第一章: 随机事件

1.1 基本概念

高尔顿板钉试验

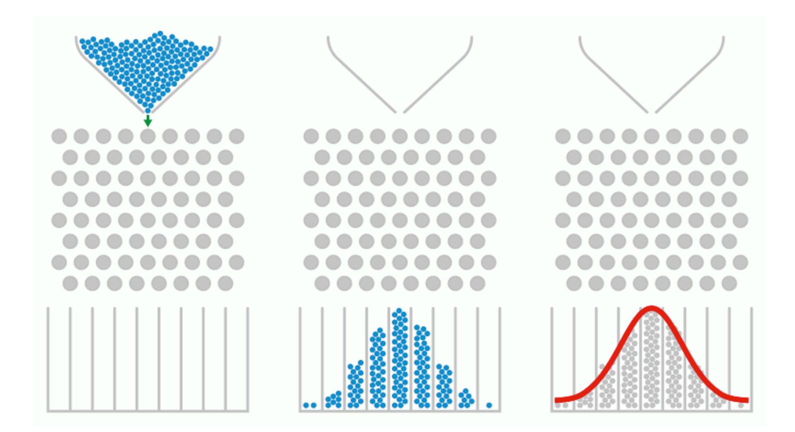


图 1: 高尔顿板试验，蓝色小球自由落入板钉，在每个钉子处随机向左向右，某个小球很难预测其结果。但是大量小球放入，底板处的小球会呈钟形曲线。

概率论定义

概率论是一门研究**随机现象**的**统计规律**的数学学科。

- 确定现象: 只有一个结果的现象。
- 不确定现象: 在一定的条件下, 并不总是出现相同结果的现象, 随机现象是一种不确定现象。
- 随机现象是概率论研究的对象，概率论主要研究随机现象的模型, 即概率分布。

随机现象

随机现象

- 投硬币，投骰子；
- 一天内进入商场的顾客数；
- 某型号灯泡的寿命；
- 测量某物理量的误差。

确定现象

- 太阳从东方升起；
- 水往低处流；
- 异性电荷相吸；
- 加热到 100°C 水沸腾。

统计规律

频率稳定性 ⇒ 统计规律性

- 随机现象即有偶然性的一面，也有必然性的一面。这种必然性表现为大量试验中随机事件出现的频率稳定性，即一个随机事件出现的频率常在某个固定的常数附近摆动，这种规律性称之为**统计规律性**。
- 常见的频率稳定性的例子有，投硬币试验，高尔顿板钉试验，英文字母使用频率，女婴的出生率等。

随机试验：对相同条件下可以重复的随机现象的观察、记录、实验。随机试验有以下三个特点：

- 可以重复试验;
- 结果不止一个, 但事先确定所有可能出现的结果;
- 哪个结果出现, 人们事先不知。

例 1.1

(1) 投掷一枚硬币, 可能正面朝上, 也可能反面朝上。

(2) 记录一天内进入某超市的顾客数。

(3) 记录某种型号的电视机寿命。

定义 1.1

样本空间是随机现象的一切可能基本结果组成的集合，记为 $\Omega = \{\omega\}$, 其中 ω 表示基本结果，又称为样本点。

例 1.2

(1) 投掷一枚硬币样本空间 $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, 其中 ω_1 代表正面朝上,ω_2 代表反面朝上。(有限样本空间)

(2) 一天内进入某超市的顾客数样本空间为 $\Omega_2 = \{0, 1, 2, ..., 1000, ...\}$。(可列样本空间)

(3) 某种型号的电视机寿命样本空间 $\Omega_3 = \{t : t \geq 0\}$。(连续样本空间)

随机事件

随机事件是随机现象的某些样本点组成的集合，简称事件。事件是样本空间的子集，常用大写字母 A,B,C 来表示。

- **基本/复合事件**：由样本空间 Ω 中的单/多个元素组成的子集；
- 必然事件：样本空间 Ω 的最大子集（Ω 本身）；
- 不可能事件：样本空间 Ω 的最小子集（空集 $\varnothing$）。

例 1.3

投掷一颗骰子的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

(1) 事件 A：出现“*1*”点，为 Ω 的一个样本点（基本）；

(2) 事件 B：出现偶数点，为 Ω 的三个样本点 $\{2, 4, 6\}$（复合）；

(3) 事件 C：出现的点数小于“*7*”点，为 Ω（必然）；

(4) 事件 D：出现的点数大于“*6*”点，为空集（不可能）。

事件间的关系

以下讨论在同一个 Ω 中。事件间的关系本质上就是集合间的关系，当子集 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了。

- 如果属于 A 的样本点必属于 B，则称 B **包含** A，记为 $A \subset B$;
- 如果属于 A 的样本点必属于 B，而且属于 B 的样本点必属于 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A = B$;
- 如果 A 与 B 没有相同的样本点，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B **互不相容**。

例 1.4

相等关系：投掷两枚骰子，记 A 事件“两个骰子的点数之和为奇数”，以 B 记事件“两个骰子的点数为一奇一偶”，则容易证明，A 发生必然导致 B 发生，而且 B 发生必导致 A 发生，所以 A=B。

事件间的运算: 补, 并与交

- **补**：记为 A^c 或 $\overline{A}$，由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件，或者事件 A 不发生；
- **并 (和)**：记为 $A \cup B$ 或 $A + B$，由事件 A 与 B 的所有样本点组成的新事件，或者事件 A 与 B 至少有一个发生；
- **交 (积)**：记为 $A \cap B$，由事件 A 与 B 的公共样本点组成的新事件，或者事件 A 与 B 同时发生。

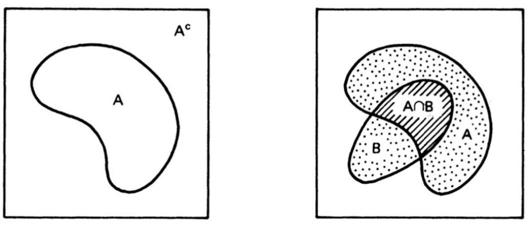


图 2: 事件的补，并与交

事件间的运算: 多个并

事件的并可推广到多个 (**有限或可列无限**) 事件的情形.

