第四章: 数字特征

4.1 期望

期望: 分赌本问题

例 1.1

17 世纪中叶, 赌徒向法国数学家帕斯卡提出分赌本问题: 甲乙两人赌技不相上下, 各赌注 50 法郎, 每局中无平局. 他们约定, 谁先赢三局, 则得全部赌本 100 法郎. 当甲赢了二局, 乙赢了一局时, 因故中止赌博. 现问这 100 法郎如何分才算公平?

解: 设想再赌下去, 则甲最终所得 X 为一个随机变量, 其可能取值为 0 或 100.

- 再赌两局必可结束, 其结果为:

  甲甲、甲乙、乙甲、乙乙.

  其中"甲乙"表示第一局甲胜, 第二局乙胜.

期望: 分赌本问题

- 这四种情况中, 甲获胜有 3 种情况, 赢得 100 法郎. 即

$$P\{X=100\}=\frac{3}{4}, \quad P\{X=0\}=\frac{1}{4}.$$

则有

X	0	100
P	0.25	0.75

- 此时, 甲获得赌本的“期望”是:

$$0\times 0.25+100\times 0.75=75.$$

$\square$

离散型随机变量的期望

定义 1.1

设离散随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots .$$

如果

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$$

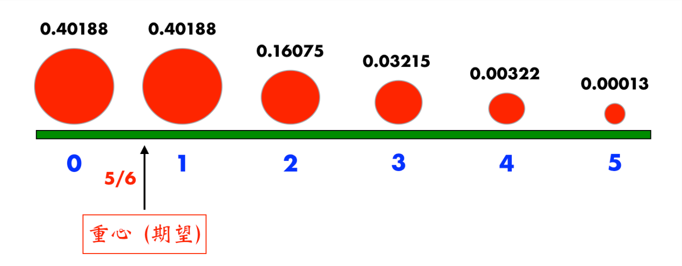
则称

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

为随机变量 X 的数学期望, 简称期望或者均值.

离散型随机变量的期望

- 数学期望本质上是一种**加权平均**, 物理解释是**重心**.
- 在 X 取可列无限个值时, 级数绝对收敛可以保证“**级数之值不因各项次序的改牌而变化**”, 这样 $E(X)$ 与 X 取值的人为排序无关.



离散型随机变量的期望: 例子

例 1.2

有四只盒子, 编号为 1, 2, 3, 4. 现有 3 个球, 将球逐个独立地随机放入 4 只盒子中去. 用 X 表示其中至少有一个球的盒子的最小号码, 求 $E(X)$.

解: 首先求 X 的概率分布.

- X 所有可能取的值是 $1, 2, 3, 4$. $\{X = 1\}$ 表示 1 号盒中至少有一个球.
- **"至少"问题需考虑其对立面.** $\{X = 1\}$ 的对立事件 1 号盒中没有球, 即球都在其他 3 个盒中, 概率为 $\frac{3^3}{4^3}$.
- 因此,
$$P\{X = 1\} = 1 - \frac{3^3}{4^3} = \frac{4^3 - 3^3}{4^3}.$$

离散型随机变量的期望: 例子

- $\{X=2\}$ 表示 1 号盒中没有球, 而 2 号盒中至少有一个球, 类似地,

$$P\{X=2\}=\frac{3^3-2^3}{4^3},$$
$$P\{X=3\}=\frac{2^3-1^3}{4^3}.$$

最后,

$$P\{X=4\}=\frac{1}{4^3}.$$

- 于是,

$$E(X)=1\times\frac{4^3-3^3}{4^3}+2\times\frac{3^3-2^3}{4^3}+3\times\frac{2^3-1^3}{4^3}+4\times\frac{1}{4^3}=\frac{25}{16}.$$

1. 两点分布.

- 设 X 服从参数为 p 的两点分布, 即

$$P\{X=1\}=p, \quad P\{X=0\}=1-p, \quad 0<p<1.$$

则

$$E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p.$$

2. 二项分布.

- 设 $X \sim B(n,p)$, 概率分布为

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

其中 $k=0,1,\cdots,n, \quad 0<p<1.$

- X 的期望为

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

常用离散型随机变量的期望：二项分布

此时，

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}
\end{aligned}
$$

常用离散型随机变量的期望: 二项分布

其中, 令 $m = k - 1$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n-1}{m} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-m} \\
&= [p + (1-p)]^{n-1} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

从而,

$$E(X) = np.$$

常用离散型随机变量的期望: 二项分布

例 1.3

某种产品的次品率为 *0.1*. 检验员每天检验 4 次, 每次随机抽取 10 件产品进行检验, 如果发现其中次品数大于 1, 则应调整设备. 设备产品是否为次品是相互独立的, 求一天中调整设备次数的期望.

