Mean-Shift 算法的原理及用于跟踪的实验

July 31, 2014

1 问题

本文讲解 Mean-Shift 算法的原理，及在目标跟踪中的应用。主要参考《Learning OpenCV》一书[1]中的讲解及 OpenCV 的源码。

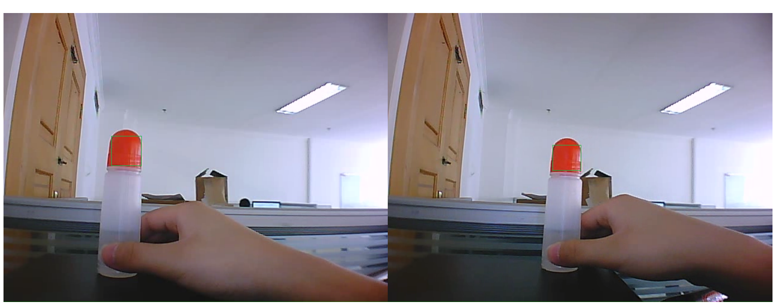
2 解答

2.1 Mean-Shift 的本质

Mean-Shift 是个算法，本质是个方法（工具）。用来求局部极值的方法（工具）。是众多数值分析方法中的一个。

2.2 为什么要求局部极值?

从目标跟踪这个问题的定义开始：



[1]位于第十章“运动与跟踪”第二节

- 追踪场景中胶水瓶的盖子
- 将图像表示成概率图，每个像素点都是一个概率值，代表该点是目标的可能性的大小
- 初始选定目标所在位置，中心位于矩形的对角线中心（几何中心）

问题：下一帧中，中心的位置？

如果能找到概率最大 (可能性最大) 的位置，就认为目标是所在位置[2]。

2.3 颜色概率模型

上面说的颜色概率模型，生成过程如下：

1. 生成目标的直方图。
2. 根据直方图各区间内像素的多少，为该区间分配一个概率 ($p_i = \frac{当前区间像素数}{所有像素数}$)。
3. 遍历原图，根据像素点所在区间，为其分配概率。这一过程称为 back-projection。
4. 新建图像，存储每一点的概率，得到概率图。

具体可参考 opencv 文档 + 代码。–calcBackProject 接口。

2.4 直观的理解

确定下一个中心的位置，实际是个投票的过程。扫描窗口中的每个点都要发言。故事是这样的：每个点都认为，下一个中心应该向自己靠拢，自己才是世界的中心。听谁的？——谁的钱多 (权值大) 听谁的。

权值是什么？就是该点的概率。

如果你是红色，你很可能是目标，所以，中心向你那儿移动多点；

如果你是紫色，你有可能是目标，所以，中心向你那儿移动少点；

如果你是黑色，你不可能是目标，所以，中心不会向你那儿移动。

[2]注意：此处不是单个最大值点，否则直接遍历即可。谁是最大值，一个点说了不算，得所有点投票。

2.5 直观上加点数学，质心

上述的过程，实际就是求质心的过程。求中心的公式，就是求质心的公式：

$$\bar{x} = \sum x_i * \frac{P_i}{\sum P_i} \tag{1}$$

$$\bar{y} = \sum y_i * \frac{P_i}{\sum P_i} \tag{2}$$

以 x 为例，其中：

- x_i 表示每一点的横坐标
- P_i 表示该点是目标的概率
- $\sum P_i$ 是所有点概率之和，显然，$P_i / \sum P_i$ 表示该点在所有点中的影响力
- $x_i * (P_i / \sum P_i)$，即表示往自己 (x_i) 偏移的多少

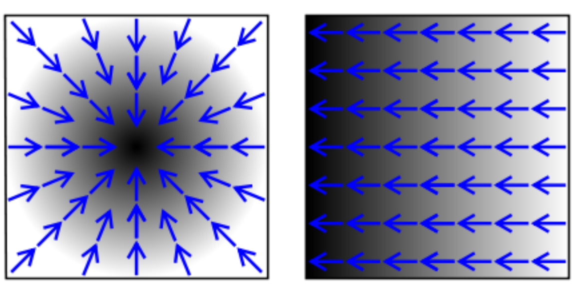
最终的结果，$\bar{x}$，显然受 P_i 值较大的点影响较大。多么民主的过程！

