

# 第一章：随机事件

1.1 基本概念

1.2 事件的概率

1.3 古典概率模型

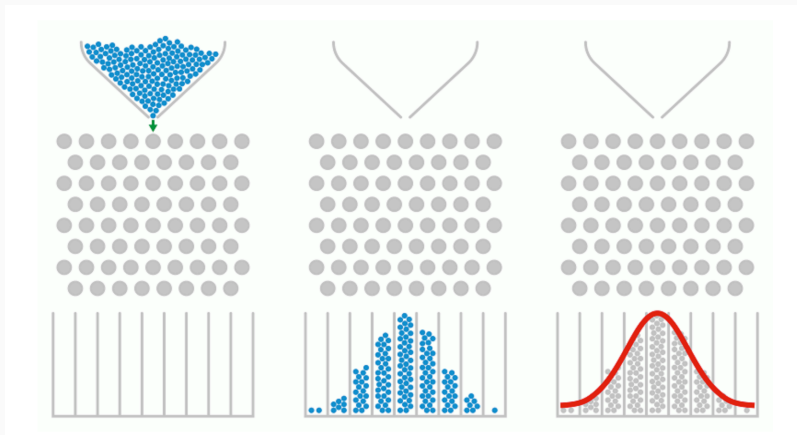
1.4 条件概率

1.5 事件的独立性

## 1.1 基本概念

---

# 高尔顿板钉试验



**图 1:** 高尔顿板试验，蓝色小球自由落入板钉，在每个钉子处随机向左向右，某个小球很难预测其结果。但是大量小球放入，底板处的小球会呈钟形曲线。

概率论是一门研究**随机现象**的**统计规律**的数学学科。

- 确定现象: 只有一个结果的现象。
- 不确定现象: 在一定的条件下, 并不总是出现相同结果的现象, 随机现象是一种不确定现象。
- 随机现象是概率论研究的对象, 概率论主要研究随机现象的模型, 即概率分布。

## 随机现象

- 投硬币，投骰子；
- 一天内进入商场的顾客数；
- 某型号灯泡的寿命；
- 测量某物理量的误差。

## 确定现象

- 太阳从东方升起；
- 水往低处流；
- 异性电荷相吸；
- 加热到  $100^{\circ}\text{C}$  水沸腾。

频率稳定性  $\Rightarrow$  统计规律性

- 随机现象即有偶然性的一面，也有必然性的一面。这种必然性表现为大量试验中随机事件出现的频率稳定性，即一个随机事件出现的频率常在某个固定的常数附近摆动，这种规律性称之为统计规律性。
- 常见的频率稳定性的例子有，投硬币试验，高尔顿板钉试验，英文字母使用频率，女婴的出生率等。

**随机试验**：对相同条件下可以重复的随机现象的观察、记录、实验。随机试验有以下三个特点：

- 可以重复试验；
- 结果不止一个, 但事先确定所有可能出现的结果；
- 哪个结果出现, 人们事先不知。

## 例 1.1

- (1) 投掷一枚硬币, 可能正面朝上, 也可能反面朝上。
- (2) 记录一天内进入某超市的顾客数。
- (3) 记录某种型号的电视机寿命。

## 定义 1.1

样本空间是随机现象的一切可能基本结果组成的集合，记为  $\Omega = \{\omega\}$ ，其中  $\omega$  表示基本结果，又称为样本点。

## 例 1.2

- (1) 投掷一枚硬币样本空间  $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$ ，其中  $\omega_1$  代表正面朝上， $\omega_2$  代表反面朝上。(有限样本空间)
- (2) 一天内进入某超市的顾客数样本空间为  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, \dots, 1000, \dots\}$ 。(可列样本空间)
- (3) 某种型号的电视机寿命样本空间  $\Omega_3 = \{t : t \geq 0\}$ 。(连续样本空间)



# 随机事件

**随机事件**是随机现象的某些样本点组成的集合，简称事件。事件是样本空间的子集，常用大写字母  $A, B, C$  来表示。

- **基本/复合事件**：由样本空间  $\Omega$  中的单/多个元素组成的子集；
- 必然事件：样本空间  $\Omega$  的最大子集 ( $\Omega$  本身)；
- 不可能事件：样本空间  $\Omega$  的最小子集 (空集  $\emptyset$ )。

## 例 1.3

投掷一颗骰子的样本空间为  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

- (1) 事件  $A$ ：出现“1”点，为  $\Omega$  的一个样本点 (基本)；
- (2) 事件  $B$ ：出现偶数点，为  $\Omega$  的三个样本点  $\{2, 4, 6\}$  (复合)；
- (3) 事件  $C$ ：出现的点数小于“7”点，为  $\Omega$  (必然)；
- (4) 事件  $D$ ：出现的点数大于“6”点，为空集 (不可能)。

# 事件间的关系

以下讨论在同一个  $\Omega$  中。事件间的关系本质上就是集合间的关系，当子集  $A$  中某个样本点出现了，就说事件  $A$  发生了。

- 如果属于  $A$  的样本点必属于  $B$ ，则称  $B$  **包含**  $A$ ，记为  $A \subset B$ ；
- 如果属于  $A$  的样本点必属于  $B$ ，而且属于  $B$  的样本点必属于  $A$ ，即  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ，则称事件  $A$  与  $B$  **相等**，记为  $A = B$ ；
- 如果  $A$  与  $B$  没有相同的样本点，即  $A \cap B = \emptyset$ ，则称  $A$  与  $B$  **互不相容**。

## 例 1.4

相等关系：投掷两枚骰子，记  $A$  事件“两个骰子的点数之和为奇数”，以  $B$  记事件“两个骰子的点数为一奇一偶”，则容易证明， $A$  发生必然导致  $B$  发生，而且  $B$  发生必导致  $A$  发生，所以  $A=B$ 。

## 事件间的运算: 补, 并与交

- **补**: 记为  $A^c$  或  $\bar{A}$ , 由在  $\Omega$  中而不在  $A$  中的样本点组成的新事件, 或者事件  $A$  不发生;
- **并 (和)**: 记为  $A \cup B$  或  $A + B$ , 由事件  $A$  与  $B$  的所有样本点组成的新事件, 或者事件  $A$  与  $B$  至少有一个发生;
- **交 (积)**: 记为  $A \cap B$ , 由事件  $A$  与  $B$  的公共样本点组成的新事件, 或者事件  $A$  与  $B$  同时发生。

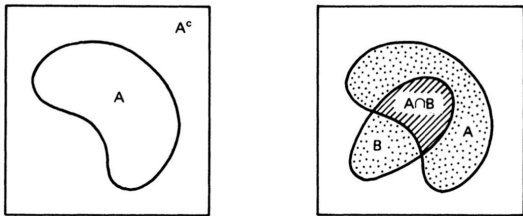


图 2: 事件的补, 并与交

## 事件间的运算: 多个并

事件的并可推广到多个 (有限或可列无限) 事件的情形.

