随机过程大作业

张栩萌 519070910031

May 2022

1 实验目的

1. 通过计算机模拟布朗运动，观察布朗运动的特性

2. 通过计算机模拟随机微分方程解的轨道，探究不同参数对轨道的影响，计算机模拟 X_1 的期望和方差

3. 熟练 Python 编程建模操作

2 问题一：布朗运动

布朗运动的定义为：若一个随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 满足
1. $X(t)$ 是独立增量过程；
2. $\forall s, t > 0, X(s+t) - X(s) \sim N\left(0, c^2 t\right)$, 即 $X(t+s) - X(s)$ 是数学期望为 0 , 方差为 $c^2 t$ 的正态分布；
3. $X(t)$ 关于 t 是连续函数，
则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是布朗运动或维纳过程. 当 $c = 1$ 时, 称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是标准布朗运动。

图 1为在 $[0, 1]$ 区间生成 100 个等距点，以 0.1 为时间间隔生成的标准布朗运动，图 2为同样的区间节点下生成的 $c = 10$ 时的布朗运动。

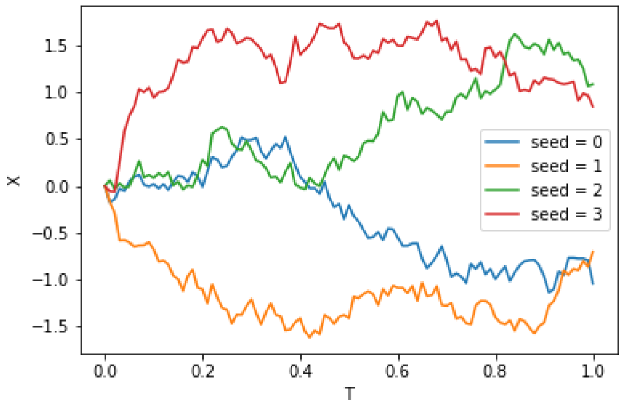

Figure 1: 多条标准布朗运动轨道

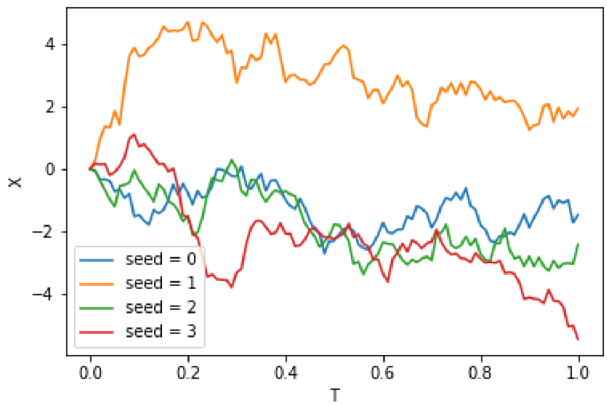

Figure 2: 当 $c = 10$ 时多条布朗运动轨道

因为参数 c 影响布朗运动的增量正态分布的方差，所以我们看到当 $c = 10$ 时布朗运动振荡的幅度明显大于标准布朗运动。

3 问题二：股票价值随机微分方程

设 $B=\{B_t;t\geq 0\}$ 为标准布朗运动，$X=\{X_t;t\geq 0\}$ 为如下随机微分方程的解：

$$\begin{cases} dX_t=\alpha\left(v-X_t\right)dt+\sigma dB_t \\ X_0=x_0 \end{cases}$$

其中 α,v,σ,x_0 为常数。

我们采用不同的随机种子生成了随机微分方程解的多条轨道。

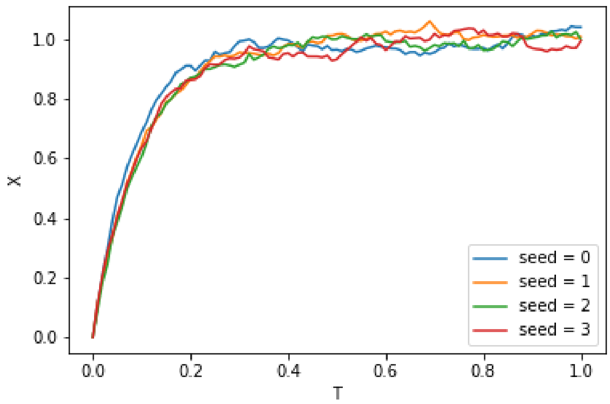

Figure 3: 随机微分方程 1 的解多条轨道

接下来我们测试不同参数对轨道的作用。

在微分方程中，dB_t 是一个正态的扰动，前面的方程 $dX_t=\alpha\left(v-X_t\right)dt$ 表示了如果 X_t 不等于 v 的话，X_t 会以一定速度向 v 收敛。如果把 X_t 看作是函数的话这个微分方程的函数解是 $f=\frac{1}{\alpha}exp{-\alpha t}+v+C$ 所以 v 代表了 X_t 的稳态。而 α 就代表了收敛的速度。下面的实验对这些分析进行了验证

