PDE

湘潭大学研究生学位课考试试卷

制卷人签名 刘 学位点负责人签名 院长签名

考试科目 偏微分方程理论 考生人数 审核日期

适用专业 数学各专业 适用年级 1 试卷类别 A卷

考试时间 120 分钟 考试形式 闭卷

六题全答. **Answer all 6 questions.**

(1) （40 分）对以下各方程，判别它是线性、半线性、拟线性还是完全非线性的（不用解释）.

(a) $u_{tt}-u_{xx}=0$ 线 (b) $\Delta u=u^3$ 半 (c) $u_t+uu_x=0$ 拟 (d) $\det(D^2u)=0$ 完全非

(1) For each of the above equations, decide if it is linear, semilinear, quasilinear or fully nonlinear (no explanation is required).

(2) （12 分）传输方程初值问题 $\begin{cases} u_t+\bar{b}\cdot Du=0 & 在\ R^n\times(0,\infty) \\ u=g & 在\ R^n\times\{t=0\} \end{cases}$，$\bar{b}\in R^n$，$g\in C^1(R^n)$，的解是什么？验证你的断言.

(2) What is the solution to the initial value problem of the transport equation $\begin{cases} u_t+\bar{b}\cdot Du=0 & in\ R^n\times(0,\infty) \\ u=g & on\ R^n\times\{t=0\} \end{cases}$，$\bar{b}\in R^n$，$g\in C^1(R^n)$? Verify your assertion.

(3) （12 分）设 $U\subset R^n$ 为边界光滑的有界区域，证明以下的 Poisson 方程边值问题 (*) 最多只有一个光滑解: (*) $\begin{cases} \Delta u=f & (x,t)\in U\times(0,T] \\ u(x,t)=0 & x\in\partial U,\ t\in[0,T] \end{cases}$.（可用能量法或极大值原理.）

(3) Let $U\subset R^n$ be a bounded region with smooth boundary. Prove that there is at most one smooth solution to the above boundary-value problem of the Poisson equation (*). (You can use energy method or the maximum principle.)

(4)（12 分）(a) 设 $I=(0,1)\subset R$. Sobolev 空间 $W^{1,2}(I)$ 中的函数是否连续？请简要地解释.

(b) 设 $J=[-1,1]\subset R$，$u\in C^1(J)$，且 $u(0)=0$. 证明存在常数 $C>0$，使 $\|u\|_{L^2(J)}\le C\|u'\|_{L^2(J)}$.

(4). (a) Let $I=(0,1)\subset R$. Are the functions in the Sobolev space $W^{1,2}(I)$ continuous? Explain briefly.

(b) Let $J=[-1,1]\subset R$, $u\in C^1(J)$ and $u(0)=0$. Prove that there is a constant $C>0$ such that $\|u\|_{L^2(J)}\le C\|u'\|_{L^2(J)}$.

(5) （12 分） (a) 陈述 Lax-Milgram 定理.

(b) 证明以下问题有唯一弱解：$\begin{cases}-\Delta u=f & 在\ U\\ u=0 & 在\ \partial U\end{cases}$，其中 $U\subset R^n$ 有界，$f\in L^2(U)$.

$\int uu'=\frac{1}{2}u^2$

(5) (a) State the Lax-Milgram Theorem.

(b) Prove that the following problem has a unique weak solution $\begin{cases}-\Delta u=f & in\ U\\ u=0 & on\ \partial U\end{cases}$, $U\subset R^n$ bounded and $f\in L^2(U)$.

$\int_U (Du\,Dv+u\Delta v)\,ds=\int_{\partial U}u\cdot\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds$

(6)（12 分）设 $U\subset R^n$ 为边界光滑的有界区域，设 u,w 光滑，分别满足以下的 热方程 (*) 和波方程 (**)：

$$(*)\begin{cases}u_t-\Delta u=0 & (x,t)\in U\times(0,\infty)\\ u(x,t)=0 & x\in\partial U,\ t\in[0,\infty)\end{cases}\qquad (**)\begin{cases}w_{tt}-\Delta w=0 & (x,t)\in U\times(0,\infty)\\ w(x,t)=0 & x\in\partial U,\ t\in[0,\infty)\end{cases}$$

(a) 证明 $\frac{d}{dt}\int_U|u(x,t)|^2\,dx\le 0$.

(b) 证明 $\frac{d}{dt}\int_U w_t^2(x,t)+|Dw(x,t)|^2\,dx=0$，其中 Dw 是 w 对空间变元 x 的梯度.

$2w_t w_{tt}+2Dw\,Dw_t$

(6) Let $U\subset R^n$ be a bounded region with smooth boundary. Let u,w be smooth and satisfy (*) and (**) above respectively..

(a) Prove that $\frac{d}{dt}\int_U|u(x,t)|^2\,dx\le 0$.

(b) Prove that $\frac{d}{dt}\int_U w_t^2(x,t)+|Dw(x,t)|^2\,dx=0$, where Dw is the gradient of w with respect to x.

试卷答案.

(4) (a) 设 $I=(0,1)\subset R$，Sobolev 空间 $W^{1,2}(I)$ 中的函数是否连续？

解：由 Sobolev 嵌入定理，可知

当 $n=1$，$k=1$，$p=2$ 时 $1=k>\frac{n}{p}=\frac{1}{2}$

对 $\forall\ u\in W^{1,2}(I)$ 有 $u\in C^{0,\frac{1}{2}}(I)$

$\therefore$ Sobolev 空间 $W^{1,2}(I)$ 中的函数连续.

(b) 设 $J=[-1,1]\subset R$，$u\in C^1(J)$ 且 $u(0)=0$，证明存在常数 $C>0$，使 $\|u\|_{L^2(J)}\le C\|u'\|_{L^2(J)}$

解：$\because u(0)=0 \quad u\in C^1(J) \quad \therefore u(x)=u(x)-u(0)=\int_0^x u'(t)\,dt$

$$\therefore \|u\|^2_{L^2(J)}=\int_{-1}^1|u|^2dx=\int_{-1}^1\Big[\int_0^x u'(t)\,dt\Big]^2dx\le\int_{-1}^1\Big[\int_0^x|u'(t)|\,dt\Big]^2dx$$

$$\le\int_{-1}^1\Big[\int_{-1}^1|u'(t)|\,dt\Big]^2dx\overset{\text{Höbler不等式}}{\le}\int_{-1}^1\Big(\int_{-1}^1 1^2\,dt\Big)\Big(\int_{-1}^1[u'(t)]^2dt\Big)dx$$

$$=4\int_{-1}^1(u'(t))^2dt=4\|u'\|^2_{L^2(J)}$$

令 $C=4$. $\therefore$ 存在常数 $C=4>0$，s.t. $\|u\|_{L^2(J)}\le C\|u'\|_{L^2(J)}$

(6) (a) $\because u$ 是方程(*)的光滑解 $\quad\therefore u_t-\Delta u=0 \quad (x,t)\in U\times(0,\infty)$

$$\therefore \frac{d}{dt}\int_U|u(x,t)|^2dx=\int_U\frac{\partial}{\partial t}|u(x,t)|^2dx=2\int_U u\cdot u_t\,dx$$

$$=2\int_U u\cdot\Delta u\,dx=-2\int_U|Du|^2dx+\underline{2\int_{\partial U}u\frac{\partial u}{\partial\nu}ds}=0$$

$$=-2\int_U|Du|^2dx$$

$u(x,t)=0$ on ∂U

$\int_{\partial U}u\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}ds=0$

P82 (b) 设 w 为(**) $\begin{cases}w_{tt}-\Delta w=0 & (x,t)\in U\times(0,\infty)\\ w(x,t)=0 & x\in\partial U,\ t\in[0,\infty)\end{cases}$ 的光滑解

$$\therefore \frac{d}{dt}\int_U w_t^2(x,t)+|Dw(x,t)|^2dx=2\int_U w_tw_{tt}+DwDw_t\,dx$$

$$=2\int_U w_t\Delta w\,dx+2\int_U DwDw_t\,dx$$

$$\overset{\text{散度定理}}{=}2\int_U w_t\Delta w\,dx-2\int_U w_t\Delta w\,dx+2\int_{\partial U}w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}ds$$

$$=0$$

7) (a) 边值问题 (※) $\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^n \text{ 有界, 开} \\ f \in L^2(U) \end{array} \right)$

的弱解是怎样定义的? (Evans p.315 [p.297]).

(b) 陈述 Lax-Milgram 定理 (Evans p.315 [p.298])

(c) 用 Lax-Milgram 定理 (或 Riesz-表示定理) 证明 (※) 有唯一弱解.

---

8). 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 为有界区域, $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ 解

$\begin{cases} -u'' = f & \text{on } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$, 其中 $f \in L^2(a,b)$. 证明存在常数 $C > 0$

(不依赖于 u 和 f), 使 $\|u\|_{H^2(a,b)} \le C\left(\|f\|_{L^2(a,b)} + \|u\|_{L^2(a,b)}\right)$.