- 令  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并为  $C$ , 记为

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{i=1}^n A_i = \{A_1 \text{ 发生}, A_2 \text{ 发生}, \dots, A_n \text{ 发生}\} \\ &= \{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 中至少发生一个}\}. \end{aligned}$$

对可列无限个事件  $A_1, A_2, \dots$ , 可类似地定义其并  $C$ , 记为

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{A_1, A_2, \dots \text{ 中至少发生一个}\}.$$

- 设  $A_i$  表示某城市某月交通事故发生  $i$  次.
  - $C_1 \equiv \{\text{该月发生交通事故不超过 10 次}\}$ , 则  $C_1 = \bigcup_{i=0}^{10} A_i$ .
  - $C_2 \equiv \{\text{该月发生交通事故 10 次及以上}\}$ , 则  $C_2 = \bigcup_{i=10}^{\infty} A_i$ .

## 事件间的运算: 多个交

事件的交可推广到多个 (有限或可列无限) 事件的情形.

- 令  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交为  $C$ , 记为

$$C = \bigcap_{i=1}^n A_i = \{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 都发生}\}.$$

对可列无限个事件  $A_1, A_2, \dots$ , 可类似地定义其并  $C$ , 记为

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{A_1, A_2, \dots \text{ 都发生}\}.$$

## 事件的运算: 差

- **差**: 记为  $A - B$  或  $A \setminus B$ , 由在事件  $A$  中而不在  $B$  中的样本点组成的新事件, 或者事件  $A$  发生且事件  $B$  不发生。
- 差事件可以将整个  $A \cup B$  分解成 3 个互不相容的三个部分  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  与  $A \cap B$ 。
- $A \setminus B$  表示为  $A\bar{B}$ 。

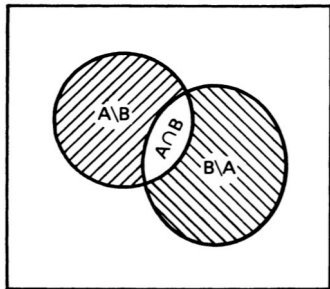


图 3: 事件的差

## 事件的运算律：交换，结合与分配律

- **交换律**:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- **结合律**:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **分配律**:  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$   
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

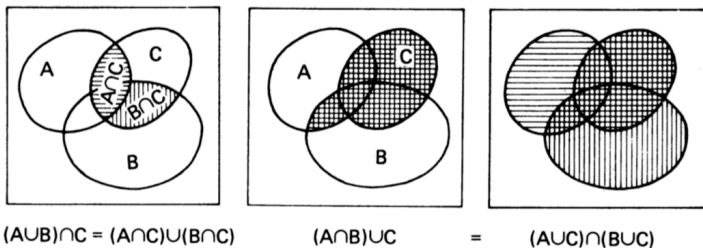


图 4: 事件的分配律

## 事件的运算律: 对偶律

**德摩根律**又称为对偶律, 可以表示为 (可以推广到可列个事件):

- 事件并的对立等于对立的交:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ , (☺)
- 事件交的对立等于对立的并:  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

**证明中多用韦恩图!**

**证明 (☺)**

- (1) 设  $x \in \overline{A \cup B}$ , 即  $x \notin A \cup B$ , 表明  $x$  既不属于  $A$  也不属于  $B$ , 这意味着  $x \notin A$  和  $x \notin B$  同时成立, 即  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ , 则  $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ;
  - (2) 设  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ , 即  $x \in \bar{A}$  和  $x \in \bar{B}$  同时发生, 这意味着  $x \notin A$  和  $x \notin B$ , 即  $x \in \overline{A \cup B}$ , 则  $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ ;
- 综上,  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 。



## 事件的运算律: 练习

### 练习 1.1

设  $A$ ,  $B$  与  $C$  为三个事件, 则事件的减法是否满足结合率, 即  $(A \setminus B) \setminus C$  是否等于  $A \setminus (B \setminus C)$ ?

### 练习 1.2

证明  $A$ ,  $B$  与  $C$  两两互不相容, 则有  $ABC = \emptyset$ , 反之不真。

### 练习 1.3

甲、乙、丙三人各射击一次,  $A_1, A_2, A_3$  分别表示甲、乙、丙射击命中目标, 请表述下列事件所表示的结果。

$\overline{A_2}$ ,  $A_2 \cup A_3$ ,  $\overline{A_1 A_2}$ ,  $\overline{A_1 \cup A_2}$ ,  $A_1 A_2 \overline{A_3}$ ,  $A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3$ .

P23: 1.1, 1.2, 1.3

## 1.2 事件的概率

---

# 事件的频率：定义

## 定义 2.1

设  $A$  是一个事件, 在相同条件下, 进行  $n$  次试验. 在这  $n$  次试验中, 若事件  $A$  发生了  $m$  次, 则称  $m$  为事件  $A$  在  $n$  次试验中发生的频率或次数, 称  $m$  与  $n$  之比  $m/n$  为事件  $A$  在  $n$  次试验中发生的频率, 记为  $f_n(A)$ .