解: 用 X 表示一天中调整设备的次数, 则 $X \sim B(10, 0.1)$. 每次检验后需要调整设备的概率

$$\begin{aligned} p = P\{X > 1\} &= 1 - P\{X \leq 1\} \\ &= 1 - P\{X = 1\} - P\{X = 0\} \\ &= 1 - 0.9^{10} - 10 \times 0.1 \times 0.9^{9} = 0.2639. \end{aligned}$$

用 Y 表示一天中调整设备的次数, 则 $Y \sim B(n, p)$, 其中 $n = 4$, $p = 0.2639$. 利用二项分布的期望公式 $E(Y) = np = 1.0556$. □

3. 泊松分布.

- 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 概率分布为
$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$
其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, \lambda > 0$.
- X 的期望
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

连续型随机变量的期望

定义 1.2

设连续随机变量 X 的密度函数 $f(x)$. 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx < \infty,$$

则称

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

为随机变量 X 的期望, 简称期望或者均值. 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx$$

不收敛, 则称 X 的数学期望不存在.

例 1.4

已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X)$.

解: 根据期望公式:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot x\,dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1.$$

$\square$

连续型随机变量的期望: 例子

例 1.5

已知随机变量 X 的服从柯西分布, 其密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty.$$

求 $E(X)$.

解: 核查绝对收敛性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\, dx = \infty.$$

因为, 此积分发散, 即 $E(X)$ 不存在. □

常用连续型随机变量的期望: 均匀分布

1. 均匀分布.

- 设 $X \sim U(a, b)$, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

- X 的期望为

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

常用连续型随机变量的期望: 伽马分布

2. 伽马分布.

- 设 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- X 的期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\lambda}. \end{aligned}$$

- 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, $X \sim Exp(\lambda)$, 其期望 $E(X) = 1/\lambda$.

3. 正态分布.

- 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度函数为,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\},$$

  其中 $-\infty < x < \infty$.

- X 的期望. 设 $U = (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$. 因为

$$E(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

  这是一个奇函数, 且积分收敛, 故

$$E(U) = 0 \Rightarrow E(X) = \mu.$$

随机变量函数的的期望

定理 1.1

设 $g(x)$ 是连续函数, Y 是随机变量 X 的函数: $Y = g(X)$.

(1) 设 X 是离散型随机变量, 概率分布为 $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, \cdots$. 若 $\sum_i |g(x_i)| p_i$ 收敛, 则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\, p_i.$$

(2) 设 X 是连续型随机变量, 概率密度函数为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx$ 收敛, 则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

随机变量函数的的期望: 例子

例 1.6

已知随机变量 X 的分布列如下:

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

求 $Y = X^2$ 的数学期望.

解: 先求 $Y = X^2$ 的期望, 由上式导出

X^2	0	1	4
P	0.1	0.4	0.5

因此,

$$E(X^2) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 4 \times 0.5 = 2.4.$$

随机变量函数的的期望: 例子

例 1.7

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $E(X^2)$.

解: 因为 $X \sim N(0,1)$,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

做变量变换, $t = x^2/2, x = \sqrt{2t}$, 则

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2t) \cdot e^{-t} \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= 2 \times \frac{\Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi}} = 1. \end{aligned}$$

随机变量函数的的期望

直观上, 把 $g(X)$ 看成一个新的随机变量, 那么当以概率 p_i 取值 x_i 时, 以概率 p_i 取值 $g(x_i)$, 故期望为 $\sum_i g(x_i)p_i$.

- 该定理提供了**计算随机变量 X 的函数 $g(X)$ 的期望的简化方法**, 不需要计算 $g(X)$ 的分布, **直接利用 X 的分布**.
- 该定理可推广到两个随机变量函数 $Z = g(X, Y)$.

(1) 对离散型, 设 $P\{X = x_i, Y = y_i\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$, 则

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}.$$

(2) 对连续型, 设 $f(x, y)$ 是 (X, Y) 是概率密度函数, 则

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy.$$

随机变量函数的的期望

例 1.8

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

求 $E(XY)$.