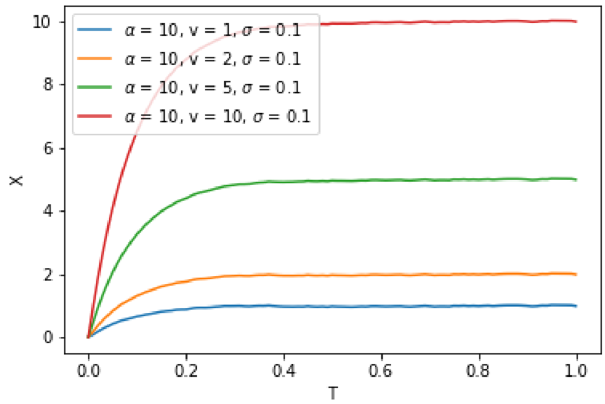

Figure 4: 参数 v 对随机微分方程 1 解的轨道影响

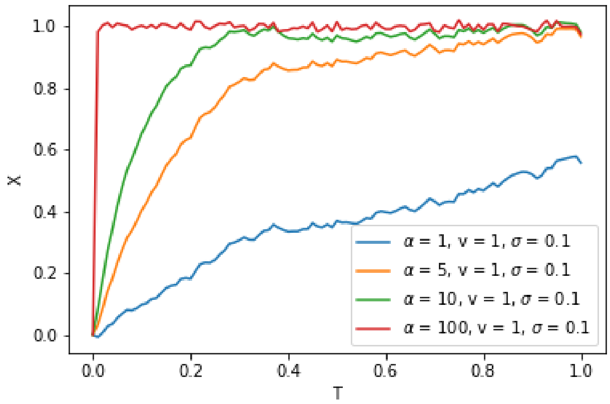

Figure 5: 参数 α 对随机微分方程 1 解的轨道影响

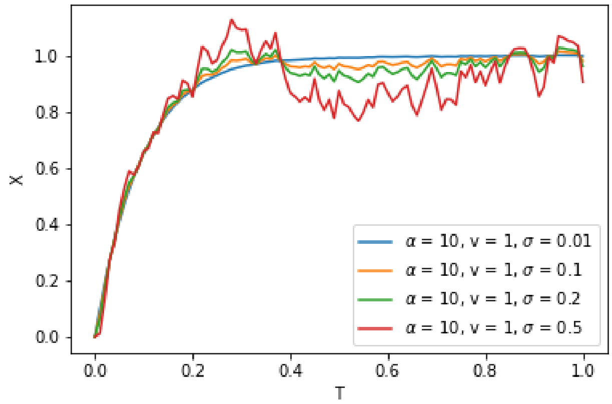

Figure 6: 参数 σ 对随机微分方程 1 解的轨道影响

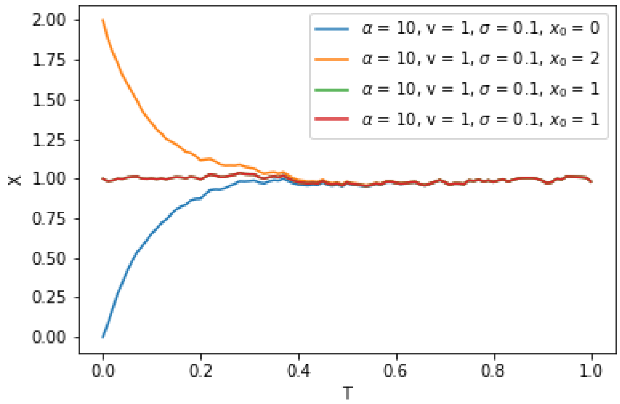

Figure 7: 参数 x_0 对随机微分方程 1 解的轨道影响

图 5说明 α 越大收敛的速度越快；图 6说明 σ 越大噪声的振荡越大；图 5和图 5说明 v 决定 X_t 最终的稳态，而 x_0 决定 X_t 的初态。我们看到正如我们预期的一样，当 $\sigma = 0, v = x_0$ 的时候，初态就是稳态，且没有噪声，轨道是一条直线。

