

学校代码 10530

学 号 200899090037

分类号 O241.82

密 级 \_\_\_\_\_

# 湘潭大学

## 博士学位论文

### 界面问题和 Laplace-Beltrami 问题中的 有限元超收敛及网格生成优化研究

学位申请人 魏华祎

指导教师 黄云清 教授 陈龙 副教授

学院名称 数学与计算科学学院

学科专业 计算数学

研究方向 偏微分方程数值方理论法及其应用

二零一二年四月十九日

# 界面问题和 Laplace-Beltrami 问题中的 有限元超收敛及网格生成优化研究

学位申请人 魏华祎

指导教师 黄云清 教授 陈龙 副教授

学院名称 数学与计算科学学院

学科专业 计算数学

研究方向 偏微分方程数值方理论法及其应用

二零一二年四月十九日

**Candidate: Wei Huayi**  
**Supervisor: Professor Huang Yunqing**  
**Associate Professor Chen Long**

## **Dissertation**

**Submitted to School of Mathematics and Computational Science  
of Xiangtan University,  
in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of**

**Doctor of Science  
in Computational Mathematics**

**Arpil 19, 2012**



# 湘潭大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是我本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人或集体已经发表或撰写的研究成果。对本文的研究做出任何贡献的个人和集体，均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文题目：界面问题和 Laplace-Beltrami 问题中的有限元超收敛及网格生成优化研究

学位论文作者签名：\_\_\_\_\_ 日期： 年 月 日

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解湘潭大学有关保留、使用学位论文的规定。本人授权湘潭大学可以保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅；可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密学位论文按学校规定处理。)

学位论文题目：界面问题和 Laplace-Beltrami 问题中的有限元超收敛及网格生成优化研究

学位论文作者签名：\_\_\_\_\_ 日期： 年 月 日

作者指导教师签名：\_\_\_\_\_ 日期： 年 月 日



## 摘 要

本文主要围绕二维椭圆界面问题和 Laplace-Beltrami 问题中的线性有限元的超收敛现象展开研究。对于二维椭圆界面问题, 我们用界面拟合网格来离散求解区域, 然后用标准线性有限元来离散其模型方程。在适度结构网格的假设下, 考虑了界面拟合对超收敛的影响, 证明了线性有限元解超逼近于真解的线性插值, 并由此导出了二维椭圆界面问题的一个最大模的估计。我们还结合最新顶点加密算法和 Börgers 算法设计了一个二维界面拟合网格的快速生成算法。Börgers 算法是一个经典的二维界面拟合网格生成算法, 其基本思想是在一致网格的基础上, 把界面附近的网格结点扰动到界面上, 然后对于界面附近被扰动的小四边形, 选择适当的对角线来拟合界面和保持网格质量。对于适当光滑界面, 可以证明 Börgers 算法生成的界面拟合网格是拟一致的和正则的。但对于结构复杂的界面, Börgers 算法需要很密的一致网格来很好的拟合界面, 这就使后续的计算浪费了很多不必要的计算量。改进后的 Börgers 算法, 可以用较少的网格点更好地拟合复杂的界面, 且能保证生成的网格的正则性。改进后的算法生成的界面拟合网格还有一定的结构性, 可以利用现有的粗化算法得到一组嵌套网格。基于这组嵌套网格, 我们设计了一个高效的多重网格解法器来求解相应的代数系统, 数值试验表明这个解法器关于问题的规模和扩散系数的间断都是稳健的。我们的网格生成算法所用的数据结构, 局部加密和粗化算法都非常简单, 不需要继承树结构来存储网格数据。

对于 Laplace-Beltrami (LB) 问题, 我们用三角形网格来逼近曲面, 用曲面线性有限元来离散模型方程。同样在适度结构网格的假设下, 考虑了用三角形网格逼近曲面带来的几何误差对超收敛的影响, 证明了曲面线性有限元解超逼近于真解的线性插值。并把平面有限元中的几种梯度恢复格式推广到了曲面有限元上, 其中包括简单平均, 面积加权平均, 全局和局部  $L^2$  投影, 以及 Zienkiewicz 和 Zhu (ZZ) 格式, 并证明了恢复后的梯度可以更好的逼近真解的梯度。我们还考虑了曲面三角形网格的 CVT 优化问题, 设计了一个足够光滑且能够反映曲面曲率变化的密度函数。实验表明这个密度函数用在曲面三角形网格的 Lloyd 优化方法中, 可以有效改善网格的质量。

**关键词:** 线性有限元方法, 超收敛, 界面拟合网格生成, 曲面网格生成, Lloyd 方法



## ABSTRACT

In this study, we focus on the superconvergence phenomenon in 2D elliptic interface problem and Laplace–Beltrami problem.

For 2D elliptic interface problem, adaptive mesh refinement and the Börgers’ algorithm are combined to generate a body-fitted mesh which can resolve the interface with fine geometric details. Standard linear finite element method based on such body-fitted meshes is applied to the elliptic interface problem and proven to be superclose to the linear interpolant of the exact solution. Based on this superconvergence result, a maximal norm error estimate is obtained. The basic idea of the Börgers’ algorithm is to use a Cartesian grid but perturb only the grid points near the interface onto the interface and choose an appropriate diagonal of perturbed quadrilaterals to fit the interface and maintain the mesh quality. The final body-fitted mesh is shape regular and topologically equivalent to the Cartesian grid. The data structure and meshing algorithms, including local refinement and coarsening, are very simple. In particular, no tree structure is needed. An efficient solver for solving the resulting linear algebraic systems is also developed and shown be robust with respect to both the problem size and the jump of the diffusion coefficients.

For Laplace–Beltrami problem, superconvergence results and several gradient recovery methods of finite element methods in flat spaces are generalized to the surface linear finite element method for the Laplace–Beltrami equation on general surfaces with mildly structured triangular meshes. For a large class of practically useful grids, the surface linear finite element solution is proven to be superclose to an interpolant of the exact solution of the Laplace–Beltrami equation, and as a result various postprocessing gradient recovery, including simple and weighted averaging, local and global  $L^2$ -projections, and Zienkiewicz and Zhu (ZZ) schemes are devised and proven to be a better approximation of the true gradient than the gradient of the finite element solution. Numerical experiments are presented to confirm the theoretical results. We also design a smooth density function which includes the surface curvature information and can be used in the CVT optimization of surface triangulation. The numerical tests show that the density function is effective to improve the quality of the surface triangulation.