解: (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = 8e^{-4x-2y}$, $x \geq 0, y \geq 0$. 于是

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 8e^{-4x-2y} dxdy \\ &= 8\left(\int_0^{\infty} xe^{-4x} dx\right)\left(\int_0^{\infty} ye^{-2y} dy\right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

期望的性质

性质 1.1

设 c 是常数, 则 $E(c) = c$.

证明: 对常数 c 看作离散随机变量, 它只取一个可能值 c, 概率为 1, 因此 $E(c) = c \times 1 = c$. $\square$

性质 1.2

设 k 是常数, 则 $E(kX) = kE(X)$.

证明: $k = 0$ 时显然成立. $k \neq 0$ 时, 设 X 是离散随机变量时, 概率分布为 $P\{X_i = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \cdots$. 令 $Y = kX$, 有

$$E(kX) = \sum_i k x_i p_i = k \sum_i x_i p_i = kE(X).$$

当 X 是连续随机变量时类似. $\square$

期望的性质: 线性

性质 1.3 (线性)

(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

(2) $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$.

证明: 设 (X,Y) 是二维连续型随机向量, p.d.f. 为 $f(x,y)$. 令 $Z=X+Y$, 有

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dy\\&=E(X)+E(Y).\end{aligned}$$

当 (X,Y) 是二维离散随机变量时类似. $\square$

例 1.9

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 $X_i \sim B(1,p)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 令 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. 求 $E(Y)$.

解: 本质上是二点分布和二项分布的关系, 参数均为 p 的 n 个相互独立服从两点分布的随机变量相加为二项分布. 有

$$X_i \sim B(1,p) \Rightarrow E(X_i) = p,$$

此时

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np.$$

注意, 该性质并不要求 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立! $\square$

期望的性质: 例子

例 1.10

掷 n 颗骰子, X 代表掷出点数的总和, 求 $E(X)$.

解: 令 $X_i = j$ 表示第 i 颗骰子的点数为 j, 则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 掷不同的次数相互独立. 对于一个骰子而言,

$$P(X_j = j) = \frac{1}{6},$$
$$E(X_i) = \frac{1}{6}(1 + 2 + \cdots + 6) = \frac{7}{2}.$$

此时,

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{7}{2}.$$

$\square$

期望的性质: 独立

性质 1.4 (独立)

(1) 设 X 与 Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$.
(2) 设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立, 则 $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$.

证明: 设二维连续随机向量 (X, Y) 的 p.d.f. 为 $f(x, y)$, X 和 Y 的边缘密度函数为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$. 由于 X, Y 相互独立, 令 $Z = XY$, 则

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \right) = E(X)E(Y).
\end{aligned}
$$

当 (X, Y) 是二维离散随机变量时类似. $\square$

期望的性质: 例子

例 1.11

对例 *1.8* 中的随机变量 X 和 Y, 使用期望的性质求 $E(X+Y)$ 和 $E(XY)$.

解: 由分布函数易知 $X \sim E(4)$, $Y \sim E(2)$, 则由指数分布的期望

$$E(X)=\frac{1}{4}, \quad E(Y)=\frac{1}{2}.$$

此时,

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{3}{4},$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{8}.$$

与例 1.8 的结果相同. $\square$

期望的性质: 例子

例 1.12

将 n 个球放入 M 个盒子中, 设每个球落入各盒子是等可能的, 求有球的盒子数 X 的期望.

解: 每个盒子中可能放 $0, 1, \cdots, n$ 个球, 正向考虑问题较复杂, 考虑其反面. 第 i 个盒子没有球的概率为 $(1 - 1/M)^n$, $i = 1, 2, \cdots, M$. 引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个盒子中有球}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个盒子中无球}. \end{cases}$$

则 $X = X_1 + \cdots + X_M$. 此时,

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_M) = \sum_{i=1}^{M} E(X_i).$$

期望的性质: 例子

显然, $X_i \sim B(1, p)$. 由上述分析, 可知

$$1 - p = \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n \Rightarrow p = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n.$$

此时, 由于 X_i 之间相互独立, $X \sim B(M, p)$. 因此,

$$E(X) = Mp = M\left[1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n\right].$$

把 M 个盒子看成 M 个“银行自动取款机”, n 个球看成 n 个“取款人”. 假定每个人到哪个取款机是随机的, $E(X)$ 是处于服务状态的取款机的平均个数.

