

第四课

强化面试中常用的算法 - 递归、回溯

- 冒泡排序 / Bubble Sort
- 插入排序 / Insertion Sort
- 归并排序 / Merge Sort
- 快速排序 / Quick Sort
- 拓扑排序 / Topological Sort



递归的基本性质：函数调用本身

- ▶ 把大规模的问题不断地变小，再进行推导的过程

回溯：利用递归的性质

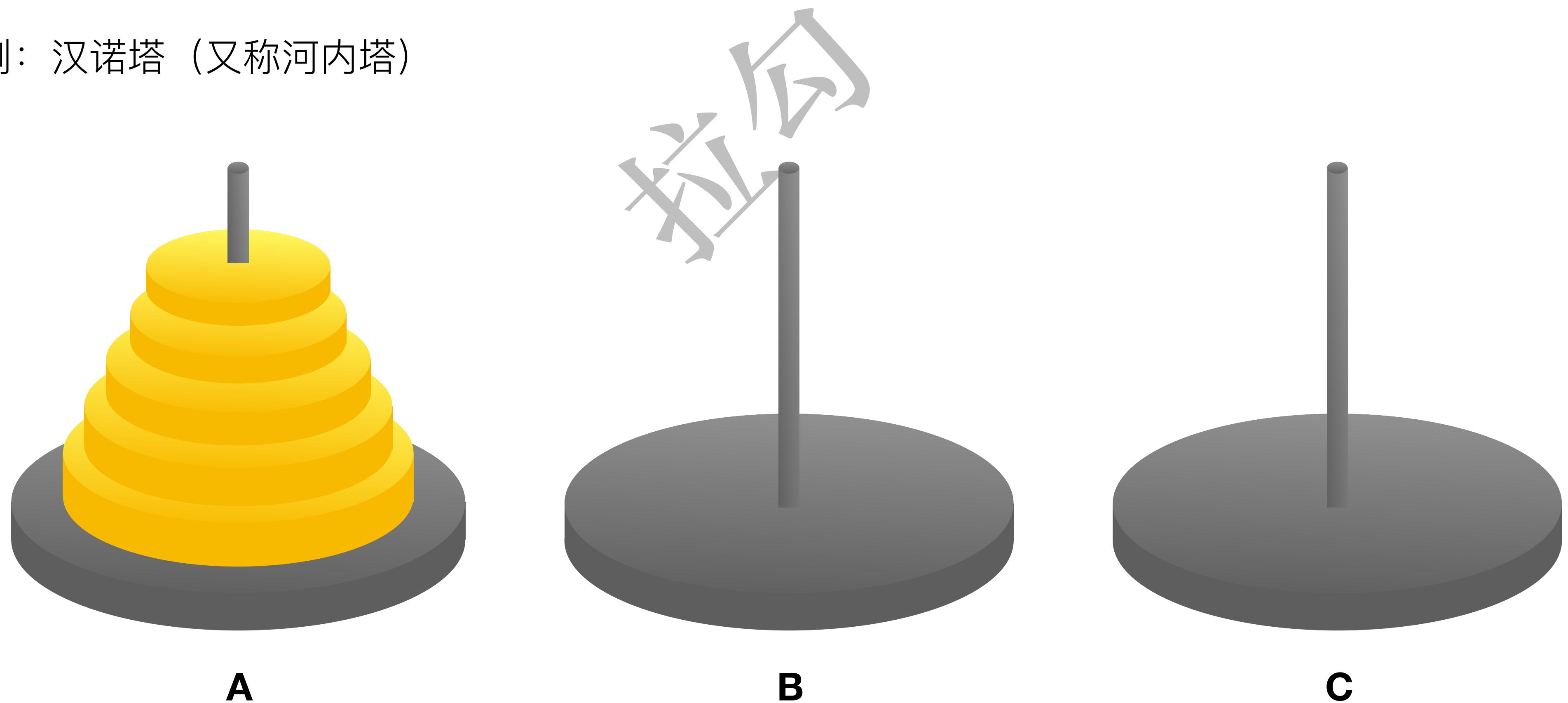
- ▶ 从问题的起始点出发，不断尝试
- ▶ 返回一步甚至多步再做选择，直到抵达终点的过程