事实上，我们利用伊藤积分可以计算出这个随机微分方程的解，我们可以用解析解与前面我们数值计算的结果作为对照。

$EX_1 = v + (x_0 - v)e^{-\alpha}$
$DX_1 = \sigma^2 e^{-2\alpha} E((\int_0^1 edB_u)^2) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2a})$

我们看到前面数值实验得到的参数的作用与解析解显示的相同，接下来我们估计稳态分布的期望与方差，看看是否与上面的结论一致。

我们现在用 Monte-Carlo 模拟查看不同参数下 X_t 稳态分布的期望与方差。下面的实验都是在控制单一变量的条件下进行的，控制的变量默认为 $\alpha = 10,\ v = 1,\ \sigma = 0.1,\ x_0 = 0$。

Table 1: 不同参数下的 $E(X_1)$ 和 $D(X_1)$

α	$E(X_1)$	$D(X_1)$	v	$E(X_1)$	$D(X_1)$
1	0.636873	0.004301	1	1.000939	0.000513
5	0.995510	0.000966	2	2.000912	0.000513
10	1.000939	0.000513	5	5.000832	0.000513
100	0.999987	0.000101	10	10.000699	0.000513
σ	$E(X_1)$	$D(X_1)$	x_0	$E(X_1)$	$D(X_1)$
0.01	1.00007	5e-06	0	1.000939	0.000513
0.1	1.000939	0.000513	2	1.000992	0.000513
0.2	1.001904	0.00205	5	1.001071	0.000513
0.5	1.004799	0.012815	10	1.001204	0.000513

实验结果表明，v 与 $E(X_1)$ 正比，σ 的平方与 $D(X_1)$ 正比，α 和 x_0 与这两个量无关。

4 问题三：股票价值与价格随机微分方程

设 $B = \{B_t; t \geq 0\}$ 与 $W = \{W_t; t \geq 0\}$ 为标准布朗运动，$X = (X_t, S_t)$ 为如下随机微分方程的解：

$$\begin{cases} dX_t = \alpha\,(v - X_t)\,dt + \sigma dB_t \\ dS_t = \theta\,(X_t - S_t)\,dt + \hat{\sigma_1} dB_t + \hat{\sigma_2} dW_t \\ X_0 = x_0,\ S_0 = s_0 \end{cases}$$