## 性质 2.1

频率满足如下性质:

- (1)  $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ;
- (2)  $f(\Omega) = 1, f_n(\emptyset) = 0$ ;
- (3) 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  两两互斥, 即对  $i \neq j, A_i A_j = \emptyset$ , 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i).$$

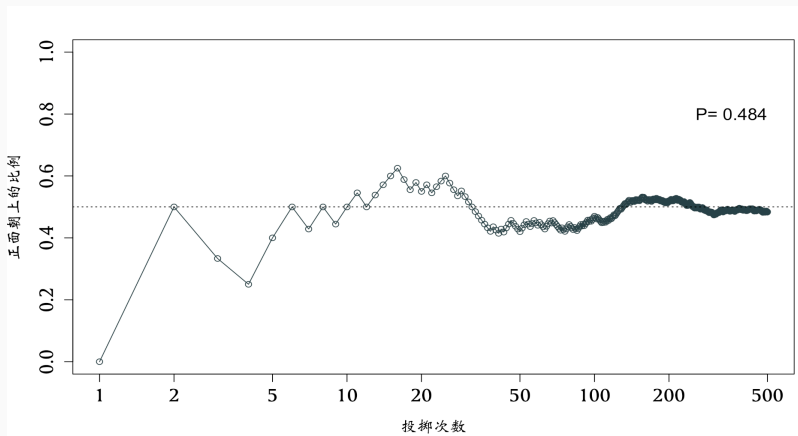
## 事件的频率：历史上的投硬币试验

表 1: 历史上投硬币的若干试验结果，频率都接近于 0.5

试验者	投硬币次数	出现正面的次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

频率的稳定性 → 统计规律性 → 概率!

## 事件的频率：投硬币的数值试验 (图像)



**图 5:** 投 500 次质地均匀的硬币试验，横坐标为投掷次数，纵坐标为每次试验后正面朝上的比例，频率最终为  $P=0.484$ 。

# 事件的概率：定义

## 定义 2.2

设  $E$  是随机试验,  $\Omega$  是其样本空间. 对每个事件  $A$ , 定义一个实数  $P(A)$  与之对应. 若函数  $P(\cdot)$  满足条件:

- (1) 对于每个事件  $A$ , 均有  $P(A) \geq 0$ ;
- (2)  $P(\Omega) = 1$ ;
- (3) 若事件  $A_1, A_2, \dots$  两两互斥, 即对  $i \neq j$ ,  $A_i A_j = \emptyset$ , 均有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots,$$

则称  $P(A)$  为事件  $A$  的概率.

☕ 函数  $P(\cdot)$  是一个集函数.

# 事件的概率：性质

## 性质 2.2

不可能事件的概率为 0,  $P(\emptyset) = 0$ .

## 性质 2.3

概率具有有限可加性, 即若  $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$ , 则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

## 性质 2.4

对任何事件  $A$ , 有  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$



### 性质 2.5

如果  $B \subset A$ , 则  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ . 一般地,

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

证: 将事件  $A$  分解成互不相交的两部分:  $A = AB + A\bar{B}$ .

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A - AB) \Rightarrow P(A) - P(AB).$$

若  $B \subset A, B = AB \Rightarrow P(AB) = P(B)$ . □

## 事件的概率: 性质 (例子)

### 例 2.1

袋中有  $n$  个球, 编号  $1, 2, \dots, n$ . 有放回任取  $m$  个球, 求取出的球中最大编号为  $k$  的概率.

解: 设  $A_k$  表示取出球的最大编号为  $k$ . 注意到  $k$  不知其位置, 不易计算. 将上述问题转换为: 设  $B_k$  表示**取出的最大编号小于等于  $k$** . 选出的  $m$  个球的编号从  $1, 2, \dots, k$  选一个即可, 共有  $k^m$  种情况. 注意到,  $A_k = B_k - B_{k-1}$ ,  $B_{k-1} \subset B_k$ , 则

$$P(A_k) = P(B_k - B_{k-1}) = P(B_k) - P(B_{k-1}) = \frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m}.$$



## 事件的概率：性质

### 性质 2.6 (加法公式)

对任何事件  $A, B$ , 有  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .

### 例 2.2 (布尔不等式)

(1)  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \forall A, B$

(2)  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \forall A_1, A_2, \dots$

证: 将事件  $A_1, A_2, \dots$  重新划分为

$$A_1^* = A_1, A_i^* = A_i \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right), i = 2, 3, \dots$$

易验证不同的  $A_i^*$  是不交的, 且  $A_i^* \subset A_i$ . 因此,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^*) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

## 事件的概率：加法公式的一般形式

### 性质 2.7 (多除少补公式)

对  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 有对  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

### 练习 2.1

设  $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$ ,  $P(B \cap C) = P(A \cap C) = 1/6$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 试验证:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

## 事件的概率：加法公式的一般形式 (例子)

### 例 2.3

设每封信都有一个匹配的信封. 将  $n$  封信随机装进  $n$  个信封. 求至少有一封信匹配的概率.

解: 设  $A_k$  表示将第  $k$  封信装进第  $k$  个信封中, 则至少有一封信匹配为事件  $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ .

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, P(A_i A_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \cdots, P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= \binom{n}{1} \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

□

P23, 1.4-1.5.

## 1.3 古典概率模型

---

## 古典概率：思路

古典概率的基本假设：

- 有限个样本点，譬如  $n$  个.
- 每个样本点发生的可能性相等 (等可能).

若试验  $E$  的样本空间  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , 且每个基本事件发生的可能性相同:

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}).$$

由基本事件两两互斥, 且  $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\} = \Omega$ , 得

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}) \\ &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_n\}) \\ &= nP(\{\omega_1\}), \end{aligned}$$

则

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$



## 定义 3.1

若事件  $A$  包含  $k$  个基本事件, 即

$$A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\},$$

其中  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ , 得古典概率计算方法

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{\omega_{j_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

☕ 容易验证, 上式确定的概率满足概率公理化定义。非负性和规范性是显然的, 可加性的证明如下: 当  $A$  与  $B$  互不相容时, 计算  $A \cup B$  的样本点个数可以分别计算  $A$  与  $B$  的样本点个数再相加, 即  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

## 计数方法：乘法原理和加法原理

若进行  $A_1$  过程有  $n_1$  种方法，进行  $A_2$  过程有  $n_2$  种方法。

**乘法原理：** 进行  $A_1$  过程后接着进行  $A_2$  过程共有  $n_1 \times n_2$  种方法。

**加法原理：** 假定  $A_1, A_2$  过程是并行的，进行两过程共有  $n_1 + n_2$  种方法。

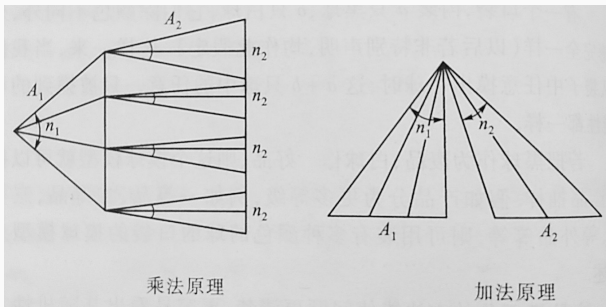


图 6: 乘法原理和加法原理

# 计数方法：排列与组合

从一个装有  $n$  个不同球的袋子里抽出  $r$  个球，按照抽样方法 (不放回/放回) 和是否考虑顺序 (有序/无序) 分为四种情况，如下表所示：

- **排列**：不放回，有序
- **重复排列**：放回，有序
- **组合**：不放回，无序
- **重复组合**：放回，无序

表 2: 从  $n$  个球种选  $r$  个的情况

	不放回	放回
有序	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$n^r$
无序	$\binom{n}{r}$	$\binom{n-1+r}{r}$

