算力集中如何影响共识竞争

基于比特币网络的分析

报告人：徐家画
伦敦大学学院， exponential science基金会

背景知识
BACKGROUND

比特币区块链

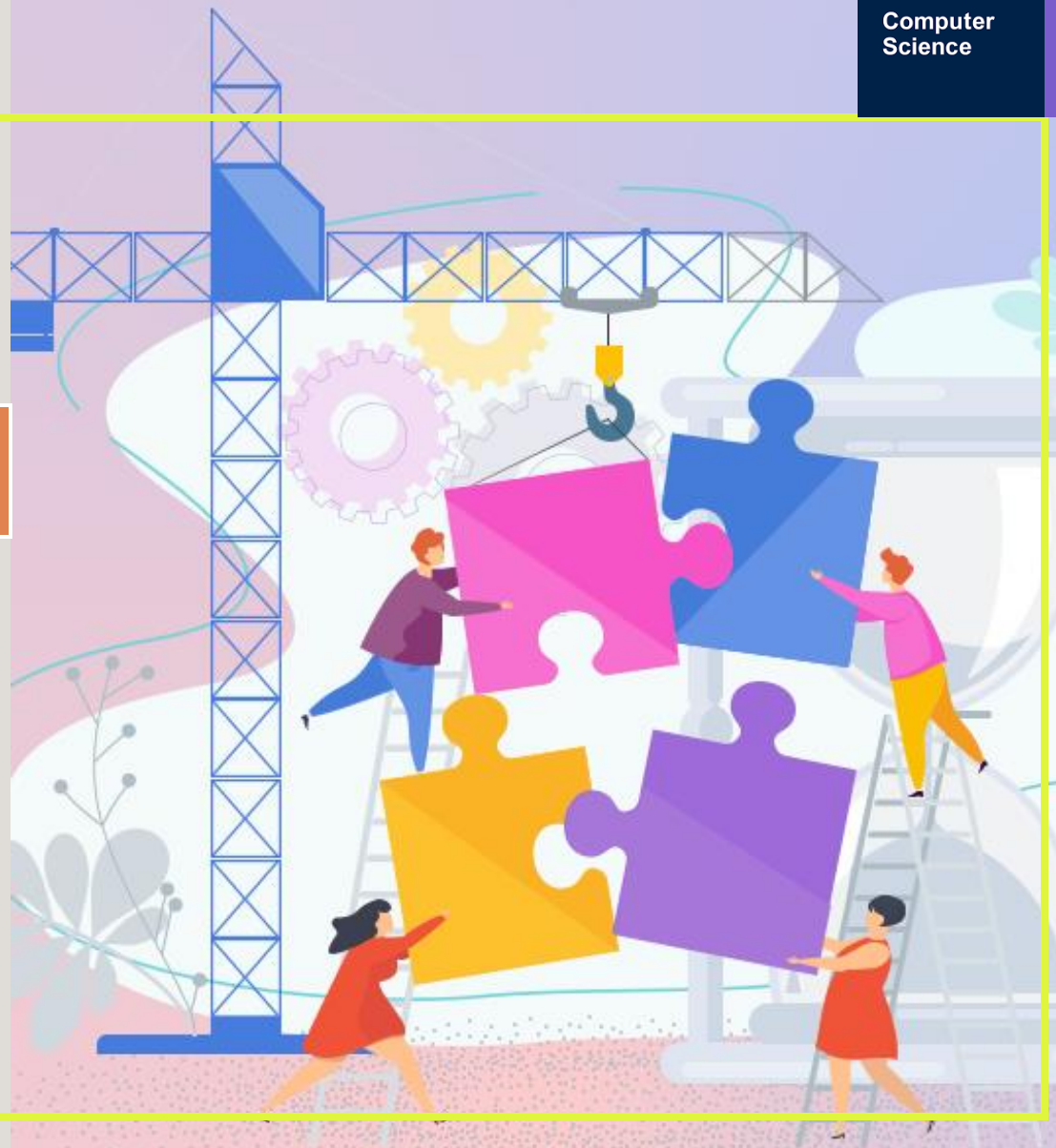
- **分布式**记账系统
  - 记账节点称为“矿工”
- **工作量**证明共识机制
  - 矿工争先计算一个数学难题
  - 计算速度大体和算力（“**哈希率**”）**成正比**
  - **先算好的人可以得到区**块链奖励（一些比特币）
  - **先算好的人要把“挖到”的区**块广播给网络中其他矿工

UCL Computer Science

研究思路
RESEARCH FRAMEWORK

形式化建模 Formal modeling → 推导 Derivation → 历史观测 Historical observation → 模拟 Simulation

模型验证 Model verification → 场景测试 Scenario testing → 结论 Conclusion

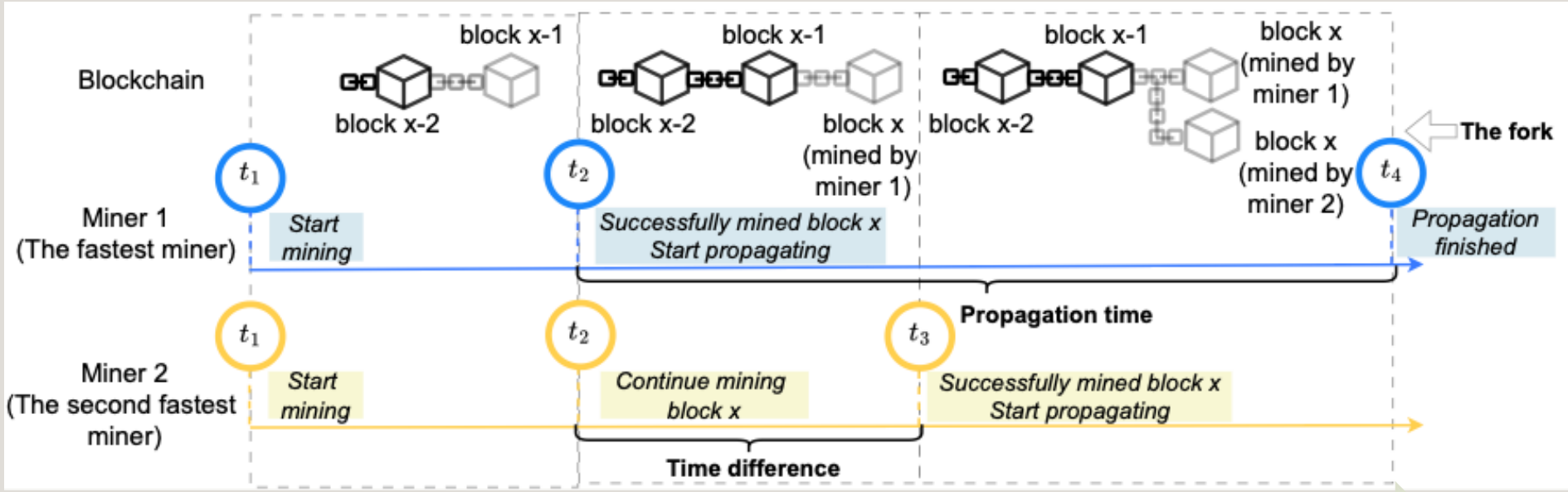


UCL Computer Science

形式化建模
FORMAL MODELING

分叉的形成

FORK GENERATION



模型简化

- ❖将区块链中挖矿最快的两位标为矿工1和2
- ❖同时动工
- ❖矿工1挖到一个区块后立即向整个网络传播该信息
- ❖信息传递有一定时间
  - ➢若矿工2在收到信息前还未挖好一个区块，矿工2停止当前区块挖掘，并直接在矿工1挖的区块基础上挖掘下一个区块，没有分叉形成
  - ➢否则，**分叉生成**