**Key Words:** Linear finite element method, superconvergence, body-fitted mesh generation, surface mesh generation, Lloyd method



# 目 录

摘要 .....	I
ABSTRACT .....	III
第一章 引言 .....	1
第二章 适度结构网格与有限元的超收敛 .....	7
第三章 椭圆界面问题线性有限元的超收敛 .....	9
3.1 Sobolev 空间及椭圆界面问题的弱形式 .....	9
3.2 椭圆界面问题的有限元离散 .....	10
3.3 超收敛 .....	11
第四章 界面拟合网格的快速生成算法 .....	17
4.1 网格结构与质量 .....	17
4.2 界面拟合网格的快速生成算法 .....	18
4.2.1 一个例子 .....	20
4.3 数值试验 .....	26
4.3.1 例 1 .....	27
4.3.2 例 2 .....	28
4.3.3 例 3 .....	30
第五章 Laplace-Beltrami 问题的线性有限元超收敛 .....	33
5.1 预备知识 .....	33
5.1.1 光滑曲面上的 Sobolev 空间 .....	33
5.1.2 LB 方程的弱形式及其正则性 .....	35
5.1.3 曲面三角形网格上的 Sobolev 空间 .....	35
5.1.4 曲面线性有限元 .....	36
5.2 超收敛 .....	37
5.3 几种梯度恢复方法 .....	42
5.3.1 曲面三角形网格上的局部平均格式 .....	42
5.3.2 切平面上的局部最小二乘拟合 .....	44
5.3.3 全局 $L^2$ 投影 .....	47
5.3.4 有限体解的恢复格式 .....	50

<b>第六章 光滑隐函数曲面的三角形网格逼近的 CVT 优化 .....</b>	<b>53</b>
6.1 二维区域上 CVT 和 CVDT .....	53
6.2 光滑隐函数曲面上 CVT 优化 .....	54
6.3 光滑隐函数曲面上的高质量网格生成 .....	56
6.3.1 单位球面 .....	57
6.3.2 椭球面 .....	58
6.3.3 心形曲面 .....	58
6.3.4 Quartics 曲面 .....	58
6.3.5 McMullen K3 曲面 .....	59
6.3.6 Orthocircle 曲面 .....	59
6.3.7 Squared Sphere 曲面 .....	60
6.3.8 Double Torus 曲面 .....	61
6.4 超收敛数值算例 .....	62
6.4.1 单位球面 .....	64
6.4.2 环面 .....	64
6.4.3 椭球面 .....	65
6.4.4 心形曲面 .....	66
6.4.5 Quartics 曲面 .....	67
6.4.6 Squared sphere 曲面 .....	68
6.4.7 总结 .....	68
<b>第七章 总结及下一步工作 .....</b>	<b>71</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>79</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>81</b>
<b>个人简历、在学期间发表的学术论文及研究成果 .....</b>	<b>83</b>

## 表 目 录

表 4.1 例 1 在 $H^1, L^2$ , 和 $L^\infty$ 范数下的误差. ....	28
表 4.2 例 1, 对于 $\beta^- = 1$ 和不同的 $\beta^+$ , 以一个 $\mathcal{V}$ -cycle 为预条件子的共轭梯度法的迭代步数和时间. ....	28
表 4.3 例 2 在 $H^1, L^2$ , 和 $L^\infty$ 范数下的误差. ....	29
表 4.4 例 2, 对于 $\beta^- = 1$ 和不同的 $\beta^+$ , 以一个 $\mathcal{V}$ -cycle 为预条件子的共轭梯度法的迭代步数和时间. ....	30
表 4.5 例 3 在 $H^1, L^2$ , 和 $L^\infty$ 范数下的误差. ....	31
表 4.6 例 3, 对于 $\beta^- = 1$ 和不同的 $\beta^+$ , 以一个 $\mathcal{V}$ -cycle 为预条件子的共轭梯度法的迭代步数和时间. ....	32
表 6.1 例 1. 单位球面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表. ...	65
表 6.2 例 2. 环面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表. ....	66
表 6.3 例 3. 椭球面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表. ....	67
表 6.4 例 4. 心形曲面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表. ...	68
表 6.5 例 5. Quartics 曲面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表. ....	69
表 6.6 例 6. Squared sphere 曲面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表. ....	70



# 图 目 录

图 1.1 $\Gamma$ 把 $\Omega$ 分为不相交的两部分: $\Omega^-$ 和 $\Omega^+$ , 其中 $\Omega^-$ 是由 $\Gamma$ 所围成的区域.	2
图 3.1 投影 $\mathcal{P}_0$ . 其中, $\tau^+ = \tau \cap \Omega^+$ , $\tau^- = \tau \cap \Omega^-$ , $ \tau^+  \lesssim h_\tau^3$ .	10
图 4.1 初始网格和一致二分加密. (a) 初始网格 $\mathcal{T}_0$ . (b) 一致二分加密 $\mathcal{T}_0$ 一次.	18
图 4.2 估计曲率时考虑的三种情形. (a) 所有包含 $p$ 的单元是界面单元. (b) 包含 $p$ 的界面单元被包含 $p$ 的非界面单元分为两部分. (c) 界面顶点分别在 $\Omega^-$ 和 $\Omega^+$ 内形成两条逼近界面的折线.	20
图 4.3 折线 $\Gamma_h$ 在其顶点处的离散曲率. 这里设逆时针方向为折线的正向. 从线段 $(p_1, p_2)$ 到线段 $(p_2, p_3)$ , $\Gamma_h$ 向左旋转, 它在顶点 $p_2$ 处的离散曲率为 $B$ 度; 从线段 $(p_2, p_3)$ 到线段 $(p_3, p_4)$ , $\Gamma_h$ 向右旋转, 它在顶点 $p_3$ 处的离散曲率为 $-A$ 度.	21
图 4.4 第二步之后的网格及其局部细节.	21
图 4.5 Type A 界面单元. 这些单元的腰局部上形成了一个笛卡尔网格.	22
图 4.6 Type B 单元的例子. (a) Type B 界面单元. (b) 界面附近的 Type B 单元对, 但它们不是界面单元. (c) 过渡 Type B 界面单元 $\tau_B$ , 它满足条件 $\phi(m_2)\phi(m_3) < 0$ . (d) 过渡 Type B 界面单元 $\tau_B$ , 它满足条件 $\phi(m_{14})\phi(m_{34}) < 0$ 和 $\phi(m_2)\phi(p_2) < 0$ .	23
图 4.7 边交换和 CPT 光滑. (a) 扰动以后剩下的界面单元对. 每一个单元对中两个单元共用一个穿过界面的最长边. (b) 边交换使得 (a) 中的界面单元对的共用边拟合界面 $\Gamma$ . (c) 边交换来改善界面附近单元对的最小角. (d) 局部的 CPT 光滑.	25
图 4.8 (a) 最终生成的网格. (b) 其局部细节.	25
图 4.9 例 1 的网格和逼近解. (a) 初始的界面拟合网格, 其最小角为 $29.0972^\circ$ . (b) 界面拟合网格上的线性有限元解.	27
图 4.10 例 1 的误差及其收敛阶. (a) $\ u - u_h\ _0$ 和 $ u - u_h _1$ . (b) $\ \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\ _0$ 和 $\ u_I - u_h\ _\infty$ .	28
图 4.11 例 2 的网格和逼近解. (a) 初始的界面拟合网格, 其最小角为 $25.7137^\circ$ . (b) 界面拟合网格上的线性有限元解.	29
图 4.12 例 2 的误差及其收敛阶. (a) $\ u - u_h\ _0$ 和 $ u - u_h _1$ . (b) $\ \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\ _0$ 和 $\ u_I - u_h\ _\infty$ .	30