其中 $\alpha, v, \sigma, \theta, \hat{\sigma_1}, \hat{\sigma_2}, x_0, s_0$ 为常数。

这个方程中可以将 X_t 看作是股票价值，S_t 看作是股票价格。当价格高于价值是，市场会对股票有一种看衰的期望；股票价格也将会随之下降，当价格

低于价值时，市场就会对股票看好，价格也将随之上升。股票价格的方程与上面的随机微分方程相同，所以我们看一看价值 S_t 方程的解的轨道。

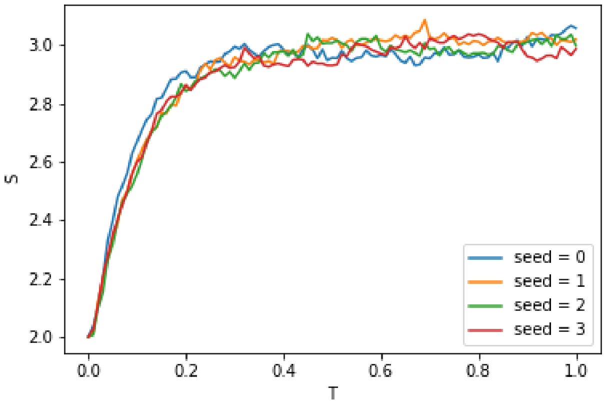

Figure 8: 随机微分方程 2 解的多条轨道 S-T

我们看到 S_t 和 X_t 的曲线是十分相似的，所以我们初步推断 S_t 是受 X_t 影响，不断趋向 X_t，最终区域稳态 v。

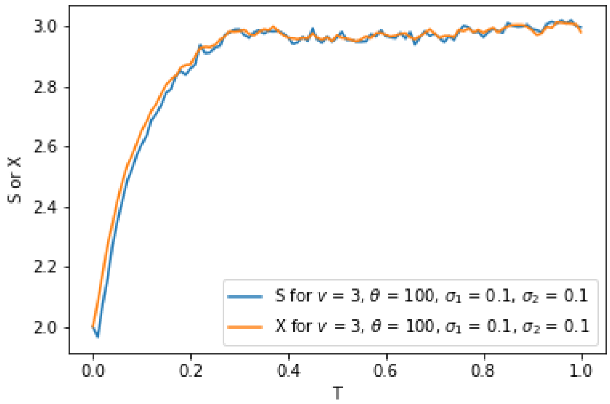

Figure 9: 随机微分方程 2 解的多条轨道 S, X-T

我们画出了价格与价值比值曲线随时间 T 的变化，可以看到他很快就趋于 1，然后受噪声和随机性的影响不断振荡。

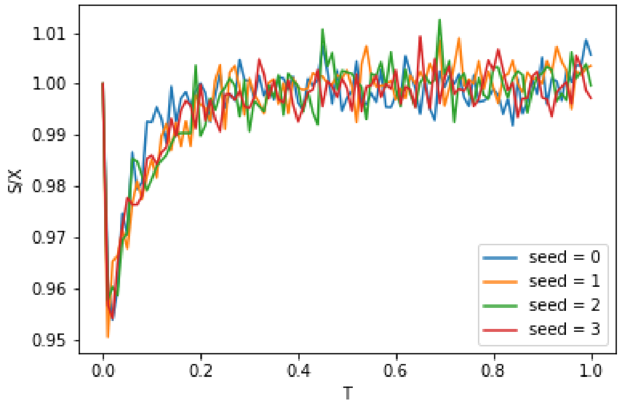

Figure 10: 随机微分方程 2 解的多条轨道 S/X-T

接下来我们实验观察参数对轨道的影响。我们的所有实验都是在控制变量的条件下进行的，被控制的变量默认为 $\alpha = 1, v = 3, \sigma = 0.1, \theta = 100, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.1, x_0 = s_0 = 2$。同样地，$d_t = 0.01$，一共取 100 个个点，区间是 $[0, 1]$。

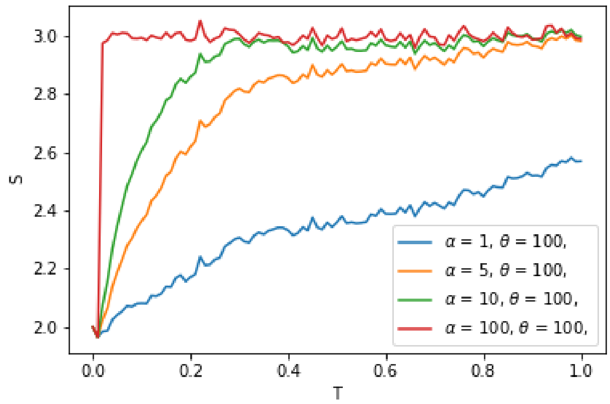

Figure 11: 参数 α 对随机微分方程 2 解的轨道影响

首先，α 以与图 5相似的方式，通过影响价值曲线 X_t 的方式影响 S_t。α 决定了两者向稳态的收敛速率。

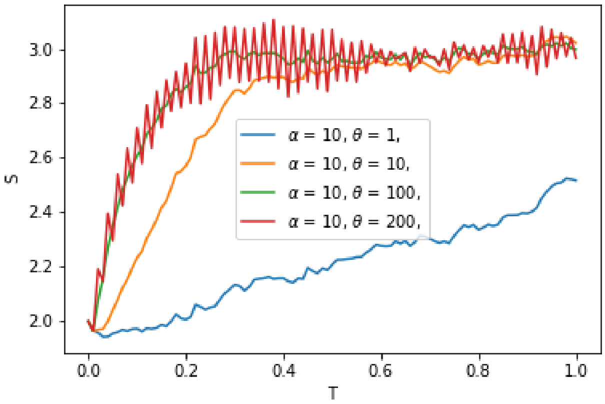

Figure 12: 参数 θ 对随机微分方程 2 解的轨道影响

θ 同样决定了价格曲线 S_t 收敛的速率，当 θ 过小的时候收敛很慢，但是当 θ 过大的时候就会发生振荡，这是因为将 S_t 向 X_t 修正的时候，修正过大。