(提示: (i) 方程乘 u 后积分, 得 $\|u'\|_{L^2(a,b)}$ 的估计.
(ii) 方程乘 $-u''$ 后积分, 得 $\|u''\|_{L^2(a,b)}$ 的估计.)

---

9) 证明: $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ 有界) 的光滑解是唯一的. (可用极大值原理或能量法 Evans p.28; 41 [p.28; 42])

---

10) (Poisson 方程边值问题对边值的连续依赖性).
设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $u, \tilde{u} \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ 分别满足

$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = f & \text{in } U \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{on } \partial U. \end{cases}$

其中 $f \in C(\bar{U})$, $g, \tilde{g} \in C(\partial U)$.

证明: $\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(U)} \le \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial U)}$ (用极大值原理).
(等价地: $\|u - \tilde{u}\|_{C(\bar{U})} \le \|g - \tilde{g}\|_{C(\partial U)}$.)

(11) 证明: $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U \times (0,T] \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^n \text{ 有界, 开} \\ f: U \times [0,T] \to \mathbb{R} \\ g: U \to \mathbb{R} \end{array} \right)$.

的光滑解是唯一的.

(可用能量法或抛物方程的极值原理. Evans p.63; 57 [p.62; 57])

---

(12) 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为光滑有界区域, u 为以下问题的光滑解.
($u \in C_1^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U \times (0,\infty)})$)

$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (x,t) \in U \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial U, \ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in U. \end{cases}$

(i) 证明: $\frac{d}{dt} \int_U u(x,t)^2 dx \le 0$.

(ii) $\frac{d}{dt} \int_U |Du(x,t)|^2 dx \le 0$ 是否为真? (提示: 用 Δu 乘方程后积分).

(i) $\frac{d}{dt} \int_U u^2 dx = 2\int_U u_t u \, dx = 2\int_U u \cdot \Delta u \, dx = -2\int_U |Du|^2 dx \le 0$

(ii) 在 $u_t - \Delta u = 0$ 的两边同乘以 Δu, 再在 U 上积分得 $\int_U u_t \Delta u - (\Delta u)^2 dx = 0$, 即

$\int_U u_t \Delta u \, dx = \int_U (\Delta u)^2 dx$ 又 $\operatorname{div}(u_t Du) = Du_t Du + u_t \Delta u$

$\int_{\partial U} u_t \frac{\partial u}{\partial r} ds = \int_U \operatorname{div}(u_t Du) dx = \int_U Du_t Du + u_t \Delta u \, dx$

$2\int_U (\Delta u)^2 d$

$\frac{d}{dt} \int_U |Du(x,t)|^2 dx = 2\int_U Du_t Du \, dx = 2\int_{\partial U} u_t \frac{\partial u}{\partial r} ds - 2\int_U u_t \Delta u \, dx = 2\int_{\partial U} u_t \frac{\partial u}{\partial r} ds -$

$\int_{\partial U} u_t \frac{\partial u}{\partial r} ds - \int_U (\Delta u)^2 dx$ 不一定小于0. 故 $\frac{d}{dt} \int_U |Du(x,t)|^2 dx \le 0$ 不一定为真.

若将 "当 $x \in \partial U$ 时, $u(x,t) = 0$" 改为 "当 $x \in \partial U$ 时, $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$" 则有 $\frac{d}{dt} \int_U |Du(x,t)|^2 dx \le 0$ 成

偏微分方程复习题 2015（方括号内页码为 Evans 旧版页码）

①

）判别以下方程，是线性（linear）的，半线性（semilinear）的，拟线性（quasilinear）的，还是完全非线性（Fully nonlinear）的。

(a) $u_{tt}-u_{xx}=f$ 线 (b) $\Delta u=u^2$ 半 (c) $u_t+uu_x=0$ 拟

(d) $\det(D^2u)=0$ 完全非

）写出以下各方程的名称：

(a) $\Delta u=0$ 拉普拉斯 (b) $\Delta u=f$ (c) $u_t-\Delta u=0$ Heat equation (d) $u_{tt}-\Delta u=0$ Wave equation

(e) $\mathrm{div}\left\{\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{\frac12}}\right\}=0$ Minimal surface equation

）要熟悉的微积分知识：

(a) 设 $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac12}$，求 $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^\gamma$ $=\gamma x_i|x|^{\gamma-2}$，$\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

(b) 要熟知以下事实：设 $u,v:U\to\mathbb{R}$，$U\subset\mathbb{R}^n$ 为区域，边界光滑，$\vec{\nu}$ 为 U 的单位外法向量，$\vec{F}:U\to\mathbb{R}^n$，则

(i) $\int_U \mathrm{div}\vec{F}\,dx=\int_{\partial U}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,dS$ (divergence Thm; Green Gauss Thm; 散度定理)

(ii) $\mathrm{div}(Du)=\Delta u$；(iii) $\mathrm{div}(uDv)=Du\cdot Dv+u\Delta v$

（从而 $\int_U(Du\cdot Dv+u\Delta v)dx=\int_U\mathrm{div}(uDv)dx=\int_{\partial U}uDv\cdot\vec{\nu}\,dS=\int_{\partial U}u\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}}dS$）

(c) 设 $B\subset\mathbb{R}^n$ 为以 0 为心的单位球，$f:B\to\mathbb{R}$，$f(x)=|x|^a$。对什么 a，$f\in L^1(B)$？原因是什么？（用球坐标）

）传输方程（transport equation）初值问题

$$\begin{cases} u_t+\vec{b}\cdot Du=0 & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases},\quad \vec{b}\in\mathbb{R}^n,\ g\in C^1(\mathbb{R}^n)$$

的解是什么？验证你的断言（Evans P.18）（要能从公式作简单的推理）

②

(5) 一维波动方程初值问题 $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty)\\ u(x,0)=g(x),\ u_t(x,0)=h(x) & \text{on } \mathbb{R}\times\{t=0\}\end{cases}$

的公式解（D'Alembert 公式）是 $u(x,t)=\frac12[g(x+t)+g(x-t)]+\frac12\int_{x-t}^{x+t}h(\xi)d\xi$。

试验证之（并要能从公式作简单的推理）。

(6) (a) 设 $u,v\in L^1_{loc}(U)$，$U\subset\mathbb{R}^n$ 为开区域，v 是 u 的 α^{th} 阶弱导（weak derivative）是什么意思？（其中 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in(\mathbb{Z}^+)^n$ 为多重指标）（Evans p.256 [p.242]）。$\int_U uD^\alpha\phi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U v\phi\,dx$

(b) Sobolev 空间 $W^{k,p}(U)$，$k=0,1,2,$ $p\in[1,\infty]$ 的定义是什么？ $|\alpha|\le k,\ D^\alpha u\in L^p(U)$ （Evans (p.258 [p.244])）

(c) 证明 $W^{k,p}(U)$ 是 Banach 空间（Evans p.262 [p.249]）

(d) Sobolev 嵌入定理（Sobolev Embedding Theorem）（$U\subset\mathbb{R}^n$，开，有界）。

(i) $W^{k,p}(U)\subset L^q(U)$ 若 $k<\frac np$ 和 $q\in[1,\frac{np}{n-kp}]$。

(ii) $W^{k,p}(U)\subset L^q(U)$ 若 $k=\frac np$ 和 $q\in[1,\infty)$

(iii) $W^{k,p}(U)\subset C^{m,\gamma}(\bar{U})$ 若 $k=m+\gamma$，$m\in\{0,1,2,\cdots\}$，$\gamma\in(0,1)$

$W^{k,p}(U)\subset C^{m-1,\alpha}(\bar{U})$ $\forall\alpha\in(0,1)$，若 $k-\frac np=m\in\{0,1,2,\cdots\}$，

（Evans P.284 [p.270]）

(e) 设 $B\subset\mathbb{R}^n$ 为单位球。当 (a) $n=1$，(b) $n=2$，(c) $n=3$ 时，Sobolev 空间 $W^{1,2}(B)$ 中的函数(i)是否为 $L^\infty(B)$ 函数？(ii)是否连续？

（2）再证$W^{k,p}(U)$是完备的：

设$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$是$W^{k,p}(U)$的一个柯西序列，故对$\forall|\alpha|\le k$，有$\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^{\infty}$是$L^p(U)$的一个柯西序列。又$L^p(U)$是完备的，故对$\forall|\alpha|\le k$，存在$u_\alpha\in L^p(U)$，使得：$\lim\limits_{m\to\infty}\|D^\alpha u_m-u_\alpha\|_{L^p(U)}=0$。特别地，取$\alpha=0$，则存在$u=u_0\in L^p(U)$，使得：$\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{L^p(U)}=0$。

故：$\int_U uD^\alpha\phi dx=\lim\limits_{m\to\infty}\int_U u_m D^\alpha\phi dx=\lim\limits_{m\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_U\phi D^\alpha u_m dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U\phi u_\alpha dx$，（“=”的证明详见注）