## 计数方法：重复组合的算法

可以假设  $n$  个元素为  $n$  个盒子 ( $n+1$  个火柴棒)，如果第  $i$  个元素取到过一次，则此盒子中用 “○” 表示，如下所示

$$| \bigcirc \bigcirc | | \bigcirc | \cdots | \bigcirc \bigcirc |$$

上图意味着，第一个元素取到过 2 次，第二个元素取到过 0 次，第三个元素取到过 3 次， $\cdots$ ，第  $n$  个元素取到过 3 次。共取了  $r$  个，所以有  $r$  个 “○”， $n+1$  个 “|”。注意最两边的 “|” 没办法移动，总共就有  $n-1+r$  个位置，其中选  $r$  个球或者  $n-1$  根棒即可。这个问题等价于方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

非负数解的个数，都是  $\binom{n-1+r}{r}$ 。

### 例 3.1

掷一枚匀称骰子, 设  $A$  表示所掷结果为“四点或五点”,  $B$  表示所掷结果为“偶数点”. 求  $P(A)$  和  $P(B)$

解: 设  $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, \dots, A_6 = \{6\}$  分别表示所掷结果为“一点”, “两点”,  $\dots$ , “六点”.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $A_1, A_2, \dots, A_6$  为所有不同的基本事件, 且它们发生的概率相同.

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6) = \frac{1}{6}.$$

- $A = A_4 \cup A_5, B = A_2 \cup A_4 \cup A_6,$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

### 例 3.2

货架上有外观相同的商品 15 件, 其中 12 件来自产地甲, 3 件来自产地乙. 现从 15 件商品中随机地抽取两件, 求这两件来自同一产地的概率.

解: 来自同一产地可分解为: 事件  $A_1$  均来自产地甲和事件  $A_2$  均来自产地乙, 且  $A_1$  与  $A_2$  互斥.

- $\Omega$ : 组合 (不放回, 无序). 从 15 件产品中抽取 2 件, 共有

$$n = \binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105.$$

- 事件  $A_1$  中包含的基本事件数

$$k_1 = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66.$$

## 抽样模型：商品例子

- 事件  $A_2$  中包含的基本事件数

$$k_2 = \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3.$$

- 事件  $A = \{\text{两件产品来自同一产地}\} = A_1 \cup A_2$ ,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \\ &= \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = \frac{69}{105} \\ &= \frac{23}{35}. \end{aligned}$$



### 例 3.3

有外观相同的三极管 6 只, 按电流放大系数分类, 4 只属于甲类, 2 只属于乙类. 试按下列两种方案抽取三极管两只, 求下列事件  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  的概率, 这里

$A = \{\text{抽到两只甲类三极管}\}$ ,  $B = \{\text{抽到两只同类三极管}\}$ ,

$C = \{\text{至少抽到一只甲类三极管}\}$ ,  $D = \{\text{抽到两只不同类三极管}\}$ .

抽取方案

- (1) 每次抽取一只, 测试后放回; 然后再抽取下一只 (放回抽样).
- (2) 每次抽取一只, 测试后不放回; 然后在剩下的三极管中再抽取下一只 (不放回抽样).



## 抽样模型：三极管例子

解: (1) 放回抽样. 第一次有 6 种取法, 放回后, 第二次仍有 6 种取法, 共有  $6 \times 6 = 36$  种.

- $A$  两次均抽到甲共有  $4 \times 4 = 16$ ,  $P(A) = 16/36 = 4/9$ .
- $\bar{C}$  = 抽到两只乙类共有  $2 \times 2 = 4$ ,  $P(\bar{C}) = 4/36 = 1/9$ ,  
 $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 8/9$ .
- $B = A \cup \bar{C}$ , 且  $A$  与  $\bar{C}$  互斥, 得

$$P(B) = P(A) + P(\bar{C}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

- $D = \bar{B}$ , 得

$$P(D) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

## 抽样模型：三极管例子

(2) 不放回抽样. 第一次有 6 种取法, 不放回后, 第二次仍有 5 种取法, 共有  $6 \times 5 = 30$  种.

- $A$  两次不放回抽到甲共有  $4 \times 3 = 12$ ,  $P(A) = 12/30 = 2/5$ .
- $\bar{C}$  = 两次不放回抽到甲共有  $2 \times 1 = 2$ ,  $P(\bar{C}) = 2/30 = 1/15$ ,  
 $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 14/15$ .
- $B = A \cup \bar{C}$ , 且  $A$  与  $\bar{C}$  互斥, 得

$$P(B) = P(A) + P(\bar{C}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

- $D = \bar{B}$ , 得

$$P(D) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

□

## 抽样模型：盒子例子

### 例 3.4

设有  $n$  个球，每个球都等可能地被放到  $N$  个不同盒子中的一个，每个盒子放球数不限，试求：

- (1) 指定的  $n(n \leq N)$  个盒子中各有一个球的概率  $P(A_1)$ ;
- (2) 恰有  $n(n \leq N)$  个盒子各有一球的概率  $P(A_2)$ 。

- $\Omega$ : 重复排列，每个球有  $N$  中放法，共有  $N^n$ ;
- $A_1$ : 指定  $n$  个盒子有 1 种，将  $n$  个球放入是一个排列，共有  $n!$ ;
- $A_2$ : 从  $N$  个盒子中选  $n$  个，有  $C_N^n$  种情况，再将其排列，有  $n!$ 。

$$P(A_1) = \frac{n!}{N^n}, \quad P(A_2) = \frac{C_N^n n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N - n)!}.$$



## 抽样模型：生日问题

### 例 3.5

64 个人中，至少有两个人生日相同的概率是？

这个问题其实就是盒子问题，生日问题的反面就相当于  $n = 64$  个球放到  $N = 365$  盒子中，恰有 64 个盒子各有一个球的盒子。

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{365}^{64} 64!}{365^{64}} \approx 0.997.$$

这个结果是出乎意外的，如果考虑  $n$  个人，至少两个人生日相同的概率得到下表：

表 3:  $P(A)$  的近似值

$n$	10	20	30	40	50	60
$P(\bar{A})$	0.8840	0.5942	0.3037	0.1180	0.0349	0.0078
$P(A)$	0.1160	0.4058	0.6963	0.8820	0.9651	0.9922

### 例 3.6

有白色乒乓球 12 只, 黄色乒乓球 3 只. 现将它们随机地分装在 3 个盒子中, 每盒装 5 只. 设  $A = \{\text{每盒中恰有一只黄色球}\}$ ,  $B = \{\text{三只黄色球都在同一个盒中}\}$ . 试求  $P(A)$  和  $P(B)$ .