图 4.13 例 3 的网格和逼近解. (a) 初始的界面拟合网格, 其最小角为 $26.2797^\circ$ . (b) 界面拟合网格上的线性有限元解. ....	31
图 4.14 例 3 误差及其收敛阶. (a) $\ u - u_h\ _0$ 和 $ u - u_h _1$ . (b) $\ \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\ _0$ 和 $\ u_I - u_h\ _\infty$ . ....	31
图 5.1 边 $E$ 的单元片 $\Omega_E$ . ....	37
图 5.2 平面网格和曲面网格上的单元片. (a) 平面上 $x_i$ 周围的单元片 $\Omega_i$ . (b) 曲面上 $x_i$ 周围的单元片 $\Omega_i$ . ....	42
图 6.1 (a) 不满足 Delaunay 性质的边 $e'$ , 其中 $\alpha + \beta > \pi$ . (b) 换边后得到的新边 $e$ , 满足 $\alpha + \beta < \pi$ . ....	54
图 6.2 (a) 单位球面的 Delaunay 三角形网格逼近和测地 Voronoi 区域逼近. (b) 左图的局部细节. ....	55
图 6.3 $S$ 在三角形顶点处的单位外法线方向. ....	55
图 6.4 单位球面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 1789. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. ....	57
图 6.5 在 Lloyd 优化过程中, 单位球面的三角形网格的最大角和最小角的变化趋势. 其中实线为最大角的变化趋势, 虚线为最小角的变化趋势. ....	57
图 6.6 椭球面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 3394. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	58
图 6.7 心形曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 2697. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	59
图 6.8 Quartics 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 4528. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	60
图 6.9 McMullen K3 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 4906. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	61
图 6.10 Orthocircle 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 5482. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	62
图 6.11 Squared Sphere 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 5847. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	63
图 6.12 Double Torus 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 5482. (b) 当 $\gamma = 0$ 时优化后的网格. (c) 当 $\gamma = 1$ 时优化后的网格. (d) 当 $\gamma = 2$ 时优化后的网格. ....	64
图 6.13 单位球面上的解 $u(x, y, z) = xy$ 的数值逼近, 自由度个数为 3734. ....	65
图 6.14 环面上的解 $u(x, y, z) = x - y$ 的数值逼近, 自由度个数为 3164. ....	66
图 6.15 椭球面上的解 $u(x, y, z) = \sin(x)$ 的数值逼近, 自由度个数为 3990. ....	67
图 6.16 心形曲面上的解 $u(x, y, z) = xy$ 的数值逼近, 自由度个数为 3782. ....	68

图 6.17 Quartics 曲面上的解 $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$ 的数值逼近, 自由度个数为 4976.	69
图 6.18 Squared sphere 曲面上的解 $u(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$ 的数值逼 近, 自由度个数为 3370.	70



# 第一章 引言

在现代科学与工程计算中,有限元方法是一种重要的偏微分方程数值求解方法,而超收敛现象是有限元计算中一种有趣实用的现象。基于超收敛的后处理方法是一种简单高效地改善有限元数值解逼近精度的方法。它只需要花费很小的计算代价(计算复杂度是  $O(N)$ ),对有限元数值解进行简单的处理,就可显著提高有限元数值解的逼近精度,经过处理后的数值解还可以用来设计恢复型的后验误差估计子,引导自适应有限元网格的加密过程。例如,对于二维区域上的 Possion 问题,其线性有限元解的梯度对真解梯度的逼近精度只有一阶,但如果网格满足一定的条件,对线性有限元解的梯度进行某种重构,其逼近真解梯度的精度就可以达到二阶。因此应用超收敛方法来提高有限元数值解的逼近精度非常具有实践意义。

自从 1967 年 Zienkiewicz 等人在计算中发现所谓的应力佳点后,数学家们在有限元超收敛领域做了大量深入的研究工作,获得了一系列丰硕的成果 [50, 81, 91, 93],已经建立起了比较完整的理论体系,形成了比较系统的思想方法,如局部平均法 [14], 单元分析法 [92], 局部对称理论 [76], 及计算机搜索法 [2]。但还有一些有限元的应用领域,如椭圆界面问题中基于界面拟合网格的有限元方法,还有定义在曲面上的偏微分方程的有限元方法,还没有细致的探讨,其超收敛理论及方法还值得进一步的研究。

Bank 和 Xu 在 [4] 中给出了一种适度结构网格的概念,即  $O(h^{2\sigma})$  非正规三角形网格。在这种网络中,其绝大部分相邻三角形单元构成了一个  $O(h^2)$  的近似平行四边形(即强正规条件 [18])。对于定义在  $O(h^{2\sigma})$  非正规网格上的线性有限元,证明了有限元解超逼近于真解的线性插值。利用 [4] 中的思想方法, Huang 和 Xu [52] 又进一步探讨了这种适度结构网格上的二次有限元的超收敛性。本研究将利用并改进 [4] 中给出的思想方法,来探讨二维椭圆界面问题和 Laplace–Beltrami (LB) 问题中的有限元超收敛估计。

