

孙泽 201800140126

光的多普勒频移公式推导及多普勒测速

该文章的计算都通过调整单位使光速 $c=1$ ，此时记 v 为 $\frac{v}{c}$ ，记 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ 为 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

光的多普勒频移

不同于声波的多普勒效应，光以光速传播，光的多普勒频移需要考虑狭义相对论带来的修正，即相对论性多普勒效应。

一、两个参考系的多普勒频移公式

t_s, f_s : 光源发射光的周期与频率

t_r, f_r : 接收器接收到的光的周期与频率

1. 光源参考系 s frame



一般的多普勒频移公式:

$$t_r' = \frac{t_s'}{1-v}$$
$$f_r' = f_s' (1-v)$$

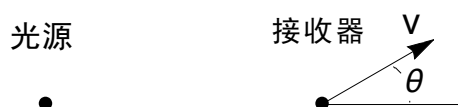
考虑到修正:

$$t_s = t_s'$$
$$f_s = f_s'$$
$$t_r = \frac{t_r'}{\gamma}$$
$$f_r = \gamma f_r'$$

有:

$$t_r = \frac{t_s}{\gamma(1-v)}$$
$$f_r = f_s \gamma (1-v)$$

对于更一般的情况:



$$t_r = \frac{t_s}{\gamma(1-v \cos \theta)}$$

$$f_r = f_s \gamma(1 - v \cos \theta)$$

2. 接收器参考系 r frame



一般的多普勒频移公式：

$$t_r' = t_s'(1 + v)$$

$$f_r' = \frac{f_s'}{1 - v}$$

考虑到修正：

$$t_s = \frac{t_s'}{\gamma}$$

$$f_s = \gamma f_s'$$

$$t_r = t_r'$$

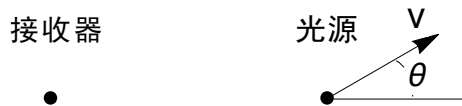
$$f_r = f_r'$$

有：

$$t_r = t_s \gamma(1 + v)$$

$$f_r = \frac{f_s}{\gamma(1 + v)}$$

对于更一般的情况：



$$t_r = t_s \gamma(1 + v \cos \theta)$$

$$f_r = \frac{f_s}{\gamma(1 + v \cos \theta)}$$

3. 相对论光行差公式

注意到，两个参考系得出的结果不同，原因是两参考系的角度 θ 不同，记光源参考系的 θ 为 θ_s ，接收器参考系的 θ 为 θ_r ，存在关系：

$$\cos \theta_r = \frac{\cos \theta_s - v}{1 - v \cos \theta_s}$$

该方程即为相对论像差公式，通过该公式两参考系即能得到同样的结果。

二、通过四维波矢量导出多普勒频移公式

电磁波的相位 $\phi = kr - wt$ 是一个洛伦兹标量，即 $\phi = kr - wt = k'r' - w't' = \phi'$ ，

已知 $\begin{pmatrix} -t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 是四维矢量，则 $\begin{pmatrix} -w \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ 也是四维矢量，符合洛伦兹变换：

$$\begin{pmatrix} -w' \\ k_x' \\ k_y' \\ k_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

按照上一部分的标记法则为：

$$\begin{pmatrix} -w_r \\ k_{xr} \\ k_{yr} \\ k_{zr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w_s \\ k_{xs} \\ k_{ys} \\ k_{zs} \end{pmatrix}$$

记波矢量 k 与 x 轴正方向的夹角为 θ ,

$$k_{xs} = w_s \cos \theta_s, \quad k_{xr} = w_r \cos \theta_r$$

将该式带入洛伦兹变换式，得：

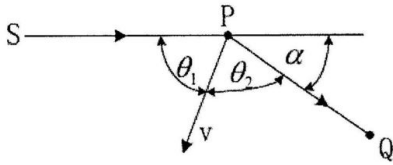
$$w_r = w_s \gamma (1 - v \cos \theta_s)$$

$$\cos \theta_r = \frac{\cos \theta_s - v}{1 - v \cos \theta_s}$$

第一式即为多普勒频移公式，第二式为光行差公式，由此方便地导出了上一部分的结果。

多普勒测速

光源 S 发出的单色光被速度为 v 的粒子散射，其散射光被 Q 点的接收器接收。如图所示



f_s : 光源 S 发射光的频率

f : 粒子 P 接收与发射的光的频率

f_r : 接收器 Q 接收到的光的频率

利用上一部分的结论：

$$f = f_s \gamma (1 + v \cos \theta_1)$$

$$f_r = \frac{f}{\gamma (1 - v \cos \theta_2)}$$

得到：

$$f_r = f_s \frac{1 + v \cos \theta_1}{1 - v \cos \theta_2}$$

$$\Delta f = f_r - f_s = f_s v \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{1 - v \cos \theta_2} \approx \frac{f_s v}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$