递归算法是一种调用自身函数的算法

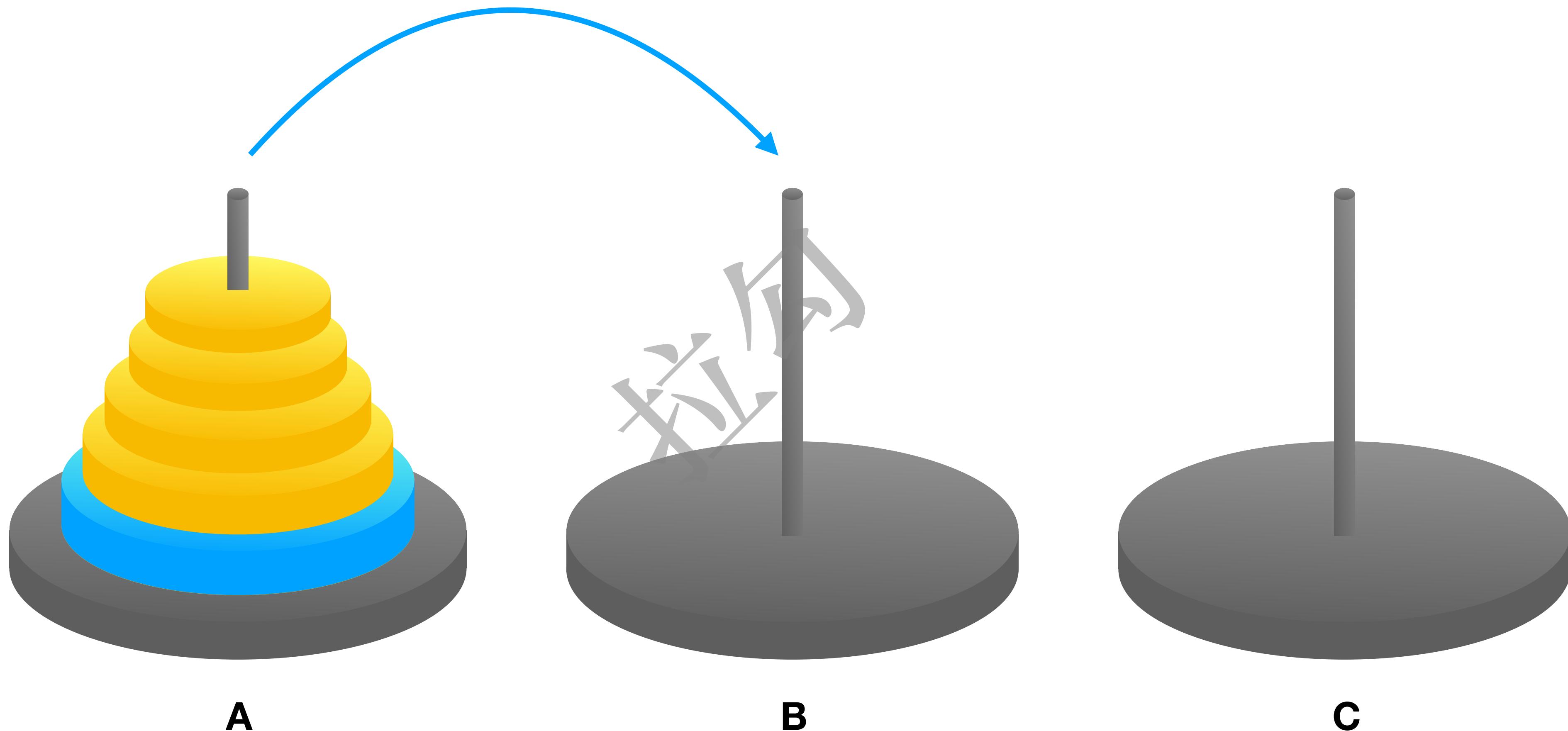
特点：可以使一个看似复杂的问题变得简洁和易于理解

经典案例：汉诺塔（又称河内塔）



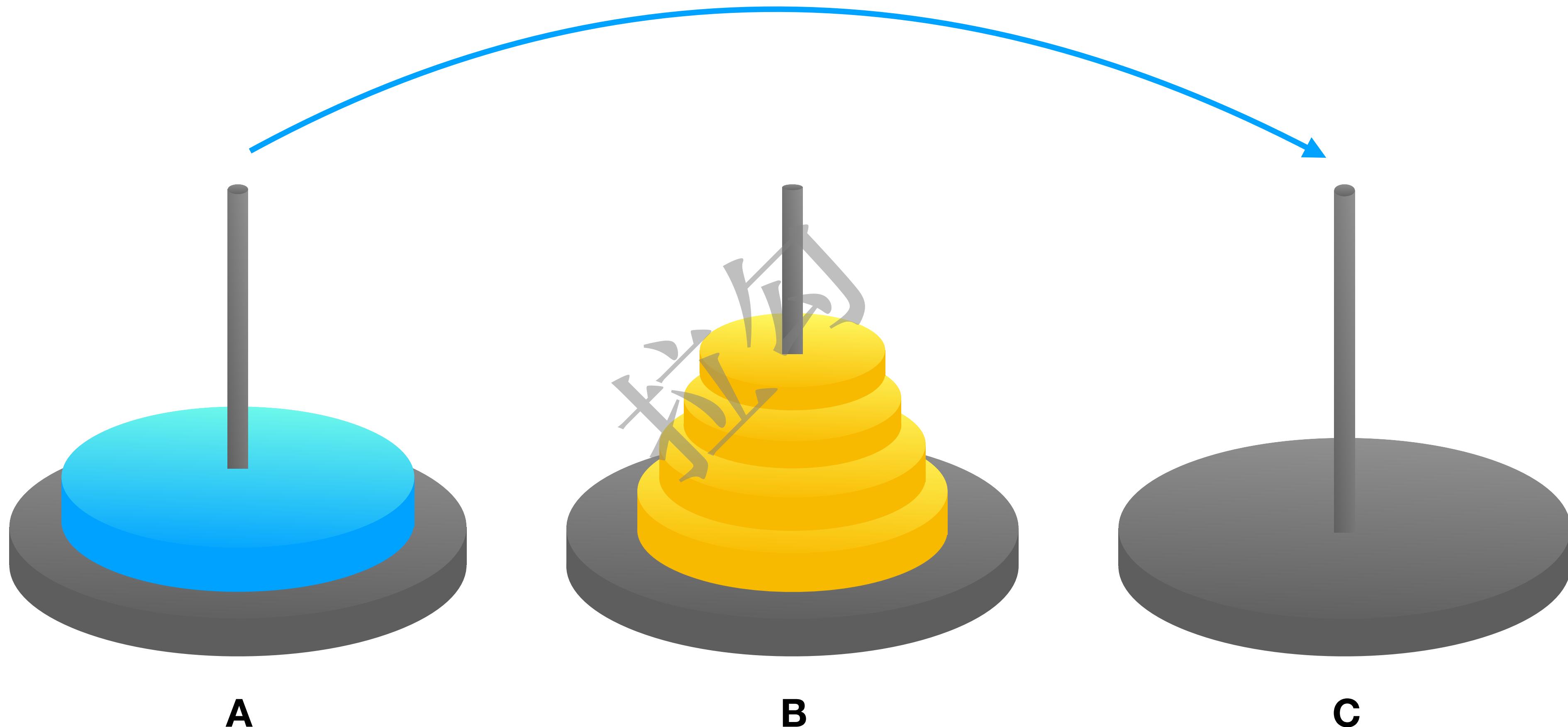
4.2

递归 / Recursion



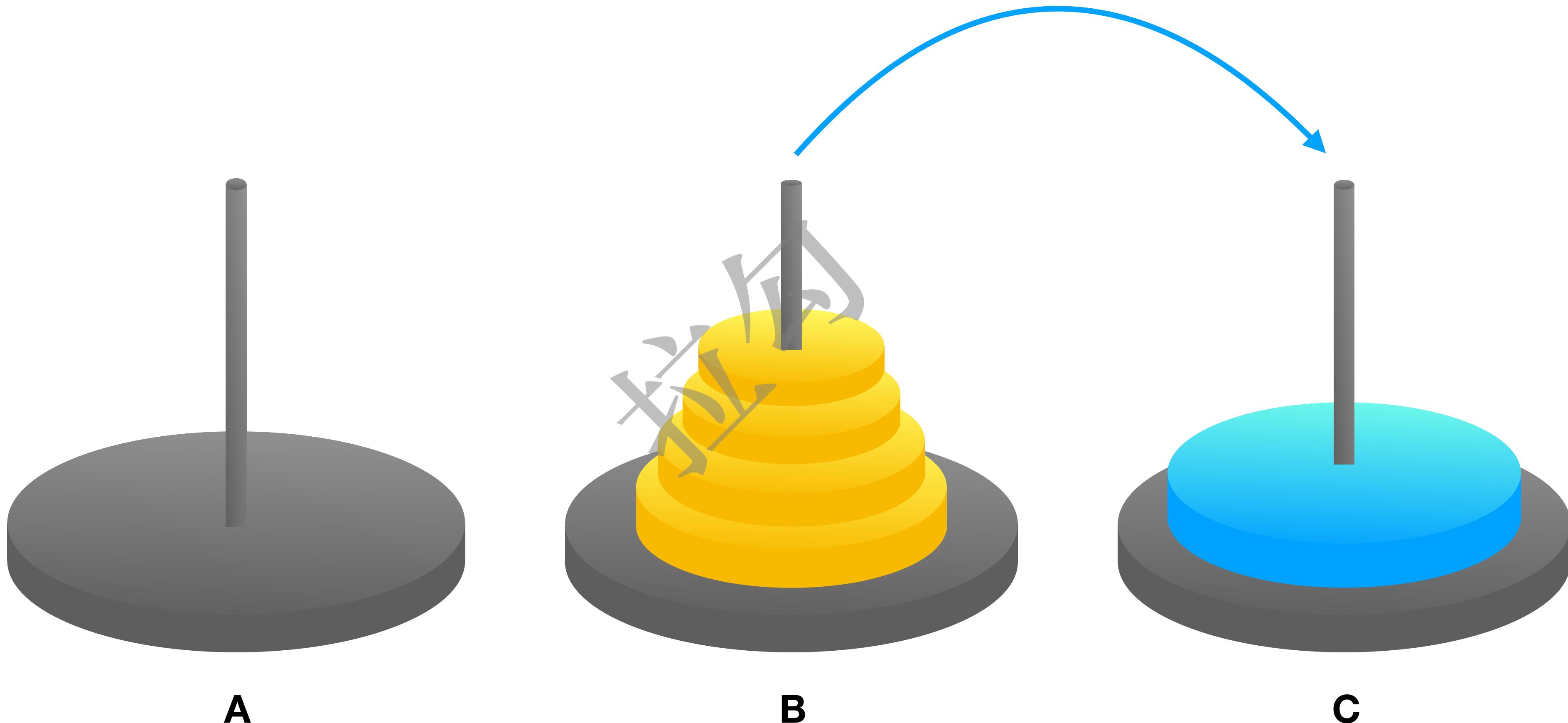
4.2

递归 / Recursion

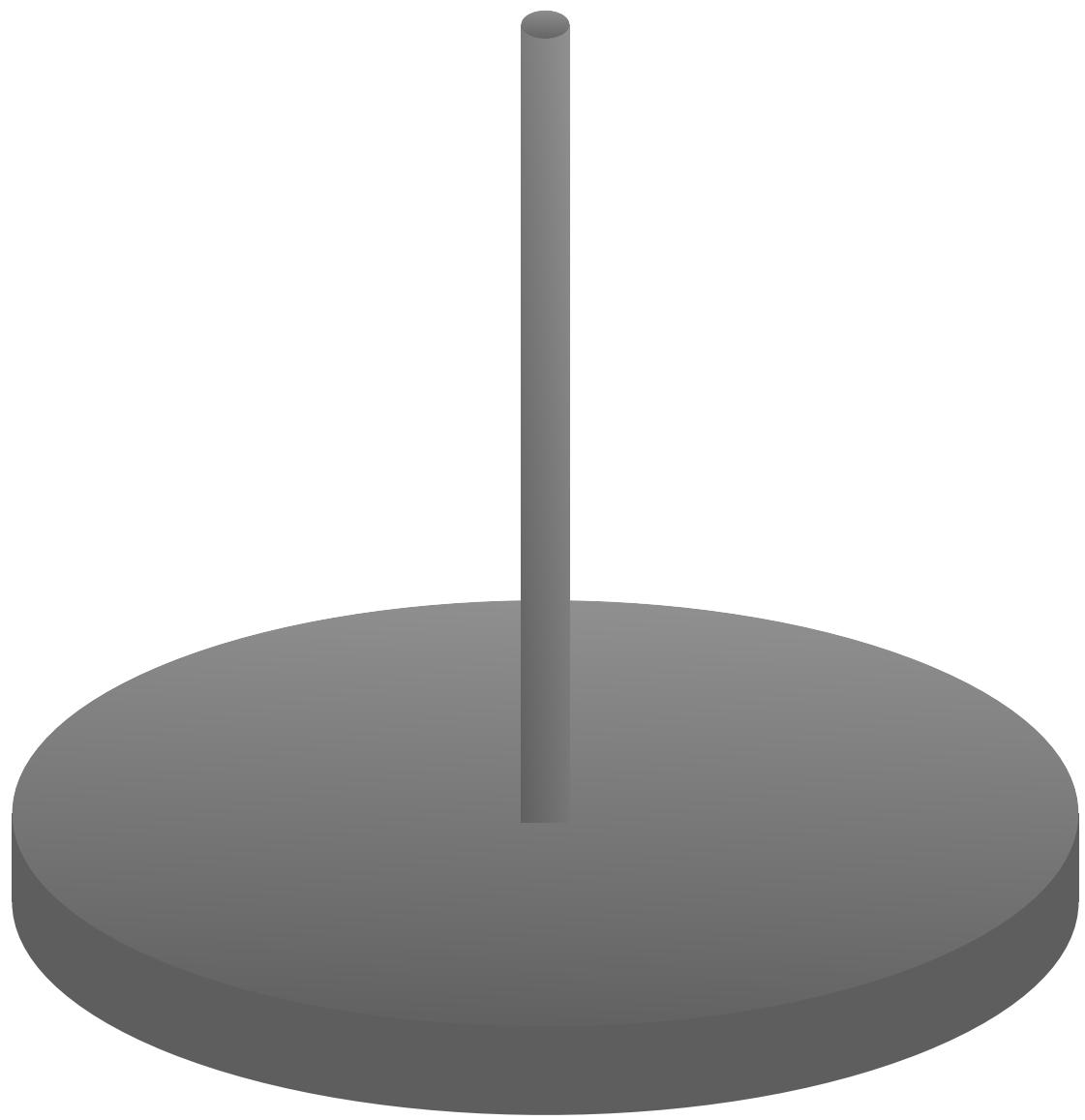


4.2

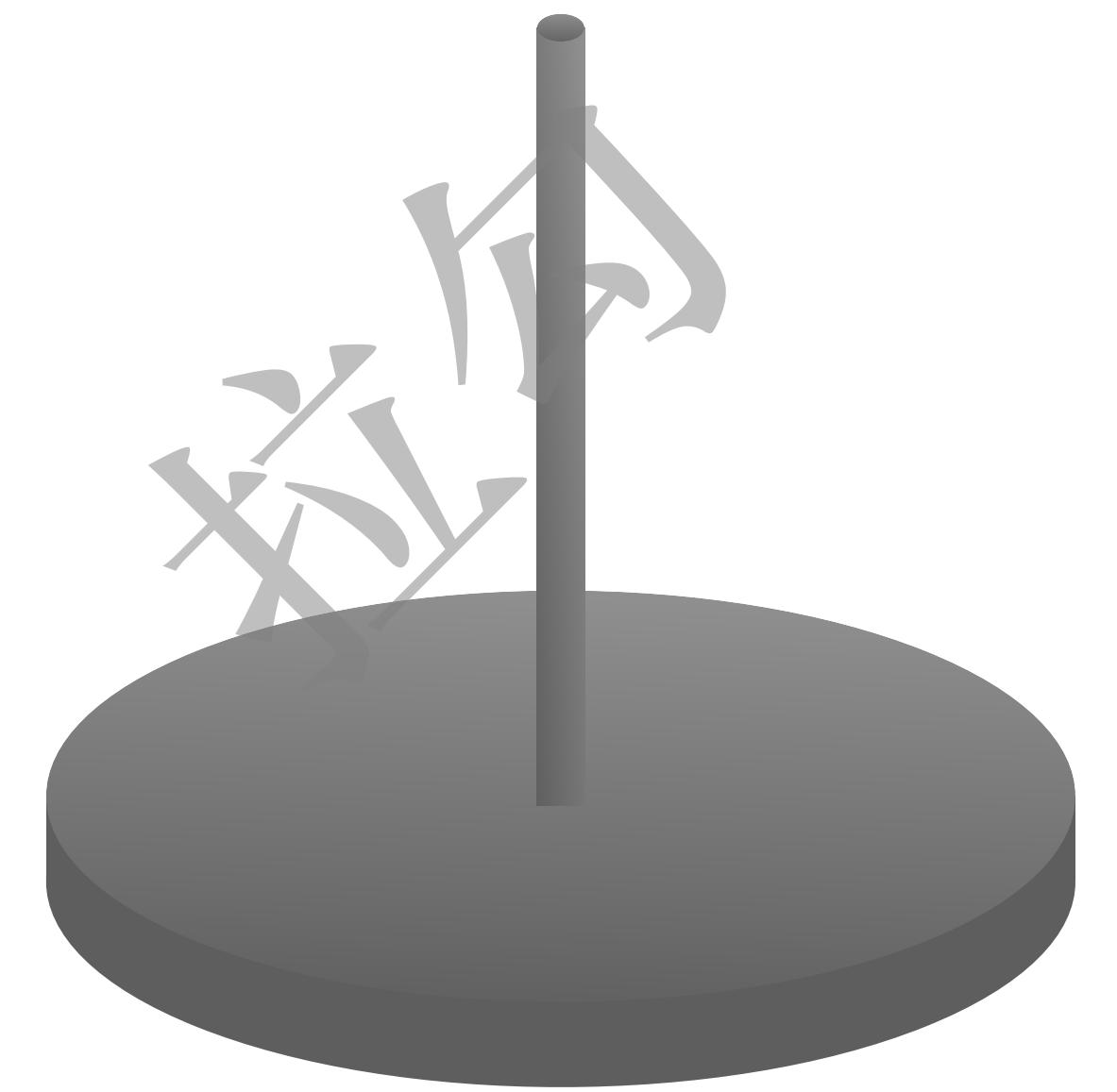
递归 / Recursion



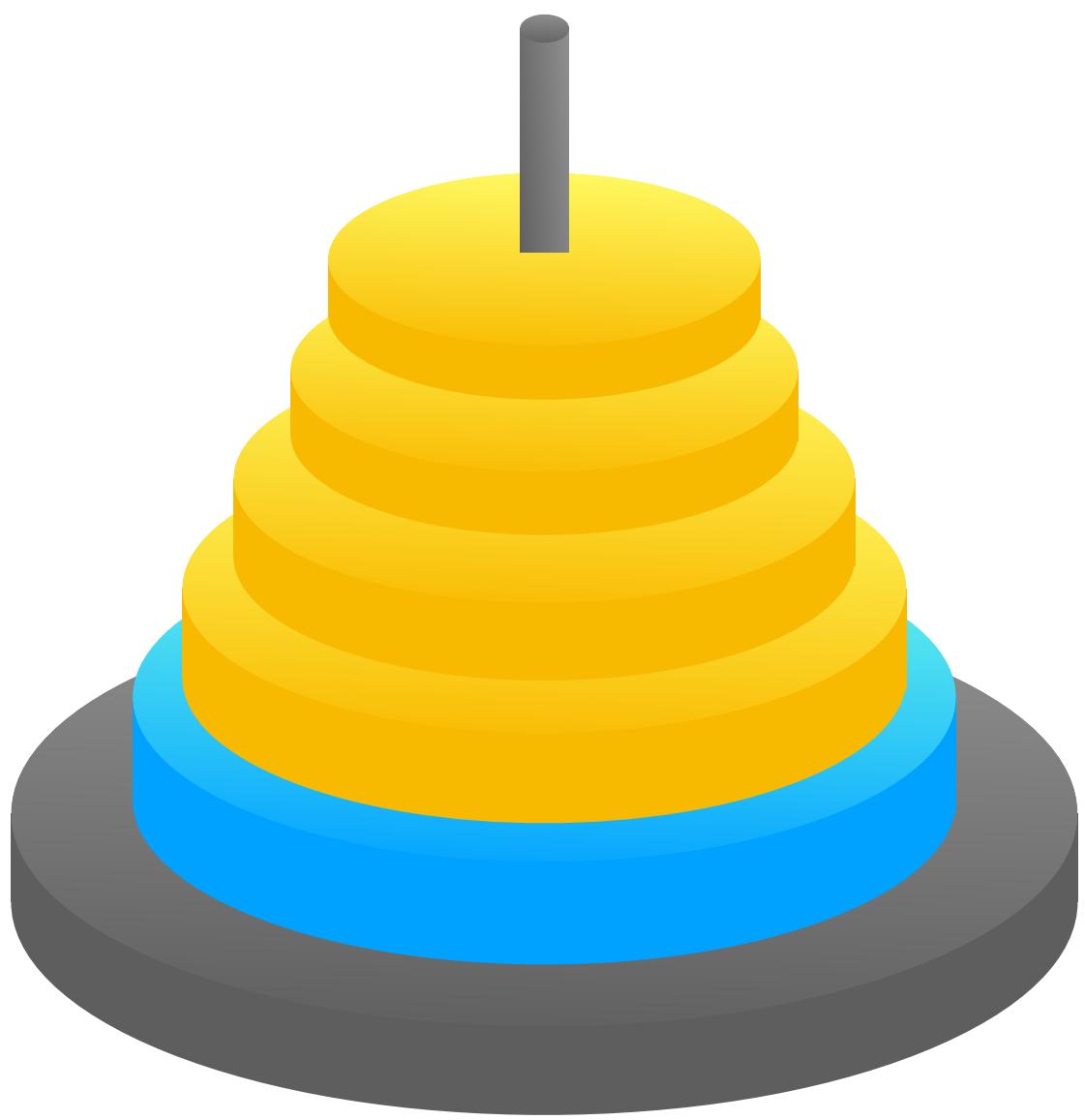
4.2 递归 / Recursion



A



B

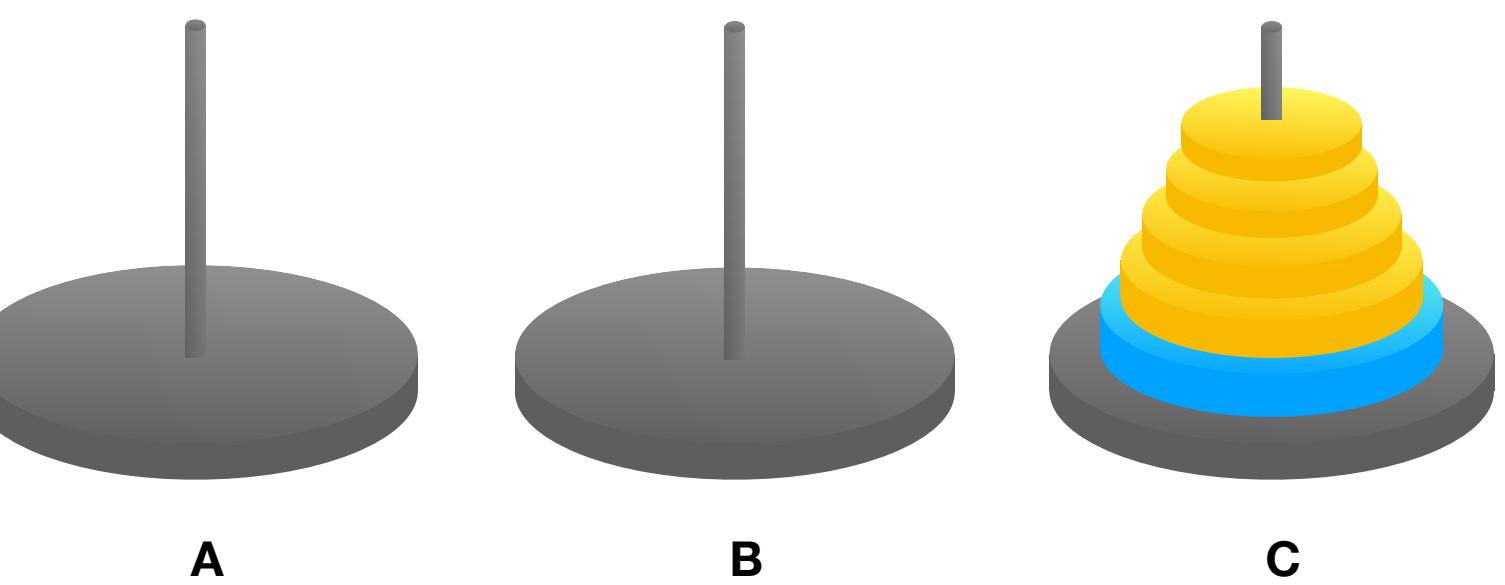


C

4.2 递归 / Recursion

代码实现

```
void hano(char A, char B, char C, int n) {  
    if (n > 0) {  
        hano(A, C, B, n - 1);  
        print(A + " -> " + C);  
        hano(B, A, C, n - 1);  
    }  
}
```

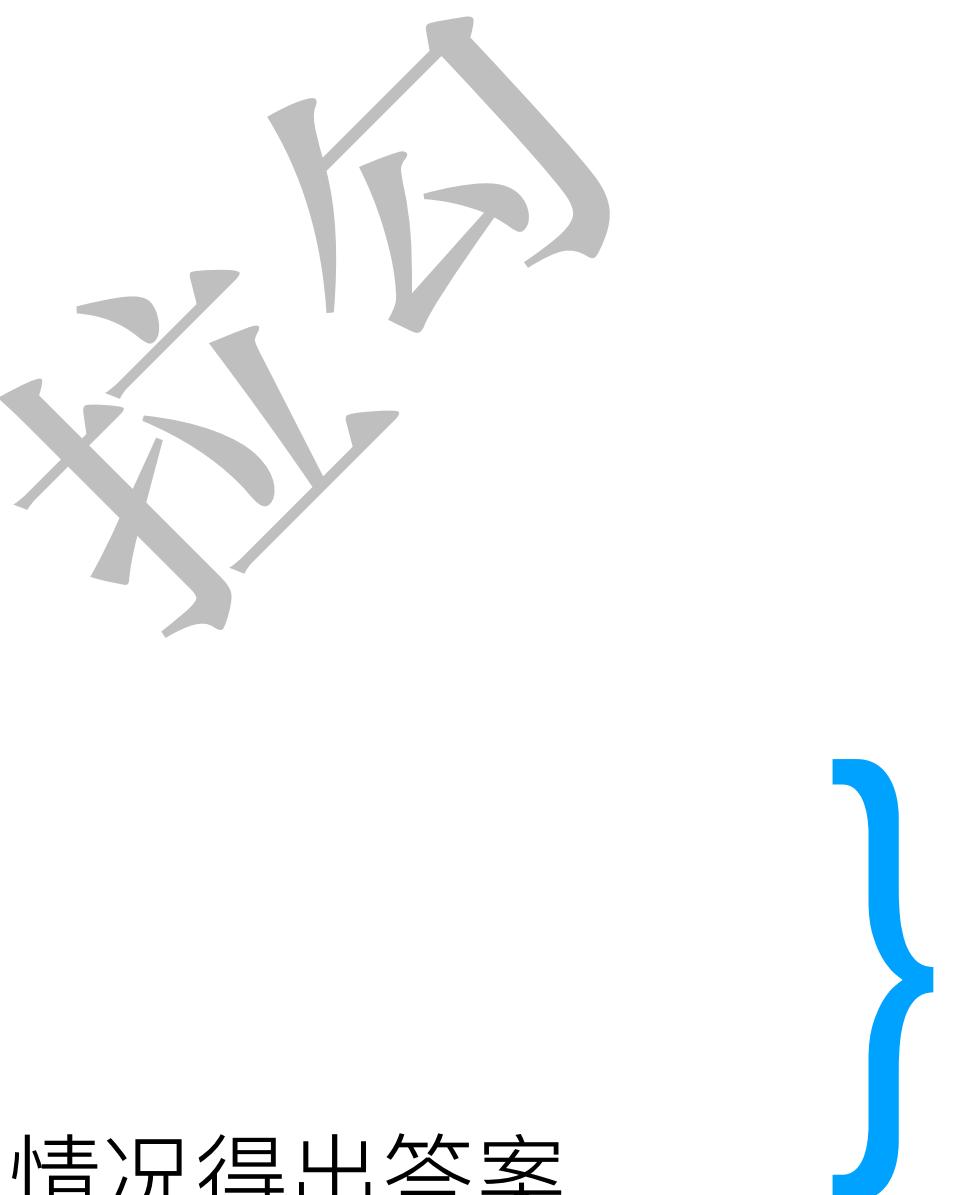


算法思想

- ▶ 要懂得如何将一个问题的规模变小
- ▶ 再利用从小规模问题中得出的结果
- ▶ 结合当前的值或者情况，得出最终的结果

通俗理解

- ▶ 把要实现的递归函数，看成已经实现好的
- ▶ 直接利用解决一些子问题
- ▶ 思考：如何根据子问题的解以及当前面对的情况得出答案



自顶向下 (Top-Down)

91. 解码方法

一条包含字母 A-Z 的消息通过以下方式进行了编码：

'A' -> 1

'B' -> 2

...

'Z' -> 26



给定一个只包含数字的非空字符串，请计算解码方法的总数。

4.2 递归 / Recursion



```
int numDecodings(String s) {
    char[] chars = s.toCharArray();
    return decode(chars, chars.length - 1);
}

int decode(char[] chars, int index) {
    if (index <= 0) {
        return 1;
    }

    int count = 0;

    char curr = chars[index];
    char prev = chars[index - 1];

    if (curr > '0') {
        count = decode(chars, index - 1);
    }

    if (prev < '2' || (prev == '2' && curr <= '6')) {
        count += decode(chars, index - 2);
    }

    return count;
}
```

4.2 递归 / Recursion



```
int numDecodings(String s) {
    char[] chars = s.toCharArray();
    return decode(chars, chars.length - 1);
}

int decode(char[] chars, int index) {
    if (index <= 0) {
        return 1;
    }

    int count = 0;

    char curr = chars[index];
    char prev = chars[index - 1];

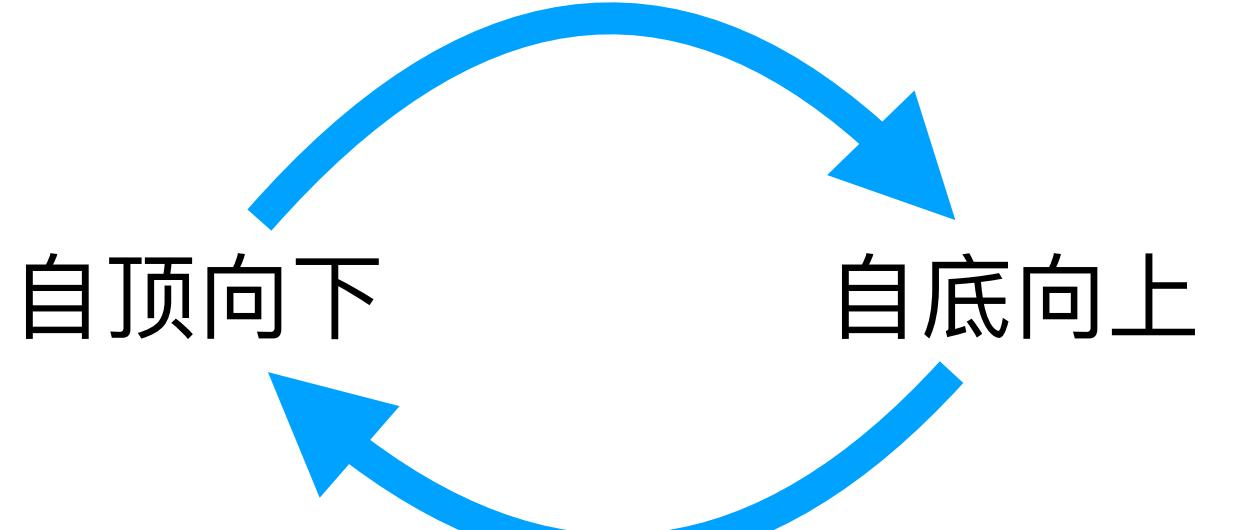
    if (curr > '0') {
        count = decode(chars, index - 1);
    }

    if (prev < '2' || (prev == '2' && curr <= '6')) {
        count += decode(chars, index - 2);
    }

    return count;
}
```

4.2 递归 / Recursion

```
int numDecodings(String s) {  
    char[] chars = s.toCharArray();  
    return decode(chars, chars.length - 1);  
}  
  
int decode(char[] chars, int index) {  
    if (index <= 0) {  
        return 1;  
    }  
  
    int count = 0;  
  
    char curr = chars[index];  
    char prev = chars[index - 1];  
  
    if (curr > '0') {  
        count = decode(chars, index - 1);  
    }  
  
    if (prev < '2' || (prev == '2' && curr <= '6')) {  
        count += decode(chars, index - 2);  
    }  
  
    return count;  
}
```



► 动态规划就是典型的自底向上算法

递归写法结构总结：

```
function fn(n) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (input/state is invalid) {  
        return;  
    }  
  
    // 第二步：判断递归是否应当结束?  
    if (match condition) {  
        return some value;  
    }  
  
    // 第三步：缩小问题规模  
    result1 = fn(n1)  
    result2 = fn(n2)  
    ...  
  
    // 第四步：整合结果  
    return combine(result1, result2)  
}
```

- ▶ 判断当前情况是否非法，如果非法就立即返回，也称为完整性检查（Sanity Check）
- ▶ 判断是否满足结束递归的条件
- ▶ 将问题的规模缩小，递归调用
- ▶ 利用在小规模问题中的答案，结合当前的数据进行整合，得出最终的答案

