刘维尔定理的证明及推论

刘维尔定理

包围a点做两闭合曲线C*r*、C*R*，r、R为曲线到a点的平均距离。
若解析函数f(z)在有限远处没有奇点，有：
$\oint_{Cr} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{CR} \frac{f(z)}{z-a} dz$
令r→0，R→∞，若f(∞)有界，有：
$\lim_{r\to 0} \oint_{Cr} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$，$\lim_{R\to\infty} \oint_{CR} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(\infty)$
于是：
f(a) = f(∞)
由于a是任意有限远点，即整个复平面对应的函数值相同，说明函数f(z)为常函数。
综上，若解析函数f(z)在有限远处没有奇点且f(∞)有界，则其为常函数。

推论

1.除了常函数，不存在比较“理想”的函数，使其在全平面解析，没有奇点，且f(∞)有界。对于一般函数，必定有某个点是奇点或者f(∞)无界。
2.对于一般函数，若f(∞)存在，有：
$f(a) = f(\infty) - \sum_{i=1}^{n} \oint_{Ci} \frac{f(z)}{z-a} dz$
即：
$f(z) = f(\infty) - \sum_{i=1}^{n} \oint_{Ci} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$
Ci为包围第i个孤立奇点的闭合曲线，奇点是函数f(z)的奇点。

备注

1.所有的符号$\oint$指正向的曲线积分

2.关于$\frac{f(z)}{z-a}$的奇点

a是有限远点，若不考虑无限远点，该函数的奇点为$\frac{f(z)}{z-a}$的奇点——a点，以及f(z)的奇点。