4.2 方差

方差: 定义

定义 2.1

设 X 为一随机变量, 如果 $E(X-E(X))^2$ 存在, 则称之为随机变量 X 的方差, 记为

$$Var(X) = E(X-E(X))^2.$$

称方差的平方根 $\sqrt{Var(X)}$ 为随机变量 X 的标准差.

方差和标准差用来**描述随机变量取值的集中和分散程度**.

- 方差与标准差越小, 随机变量的取值越集中.
- 方差与标准差越大, 随机变量的取值越分散.

方差: 定义

- 当 X 为离散型随机变量, 其概率分布为 $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, \cdots$, 则

$$Var(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 \, p_i.$$

- 当 X 为连续型随机变量, 其 p.d.f. 为 $f(x)$, 则

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) \, dx.$$

如果随机变量 X 的期望存在, 其方差不一定存在. 而当 X 的方差存在, 则 $E(X)$ 必定存在, 因为 $|x| \leq x^2 + 1$.

方差: 性质

性质 2.1

方差的另一种计算方法

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明: 将方差按定义展开

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\
&= E\left(X^2 - 2X \cdot E(X) + (EE(X))^2\right) \\
&= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}$$

□

方差: 例子

例 2.1

设离散随机变量 X 的概率分布是

$$P\{X=0\}=0.2, P\{X=1\}=0.5, P\{X=2\}=0.3.$$

求 $Var(X)$.

解: 先计算 $E(X^2)$ 和 $E(X)$,

$$E(X)=0\times 0.2+1\times 0.5+2\times 0.3=1.1,$$
$$E(X^2)=0^2\times 0.2+1^2\times 0.5+2^2\times 0.3=1.7.$$

代入方差计算公式得

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.7-1.1^2=0.49.$$

方差: 例子

例 2.2

设 X 为一加油站在一天开始时存储的油量, Y 为一天中卖出的油量, 显然 $Y \le X$. 设 (X, Y) 具有概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \le y < x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

这里 1 表示一个容积单位. 求 $Var(Y)$.

解: 先求 $E(Y)$.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy = \int_0^1 dx \int_0^x 3xydy = \frac{3}{8}.$$

方差: 例子

再求 $E(Y^2)$.

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^x 3xy^2 dy = \frac{1}{5}.$$

因此,

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} \approx 0.0594.$$

$\square$

方差: 性质

性质 2.2

设 c 是常数, 则 $Var(c) = 0$ 且 $Var(X + c) = Var(X)$.

证明: 按方差的定义

$$
\begin{aligned}
Var(c) &= E\{[c - E(c)]^2\} = 0, \\
Var(X + c) &= E\{[(X + c) - E(X + c)]^2\} \\
&= E\{[X - E(X)]^2\} = Var(X).
\end{aligned}
$$

该性质表明**常数的方差等于零.** 事实上这很容易理解, 因为方差刻画了随机变量取值围绕其均值的波动情况, 随机变量等于常数时, 其波动为零. □

方差: 性质

性质 2.3

设 k 为常数, 则

$$Var(kX) = k^2 Var(X).$$

性质 2.4

设 X 与 Y 相互独立, 则

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

性质 2.5

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$$

方差: 性质

证明: 性质 2.4.

$$\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
&= E\Big\{\Big[\big(X-E(X)\big)+\big(Y-E(Y)\big)\Big]^2\Big\} \\
&= E\Big\{\Big[\big(X-E(X)\big)\Big]^2+\Big[\big(Y-E(Y)\big)\Big]^2 \\
&\quad +2\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big\} \\
&= Var(X)+Var(Y)+2E\Big\{\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big\}.
\end{aligned}$$

因为 X 与 Y 相互独立, 则 $X-E(X)$ 与 $Y-E(Y)$ 相互独立, 从而 $E\Big\{\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big\}=0$. 由此,

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

成立. □

方差: 例子

例 2.3

设随机变量 X 的期望和方差分别为 $E(X)$ 和 $Var(X)$, 且 $Var(X) > 0$, 求

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

的期望和方差.

解: 计算

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{Var(X)}}\big(E(X) - E(X)\big) = 0,$$

$$Var(Y) = \frac{1}{Var(X)} Var\big(X - E(X)\big) = 1$$

这里称 Y 为 X 的标准化的随机变量. □

常用离散型随机变量的方差: 两点分布

1. 两点分布.