解: 把  $n$  个物品分成  $k$  组, 第一组恰有  $n_1$  个, 第二组恰有  $n_2$  个,  $\dots$ , 第  $k$  组恰有  $n_k$  个. 设  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , 则不同分组方法共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

种情况.

## 抽样模型：乒乓球例子

(1) 将 15 只球分成 3 组, 每组 5 只, 共有  $\frac{15!}{5!5!5!}$ . 每种装法等可能, 基本事件总数为  $\frac{15!}{5!5!5!}$ .

• A 每个盒中恰有一只黄球, 将事件分解:

- (1) 先将 3 只黄球分到 3 个盒子中, 每个盒子有 1 只, 共有  $\frac{3!}{1!1!1!}$ .
- (2) 将 12 只白球分到 3 个盒子中, 每个盒子有 4 只, 共有  $\frac{12!}{4!4!4!}$ .
- (3) 利用乘法原理, 共有

$$\frac{3!}{1!1!1!} \times \frac{12!}{4!4!4!} = \frac{3!12!}{4!4!4!}$$

• 计算

$$P(A) = \frac{3!12!}{4!4!4!} / \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{25}{91}.$$

$$(2) \text{ 同理, } P(B) = \frac{3 \times 12!}{2!5!5!} / \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{6}{91}.$$

□

### 例 3.7

设  $N$  件产品中有  $K$  件次品,  $N - K$  件是正品,  $K < N$ . 现从  $N$  件中每次任意抽取 1 件产品, 在检查过它是正品或次品后再放回. 抽取  $n$  次,  $n \leq K, n \leq N - k$ , 求事件  $A = \{n \text{ 件产品中恰有 } k \text{ 件次品}\}$  的概率,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

解: 每次有放回地从  $N$  件产品中抽取 1 件, 共有  $N^n$  种取法, 且每种取法出现的可能性相同. 基本事件的总数为  $N^n$ . 利用乘法原理将事件分解:

- (1) 将  $n$  件产品想成  $n$  个盒子, 从中选  $k$  个将要装入次品的盒子, 共有  $\binom{n}{k}$  种.
- (2) 从  $K$  件次品中有放回地选  $k$  件次品, 共有  $K^k$  种.

## 抽样模型：次品例子

(3) 从  $N - K$  件次品中有放回地选  $n - k$  件次品, 共有  $(N - K)^{(n-k)}$  种.

由此可知,  $A$  共包含

$$\binom{n}{k} K^k (N - K)^{n-k}$$

个基本事件. 从而

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{n}{k} K^k (N - K)^{n-k}}{N^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

□



P23, 1.6-1.10.

## 1.4 条件概率

---

## 条件概率：引例

### 例 4.1

设 100 件产品中有 5 件是不合格产品, 5 件不合格产品中又有 3 件是次品, 2 件是废品. 现从 100 件产品中任意抽取一件, 假定每件产品被抽到的可能性都相同, 求

- (1) 抽到的产品是次品的概率.
- (2) 在抽到的产品是不合格品的条件下, 产品是次品的概率.

解: 设  $A = \{\text{抽到产品是次品的概率}\}$ ,  $B = \{\text{抽到产品是不合格品}\}$ .

(1) 由于 100 件产品中有 3 次是次品, 得  $P(A) = 3/100$ .

(2) 由于 5 件不合格品中有 3 件是次品, 得  $P(A|B) = 3/5$ . □

☕ 虽然这两个概率不同, 但二者之间应当有一定的关系. 如  $P(B) = 5/100$ , 而

$$P(A|B) = \frac{3}{5} = \frac{3}{100} / \frac{5}{100} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

## 条件概率: 定义

设  $A$  与  $B$  是样本空间  $\Omega$  中的两个事件, 若  $P(B) > 0$ , 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为“在  $B$  发生下  $A$  的条件概率”, 简称**条件概率**.

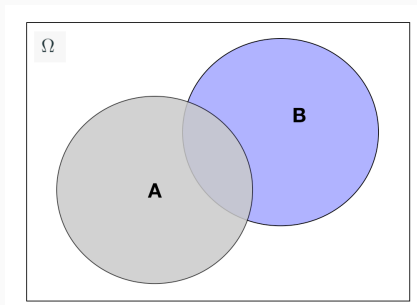


图 7: 条件概率

## 条件概率：性质

### 性质 4.1

条件概率也是概率, 即若设  $P(B) > 0$ , 则

- (1) 对每个事件  $A$ ,  $P(A|B) \geq 0$ .
- (2)  $P(\Omega|B) = 1$ .
- (3) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B).$$

概率的性质都可以推广到条件概率:

- $P(\emptyset|B) = 0, P(\Omega|B) = P(B|B) = 1$ ;
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$ ;
- $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$ .

## 条件概率：性质 (续)

证: (3) 若  $A_1, A_2, \dots$  两两互斥, 则对每个  $i \neq j$ , 有  $A_i A_j = \emptyset$ . 再由事件积的运算性质,

$$(A_i B)(A_j B) = (A_i A_j)B = \emptyset B = \emptyset.$$

于是,  $A_1 B, A_2 B, \dots$  也两两互斥, 则

$$\begin{aligned} P((A_1 \cup A_2 \cup \dots | B)) &= \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup \dots)B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((A_1 B) \cup (A_2 B) \cup \dots)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} + \dots \\ &= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) + \dots. \end{aligned}$$

### 例 4.2

设  $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$ . 求  $P(B|(A \cup \bar{B}))$ .