247. 中心对称数 II

中心对称数是指一个数字在旋转了 180 度之后看起来依旧相同的数字（或者上下颠倒地看）。

找到所有长度为 n 的中心对称数。



示例：

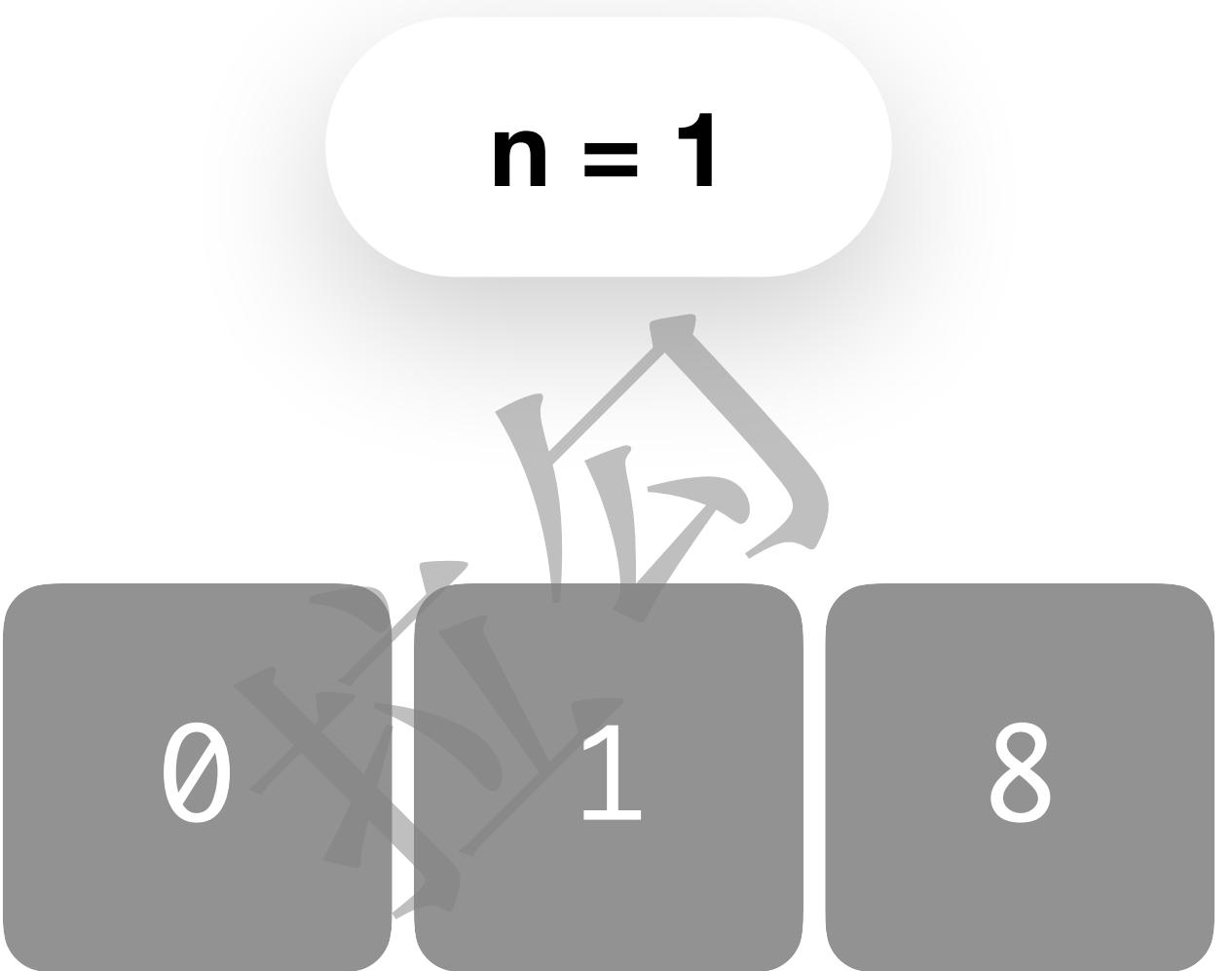
输入: $n = 2$

输出: ["11", "69", "88", "96"]