- 设 X 服从参数为 p 的两点分布, 即

$$P\{X=1\}=p, \quad P\{X=0\}=1-p, \quad 0<p<1.$$

- 计算

$$E(X^2)=1^2\times p+0^2\times(1-p)=p,$$

则

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

常用离散随机变量的方差: 二项分布

2. 二项分布.

- 设 $X \sim B(n,p)$, 概率分布为

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

其中 $k = 0, 1, \cdots, n, \quad 0 < p < 1.$

- $X = \sum_{i=1}^n X_i, X_i \sim B(1,p), X$ 的方差为

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = np(1-p).$$

常用离散随机变量的方差: 泊松分布

3. 泊松分布.

- 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 概率分布为

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, \lambda > 0$.

- 计算 X^2 的期望

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

此时 $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$.

常用连续型随机变量的方差: 均匀分布

1. 均匀分布.

- 设 $X \sim U(a,b)$, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

- 计算 X^2 的期望为

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

从而

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

2. 伽马分布.

- 设 $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- 计算 X^2 的期望为

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+2-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

从而,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

常用连续型随机变量的方差: 正态分布

3. 正态分布.

- 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度函数为,
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\},$$
其中 $-\infty < x < \infty$.
- 计算 X^2 的期望. 设 $U = (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$. 则
$$Var(U) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X).$$
因为
$$E(U^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

常用连续型随机变量的方差: 正态分布

因为$f(u) = u^2 e^{-u^2/2}$ 为偶函数, 故

$$E(U^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

做变换, 令 $t = u^2/2 \Rightarrow u = \sqrt{2t}$. 因此,

$$\begin{aligned} E(U^2) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2t) \cdot e^{-t} \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-1/2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

可知

$$Var(X) = \sigma^2 Var(U) = \sigma^2.$$

4.3 协方差和相关系数

协方差: 定义

定义 3.1

设 (X, Y) 是一个二维随机变量, 若 $E\big((X-E(X)(Y-E(Y))\big)$ 存在, 则称此期望为 X 与 Y 的协方差, 记为

$$Cov(X, Y) = E\big((X-E(X)(Y-E(Y))\big).$$

特别地, $Cov(X, X) = Var(X)$.

- 当 $Cov(X, Y) > 0$ 时, 称 X 与 Y 正相关, 两个偏差 $(X-E(X))$ 和 $(Y-E(Y))$ 同时增加或减少.
- 当 $Cov(X, Y) < 0$ 时, 称 X 与 Y 负相关, 有 X 增加而 Y 减少的倾向, 或 Y 增加而 X 减少的倾向.
- 当 $Cov(X, Y) = 0$ 时, 称 X 与 Y 不相关.

协方差: 性质

性质 3.1

协方差的计算与 X, Y 的次序无关, 即

$$Cov(X, Y) = Cov(Y, X).$$

性质 3.2

任意随机变量 X 与常数 a 的协方差为零, 即

$$Cov(X, a) = 0.$$

性质 3.3

对任意常数 a, b, 有

$$Cov(aX, bY) = abCov(X, Y).$$

协方差: 性质

性质 3.4

设 X, Y, Z 是任意三个随机变量, 则

$$Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z).$$

证: 由协方差性质

$$\begin{aligned}
Cov(X+Y, Z) &= E\big((X+Y)Z\big) - E(X+Y)E(Z) \\
&= E(XZ) + E(YZ) - E(X)E(Z) - E(Y)E(Z) \\
&= \big(E(XZ) - E(X)E(Z)\big) + \big(E(YZ) - E(Y)E(Z)\big) \\
&= Cov(X, Z) + Cov(Y, Z).
\end{aligned}$$

□

协方差: 性质

性质 3.5

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y).$

性质 3.6

若随机变量 X 与 Y 相互独立, 则 $Cov(X,Y)=0$, 反之不然.

证: 由协方差定义

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\big[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\big] \\ &= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)\cdot E(Y). \end{aligned}$$

$\square$

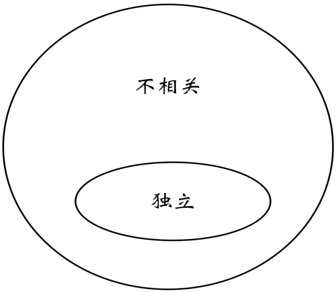
协方差: 性质例子

例 3.1

设随机变量 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 且令 $Y = X^2$, 则 X 与 Y 不独立, 但协方差为

$$Cov(X, Y) = Cov(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X)E(X^2) = 0,$$

注意正态分布的奇数矩为 0, 即 $E(X) = E(X^3) = 0$.