区块挖成—伯努利過程

ARRIVAL OF MINED BLOCK – A BERNOULLI PROCESS

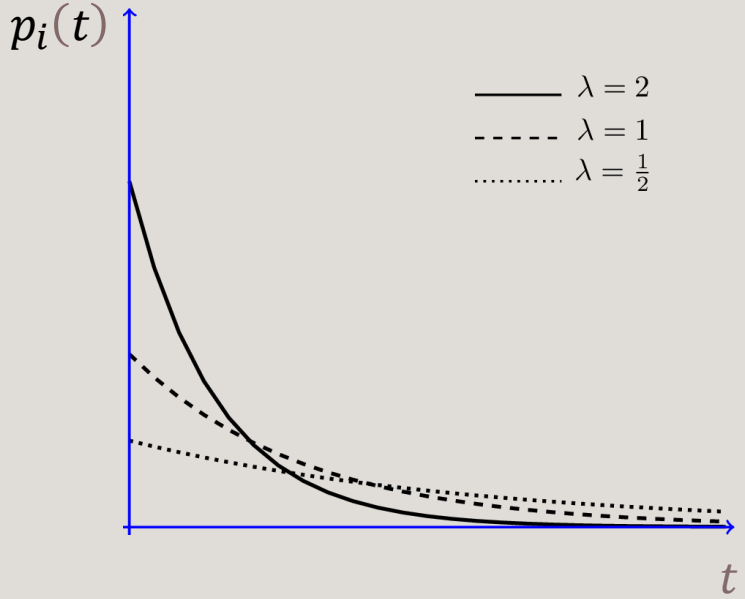
每一个矿工 i对应的算力为 λ_i

- 算力越高，区块挖成用时越短
- 第一个区块挖成的时间分布符合**指数分布**，其概率密度函数及生存函数分别为

$$p_i(t) = \frac{\lambda_i}{e^{\lambda_i t}}$$

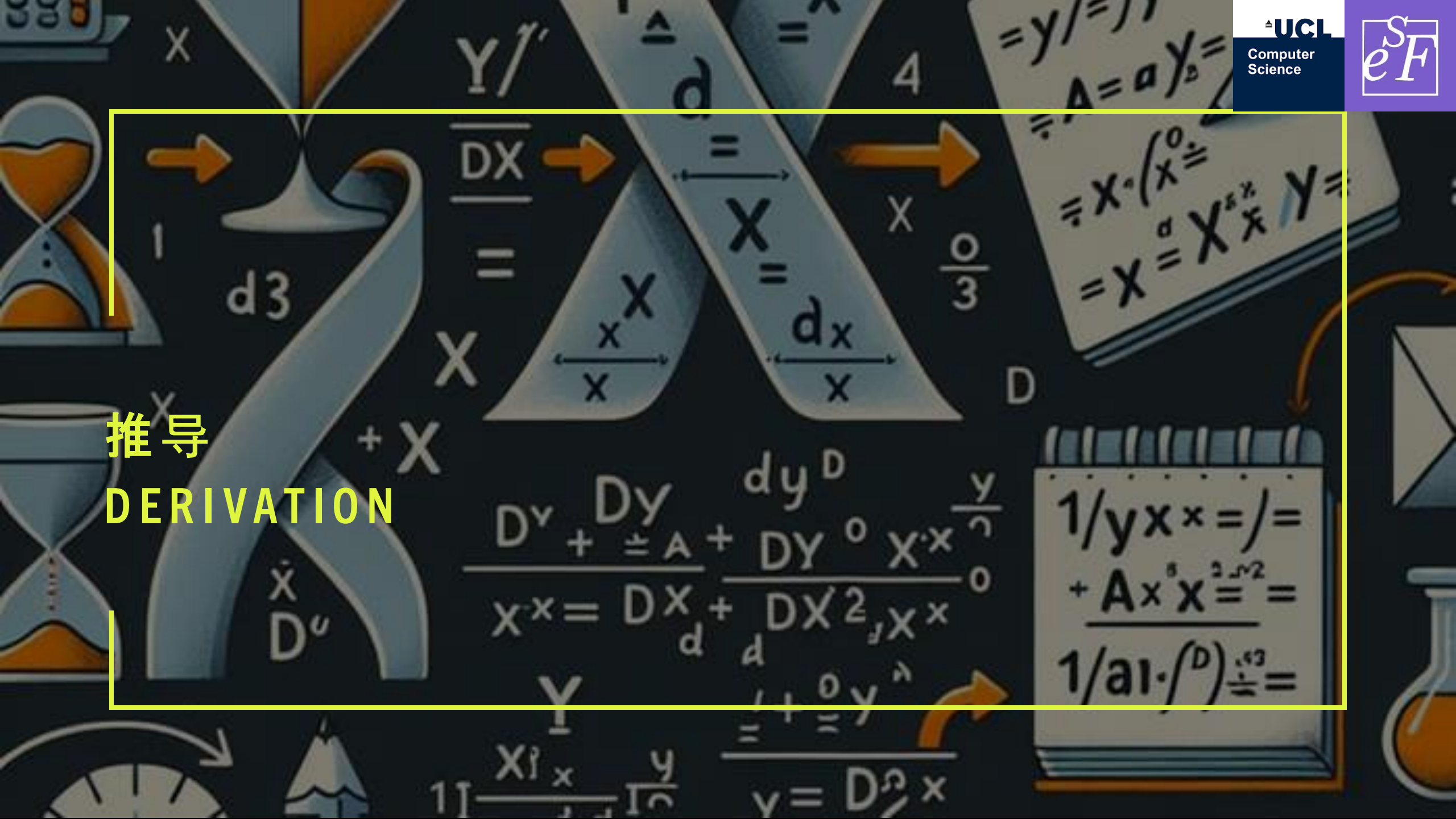
$$S_i(t) = \int_t^{\infty} p_i(t)\, dt = \frac{1}{e^{\lambda_i t}}$$

$S_i(t)$: 矿工 i**未能在**时间 t **内挖到下一个区**块



区块时间期望为 $\frac{1}{\sum\lambda}$。

令 $\Lambda := \sum\lambda$表示比特币区块链网络内总算力，那么，因为区块时间稳定在60秒/min * 10 min = 600秒，所以理论框架下算力总和总是约为1/600（挖矿难度归一化后）。



UCL Computer Science

eSF

分叉率计算
DERIVATION OF FORK RATE

给定矿工们的算力分布 $\{\lambda_i\}$，**两个最快**矿工挖矿时间分别为 t**和** t'**的概率**为：

$$p(t,t'|\{\lambda_i\}) = \sum_{i\neq j} \theta(t'-t)p_i(t)p_j(t') \prod_{k\neq i,j}^{N} S_k(t')$$

其中，单位阶跃函数$\theta(t'-t) = \begin{cases} 1, & t' \geq t \\ 0, & t' < t \end{cases}$。**那么两个最快**矿工挖矿时间相差正好为 Δ**的概率是**：

$$p(\Delta = t'-t|\{\lambda_i\}) = \iint dtdt'\ \delta(\Delta - t' + t)p(t,t'|\{\lambda_i\})$$

分叉生成条件是，**第二快**矿工在得到第一块矿工的区块前已经挖好自己的区块，即，最快两位矿工挖矿时间差**要小于区**块广播时间。那么给定区块广播时间Δ_0，**分叉率可表示**为：

$$C(\Delta_0) = \int_0^{\Delta_0} dt \int_D p(\Delta|\{\lambda_i\})p(\{\lambda_i\}) = 1 - \int_D p(\{\lambda_i\}) \frac{\sum_i^N \frac{\lambda_i}{e^{\Delta_0 \sum_{j\neq i}\lambda_j}}}{\sum_i^N \lambda_i}$$

分叉率计算—特殊情况
DERIVATION OF FORK RATE – SPECIAL CONDITIONS

- 给定任意算力联合概率分布 $\{\lambda_i\}\sim D$，**两个最快**矿工挖矿时间为Δ_0**的函数**：

$$C(\Delta_0)=\int_0^{\Delta_0}dt\int_D p(\Delta|\{\lambda_i\})p(\{\lambda_i\})=1-\int_D p(\{\lambda_i\})\frac{\sum_i^N\frac{\lambda_i}{e^{\Delta_0\sum_{j\neq i}\lambda_j}}}{\sum_i^N\lambda_i}$$

