σ_z表象中任意角度自旋的泡利矩阵

孙泽
201800140126

摘要

文章导出了σ_z表象中任意角度的自旋对应的泡利矩阵，并利用其给出两个自旋为$\frac{1}{2}$，总自旋为0的纠缠粒子的力学量平均值： $< S_a^{(1)} S_b^{(2)} > = -\frac{\hbar^2}{4} cos\theta$

2022/11/02

1.引言

泡利矩阵首先是由沃尔夫冈·泡利在讨论电子自旋角动量代数时引入的。如今，它的重要性已经不仅限于自旋问题，同时在量子信息，量子光学等领域也有了重要应用，于是，讨论σ_z表象中任意角度的自旋对应的泡利矩阵，有助于加深我们对泡利矩阵的认识。

2.任意角度自旋的泡利矩阵的推导

采用球坐标系，记任意角度的自旋为$\vec{S}_{\varphi\theta}$，对应的算符与泡利矩阵分别为$\hat{S}_{\varphi\theta}$，$\sigma_{\varphi\theta}$。

由$\vec{S}_{\varphi\theta} = \cos(\varphi)\,\vec{S}_z + \sin(\varphi)\cos(\theta)\,\vec{S}_x + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\vec{S}_y$出发

$$\hat{S}_{\varphi\theta} = \cos(\varphi)\,\hat{S}_z + \sin(\varphi)\cos(\theta)\,\hat{S}_x + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\hat{S}_y$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = \cos(\varphi)\,\sigma_z + \sin(\varphi)\cos(\theta)\,\sigma_x + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\sigma_y$$

带入σ_z、σ_x、σ_y的泡利矩阵，有

$$\sigma_{\varphi\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\theta) - i\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) + i\sin(\varphi)\sin(\theta) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & e^{-i\theta}\sin(\varphi) \\ e^{i\theta}\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{1}$$

对应的特征值与特征矢为

$$\lambda_1 = 1,\ V_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\theta}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)(\cot(\varphi) + \csc(\varphi)) \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1,\ V_2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\theta}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

我们可以采用新的变量φ_p替换φ，令$\varphi = 2\varphi_p$，则(1)式被重新表示为

$$\sigma_{\varphi\theta} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi_p) & e^{-i\theta}\sin(2\varphi_p) \\ e^{i\theta}\sin(2\varphi_p) & -\cos(2\varphi_p) \end{pmatrix}$$

对应的特征值与特征矢为

$$\lambda_1 = 1,\ V_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\theta}\cos(\varphi_p) \\ \sin(\varphi_p) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1,\ V_2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\theta}\sin(\varphi_p) \\ \cos(\varphi_p) \end{pmatrix}$$

讨论

考虑双粒子a,b组成的体系，分别在任意方向测量a,b的自旋 $\vec{S}_a, \vec{S}_b$，由于只有两个测量方向，总可以通过旋转坐标轴使得测量方向位于x-z平面上，并使其中一个与z轴重合，此时，只有一个自由度，使用 θ 表示$\vec{S}_a$ 与 $\vec{S}_b$之间的夹角。则(1)式化简为

$$\sigma_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

对应的特征值与特征矢为

$$\lambda_1 = 1,\ V_1 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\cot(\theta)+\csc(\theta)) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1,\ V_2 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

我们可以采用新的变量 θ_p替换θ，令$\theta = 2\,\theta_p$，则(2)式被重新表示为

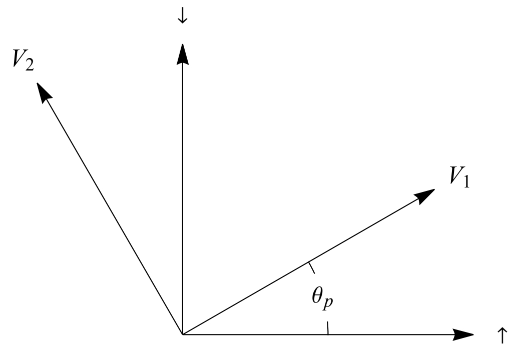
$$\sigma_{\theta_p} = \begin{pmatrix} \cos\left(2\,\theta_p\right) & \sin\left(2\,\theta_p\right) \\ \sin\left(2\,\theta_p\right) & -\cos\left(2\,\theta_p\right) \end{pmatrix}$$

对应的特征值与特征矢为

$$\lambda_1 = 1,\ V_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_p\right) \\ \sin\left(\theta_p\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1,\ V_2 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\theta_p\right) \\ \cos\left(\theta_p\right) \end{pmatrix}$$

将特征矢在σ_z表象中画出，如Picture 1所示，可以发现θ_p所代表的含义，即特征矢与特征值相同的σ_z特征矢之间的夹角。
图中，$|\uparrow>$，$|\downarrow>$为 σ_z的特征矢，$|V_1>$，$|V_2>$为σ_{θ_p}的特征矢。