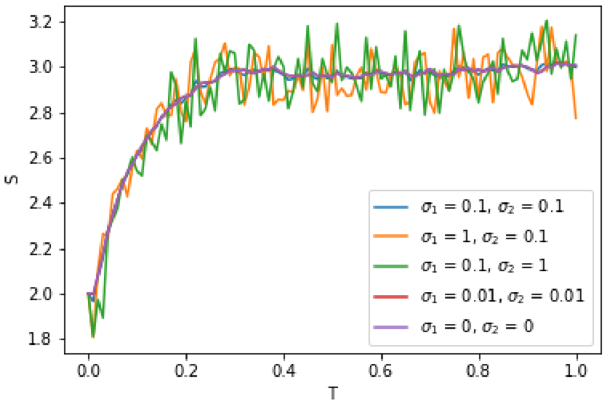

Figure 13: 参数 σ, σ_1 和 σ_2 对随机微分方程 2 解的轨道影响

σ_1 和 σ_2 同样还是印象正态分布噪音的方差

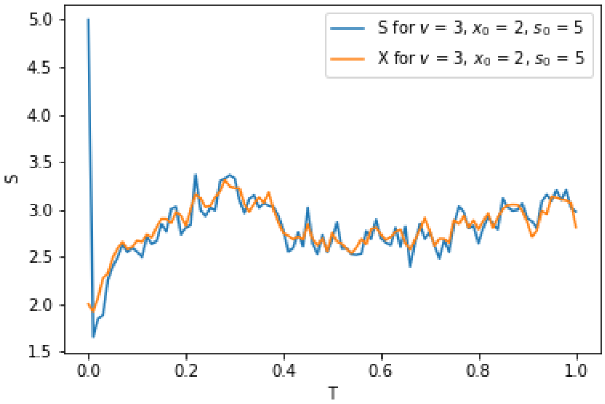

Figure 14: 参数 v 和初值对随机微分方程 2 解的轨道影响

v 代表了 S_t 和 X_t 最终的稳态，而 x_0 和 s_0 表示两条曲线的初值，我们可以发现 S_t 很快向 X_t 收敛，这里是因为 $\alpha\theta dt = 1$ 的原因。

Table 2: 不同参数下的 $E(S_1)$ 和 $D(S_1)$

α	$E(S_1)$	$D(S_1)$	θ	$E(S_1)$	$D(S_1)$
1	2.636873	0.004301	1	3.000939	0.000513
5	2.99551	0.000966	10	3.000939	0.000513
10	3.000939	0.000513	100	3.000939	0.000513
100	2.999987	0.000101	1000000	3.000939	0.000513
σ，σ_1，σ_2	$E(S_1)$	$D(S_1)$	v, x_0, s_0	$E(S_1)$	$D(S_1)$
0.1，0.1，0.1	3.000939	0.000513	3，2，2	3.000939	0.000513
0.1，100，0.1	3.000939	0.000513	5，2，2	5.000885	0.000513
0.1，0.1，100	3.000939	0.000513	3，7，2	3.004932	0.000513
1，0.1，0.1	3.009625	0.05126	3，2，7	3.004799	0.000513

我们看到 α 与 $D(S_1)$ 相关，θ 与期望和方差都不相关，σ 的平方与 $D(S_1)$ 成正比，σ_1 与 σ_2 与 $D(S_1)$ 成正比，v 在理想情况下等于 $E(S_1)$，x_0 与 s_0 没有直接关系，但是是在能够在迭代步数内收敛的情况下。

5 总结与感悟

这次大作业对我来讲是一次全新的体验。首先我学习到了如何通过数值解法解随机微分方程，这对我的 python 代码能力是一个很大的提升。同时数值解法的学习也让我对随机过程的理论有更深的理解，数值解法与理论解法是两种不同的角度，但是殊途同归，都会引导出我们对微分方程的解的理解。另外这个随机微分方程的主题也十分有趣，我虽然对金融经济一无所知，但是方程的金融意义让我对随机过程也有了更深刻的认识。最后十分感谢熊老师这学期的辛勤付出，不仅是课程上的辛勤教导，更感谢熊老师在疫情期间为同学们送饭帮助我们的辛勤付出，老师的行动对我的学术和人生都是很大的鼓舞！

最后感谢老师和助教这一学期的辛勤付出，让我们的这门课即使在疫情期间也有这样良好的效果！感谢大家的付出！