由弱倒数定义可知，对$\forall|\alpha|\le k$有：$D^\alpha u=u_\alpha$。

由$\|u\|_{W^{k,p}(U)}=(\sum\limits_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum\limits_{|\alpha|\le k}\|u_\alpha\|_{L^p(U)}^p)^{\frac{1}{p}}<\infty$，又：$D^\alpha u=u_\alpha\in L^p(U)$，则有：$u\in W^{k,p}(U)$。

又$\|u_m-u\|_{W^{k,p}(U)}=(\sum\limits_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u_m-D^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum\limits_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u_m-u_\alpha\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$，

则当$m\to\infty$时，$\|u_m-u\|_{W^{k,p}(U)}\to 0$，即：$u_m\xrightarrow{W^{k,p}(U)}u$，当$m\to\infty$时。

故$W^{k,p}(U)$中的一个柯西序列$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$收敛于$W^{k,p}(U)$中的u，即$W^{k,p}(U)$依$\|u\|_{W^{k,p}(U)}$完备。

注：当$p=1$或$p=\infty$时，对$\forall\phi\in C_c^\infty(U)$，有：

$$\left|\int_U u_m D^\alpha\phi-uD^\alpha\phi dx\right|\le ess\sup_U|D^\alpha\phi|\int_U|u_m-u|dx$$
$$=\|u_m-u\|_{L^p(U)}\cdot ess\sup_U|D^\alpha\phi|$$

当$1<p<\infty$时，由霍德尔不等式有：

$$\left|\int_U u_m D^\alpha\phi-uD^\alpha\phi dx\right|\le\|u_m-u\|_{L^p(U)}\|D^\alpha\phi\|_{L^q(U)}\quad(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$$

由$ess\sup\limits_U|D^\alpha\phi|$、$\|D^\alpha\phi\|_{L^q(U)}$有界及$\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{L^p(U)}=0$，则可得：

$\lim\limits_{m\to\infty}\left|\int_U u_m D^\alpha\phi-uD^\alpha\phi dx\right|=0$，即$\lim\limits_{m\to\infty}\int_U u_m D^\alpha\phi dx=\int_U uD^\alpha\phi dx$。

由（1）（2）可知$W^{k,p}(U)$是 banach 空间。

$d)$

$e)$解： 当$n=1$时，$1>\frac{1}{2}$（即$k>\frac{n}{p}$），此时$u\in C^{0,\frac{1}{2}}(B)\subset L^{\infty}(B)$。故$W^{1,2}(B)$中函数为$L^{\infty}(B)$中的函数，但$u$只能保证几乎处处连续。

当$n=2$时，$1=\frac{2}{2}$（即$k=\frac{n}{p}$），$u\in L^{q}(B)$，$q\in[1,\infty)$，故$W^{1,2}(B)$中函数不一定是$L^{\infty}(B)$中的函数，也不能保证连续。

当$n=3$时，$1<\frac{3}{2}$（即$k<\frac{n}{p}$），$u\in L^{q}(B)$，$q\in[1,\frac{np}{n-kp}]$，故$W^{1,2}(B)$中函数不一定是$L^{\infty}(B)$中的函数，也不能保证连续。

（1）

$a)$线性偏微分方程：关于函数和函数的各阶导数都是一次的，且它们的系数都是仅依赖于自变量的已知函数。例：$u_{tt}-u_{xx}=f$，其中f是已知函数。

$b)$半线性偏微分方程：最高阶导数纯粹是线性的，它的非线性只出现在函数及其一阶导数项。例：$\Delta u=u^2$，其中$\Delta u=u_{tt}+u_{xx}$是线性的，而u^2是非线性的。

$c)$拟线性方程偏微分方程：最高阶导数是线性的，但它们的系数依赖于未知函数的非最高阶导数。例：$u_t+uu_x=0$，其中最高阶导数是一次的，也是线性的；但是u_x（最高阶导数）的系数是u，u是未知函数也不是最高阶的。

$d)$完全非线性偏微分方程：最高阶导数也是非线性的。例：$\det(D^2u)=0$，其中

$\det(D^2u)=\begin{vmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{vmatrix}=u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}-u_{x_1x_2}u_{x_2x_1}$，显然最高阶导数$u_{x_1x_1}$与$u_{x_2x_2}$是非线性的。

（2）

$a)$ 拉普拉斯方程（Laplace's equation）：$\Delta u = 0$

$b)$ 泊松方程（Poisson equation）：$\Delta u = f$

$c)$ 热方程（Heat equation）：$u_t - \Delta u = 0$

也称扩散方程（Diffusion equation）：$u_t - \Delta u = 0$

$d)$ 波动方程（wave equation）：$u_{tt} - \Delta u = 0$

$e)$ 极小曲面方程（Minimal surface equation）：$div\left(\dfrac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right) = 0$

(3)

$a)$解：$\dfrac{\partial}{\partial x_i}|x|^{\gamma}=\gamma|x|^{\gamma-1}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_i}|x|=\gamma|x|^{\gamma-1}\cdot\dfrac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_1^2)^{-1/2}2x_i=\gamma x_i|x|^{\gamma-2}$

$b)$

$c)$解：$\|f(x)\|_{L^1(B)}=\int_B|f(x)|dx=\int_0^1(\int_{\partial B(0,t)}t^a dS)dt=\int_0^1\int_{\partial B(0,t)}t^a dSt^{n-1}dt$ ∇

$$=\int_{\partial B(0,1)}dS\int_0^1 t^{a+n-1}dt$$

其中，$\int_{\partial B(0,1)}dS$ 表示 n 维空间中单位球的表面积，为常数。

若 $f\in L^1(B)$，则 $\int_0^1 t^{a+n-1}dt$ 有界，则 $a+n-1>-1$，即 $a>-n$。

（4）解：记 $z(s)=u(x+s\vec{b},t+s)$，其中 $s\in R$。

有：$z'(s)=Du(x+s\vec{b},t+s)+u_t(x+s\vec{b},t+s)=0$

则：$u(x,t)-g(x-t\vec{b})=z(0)-z(-t)=\int_{-t}^{0}z'(s)ds=0$

故：$u(x,t)=g(x-t\vec{b})\quad(x\in R,t\geq 0)$

补充：传输方程非齐次初值问题 $\begin{cases}u_t+\vec{b}\cdot Du=f & R^n\times(0,\infty)\\ u=g & R^n\times\{t=0\}\end{cases}$

记 $z(s)=u(x+s\vec{b},t+s)$，其中 $s\in R$。

有：$z'(s)=Du(x+s\vec{b},t+s)+u_t(x+s\vec{b},t+s)=f(x+s\vec{b},t+s)$

则：$u(x,t)-g(x-t\vec{b})=z(0)-z(-t)=\int_{-t}^{0}z'(s)ds=\int_{-t}^{0}f(x+s\vec{b},t+s)ds$

$$=\int_{0}^{t}f(x+(s-t)\vec{b},s)ds$$

故：$u(x,t)=g(x-t\vec{b})+\int_{0}^{t}f(x+(s-t)\vec{b},s)ds\quad(x\in R,t\geq 0)$

（5）注：1）传输方程初值问题：$\begin{cases} u_t + \vec{b} \cdot Du = 0 & R^n \times (0,\infty) \\ u = g & R^n \times \{t=0\} \end{cases}$

解为：$u(x,t) = g(x - t\vec{b}) \quad (x \in R, t \geq 0$

2）传输方程非齐次初值问题：$\begin{cases} u_t + \vec{b} \cdot Du = f & R^n \times (0,\infty) \\ u = g & R^n \times \{t=0\} \end{cases}$

解为：$u(x,t) = g(x - t\vec{b}) + \int_0^t f(x+(s-t)\vec{b}, s)ds \quad (x \in R, t \geq 0$

注：$f(x+(s-t)\vec{b},s)$ 是由 $f(x,t)$ 中 x 变为 $x+(s-t)\vec{b}$，t 变为 s 得到。

解：一维波动方程初值问题：$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & R^n \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & R^n \times \{t=0\} \end{cases}$

由题有：$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt} - u_{xx} = 0$，记：$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$

则由：$u_{tt} - u_{xx} = 0$，有：$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0$

在 1）中取 $n=1$，$\vec{b}=1$，即可求得：$v(x,t) = a(x-t)$，其中 $a(x) = v(x,0)$。

又：$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$，即有：$u_t(x,t) - u_x(x,t) = a(x-t)$

在 2）中取 $n=1$，$\vec{b}=-1$，$f(x,t) = a(x-t)$，即可求得：

$$u(x,t) = g(x+t) + \int_0^t a(x+(s-t)-s)ds = g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy$$

注：$a(x+(s-t)-s)$ 由 $a(x-t)$ 中 x 变为 $x+(s-t)\times(-1)$，t 变为 s 得到。

又：$a(x) = v(x,0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) = h(x) - g'(x)$

