二叉搜索树

Xingdong Xue

Mar. 2020

1 概念

1.1 循关键码访问

二叉搜索树是一系列根据关键码进行查找的数据项，call-by-key。其中**关键码**之间可以比较大小，可以进行相等比对，统一表示和实现为 entry 的形式。

1.2 二叉搜索树

满足顺序性（任一节点不小于其左后代，不大于其右后代）的二叉树。
BST 的中序遍历序列，必然单调非降。（充要条件）

1.3 接口

除了继承 BinTree 外，还有以下接口：

- search(T)：查找
- insert(T)：插入
- delete(T)：删除

2 算法与实现

2.1 查找

实质上就是有序向量的二分查找，代码如下：

```python
def search(self, e):
    return self.searchIn(self.root, e, hot=None)

def searchIn(self, v, e, hot):
    if not v or e == v.data:
        return v
    hot = v # 记下当前非空节点
    return self.searchIn(v.lChild if e < v.data else v.rChild, e, hot)
```

查找成功时，返回一个关键码为 e 的真实节点；查找失败时，返回一个空节点。

如果在失败时，假想这个空节点为一个数值位 e 的哨兵节点，则可以得出：返回值总是代表命中节点，而 hot 的值永远是命中节点的父亲。

算法的时间复杂度为 $O(h)$，其中 h 为树的高度。

2.2 插入

根据查找得出的结论，查找的返回值永远为命中节点，则插入就是在查找返回值的位置上新增一个节点即可。

```python
def insert(self, e):
    x = self.search(e)
    if not x:
        x = BinNode(e, hot)
    # TODO 更新树的规模，更新祖先的高度
    return x
```

算法的时间复杂度为 $O(h)$，其中 h 为树的高度。

2.3 删除

```python
def remove(self, e):
    x = self.search(e)
    if not x:
        return False
    self.removeAt(x, hot)
```

```
# TODO 更新树的规模, 更新祖先的高度
return True
```

函数 removeAt 分几种情况：

1. 至多只有一个孩子：删除节点并用子节点替代。
2. 左右孩子同时存在：找出直接后继（找到右子树并不断为往左侧下行）并与之交换，然后按照第一种情况删除。

算法的时间复杂度为 $O(h)$，其中 h 为树的高度。

3 平衡与平均高度

普通二叉搜索树在数据极端的情况下，可能会退化为单链，导致算法的时间复杂度 $O(h) = O(n)$。

所以需要有更客观的方法去分析二叉树操作的平均复杂度。

按照随机生成来估算：$n!$，复杂度为 $O(\log n)$ 随机组成：卡特兰数，复杂度为 $O(\sqrt{n})$

3.1 理想平衡

由 n 各节点组成的高度为 $\log_2 n$ 的二叉树，达到**理想平衡**。

理想平衡的概率极低，且维护成本过高，所以适当放松标准，达到**适度平衡**。

适度平衡的二叉树，称作平衡二叉搜索树（BBST）。

3.2 等价变换

我们将中序遍历序列相同，但拓扑结构不同的 BST 称作等价 BST。

通过等价变换和旋转调整，任何一对等价 BST 之间的变换都可以通过旋转变换得到。

4 AVL 树

4.1 平衡因子

$$balFac(v) = height(lc(v)) - height(rc(v)))$$

在 AV 树中，平衡因子小于等于 1。

4.2 适度平衡

高度为 h 的 AVL 树，至少包含 $S(h) = fib(h+3) - 1$ 个节点。

$$h \sim \Omega(\Phi^n) \to n \sim O(logh)$$

4.3 接口

除了继承 BST 外，还有以下接口：

- Balanced(x)：是否理想平衡
- BalFac(x)：平衡因子，左右子树高度之差
- 重写 insert
- 重写 remove
- 复用 search 等

4.4 失衡与重平衡

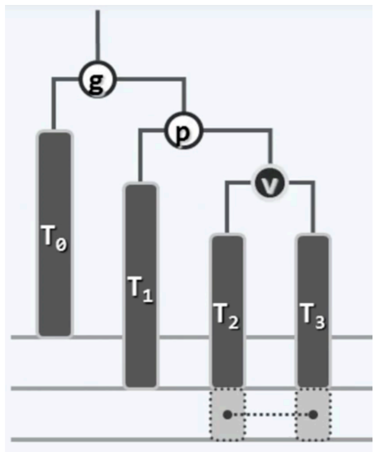
插入操作会使零到多个祖先节点失衡，其余节点则平衡因子维持原状，因为其余节点的高度与孩子高度都不会改变。删除操作会使得零到一个祖先会失衡，因为假设删除操作让某一个祖先失衡了，则删除的节点一定处于更短的分支上，所以不会影响此祖先的高度，进而不会影响更上级的节点。

5 插入

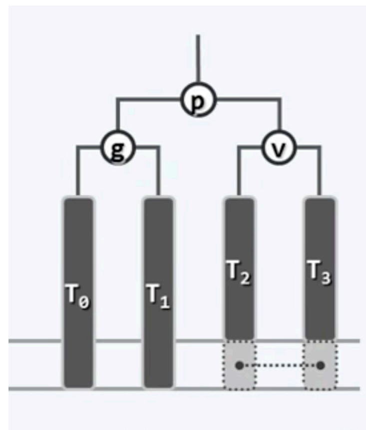
多个节点失衡，最低者 g 不会低于 x 祖父辈。

g 经过单旋后复衡，字数高度复原；更高祖先也必平衡，全树复衡。

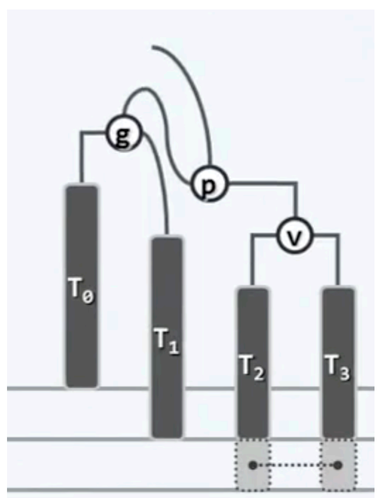
5.1 zigzig/zagzag 型



(a) before.



(b) rotating



(c) after