一般情况下，该表达式运算复杂度数量级为$O(m^N)$，$m\gg N$为一维积分计算量，N为矿工数。

- **当**矿工们的算力两两独立，**即**$\forall i\neq j,\lambda_i\perp\lambda_j$时，该表达式可化简为：

$$C(\Delta_0)=1-\int_0^{\infty}\left[\sum_i^N\left(\int_0^{\infty}\frac{\lambda_i p(\lambda_i)d\lambda_i}{e^{x\lambda_i}}\prod_{j\neq i}\int_0^{\infty}\frac{p(\lambda_j)d\lambda_j}{e^{(\Delta+x)\lambda_j}}\right)\right]dx$$

此时运算复杂度**数量级**为$O(m^3)$。

- **当**矿工们的算力独立同分布（iid）时，表达式可进一步化简为：

$$C(\Delta_0)=1-N\int_0^{\infty}\left[\left(\int_0^{\infty}\frac{\lambda p(\lambda)d\lambda}{e^{x\lambda}}\right)\left(\int_0^{\infty}\frac{p(\lambda)d\lambda}{e^{(\Delta_0+x)\lambda}}\right)^{N-1}\right]dx$$

此时运算复杂度**数量级降**为$O(m^2)$。

还可以再简化吗？

算力分布

HASH RATE DISTRIBUTION

- **半**经验分布：以一定时间区间内挖出区块数b_i**和**该区间内区块总数 B **比率**为基准计算出的分布:

$$p(\lambda|b) = \frac{e^{\frac{(b-\gamma\cdot\lambda)^2}{2\gamma\cdot\lambda}}}{\sqrt{2\pi\lambda/\gamma}},\ \text{其中}\gamma = \frac{B}{\Lambda}$$

- **指数分布**：简单，只有一个参数。$\lambda_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(r)$ ：

$$p(\lambda) = \frac{r}{e^{r\lambda}}$$

该情况下分叉率表达式进一步简化为

$$C(\Delta_0) = 1 - Nr^N \int_0^\infty \frac{dx}{(r+x)^2(\Delta_0 + r + x)^{N-1}}$$

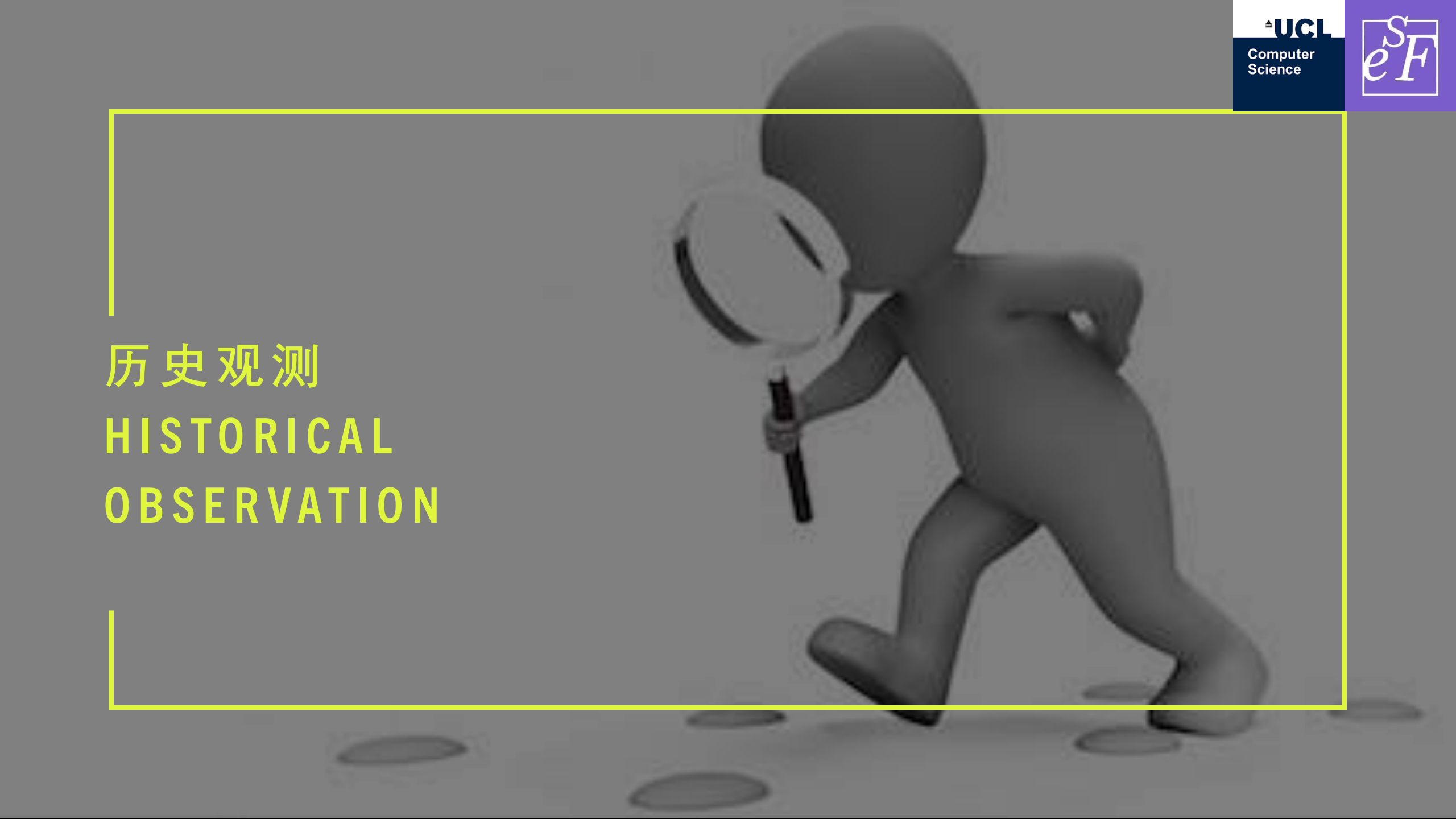
- 对数正态分布：常用于有马太效应的社会经济系统中。$\lambda_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ ：

$$p(\lambda) = \frac{e^{\frac{-(\ln\lambda-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\lambda\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- 指数截尾的幂律分布：适用于有资源（如能源）限制的系统中。$\lambda_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{TPL}(\alpha, \beta)$ ：

$$p(\lambda) = \frac{\beta^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\cdot\lambda^\alpha\cdot e^{\beta\lambda}}$$