故：
$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy = g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y)dy \\ &= g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}[g(x+t) - g(x-t)] \\ &= \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy \end{aligned}$$

（6）

$a)$若对所有的测试函数$\phi \in C_C^\infty(U)$，有：$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U \phi v dx$，则称$v$是$u$的$\alpha$阶弱导，记为：$v = D^\alpha u$。

$b)$ $W^{k,p}(U)$表示由所有的局部可积函数构成的空间，这些局部可积函数满足条件：对每一个α，当它的α阶弱导存在，记为：$v = D^\alpha u$，且$D^\alpha u \in L^P(U)$。

$c)$证明：在$W^{k,p}(U)$中定义范数：

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\le k}\int_u |D^\alpha u|^p dx)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p)^{\frac{1}{p}} & 1\le p\le\infty \\ \sum_{|\alpha|\le k} ess\sup_\alpha |D^\alpha u| & p=\infty \end{cases}$$

显然$W^{k,p}(U)$是线性空间。

（1）下证$W^{k,p}(U)$是赋范线性空间：

1）显然$\|u\|_{W^{k,p}(U)} \ge 0$；$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$当且仅当u几乎处处为0。

2）当$u \in W^{k,p}(U)$，$\lambda \in R$时，显然有：$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda|\|u\|_{W^{k,p}(U)}$

3）设$u,v \in W^{k,p}(U)$

i）当时$1\le p\le\infty$，$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = (\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(U)}^p)^{\frac{1}{p}}$

$$\le \left[\sum_{|\alpha|\le k}(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}^p)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

ii）当时$p=\infty$，$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\le k} ess\sup_\alpha |D^\alpha u + D^\alpha v|$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k} ess\sup_\alpha (|D^\alpha u| + |D^\alpha v|)$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k} ess\sup_\alpha |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha|\le k} ess\sup_\alpha |D^\alpha v|$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

(7)

$a)$ 记 $B[u,v]=\int_U \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}v_{x_i}+uvdx$，其中 $u,v\in H_0^1(U)$。若对 $\forall v\in H_0^1(U)$，都有：

$B[u,v]=(f,v)_{L^2(B)}$，则 $u\in H_0^1(U)$ 就是方程的弱解。

$b)$ 解： H 是实 Hilbert 空间，双线性映射 B：$H\times H\to R$，若存在常数 α，β，使得：

$|B[u,v]|\le \alpha\|u\|\|v\|$ （$u,v\in H$）与 $\beta\|u\|^2\le B[u,u]$ （$u\in H$）成立。

令 f：$H\to R$ 是 H 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $u\in H$，使得：

$$B[u,v]=\langle f,v\rangle \quad (对\ \forall v\in H)$$

$c)$ 用 Lax-Milgram 定理证明方程有唯一弱解。

解：显然 $B[u,v]$ 是双线性型，$H_0^1(U)$ 是实 Hilbert 空间。

有：$\|u\|_{H_0^1(U)}=(\|u\|_{L^2(U)}^2+\|u_{x_1}\|_{L^2(U)}^2+\cdots+\|u_{x_n}\|_{L^2(U)}^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|v\|_{H_0^1(U)}=(\|v\|_{L^2(U)}^2+\|v_{x_1}\|_{L^2(U)}^2+\cdots+\|v_{x_n}\|_{L^2(U)}^2)^{\frac{1}{2}}$

又：
$$\begin{aligned}|B[u,v]|&=\left|\int_U u_{x_1}v_{x_1}+\cdots+u_{x_n}v_{x_n}+vudx\right|\\
&\le\int_U|D_u||D_v|dx+\int_U|u||v|dx\\
&\le(\int_U|D_u|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_U|D_v|^2dx)^{\frac{1}{2}}+\int_U|u||v|dx\\
&=(\|u_{x_1}\|_{L^2(U)}^2+\cdots+\|u_{x_n}\|_{L^2(U)}^2)^{\frac{1}{2}}(\|v_{x_1}\|_{L^2(U)}^2+\cdots+\|v_{x_n}\|_{L^2(U)}^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+(\|u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}(\|v\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\le 2\|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}\end{aligned}$$

$$B[u,u]=\int_U u_{x_1}^2+\cdots+u_{x_n}^2+u^2dx=\|u\|_{H_0^1(U)}^2$$

故取 $\alpha=2$，$\beta=1$，则有：$|B[u,v]|\le\alpha\|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}$ （$u,v\in H_0^1(U)$）与

$\beta\|u\|_{H_0^1(U)}\le B[u,u]$ （$u\in H_0^1(U)$）

对于 $f\in L^2$，定义：$\langle f,v\rangle=\langle f,v\rangle_{L^2}$，对于 $|\langle f,v\rangle|=1$，有：$\langle f,v\rangle_{L^2}\le\|f\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)}$。

故定义在 $H_0^1(U)$ 上的线性泛函 f 是有界的。

由 Lax-Milgram 定理知，存在唯一的 $u \in H_0^1(U)$，使得：

$B[u,v]=\langle f,v\rangle=\langle f,v\rangle_{L^2}$　（对 $\forall v \in H_0^1(U)$），即 u 为方程唯一弱解。

（8）解：由于：$\|u\|_{H^2(a,b)}=(\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2+\|u''\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$

证明 $(\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2+\|u''\|_{L^2}^2)\le C(\|f\|_{L^2}^2+2\|f\|\|u\|+\|u\|_{L^2}^2)$ 即可

1）对 $-u''=f$ 两边乘以 u 后再积分有：$\int_a^b -u''(x)u(x)dx=\int_a^b f(x)u(x)dx$

上式左边 $=\int_a^b [u'(x)]^2 dx$

上式右边 $=\int_a^b f(x)u(x)dx\le(\int_a^b [f(x)]^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b [u(x)]^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

故有：$\|u'(x)\|_{L^2(U)}^2\le\|f\|_{L^2(U)}\|u(x)\|_{L^2(U)}$

故有：$\|u'(x)\|_{L^2(U)}^2\le 2\|f\|_{L^2(U)}\|u(x)\|_{L^2(U)}$

2）对 $-u''=f$ 两边乘以 u'' 后再积分有：$\int_a^b -[u''(x)]^2 dx=\int_a^b f(x)u''(x)dx$

故：$\int_a^b |u''(x)|^2 dx\le(\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\int_a^b |u''(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

即：$\|u''(x)\|_{L^2(U)}^2\le\|f\|_{L^2(U)}\|u''(x)\|_{L^2(U)}$

则有：$\|u''(x)\|_{L^2(U)}\le\|f\|_{L^2(U)}$

则有：$\|u''(x)\|_{L^2(U)}^2\le\|f\|_{L^2(U)}^2$

取 C=1，由 1）2）则有：$(\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2+\|u''\|_{L^2}^2)\le(\|f\|_{L^2}^2+2\|f\|\|u\|+\|u\|_{L^2}^2)$

命题获证。

（9）证明：设u与$\tilde{u}$均是方程的光滑解，记$w=u-\tilde{u}$。

则w是方程$\begin{cases} -\Delta w=0 & \mathrm{U} \\ w=0 & \partial\mathrm{U} \end{cases}$的光滑解。

由极大值原理有：$\max\limits_{\bar{U}} w=\max\limits_{\partial\mathrm{U}} w$。而在$\partial\mathrm{U}$上$w=0$，故：$\max\limits_{\bar{U}} w=\max\limits_{\partial\mathrm{U}} w=0$。

即w在$\bar{U}$中恒有$w\le 0$，即：$u-\tilde{u}\le 0$。

同理，令$w'=\tilde{u}-u$，则有：$\tilde{u}-u\le 0$。

故：$u=\tilde{u}$

（10）证明：

1）记 $w=u-\tilde{u}$

则有：$\begin{cases}-\Delta w=0 & \mathrm{U}\\ w=g-\tilde{g} & \partial\mathrm{U}\end{cases}$

由极大值原理：$\max\limits_{\bar{U}} u-\tilde{u}=\max\limits_{\partial\mathrm{U}} g-\tilde{g}$

2）记：$\tilde{w}=\tilde{u}-u$

则有：$\begin{cases}-\Delta w=0 & \mathrm{U}\\ w=\tilde{g}-g & \partial\mathrm{U}\end{cases}$

有：$\max\limits_{\bar{U}} \tilde{u}-u=\max\limits_{\partial\mathrm{U}} \tilde{g}-g$

由 1）2）则有：$\max\limits_{\bar{U}} |u-\tilde{u}|=\max\limits_{\partial\mathrm{U}} |g-\tilde{g}|$

又：$\max\limits_{\bar{U}} |u-\tilde{u}|\geq\max\limits_{U} |u-\tilde{u}|=ess\sup\limits_{U} |u-\tilde{u}|=\|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(U)}$

$$\max_{\partial\mathrm{U}} |g-\tilde{g}|=ess\sup_{U} |g-\tilde{g}|=\|g-\tilde{g}\|_{L^\infty(U)}$$

