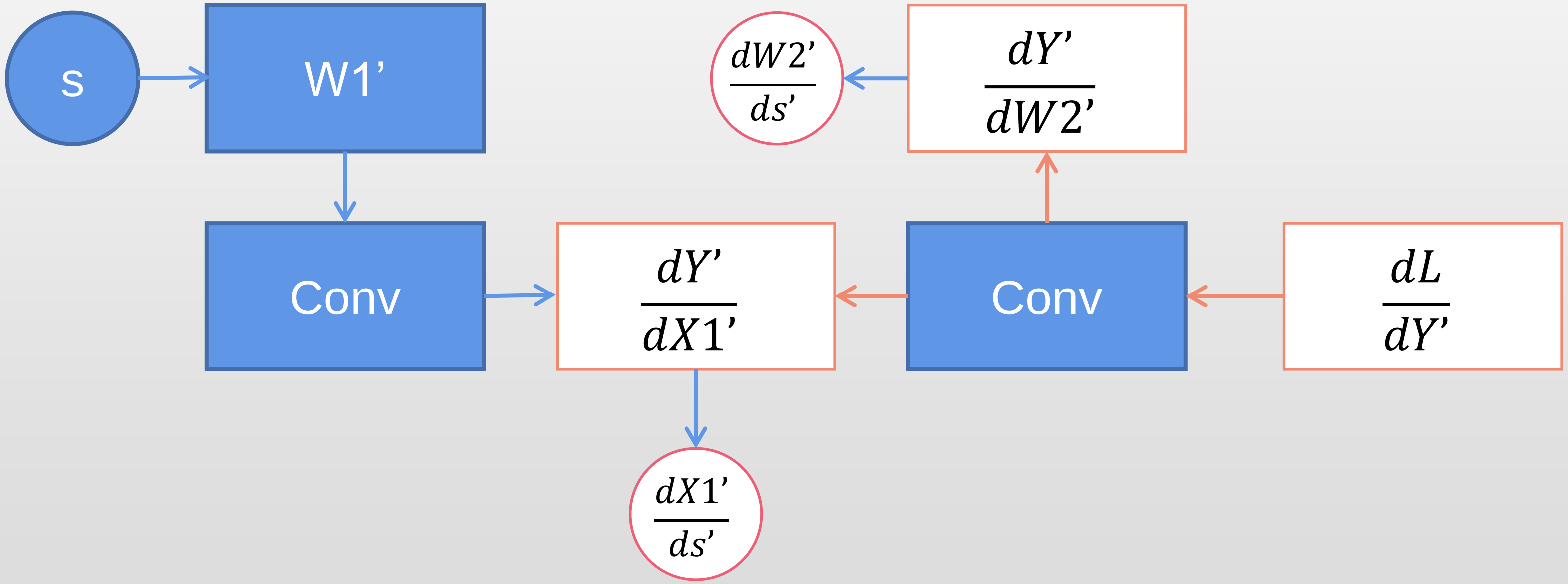
基于梯度优化的截断值

- 对于任意一个网络而言，我们总是能收集到量化后的网络输出Y'，以及量化前的网络输出Y。
- 因此我们可以直接计算L=MSE(Y', Y)，形成损失函数并求导



基于梯度优化的截断值

- 问题：导数 $\frac{dW2'}{ds'}$ 怎么求?



基于梯度优化的截断值

- 问题：导数 $\frac{dW2'}{ds'}$ 怎么求?
  - 我们定义量化函数 $Q(x,s) = \begin{cases} [\frac{x}{s}], & else \\ 127, & \frac{x}{s} > 127.5 \\ -127, & \frac{x}{s} < -127.5 \end{cases}$ ，额外定义截断值 $c = s * 127.5$
  - 我们定义反量化函数 $DQ(x,s) = x * s$
  - 我们定义x的量化值为 $x'(s) \triangleq DQ(Q(x,s),s)$

基于梯度优化的截断值

- 问题：导数 $\frac{dW2'}{ds'}$ 怎么求?

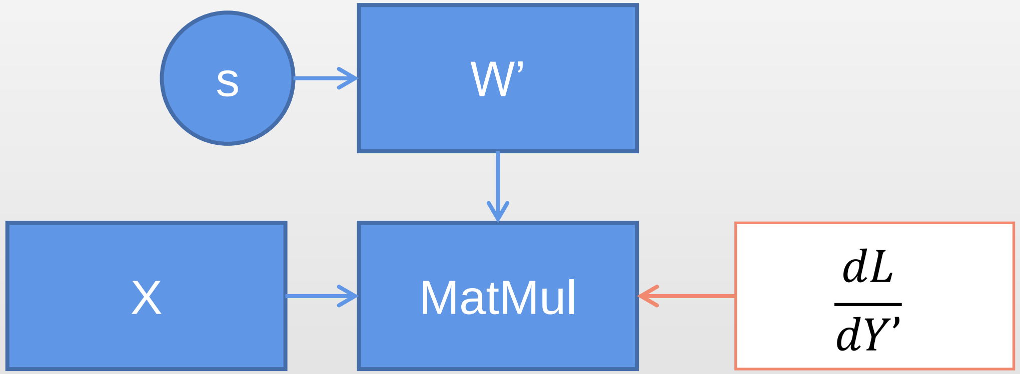
  - $w'(s) = \begin{cases} w * [\frac{x}{s}], & else \\ w * 127, & \frac{w}{s} > 127.5 \\ -w * 127, & \frac{w}{s} < -127.5 \end{cases}$

  - $dw'(s) = \begin{cases} ds * [\frac{w}{s}] + s * d[\frac{w}{s}], & else \\ ds * 127, & \frac{w}{s} > 127.5 \\ -ds * 127, & \frac{w}{s} < -127.5 \end{cases}$

  - $d[\frac{w}{s}] = 0$

习题

- 已知Y=W’X，其中W, X均是三阶方阵
  - $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - $w'(s) = \begin{cases} w * [\frac{x}{s}], & else \\ w * 127, & \frac{w}{s} > 127.5 \\ -w * 127, & \frac{w}{s} < -127.5 \end{cases}$
- 求 s 关于 $(sum(Y) - 10)^2$ 在 $s = 0.02$ 处的导数



相关代码

- 访问 https://github.com/openppl-public/ppq/tree/master/ppq