在半经验分布，**指数分布**，**及**指数截尾的幂律分布的情况下，分叉率$C(\Delta_0)$**运算复**杂度数量级都为 $O(m)$。


UCL
Computer Science
eSF
历史观测
HISTORICAL
OBSERVATION

数据
DATA

UCL Computer Science

period of blocks		propagation time							empirical miner hash rate					
start #	start time	50% [s]	90% [s]	99% [s]	block time $\frac{1}{\Lambda}$ [s]	ln(difficulty)	fork rate [%]	miners N	$\sum$(hash rate) Λ [s^{-1}]	mean m [s^{-1}]	std s [s^{-1}]	skewness	kurtosis	max share [%]
360000	2015-06-08	7.01	16.51	26.61	586.1	24.71	0.620	90	0.00171	0.000019	0.000054	4.01	17.42	19.34
380000	2015-10-22	7.11	18.03	27.73	546.2	25.24	0.495	86	0.00183	0.000021	0.000059	4.63	25.98	22.88
400000	2016-02-25	5.87	15.68	27.24	583.3	25.93	0.200	135	0.00171	0.000013	0.000048	5.88	41.04	24.44
420000	2016-07-09	4.09	12.33	25.67	584.8	26.17	0.240	94	0.00171	0.000018	0.000047	4.06	18.28	17.80
440000	2016-11-22	3.11	10.49	24.24	566.5	26.64	0.185	63	0.00177	0.000028	0.000046	2.59	8.22	14.12
460000	2017-04-02	1.96	10.13	23.63	565.0	27.19	0.185	67	0.00177	0.000026	0.000046	2.10	3.38	10.53
480000	2017-08-10	1.09	7.39	19.98	560.7	27.79	0.125	71	0.00178	0.000025	0.000056	2.74	6.84	14.16
500000	2017-12-18	0.54	4.06	16.25	555.9	28.65	0.085	65	0.00180	0.000028	0.000071	3.65	14.27	22.42
520000	2018-04-26	0.41	2.08	13.33	569.1	29.26	0.035	71	0.00176	0.000025	0.000062	3.26	10.59	17.90
540000	2018-09-05	0.47	2.27	14.77	613.4	29.50	0.025	88	0.00163	0.000019	0.000050	3.45	11.86	16.75
560000	2019-01-25	0.57	3.84	18.10	586.2	29.48	0.030	75	0.00171	0.000023	0.000053	3.37	11.86	17.21
580000	2019-06-09	0.46	3.22	17.83	566.5	29.92	0.045	66	0.00177	0.000027	0.000060	3.31	11.66	18.39
600000	2019-10-19	0.40	2.15	14.41	590.2	30.26	0.030	54	0.00169	0.000031	0.000059	2.62	7.35	16.89
620000	2020-03-03	0.49	3.19	15.78	599.2	30.36	0.050	45	0.00167	0.000037	0.000064	2.58	7.26	18.34
640000	2020-07-20	0.60	3.89	17.15	595.1	30.52	0.075	41	0.00168	0.000041	0.000069	1.87	2.75	16.30
660000	2020-12-05	0.75	4.44	19.22	593.3	30.67	0.095	49	0.00169	0.000034	0.000068	2.25	4.15	16.81
680000	2021-04-21	0.46	2.32	13.70	616.7	30.52	0.040	40	0.00162	0.000041	0.000072	1.92	2.48	15.92
700000	2021-09-11	0.38	1.58	14.13	579.3	30.71	0.045	35	0.00173	0.000049	0.000084	1.78	1.98	16.16
720000	2022-01-23	0.40	1.72	14.32	591.6	30.98	0.020	33	0.00169	0.000051	0.000090	1.77	2.08	19.38
740000	2022-06-09	0.34	1.26	11.30	589.8	31.04	0.005	26	0.00170	0.000065	0.000109	1.90	3.10	24.06
760000	2022-10-23	0.43	1.95	13.28	590.7	31.25	0.030	37	0.00169	0.000046	0.000108	3.05	9.62	29.75
780000	2023-03-09	0.86	4.65	20.23	590.3	31.52	0.100	38	0.00169	0.000045	0.000111	3.31	11.43	31.38
800000	2023-07-24	0.87	4.46	21.92	584.6	31.69	0.070	33	0.00171	0.000052	0.000118	2.91	8.25	28.84
820000	2023-12-06	0.89	4.39	19.81	585.5	31.97	0.065	33	0.00171	0.000052	0.000111	2.91	8.79	29.19
840000	2024-04-20	0.88	3.86	21.14	598.4	32.07	0.065	33	0.00167	0.000051	0.000135	3.28	10.46	35.38

参数估计
PARAMETER ESTIMATION

用样本算力平均值 m 和标准差 s 通过矩估（MoM）估计计来三种情况下——$\lambda_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(r)$，$\lambda_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{LN}(\mu, \sigma^2)$，$\lambda_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{TPL}(\alpha, \beta)$——算力分布参数:

$$r = \frac{1}{m}$$

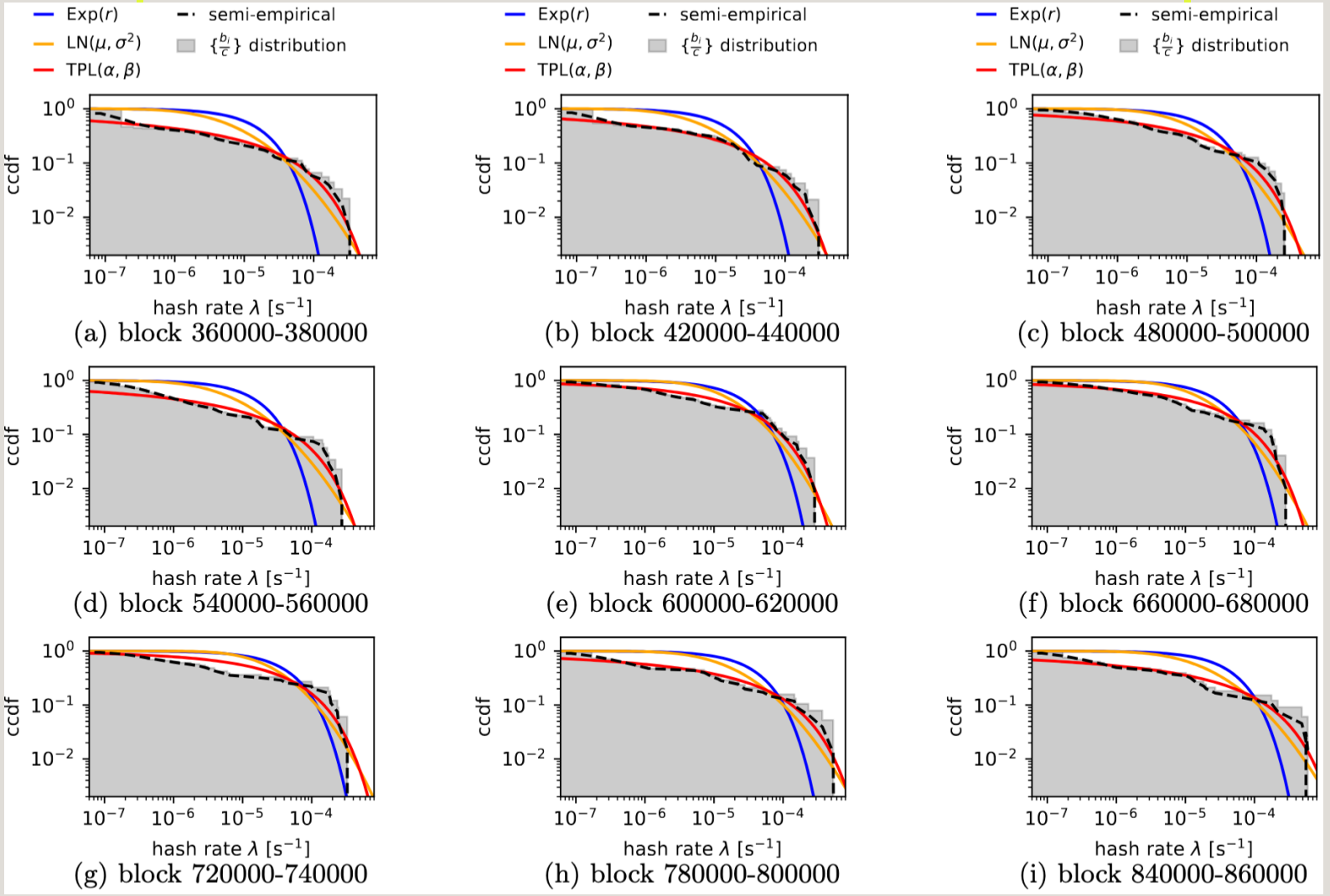
$$\sigma = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{s}{m}\right)^2\right]} \quad \mu = \ln m - \frac{s^2}{2}$$

$$\alpha = 1 - \left(\frac{m}{s}\right)^2 \quad \beta = \frac{m}{s^2}$$

period of blocks		fitted distributions				
start #	start time	Exp(r)	LN(μ, σ^2)		TPL(α, β)	
		r	μ	σ	α	β
360000	2015-06-08	52,747	−11.97	1.48	0.88	6,556
380000	2015-10-22	46,971	−11.84	1.47	0.87	6,080
400000	2016-02-25	78,741	−12.65	1.66	0.93	5,407
420000	2016-07-09	54,967	−11.94	1.43	0.85	8,072
440000	2016-11-22	35,690	−11.14	1.15	0.63	13,167
460000	2017-04-02	37,853	−11.23	1.18	0.67	12,630
480000	2017-08-10	39,812	−11.49	1.34	0.80	8,015
500000	2017-12-18	36,131	−11.51	1.43	0.85	5,422
520000	2018-04-26	40,405	−11.60	1.41	0.84	6,360
540000	2018-09-05	53,983	−11.95	1.45	0.86	7,397
560000	2019-01-25	43,965	−11.63	1.37	0.82	7,992
580000	2019-06-09	37,389	−11.43	1.34	0.80	7,359
600000	2019-10-19	31,868	−11.13	1.23	0.72	8,920
620000	2020-03-03	26,965	−10.90	1.18	0.67	8,934
640000	2020-07-20	24,399	−10.78	1.16	0.65	8,486
660000	2020-12-05	29,072	−11.07	1.26	0.74	7,441
680000	2021-04-21	24,669	−10.82	1.19	0.68	7,853
700000	2021-09-11	20,274	−10.59	1.16	0.65	7,043
720000	2022-01-23	19,524	−10.59	1.19	0.68	6,296
740000	2022-06-09	15,335	−10.30	1.15	0.64	5,520
760000	2022-10-23	21,855	−10.93	1.37	0.82	3,932
780000	2023-03-09	22,433	−11.00	1.40	0.84	3,648
800000	2023-07-24	19,292	−10.78	1.35	0.81	3,719
820000	2023-12-06	19,323	−10.73	1.31	0.78	4,177
840000	2024-04-20	19,747	−10.94	1.45	0.86	2,769