二维椭圆界面模型在流体动力学,材料科学,电磁学等实际应用中经常遇到 [7, 15, 16, 57]。记  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^2$  中的有界开区域;  $\Gamma$  为嵌入  $\Omega$  中的连续简单闭曲线。 $\Gamma$  把  $\Omega$  分为不相交的两部分:  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$ , 其中  $\Omega^-$  是由  $\Gamma$  所围成的区域,见图1.1。一个典型的椭圆界面模型有如下形式:

$$-\nabla \cdot (\beta(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad (1.1)$$

其中  $u(x)$  在界面  $\Gamma$  上满足如下的跳跃条件:

$$[u]_\Gamma = u^+ - u^- = q_0, \quad [\beta u_n]_\Gamma = \beta^+ u_n^+ - \beta^- u_n^- = q_1, \quad (1.2)$$

并且在  $\partial\Omega$  满足一定的 Dirichlet 或者 Neumann 边界条件. 其中  $\mathbf{n}$  是界面  $\Gamma$  上从  $\Omega^-$  指向  $\Omega^+$  的单位法向量.  $u_{\mathbf{n}}$  表示法向通量  $(\nabla u) \cdot \mathbf{n}$ . 上标 + 和 - 表示一个函数分别在  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$  上的限制. 扩散系数  $\beta(x)$  为每个子区域上的光滑正函数, 但在界面  $\Gamma$  上可能有间断. 正是由于解及其通量在界面上的间断性, 使得界面问题的数值方法成为一个比较有挑战性的课题.

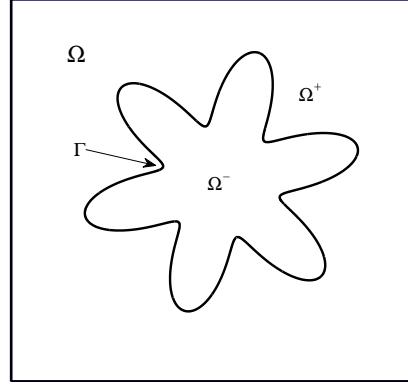


图 1.1  $\Gamma$  把  $\Omega$  分为不相交的两部分:  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$ , 其中  $\Omega^-$  是由  $\Gamma$  所围成的区域.

根据求解区域的离散方式的不同, 椭圆界面问题的数值方法粗略可分为两类: 笛卡尔网格方法和界面拟合网格方法. 基于笛卡尔网格的数值方法通常假设求解区域  $\Omega$  是一个矩形区域, 四条边分别与  $x$  轴和  $y$  轴平行, 然后用笛卡尔网格来离散整个区域. 这种方法的优点是网格生成非常简单, 但为了处理界面上的间断条件, 需要修改界面附近网格点上的有限差分格式或者有限元基函数, 见 [29, 53, 55–59, 69]. 如果使用界面拟合网格, 就可以用标准的有限元来离散模型方程 (1.1), 而不用对基函数做任何的修改. 因此基于界面拟合网格的有限元方法成功的关键在于有一个快速的界面拟合网格生成器. 本研究首先证明基于界面拟合网格的线性有限元方法, 在  $O(h^{2\sigma})$  非正规网格的假设下, 其线性有限元解超逼近于真解的线性有限元插值, 见定理3.2:

$$\begin{aligned} \|\beta_h^{1/2}(\nabla u_h - \nabla u_I)\|_{0,\Omega} &\leq C_1 h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+}) \\ &\quad + C_2 h_{\Gamma}^{3/2} (\|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中  $u$  为(1.1)的真解,  $u_h$  为  $u$  在界面拟合网格上的逼近,  $u_I$  为  $u$  的线性插值. 估计式(1.3)中包含了界面拟合引入的误差  $C_2 h_{\Gamma}^{3/2} (\|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma})$ . 基于这个超收敛结果, 马上可得二维椭圆界面问题的一个最大模估计, 这是一个新的结果, 且不需要离散的最大值原理.

本研究还探讨了界面拟合网格的快速生成算法. 我们感兴趣的是半结构(semi-structured) 三角形界面拟合网格 [10, 12, 71, 74], 尤其是 Börgers 算法 [12] 生

成的网格. Börgers 算法的基本思想是, 在笛卡尔网格的基础上, 把界面附近的网格结点扰动到界面上, 然后对于界面附近被扰动的小四边形, 选择适当的对角线来拟合界面和保持网格质量. 最终生成的界面拟合网格是形状正则的, 在拓扑结构上也等价于原来的笛卡尔网格. 这样的拓扑结构可以用来设计多重网格类型的解法器. Börgers 算法已经在椭圆界面问题中得到应用, 见 [82, 83]. 对于一般的非结构三角形界面拟合网格生成算法, 见 Triangle [77] 和 Distmesh [70].

但当界面很复杂, 有很多几何细节时, 基于笛卡尔网格或者它的扰动的数值方法, 需要一个很细密的网格来捕捉界面的细节. 这样就大大增加了计算量. 如果能在界面附近使用自适应网格剖分技术, 就可以显著减少计算量. 这里我们要区分两种不同类型的网格自适应: 捕捉界面的几何细节和捕捉解的奇性 [27]. 本研究工作关注前者. 因为解的奇性往往出现在界面附近, 所以通常捕捉界面的几何细节的自适应就足够了. 即使解的奇性出现在其它地方, 一旦初始网格很好地捕捉到了界面, 基于后验误差估计的标准自适应算法就可以用来捕捉这类奇性. 本研究结合最新顶点自适应网格剖分技术和 Börgers 算法来生成 2D 界面拟合网格, 它可以很好的捕捉到复杂界面的几何细节, 并且能够维护网格的继承结构信息. 因为一条曲线的特征可以用它的曲率来刻画, 所以我们设计一个离散的曲率估计子来引导网格加密过程. 所有跨过界面的单元(称为界面单元), 如果有一个比较大的曲率估计子, 都会被加密, 直到网格中没有这样的单元. 然后, 用 Börgers 算法把网格附近的点扰动到界面上, 从而形成一个界面拟合网格. 最后使用边交换和网格光滑技术进一步改善网格的质量.