- 令 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并为 C, 记为

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{A_1 \text{ 发生}, A_2 \text{ 发生}, \cdots, A_n \text{ 发生}\}$$
$$= \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{中至少发生一个}\}.$$

  对可列无限个事件 $A_1, A_2, \cdots$, 可类似地定义其并 C, 记为

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{A_1, A_2, \cdots \text{中至少发生一个}\}.$$

- 设 A_i 表示某城市某月交通事故发生 i 次.
  - $C_1 \equiv \{$该月发生交通事故不超过 10 次$\}$, 则 $C_1 = \bigcup_{i=0}^{10} A_i$.
  - $C_2 \equiv \{$该月发生交通事故 10 次及以上$\}$, 则 $C_2 = \bigcup_{i=10}^{\infty} A_i$.

事件间的运算: 多个交

事件的交可推广到多个 (**有限或可列无限**) 事件的情形.

- 令 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交为 C, 记为

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\text{都发生}\}.$$

对可列无限个事件 $A_1, A_2, \cdots$, 可类似地定义其并 C, 记为

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{A_1, A_2, \cdots\text{都发生}\}.$$

事件的运算: 差

- **差**：记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$，由在事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的新事件，或者事件 A 发生且事件 B 不发生。
- 差事件可以将整个 $A \cup B$ 分解成 3 个互不相容的三个部分 $A \setminus B$，$B \setminus A$ 与 $A \cap B$。
- $A \setminus B$ 表示为 $A\overline{B}$。

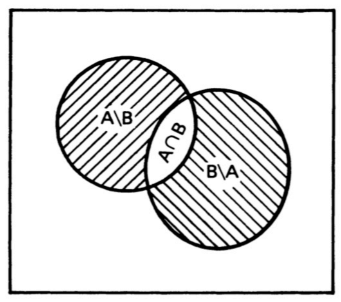


图 3: 事件的差

事件的运算律：交换，结合与分配律

- **交换律**：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- **结合律**：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **分配律**：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

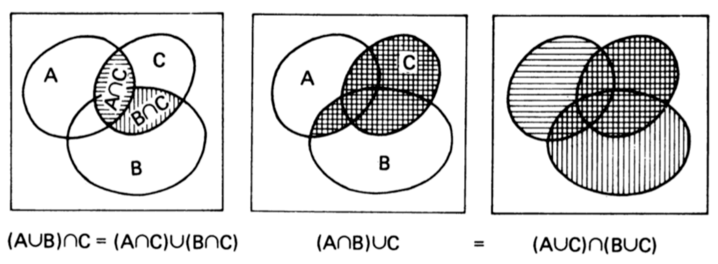


图 4: 事件的分配律

德摩根律又称为对偶律, 可以表示为 (可以推广到可列个事件):

- 事件并的对立等于对立的交: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, (☺)
- 事件交的对立等于对立的并: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明中多用韦恩图!

证明 (☺)

(1) 设 $x\in\overline{A\cup B}$, 即 $x\notin A\cup B$, 表明 x 既不属于 A 也不属于 B, 这意味着 $x\notin A$ 和 $x\notin B$ 同时成立, 即 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, 则 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$;

(2) 设 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, 即 $x\in\overline{A}$ 和 $x\in\overline{B}$ 同时发生, 这意味着 $x\notin A$ 和 $x\notin B$, 即 $x\in\overline{A\cup B}$, 则 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$;

综上, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

事件的运算律: 练习

练习 1.1

设 A，B 与 C 为三个事件，则事件的减法是否满足结合率，即 $(A \setminus B) \setminus C$ 是否等于 $A \setminus (B \setminus C)$?

练习 1.2

证明 A，B 与 C 两两互不相容，则有 $ABC = \varnothing$, 反之不真。

练习 1.3

甲、乙、丙三人各射击一次，A_1，A_2，A_3 分别表示甲、乙、丙射击命中目标，请表述下列事件所表示的结果。

$\overline{A_2}$，$A_2 \cup A_3$，$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_1 \cup A_2}$，$A_1A_2\overline{A_3}$，$A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$.

1.2 事件的概率

定义 2.1

设 A 是一个事件, 在相同条件下, 进行 n 次试验. 在这 n 次试验中, 若事件 A 发生了 m 次, 则称 m 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率或次数, 称 m 与 n 之比 m/n 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率, 记为 $f_n(A)$.

性质 2.1

频率满足如下性质:

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) $f(\Omega) = 1, f_n(\varnothing) = 0$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥, 即对 $i \neq j, A_iA_j = \varnothing$, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

事件的频率：历史上的投硬币试验

表 1: 历史上投硬币的若干试验结果，频率都接近于 0.5

试验者	投硬币次数	出现正面的次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

频率的稳定性 $\rightarrow$ 统计规律性 $\rightarrow$ 概率!

事件的频率：投硬币的数值试验 (图像)

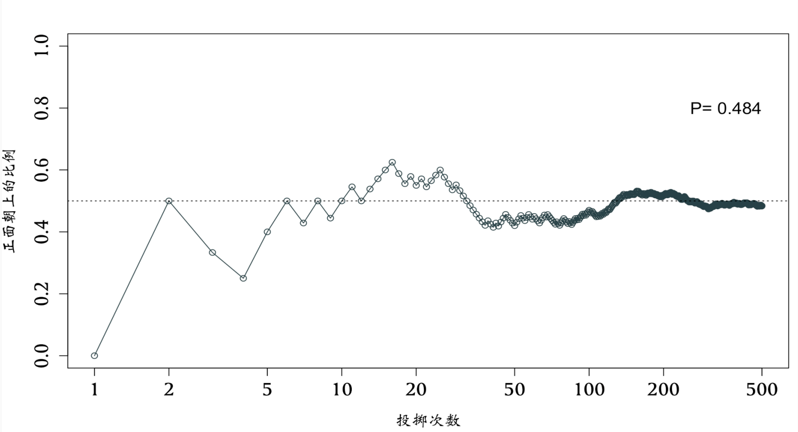


图 5: 投 500 次质地均匀的硬币试验，横坐标为投掷次数，纵坐标为每次试验后正面朝上的比例，频率最终为 P=0.484.