历史算力分布
HISTORICAL HASH RATE DISTRIBUTION

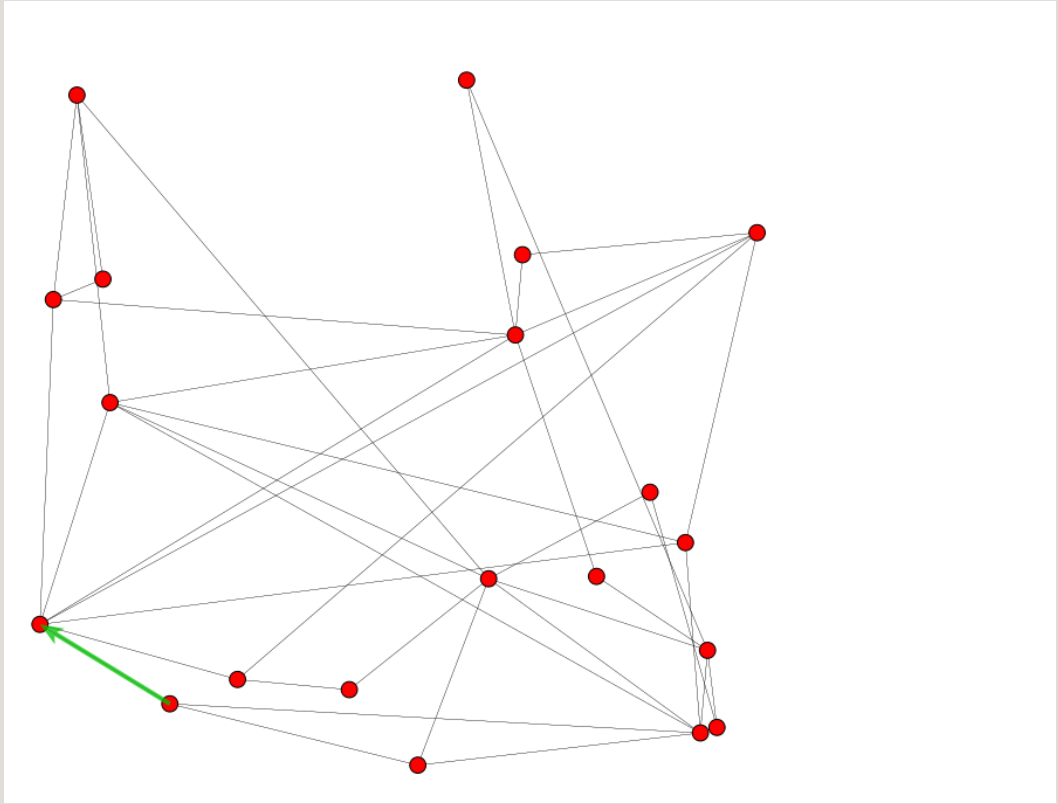
- 最强矿工的算力逐年增加
- 除半经验分布外（黑虚线），指数截尾的幂律分布（红实线）拟合程度最好—最能描述肥尾，指数分布（蓝实线）拟合程度最弱。



UCL Computer Science

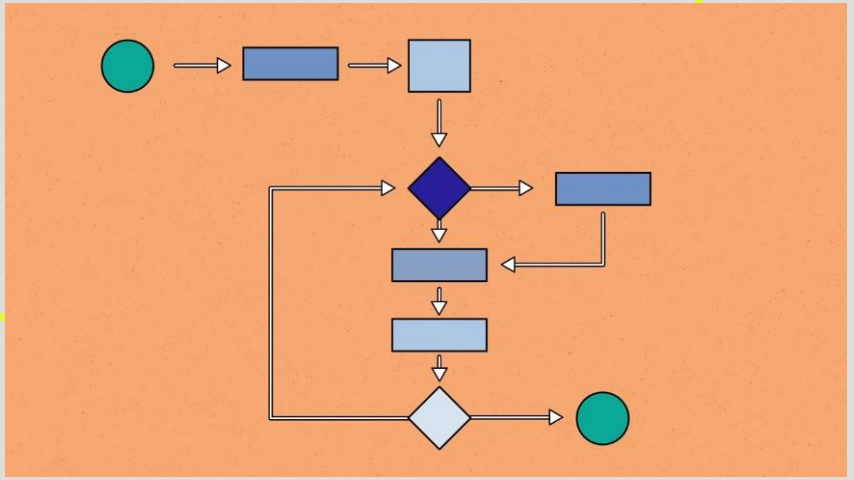
模拟

SIMULATION



环境编译
ENVIRONMENT ENCODING

- 假定算力独立同分布，每一个矿工算力都服从一个特定分布
- 根据该分布随机生成N个数，以表示N个矿工的算力
- 每一个矿工随机生成一个数作为挖矿时间，该时间分布服从指数分布，速率为该矿工算力
- 计算两个最低挖矿时间的差值
- 若差值低于区块广播时间，则有分叉；否则无
- 重复实验足够多次（如，100万）
- 有分叉数和实验次数比为分叉率