我们的算法使用的数据结构非常简单, 不需要任何的树结构, 生成网格的继承结构信息隐含地存储在三角形单元的顺序中, 也不需要处理悬点的问题. 而其他的一些自适应方法要使用复杂的四叉树结构 [89], 还要特别处理悬点的问题. 我们可以用这种隐含的继承结构信息设计多重网格类型的预条件子. 结合预条件共轭梯度法, 就可以高效求解相应的离散代数系统. 数值试验表明这个解法器关于问题规模和扩散系数和间断都是稳健的.

本论文的第二个专题是 Laplace–Beltrami (LB) 模型, 它所用的 LB 算子是平面中的 Laplace 算子在曲面上的一般化. 有很多定义在曲面上的偏微分方程都包含 LB 算子, 例如平均曲率流 [42], 曲面扩散流 [73], 及 Willmore 流 [79] 等. 这些偏微分方程常常用在图像处理、流体动力学、天气预报、气候模型等领域, 见 [32, 75, 84]. 设  $S$  是  $\mathbb{R}^3$  中一个二维紧闭的  $C^3$  超曲面, 且  $\partial S = \emptyset$ .  $f$  是定义在  $S$  的给定函数, 满足  $\int_S f \, d\sigma = 0$ , 其中  $d\sigma$  是  $S$  的曲面测度.  $u$  是如下 LB 方程的解

$$-\Delta_S u = f \text{ on } S, \quad (1.4)$$

其中  $\Delta_S$  是  $S$  上的 LB 算子. 为了使得(1.4)的解唯一, 这里要求  $\int_S u \, d\sigma = 0$ .

对于定义在一般曲面上的偏微分方程的有限元方法, 人们已经做了大量的研究工作, 见 [8, 30, 31, 36–39, 51, 65, 67] 及其引用文献. Dziuk [37] 用三角形构成的多面体面  $S_h$  来逼近一个曲面  $S$ , 然后在  $S_h$  上用线性有限元来离散 LB 方程得到有限元解, 并且给出了一个渐近的误差估计. 本文以后就称这种方法为曲面线性有限元方法, 所用的网格为曲面三角形网格. 用  $S_h$  逼近  $S$  的好处在于避免了  $S$  的全局或局部参数化. 最近 Demlow [30] 在文献 [37] 基础上, 设计了曲面高次有限元方法, 并给出了  $L^2$ 、 $H^1$  和最大模的先验误差估计.

本研究利用文献 [37] 提出的曲面线性有限元离散 LB 方程, 把 [4] 中的理论结果推广到曲面线性有限元上. 从平面情形到曲面情形, 主要有两个困难. 首先, 用  $S_h$  来逼近曲面  $S$ , 引入了一个几何逼近误差. 其次,  $S_h$  中两个相邻的三角形往往不在一个平面上, 所以 [4] 中的结论不能直接使用. 但经过分析可知, 如果曲面  $S$  是  $C^3$  的,  $S_h$  是形状正则和拟一致的 (尺寸参数记为  $h$ ), 则曲面的几何逼近误差就是  $O(h^2)$ . 另外, 对于  $S_h$  中任意两个相邻的三角形, 可知  $S_h$  在这两个三角形上的单位外法线向量之间的夹角是  $O(h)$ . 在  $C^3$  曲面和  $O(h^{2\sigma})$  非正规网格的假设下, 我们证明定理5.2成立:

$$\|\nabla_{S_h} u_h - \nabla_{S_h} \bar{u}_I\|_{0,S_h} \leq C_1 h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,S} + \|u\|_{2,\infty,S}) + C_2 h^2 \|f\|_{0,S}, \quad (1.5)$$

其中  $u$  为 LB 方程的真解, 定义在  $S$  上;  $u_h$  是  $u$  在  $S_h$  上的线性有限元逼近,  $\bar{u}$  是  $u$  在  $S_h$  上的扩展,  $\bar{u}_I$  是  $\bar{u}$  的线性插值. 估计式(1.5)中包括了几何逼近带来的误差  $C_2 h^2 \|f\|_{0,S}$ .

梯度恢复是一种构造比有限元解梯度能更好逼近真实梯度的技术, 已经有了大量的研究文献 [4–6, 17, 36, 86, 90]. 它可以用来改进有限元解的数值逼近精度, 也可以用来为自适应程序提供后验误差估计子. Bank 和 Xu [4] 对于  $O(h^{2\sigma})$  非正规三角形网格, 利用全局  $L^2$  投影设了一个梯度恢复格式, 并证明了恢复后的梯度的超收敛性. 在文献 [5] 中, 对于一般非结构和形状正则的网格, 他们利用多重网格的光滑算子, 提出了一种后处理的梯度恢复格式. 他们和 Zheng 一起又成功地把这种方法推广到高阶有限元 [6]. Xu 和 Zhang [86] 对于梯度局部恢复格式, 包括简单平均, 面积加权平均, 局部  $L^2$  投影以及离散局部最小二乘 (即 Z-Z 恢复 [90]), 提出了一个一般的分析框架. 但他们的证明存在一点问题, 即把三角形单元的重心做为线性插值导数的超收敛点使用, 但三角形单元的重心不是线性插值的超收敛点, 详细讨论见 [93, pp. 285]. 上面提到这些结果都是平面情形下的结果. 对于曲面三角形网格, Du 和 Ju [36] 为球面上的对流扩散方程的有限体逼近设计了一种梯度恢复方法, 并在数值实验中观察到超收敛现象.

我们首先证明了曲面三角形网格上的简单平均和面积加权平均梯度恢复方法的超收敛性. 但由于曲面的弯曲, 在曲面三角形网格上, 是不能直接用局部  $L^2$  投影和局部离散最小二乘方法来恢复梯度的. 解决办法是把每个网格顶点  $x_i$  对应的单元片  $\Omega_i$  都投影到  $S$  在  $x_i$  处的切平面上, 就会把问题转化为平面的情形. 我们证明, 对于  $S_h$  的一个顶点  $x_i$ , 如果它对应的单元片  $\Omega_i$  是  $O(h^2)$  对称的, 就有

$$|(G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I)(x_i) - \nabla_S u(x_i)| \leq Ch^2 \|u\|_{3,\infty, \mathcal{P}_0(\Omega_i)}, \quad (1.6)$$

其中  $G_h$  是 5.3 节中一个适当定义的梯度恢复算子,  $\mathcal{P}_0(\Omega_i)$  是  $\Omega_i$  在  $S$  上的投影.