事件的概率: 定义

定义 2.2

设 E 是随机试验, Ω 是其样本空间. 对每个事件 A, 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足条件:

(1) 对于每个事件 A, 均有 $P(A) \geq 0$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥, 即对 $i \neq j$, $A_iA_j = \varnothing$, 均有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

☕ 函数 $P(\cdot)$ 是一个集函数.

事件的概率: 性质

性质 2.2

不可能事件的概率为 0, $P(\varnothing) = 0$.

性质 2.3

概率具有有限可加性, 即若 $A_iA_j = \varnothing(i \neq j)$, 则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 2.4

对任何事件 A, 有 $0 \leq P(A) \leq 1$,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

性质 2.5

如果 $B \subset A$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$. 一般地,

$$P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

证: 将事件 A 分解成互不相交的两部分: $A = AB + A\bar{B}$.

$$P(A-B) = P(A\bar{B}) = P(A - AB) \Rightarrow P(A) - P(AB).$$

若 $B \subset A, B = AB \Rightarrow P(AB) = P(B)$. $\square$

例 2.1

袋中有 n 个球, 编号 $1, 2, \cdots n$. 有放回任取 m 个球, 求取出的球中最大编号为 k 的概率.

解: 设 A_k 表示取出球的最大编号为 k. 注意到 k 不知其位置, 不易计算. 将上述问题转换为: 设 B_k 表示**取出的最大编号小于等于 k**. 选出的 m 个球的编号从 $1, 2, \cdots, k$ 选一个即可, 共有 k^m 种情况. 注意到, $A_k = B_k - B_{k-1}, B_{k-1} \subset B_k$, 则

$$P(A_k) = P(B_k - B_{k-1}) = P(B_k) - P(B_{k-1}) = \frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m}.$$

□

性质 2.6 (加法公式)

对任何事件 A, B, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

例 2.2 (布尔不等式)

(1) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \forall A, B$

(2) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)), \forall A_1, A_2, \cdots$

证: 将事件 $A_1, A_2, \cdots$ 重新划分为

$$A_1^* = A_1, A_i^* = A_i \backslash (\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j), i = 2, 3, \cdots$$

易验证不同的 A_i^* 是不交的, 且 $A_i^* \subset A_i$. 因此,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^*) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

$\square$

性质 2.7 (多除少补公式)

对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$, 有对 $i, j, k = 1, 2, \cdots, n$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

练习 2.1

设 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4, P(B \cap C) = P(A \cap C) = 1/6$ 且 $A \cap B = \varnothing$, 试验证:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

事件的概率: 加法公式的一般形式 (例子)

例 2.3

设每封信都有一个匹配的信封. 将 n 封信随机装进 n 个信封. 求至少有一封信匹配的概率.

解: 设 A_k 表示将第 k 封信装进第 k 个信封中, 则至少有一封信匹配为事件 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, P(A_iA_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \cdots, P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= \binom{n}{1}\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \cdots (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

□

1.3 古典概率模型

古典概率: 思路

古典概率的基本假设:

- **有限**个样本点，譬如 n 个.
- 每个样本点发生的可能性相等 (**等可能**).

若试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 且每个基本事件发生的可能性相同:

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}).$$

由基本事件两两互斥, 且 $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \{\omega_n\} = \Omega$, 得

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \{\omega_n\}) \\ &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_n\}) \\ &= nP(\{\omega_1\}), \end{aligned}$$

则

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

定义 3.1

若事件 A 包含 k 个基本事件, 即

$$A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\},$$

其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 得古典概率计算方法

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{\omega_{j_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

☕ 容易验证，上式确定的概率满足概率公理化定义。非负性和规范性是显然的，可加性的证明如下：当 A 与 B 互不相容时，计算 $A \cup B$ 的样本点个数可以分别计算 A 与 B 的样本点个数再相加，即 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法。

乘法原理：进行 A_1 过程后接着进行 A_2 过程共有 $n_1 \times n_2$ 种方法。

加法原理：假定 A_1, A_2 过程是并行的，进行两过程共有 $n_1 + n_2$ 种方法。

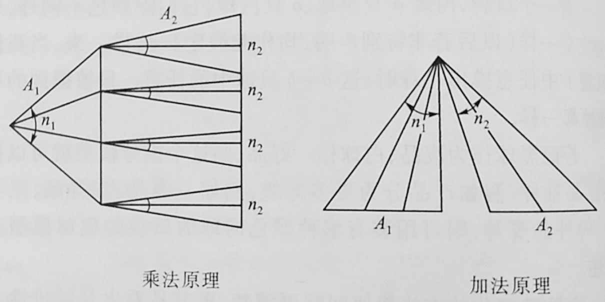


图 6: 乘法原理和加法原理

计数方法：排列与组合

从一个装有 n 个不同球的袋子里抽出 r 个球，按照抽样方法 (不放回/放回) 和是否考虑顺序 (有序/无序) 分为四种情况，如下表所示：

- **排列**：不放回，有序
- **重复排列**：放回，有序
- **组合**：不放回，无序
- **重复组合**：放回，无序

表 2: 从 n 个球种选 r 个的情况

	不放回	放回
有序	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
无序	$\binom{n}{r}$	$\binom{n-1+r}{r}$

可以假设 n 个元素为 n 个盒子 ($n+1$ 个火柴棒)，如果第 i 个元素取到过一次，则此盒子中用 ” $\bigcirc$ ” 表示，如下所示

$$|\bigcirc\bigcirc||\bigcirc|\cdots|\bigcirc\bigcirc|$$

上图意味着，第一个元素取到过 2 次，第二个元素取到过 0 次，第三个元素取到过 3 次，$\cdots$，第 n 个元素取到过 3 次。共取了 r 个，所以有 r 个 “ $\bigcirc$ ”，$n+1$ 个 “|”。注意最两边的 “|” 没办法移动，总共就有 $n-1+r$ 个位置，其中选 r 个球或者 $n-1$ 根棒即可。这个问题等价于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$$

非负数解的个数，都是 $\binom{n-1+r}{r}$.