故：$\|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(U)}\leq\|g-\tilde{g}\|_{L^\infty(U)}$

（11）证明：设 u 与 $\tilde{u}$ 均是方程的光滑解，记 $w=u-\tilde{u}$ 。

则 w 是方程 $\begin{cases} w_t-\Delta w=0 & \text{U}\times[0,T] \\ w=0 & \partial\text{U}\times[0,T] \\ w=0 & \text{U}\times[t=0] \end{cases}$ 的光滑解。

由极大值原理有：$\max\limits_{\bar{U}_T} w=\max\limits_{\Gamma_T} w$ 。而在 Γ_T 上 $w=0$ ，故：$\max\limits_{\bar{U}_T} w=\max\limits_{\Gamma_T} w=0$ 。

即 w 在 $\bar{U}_T$ 中恒有 $w\le 0$，即：$u-\tilde{u}\le 0$。

同理，令 $w'=\tilde{u}-u$ ，则有：$\tilde{u}-u\le 0$。

故：$u=\tilde{u}$

（12）

（i）由：当 $x\in\partial U$ 时，$u=0$，有：$\int_{\partial U}u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS=0$

又由格林公式有：$0=\int_{\partial U}u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS=\int_U|Du|^2dx+\int_U u\Delta udx$

则有：$\int_U u\Delta udx=-\int_U|Du|^2dx\le 0$

对 $u_t-\Delta u=0$ 两边乘以 u 后，再积分，则有：$\int_U uu_t-u\Delta udx=0$

即：$\int_U uu_tdx=\int_U u\Delta udx\le 0$

则：$\frac{d}{dt}\int_U[u(x,t)]^2dx=\int_U\frac{d}{dt}[u(x,t)]^2dx=2\int_U uu_tdx=2\int_U u\Delta udx\le 0$

（ii）记：$I=\int_{\partial U}u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$

又由格林公式有：$I=\int_{\partial U}u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}dS=\int_U DuDu_tdx+\int_U u_t\Delta udx$

则有：$\int_U DuDu_tdx=I-\int_U u_t\Delta udx$

对 $u_t-\Delta u=0$ 两边乘以 Δu 后，再积分，则有：$\int_U u_t\Delta u-\Delta^2udx=0$

即：$\int_U u_t\Delta udx=\int_U\Delta^2udx$

则有：
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_U[Du(x,t)]^2dx&=\int_U\frac{d}{dt}[Du(x,t)]^2dx\\&=2\int_U DuDu_tdx\\&=2(I-\int_U u_t\Delta udx)\\&=2(I-\int_U\Delta^2udx)\end{aligned}$$

而 $I-\int_U\Delta^2udx$ 不一定小于 0，故 $\frac{d}{dt}\int_U[Du(x,t)]^2dx\le 0$ 不一定为真。

注：若将“当 $x\in\partial U$ 时，$u=0$”改为“当 $x\in\partial U$ 时，$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$”，则有：$I=0$，

则有 $\frac{d}{dt}\int_U[Du(x,t)]^2dx=2(I-\int_U\Delta^2udx)=-2\int_U\Delta^2udx)\le 0$。

偏微分方程答案：若各阶$D^k u$系数与u无关 —— 线性。 高阶、低阶系数均与u有关 —— 拟线性

高阶无u系数，低阶有u系数 —— 半线性 最高阶项非线性 —— 完全非线性

1. $u_{tt}-u_{xx}=f$ 线性

2. $u_t-u_x=0$ 线性

3. $\Delta u=u^2$ 半线性

4. $u_t+uu_x=0$ 拟线性

5. $\det(D^2u)=0$ 完全非线性

二、写出下列各方程的名称：

(a) $\Delta u=0$ 拉普拉斯方程 (b) $u_t+uu_x+u_{xxx}=0$ kdV equation

(c) $\operatorname{div}\left\{\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}=0$ 极小曲面方程 (d) $\begin{cases} \vec{u}_t+\vec{u}\cdot D\vec{u}-\Delta\vec{u}=-Dp \\ \operatorname{div}\vec{u}=0\end{cases}$ Navier-Stokes equation

三、要熟悉的微积分知识：

(a) $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^r=\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{r}{2}}=$ ~~...~~ $r|x|^{r-2}x_i$

$\|f(x)\|_{L^1(B)}=\int_B|f(x)|dx$

(b) 知识点

(c) ~~$\|f(x)\|_{L^1(B)}=\int_B|f(x)|dx=\dots t^a\dots dt$~~

$\|f(x)\|_{L^1(B)}=\int_B|f(x)|dx=\int_0^1(\int_{\partial B(0,t)}t^a ds)dt$

$=\int_0^1\int_{\partial B(0,1)}t^a ds\cdot t^{n-1}dt=\int_{\partial B(0,1)}ds\int_0^1 t^{a+n-1}dt$

($\int_{\partial B(0,1)}ds$表示n维空间中单位球面面积，为常数)

当$f\in L^1(B)\Leftrightarrow\int_0^1 t^{a+n-1}dt<\infty\Rightarrow a+n>0$

$=\frac{1}{a+n}<\infty\Rightarrow\frac{1}{\infty}<a+n$

$=\int_0^1(\int_{\partial B(0,r)}r^a ds)dr=\int_0^1(\int_{\partial B(0,1)}r^a r^{n-1}ds)dr$

$=\int_0^1(\int_{\partial B(0,1)}r^{a+n-1}ds)dr$

$=\int_{\partial B(0,1)}ds\int_0^1 r^{a+n-1}dr$

$=n\alpha(n)\int_0^1 r^{a+n-1}dr$

$\therefore$ 要使$f(x)\in L^1(B)$只须$\int_0^1 r^{a+n-1}dr<\infty$即可

(1) 当$a+n=0$时 $\int_0^1 r^{a+n-1}dr=\int_0^1\frac{1}{r}dr=\lim_{t\to 0^+}\ln r\Big|_t^1=\infty$

(2) 当$a+n\neq 0$时 $\int_0^1 r^{a+n-1}dr=\frac{r^{a+n}}{a+n}\Big|_0^1=\begin{cases}\frac{1}{a+n}, & a+n>0\\ +\infty, & a+n<0\end{cases}$

$\therefore$ $a+n>0$时 $f\in L^1(B)$

四、传输方程：

解是$u(x,t)=g(x-bt)$， $u_t=Dg(x-bt)\cdot(-b)$

首先，假设$u_t+bDu=0$有光滑解$u(x,t)$，定义关于$s\in\mathbb{R}$的函数$z(s)$.

$z(s)=u(x+sb,t+s)$，$(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

$\frac{d}{ds}z(s)=Du(x+sb,t+s)\cdot b+u_t(x+sb,t+s)=0$

于是$z(s)$为常数，也就是说：对任意的s，$u(x,t)=u(x+sb,t+s)$ ①

由于$u(x,0)=g(x)$，$t=0$ ②

对①当$s=-t$时，结合② $u(x,t)=u(x+sb,s+t)=u(x-tb,0)=g(x-tb)$

故$u(x,t)=g(x-tb)$ ③ 那么如果题设中方程组有光滑解$u(x,t)$，那么就一定可以得到③

如果$g\notin C^1(\mathbb{R}^n)$，那么题设中方程组没有光滑解，~~但若是~~ $g(x-tb)$

但若$u_t+b\cdot Du=0$无光滑解，~~但依然得~~ $g(x-tb)$ 明显是它的光滑解，矛盾

综上，方程有光滑解 $u(x,t)=g(x-tb)$

五、一维波方程初值问题：

假设 $g\in C^2(\mathbb{R})$，$h\in C^1(\mathbb{R})$

由 $u(x,t)=\frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(s)\,ds$ ①

$u_x(x,t)=\frac{1}{2}g'(x+t)+\frac{1}{2}g'(x-t)+\frac{1}{2}h(x+t)-\frac{1}{2}h(x-t)$

$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}g''(x+t)+\frac{1}{2}g''(x-t)+\frac{1}{2}h'(x+t)-\frac{1}{2}h'(x-t)$

$u_t(x,t)=\frac{1}{2}g'(x+t)-\frac{1}{2}g'(x-t)+\frac{1}{2}h(x+t)+\frac{1}{2}h(x-t)$ ②

$u_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}g''(x+t)+\frac{1}{2}g''(x-t)+\frac{1}{2}h'(x+t)-\frac{1}{2}h'(x-t)$

故 $u_{tt}-u_{xx}=0$

当$t=0$时，$u(x,0)=\frac{1}{2}[g(x)+g(x)]+\frac{1}{2}\int_x^x h(s)\,ds=g(x)$

$u_t(x,0)=\frac{1}{2}g'(x)-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}h(x)=h(x)$

故 ①为一维波动方程初值问题的公式解

六. (a) 对所有的 $\phi\in C_c^\infty(U)$，如果 $\int_U u\cdot D^\alpha\phi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U v\phi\,dx$，则$V$是$U$的弱导数.