Bank 和 Xu [4] 利用全局  $L^2$  投影  $Q_h$  给出的梯度恢复方法可以直接用到曲面线性有限元上, 但其证明方法就不再适用了. 原因在于用三角形网格逼近曲面带来的几何误差. 记  $w_h = Q_h \nabla_{S_h} u_h$ , 把  $w_h$  扩展到  $S$  上记为  $\tilde{w}_h$ . 因为  $S$  上的切向梯度算子  $\nabla_S$  和  $S_h$  上的切向梯度算子  $\nabla_{S_h}$  的差别只有  $O(h)$ , 利用 [4] 的方法, 我们只能证明到一阶逼近, 即  $\|\nabla_S u - \tilde{w}_h\|_{0,S} \leq Ch$ . 但借助全局恢复算子  $Q_h$  的一个扰动, 我们给出一个新的方法, 证明如果网格是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 则有

$$\|\nabla_S u - \tilde{w}_h\|_{0,S} \leq C_1 h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|u\|_{3,\infty,S} + C_2 h^2 \|f\|_{0,S}. \quad (1.7)$$

我们的证明方法又一次说明了超收敛存在的本质原因在于网格中单元片的对称性, 见 [76].

另外, 本研究还讨论了有限元和有限体之间的关系, 说明了有限元的全局或局部梯度恢复方法也可以用来处理有限体的解, 并有类似的超收敛结果. 这样, 我们就从理论上解释了 Du 和 Ju [36] 在数值实验中观察到的超收敛现象.

基于曲面有限元及其超收敛对曲面三角形网格质量的要求, 我们借助 Centroidal Voronoi Tessellation(CVT) 的概念探讨了曲面三角形网格的优化问题. CVT 有很多的实际应用, 比如计算机图形学、图像处理、数据压缩、网格生成和优化等. Du 等人在文献 [33] 对 CVT 的基本概念和应用做了比较全面的综述, 最近又在文献 [35] 中介绍了 CVT 在概念、算法及实际应用中的最新进展, 因此关于 CVT 的理论、计算方法及应用请参见上述两篇文献. 在文献 [34] 中, Du, Ferbe 和 Gunzburger 把 CVT 的概念推广到了曲面的情形, 提出了 Constrained CVT (CCVT) 的概念, 并给出了相应的算法. 计算 CVT 最常用的简单有效方法是 Lloyd 方法 [63], 其算法非常简单有效, 但对于大规模问题收敛速度很慢. Liu 等人 [62] 使用预条件 L-BFGS 方法 [60] 进一步加速了 CVT 的计算. 文献 [46] 中给出了一个隐函数曲面三角形网格生成算法. 在其网格的优化阶段, 作者定义了一个与曲面曲率相关的密度函数, 并使用了 Lloyd 方法来优化网格. 但认为 Lloyd 方法在三维的情形下不够有效, 见 [46, Section 3.2.2], 还要使用基于 Quadric Error Metrics 的重新布点策略

[45] 来优化点的分布. 分析其本质的原因, 在于他们的密度函数是用离散的方法来定义的, 相邻单元上定义的密度函数值的过渡不够光滑, 但他们却没有进行磨光处理, 所以导致 Lloyd 方法的低效. 我们将改进他们定义的密度函数, 从而改进了曲面三角形网格的 Lloyd 优化方法. 数值实验表明, 对于光滑的曲面, Lloyd 方法就可以有效改善其三角形网格的质量, 且优化后的网格上的曲面有限元及梯度恢复具有超收敛性.

本文以后章节的内容安排如下: 第二章简单回顾 Bank 和 Xu [4] 文章中关于适度结构网格上的超收敛结论. 第三章讨论二维椭圆界面问题基于界面拟合网格线性有限元的超收敛性, 并给出一个最大模估计. 第四章给出一个光滑界面拟合网格的快速生成算法, 并在其生成的网格上, 用标准线性有限元求解几个二维椭圆界面问题的例子, 从数值上验证第三章给出的超收敛理论. 第五章给出曲面有限元的超收敛结论及证明, 并把平面种的几种梯度恢复格式推广到曲面线性有限元, 证明恢复后的梯度可以更好的逼近真解的梯度, 还讨论了有限元与有限体之间的关系, 证明有限元的梯度恢复技术同样可以用来处理有限体解, 并有超收敛性. 第六章讨论曲面三角形网格的 CVT 优化问题, 并在优化后的曲面三角形网格上, 用曲面线性有限元求解几个 LB 方程例子, 从数值上验证第五章的超收敛理论. 第七章是总结及下一步工作计划.

在以后章节, 我们用  $x \lesssim y$  表示  $x \leq Cy$ ,  $x \approx y$  表示  $x \lesssim y$  和  $y \lesssim x$ .

## 第二章 适度结构网格与有限元的超收敛

这一章简单回忆一下适度结构网格上的有限元超收敛理论, 具体细节参见 [4, 25].

记  $D$  为一个  $\mathbb{R}^2$  中的有界连通开集,  $W^{k,p}(D)$  为  $D$  上标准的 Sobolev 空间, 且配有标准的范数  $\|\cdot\|_{k,p,D}$  和半范数  $|\cdot|_{k,p,D}$ , 其中  $k$  是非负整数,  $1 \leq p \leq \infty$ . 当  $p = 2$  时, 记  $W^{k,2}(D)$  为  $H^k(D)$ , 相应的范数和半范数分别简记为  $\|\cdot\|_{k,D}$  和  $|\cdot|_{k,D}$ . 空间  $H_0^1(D)$  为  $H^1(D)$  的子空间, 它中的每个元素在  $\partial D$  上述为零.  $L^2(D) = H^0(D)$  空间中的内积定义如下

$$(v, w)_D = \int_D vw \, dx, \quad \forall v, w \in L^2(D).$$

类似地, 记  $H^k(\partial D)$  为  $\partial D$  上的 Sobolev 空间, 其范数为  $\|\cdot\|_{k,\partial D}$ , 其中  $k$  是一个非负的整数.  $L^2(\partial D)$  中的内积定义为

$$\langle v, w \rangle_{\partial D} = \int_{\partial D} vw \, ds, \quad \forall v, w \in L^2(\partial D).$$

记  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^2$  中有界区域, 考虑如下零边值问题:

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

在边界  $\partial\Omega$  上,  $u = 0$ .