例 3.1

掷一枚匀称骰子, 设 A 表示所掷结果为"四点或五点", B 表示所掷结果为"偶数点". 求 $P(A)$ 和 $P(B)$

解: 设 $A_1=\{1\}, A_2=\{2\}, \cdots, A_6=\{6\}$ 分别表示所掷结果为"一点","两点",⋯,"六点".

- $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 为所有不同的基本事件, 且它们发生的概率相同.

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_6)=\frac{1}{6}.$$

- $A=A_4\cup A_5, B=A_2\cup A_4\cup A_6$,

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

□

例 3.2

货架上有外观相同的商品 *15* 件, 其中 *12* 件来自产地甲, *3* 件来自产地乙. 现从 *15* 件商品中随机地抽取两件, 求这两件来自同一产地的概率.

解: 来自同一产地可分解为: 事件 A_1 均来自产地甲和事件 A_2 均来自产地乙, 且 A_1 与 A_2 互斥.

- Ω: 组合 (不放回, 无序). 从 15 件产品中抽取 2 件, 共有
$$n = \binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105.$$
- 事件 A_1 中包含的基本事件数
$$k_1 = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66.$$

抽样模型: 商品例子

- 事件 A_2 中包含的基本事件数

$$k_2 = \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3.$$

- 事件 $A = \{$两件产品来自同一产地$\} = A_1 \cup A_2$,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \\ &= \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = \frac{69}{105} \\ &= \frac{23}{35}. \end{aligned}$$

$\square$

抽样模型: 三极管例子

例 3.3

有外观相同的三极管 6 只, 按电流放大系数分类, 4 只属于甲类, 2 只属于乙类. 试按下列两种方案抽取三极管两只, 求下列事件 A, B, C, D 的概率, 这里

$A = \{$抽到两只甲类三极管$\}$, $B = \{$抽到两只同类三极管$\}$,
$C = \{$至少抽到一只甲类三极管$\}$, $D = \{$抽到两只不同类三极管$\}$.

抽取方案

(1) 每次抽取一只, 测试后放回; 然后再抽取下一只 (放回抽样).

(2) 每次抽取一只, 测试后不放回; 然后在剩下的三极管中再抽取下一只 (不放回抽样).

解: (1) 放回抽样. 第一次有 6 种取法, 放回后, 第二次仍有 6 种取法, 共有 $6 \times 6 = 36$ 种.

- A 两次均抽到甲共有 $4 \times 4 = 16$, $P(A) = 16/36 = 4/9$.
- $\bar{C}$ = 抽到两只乙类共有 $2 \times 2 = 4$, $P(\bar{C}) = 4/36 = 1/9$, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 8/9$.
- $B = A \cup \bar{C}$, 且 A 与 $\bar{C}$ 互斥, 得

$$P(B) = P(A) + P(\bar{C}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

- $D = \bar{B}$, 得

$$P(D) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

(2) 不放回抽样. 第一次有 6 种取法, 不放回后, 第二次仍有 5 种取法, 共有 $6 \times 5 = 30$ 种.

- A 两次不放回抽到甲共有 $4 \times 3 = 12$, $P(A) = 12/30 = 2/5$.
- $\bar{C} =$ 两次不放回抽到甲共有 $2 \times 1 = 2$, $P(\bar{C}) = 2/30 = 1/15$, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 14/15$.
- $B = A \cup \bar{C}$, 且 A 与 $\bar{C}$ 互斥, 得

$$P(B) = P(A) + P(\bar{C}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

- $D = \bar{B}$, 得

$$P(D) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

$\square$

例 3.4

设有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个不同盒子中的一个，每个盒子放球数不限，试求：

(1) 指定的 $n(n \le N)$ 个盒子中各有一个球的概率 $P(A_1)$;

(2) 恰有 $n(n \le N)$ 个盒子各有一球的概率 $P(A_2)$。

- Ω：重复排列，每个球有 N 中放法，共有 N^n;
- A_1：指定 n 个盒子有 1 种，将 n 个球放入是一个排列, 共有 $n!$；A_2：从 N 个盒子中选 n 个，有 C_N^n 种情况，再将其排列，有 $n!$。

$$P(A_1) = \frac{n!}{N^n},\ P(A_2) = \frac{C_N^n n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

$\square$

例 3.5

64 个人中，至少有两个人生日相同的概率是？

这个问题其实就是盒子问题，生日问题的反面就相当于 $n = 64$ 个球放到 $N = 365$ 盒子中，恰有 64 个盒子各有一个球的盒子。

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{365}^{64} 64!}{365^{64}} \approx 0.997.$$

这个结果是出乎意外的，如果考虑 n 个人，至少两个人生日相同的概率得到下表：

表 3: $P(A)$ 的近似值

n	10	20	30	40	50	60
$P(\overline{A})$	0.8840	0.5942	0.3037	0.1180	0.0349	0.0078
$P(A)$	0.1160	0.4058	0.6963	0.8820	0.9651	0.9922

例 3.6

有白色乒乓球 12 只, 黄色乒乓球 3 只. 现将它们随机地分装在 3 个盒子中, 每盒装 5 只. 设 $A=\{$每盒中恰有一只黄色球$\}$, $B=\{$三只黄色球都在同一个盒中$\}$. 试求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

解: 把 n 个物品分成 k 组, 第一组恰有 n_1 个, 第二组恰有 n_2 个, $\cdots$, 第 k 组恰有 n_k 个. 设 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$, 则不同分组方法共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

种情况.