解:

$$\begin{aligned} P(B|(A \cup \bar{B})) &= \frac{P(B \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} \\ &= \frac{P(AB \cup \emptyset)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} \\ &= \frac{P(A) - P(A\bar{B})}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} \\ &= \frac{1 - 0.3 - 0.5}{1 - 0.3 + 1 - 0.4 - 0.5} \\ &= \frac{1}{4} = 0.25. \end{aligned}$$



### 例 4.3

考虑一个家庭有两个孩子, 其样本空间为  $\Omega = \{\{\text{男孩, 男孩}\}; \{\text{男孩, 女孩}\}; \{\text{女孩, 男孩}\}; \{\text{女孩, 女孩}\}\}$ . 设事件  $A = \text{“家中至少有一个女孩”}$  发生的概率, 事件  $B = \text{“家中至少有一个男孩”}$  发生, 试求  $A|B$  发生的条件概率.

解: **(1) 缩小空间法**. 事件  $B$  发生, 则样本空间被缩减为

$$\Omega_B = \{\{\text{男孩, 男孩}\}; \{\text{男孩, 女孩}\}; \{\text{女孩, 男孩}\}\},$$

共 3 种情况. 这时事件  $A$  发生, 只有  $\{\{\text{男孩, 女孩}\}; \{\text{女孩, 男孩}\}\}$  共 2 种情况, 则  $P(A|B) = 2/3$ .

**(2) 公式法**. 事件  $A \cap B$  为  $\{\{\text{男孩, 女孩}\}; \{\text{女孩, 男孩}\}\}$ ,  $P(A \cap B) = 2/4 = 1/2$ , 则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

□



# 乘法公式

## 定义 4.1 (乘法公式)

若  $A$  和  $B$  是两个事件, 当  $P(B) > 0$  时, 有

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

同理, 当  $P(A) > 0$  时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

称上式为概率的乘法公式.

## 性质 4.2

乘法公式可推广到多个事件, 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $n$  个事件, 当  $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$  时, 有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

### 例 4.4

一批灯泡共 100 只, 其中 10 只是次品, 其余为正品. 作不放回抽取, 每次抽取一只, 求第三次才取到正品的概率.

解: 设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到正品}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $A = \{\text{第三次才取到正品}\}$ , 则  $A = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ , 于是

$$\begin{aligned}P(A) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \\&= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \cdot P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) \\&= \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} \times \frac{90}{98} = 0.0083.\end{aligned}$$

所以, 第三次才取到正品的概率为 0.0083.

□

## 乘法公式: 袋子模型

### 例 4.5

袋中有同型号小球  $b+r$  个, 其中  $b$  个是黑球,  $r$  个是红球. 每次从袋中任取一球, 观其颜色后放回, 并再放入同颜色、同型号球  $c$  个. 若  $B = \{\text{第一、第三次取到红球, 第二次取到黑球}\}$ , 求  $P(B)$ .

解: 设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到红球}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 则  $B = A_1\bar{A}_2A_3$ , 于是

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\bar{A}_2A_3) \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+(r+c)} \cdot \frac{(r+c)}{(b+c)+(r+c)} \\ &= \frac{rb(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}. \end{aligned}$$

□

# 全概率公式: 划分

**划分:** 设事件  $B_1, \dots, B_n$  满足:

(1)  $B_i B_j = \emptyset, i \neq j,$

(2)  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega.$

则称  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分.

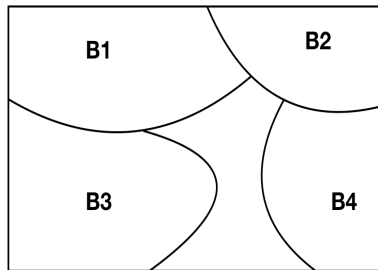


图 8: 样本空间的划分

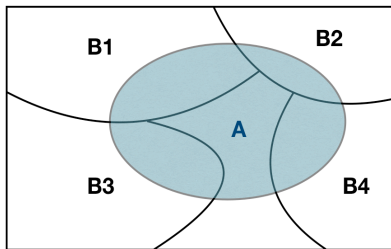
★ 若  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  的一个划分, 则每次试验中, 事件  $B_1, B_2, \dots, B_n$  中必有一个且仅有一个发生.

# 全概率公式: 定义

## 定理 4.1 (全概率公式)

设  $\Omega$  为试验  $E$  的样本空间, 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  的一个划分, 如果  $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则对任一事件  $A$  有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i).$$



## 例 4.6

一批同型号的螺钉由编号 1, 2, 3 的三台机器共同生产, 各台机器生产的螺钉占这批螺钉的比例分别为 35%, 40% 和 25%, 各台机器生产的螺钉的次品率分别为 3%, 2%, 1%. 求该批螺钉的次品率.

解: 设  $A = \{\text{螺钉是次品}\}$ ,  $B_i = \{\text{螺钉由 } i \text{ 号机器生产}\}$ , 则

$$P(B_1) = 0.35, \quad P(B_2) = 0.40, \quad P(B_3) = 0.25,$$

$$P(A|B_1) = 0.03, \quad P(A|B_2) = 0.02, \quad P(A|B_3) = 0.01.$$

由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0.35 \times 0.03 + 0.40 \times 0.02 + 0.25 \times 0.01 = 0.021. \end{aligned}$$

这批螺钉的次品率为 0.021.



### 例 4.7

为调查运动员中服用兴奋剂的比率  $p$ , 设计问卷: 请在心中想好一个整数, 如果 (1) 是奇数时, 请回答: 你选的是奇数吗? (2) 是偶数时, 请回答: 你用兴奋剂吗? 请勾选“是”或“否”. 若在被调查的 200 个运动员中, 有 115 个回答“是”. 如何计算出  $p$ ?

解: 设事件  $A$  为回答“是”, 事件  $B$  为选奇数, 则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= 1 \times 0.5 + p \times 0.5. \end{aligned}$$

由此,

$$\frac{115}{200} \approx P(A) = 0.5 + 0.5p \Rightarrow \hat{p} = 0.15.$$



## 贝叶斯公式: 定义

### 定理 4.2 (贝叶斯公式)

设  $\Omega$  是样本空间,  $A$  为一个事件,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为  $\Omega$  的一个划分, 如果  $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

证明: 由条件概率公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}.$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 注意到分子使用条件概率公式, 分母使用了全概率公式. □



### 例 4.8 (续例 4.6)

现从该批螺钉中抽到一颗次品, 是问这颗螺钉由 1, 2, 3 号机器生产的概率各是多少?