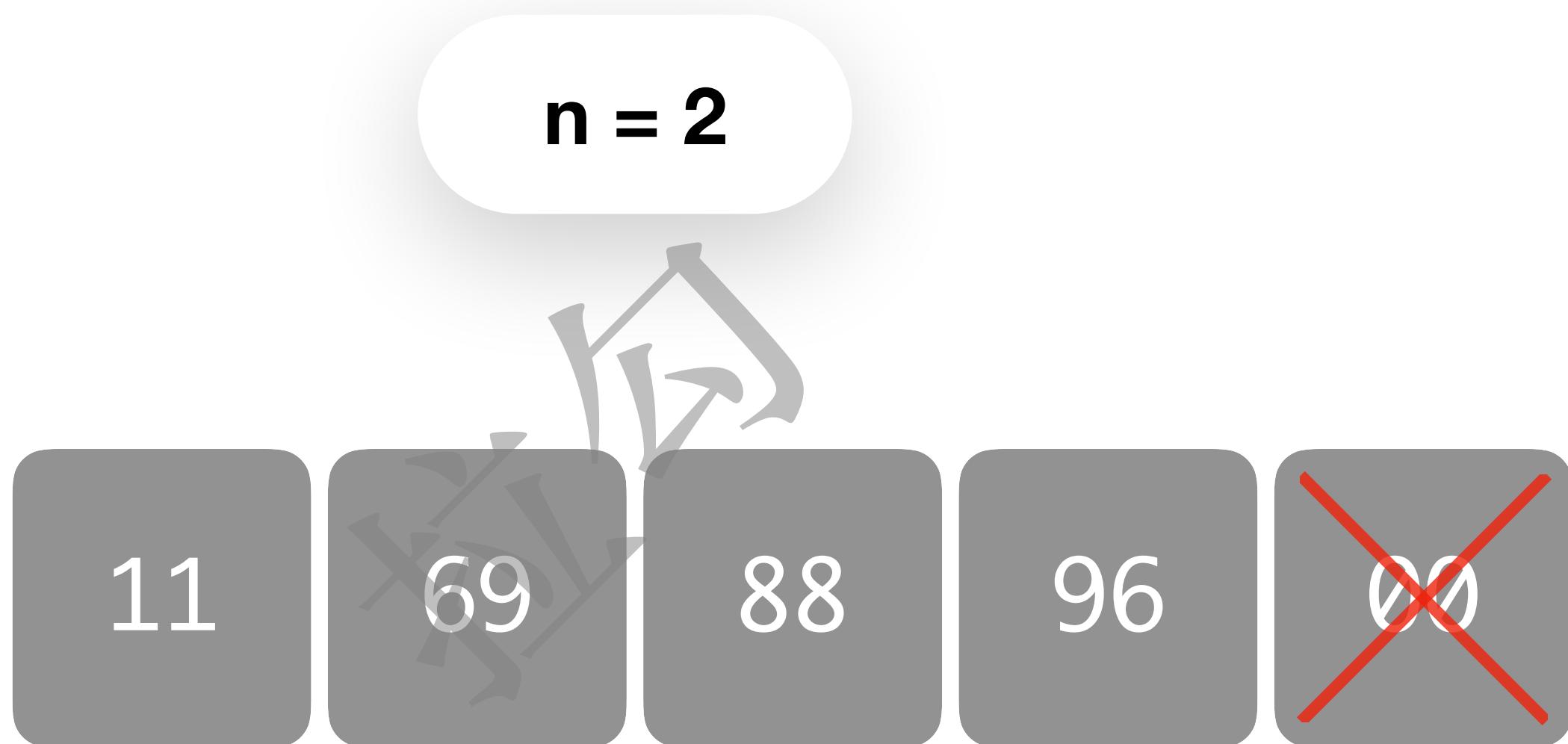
4.2 递归 / Recursion



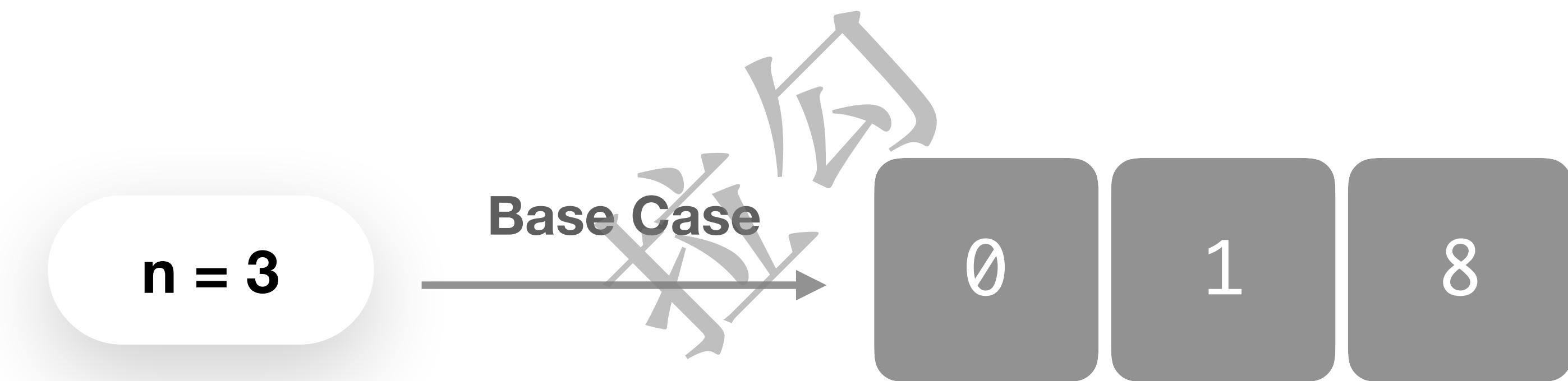
4.2 递归 / Recursion



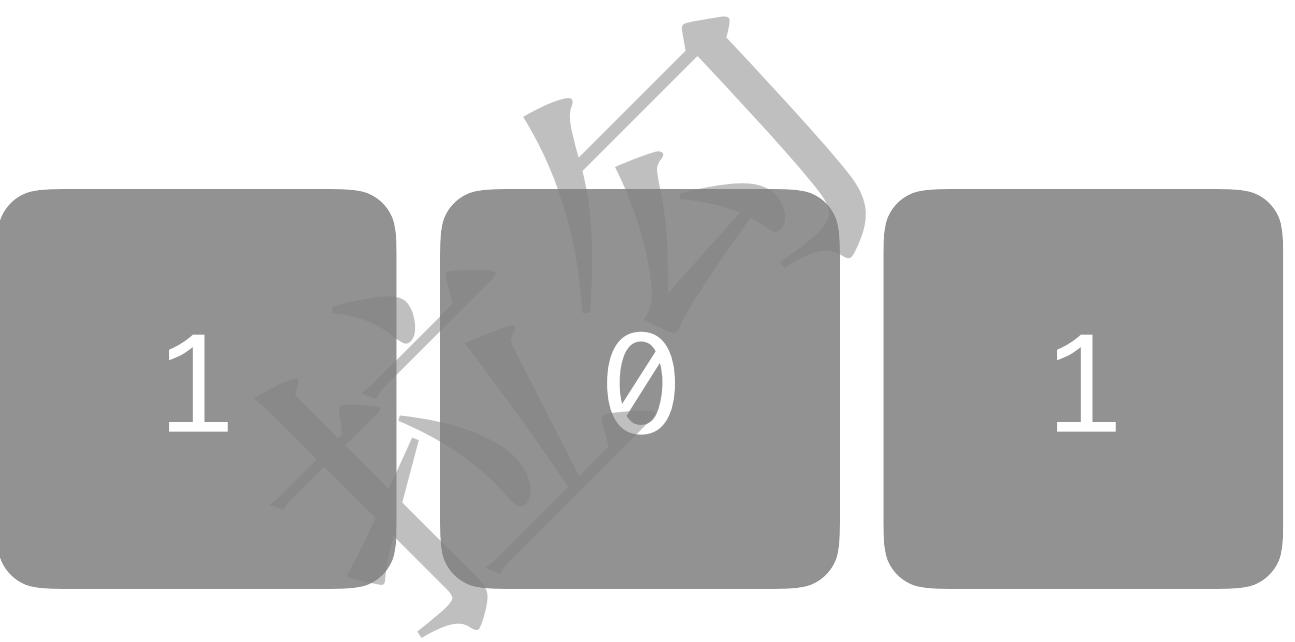
4.2 递归 / Recursion



4.2 递归 / Recursion

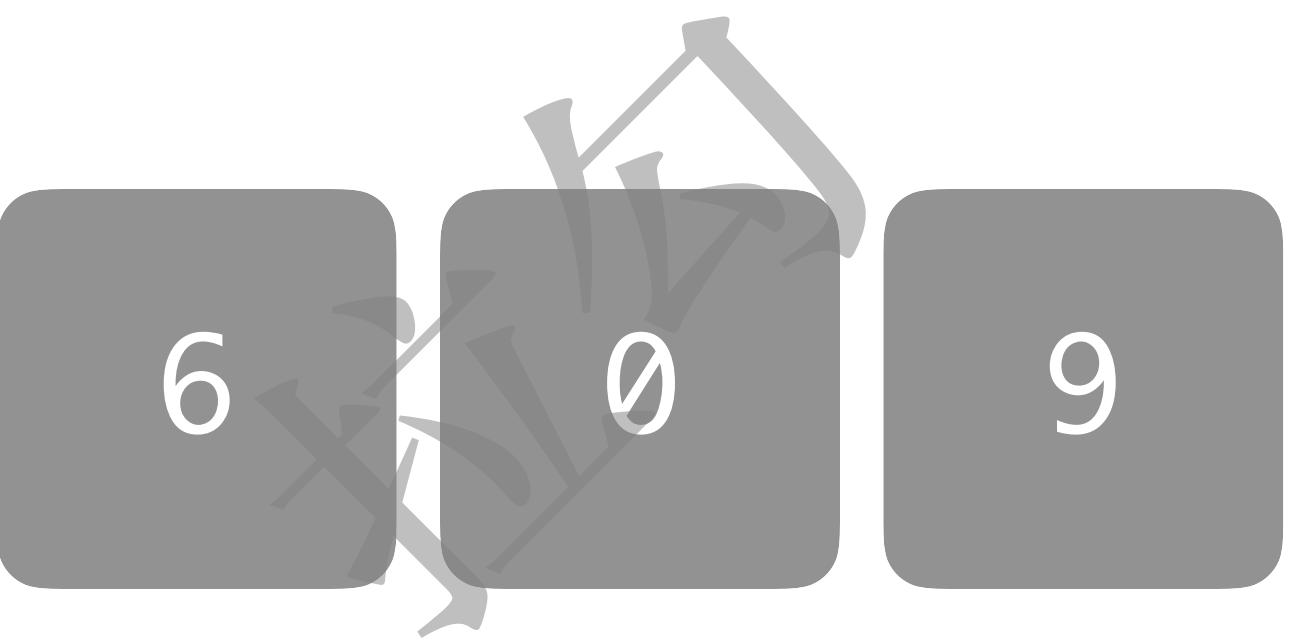


4.2 递归 / Recursion



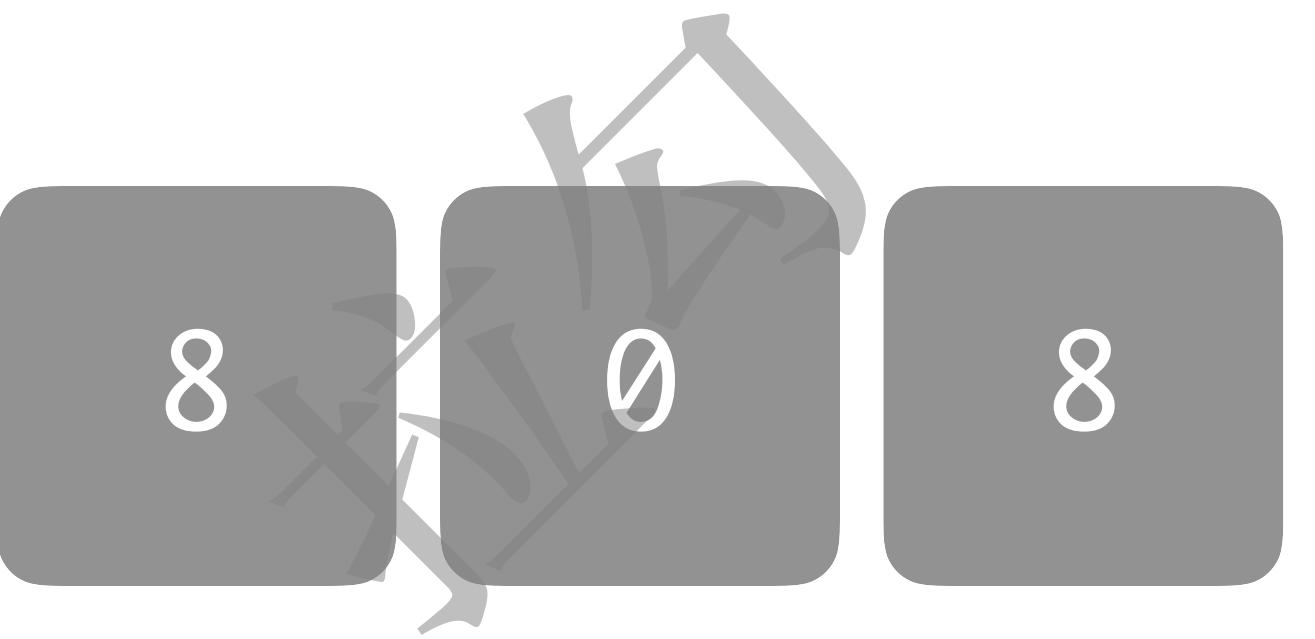
4.2 递归 / Recursion

1 0 1



4.2 递归 / Recursion

1 0 1 6 0 9



4.2 递归 / Recursion



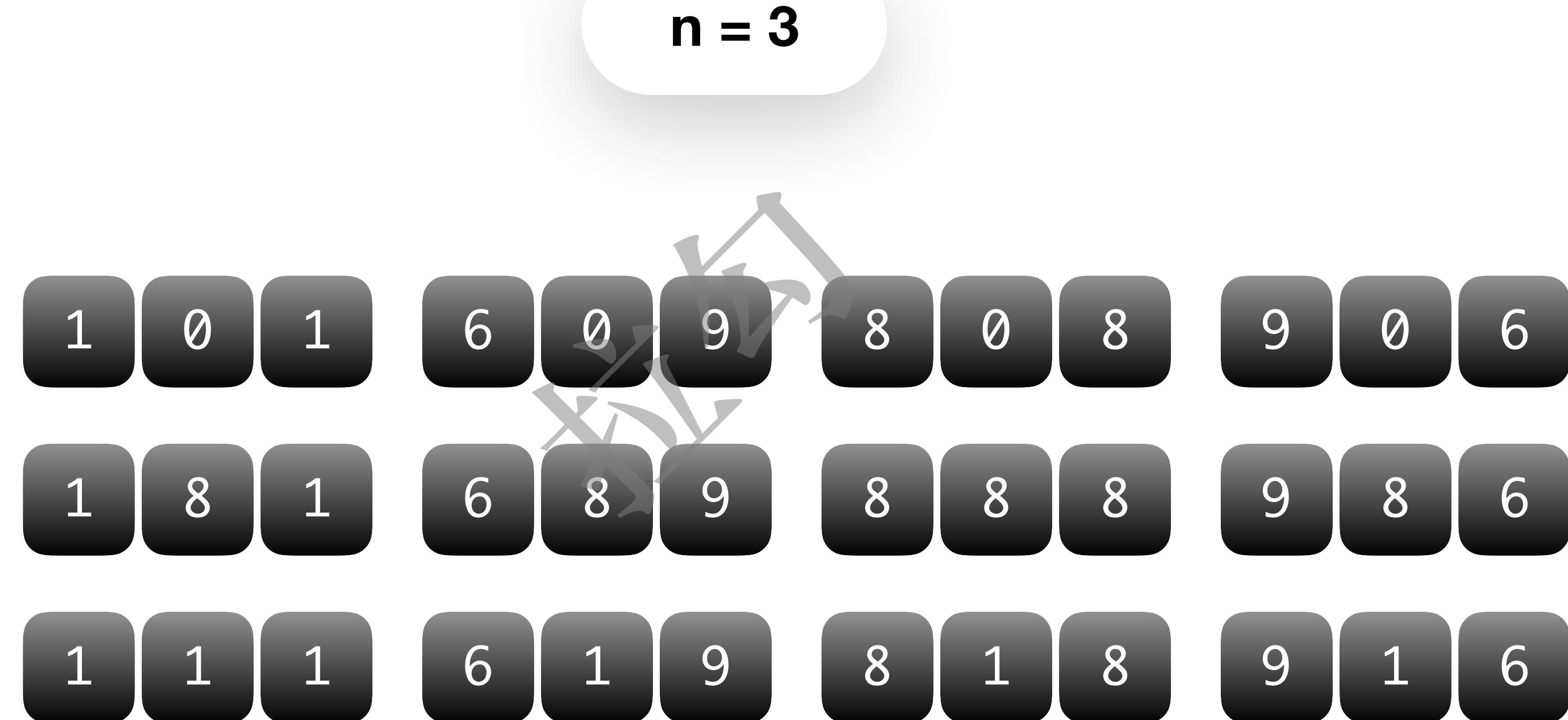
4.2 递归 / Recursion



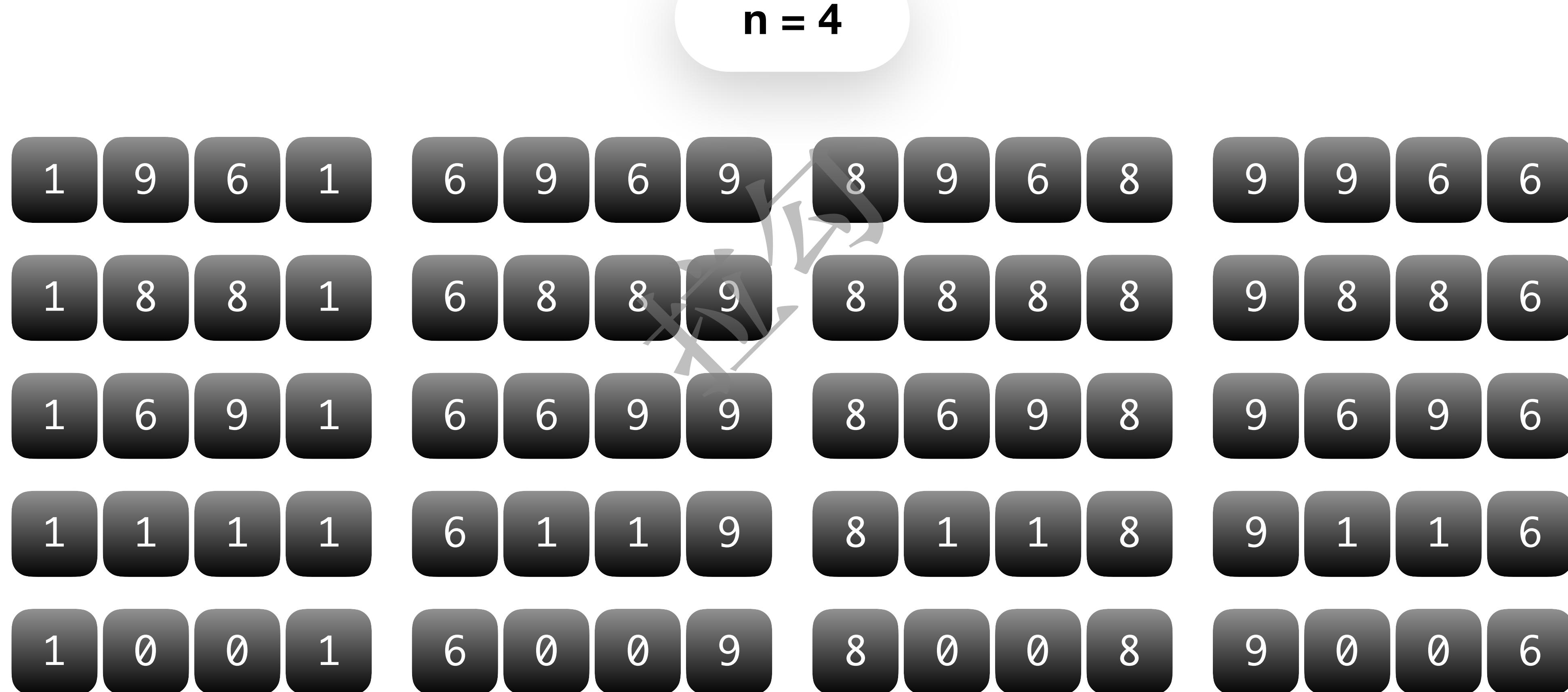
1 0 1 6 0 9 8 0 8 9 0 6

拉钩

4.2 递归 / Recursion



4.2 递归 / Recursion



4.2 递归 / Recursion



```
List<String> helper(int n, int m) {  
    // 第一步: 判断输入或者状态是否非法?  
    if (n < 0 || m < 0 || n > m) {  
        throw new IllegalArgumentException("invalid input");  
    }  
  
    // 第二步: 判读递归是否应当结束?  
    if (n == 0) return new ArrayList<String>(Arrays.asList(""));  
    if (n == 1) return new ArrayList<String>(Arrays.asList("0", "1", "8"));  
  
    // 第三步: 缩小问题规模  
    List<String> list = helper(n - 2, m);  
  
    // 第四步: 整合结果  
    List<String> res = new ArrayList<String>();  
  
    for (int i = 0; i < list.size(); i++) {  
        String s = list.get(i);  
  
        if (n != m) res.add("0" + s + "0");  
  
        res.add("1" + s + "1");  
        res.add("6" + s + "9");  
        res.add("8" + s + "8");  
        res.add("9" + s + "6");  
    }  
  
    return res;  
}
```

► 首先判断输入的值是否合法

4.2 递归 / Recursion



```
List<String> helper(int n, int m) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (n < 0 || m < 0 || n > m) {  
        throw new IllegalArgumentException("invalid input");  
    }  
  
    // 第二步：判断递归是否应当结束?  
    if (n == 0) return new ArrayList<String>(Arrays.asList(""));  
    if (n == 1) return new ArrayList<String>(Arrays.asList("0", "1", "8"));  
  
    // 第三步：缩小问题规模  
    List<String> list = helper(n - 2, m);  
  
    // 第四步：整合结果  
    List<String> res = new ArrayList<String>();  
  
    for (int i = 0; i < list.size(); i++) {  
        String s = list.get(i);  
  
        if (n != m) res.add("0" + s + "0");  
  
        res.add("1" + s + "1");  
        res.add("6" + s + "9");  
        res.add("8" + s + "8");  
        res.add("9" + s + "6");  
    }  
  
    return res;  
}
```

- ▶ 首先判断输入的值是否合法
- ▶ 当处理 $n = 0$ 以及 $n = 1$ 的情况，也就是做一些递归结束条件的判断

4.2 递归 / Recursion



```
List<String> helper(int n, int m) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (n < 0 || m < 0 || n > m) {  
        throw new IllegalArgumentException("invalid input");  
    }  
  
    // 第二步：判读递归是否应当结束?  
    if (n == 0) return new ArrayList<String>(Arrays.asList(""));  
    if (n == 1) return new ArrayList<String>(Arrays.asList("0", "1", "8"));  
  
    // 第三步：缩小问题规模  
    List<String> list = helper(n - 2, m);  
  
    // 第四步：整合结果  
    List<String> res = new ArrayList<String>();  
  
    for (int i = 0; i < list.size(); i++) {  
        String s = list.get(i);  
  
        if (n != m) res.add("0" + s + "0");  
  
        res.add("1" + s + "1");  
        res.add("6" + s + "9");  
        res.add("8" + s + "8");  
        res.add("9" + s + "6");  
    }  
  
    return res;  
}
```

- ▶ 首先判断输入的值是否合法
- ▶ 当处理 $n = 0$ 以及 $n = 1$ 时的情况，也就是做一些递归结束条件的判读
- ▶ 将问题的规模缩小变为 $n - 2$

4.2 递归 / Recursion



```
List<String> helper(int n, int m) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (n < 0 || m < 0 || n > m) {  
        throw new IllegalArgumentException("invalid input");  
    }  
  
    // 第二步：判读递归是否应当结束?  
    if (n == 0) return new ArrayList<String>(Arrays.asList(""));  
    if (n == 1) return new ArrayList<String>(Arrays.asList("0", "1", "8"));  
  
    // 第三步：缩小问题规模  
    List<String> list = helper(n - 2, m);  
  
    // 第四步：整合结果  
    List<String> res = new ArrayList<String>();  
    for (int i = 0; i < list.size(); i++) {  
        String s = list.get(i);  
  
        if (n != m) res.add("0" + s + "0");  
  
        res.add("1" + s + "1");  
        res.add("6" + s + "9");  
        res.add("8" + s + "8");  
        res.add("9" + s + "6");  
    }  
  
    return res;  
}
```

- ▶ 首先判断输入的值是否合法
- ▶ 当处理 $n = 0$ 以及 $n = 1$ 时的情况，也就是做一些递归结束条件的判读
- ▶ 将问题的规模缩小变为 $n - 2$
- ▶ 在 $n - 2$ 的基础上，添加 11, 69, 88, 96 即可

2 种递归算法解决时间复杂度分析

- ▶ 迭代法
- ▶ 公式法

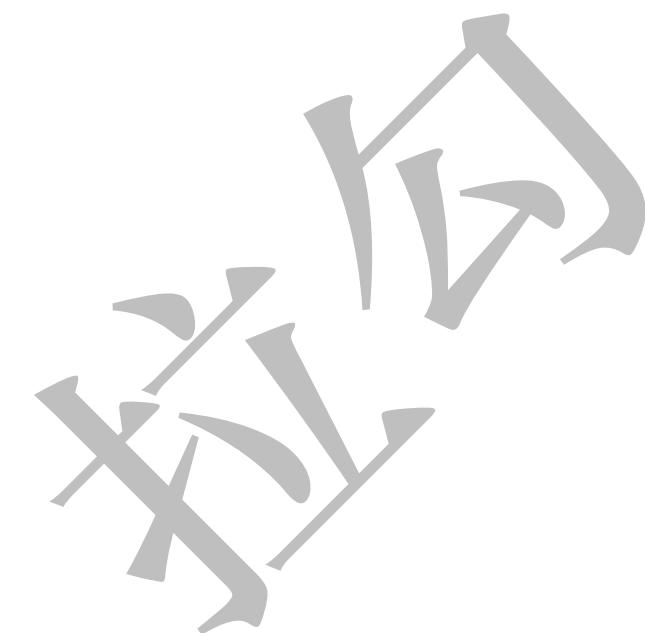
迭代法

```
void hano(char A, char B, char C, int n)
{
    if (n > 0) {
        hano(A, C, B, n - 1);
        move(A, C);
        hano(B, A, C, n - 1);
    }
}
```

$$T(n) = 2 * T(n-1) + O(1)$$

迭代法

$$T(n) = 2 \times T(n - 1) + O(1)$$

带入 $T(n)$ 

$$T(n) = 2 (2 \times T(n - 2) + 1) + 1 = 2^2 \times T(n - 2) + (2 + 1)$$

$$T(n) = 2 (2 (2 \times T(n - 3) + 1) + 1) + 1 = 2^2 \times T(n - 3) + (4 + 2 + 1)$$

$$T(n) = 2 (2 (2 (2 \times T(n - 4) + 1) + 1) + 1) + 1 = 2^2 \times T(n - 4) + (8 + 4 + 2 + 1)$$

 \dots

$$T(n) = 2^k \times T(n - k) + (2^k - 1) \Rightarrow T(n) = 2 \times 2^n - 1 \Rightarrow O(n) = 2^n$$

公式法 - 计算递归函数复杂度最方便的工具

只需要牢记 3 种可能会上出现的情况以及处理它们的公式即可



公式法

当递归函数的时间执行函数满足如下的关系式时，可以利用公式法：

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \underline{f(n)}$$

~~f(n)~~ 指每次递归完毕后，额外的计算执行时间

当参数 a, b 都确定时，只看递归部分，时间复杂度就是： $O(n^{\log_b a})$

公式法 - 需要牢记的 3 种情况：

▶ 情况一：

当递归部分的执行时间 $O(n^{\log_b a}) > f(n)$ 的时候，最终的时间复杂度就是 $O(n^{\log_b a})$

▶ 情况二：

当递归部分的执行时间 $O(n^{\log_b a}) < f(n)$ 的时候，最终的时间复杂度就是 $f(n)$

▶ 情况三：

当递归部分的执行时间 $O(n^{\log_b a}) = f(n)$ 的时候，最终的时间复杂度就是 $O(n^{\log_b a})\log n$

公式法 - 示例分析

例子一：

递归排序的时间执行函数： $T(n) = 2 \times T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 2, b = 2, f(n) = n$

$$\log_b a = 1, n^1 = n$$

因此，符合第三种情况，最终的时间复杂度就是 $O(n \log n)$

公式法 - 示例分析

例子二：

```
int recursiveFn(int n) {  
    if (n == 0) {  
        return 0;  
    }  
    return recursiveFn(n / 4) + recursiveFn(n / 4);  
}
```

时间执行函数：

$$T(n) = 2 \times T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

$$a = 2, b = 4, f(n) = 1$$

$$\text{代入公式, 得到: } n^{\log_4 2} = \sqrt{n}$$

当 $n > 1$ 时, $\sqrt{n} > 1$, 则时间复杂度就是: $O(\sqrt{n})$

公式法 - 示例分析

例子三：

对于第二种情况，它表示最复杂的工作发生在递归完成之后的操作，例如：

$$T(n) = 3 \times T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$a = 3, b = 2, f(n) = n^2$$

代入公式，得到：

$$n^{\log_2 3} = n^{1.48} < n^2$$

最后，递归的时间复杂度是 $O(n^2)$

回溯算法是一种试探算法，与暴力搜索最大的区别：

在回溯算法中，是一步步向前试探，对每一步探测的情况评估，再决定是否继续，可避免走弯路

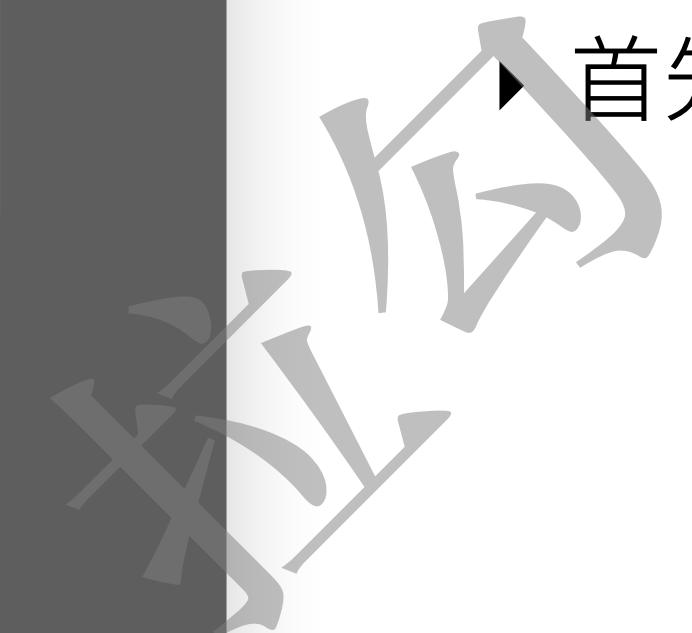
回溯算法的精华

- ▶ 出现非法的情况时，可退到之前的情景，可返回一步或多步
- ▶ 再去尝试别的路径和办法

想要采用回溯算法，就必须保证：每次都有多种尝试的可能

解决问题的套路

```
function fn(n) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (input/state is invalid) {  
        return;  
    }  
  
    // 第二步：判断递归是否应当结束?  
    if (match condition) {  
        return some value;  
    }  
  
    // 遍历所有可能出现的情况  
    for (all possible cases) {  
        // 第三步：尝试下一步的可能性  
        solution.push(case)  
        // 递归  
        result = fn(m)  
        // 第四步：回溯到上一步  
        solution.pop(case)  
    }  
}
```

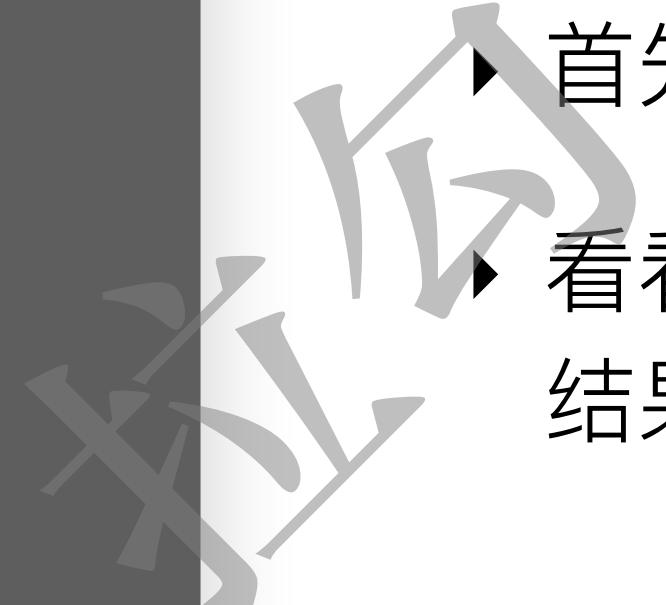


首先判断当前情况是否非法，如果非法就立即返回

解决问题的套路

```
function fn(n) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (input/state is invalid) {  
        return;  
    }  
  
    // 第二步：判断递归是否应当结束?  
    if (match condition) {  
        return some value;  
    }  
}
```

```
// 遍历所有可能出现的情况  
for (all possible cases) {  
    // 第三步：尝试下一步的可能性  
    solution.push(case)  
    // 递归  
    result = fn(m)  
    // 第四步：回溯到上一步  
    solution.pop(case)  
}
```

- 
- 首先判断当前情况是否非法，如果非法就立即返回
 - 看看当前情况是否已经满足条件？如果是，就将当前结果保存起来并返回

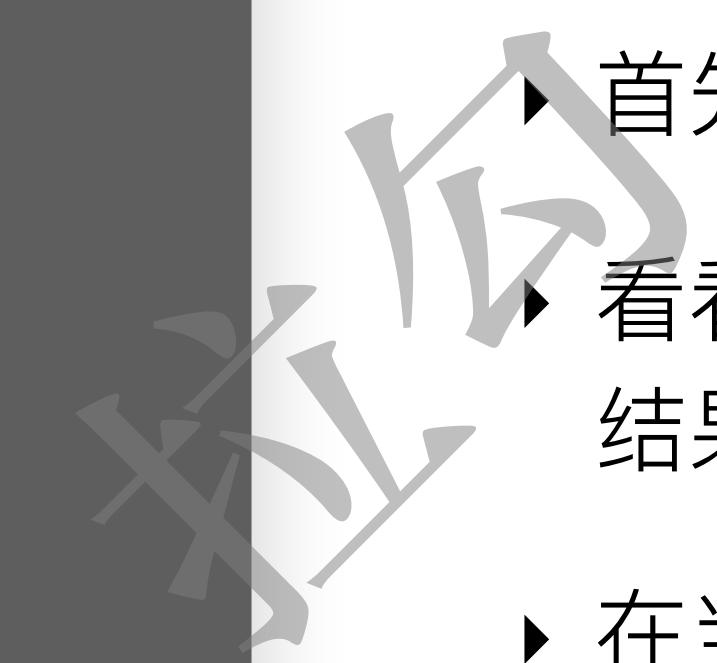
解决问题的套路

```
function fn(n) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (input/state is invalid) {  
        return;  
    }  
  
    // 第二步：判断递归是否应当结束?  
    if (match condition) {  
        return some value;  
    }  
  
    // 遍历所有可能出现的情况  
    for (all possible cases) {  
        // 第三步：尝试下一步的可能性  
        solution.push(case)  
        // 递归  
        result = fn(m)  
        // 第四步：回溯到上一步  
        solution.pop(case)  
    }  
}
```

- 
- ▶ 首先判断当前情况是否非法，如果非法就立即返回
 - ▶ 看看当前情况是否已经满足条件？如果是，就将当前结果保存起来并返回
 - ▶ 在当前情况下，遍历所有可能出现的情况，并进行递归

解决问题的套路

```
function fn(n) {  
    // 第一步：判断输入或者状态是否非法?  
    if (input/state is invalid) {  
        return;  
    }  
  
    // 第二步：判断递归是否应当结束?  
    if (match condition) {  
        return some value;  
    }  
  
    // 遍历所有可能出现的情况  
    for (all possible cases) {  
        // 第三步：尝试下一步的可能性  
        solution.push(case)  
        // 递归  
        result = fn(m)  
        // 第四步：回溯到上一步  
        solution.pop(case)  
    }  
}
```

- 
- ▶ 首先判断当前情况是否非法，如果非法就立即返回
 - ▶ 看看当前情况是否已经满足条件？如果是，就将当前结果保存起来并返回
 - ▶ 在当前情况下，遍历所有可能出现的情况，并进行递归
 - ▶ 递归完毕后，立即回溯，回溯的方法就是取消前一步进行的尝试