(b) Sobolev 空间包含所有的局部可积函数，如果它对每一个 α $(|\alpha|\le k)$，$D^\alpha u\in L^p(U)$

(c) 首先验证，$W^{k,p}(U)$中的式子.

$\|u\|_{W^{k,p}(U)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U|D^\alpha u|^p\,dx\right)^{1/p}$ $1\le p<\infty$

$\|u\|_{W^{k,p}(U)}=\begin{cases}\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U|D^\alpha u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1\le p<\infty)\\ \sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U|D^\alpha u| & (p=\infty)\end{cases}$ 为U的范数 $\|u\|_{W^{k,p}(U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U|D^\alpha u|$ $p=\infty$

显然 $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)}=|\lambda|\cdot\|u\|_{W^{k,p}(U)}$.

$\|u\|_{W^{k,p}(U)}=0\Leftrightarrow u=0$. (a.e.)

假设 $u,v\in W^{k,p}(U)$

$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u+D^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{|\alpha|\le k}(\|D^\alpha u\|_{L^p}+\|D^\alpha v\|_{L^p})^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\le\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}}=\|u\|_{W^{k,p}(U)}+\|v\|_{W^{k,p}(U)}$

当$p=\infty$时，$\|u+v\|_{W^{k,\infty}(U)}=\sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U|D^\alpha u+D^\alpha v|\le\sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U(|D^\alpha u|+|D^\alpha v|)$

$\le\sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U|D^\alpha u|+\sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U|D^\alpha v|=\|u\|_{W^{k,\infty}(U)}+\|v\|_{W^{k,\infty}(U)}$

故 $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$，u在$W^{k,p}(U)$中的一个范数

其次，假设$\{u_m\}_{m=1}^\infty$是$W^{k,p}(U)$中的柯西列，也就是说，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists M$，当$m_1,m_2\ge M$时有

$\|u_{m_1}-u_{m_2}\|_{W^{k,p}(U)}<\varepsilon$，即 $\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u_{m_1}-D^\alpha u_{m_2}\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$. 对$\forall|\alpha|\le k$

即$\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$为$L^p(U)$中柯西列，而$L^p$是完备的，故有$u_\alpha\in L^p(U)$，s.t. $D^\alpha u_m\to u_\alpha$ in $L^p(U)$ ~~in $L^p(U)$~~

特别地，取$\alpha=0$，有$u_m\to u_{(0,0,\cdots,0)}$ ~~in $L^p(U)$~~ in $L^p(U)$，记$u_{(0,\cdots,0)}=u$，于是 $u_m\to u$ ~~in $L^p(U)$~~

$u_m\to u_{(0,0,\cdots,0)}=:u$ in $L^p(U)$

对于 $|\langle f,v\rangle| = |(f,v)_{L^2}| \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1(U)}$，故 $\|f\|_{H_0^1(U)} \le \|f\|_{L^2}$

故上面定义的 $H_0^1(U)$ 上的线性泛函是有界的，由Lax-Milgram定理 $\exists!\, u\in H_0^1(U)$, s.t. 对于 $\forall\, v\in H_0^1(U)$

有 $B[u,v] = \langle f,v\rangle = \langle f,v\rangle_{L^2}$，即u为方程的弱解且唯一。

(8) 即证 $C(\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2+\|u''\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{L^2}$　　$\|u\|_{H^2} = (\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2+\|u''\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$

① 对 $-u''=f$ 两边乘以u后再积分有 $\int_a^b -u''(x)\,u(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,u(x)\,dx$　①

左式左边 $=\int_a^b u'(x)^2\,dx$，对上式右边 $=\int_a^b f(x)u(x)\,dx \le (\int_a^b f^2(x)\,dx)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_a^b u^2(x)\,dx)^{\frac{1}{2}}$

故由①有 $\|u'(x)\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\cdot\|u(x)\|_{L^2}$ ……②

② 对 $-u''=f$，两边乘以 u'' 后，再积分有 $\int_a^b -u''(x)\,u''(x)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot u''(x)\,dx$

故 $\int_a^b u''(x)^2\,dx \le \int_a^b |f(x)\cdot u''(x)|\,dx \le (\int_a^b |f(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b |u''(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$

即 $\|u''(x)\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\cdot\|u''(x)\|_{L^2}$.　即 $\|u''(x)\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$　③

③ 由于 $u\in C^2(a,b)\cap C[a,b]$，故 $u\in W_0^{1,2}[a,b]$，由Poincare's 不等式

$\|u\|_{L^2} \le C\|u'\|_{L^2}$　④　　由②④ $\|u'(x)\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}$　⑤

由④⑤　$\|u(x)\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}$　⑥　由③⑤⑥结合得

$C(\|u\|_{L^2}^2+\|u'\|_{L^2}^2+\|u''\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{L^2}$　(注：以上常数C并非同一个常数，而是不同的常数)

(9) 假设 u与 $\tilde{u}$ 都为方程的光滑解，令 $w=u-\tilde{u}$，则 w为方程 $\begin{cases} -\Delta w=0 & \text{in } U \\ w=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的光滑解。

由强极值定理，$\max_{\bar{U}} w = \max_{\partial U} w$，而 $w=0$ on ∂U，故 $\max_{\partial U} w=0$，故 $\max_{\bar{U}} w=0$，

即 w在 $\bar{U}$ 中恒有 $w\le 0$，即 $u-\tilde{u}\le 0$，同理，令 $w_1=\tilde{u}-u$，有 $w_1\le 0$，即 $\tilde{u}-u\le 0$，综上，$\tilde{u}=u$.

(10) 设u, $\tilde{u}$ 皆为方程的光滑解，令 $w=u-\tilde{u}$，则 w为如下方程的光滑解。

$$\begin{cases} w_t-\Delta w=0 & \text{in } U\times[0,T] \\ w=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ w=0 & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

由热方程的强极大值原理：$\max_{\bar{U}_T} w = \max_{\Gamma_T} w$

而 $\max_{\Gamma_T} w=0$ 故 $\max_{U_T} w=0$，即 $w\le 0$，即 $u-\tilde{u}\le 0$

同理 令 $w_1=\tilde{u}-u$，有 $w_1\le 0$ 即 $\tilde{u}-u\le 0$，综上，$\tilde{u}=u$

令 $w=u-\tilde{u}$；则

w为方程 $\begin{cases} -\Delta w=0 & \text{in } U \\ w=g-\tilde{g} & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的光滑解

$\because$ w 是调和的

由极大值原理可知

$\max_{\bar{U}} w = \max_{\partial U} w = g-\tilde{g}$

$\therefore u-\tilde{u} \le g-\tilde{g}$

$\|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(U)} \le \|g-\tilde{g}\|_{L^\infty(U)}$

对任意 $\phi \in C_c^\infty(U)$，由于 $|\int_U u_m D^\alpha\phi - uD^\alpha\phi dx| \le \|u_m - u\|_{L^p}\|D^\alpha\phi\|_{L^q}$ ①

而 $u_m, u \in L^p$，$D^\alpha\phi \in L^q$ 且 $u_m \to u$ 在 $L^q(U)$；故为 $m\to\infty$ 时，①式右边趋于 u.

$\int_U u \cdot D^\alpha\phi ds = \lim_{m\to\infty}\int_U u_m D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_U D^\alpha u_m \phi dx = (-1)^\alpha \int_U u_\alpha \cdot \phi dx$.

最后一个等式成立是因为 $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ 在 $L^p(U)$ 和与①类似的方法，所以对 $\forall |\alpha|\le k$，有 $D^\alpha u = u_\alpha$，且

$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = (\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{|\alpha|\le k}\|u_\alpha\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ （$\because u_\alpha \in L^p$）故 $u \in W^{k,p}(U)$

又 $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = (\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u_m - u_\alpha\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$

（$\because D^\alpha u_m \to u_\alpha$ 在 $L^p(U)$），故 $W^{k,p}(U)$ 中的柯西列 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 收敛到 $W^{k,p}(U)$ 中的 u，即 $W^{k,p}(U)$ 在 $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ 完备，故为 Banach 空间).

(d) 知识点.

(e) 由 sobolev 嵌入定理，即 General sobolev inequalities，$k=1$，$p=2$，对于任意 $u \in W^{1,2}(B)$

$n=1$ 时，$1 > \frac{1}{2}$，此时 $u \in C^{0,\frac{1}{2}}(B) \subset L^\infty(B)$，故 $W^{1,2}(B)$ 中的函数为 $L^\infty(B)$ 中函数 u 且能保证几乎处处连续.

$n=2$ 时，此时 $1 = \frac{2}{2}$，$u \in L^q$，$q\in[1,\infty)$，故 $W^{1,2}(B)$ 中的函数不一定是 $L^\infty(B)$ 中的函数，也不能保证连续.

$n=3$ 时，此时 $1 < \frac{3}{2}$，$u \in L^q$，$q \in [1, \frac{np}{n-kp}]$ 同上.