2.6 直观上再加点数学，梯度

不知道怎么开口，也不知道怎么跟你说，但是求极值就是绕不开梯度（导数）。梯度的定义非常有意思：

- 方向 (direction)：朝着函数值变化最快的方向
- 大小 (magnitude)：等于该点切线的斜率

参考维基百科的示意图[3]：



[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient

梯度的方向就是颜色加深最快的方向；梯度的大小等于 $\Delta y/\Delta x$，即该点竖直方向的变化比上水平方向的变化，也就是切线斜率。

参考维基百科举的例子：

> Consider a room in which the temperature is given by a scalar field, T, so at each point (x,y,z) the temperature is T(x,y,z). (We will assume that the temperature does not change over time.) At each point in the room, the gradient of T at that point will show the direction the temperature rises most quickly. The magnitude of the gradient will determine how fast the temperature rises in that direction.
>
> 以房间中的温度为例，是个标量场，用 T 来表示，任一点的温度是 T(x,y,z)。方便分析，假设房间里各点温度保持不变。某一点的梯度方向是什么？就是该点处，温度上升最快的方向。那什么是梯度的 Magtitude? 就是在该方向上温度变化的有多快。

从梯度的角度考虑确定了：

- 往哪里走？——梯度的方向。
- 走多远？——梯度的大小。

两个问题，就能找到极值点了。

那如何求梯度呢? 求导。对谁求导呢？对概率密度函数求导[4]。那怎么得到概率密度函数呢？——核密度估计。

2.7 如何求概率密度函数？

核密度估计是从有限样本，得到这些样本所服从的概率分布——通过估计概率密度函数来实现[5]。

2.8 公式推导

核密度估计在 x_p 点的值的估计 (以高斯核为例)：

$$P(x_p) = \frac{1}{N} * \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \sum_{i=1}^{N} e^{-\frac{(x_p - x_i)^2}{2*\sigma^2*h^2}} * P(x_i) \tag{3}$$

[4] 图像被表示成了概率图，所以梯度的方向指向概率上升最快的方向。此时，中心就是样本分布最集中的地方，如二维高斯分布的中心。这个中心，在跟踪中，就认为是目标。

[5] http://xueyayang.github.io/pdf_posts/核密度估计的概念与实验.pdf
http://xueyayang.github.io/pdf_posts/2 维核密度估计实验.pdf

注意其中的 $P(x_i)$，在脚注 4 的实验里是没有的。它表示样本点的概率。其意义是明显的：样本点的来自目标的可能性越大，对估计结果的影响越大；如果样本点来自目标的概率为 0（噪声），则不该对估计结果产生影响。

脚注 4 中的实验之所以没有这一项，是因为所有的样本点都是有效的，并且对结果的影响大小是一样的，即权重都为 1。

抽象一些，核用 $k(\cdot)$ 来代替，写成更一般的形式：

$$P(x_p) = ck(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|) \tag{4}$$

求导：

$$\nabla P(x_p) = c' * \sum k_i'(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|) * \sum 2 * (x_p - x_i) \tag{5}$$

如果令:

$$g(x) = -k'(x) \tag{6}$$

代入上式得：

$$\begin{aligned}\nabla P(x_p) &= c' * \left\{ \sum g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|) * \sum x_i - \sum g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|) * \sum x_p \right\} \\ &= c' * \sum g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|) * \left[\frac{x_i * g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|)}{g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|)} - x_p \right]\end{aligned}$$

观察上式，理解上式的物理意义:

1. $\nabla P(x_p)$ 是在点 x_p 处的导数，考虑离散形式，即是梯度，是一个向量
2. x_p 向量的起点；
3. x_p' 是向量的终点，可以写为：

$$x_p' = \sum_{i=0}^{N} \frac{x_i * g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|)}{g_i(\| \frac{(x_p - x_i)^2}{h} \|)} \tag{7}$$

x_p' 就是新的中心位置；x_p 则是原来的中心位置。

可以看到，如果 $g_i(\cdot)$ 的值始终为 1（方波情况），上式就蜕化成最简单（符合直觉）的形式：求质心。

2.8.1 核密度估计的物理意义：

观察公式发现，相对最简单的“质心”形式，选用高斯核，本质是将 x_i(样本) 与 x_p(原中心) 的距离这一因素考虑进去。

对于高斯核来讲，这一因素表现为，x_i 距离越远，在 x_p(原中心) 处的发言权越小。

对于矩形核来讲，这一因素表现为，x_i 距离无论远近，在 x_p(原中心) 处的发言权都一样。

回到实际情况，目标的颜色分布一般来讲，更接近矩形分布（颜色均匀）; 并不随着距离而衰减。所以，对于胶水瓶盖子，高斯模型并无效果提升。

2.9 源码

所有源码在:
https://github.com/xueyayang/v4l2_demo/tree/master/mean-shift

3 总结

3.1 核的选择

对于最简单的颜色模型，选用矩形核，即，求质心的形式足够了。

3.2 时间开销

选用高斯核，一次 shift 的时间大约是矩形核的 30 倍左右。开销集中在

- 高斯公式的计算
- 带宽 h 的计算
- 方差的计算