性质 3.7

对任意二维随机变量 (X,Y), 有

$$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y).$$

证: 由方差和协方差定义,

$$\begin{aligned}
Var(X\pm Y) &= E\big((X\pm Y)-E(X\pm Y)\big)^2 \\
&= E\big((X-E(X))\pm(Y-E(Y))\big)^2 \\
&= E\big((X-E(X))^2+(Y-E(Y))^2 \\
&\quad \pm 2(X-E(X))(Y-E(Y))\big) \\
&= Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y).
\end{aligned}$$

$\square$

例 3.2

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $Cov(X,Y)$.

解: 先求 $E(X),E(Y)$:

$$E(X)=\int_0^1 x\left(\int_0^x 3x dy\right)dx=\int_0^1 3x^3 dx=\frac{3}{4};$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\left(\int_y^1 3x dx\right)dy=\int_0^1 \frac{3}{2}y(1-y^2)dy=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8};$$

协方差: 例子

再计算 $E(XY)$:

$$E(XY) = \int_0^1 \left(\int_0^x 3x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^4 dx = \frac{3}{10}.$$

则按协方差定义

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{160} > 0.$$

即 X 与 Y 不相互独立. $\square$

协方差: 施瓦茨不等式

定理 3.1

对任意二维随机变量 (X, Y), 若 X 与 Y 的方差都存在, 且记

$$\sigma_X^2 = Var(X), \quad \sigma_Y^2 = Var(Y),$$

则有

$$[Cov(X, Y)]^2 \leq \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2.$$

证: (1) 当 $\sigma_X^2 = 0$ 时, 等式右边为 0 且 X 几乎处处为常数 a, 由协方差性质 $Cov(a, Y) = 0$, 故 $Cov(X, Y) = \sigma_X^2\sigma_Y^2$ 几乎处处成立.

协方差: 施瓦茨不等式

(2) 当 $\sigma_X^2 > 0$ 时, 构造 t 的二次函数

$$\begin{aligned} g(t) &= E\Big[t(X - E(X)) + (Y - E(Y))\Big]^2 \\ &= t^2\sigma_X^2 + 2t \cdot Cov(X, Y) + \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

由于上述二次三项式非负, $\sigma_X^2 > 0$, 故判别式小于等于 0 恒成立,

$$\Big[2Cov(X, Y)\Big]^2 - 4\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 \leq 0.$$

移项得到结论. $\square$

相关系数: 定义

定义 3.2

设 (X,Y) 是一个二维随机变量, 且 $Var(X)=\sigma_X^2>0$, $Var(Y)=\sigma_Y^2>0$. 则称

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

为 X 与 Y 的相关系数. $Corr(X,Y)$ 也记为 ρ_{XY}.

定义 3.3

若 X 与 Y 的相关系数 $Corr(X,Y)=0$, 则称 X 与 Y 互不相关.

相关系数: 定义

另一个解释: 相应标准化变量的协方差. 若令 X 与 Y 的期望分别为 μ_X 和 μ_Y, 其标准化向量为

$$X^* = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad Y^* = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y},$$

则

$$\begin{aligned} Cov(X^*, Y^*) &= Cov\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= Corr(X, Y). \end{aligned}$$

相关系数: 例子

例 3.3

证明二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的相关系数为 ρ.

证: 先求 $Cov(X, Y)$, 按定义

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big] \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot \\
&\quad \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} dxdy.
\end{aligned}
$$

相关系数: 例子

将上述中括号内化成

$$\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2+\left(\sqrt{1-\rho^2}\,\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2,$$

再做变量变换

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right), \\ v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x-\mu_1=\sigma_1(u\sqrt{1-\rho^2}+\rho v), \\ y-\mu_2=\sigma_2 v, \end{cases}$$

相关系数: 例子

且

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ \sigma_1\rho & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}.$$

由此得

$$Cov(X,Y) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(uv\sqrt{1-\rho^2}+\rho v^2)\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}dudv.$$

注意积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}}dv = \sqrt{2\pi}.$$

相关系数: 例子

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} dudv = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} dudv = 2\pi.$$

从而

$$Cov(X,Y) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\cdot\rho\cdot 2\pi = \rho\sigma_1\sigma_2,$$
$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

$\square$

相关系数: 性质

定理 3.2

相关系数满足

$$-1 \le Corr(X,Y) \le 1, \quad |Corr(X,Y)| \le 1$$

等号成立的充要条件是存在 $a \neq 0$ 和 b 使得

$$P(Y = aX + b) = 1,$$

即 X 与 Y 之间几乎处处有线性关系.