抽样模型: 乒乓球例子

(1) 将 15 只球分成 3 组, 每组 5 只, 共有 $\frac{15!}{5!5!5!}$. 每种装法等可能, 基本事件总数为 $\frac{15!}{5!5!5!}$.

- A 每个盒中恰有一只黄球, 将事件分解:
  (1) 先将 3 只黄球分到 3 个盒子中, 每个盒子有 1 只, 共有 $\frac{3!}{1!1!1!}$.
  (2) 将 12 只白球分到 3 个盒子中, 每个盒子有 4 只, 共有 $\frac{12!}{4!4!4!}$.
  (3) 利用乘法原理, 共有

$$\frac{3!}{1!1!1!} \times \frac{12!}{4!4!4!} = \frac{3!12!}{4!4!4!}$$

- 计算

$$P(A) = \frac{3!12!}{4!4!4!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{25}{91}.$$

(2) 同理, $P(B) = \frac{3\times 12!}{2!5!5!} \big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{6}{91}$. □

例 3.7

设 N 件产品中有 K 件次品, $N-K$ 件是正品, $K<N$. 现从 N 件中每次任意抽取 1 件产品, 在检查过它是正品或次品后再放回. 抽取 n 次, $n \le K, n \le N-k$, 求事件 $A=\{n$ 件产品中恰有 k 件次品$\}$ 的概率, $k=0,1,2,\cdots,n$.

解: 每次有放回地从 N 件产品中抽取 1 件, 共有 N^n 种取法, 且每种取法出现的可能性相同. 基本事件的总数为 N^n. 利用乘法原理将事件分解:

(1) 将 n 件产品想成 n 个盒子, 从中选 k 个将要装入次品的盒子, 共有 $\binom{n}{k}$ 种.

(2) 从 K 件次品中有放回地选 k 件次品, 共有 K^k 种.

抽样模型: 次品例子

(3) 从 $N-K$ 件次品中有放回地选 $n-k$ 件次品, 共有 $(N-K)^{(n-k)}$ 种.

由此可知, A 共包含

$$\binom{n}{k}K^k(N-K)^{n-k}$$

个基本事件. 从而

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{n}{k}K^k(N-K)^{n-k}}{N^n} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{K}{N}\right)^k\left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

□

1.4 条件概率

例 4.1

设 *100* 件产品中有 *5* 件是不合格产品, *5* 件不合格产品中又有 *3* 件是次品, *2* 件是废品. 现从 *100* 件产品中任意抽取一件, 假定每件产品被抽到的可能性都相同, 求

(1) 抽到的产品是次品的概率.

(2) 在抽到的产品是不合格品的条件下, 产品是次品的概率.

解: 设 A ={抽到产品是次品的概率}, B ={抽到产品是不合格品}.

(1) 由于 100 件产品中有 3 次是次品, 得 $P(A) = 3/100$.

(2) 由于 5 件不合格品中有 3 件是次品, 得 $P(A|B) = 3/5$. □

☕ 虽然这两个概率不同, 但二者之间应当有一定的关系. 如 $P(B) = 5/100$, 而

$$P(A|B) = \frac{3}{5} = \frac{3}{100} \Big/ \frac{5}{100} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

条件概率: 定义

设 A 与 B 是样本空间 Ω 中的两个事件, 若 $P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为“在 B 发生下 A 的条件概率”, 简称**条件概率**.

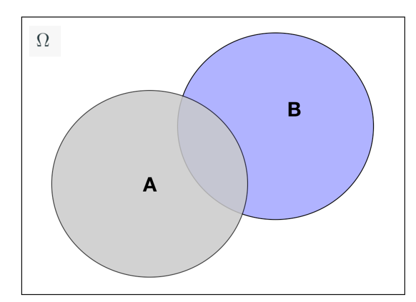


图 7: 条件概率

条件概率：性质

性质 4.1

条件概率也是概率，即若设 $P(B) > 0$，则

(1) 对每个事件 A，$P(A|B) \geq 0$.

(2) $P(\Omega|B) = 1$.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$

概率的性质都可以推广到条件概率：

- $P(\varnothing|B) = 0, P(\Omega|B) = P(B|B) = 1$;
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$;
- $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$.

证: (3) 若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥, 则对每个 $i \neq j$, 有 $A_iA_j = \varnothing$. 再由事件积的运算性质,

$$(A_iB)(A_jB) = (A_iA_j)B = \varnothing B = \varnothing.$$

于是, $A_1B, A_2B, \cdots$ 也两两互斥, 则

$$\begin{aligned} P\big((A_1 \cup A_2 \cdots |B)\big) &= \frac{P\big((A_1 \cup A_2 \cdots)B\big)}{P(B)} \\ &= \frac{P\big((A_1B) \cup (A_2B) \cup \cdots\big)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1B) + P(A_2B) + \cdots}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)} + \cdots \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots . \end{aligned}$$

例 4.2

设 $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$. 求 $P(B|(A \cup \bar{B}))$.

解:

$$
\begin{aligned}
P(B|(A \cup \bar{B})) &= \frac{P(B \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} \\
&= \frac{P(AB \cup \varnothing)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} \\
&= \frac{P(A) - P(A\bar{B})}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} \\
&= \frac{1 - 0.3 - 0.5}{1 - 0.3 + 1 - 0.4 - 0.5} \\
&= \frac{1}{4} = 0.25.
\end{aligned}
$$

□

例 4.3

考虑一个家庭有两个孩子, 其样本空间为 $\Omega=\{\{$男孩, 男孩$\};\{$男孩, 女孩$\};\{$女孩, 男孩$\};\{$女孩, 女孩$\}\}$. 设事件 $A=$"家中至少有一个女孩"发生的概率, 事件 $B=$"家中至少有一个男孩"发生, 试求 $A|B$ 发生的条件概率.