39. 组合总和

给定一个无重复元素的数组 *candidates* 和一个目标数 *target*，找出 *candidates* 中所有可以使数字和为 *target* 的组合。

candidates 中的数字可以无限制重复被选取。

说明：

- 所有数字（包括 *target*）都是正整数。
- 解集不能包含重复的组合。

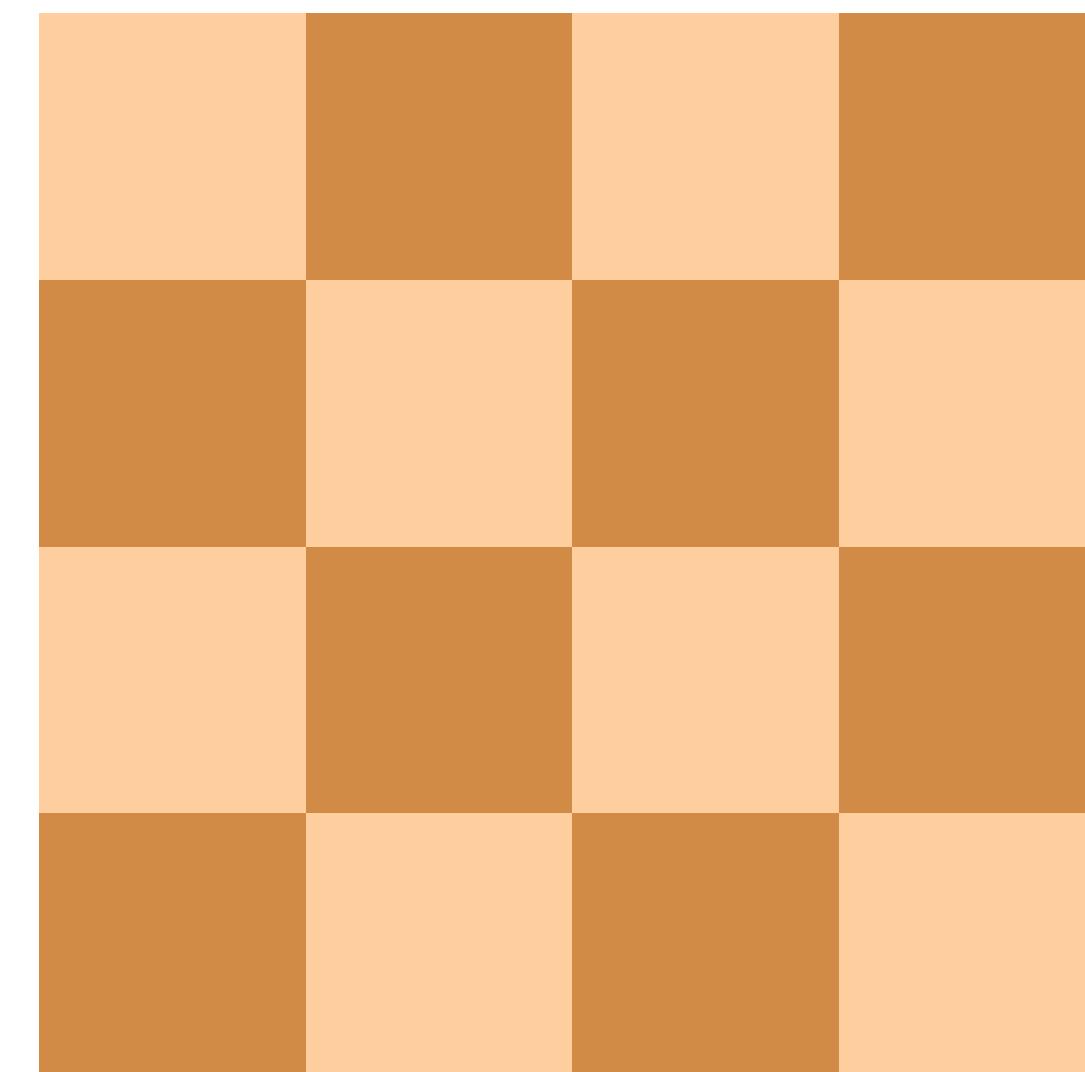
```
int[][] combinationSum(int[] candidates, int target) {  
    int[][] results;  
    backtracking(candidates, target, 0, [], results);  
    return results;  
}  
  
void backtracking = (int[] candidates, int target, int start, int[]  
solution, int[][] results) => {  
    if (target < 0) {  
        return;  
    }  
  
    if (target === 0) {  
        results.push(solution);  
        return;  
    }  
  
    for (int i = start; i < candidates.length; i++) {  
        solution.push(candidates[i]);  
        backtracking(candidates, target - candidates[i], i, solution,  
results);  
        solution.pop();  
    }  
}
```