七. (a) 边值问题. 定义 $B[u,v] = \int_U \sum_{i=1}^n u_{x_i}\cdot v_{x_i} + uv dx$，其中 $u, v \in H_0^1(U)$ ① 对 $u \in H_0^1(U)$ 和 $\forall v \in H_0^1(U)$

如果有 $B[u,v] = (f,v)_{L^2}$，那么 u 就为 (a) 中方程的弱解.

(b) Lax-Milgram 定理. H 是实 Hilbert 空间，双线性型 $B = H\times H \to R$，如果 $\exists$ 常数 $\alpha, \beta > 0$，s.t.

$|B[u,v]| \le \alpha \|u\|\cdot\|v\|$，$(u,v\in H)$ 和 $\beta\|u\|^2 \le B[u,u]$ $(u\in H)$ 成立.

全于：$H\to R$ 是 H 上的有界线性泛函，那么 $\exists! u\in H$，对 $\forall v\in H$ 有 $B[u,v] = \langle f, v\rangle$.

其中 $\|u\|$ 为 u 在 H 中的范数，$\langle f, v\rangle$ 是有界线性泛函，对 v 作用所得数. $H_0^1 \subset H^1 = W^{1,2}$

$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{W^{1,2}} = (\sum_{|\alpha|\le 1}\|D^\alpha u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$

(c) 显然，$B[u,v]$ 是双线性型 $H_0^1(U)$ 为实 Hilbert 空间，且 $\|u\|_{H_0^1(U)} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u_{x_1}\|_{L^2}^2 + \cdots + \|u_{x_n}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|v\|_{H_0^1(U)} = (|v|_{L^2}^2 + |v_{x_1}|_{L^2}^2 + \cdots + |v_{x_n}|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ 而对 ① 中定义的 $B[u,v]$ 有

$|B[u,v]| = |\int_U u_{x_1}v_{x_1} + \cdots + u_{x_n}v_{x_n} + uv dx| \le \int_U |Du|\cdot|Dv| dx + \int_U |u|\cdot|v| dx$

$\le 2\|u\|_{H_0^1(U)}\cdot\|v\|_{H_0^1(U)}$

最后一个不等式成立是因为：$\int_U |Du|\cdot|Dv| dx \le (\int |Du|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int |Dv|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_U |u|^2 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \cdots + u_{x_n}^2)^{\frac{1}{2}}(\int_U |v|^2 + v_{x_1}^2 + \cdots + v_{x_n}^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

$= \|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}$

同理 $\int_U |u|\cdot|v| dx \le \|u\|_{H_0^1(U)}\|v\|_{H_0^1(U)}$.

由 $B[u,u] = \int_U u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2 + u^2 dx$　$\|u\|_{H_0^1(U)} = (\int_U |u|^2 + u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ 故 $\exists \beta = 1$. s.t.

$\beta\|u\|^2 \le B[u,u]$

偏微分方程

(1) (a) $u_{tt}-u_{xx}=f$ 线性

(b) $\Delta u=u^2$ 半线性

(c) $u_t+uu_x=0$ 拟线性

(d) $\det(D^2u)=0$ 完全非线性

(2) (a) $\Delta u=0$ 拉普拉斯方程

(b) $\Delta u=f$ 泊松方程

(c) $u_t-\Delta u=0$ 热量方程 Heat equation

(d) $u_{tt}-\Delta u=0$ 波动方程 Wave equation

(e) $\operatorname{div}\left\{\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right\}=0$ 极小曲面方程 Minimal surface equation

(3) 要熟悉的微积分知识、

(a) 设 $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$，求 $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^r$，$r\in R\setminus\{0\}$.

解: $$\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^r=\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{r}{2}}$$
$$=\frac{r}{2}\cdot 2x_i\cdot(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{r}{2}-1}$$
$$=rx_i|x|^{r-2}$$

(b) 设 $u,v: U\to R$，$U\subset R^n$ 为区域，边界光滑，$\vec{\nu}$ 为 U 的单位外法向量，$\vec{F}: U\to R^n$，则

(i) $\int_U \operatorname{div}\vec{F}\,dx=\int_{\partial U}\vec{F}\,\vec{\nu}\,ds$ （散度定理）

(ii) $\operatorname{div}(Du)=\Delta u$

(iii) $\operatorname{div}(uDv)=Du\cdot Dv+u\Delta v$

从而 $$\int_U(Du\cdot Dv+u\Delta v)\,dx=\int_U\operatorname{div}(uDv)\,dx$$
$$=\int_{\partial U}uDv\cdot\vec{\nu}\,ds$$
$$=\int_{\partial U}u\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}}\,ds$$

(c) 设 $B\subset R^n$ 为以 0 为心的单位球，$f: B\to R$，$f(x)=|x|^a$，对~~任何~~什么 a，
$f\in L^1(B)$？原因是什么？（用球坐标）.

(4) 传输方程初值问题 P18

$$\begin{cases} u_t+\vec{b}\cdot Du=0 & \text{in } R^n\times(0,\infty) \\ u=g & \text{on } R^n\times\{t=0\} \end{cases}$$ $\vec{b}\in R^n$, $g\in C'(R^n)$ 的解是什么?

解: 传输方程的解为 $u(x,t)=g(x-bt)$

首先假设 $u_t+bDu=0$ 有光滑解 $u(x,t)$, 定义关于 $s\in R$ 的函数 $z(s)$.

$z(s)=u(x+sb,t+s)$ $\quad (x,t)\in R^n\times(0,+\infty)$

$$\frac{dz(s)}{ds}=Du(x+sb,t+s)\cdot b+u_t(x+sb,t+s)$$
$$=0$$

于是 $z(s)$ 为常数, 即函数 $z(s)$ 与 s 无关.

也就是说, 对任意的 s, 都有 $u(x,t)=u(x+sb,t+s)$ ①

又 $t=0$ 时 $u(x,0)=g(x)$ ②

对①, 当 $s=-t$ 时, 结合②, 有

$u(x,t)=u(x+sb,t+s)=u(x-tb,0)=g(x-tb)$

故题设中方程组, 有光滑解 $u(x,t)=g(x-tb)$.

(5) 一维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & \text{in } R\times(0,\infty) \\ u(x,0)=g(x),\ u_t(x,0)=h(x) & \text{on } R\times\{t=0\} \end{cases}$$ 的公式解是 $u(x,t)=\frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(\xi)d\xi$

试验证之.

解: 由于 $u(x,t)=\frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(\xi)d\xi$

则 $u_x(x,t)=\frac{1}{2}[g'(x+t)+g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)-h(x-t)]$

$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}[g''(x+t)+g''(x-t)]+\frac{1}{2}[h'(x+t)-h'(x-t)]$

$u_t(x,t)=\frac{1}{2}[g'(x+t)-g'(x-t)]+\frac{1}{2}[h(x+t)+h(x-t)]$

$u_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}[g''(x+t)+g''(x-t)]+\frac{1}{2}[h'(x+t)-h'(x-t)]$

故有 $u_{tt}-u_{xx}=0$

且 $u(x,0)=\frac{1}{2}[g(x)+g(x)]+\frac{1}{2}\int_x^x h(\xi)d\xi$
$=g(x)$

$u_t(x,0)=\frac{1}{2}[g'(x)-g'(x)]+\frac{1}{2}[h(x)+h(x)]$
$=h(x)$

因此 $u(x,t)$ 为一维波动方程初值问题的公式解.

(6) (a) 设 $u, v \in L^1_{loc}(U)$，$U \subset R^n$ 为开区域，v 是 u 的 α^{th} 所弱导是什么意思？

解：对所有的 $\phi \in C_c^\infty(U)$，如果有 $\int_U u D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U v\phi\, dx$ 成立，则 v 是 u 的 α^{th} 弱导。

(b) Sobolev 空间 $W^{k,p}(U)$，$k=0,1,2,\cdots$ $p\in[1,\infty]$ 的定义是什么？

解：Sobolev 空间包含所有的局部可积函数 $u: U\to R$，如果对于每一个 α，都有 $|\alpha|\le k$，$D^\alpha u \in L^p(U)$

(c) 证明 $W^{k,p}(U)$ 是 Banach 空间。

证明：首先验证，$W^{k,p}(U)$ 中的式子

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & 1\le p<\infty \\ \sum_{|\alpha|\le k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u| & p=\infty \end{cases}$$ 为 u 的范数。

显然，$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda|\,\|u\|_{W^{k,p}(U)}$

$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \iff u=0$ a.e.