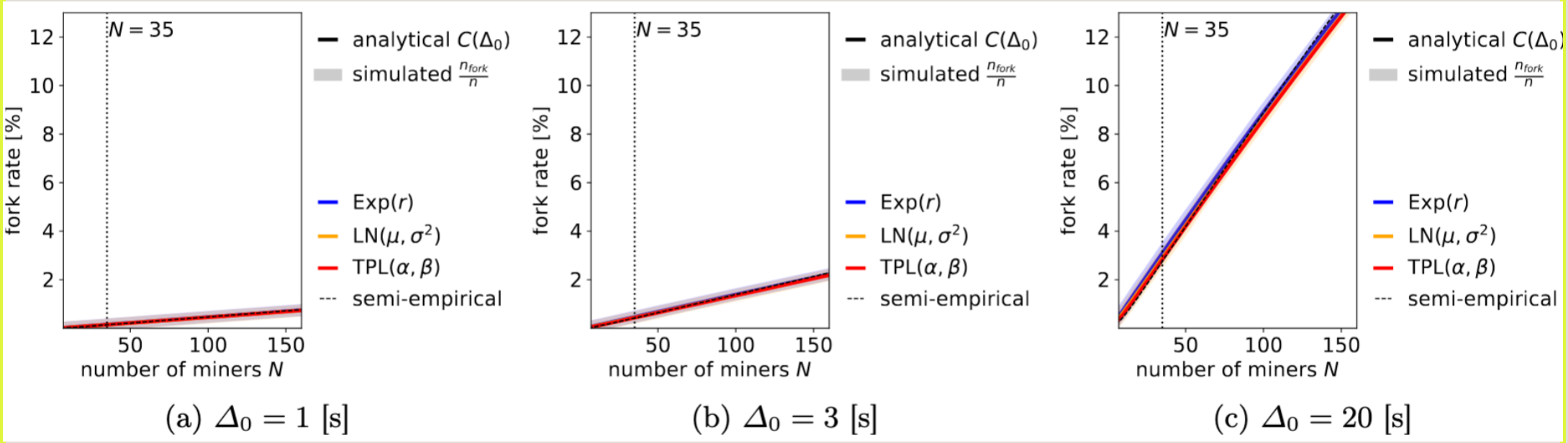
UCL Computer Science

模型验证

MODEL VERIFICATION

解析解验证

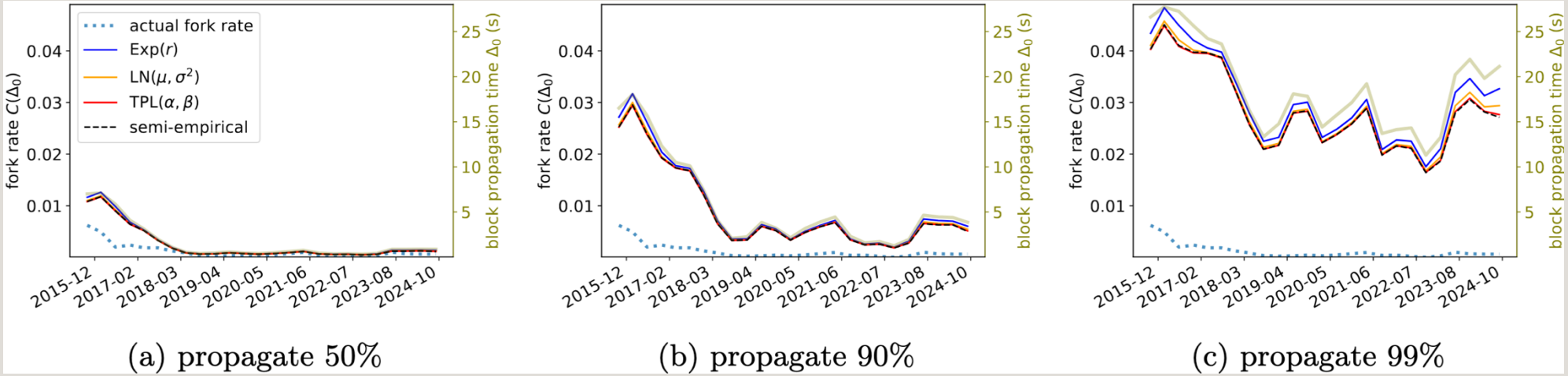
VERIFICATION OF ANALYTICAL SOLUTION



- **用分叉率** $C(\Delta_0)$ 终极解析式运算出的值和对应的模拟环境中运行得到的值高度统一
- **在算力均值**m，**方差**s，矿工人数 N，区块广播时间 Δ_0**一定的情况下，独立同分布算力的具体分布形**态似乎对分叉率影响**不大**
- 给定算力均值m，**方差**s，**和**区块广播时间 Δ_0，**分叉率**$C(\Delta_0)$**随**矿工人数 N**增加**
- 给定算力均值m，**方差**s，**和** 矿工人数 N，**分叉率**$C(\Delta_0)$**随**区块广播时间 Δ_0 **增加**

模型估测和历史观测分叉率值比较

COMPARISON BETWEEN MODEL-ESTIMATED AND HISTORICALLY OBSERVED FORK RATES



(a) propagate 50%　(b) propagate 90%　(c) propagate 99%

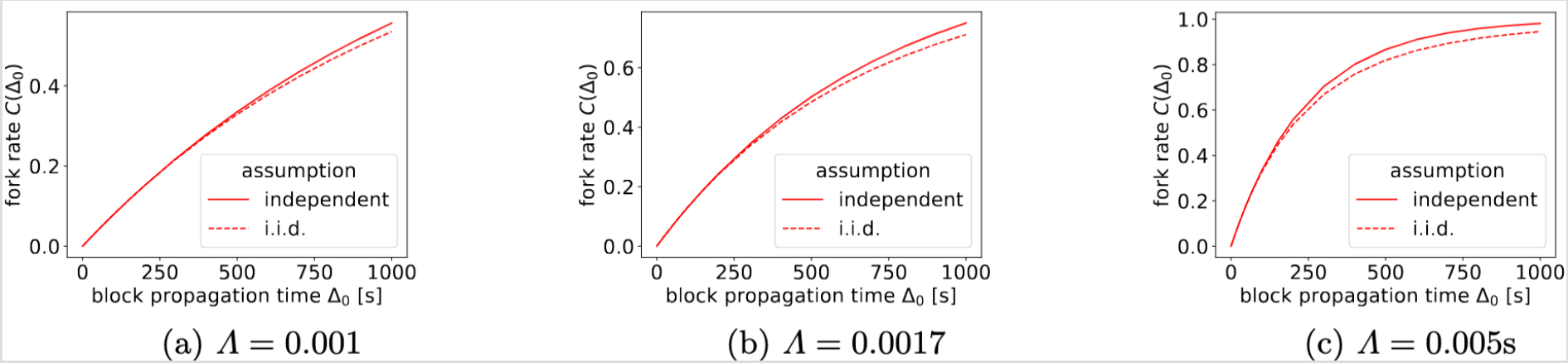
- 历史上分叉率逐年降低
- 趋势上和数值上，**用区**块广播覆盖50%网络的时间作为最快两位矿工之间区块广播时间Δ_0**估**测出的值和历史观测数值比略高，**但最接近**
- **符合**预期：**理**论上，最快两位矿工之间传播时间的无条件中值应该接近任意两位矿工之间区块传播时间的中值；但是实际上，最快矿工（通常为大矿池）可能会聚集**在地理政策有利的地段，因此**预期他们之间传播时间会比所有传播时间中值稍短
- 带入历史观测的**算力均值**m **和方差**s**得出的模型估**测分叉率几乎和历史观测的区块广播时间Δ_0**走**势重合！（为什么？！）