解: **(1) 缩小空间法**. 事件 B 发生, 则样本空间被缩减为

$$\Omega_B=\{\{\text{男孩, 男孩}\};\{\text{男孩, 女孩}\};\{\text{女孩, 男孩}\}\},$$

共 3 种情况. 这时事件 A 发生, 只有 $\{\{$男孩, 女孩$\};\{$女孩, 男孩$\}\}$ 共 2 种情况, 则 $P(A|B)=2/3$.

(2) 公式法. 事件 $A\cap B$ 为 $\{\{$男孩, 女孩$\};\{$女孩, 男孩$\}\}$, $P(A\cap B)=2/4=1/2$, 则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}.$$

□

定义 4.1 (乘法公式)

若 A 和 B 是两个事件, 当 $P(B)>0$ 时, 有

$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

同理, 当 $P(A)>0$ 时, 有

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

称上式为概率的乘法公式.

性质 4.2

乘法公式可推广到多个事件, 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件, 当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 4.4

一批灯泡共 *100* 只, 其中 *10* 只是次品, 其余为正品. 作不放回抽取, 每次抽取一只, 求第三次才取到正品的概率.

解: 设 A_i ={第 i 次取到正品}, $i = 1, 2, 3$, A ={第三次才取到正品}, 则 $A = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, 于是

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \\ &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \cdot P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} \times \frac{90}{98} = 0.0083. \end{aligned}$$

所以, 第三次才取到正品的概率为 0.0083. □

乘法公式: 袋子模型

例 4.5

袋中有同型号小球 $b+r$ 个, 其中 b 个是黑球, r 个是红球. 每次从袋中任取一球, 观其颜色后放回, 并再放入同颜色、同型号球 c 个. 若 B ={第一、第三次取到红球, 第二次取到黑球}, 求 $P(B)$.

解: 设 A_i ={第 i 次取到红球}, $i=1,2,3$, 则 $B=A_1\bar{A}_2A_3$, 于是

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1\bar{A}_2A_3)\\
&= P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2|A_1)\cdot P(\bar{A}_3|A_1\bar{A}_2)\\
&= \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+(r+c)}\cdot\frac{(r+c)}{(b+c)+(r+c)}\\
&= \frac{rb(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}.
\end{aligned}$$

□

全概率公式: 划分

划分: 设事件 $B_1, \cdots, B_n$ 满足:

(1) $B_iB_j = \varnothing, i \neq j$,

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

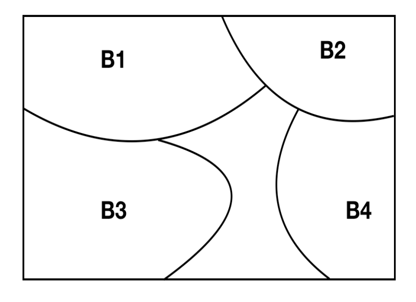


图 8: 样本空间的划分

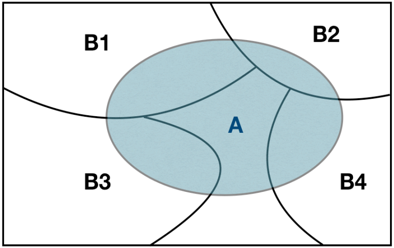
⋆ 若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, 则每次试验中, 事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生.

全概率公式: 定义

定理 4.1 (全概率公式)

设 Ω 为试验 E 的样本空间, 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, 如果 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则对任一事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$



例 4.6

一批同型号的螺钉由编号 *1, 2, 3* 的三台机器共同生产, 各台机器生产的螺钉占这批螺钉的比例分别为 *35%, 40%* 和 *25%*, 各台机器生产的螺钉的次品率分别为 *3%, 2%, 1%*. 求该批螺钉的次品率.

解: 设 A ={螺钉是次品}, B_i ={螺钉由 i 号机器生产}, 则

$$P(B_1) = 0.35, \quad P(B_2) = 0.40, \quad P(B_3) = 0.25,$$
$$P(A|B_1) = 0.03, \quad P(A|B_2) = 0.02, \quad P(A|B_3) = 0.01.$$

由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0.35 \times 0.03 + 0.40 \times 0.02 + 0.25 \times 0.01 = 0.021. \end{aligned}$$

这批螺钉的次品率为 0.021. □

例 4.7

为调查运动员中服用兴奋剂的比率 p, 设计问卷: 请在心中想好一个整数, 如果 *(1)* 是奇数时, 请回答: 你选的是奇数吗? *(2)* 是偶数时, 请回答: 你用兴奋剂吗? 请勾选"是"或"否". 若在被调查的 *200* 个运动员中, 有 *115* 个回答"是". 如何计算出 p?

解: 设事件 A 为回答"是", 事件 B 为选奇数, 则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= 1 \times 0.5 + p \times 0.5. \end{aligned}$$

由此,

$$\frac{115}{200} \approx P(A) = 0.5 + 0.5p \Rightarrow \hat{p} = 0.15.$$

$\square$

贝叶斯公式: 定义

定理 4.2 (贝叶斯公式)

设 Ω 是样本空间, A 为一个事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分, 如果 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明: 由条件概率公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}.$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, n$. 注意到分子使用条件概率公式, 分母使用了全概率公式. □

例 4.8 (续例 4.6)

现从该批螺钉中抽到一颗次品, 是问这颗螺钉由 *1, 2, 3* 号机器生产的概率各是多少?