解: 由贝叶斯公式

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)} \\ &= \frac{0.35 \times 0.03}{0.35 \times 0.03 + 0.40 \times 0.02 + 0.25 \times 0.01} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

同理, 可得

$$P(B_2|A) = \frac{8}{21}, \quad P(B_3|A) = \frac{5}{42}.$$

此螺钉由 1, 2, 3 号机器生产的概率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{8}{21}, \frac{5}{42}$ .

## 例 4.9

一种新方法检测出某种疾病的概率是百分之百, 但是把没病的人判定有病的概率达到百分之五. 设该群体中该病的发病率是万分之一. (1) 甲在身体普查中被判断患病, 甲的确患病的概率是多少? (2) 甲再次复查又被判断有病时, 甲的确患病的概率是多少?

解: (1) 设甲的确患病为事件  $A$ , 甲被判断有病的事件为  $B$ , 则

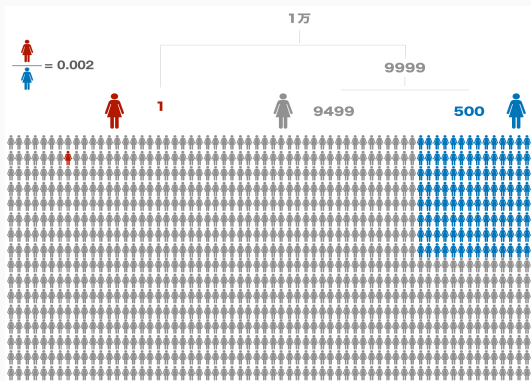
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{1 \times 0.0001}{1 \times 0.0001 + 0.05 \times 0.9999} \approx 0.002.$$

(2) 再次复查时甲患病的概率不再是万分之一, 而是千分之二. 所以

$$P(A|B') = \frac{P(B'|A)P(A)}{P(B'|A)P(A) + P(B'|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{1 \times 0.002}{1 \times 0.002 + 0.05 \times 0.998} \approx 0.0385.$$

## 贝叶斯公式: 例子 (续)

即便是正确很高的检测手段, 仍旧只有不到千分之一的正确率. 本质上是因为发病率低. 假设我们现在有 1 万个人, 用红色小人代表患病的人, 蓝色小人代表没有患病却被检测出患病的人. 下图揭示了整个问题的本质 (小人的比例没有严格按照题中数据).



### 例 4.10

设昆虫产  $k$  个卵的概率为  $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$  ( $\lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ ). 每个卵能孵化成幼虫的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 且各个卵能否孵化成幼虫是相互独立的, 求: (1) 该昆虫有后代的概率; (2) 该昆虫养出  $i$  只幼虫的概率; (3) 若某昆虫养出了  $i$  只幼虫, 求它产了  $k$  个卵的概率.

解: (1) 设  $A$  = 该昆虫有后代,  $B_k$  = 该昆虫产  $k$  个卵 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 易知: 事件组  $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$  是一完备事件组, 则

$$P(B_k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$\bar{A}$  = 该昆虫没有后代 = 每个卵都没孵化成幼虫, 则有

$$P(\bar{A}|B_k) = (1-p)^k, k = 0, 1, 2, \dots.$$

## 三大公式综合练习 (续)

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k)P(\bar{A}|B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(1-p)^k \\&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

由此,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - e^{-\lambda p}.$$

或者考虑  $A|B_k$ ,

$$\begin{aligned}P(A|B_k) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_k)P(A|B_k) = \sum_{i=1}^k \binom{n}{k} p^i (1-p)^{k-i} = 1 - (1-p)^k, \\P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)P(A|B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} [1 - (1-p)^k] \\&= e^{-\lambda} [(e^{\lambda} - 1) - (e^{\lambda(1-p)} - 1)] = 1 - e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

## 三大公式综合练习 (续)

(2) 设  $A_i$  = 该昆虫养出  $i$  只幼虫, 由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k)P(A_i|B_k) \\ &= \sum_{k=i}^{\infty} P(B_k)P(A_i|B_k) \\ &= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p}, i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(3) 由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned} P(B_k|A_i) &= \frac{P(B_k)P(A_i|B_k)}{P(A_i)} \\ &= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}}{\frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p}} \\ &= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k i!}{k!} \frac{k!}{i!(k-i)!} p^i (1-p)^{k-i}}{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}} \\ &= \frac{[\lambda(1-p)]^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda(1-p)}. \end{aligned}$$

其中,  $i = 0, 1, 2, \dots, k = i, i+1, \dots$ .

□

P23, 1.13-1.15, 1.17, 1.18, 1.20, 1.22.



## 1.5 事件的独立性

---

## 事件的独立性: 定义

### 定义 5.1

对事件  $A, B$ , 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称  $A, B$  统计独立的, 简称独立的. 否则称  $A$  与  $B$  不独立或相依.

### 例 5.1

设试验  $E$  为掷甲、乙两枚硬币, 观察正反面出现情况. 设  $A$  表示甲币出现正,  $B$  乙币出现反, 分别求事件  $A, B, AB$  发生的概率.

解:  $P(A) = P(B) = 1/2, P(AB) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 = P(A)P(B)$ . 所以事件  $A, B$  独立. □

## 事件的独立性: 性质

### 性质 5.1

若事件  $A$  与  $B$  独立, 则事件  $\{\bar{A}, B\}$ ,  $\{A, \bar{B}\}$ ,  $\{\bar{A}, \bar{B}\}$  相互独立.

证明: 由于

$$\begin{aligned}P(\bar{A}B) &= P(B - AB) = P(B) - P(AB) \\&= P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] \\&= P(\bar{A})P(B).\end{aligned}$$

所以,  $\bar{A}$  与  $B$  相互独立. 同理,  $A$  与  $\bar{B}$  相互独立. 由此,  $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  相互独立. 也可以由下式得到独立性:

$$\begin{aligned}P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) \\&= P(\bar{A})P(\bar{B}).\end{aligned}$$

□

## 事件的独立性: 性质的例子

### 例 5.2

甲乙两射手独立地射击同一目标, 它们击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8. 求每人射击一次后, 目标被击中的概率.