问题(2.1)的变分形式如下: 求  $u \in H_0^1(\Omega)$ , 使得

$$a(u, v) = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{2.2}$$

其中

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

记  $\mathcal{T}_h$  为  $\Omega$  一个正则的三角形网格. 所谓正则, 是指  $\mathcal{T}_h$  中的所有三角形单元的直径 (或最长边) 和其内接圆半径之比有一个共同的下界, 且这个下界与  $\mathcal{T}_h$  的最大单元尺寸无关. 在二维的情形下, 这也意味着网格中所有单元的角不会太大, 也不会太小. 但网格单元之间的尺寸却可以相差很大. 如果网格单元尺寸相差不大的话, 则称这个网格是拟一致的. 进一步, 记  $V_h$  为定义在  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元空间. 变分问题(2.2)的有限元离散为: 求  $u_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$ , 使得

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

记  $E$  是  $\mathcal{T}_h$  的一条内部边,  $\Omega_E$  为网格中共用  $E$  的两个三角形单元组成的区域. 如果  $\Omega_E$  任意两条对边的长度之差为  $O(h^2)$ , 我们就称  $\Omega_E$  是一个  $O(h^2)$  的近似平行四边形, 即单元片  $\Omega_E$  满足强正规条件 [18]. 下面给出  $O(h^{2\sigma})$  非正规三角形网格定义.

**定义 2.1** 记三角形网格  $\mathcal{T}_h$  所有的内部边为  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ . 如果对于每一个  $E \in \mathcal{E}_1$ ,  $\Omega_E$  构成一个  $O(h^2)$  的平行四边形, 同时  $\sum_{E \in \mathcal{E}_2} |\Omega_E| = O(h^{2\sigma})$ , 则称  $\mathcal{T}_h$  为  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 其中  $\sigma > 0$ .

下面给出适度结构网格上的有限元超收敛的主要结论.

**定理 2.1** 如果网格  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的;  $u \in W^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ . 则有

$$|(\nabla(u - u_I), \nabla v_h)| \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}}(|u|_{3,\Omega} + |u|_{2,\infty,\Omega})|v_h|_{1,\Omega}, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.4)$$

和误差估计

$$|u_h - u_I|_{1,\Omega} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}}(|u|_{3,\Omega} + |u|_{2,\infty,\Omega}). \quad (2.5)$$

### 第三章 椭圆界面问题线性有限元的超收敛

本章着重讨论二维椭圆界面问题线性有限元的超收敛问题. 对于模型(1.1), 为了便于表述, 假设其求解区域  $\Omega$  是一个正方形, 真解  $u$  在界面上满足  $[u]_\Gamma = 0$ , 且在区域边界上满足  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . 进一步, 假设  $\beta(x)$  在  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$  是分片正常数. 但是这一章的结论可以推广到一般的椭圆界面问题当中, 且不存在本质性的困难. 3.1 节给出椭圆界面问题的 Sobolev 空间定义及其弱形式. 3.2 节给出模型(1.1)的有限元离散格式. 最后, 3.3 节证明相应的超收敛理论, 并给出一个最大模估计.

#### 3.1 Sobolev 空间及椭圆界面问题的弱形式

对于模型问题(1.1), 区域  $\Omega$  可以分解为三部分, 即  $\Omega = \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$ , 见图1.1. 我们引入 Sobolev 空间  $W^{k,p}(\Omega^- \cup \Omega^+)$ , 它中的任一个函数  $w$  满足  $w|_{\Omega^-} \in W^{k,p}(\Omega^-)$  和  $w|_{\Omega^+} \in W^{k,p}(\Omega^+)$ , 其范数和半范数定义如下

$$\|w\|_{k,p,\Omega^- \cup \Omega^+} = \left( \|w\|_{k,p,\Omega^-}^p + \|w\|_{k,p,\Omega^+}^p \right)^{1/p},$$

$$|w|_{k,p,\Omega^- \cup \Omega^+} = \left( |w|_{k,p,\Omega^-}^p + |w|_{k,p,\Omega^+}^p \right)^{1/p}.$$

如果  $p = \infty$ , 只需对上面的范数做标准的修改即可.

下面给出模型问题(1.1)的弱形式: 求  $u \in H_0^1(\Omega)$ , 使得:

$$(\beta \nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega - \langle q_1, v \rangle_\Gamma \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1)$$

根据 Lax-Milgram 引理, 易证上述弱形式解的存在性和唯一性. 对于(3.1)的解, 有如下的正则性结果 [72]:  $u \in H^r(\Omega^- \cup \Omega^+)$ , 且

$$\|u\|_{r,\Omega^- \cup \Omega^+} \lesssim \|f\|_{0,\Omega} + \|q_1\|_{r-3/2,\Gamma},$$

其中  $0 \leq r \leq 2$ .

**注 3.1** 如果  $u$  的函数值在界面  $\Gamma$  上有间断, 即  $[u]_\Gamma = q_0 \neq 0$ , 可以找到一个函数  $\phi^- : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}$ , 且满足  $\phi^-|_{\Omega^-} = q_0$  和  $\phi^- \in H^1(\Omega^-)$ . 记  $\phi$  为  $\phi^-$  在  $\Omega$  上的零扩展, 满足  $\phi \in H^1(\Omega^- \cup \Omega^+)$ ,  $\phi|_{\Omega^-} = \phi^-$  和  $\phi|_{\Omega^+} = 0$ . 则模型问题(1.1)等价于: 求  $u = q - \phi$ , 其中  $q \in H_0^1(\Omega)$ , 使得:

$$(\beta \nabla q, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega - \langle q_1, v \rangle_\Gamma + (\beta \nabla \phi, \nabla v)_{\Omega^-},$$

对于所有的  $v \in H_0^1(\Omega)$ . 注意  $\phi$  的选择不是唯一的, 对于其它的选择, 见 [47]. 另外,  $\phi$  可以用一个满足相应条件的有限元函数逼近得到.