52. N 皇后 I

n 皇后问题研究的是如何将 n 个皇后放置在 $n \times n$ 的棋盘上，并且使皇后彼此之间不能相互攻击。

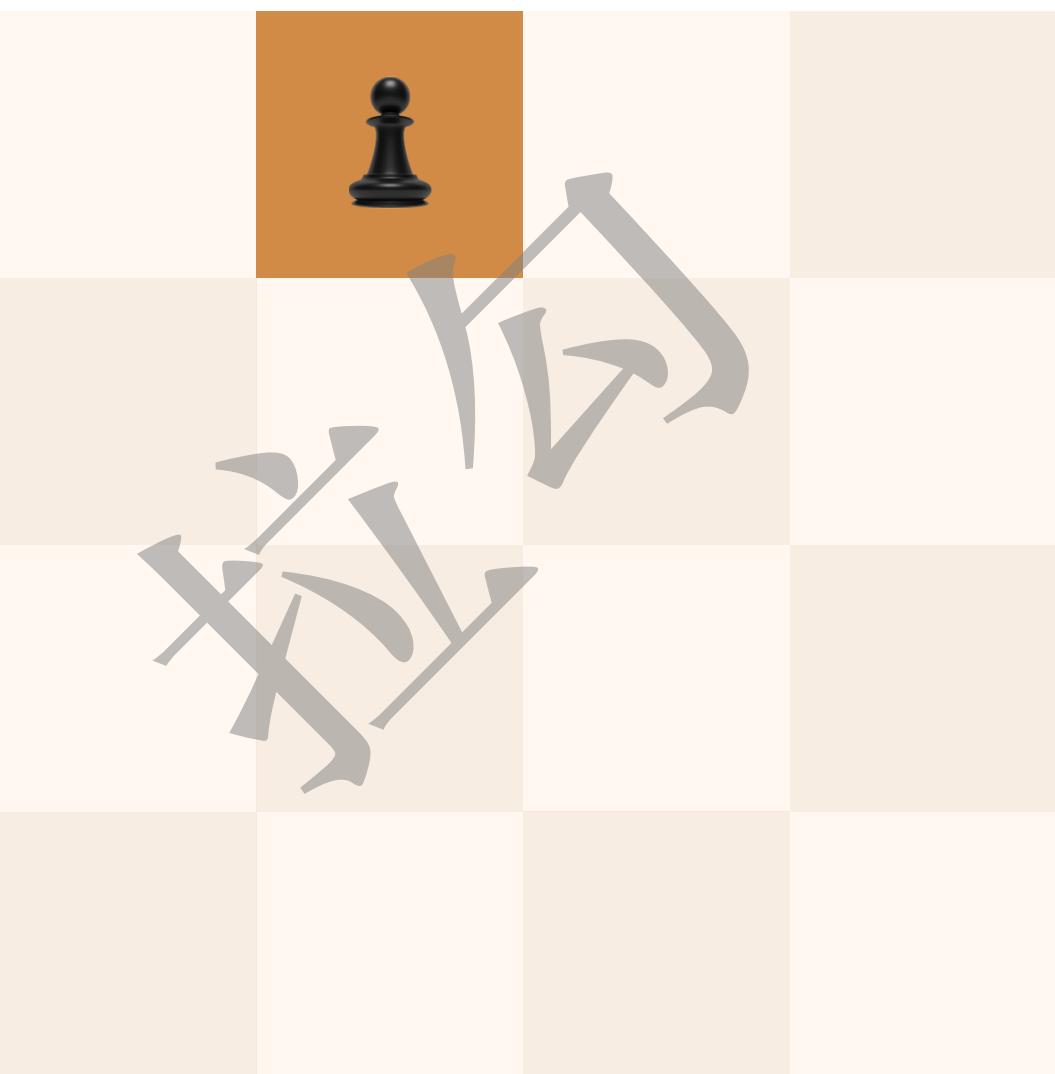
下图为 8 皇后问题的一种解法。

给定一个整数 n ，返回 n 皇后不同的解决方案的数量。



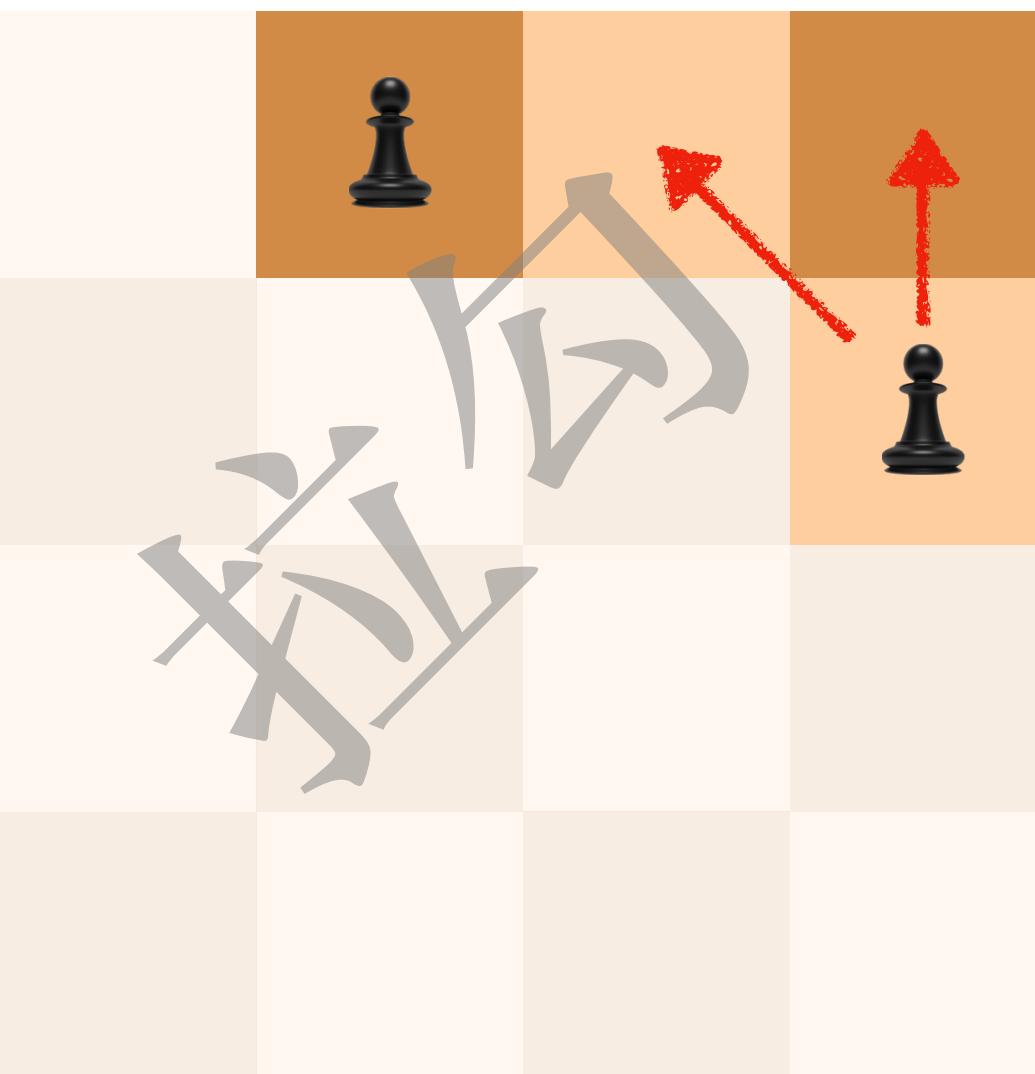
4.3

回溯 / Backtracking



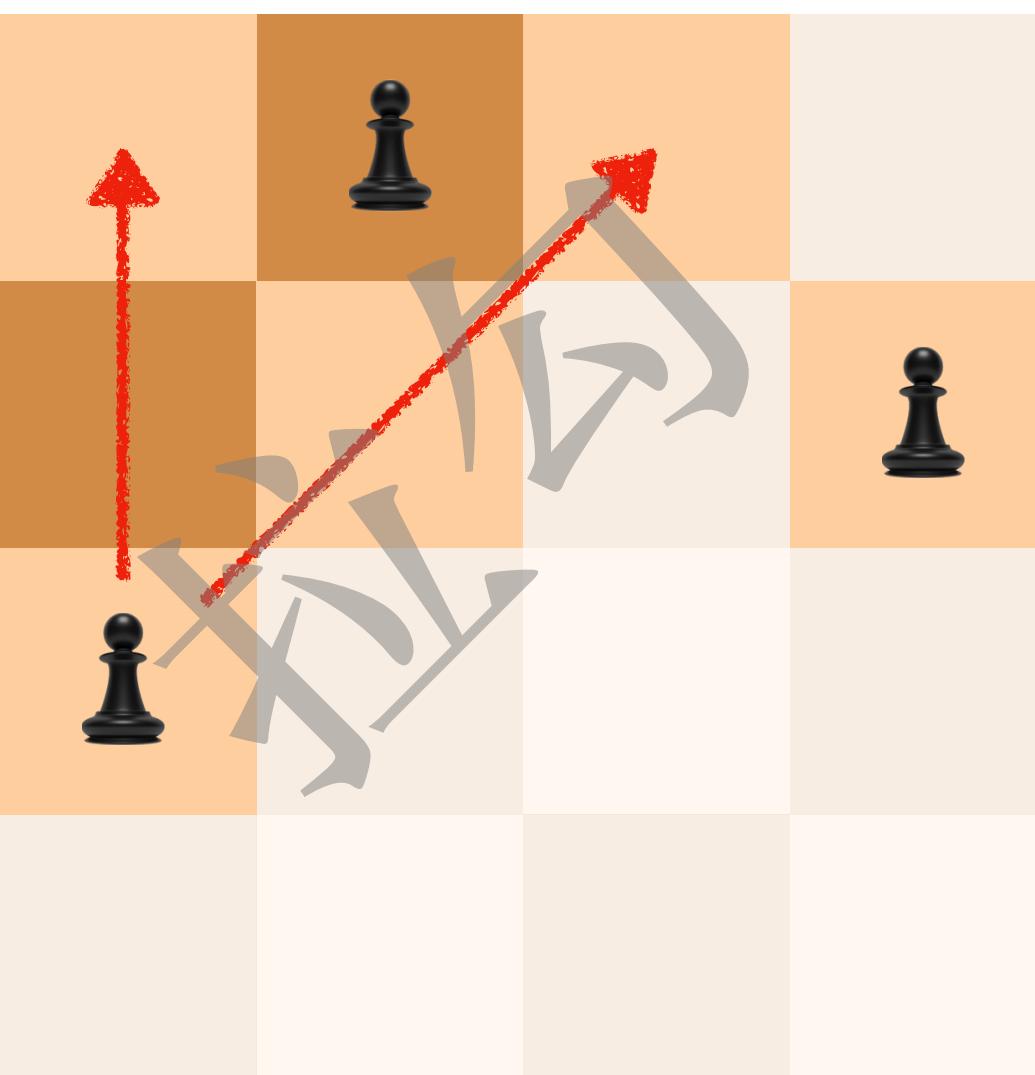
4.3

回溯 / Backtracking



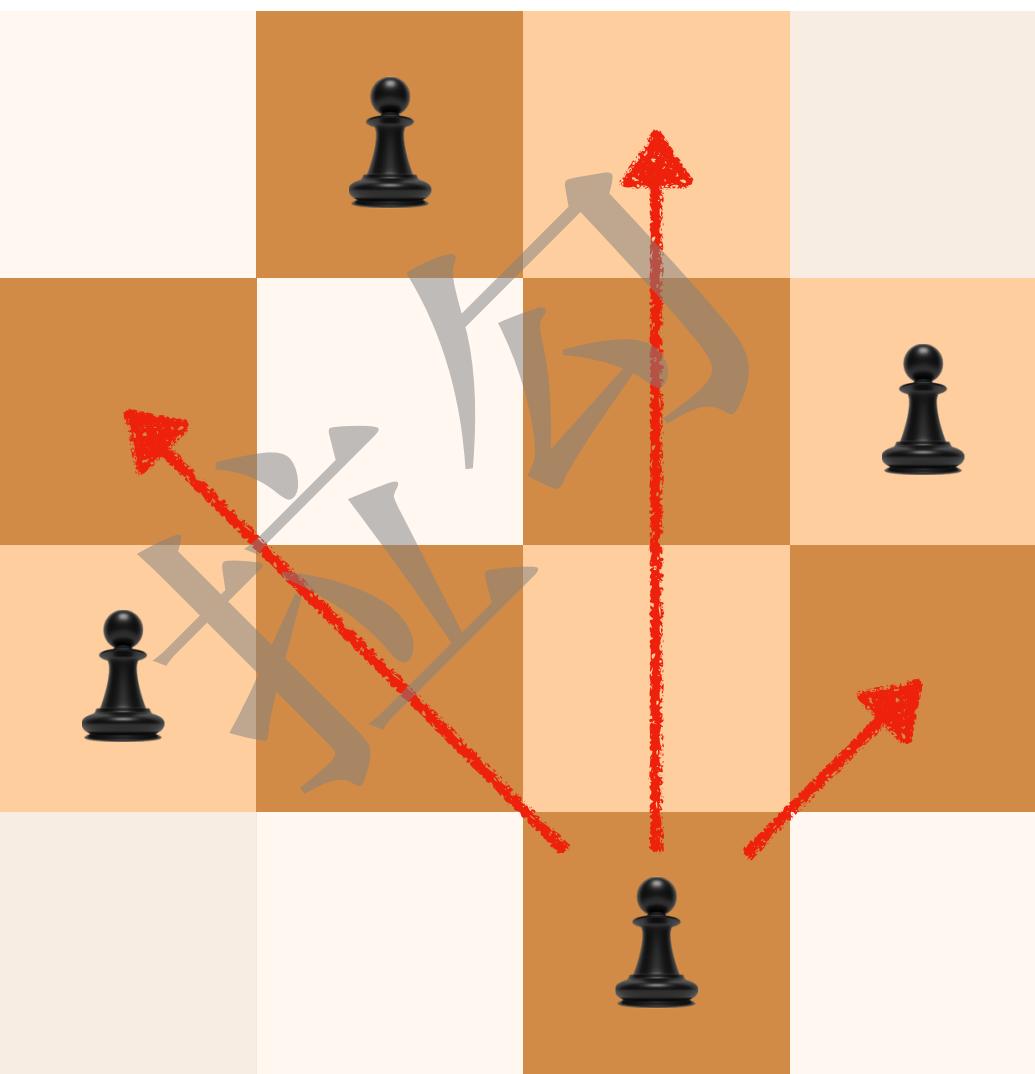
4.3

回溯 / Backtracking



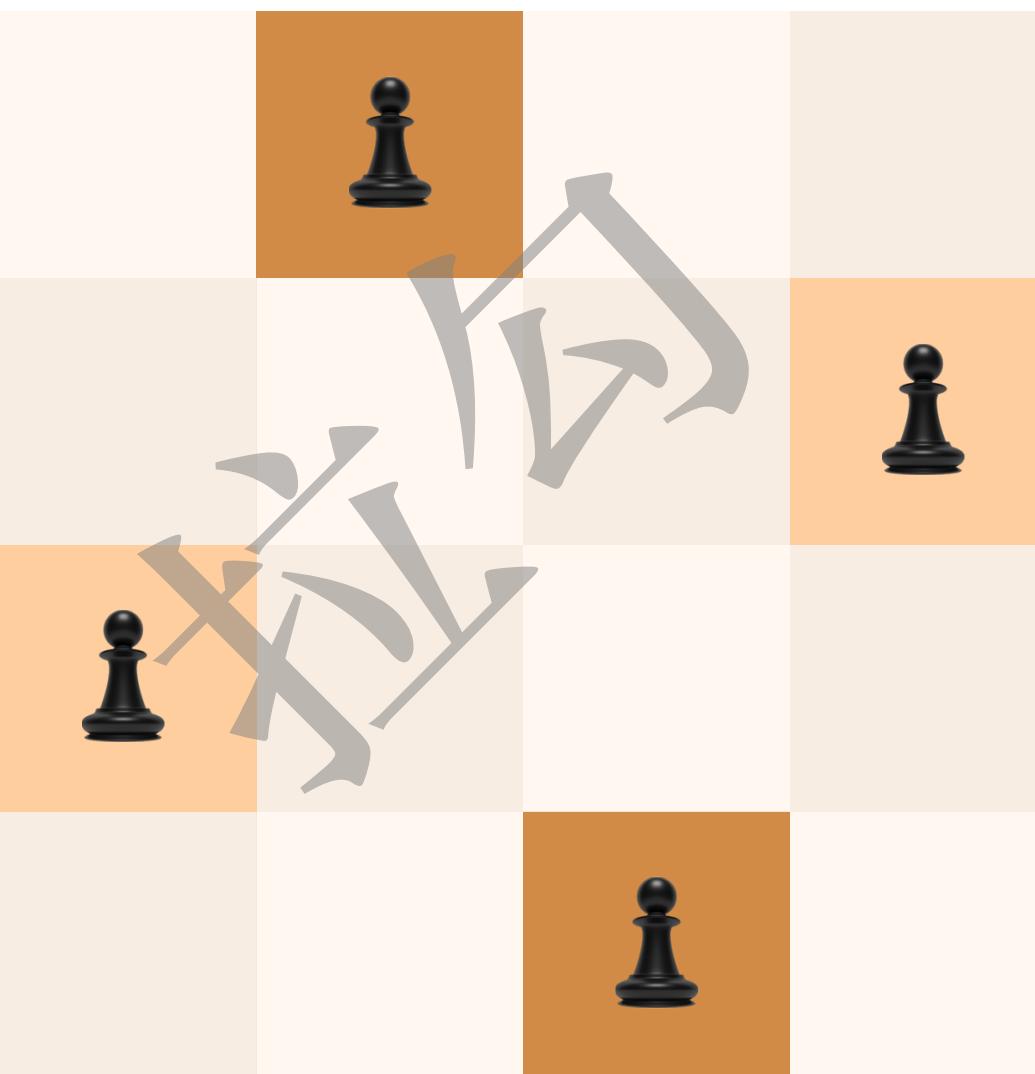
4.3

回溯 / Backtracking



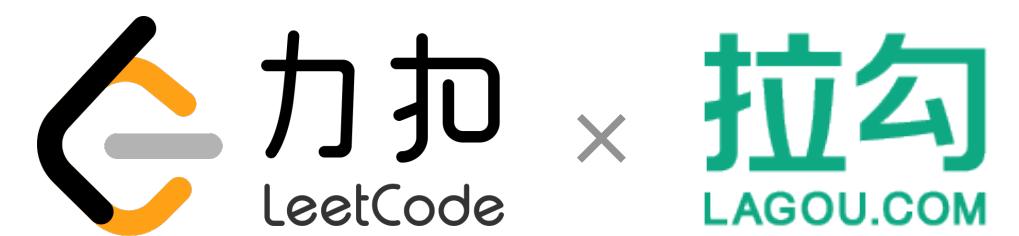
4.3

回溯 / Backtracking

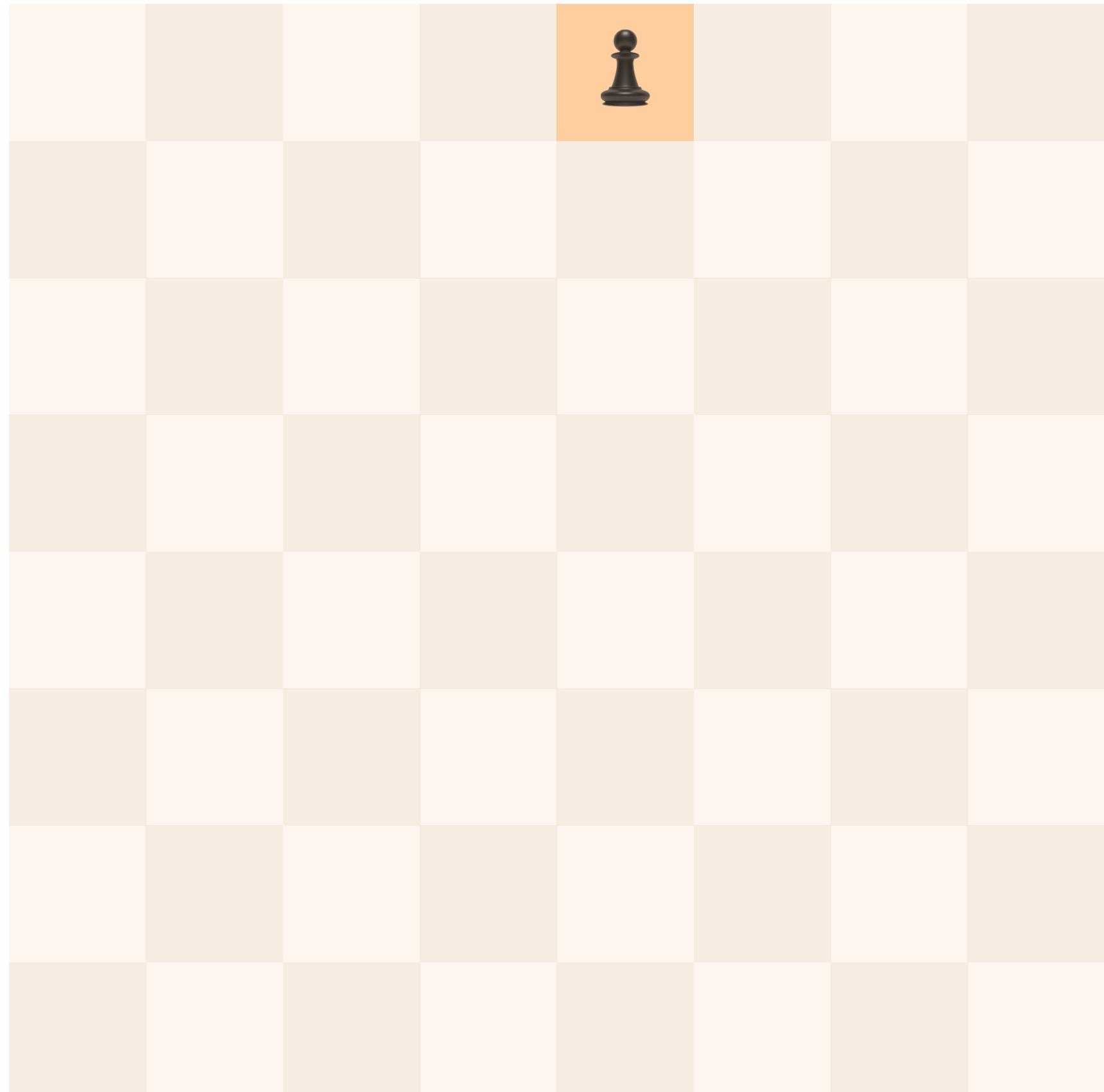


4.3

回溯 / Backtracking



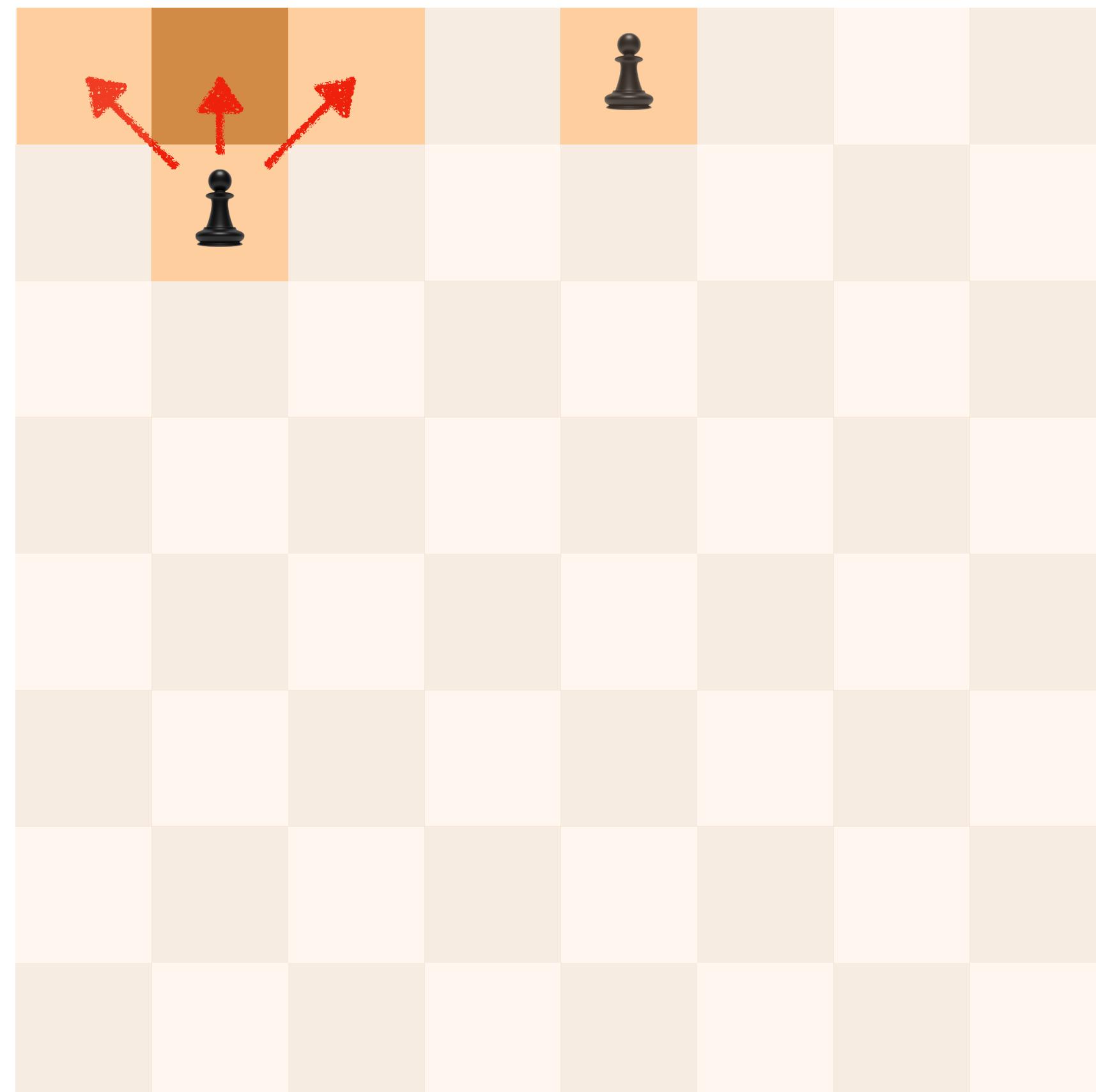
```
boolean check(int row, int col, int[] columns) {  
    for (int r = 0; r < row; r++) {  
        if (columns[r] == col || row - r ==  
Math.abs(columns[r] - col)) {  
            return false;  
        }  
    }  
    return true;  
}
```



4.3

回溯 / Backtracking

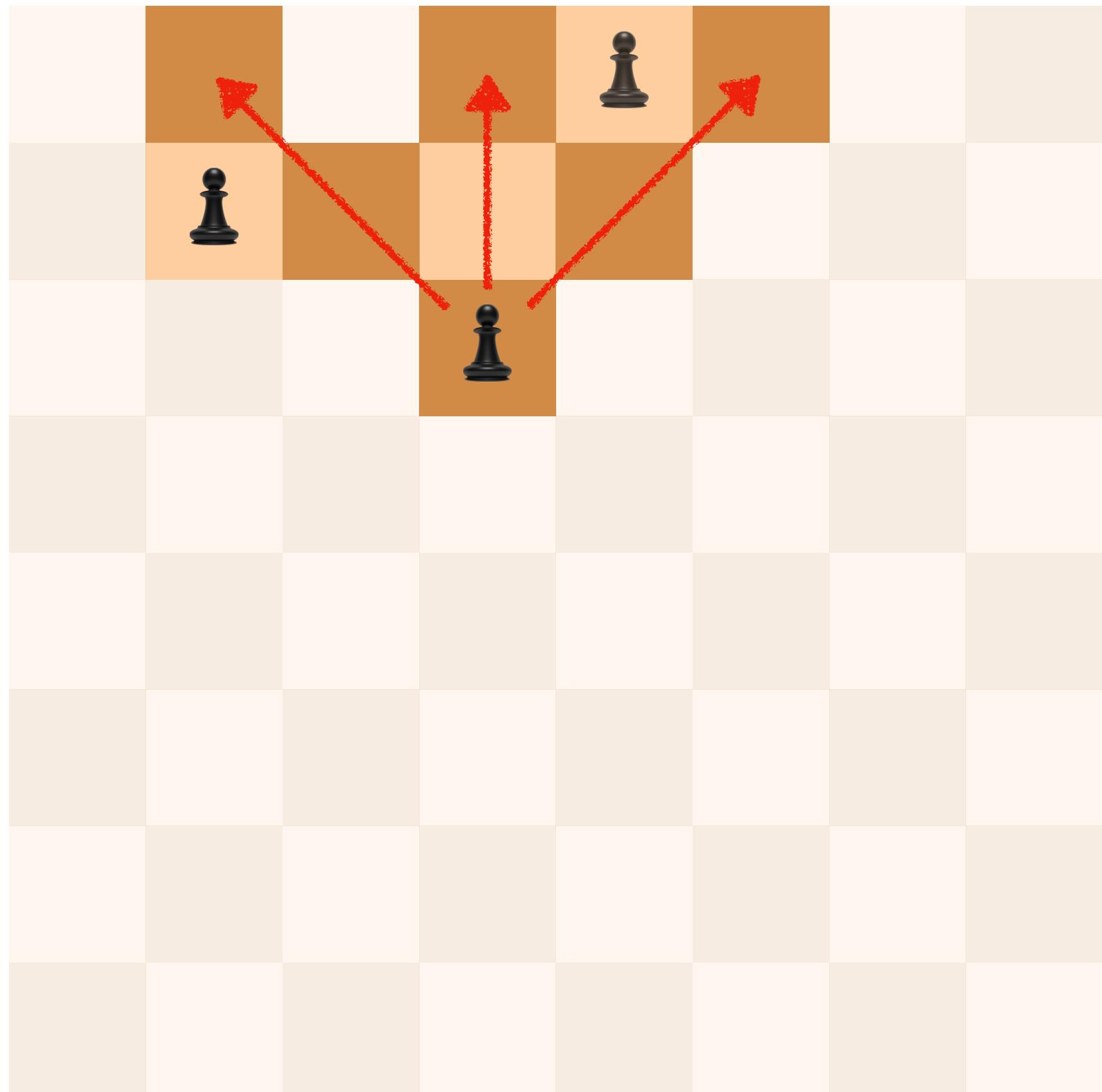
```
boolean check(int row, int col, int[] columns) {  
    for (int r = 0; r < row; r++) {  
        if (columns[r] == col || row - r ==  
Math.abs(columns[r] - col)) {  
            return false;  
        }  
    }  
    return true;  
}
```



4.3

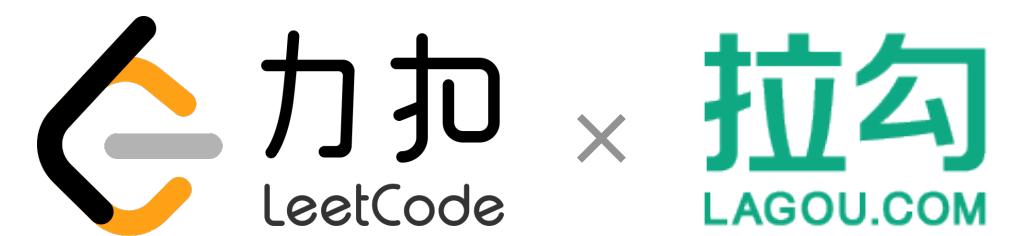
回溯 / Backtracking

```
boolean check(int row, int col, int[] columns) {  
    for (int r = 0; r < row; r++) {  
        if (columns[r] == col || row - r ==  
Math.abs(columns[r] - col)) {  
            return false;  
        }  
    }  
    return true;  
}
```

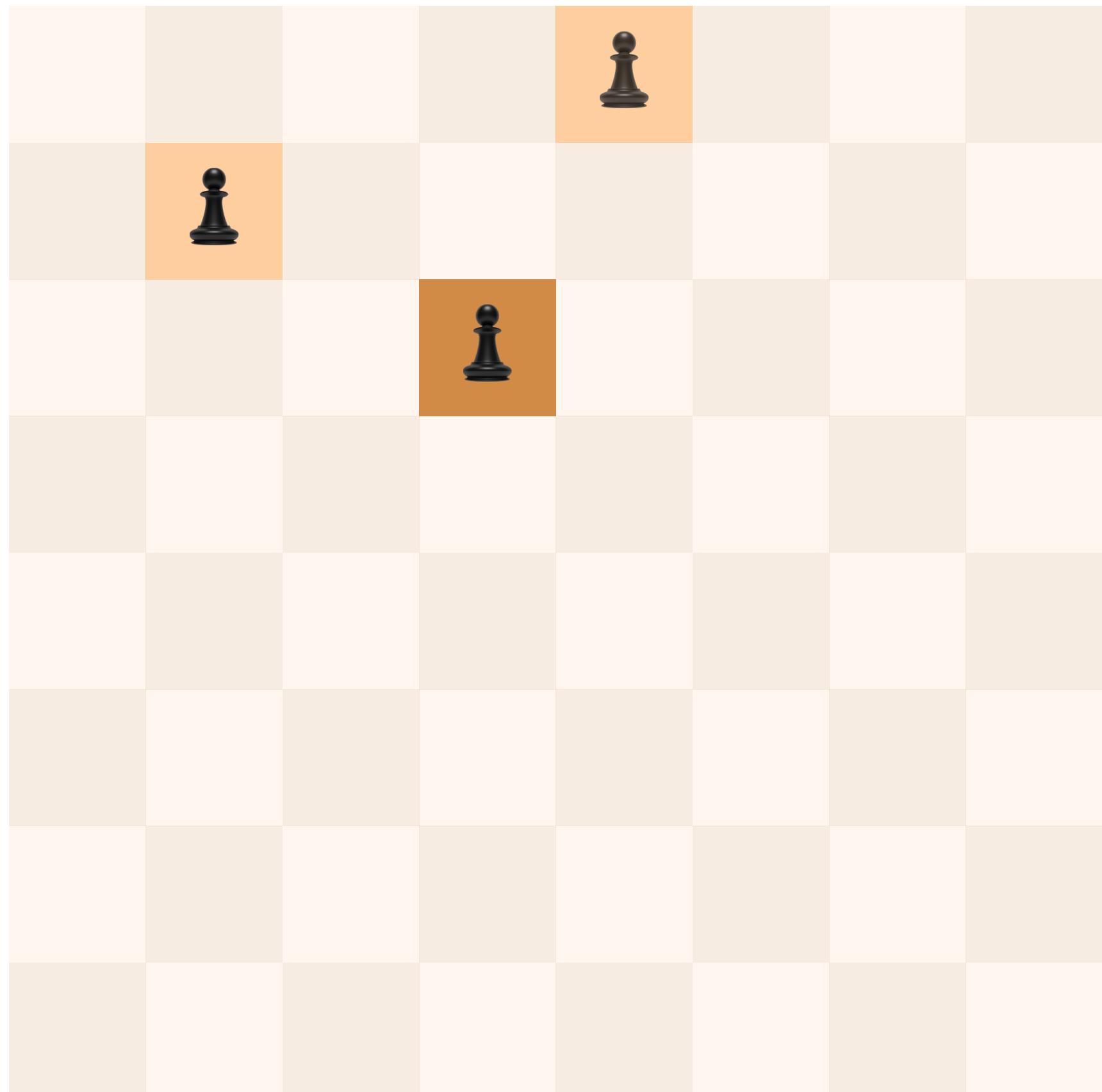


4.3

回溯 / Backtracking



```
boolean check(int row, int col, int[] columns) {  
    for (int r = 0; r < row; r++) {  
        if (columns[r] == col || row - r ==  
Math.abs(columns[r] - col)) {  
            return false;  
        }  
    }  
    return true;  
}
```



```
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}
```