证: 由施瓦茨不等式:

$$[Corr(X,Y)]^2 = \frac{[Cov(X,Y)]^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \le \frac{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2} = 1.$$

相关系数: 性质

(1) 先证充分性: ” $\Leftarrow$ ”: 若 $Y = aX + b$ 几乎处处成立, 则

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = a^2\sigma_X^2, \quad Cov(X, Y) = Cov(X, aX) = a\sigma_X^2.$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X \cdot |a|\sigma_X} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

(2) 再证必要性: ” $\Rightarrow$ ”:

- 要证 $Y = aX + b$ 几乎处处成立.
- 需证 $Var(Y - aX - b) = 0$ 几乎处处成立;
- 需证存在 $a \neq 0$, 使得

$$\begin{aligned} &Var(Y) + a^2 Var(X) - 2a \cdot Cov(X, Y) \\ =&\sigma_Y^2 + a^2\sigma_X^2 - 2a \cdot Cov(X, Y) = 0. \end{aligned}$$

几乎处处成立.

相关系数: 性质

当 $Corr(X,Y)=1$, 存在 $a=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ 时, 有上式等于

$$\sigma_Y^2+\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\sigma_X^2-2\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\sigma_X\sigma_Y=0.$$

当 $Corr(X,Y)=-1$, 存在 $a=-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ 时, 有上式等于

$$\sigma_Y^2+\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\sigma_X^2-2\left(-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)(-\sigma_X\sigma_Y)=0.$$

即存在 $a\neq 0$, 使得 $Var(Y-aX-b)=0$ 几乎处处成立,

$$P(Y=aX+b)=1,$$

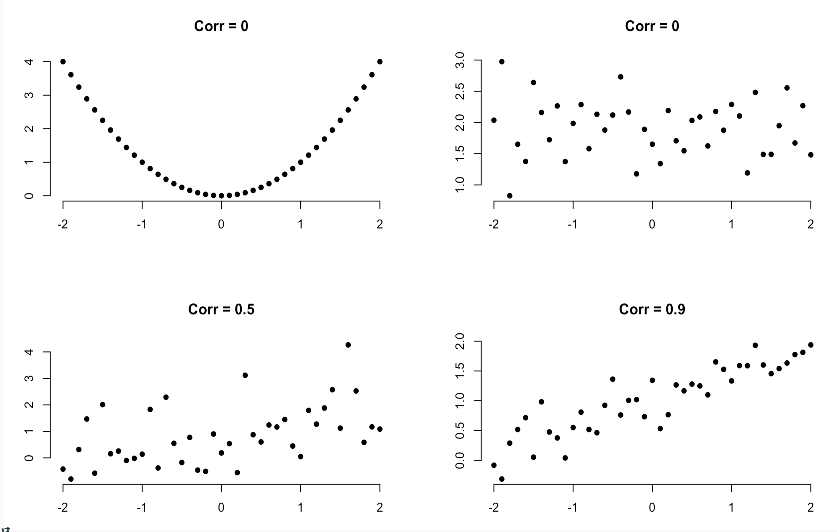
即 $Y=aX+b$ 几乎处处成立. $\square$

相关系数: 性质讨论

相关系数的可作几点说明:

- 相关系数刻画了 X 与 Y 之间的线性关系强弱, 因此也称为**线性相关系数**.
- 若 $Corr(X, Y) = 0$, 则 X 与 Y 不相关. **不相关是指 X 与 Y 之间没有线性关系, 但 X 与 Y 之间可能存在其他函数关系, 如平方关系, 对数关系等.**
- 若 $Corr(X, Y) = 1$, 则称 X 与 Y 完全正相关;
- 若 $Corr(X, Y) = -1$, 则称 X 与 Y 完全负相关.

相关系数: 性质讨论



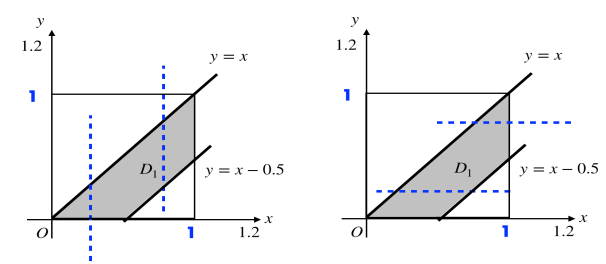
相关系数: 例子

例 3.4

已知随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{3}, & 0 < x - y < 0.5, 0 < x, y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 (X, Y) 的相关系数 $Corr(X, Y)$.