UCL Computer Science

场景测试
SCENARIO TESTING

分布假设影响

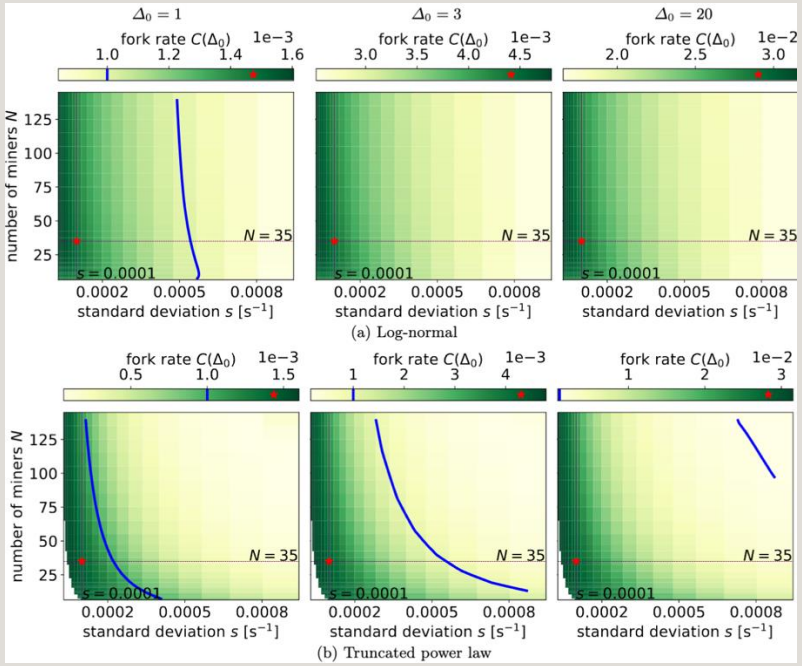
DIFFERENT DISTRIBUTION ASSUMPTIONS



(a) $\Lambda = 0.001$ (b) $\Lambda = 0.0017$ (c) $\Lambda = 0.005$s

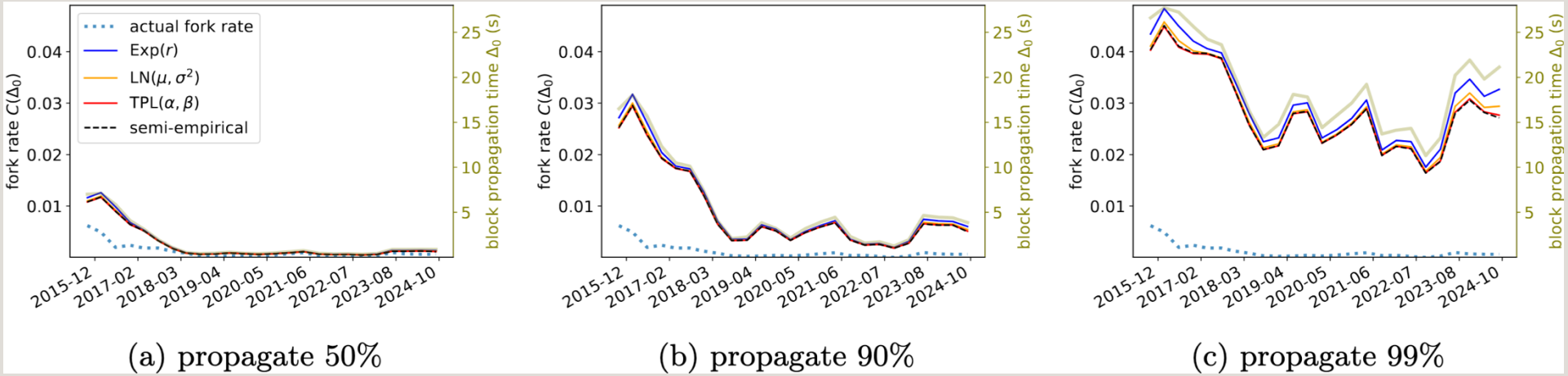
- 用半经验分布为基础，在其他条件一定的情况下
  - **算力的分布假**设是独立同分布还是仅独立分布对分叉率几乎无影响
  - **分叉率**$C(\Delta_0)$**随**区块广播时间 Δ_0 **增加**
    - **在**区块广播时间 Δ_0较低的区间，**增加几乎呈**线性
  - **分叉率**$C(\Delta_0)$**随**总算力Λ **增加**

算力异质性影响
FORK RATE HETEROGENEITY

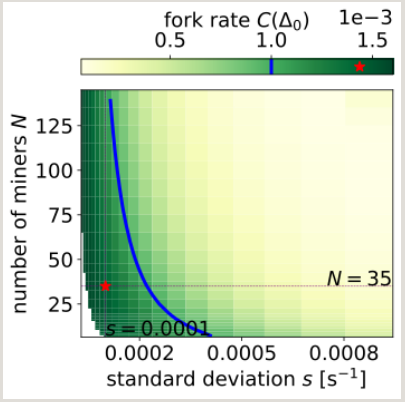


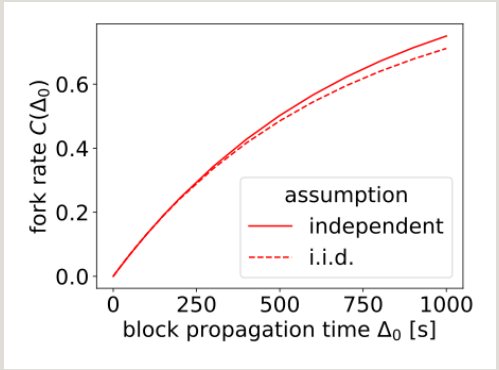
- **特定一种算力分布**（对数正态，或指数截尾的幂律分布），总算力Λ**一定的情况下**
  - **分叉率** $C(\Delta_0)$**随区块广播时间** Δ_0 **增加**（数值轴上数值增大）
  - **算力方差**s**一定，分叉率**$C(\Delta_0)$**随矿工人数** N**增加**（**算力均值**m **减少**）**而降低。**
  - 矿工人数 N**一定，分叉率**$C(\Delta_0)$**随算力方差**s **增加**（**异质性增加**）**而降低**
  - **在分叉率**$C(\Delta_0)$ **等值线上，高矿工人数** N对应低**算力方差**s，**反之亦然**

带入历史观测的算力均值m 和方差s得出的模型估测分叉率几乎和历史观测的区块广播时间Δ_0走势重合！（为什么？！）



miners N	$\sum$(hash rate) Λ [s^{-1}]	mean m [s^{-1}]	std s [s^{-1}]
90	0.00171	0.000019	0.000054
86	0.00183	0.000021	0.000059
135	0.00171	0.000013	0.000048
94	0.00171	0.000018	0.000047
63	0.00177	0.000028	0.000046
67	0.00177	0.000026	0.000046
71	0.00178	0.000025	0.000056
65	0.00180	0.000028	0.000071
71	0.00176	0.000025	0.000062
88	0.00163	0.000019	0.000050
75	0.00171	0.000023	0.000053
66	0.00177	0.000027	0.000060
54	0.00169	0.000031	0.000059
45	0.00167	0.000037	0.000064
41	0.00168	0.000041	0.000069
49	0.00169	0.000034	0.000068
40	0.00162	0.000041	0.000072
35	0.00173	0.000049	0.000084
33	0.00169	0.000051	0.000090
26	0.00170	0.000065	0.000109
37	0.00169	0.000046	0.000108
38	0.00169	0.000045	0.000111
33	0.00171	0.000052	0.000118
33	0.00171	0.000052	0.000111
33	0.00167	0.000051	0.000135

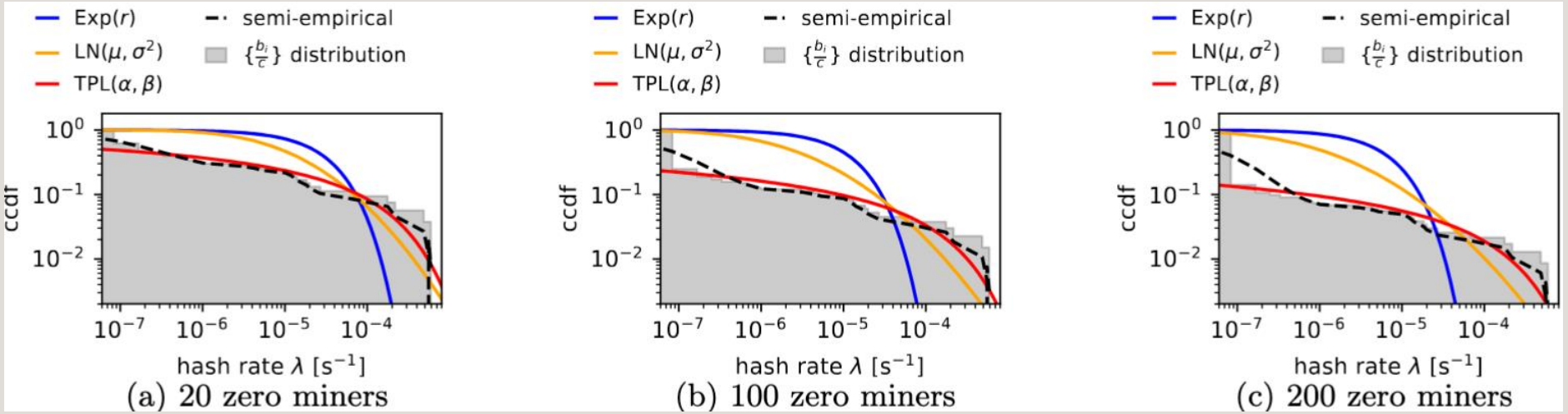




- 历史上总算力Λ（计算难度归一后的数值来说）一定，因为区块时间大体稳定。
- 总算力Λ，矿工数量N**和方差**s**一定**（**即算力均值**m **一定**），**且区块广播时间**Δ_0**不是特别大的时候，分叉率**$C(\Delta_0)$**和**Δ_0**成正比。**
- **模型上，**总算力Λ**一定的情况下**矿工数量N**增加和算力方差**s**降低（或反之）**对分叉率影响相抵消。
- 历史上矿工数量N**多（即算力均值**m **小）**时算力方差s**低，反之亦凡。**
- 历史观测的**算力均值**m **和方差**s对分叉率$C(\Delta_0)$**几乎抵消，**区块广播时间Δ_0**影响成主导**！