Picture 1. 相空间中的特征矢

于是，我们可以得到特征矢之间的关系

$$\begin{aligned} |\uparrow> &= \cos\left(\theta_p\right)|V_1> - \sin\left(\theta_p\right)|V_2> \\ |\downarrow> &= \sin\left(\theta_p\right)|V_1> + \cos\left(\theta_p\right)|V_2> \end{aligned} \tag{3}$$

3.应用

假设两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子构成总自旋为零的单态，
设 $S_a{}^{(1)}$ 为第一个粒子的自旋角动量在单位矢量 $\hat{a}$ 方向的分量。类似的，
$S_b{}^{(2)}$ 为第二个粒子的自旋角动量在单位矢量 $\vec{b}$ 方向的分量。证明：

$$< S_a{}^{(1)} S_b{}^{(2)} > = -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta$$

其中θ为单位矢量$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 之间的夹角。

两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子构成的总自旋为零的单态可以表示为

$$|0,\,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \tag{4}$$

另外，在 $\hat{a}$方向测量自旋，有自旋向上和自旋向下两种结果，可以标记为 a_1、a_2，类似的，在 $\hat{b}$方向上，有b_1、b_2，所以对于$S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}$，总共有四个测量值

$$a_1\,b_1,\;a_1\,b_2,\;a_2\,b_1,\;a_2\,b_2$$

这四个测量值构成$S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}$表象的正交归一基

$$|a_1\,b_1>,\;\;|a_1\,b_2>,\;\;|a_2\,b_1>,\;\;|a_2\,b_2>$$

于是，$|0,0>$可以表示为

$$\sum_{\mathrm{ij}}|\,a_i\,b_j>\;<a_i\,b_j\,|\,0,\,0>$$

不妨利用特征矢之间的关系，即(3)式来表示$|0,0>$，由(3)式，有

$$\begin{aligned}|\uparrow^{(1)}> &= \cos(\theta_a)\;|a_1> - \sin(\theta_a)\;|a_2>\\ |\downarrow^{(1)}> &= \sin(\theta_a)\;|a_1> + \cos(\theta_a)\;|a_2>\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}|\uparrow^{(2)}> &= \cos(\theta_b)\;|b_1> - \sin(\theta_b)\;|b_2>\\ |\downarrow^{(2)}> &= \sin(\theta_b)\;|b_1> + \cos(\theta_b)\;|b_2>\end{aligned} \tag{6}$$

将(4)、(5)两式带入(6)式

$$|0,\,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\sin(\theta_a-\theta_b)\;|a_1\,b_1> + \cos(\theta_a-\theta_b)\,|a_1\,b_2> - \cos(\theta_a-\theta_b)\,|a_2\,b_1> - \sin(\theta_a-\theta_b)\,|a_2\,b_2>)$$

利用 $\theta_p = \theta_a - \theta_b$，以及$\theta = 2\,\theta_p$替换变量

$$|0,\,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,|a_1\,b_1> + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|a_1\,b_2> - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|a_2\,b_1> - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|a_2\,b_2>\right) \tag{7}$$

于是我们得到$|0,0>$在$S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}$表象中的表示。利用此表示可以求解 $<S_a{}^{(1)}\;S_b{}^{(2)}>$

$$<S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}> = <0,\,0\,|\,S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}\,|\,0,\,0>$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\,<0,\,0\,|\,\sigma_a\,\sigma_b\,|\,0,\,0>$$

利用(7)式以及$|a_i\,b_j>$的正交归一性，得

$$<S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}> = \frac{\hbar^2}{4}\,\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)$$

化简得

$$<S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)}> = -\frac{\hbar^2}{4}\,\cos\theta$$

4.小结

在文章第二部分中，我们给出了σ_z表象中任意角度的自旋对应的泡利矩阵，即(1)式

$$\sigma_{\varphi\theta} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & e^{-i\,\theta}\sin(\varphi)\\ e^{i\,\theta}\sin(\varphi) & -\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

然后讨论了在不考虑自旋的$\vec{S}_y$分量时矩阵的简化形式

$$\sigma_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

通过比较该矩阵本征值为1的本征矢与σ_z矩阵本征值相同的本征矢，我们得知了本征矢之间的夹角θ_p与$\vec{S}$、$\vec{S}_z$之间的夹角θ的对应关系，

$$\theta = 2\,\theta_p$$

在文章第三部分中，我们利用第二部分的结论给出了在任意两个方向分别测量自旋时，两个自旋为 $\frac{1}{2}$，总自旋为0的纠缠粒子处于某个测量结果的概率，即式(7)

$$|\,0,\,0> \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left|\,a_1\,b_1 >\right. +\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left|\,a_1\,b_2 >\right. -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left|\,a_2\,b_1 >\right. -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left|\,a_2\,b_2 >\right.\right)$$

并在最后证明了$< S_a{}^{(1)}\,S_b{}^{(2)} > \;=\; -\frac{\hbar^2}{4}\,\cos\theta$