解: 先求 X 的边际密度. 当 $0 < x < 0.5$ 时,

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{8}{3} dy = \frac{8}{3} x,$$

当 $0.5 < x < 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{x-0.5}^x \frac{8}{3} dy = \frac{4}{3}.$$

所以

$$E(X) = \int_0^{0.5} \frac{8}{3} x^2 dx + \int_{0.5}^1 \frac{4}{3} x dx = \frac{11}{18},$$

$$E(X^2) = \int_0^{0.5} \frac{8}{3} x^3 dx + \int_{0.5}^1 \frac{4}{3} x^2 dx = \frac{31}{72}.$$

再求 Y 的边际密度. 当 $0 < y < 0.5$ 时,

$$f_Y(y) = \int_y^{y+0.5} \frac{8}{3} dx = \frac{4}{3},$$

当 $0.5 < y < 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{8}{3} dx = \frac{8}{3}(1 - y).$$

所以

$$E(Y) = \int_0^{0.5} \frac{4}{3} y dy + \int_{0.5}^1 \frac{8}{3} y(1 - y) dy = \frac{7}{18},$$

$$E(Y^2) = \int_0^{0.5} \frac{4}{3} y^2 dy + \int_{0.5}^1 \frac{8}{3} y^2 (1 - y) dy = \frac{15}{72}.$$

相关系数: 例子

由此求 X 与 Y 的方差,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{31}{72} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \frac{37}{648},$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{15}{72} - \left(\frac{7}{18}\right)^2 = \frac{37}{648}.$$

再求

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \int_0^{0.5} \int_0^x \frac{8}{3} xydydx + \int_{0.5}^1 \int_{x-0.5}^x \frac{8}{3} xydydx \\ &= \int_0^{0.5} \frac{4}{3} x^3 dx + \int_{0.5}^1 \frac{4}{3} x \left(x - \frac{1}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{48} + \frac{7}{18} - \frac{1}{8} = \frac{41}{144}. \end{aligned}$$

相关系数: 例子

最后求协方差

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(X\cdot Y) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{41}{144} - \frac{11}{18}\times\frac{7}{18} = \frac{61}{1296} \approx 0.0471.
\end{aligned}
$$

其相关系数为

$$
Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{61}{1296}\times\frac{648}{37} = \frac{61}{74} \approx 0.8243.
$$

这里协方差很小, 但相关系数却很大! 这是由于标准差在此题中都很小, 协方差小些也能反应一定的相关性. $\square$

性质 3.8

在二维正态分布 $\mathcal{N}(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 场合下, 不相关与独立是等价的.

证: 二维正态分布的相关系数为 ρ. 因为二维正态分布的两个边际分布为 $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$, 记为 X 与 Y.

(1) 当 $\rho=0$ 时, 从正态表达式可得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 即 X 与 Y 独立.

(2) 当 X 与 Y 独立, 则 $\forall x,y$, 有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 成立, 令 $x=\mu_1, y=\mu_2$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}=1\Rightarrow\rho=0.$$

4.4 矩与协方差矩阵

矩

定义 4.1

对随机变量 X,

- 若 $E(X^k)$ 存在, 则称它为 X 的 k 阶原点矩, $k = 1, 2, \cdots$.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在, 则称它为 X 的 k 阶中心矩, $k = 2, 3, \cdots$.

易知 X 的期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩, 方差 $Var(X)$ 是 X 的二阶中心矩.

协方差矩阵

对二维随机变量 (X_1, X_2). 记

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= E\{[X_1 - E(X_1)]^2\} = Var(X_1), \\
c_{12} &= E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\} = Cov(X_1, X_2), \\
c_{21} &= E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\} = Cov(X_2, X_1), \\
c_{22} &= E\{[X_2 - E(X_2)]^2\} = Var(X_2).
\end{aligned}
$$

并排成矩阵

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},
$$

称为 (X_1, X_2) 的**协方差矩阵**.

协方差矩阵

定义 4.2

对 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 记

$$c_{ij} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\} = Cov(X_i, X_j),$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 称矩阵

$$C = (c_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵. 显然, C 是对称矩阵.