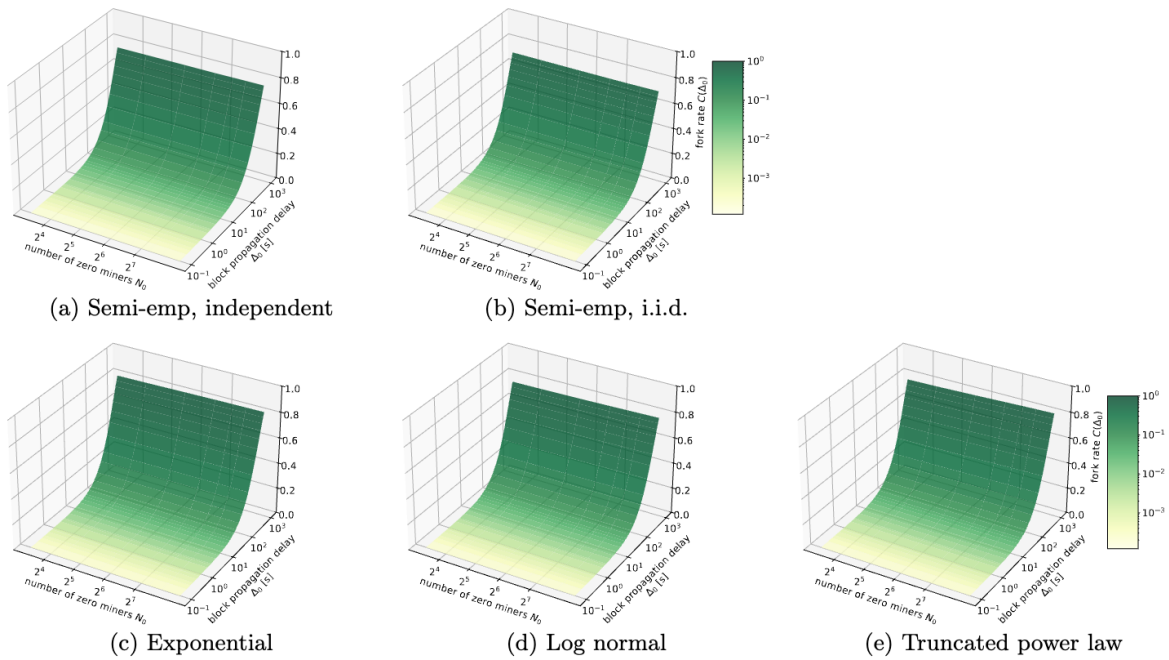
“零矿工”影响
“ZERO-MINERS”

“零矿工”：实际参与到挖矿，但是在（可能由于算力太低或运气太差）特定观测区间内没有挖到任何区块。



考虑“零矿工”的存在会增加矿工数量N，
降低算力均值m，
也会影响算力方差s：“零矿工”数量较大时，算力方差s会降低。

“零矿工”影响
“ZERO-MINERS”



(a) Semi-emp, independent (b) Semi-emp, i.i.d.

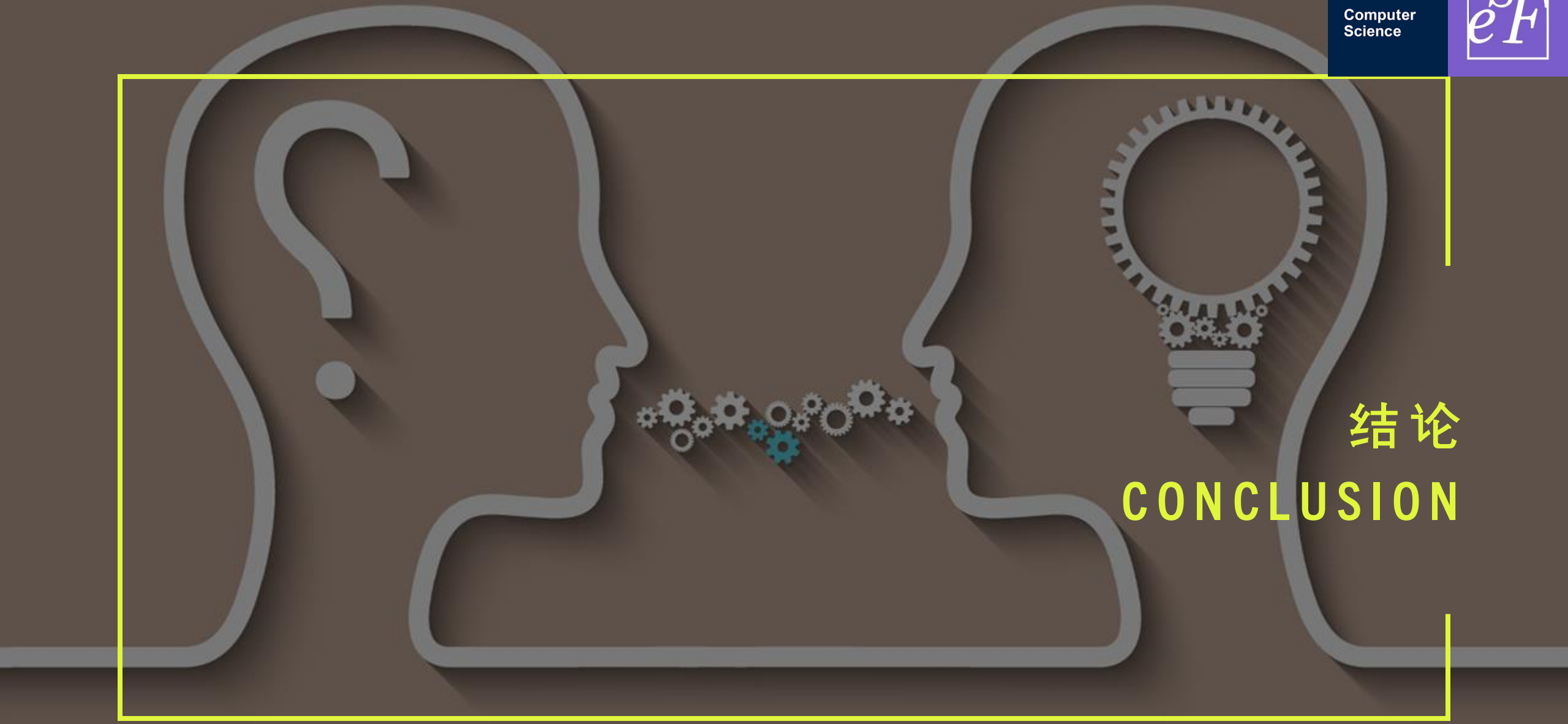
(c) Exponential (d) Log normal (e) Truncated power law

总算力Λ，非“零矿工”数量N和方差s一定时：

- “零矿工”数量N_0对分叉率 $C(\Delta_0)$的影响微乎其微。
- 算力分布具体形状对分叉率$C(\Delta_0)$的影响微乎其微。
- 分叉率 $C(\Delta_0)$随区块广播时间Δ_0 增加。

UCL Computer Science

eSF



结论

CONCLUSION

- **区**块链网络**分叉率可以通**过解析式**利用网**络拓扑结构（距离，广播速度）和节点矿工算力分布来迅速预测出，**形式化地**阐释了并量化了分叉率和这些因素的关系：
  - **和**总算力，广播速度，算力均值一定下的矿工人数呈**正相关**，
  - **和**总算力一定下的矿工人数，**算力异**质性**呈**负相关。
- **分叉率解析式解**释了为什么历史分叉率**似乎只和区**块广播时间相关
  - **原因**：**和**矿工数量和他们的算力异质性也相关，但是两者影响相抵消。
- 给出了减少分叉的方案：
  - **增加**矿工人数
  - **增加算力异**质性（而不是大部分人拥有差不多的算力）
  - **提高广播速度**
- **在**实际**分叉率和模型**预测值严重相悖时，**可以推断出网**络拓扑结构中隐藏信息：
  - **比如**：实际**分叉率**显著低于模型预测值时，**可以推断出大**矿工之间可能在地理上聚集，或者在挖矿上协同（而**不是**竞争）。

还有呢？

SO WHAT?

- 自由而无用的灵魂
- 物理学家们的自嗨
- 跨学科研究的乐趣

联系我
CONTACT

- jiahua.xu@ucl.ac.uk
- https://www.linkedin.com/in/jiahuaxu/
- https://scholar.google.co.uk/citations?user=20GXpooAAAAJ