解: 设  $A = \{\text{甲击中目标}\}$ ,  $B = \{\text{乙击中目标}\}$ , 则  $P(A) = 0.9$ ,  $P(B) = 0.8$ . 目标被击中, 可转换为事件“两人中至少有一人击中”, 即  $A \cup B$ . 由于  $A$  和  $B$  独立, 则

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\&= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\&= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98.\end{aligned}$$

另外,  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ . 由于  $A$  和  $B$  独立, 所以  $\bar{A}$  和  $\bar{B}$  相互独立, 则

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0.98.$$



## 事件的独立性: 性质的例子

### 例 5.3

已知事件  $A, B, C$  相互独立,  $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(C) = 0.8$ , 求  $P\{C - (A - B)\}$  和  $P\{(C - A) + B\}$ .

解: 先拆解事件

$$C - (A - B) = C \cap \overline{(A \cap \bar{B})} = C \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A}C \cup BC.$$

所以,

$$\begin{aligned} P(C - (A - B)) &= P(\bar{A}C \cup BC) = P(\bar{A}C) + P(BC) - P(\bar{A}BC) \\ &= P(\bar{A})P(C) + P(B)P(C) - P(\bar{A})P(B)P(C) \\ &= 0.7 \times 0.8 + 0.4 \times 0.8 - 0.7 \times 0.4 \times 0.8 \\ &= 0.656. \end{aligned}$$

## 事件的独立性: 性质的例子 (续)

再拆解事件

$$(C - A) + B = \bar{A}C \cup B.$$

所以,

$$\begin{aligned} P((C - A) + B) &= P(\bar{A}C \cup B) = P(\bar{A}C) + P(B) - P(\bar{A}BC) \\ &= P(\bar{A})P(C) + P(B) - P(\bar{A})P(B)P(C) \\ &= 0.7 \times 0.8 + 0.4 - 0.7 \times 0.4 \times 0.8 \\ &= 0.736. \end{aligned}$$

注意到事件  $C - (A - B) \neq (C - A) + B$ . 这是因为集合的加减法是由交、并、补定义出来的. 减法是交、补运算, 加法是并运算, 这里涉及到集合的分配律, 而不是结合律. □

## 事件的独立性: 三个事件的独立性

### 定义 5.2

对于三个事件  $A, B, C$ , 若下列四个等式同时成立, 则称它们相互独立.

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

☕ 若只是前三个等式成立, 则事件  $A, B, C$  两两独立. 注意, 三个事件两两独立并不能推出三个事件相互独立, 即第四个等式可能不成立. 反之, 第四个等式一般也不能推出前三个等式成立.

## 事件的独立性: 伯恩斯坦反例

### 例 5.4

一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 第四面同时染上红、白、黑三种颜色. 现以  $A, B, C$  分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件, 分别求事件  $A, B, C, AB, AC, BC, ABC$  的概率.

解: 由于四面体中由红、白、黑的面数都是两面, 所以

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

显然, 事件  $AB, AC, BC, ABC$  发生只有一种情况

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = \frac{1}{4}.$$

由此,  $A, B, C$  两两独立, 但

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

所以, 事件  $A, B, C$  不相互独立. □



## 事件的独立性: $n$ 个事件的独立性

### 定义 5.3

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个事件,  $n \geq 2$ , 若对其中的任意  $k(\geq 2)$  个事件  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , 等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

总成立, 则称事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立.

### 性质 5.2

- (1) 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 则  $A_1, A_2, \dots, A_n$  中任意  $k(\geq 2)$  个事件  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  也相互独立.
- (2) 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 则  $B_1, B_2, \dots, B_n$  也相互独立, 其中  $B_i$  或为  $A_i$  或为  $\bar{A}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## 事件的独立性: 独立性与小概率事件

### 例 5.5

设每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%, 求 100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率.

解: 设这 100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒为事件  $A$ , 第  $i$  个人的血清中含有肝炎病毒为事件  $A_i, i = 1, 2, \dots, 100$ . 可以认为  $A_i$  相互独立, 所求概率为  $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{100})$ , 则

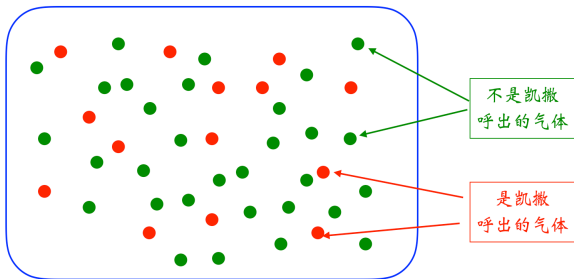
$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{100}) \\ &= 1 - (1 - P(A_1))^{100} = 1 - 0.996^{100} \approx 0.33. \end{aligned}$$

★ 小概率原理: 一次试验中小概率事件不会发生. 但重复多次独立事件发生的概率大大增加! □

# 事件的独立性: 凯撒的最后一口气

## 例 5.6

科学家统计大气中总共有  $10^{44}$  个分子, 而人每次呼气、吸气均产生约为  $2 \times 10^{22}$  个分子. 公元前 44 年, 罗马皇帝凯撒被布鲁图为首的元老院刺杀. 按照莎士比亚的戏剧, 凯撒在临死前喊出了一句 "*Et tu, Brute?*" 他呼出了  $2 \times 10^{22}$  个分子. 假设 2000 多年来大气中分子的总量没有改变, 但经过了充分的搅拌, 完全随机地分布在大气中. 请你现在吸一口气, 请问你吸入凯撒临终前呼出的气体中一个分子的概率是多少?



## 事件的独立性: 凯撒的最后一口气

解: 如果将凯撒呼出的  $2 \times 10^{22}$  个分子编号  $1, 2, \dots, n, n = 10^{22}$ , 设  $A_i, i = 1, 2, \dots, n$  表示你吸一口气含有第  $i$  个分子, 再设  $A$  表示吸入的气体至少含有一个凯撒的分子, 则

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \bar{A}_n)$$

显然,

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1) &= (10^{44} - 2 \times 10^{22})/10^{44}, \\ P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) &= (10^{44} - 2 \times 10^{22} - 1)/(10^{44} - 1), \\ &\dots \end{aligned}$$

由于  $10^{44}$  与  $2 \times 10^{22}$  之间的巨大差距, 可认为  $\bar{A}_i, i = 1, 2, \dots, n$  独立. 由此,

$$P(A) = 1 - [P(\bar{A}_1)]^n = 1 - [1 - 2/10^{22}]^n \approx 0.98.$$

□

P24, 1.23, 1.24.