洛伦兹变换下的物理图像

孙泽 物理班 201800140126

摘要：本文由光速不变原理简要导出了洛伦兹变换，并选取三个物理模型，描述了相同物理结果在两个相对运动的参考系下的图像

关键词：洛伦兹变换，参考系

洛伦兹变换

这部分的计算都通过调整单位使光速$c=1$，此时 记v为$\frac{v}{c}$，记$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$为$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

洛伦兹变换可由光速不变导出。
不同参考系中光速不变，即

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta s'}{\Delta t'}=1$$

能满足上式的变换即为洛伦兹变换。
可以证明，满足该条件的变换只有线性变换，这里直接默认，为方便变换公式导出，做变换

$$\Delta s=\Delta t$$

$$\Delta s^2=\Delta t^2$$

$$\Delta s^2-\Delta t^2=0$$

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-\Delta t^2=0$$

$$\begin{pmatrix}\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t\\\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix}=0\ \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta s'}{\Delta t'}=1$$

同样地，有

$$\Delta s'=\Delta t'$$

$$\begin{pmatrix}\Delta t' & \Delta x' & \Delta y' & \Delta z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t'\\\Delta x'\\\Delta y'\\\Delta z'\end{pmatrix}=0$$

令两参考系时空原点对齐

$$\begin{pmatrix}t & x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}t' & x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t'\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=0$$

记A为洛伦兹变换矩阵，有

$$\begin{pmatrix}t'\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}t & x & y & z\end{pmatrix}A^T\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

$$A^T\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A可由上式解得，这里对情况进行简化

$$A^T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果x’参考系以速度v向x正方向运动 ，令 $x = 0$ ，则 $x' = -v\,t'$，联立该条件与上式解得

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$$

记 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$,则：

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,v \\ -\gamma\,v & \gamma \end{pmatrix}$$

于是，二维时空的洛伦兹变换可写做

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,v \\ -\gamma\,v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

更一般地，写做

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,v & 0 & 0 \\ -\gamma\,v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

相应的特征值与特征向量：

$$\lambda_1 = \gamma(1 - v),\ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \gamma(1 + v),\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1,\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = 1,\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

同时注意到，特征向量处在光的世界线中，于是得到了推导的出发点，光速不变原理。

另外，根据四维矢量的不同写法，洛伦兹变换也可以写做

$$\lambda_1 = \gamma(1 - v),\ V_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \gamma(1 + v),\ V_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1,\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

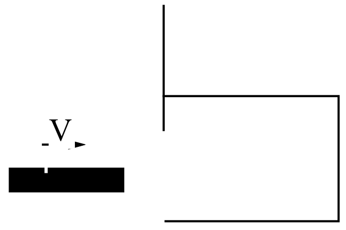
$$\lambda_4 = 1,\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

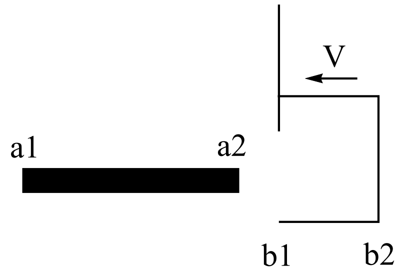
两个相对运动的参考系描述相同物理结果的几个例子

例1：有一静止长度为2L的杆与静止长度为L的单面可开口箱子，

如左图所示，在箱子参考系，杆以速度v进入箱子，$v > \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 以保证杆的长度小于L，

当杆完全进入后关闭箱子左端的开口，假设箱子右端材料强度足够大，不会被杆撞穿。





1. 箱子参考系的现象

如左图所示，杆成功进入箱子，箱子左端的开口成功关闭，杆与箱子碰撞，两者相对速度减小，最终为0，杆恢复原长，由于箱子长度小于2L，杆与箱子互相对抗，根据材料强度差异，可能箱子左端被捅穿，可能杆被撞碎或被压缩在箱子里。