假设 $u, v\in W^{k,p}(U)$，当 $1\le p<\infty$ 时

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\sum_{|\alpha|\le k}\left(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}\right)^p\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{1/p}$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

$p=\infty$ 时

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u + D^\alpha v|$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U (|D^\alpha u| + |D^\alpha v|)$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha v|$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}$$

故 $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ 为 u 的范数

接下来证明 $W^{k,p}(U)$ 的完备性，假设 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 为 $W^{k,p}(U)$ 中的一柯西列，对每一个 $|\alpha|\le k$，$\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ 为 $L^p(U)$ 中的一柯西列，由于 L^p 是完备的，所以有 $u_\alpha \in L^p(U)$，使得 $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ in $L^p(U)$

特别地，有 $u_m \to u_{(0,0,\cdots,0)} =: u$ in $L^p(U)$

为验证 $u\in W^{k,p}(U)$，$D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha|\le k$)，对任意的 $\phi\in C_c^\infty(U)$，有

$$\int_U u D^\alpha\phi\, dx = \lim_{m\to\infty}\int_U u_m D^\alpha \phi\, dx = \lim_{m\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_U D^\alpha u_m \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U u_\alpha \phi\, dx$$

因此 $u\in W^{k,p}(U)$，$D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha|\le k$)，所以对于所有 $|\alpha|\le k$，有 $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ in $L^p(U)$

得到 $u_m \to u$ in $W^{k,p}(U)$，故 $W^{k,p}(U)$ 中柯西列 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 收敛，故 $W^{k,p}(U)$ 依范数 $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ 完备

(d) Sobolev 嵌入定理 （$U\subset R^n$，开，有界）

(i) $W^{k,p}(U)\subset L^q(U)$ 若 $k<\frac{n}{p}$ 和 $q\in[1,\frac{np}{n-kp}]$

(ii) $W^{k,p}(U)\subset L^q(U)$ 若 $k=\frac{n}{p}$ 和 $q\in[1,\infty)$

(iii) $W^{k,p}(U)\subset C^{m,r}(\bar{U})$ 若 $k=m+r$，$m\in\{0,1,2,\cdots\}$ $r\in(0,1)$

$W^{k,p}(U)\subset C^{m-1,\alpha}(\bar{U})$ $\forall\alpha\in(0,1)$，若 $k-\frac{n}{p}=m\in\{0,1,2,\cdots\}$

$k>\frac{n}{p}$，$W^{k,p}(U)\subset C^{k-[\frac{n}{p}]-1,r}(\bar{U})$

$r=\begin{cases}[\frac{n}{p}]+1-\frac{n}{p}, & \frac{n}{p}\text{不为整数}\\ \text{任意}<1\text{的正数}, & \frac{n}{p}\text{为整数}\end{cases}$

(e) 设 $B\subset R^n$ 为单位球，当 (a) $n=1$，(b) $n=2$，(c) $n=3$ 时，Sobolev 空间 $W^{1,2}(B)$ 中的函数，

(i) 是否为 $L^\infty(B)$ 函数 (ii) 是否连续？

解：由 Sobolev 嵌入定理，对空间 $W^{1,2}(B)$，$k=1$，$p=2$，

$n=1$ 时，$1>\frac{1}{2}$，此时 $u\in C^{0,\frac{1}{2}}(B)\subset L^\infty(B)$ 故 $W^{1,2}(B)$ 中的函数 必为 $L^\infty(B)$ 中函数且能保证几乎处处连

$n=2$ 时 $1=\frac{2}{2}$，$u\in L^q$，$q\in[1,\infty)$ 故 $W^{1,2}(B)$ 中的函数不一定是 $L^\infty(B)$ 中的函数，也不能保证连续.

$n=3$ 时，$1<\frac{3}{2}$，$u\in L^q$，$q\in[1,6]$，故 $W^{1,2}(B)$ 中的函数不一定是 $L^\infty(B)$ 中的函数，也不能保证连续.

(7) (a) 边值问题(*) $\begin{cases}-\Delta u+u=f & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ （$U\subset R^n$，有界，开，$f\in L^2(U)$）的弱解是怎样定义的？

解：定义 $B[u,v]=\int_U\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\cdot v_{x_i}+uv\,dx$，其中 $u,v\in H_0^1(U)$，

对 $u\in H_0^1(U)$ 和 $\forall v\in H_0^1(U)$，如果有 $B[u,v]=(f,v)_{L^2}$ 那么 u 就为边值问题的弱解

(b) 陈述 Lax-milgram 定理

H 是实 Hibert 空间，双线性型 B：$H\times H\to R$，如果存在常数 $\alpha,\beta>0$，使得

$|B[u,v]|\le\alpha\|u\|\cdot\|v\|$，$(u,v\in H)$ 和 $\beta\|u\|^2\le B[u,u]$ $(u\in H)$ 成立，

令 f：$H\to R$ 是 H 上的有界线性泛函，那么存在唯一的 $u\in H$，对 $\forall v\in H$ 有 $B[u,v]=\langle f,v\rangle$.

其中 $\|u\|$ 为 u 在 H 中的范数，$\langle f,v\rangle$ 是有界线性泛函 f 对 v 作用的结果.

(c) 用 Lax-Milgram 定理证明(*)有唯一弱解.

(8) 设 $[a,b]\subset R$ 为有界区域，$u\in C^2(a,b)\cap C[a,b]$，解 $\begin{cases}-u''=f & \text{on } (a,b)\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$ 其中 $f\in L^2(a,b)$

证明存在常数 $C>0$（不依赖于 u 和 f），使 $\|u\|_{H^2(a,b)}\le C(\|f\|_{L^2(a,b)}+\|u\|_{L^2(a,b)})$

解：

(9) 证明：$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ （$U\subset R^n$ 有界）的光滑解是唯一的.

证明：① 能量法.

设 u 和 $\tilde{u}$ 都是方程组的解. 令 $w=u-\tilde{u}$，有 $\Delta w=0$

考虑积分 $-\int_U w\Delta w\,dx$，由于 $\Delta w=0$，结合分部积分法，有

$$0=-\int_U w\Delta w\,dx=\int_U |Dw|^2dx$$

故 $Dw\equiv 0$ in U，又 $w=0$ on ∂U，所以 $w\equiv 0$ in U 即 $u\equiv\tilde{u}$，故光滑解唯一.

② 极大值原理.

设 u 和 $\tilde{u}$ 都是方程组的光滑解，令 $w=u-\tilde{u}$，则 w 为方程组 $\begin{cases}-\Delta w=0 & \text{in } U\\ w=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的光滑解

由极大值定理，~~$\max_{\bar U}$~~ $\max_{\bar U} w=\max_{\partial U} w$，而 $w=0$ on ∂U

所以 $\max_{\partial U} w=0$ 因此 $\max_{\bar U} w=0$ 即 w 在 $\bar U$ 恒有 $w\le 0$ 即 $u-\tilde{u}\le 0$，$u\le\tilde{u}$.

同理，令 $w_1=\tilde{u}-u$，可得 $\tilde{u}\le u$，即 $u=\tilde{u}$，故光滑解唯一.

(10) 证明：$\begin{cases} u_t-\Delta u=f & \text{in } U\times(0,T] \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$ $U\subset R^n$ 有界,开 $f: U\times[0,T]\to R$ $g: U\to R$ 的光滑解是唯一的.

证明：能量法.

设 u 和 $\tilde{u}$ 都是上述方程组的光滑解, 令 $w=u-\tilde{u}$. 则 w 是 $\begin{cases} w_t-\Delta w=0 & \text{in } U_T \\ w=0 & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$ 的光滑解

定义 $e(t)=\int_U w^2(x,t)\,dx \quad (0\le t\le T)$, 则

$$\frac{de(t)}{dt}=2\int_U w w_t\,dx=2\int_U w\cdot\Delta w\,dx=-2\int_U |Dw|^2 dx\le 0$$

因此 $e(t)\le e(0)=0 \quad (0\le t\le T)$, 故 $w=0$ in U_T 即 $u=\tilde{u}$ in U_T 光滑解唯一.

(11) 泊松方程边值问题对边值的连续依赖性

设 $U\subset R^n$ 为有界区域, $u, \tilde{u}\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ 分别满足 $\begin{cases} -\Delta u=f & \text{in } U \\ u=g & \text{on } \partial U \end{cases}$ $\begin{cases} -\Delta \tilde{u}=f & \text{in } U \\ \tilde{u}=\tilde{g} & \text{on } \partial U \end{cases}$

其中 $f\in C(\bar{U})$, $g,\tilde{g}\in C(\partial U)$, 证明 $\|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(U)}\le\|g-\tilde{g}\|_{L^\infty(\partial U)}$

(等价地 $\|u-\tilde{u}\|_{C(\bar{U})}\le\|g-\tilde{g}\|_{C(\partial U)}$) 极大值原理.

证明：令 $w=u-\tilde{u}$, 则 w 为方程 $\begin{cases} -\Delta w=0 & \text{in } U \\ w=g-\tilde{g} & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的光滑解.

$\because$ w 是齐次的, 由极大值定理可知, $\max_{\bar{U}} w=\max_{\partial U} w=g-\tilde{g}$

$\therefore$ $u-\tilde{u}\le g-\tilde{g}$ $\quad\therefore \|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(U)}\le\|g-\tilde{g}\|_{L^\infty(U)}$