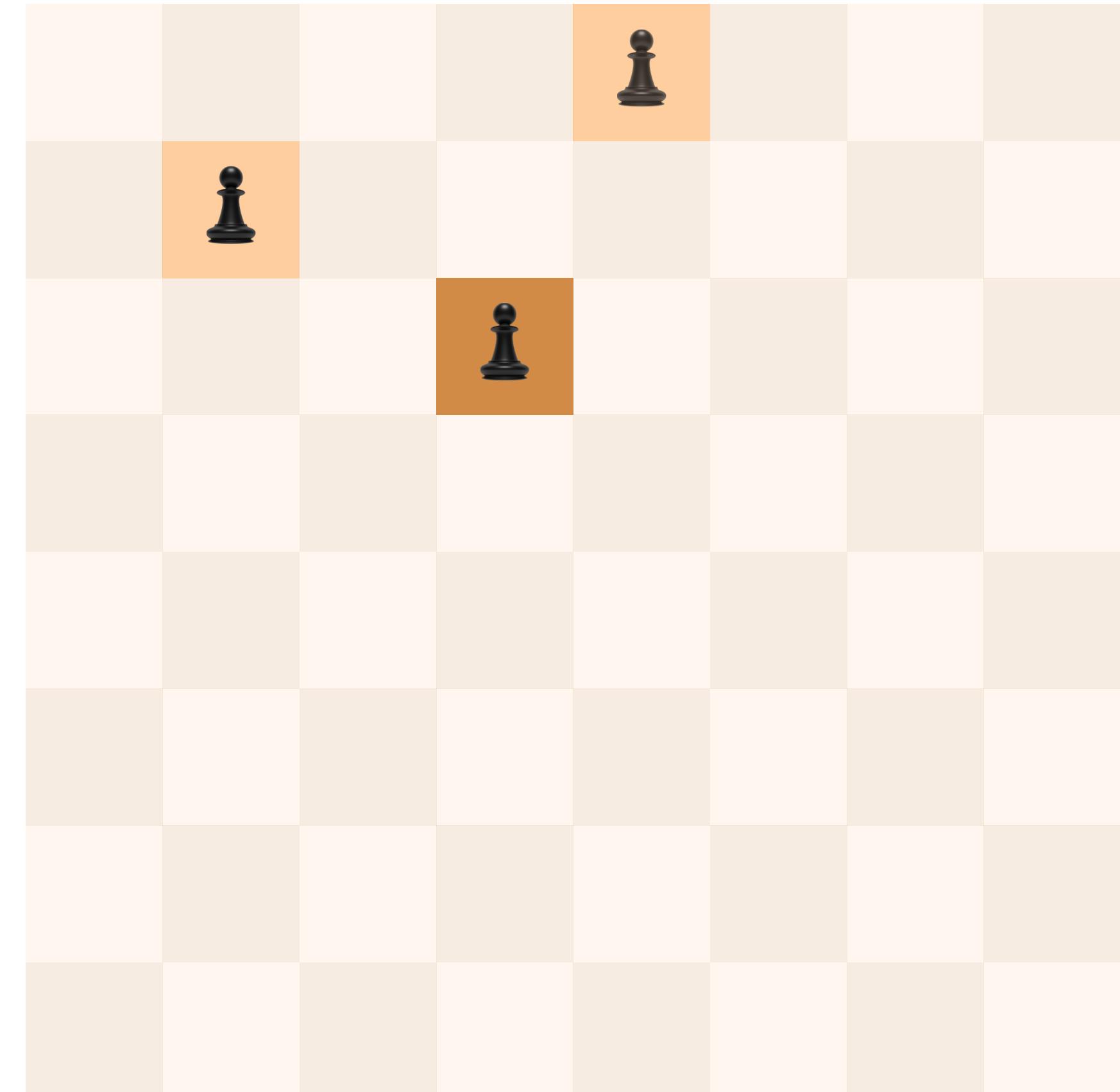


```
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}
```



```

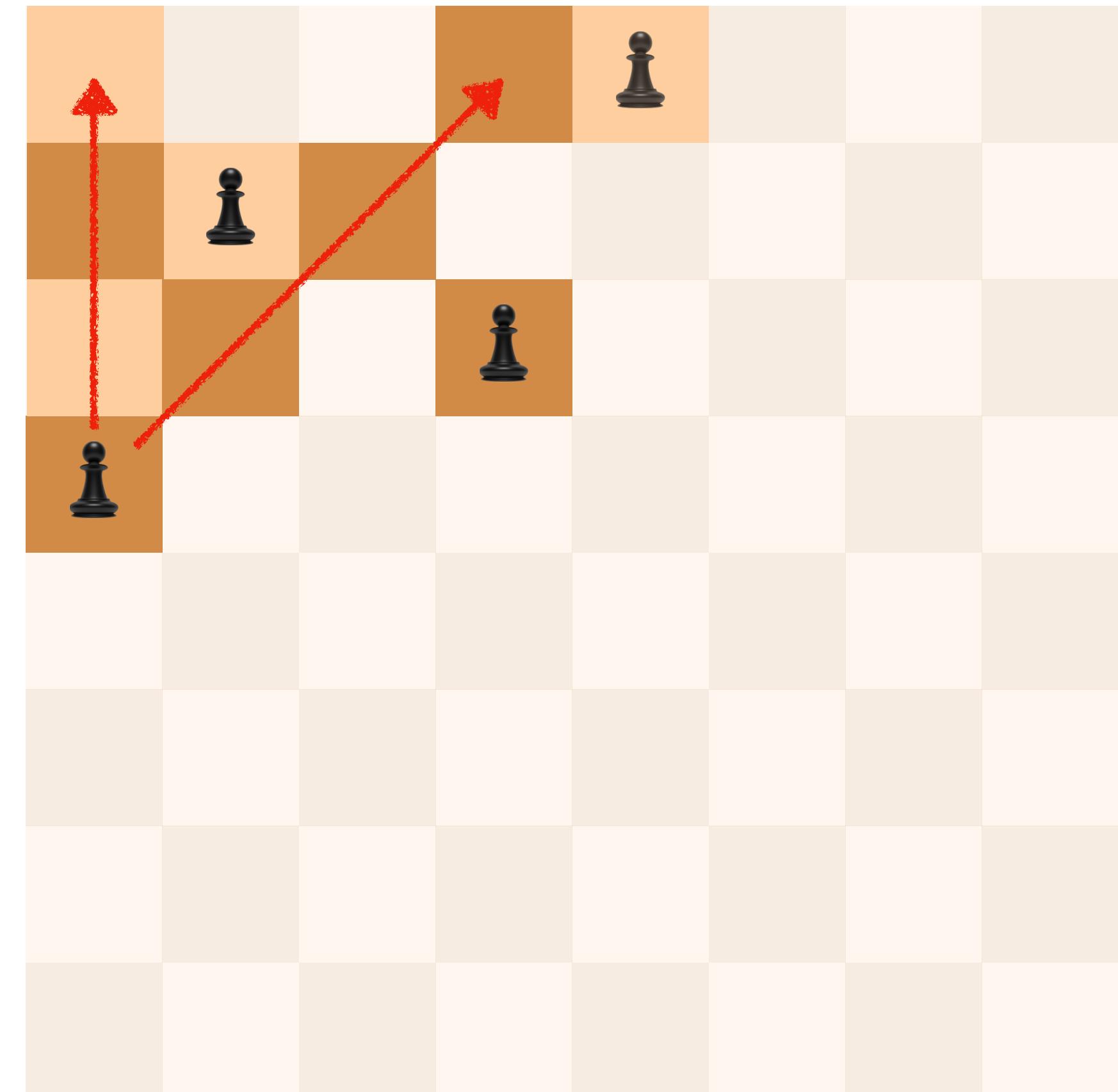
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

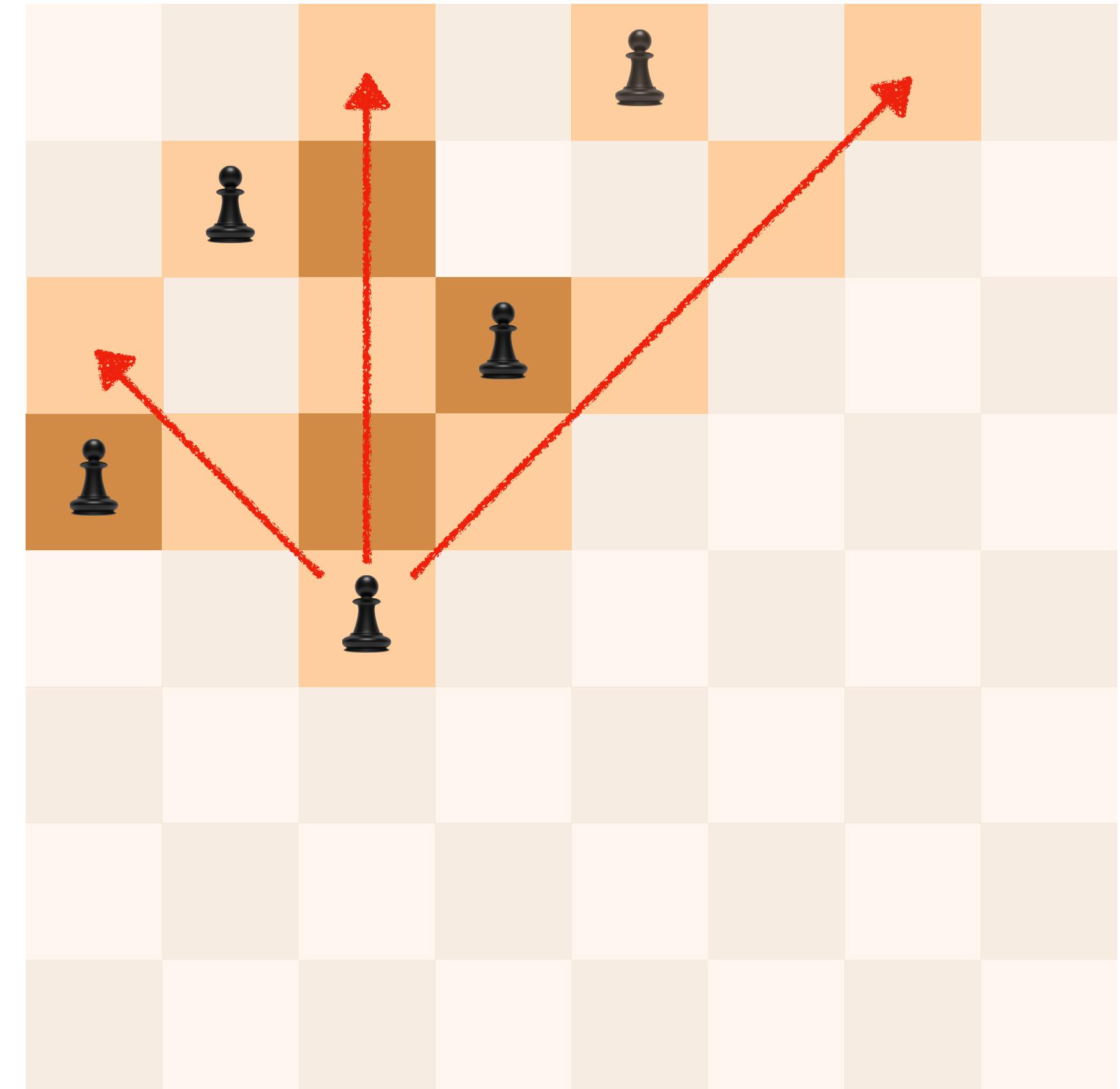
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

int count;

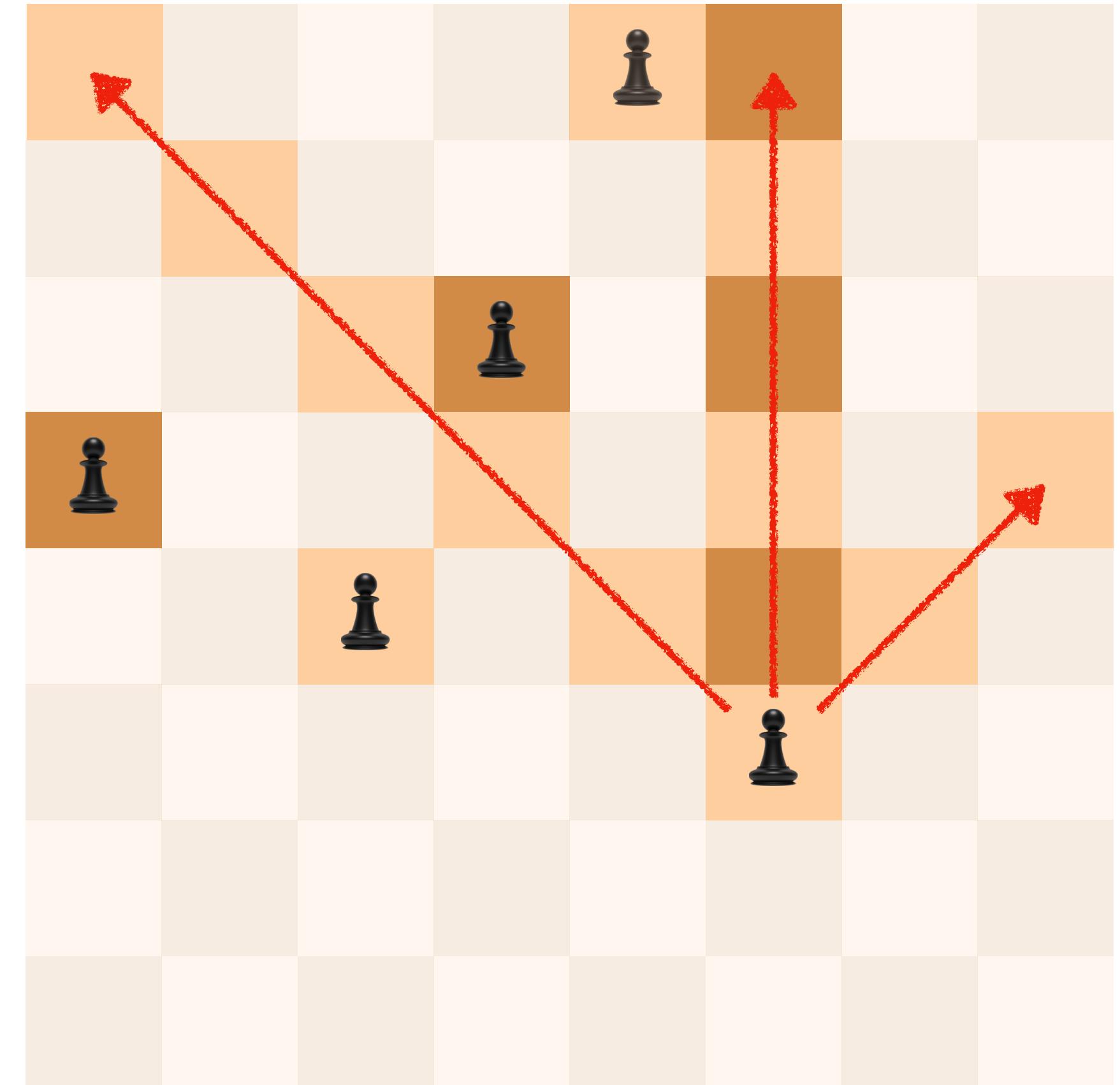
int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }

        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

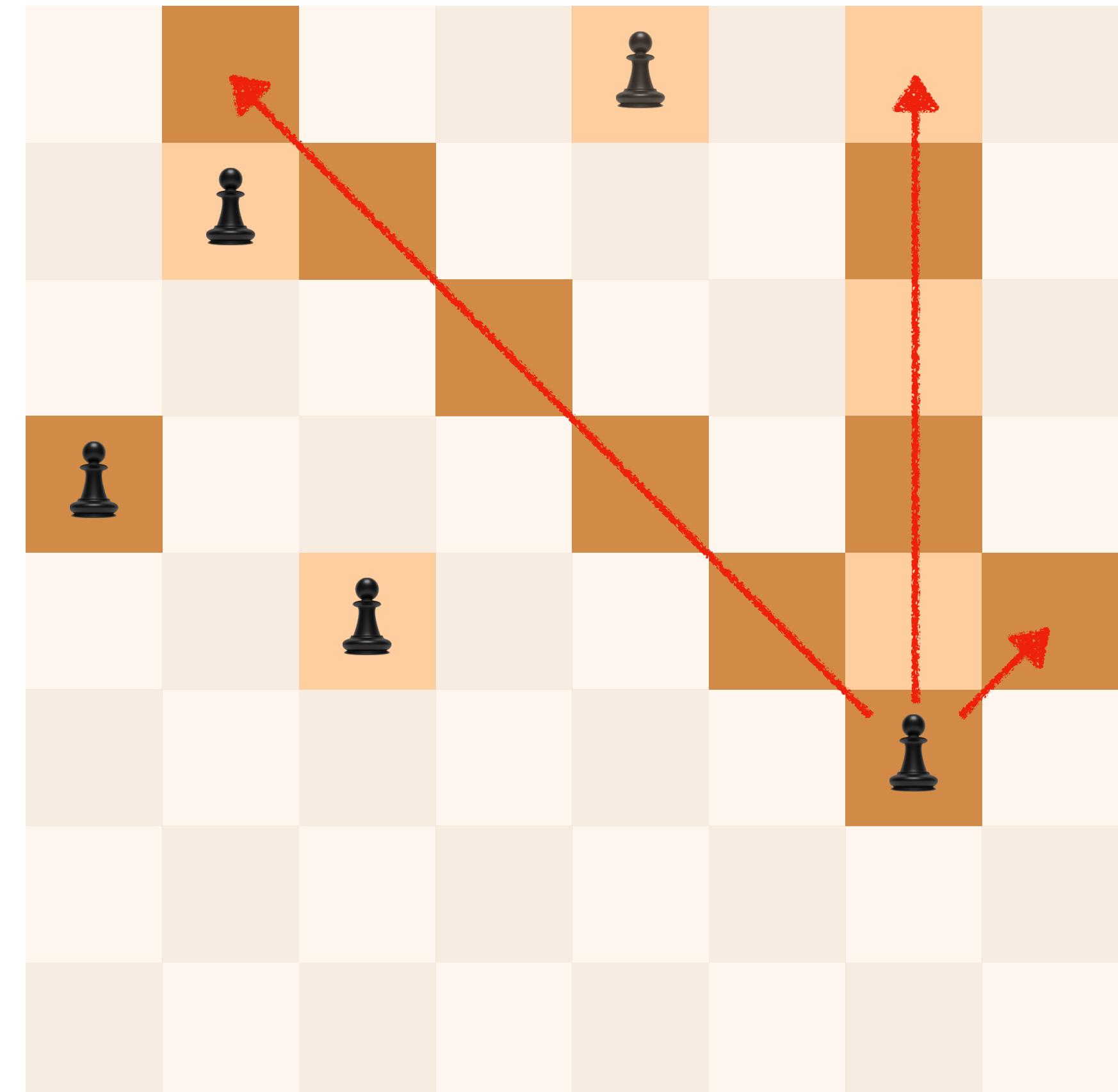
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

int count;

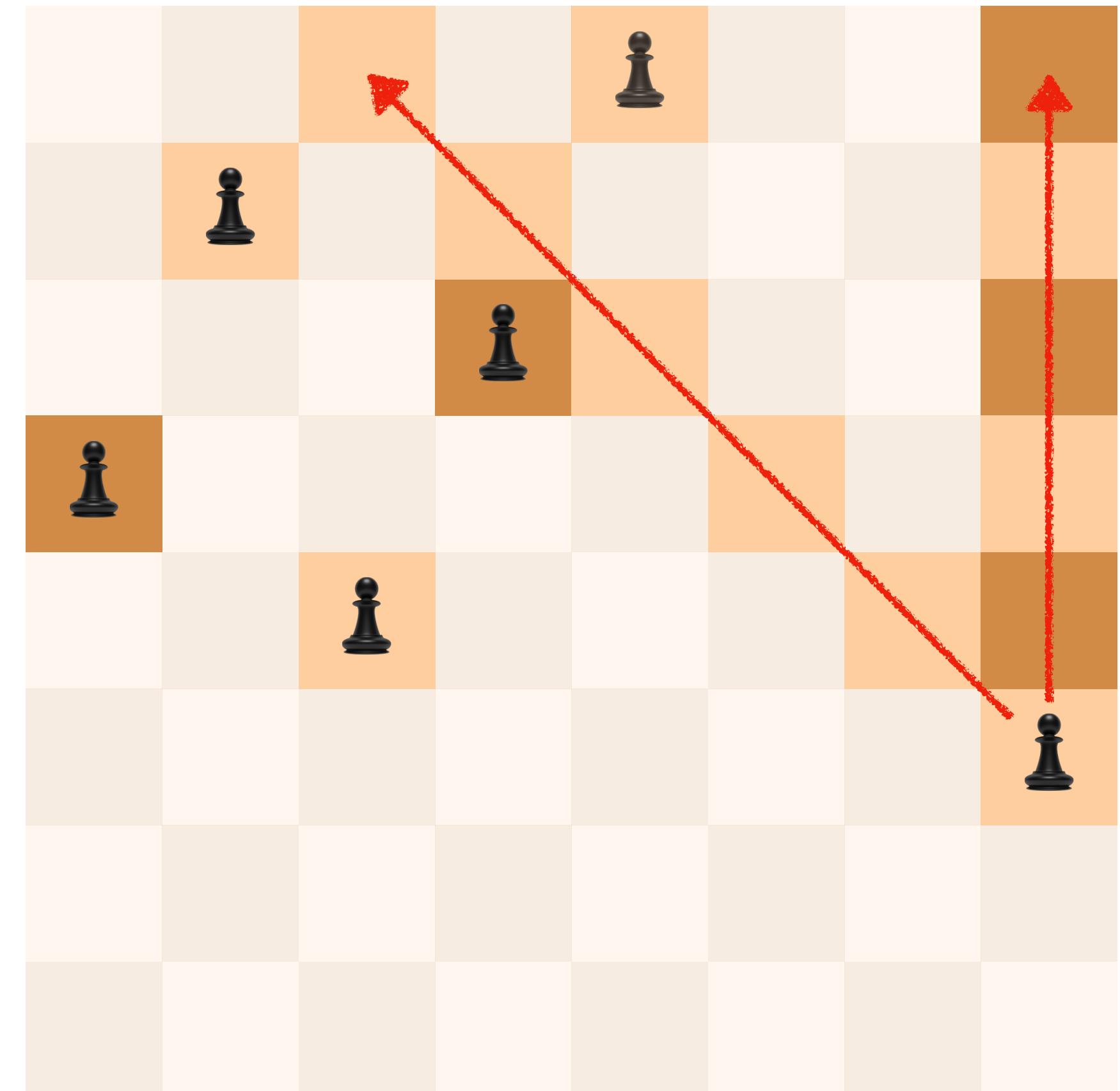
int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }

        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

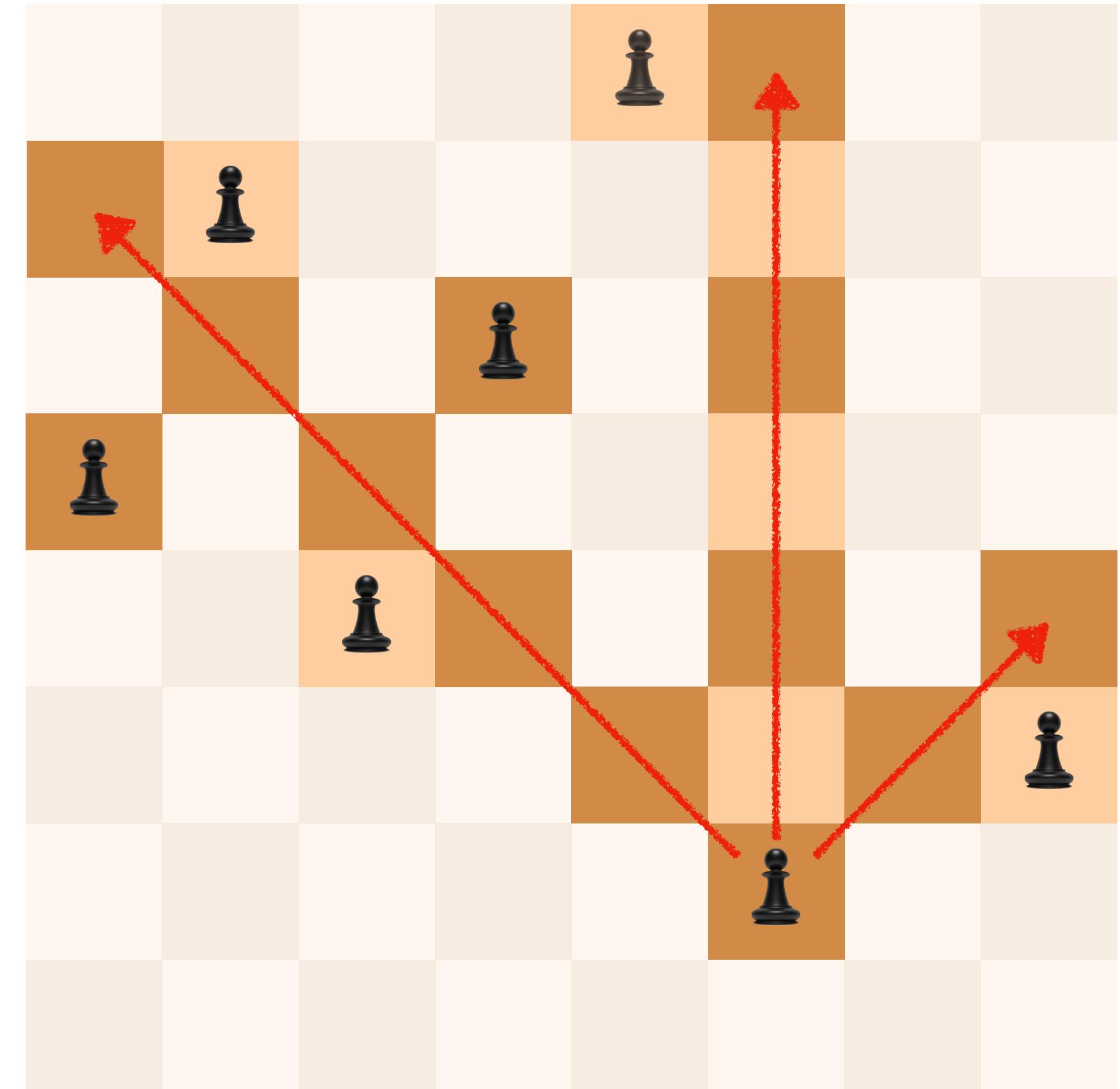
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

int count;

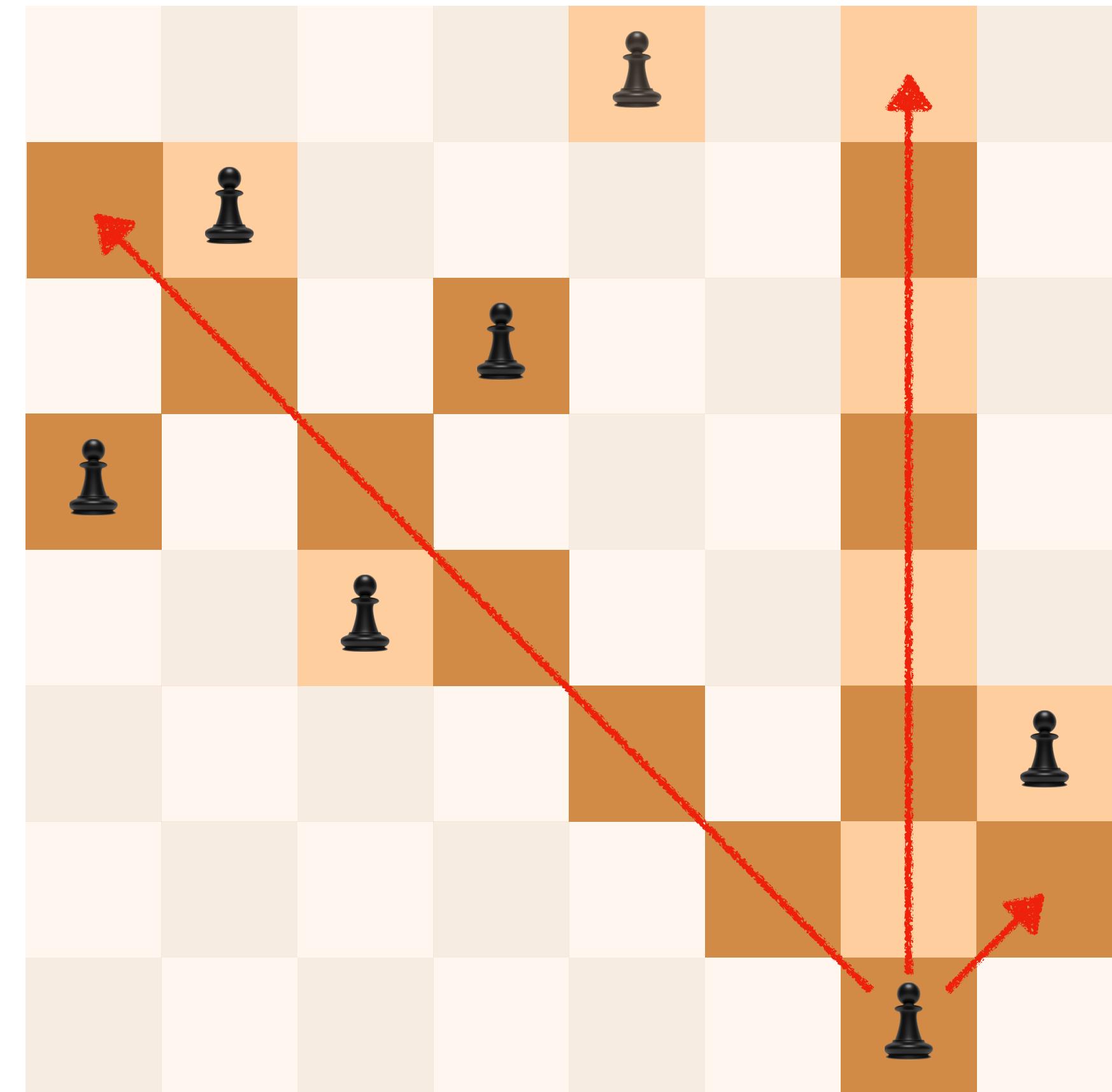
int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }

        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