解: 由贝叶斯公式

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)} \\ &= \frac{0.35\times 0.03}{0.35\times 0.03+0.40\times 0.02+0.25\times 0.01} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

同理, 可得

$$P(B_2|A) = \frac{8}{21}, \quad P(B_3|A) = \frac{5}{42}.$$

此螺钉由 1, 2, 3 号机器生产的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{5}{42}$.

贝叶斯公式: 例子

例 4.9

一种新方法检测出某种疾病的概率是百分之百, 但是把没病的人判定有病的概率达到百分之五. 设该群体中该病的发病率是万分之一. *(1)* 甲在身体普查中被判断患病, 甲的确患病的概率是多少? *(2)* 甲再次复查又被判断有病时, 甲的确患病的概率是多少?

解: (1) 设甲的确患病为事件 A, 甲被判断有病的事件为 B, 则

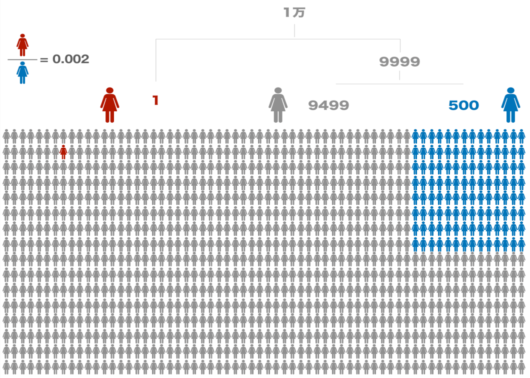
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{1 \times 0.0001}{1 \times 0.0001 + 0.05 \times 0.9999} \approx 0.002.$$

(2) 再次复查时甲患病的概率不再是万分之一, 而是千分之二. 所以

$$P(A|B') = \frac{P(B'|A)P(A)}{P(B'|A)P(A) + P(B'|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{1 \times 0.002}{1 \times 0.002 + 0.05 \times 0.998} \approx 0.0385.$$

贝叶斯公式: 例子 (续)

即便是正确很高的检测手段, 仍旧只有不到千分之二的正确率. 本质上是因为发病率低. 假设我们现在有 1 万个人，用红色小人代表患病的人, 蓝色小人代表没有患病却被检测出患病的人. 下图揭示了整个问题的本质 (小人的比例没有严格按照题中数据).



例 4.10

设昆虫产 k 个卵的概率为 $e^{-\lambda}\lambda^k/k!(\lambda > 0, k = 0, 1, 2, \cdots)$. 每个卵能孵化成幼虫的概率为 $p(0 < p < 1)$, 且各个卵能否孵化成幼虫是相互独立的, 求: *(1)* 该昆虫有后代的概率; *(2)* 该昆虫养出 i 只幼虫的概率; *(3)* 若某昆虫养出了 i 只幼虫, 求它产了 k 个卵的概率.

解: (1) 设 $A=$ 该昆虫有后代, $B_k=$ 该昆虫产 k 个卵 $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, 易知: 事件组 $B_0, B_1, \cdots, B_n, \cdots$ 是一完备事件组, 则

$$P(B_k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$\bar{A}=$ 该昆虫没有后代 $=$ 每个卵都没孵化成幼虫, 则有

$$P(\bar{A}|B_k) = (1-p)^k, k = 0, 1, 2, \cdots.$$

由全概率公式得

$$P(\bar{A})=\sum_{k=0}^{\infty}P(B_k)P(\bar{A}|B_k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(1-p)^k$$
$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}.$$

由此,

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-e^{-\lambda p}.$$

或者考虑 $A|B_k$,

$$P(A|B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k)P(A|B_k)=\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{k}p^i(1-p)^{k-i}=1-(1-p)^k,$$

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k)P(A|B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}[1-(1-p)^k]$$
$$=e^{-\lambda}[(e^{\lambda}-1)-(e^{\lambda(1-p)-1})]=1-e^{-\lambda p}.$$

(2) 设 A_i = 该昆虫养出 i 只幼虫, 由全概率公式得

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k)P(A_i|B_k) \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} P(B_k)P(A_i|B_k) \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} \\
&= \frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}, i = 0, 1, 2, \cdots .
\end{aligned}
$$

(3) 由贝叶斯公式得

$$
\begin{aligned}
P(B_k|A_i) &= \frac{P(B_k)P(A_i|B_k)}{P(A_i)} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}}{\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k i!}{k!}\frac{k!}{i!(k-i)!}p^i(1-p)^{k-i}}{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}} \\
&= \frac{[\lambda(1-p)]^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda(1-p)}.
\end{aligned}
$$

其中, $i = 0, 1, 2, \cdots, k = i, i+1, \cdots$. $\square$

1.5 事件的独立性

定义 5.1

对事件 A, B, 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A, B 统计独立的, 简称独立的. 否则称 A 与 B 不独立或相依.

例 5.1

设试验 E 为掷甲、乙两枚硬币, 观察正反面出现情况. 设 A 表示甲币出现正, B 乙币出现反, 分别求事件 A, B, AB 发生的概率.

解: $P(A) = P(B) = 1/2, P(AB) = 1/21/2 = 1/4 = P(A)P(B)$. 所以事件 A, B 独立. □

性质 5.1

若事件 A 与 B 独立, 则事件 $\{\bar{A}, B\}$, $\{A, \bar{B}\}$, $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 相互独立.

证明: 由于

$$\begin{aligned} P(\bar{A}B) &= P(B - AB) = P(B) - P(AB) \\ &= P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] \\ &= P(\bar{A})P(B). \end{aligned}$$

所以, $\bar{A}$ 与 B 相互独立. 同理, A 与 $\bar{B}$ 相互独立. 由此, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立. 也可以由下式得到独立性:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(\bar{A})P(\bar{B}). \end{aligned}$$

□

事件的独立性: 性质的例子

例 5.2

甲乙两射手独立地射击同一目标, 它们击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8. 求每人射击一次后, 目标被击中的概率.