2. 杆参考系的现象

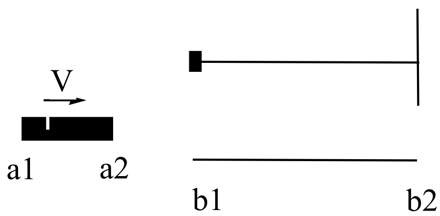
如右图所示，长度为2L的杆静止，其左端为a1，右端为a2，长度小于L的箱子以速度v向左运动，其左端为b1，右端为b2。当b2与a2接触时，b1位于a1左侧，之后a2与b2相互作用的力以一定的速度传递到a1与b1，在此之前，a1与b1保持原来的状态。

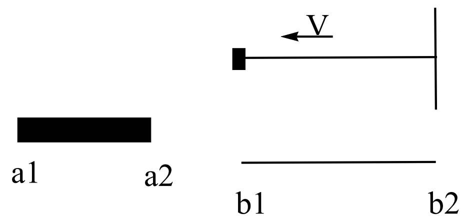
这里取最快情况，假设$\boldsymbol{v = \frac{\sqrt{3}}{2}c}$,作用力传播的速度为c，记作用力传播到a1时，耗时$t = \frac{2L}{c}$，b1与a2的距离为：$\frac{L}{\gamma} + v\,t = \frac{L}{2-\sqrt{3}} = 2.23\,L > 2\,L$

可见此时b1已经到达a1左侧，箱子开口可以正常关闭，之后杆与箱子互相对抗，同箱子参考系的情况。

例2：有一静止长度为L的杆与两端开口的箱子，如左图所示，在箱子参考系，杆以速度v进入箱子，

当杆完全进入后关闭箱子右端的开口，这里为了方便比较，取箱子的静止长度为 $\boldsymbol{\frac{L}{\gamma(1-\beta)}}$。





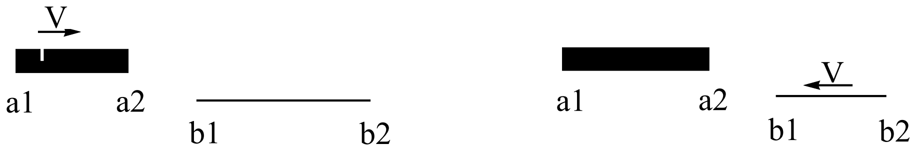
1. 箱子参考系的现象

如左图所示，杆的长度为 $\frac{L}{\gamma}$，以速度v向右运动，记b1所处位置为原点，当a1通过原点时，b1的探测器以光速发送信息令b2的开口关闭，耗时$t = \frac{L}{\gamma(1-\beta)}\frac{1}{c}$，当b2的开口关闭时，a2的位置为：$\frac{L}{\gamma} + v\,t = \frac{L}{\gamma(1-\beta)}$，正好处在b2的位置。

2. 杆参考系的现象

如右图所示，杆的长度为 L，箱子的长度为 $\frac{L}{\gamma^2(1-\beta)}$，以速度v向左运动，记a1所处位置为原点，b1的探测器到达a1后，以光速发送信息令b2的开口关闭，耗时t由 $\frac{L}{\gamma^2(1-\beta)} = c\,t + v\,t$解出，即$t = \frac{L}{c}$，当b2的开口关闭时，b2的位置为：$\frac{L}{\gamma^2(1-\beta)} - v\,t = L$，正好处在a2的位置。可见，两个参考系的物理结果是相同的。

例3：有一静止长度为L的列车过一静止长度为L的坑。



比较列车与坑的长度，可以发现在坑的参考系，列车比较短，在列车参考系，坑比较短。
假设当a1与b1重合时，列车开始下落。
在坑的参考系，此时a2已经通过b2，则列车通过。
在列车参考系，此时a2尚未通过b2，可以发现，a1到达b1是列车下落的因，列车各点下落作为其果，必然处在a1到达b1事件的光锥之中，换句话说，对应的因果关系或者a1到达b1的信息最快以光速传播到列车a2点，可以发现，当其到达a2时，a2已经通过了b2，则列车通过。
a1与b1重合时列车开始下落的假设，使得该模型与例2很相似，对应的，列车能通过的极限情况为，坑的静止长度为$\frac{L}{\gamma(1-\beta)}$。