```

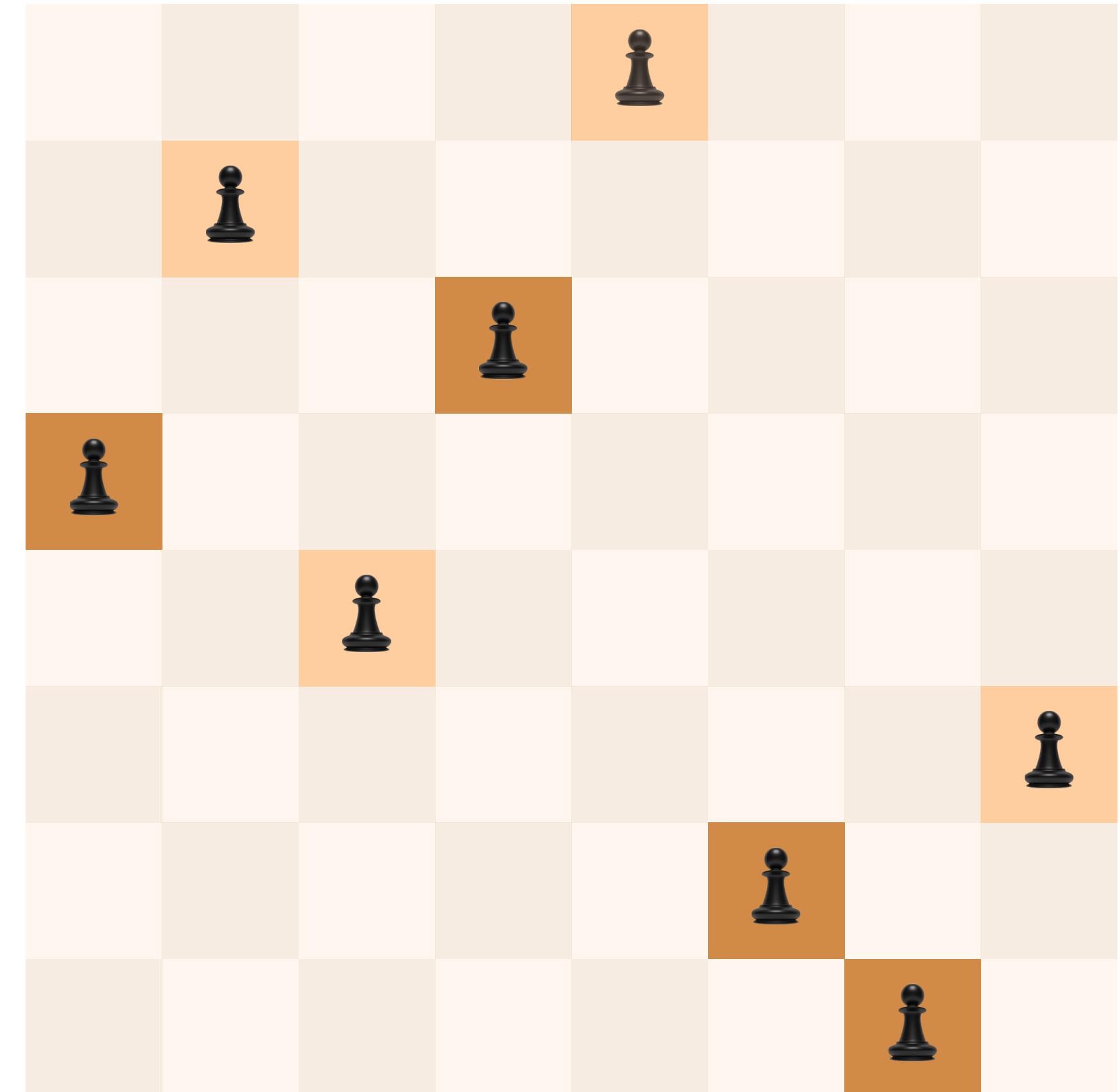
int count;

int totalNQueens(int n) {
    count = 0;
    backtracking(n, 0, new int[n]);
    return count;
}

void backtracking(int n, int row, int[] columns) {
    // 是否在所有n行里都摆放好了皇后?
    if (row == n) {
        count++; // 找到了新的摆放方法
        return;
    }

    // 尝试着将皇后放置在当前行中的每一列
    for (int col = 0; col < n; col++) {
        columns[row] = col;
        // 检查是否合法, 如果合法就继续到下一行
        if (check(row, col, columns)) {
            backtracking(n, row + 1, columns);
        }
        // 如果不合法, 就不要把皇后放在这列中 (回溯)
        columns[row] = -1;
    }
}

```



回溯其实是用递归实现的

因此在分析回溯的时间复杂度时，其实就是在对递归函数进行分析，方法和之前介绍的一样



分析一下 N 皇后的时间复杂度

假设 backtracking 函数的执行时间是 $T(n)$

- ▶ 首先每次都必须遍历所有的列，这里一共有 n 列
- 先要利用 check 函数检查当前的摆放方法会不会产生冲突
- 检查的时间复杂度由当前所在的行决定
- 但其上限是 n ，即需要检查 n 行，所以这里的总时间复杂度就是 $O(n^2)$

分析一下 N 皇后的时间复杂度

假设 backtracking 函数的执行时间是 $T(n)$

- ▶ 首先每次都必须遍历所有的列，这里一共有 n 列
- ▶ 接下来，递归地尝试着每种摆放
 - 当放好了第 1 个皇后，接下来要处理的之后 $n - 1$ 个皇后
 - 问题的规模减少了一个，于是执行时间变成了 $T(n - 1)$

分析一下 N 皇后的时间复杂度

假设 backtracking 函数的执行时间是 $T(n)$

- ▶ 首先每次都必须遍历所有的列，这里一共有 n 列
 - ▶ 接下来，递归地尝试着每种摆放
 - ▶ 最终得到 $T(n)$ 的表达式： $T(n) = n \times T(n - 1) + O(n^2)$
- 利用迭代法将 $T(n)$ 展开得到： $T(n) = n \times ((n - 1) \times T(n - 2) + (n - 1)^2 + n^2$

...

$$T(n) = \underbrace{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1}_{\text{阶乘}} + \underbrace{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2}_{\text{平方求和}}$$

分析一下 N 皇后的时间复杂度

假设 backtracking 函数的执行时间是 $T(n)$

- ▶ 首先每次都必须遍历所有的列，这里一共有 n 列
- ▶ 接下来，递归地尝试着每种摆放
- ▶ 最终得到 $T(n)$ 的表达式： $T(n) = n \times T(n - 1) + O(n^2)$
- 利用迭代法将 $T(n)$ 展开得到： $T(n) = n \times ((n - 1) \times T(n - 2) + (n - 1)^2 + n^2)$
 \dots
 $T(n) = n! \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \dots \times 1 + 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$
 $O(T(n)) = n! + O(n^3)$
- 根据公式最后得到：

分析一下 N 皇后的时间复杂度

假设 backtracking 函数的执行时间是 $T(n)$

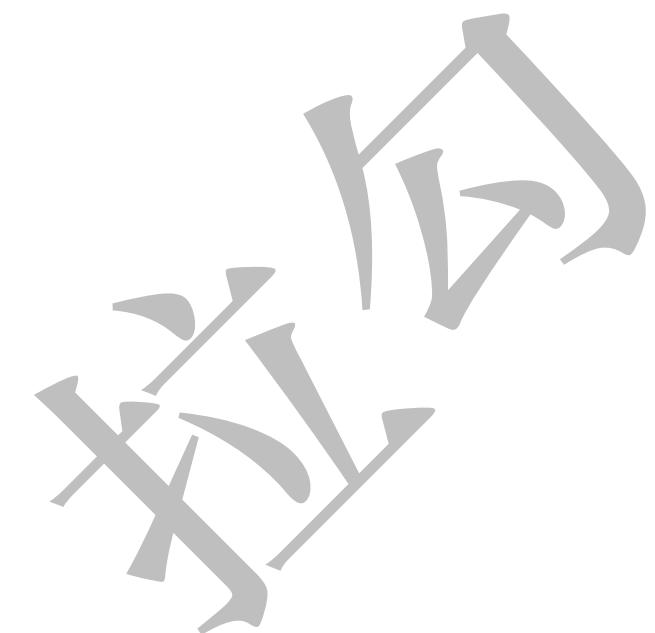
- ▶ 首先每次都必须遍历所有的列，这里一共有 n 列
 - ▶ 接下来，递归地尝试着每种摆放
 - ▶ 最终得到 $T(n)$ 的表达式： $T(n) = n \times T(n - 1) + O(n^2)$
- 利用迭代法将 $T(n)$ 展开得到： $T(n) = n \times ((n - 1) \times T(n - 2) + (n - 1)^2 + n^2$

$$\begin{aligned} &\dots \\ T(n) &= n! + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ O(T(n)) &= n! + O(n^3) \end{aligned}$$

由于 $n! > n^3$ ，因此，其上界就是 $n!$ ，即： $O(T(n)) = n!$

递归和回溯可以说是算法面试中最重要的算法考察点之一，很多其他算法都有它们的影子

- ▶ 二叉树的定义和遍历
- ▶ 归并排序、快速排序
- ▶ 动态规划
- ▶ 二分搜索



熟练掌握分析递归复杂度的方法，必须得有比较扎实的数学基础，比如要牢记等差数列、等比数列等求和公式。

- ▶ 力扣上对递归和回溯的题目分类做得很好，有丰富的题库，建议大家多做。

Next: 课时 5 《深度优先搜索、广度优先搜索》

多加练习，才能更好地巩固知识点。



关注“拉勾教育”
学习技术干货



关注“LeetCode力扣”
获得算法技术干货