解: 设 $A=\{$甲击中目标$\}$, $B=\{$乙击中目标$\}$, 则 $P(A)=0.9$, $P(B)=0.8$. 目标被击中, 可转换为事件"两人中至少有一人击中", 即 $A\cup B$. 由于 A 和 B 独立, 则

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(AB) \\ &= P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\ &= 0.9+0.8-0.9\times 0.8 = 0.98. \end{aligned}$$

另外, $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$. 由于 A 和 B 独立, 所以 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 相互独立, 则

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=0.98.$$

□

例 5.3

已知事件 A, B, C 相互独立, $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(C) = 0.8$, 求 $P\{C - (A - B)\}$ 和 $P\{(C - A) + B)\}$.

解: 先拆解事件

$$C - (A - B) = C \cap \overline{(A \cap \bar{B})} = C \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A}C \cup BC.$$

所以,

$$\begin{aligned} P(C - (A - B)) &= P(\bar{A}C \cup BC) = P(\bar{A}C) + P(BC) - P(\bar{A}BC) \\ &= P(\bar{A})P(C) + P(B)P(C) - P(\bar{A})P(B)P(C) \\ &= 0.7 \times 0.8 + 0.4 \times 0.8 - 0.7 \times 0.4 \times 0.8 \\ &= 0.656. \end{aligned}$$

事件的独立性: 性质的例子 (续)

再拆解事件

$$(C - A) + B = \bar{A}C \cup B.$$

所以,

$$\begin{aligned} P((C-A)+B) &= P(\bar{A}C \cup B) = P(\bar{A}C) + P(B) - P(\bar{A}BC) \\ &= P(\bar{A})P(C) + P(B) - P(\bar{A})P(B)P(C) \\ &= 0.7 \times 0.8 + 0.4 - 0.7 \times 0.4 \times 0.8 \\ &= 0.736. \end{aligned}$$

注意到事件 $C - (A - B) \neq (C - A) + B$. 这是因为集合的加减法是由交、并、补定义出来的. 减法是交、补运算, 加法是并运算, 这里涉及到集合的分配律, 而不是结合律. □

定义 5.2

对于三个事件 A, B, C, 若下列四个等式同时成立, 则称它们相互独立.

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

☕ 若只是前三个等式成立, 则事件 A, B, C 两两独立. 注意, 三个事件两两独立并不能推出三个事件相互独立, 即第四个等式可能不成立. 反之, 第四个等式一般也不能推出前三个等式成立.

例 5.4

一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 第四面同时染上红、白、黑三种颜色. 现以 A, B, C 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件, 分别求事件 A, B, C, AB, AC, BC, ABC 的概率.

解: 由于四面体中由红、白、黑的面数都是两面, 所以

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

显然, 事件 AB, AC, BC, ABC 发生只有一种情况

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC)\frac{1}{4}.$$

由此, A, B, C 两两独立, 但

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

所以, 事件 A, B, C 不相互独立. □

事件的独立性: n 个事件的独立性

定义 5.3

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, $n \geq 2$, 若对其中的任意 $k(\geq 2)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i)_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

总成立, 则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

性质 5.2

(1) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意 $k(\geq 2)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ 也相互独立.

(2) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 也相互独立, 其中 B_i 或为 A_i 或为 $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

例 5.5

设每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%, 求 100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率.

解: 设这 100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒为事件 A, 第 i 个人的血清中含有肝炎病毒为事件 $A_i, i = 1, 2, \cdots, 100$. 可以认为 A_i 相互独立, 所求概率为 $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_{100})$, 则

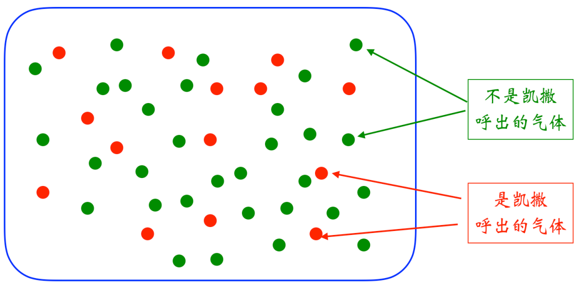
$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_1 \cap \cdots \bar{A}_n) \\
&= 1 - (1 - P(A_1))^{100} = 1 - 0.996^{100} \approx 0.33.
\end{aligned}
$$

$\star$ 小概率原理: 一次试验中小概率事件不会发生. 但重复多次独立事件发生的概率大大增加! □

事件的独立性: 凯撒的最后一口气

例 5.6

科学家统计大气中总共有 10^{44} 个分子, 而人每次呼气、吸气均产生约为 2×10^{22} 个分子. 公元前 44 年, 罗马皇帝凯撒被布鲁图为首的元老院刺杀. 按照莎士比亚的戏剧, 凯撒在临死前喊出了一句"*Et tu, Brute*？" 他呼出了 2×10^{22} 个分子. 假设 2000 多年来大气中分子的总量没有改变, 但经过了充分的搅拌, 完全随机地分布在大气中. 请你现在吸一口气, 请问你吸入凯撒临终前呼出的气体中一个分子的概率是多少?



事件的独立性: 凯撒的最后一口气

解: 如果将凯撒呼出的 2×10^{22} 个分子编号 $1, 2, \cdots, n, n = 10^{22}$, 设 $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 表示你吸一口气含有第 i 个分子, 再设 A 表示吸入的气体至少含有一个凯撒的分子, 则

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \bar{A}_n)$$

显然,

$$P(\bar{A}_1) = (10^{44} - 2 \times 10^{22})/10^{44},$$
$$P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = (10^{44} - 2 \times 10^{22} - 1)/(10^{44} - 1),$$
$$\cdots$$

由于 10^{44} 与 2×10^{22} 之间的巨大差距, 可认为 $\bar{A}_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 独立. 由此,

$$P(A) = 1 - [P(\bar{A}_1)]^n = 1 - [1 - 2/10^{22}]^n \approx 0.98.$$

□