## 3.2 椭圆界面问题的有限元离散

记  $\mathcal{T}_h$  为  $\Omega$  上的一个形状正则的三角形界面拟合网格. 对于每一个  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , 记  $h_\tau$  为它的直径. 进一步, 记  $h = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$ . 所有在界面  $\Gamma$  上的顶点组成了一个对  $\Gamma$  的多边形逼近  $\Gamma_h$ .  $\Gamma_h$  把整个区域  $\Omega$  分成了两个子区域:  $\Omega_h^+$  和  $\Omega_h^-$ , 显然它们分别是  $\Omega^+$  和  $\Omega^-$  的一个逼近. 给定一个三角形  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , 它要么属于  $\Omega_h^+$ , 要么属于  $\Omega_h^-$ , 并且最多有两个顶点在  $\Gamma$  上. 我们可以把  $\mathcal{T}_h$  分解为三部分:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_h^+ &:= \{\tau \in \mathcal{T}_h | \tau \subset \Omega_h^+, \tau \text{最多有一个顶点在} \Gamma \text{上}\}, \\ \mathcal{T}_h^- &:= \{\tau \in \mathcal{T}_h | \tau \subset \Omega_h^-, \tau \text{最多有一个顶点在} \Gamma \text{上}\}, \\ \mathcal{T}_h^0 &:= \{\tau \in \mathcal{T}_h | \tau \text{有两个顶点在} \Gamma \text{上}\}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

记  $h_\Gamma = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} h_\tau$  为  $\Gamma$  附近的网格尺寸. 假设  $\Gamma \in C^2$ , 易知  $\Gamma_h$  中的每条边  $E_h$  到  $\Gamma$  的距离为  $O(h_{E_h}^2)$ , 其中  $h_{E_h}$  为  $E_h$  的长度. 进一步, 对于每一个  $\mathcal{T}_h^0$  中的三角形  $\tau$ , 定义  $\tau^+ := \tau \cap \Omega^+$  和  $\tau^- := \tau \cap \Omega^-$ . 因为  $\Gamma \in C^2$ , 我们有  $|\tau^+| \lesssim h_\tau^3$  或者  $|\tau^-| \lesssim h_\tau^3$ , 见图3.1.

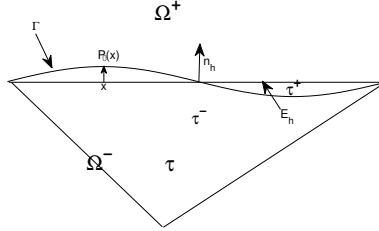


图 3.1 投影  $\mathcal{P}_0$ . 其中,  $\tau^+ = \tau \cap \Omega^+$ ,  $\tau^- = \tau \cap \Omega^-$ ,  $|\tau^+| \lesssim h_\tau^3$ .

记  $n_h$  为边  $E_h \in \Gamma_h$  的单位外法向向量, 从  $\Omega_h^-$  指向  $\Omega_h^+$ . 可以定义一个投影  $\mathcal{P}_0 : E_h \rightarrow \Gamma$ [13](见图3.1)

$$\mathcal{P}_0(x) = x + d(x)n_h, \quad \forall x \in E_h,$$

其中  $\mathcal{P}(x) \in \Gamma$ ,  $|d(x)|$  是  $x$  沿着  $n_h$  到  $\Gamma$  的距离. 假设  $E_h$  的长度足够小, 使得  $\mathcal{P}_0$  和它的逆  $\mathcal{P}_0^{-1}$  都是定义明确的.

记  $V_h$  为  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元空间. 那么(3.1)的线性有限元逼近为: 求  $u_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$ , 使得:

$$(\beta_h \nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega = (f, v_h)_\Omega - \langle \bar{q}_1, v_h \rangle_{\Gamma_h} \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega), \quad (3.3)$$

其中  $\bar{q}_1(x) = q_1(\mathcal{P}_0(x))$ ,  $\forall x \in \Gamma_h$ ;  $\beta_h|_\tau = \beta^+$ ,  $\forall \tau \in \Omega_h^+$ ;  $\beta_h|_\tau = \beta^-$ ,  $\forall \tau \in \Omega_h^-$ . 在 [28] 中, 作

者给出如下的几乎最优  $L^2$  模和  $H^1$  模估计

**定理 3.1 ([28] 中的定理 2.2)** 记  $u$  为(3.1)的真解,  $u_h$  为(3.3)的有限元解. 则有

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h |\log h|^{1/2} (\|f\|_{0,\Omega} + \|q_1\|_{2,\Omega}), \quad (3.4)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^2 |\log h| (\|f\|_{0,\Omega} + \|q_1\|_{2,\Omega}). \quad (3.5)$$

### 3.3 超收敛

记  $E$  是  $\mathcal{T}_h$  的一条内部边,  $\Omega_E$  为共用  $E$  的两个三角形组成的区域. 如果  $\Omega_E$  任意两条对边的长度之差为  $O(h^2)$ , 我们就称  $\Omega_E$  是一个  $O(h^2)$  的近似平行四边形. 现在让我们把  $O(h^{2\sigma})$  非正规网格的定义 (定义2.1, [4, 25, 86]) 稍做修改应用到界面拟合网格上:

**定义 3.1** 记  $\mathcal{T}_h$  所有的内部边为  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ . 如果对于每一个  $E \in \mathcal{E}_1$ ,  $E$  不是  $\Gamma_h$  的一条边, 且  $\Omega_E$  构成一个  $O(h^2)$  的平行四边形, 同时  $\sum_{E \in \mathcal{E}_2} |\Omega_E| = O(h^{2\sigma})$ , 则称  $\mathcal{T}_h$  为  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 其中  $\sigma > 0$ .

**引理 3.1** 假设  $u \in W^{1,\infty}(\Omega^- \cup \Omega^+)$ , 那么

$$|(\beta \nabla u, \nabla v_h)_\Omega - (\beta_h \nabla u, \nabla v_h)_\Omega| \lesssim h_\Gamma^{3/2} \|u\|_{1,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} |v_h|_{1,\Omega}. \quad (3.6)$$

**证明** 给定一个单元  $\tau \in \mathcal{T}_h^0$ , 记  $\tau^* = \text{supp}(\beta - \beta_h) \cap \tau$ . 那么有  $|\tau^*| \lesssim h_\tau^3$  和

$$\begin{aligned} & |(\beta \nabla u, \nabla v_h)_\Omega - (\beta_h \nabla u, \nabla v_h)_\Omega| \\ & \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} \int_{\tau^*} |[\beta] \nabla u \cdot \nabla v_h| \lesssim \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} \|u\|_{1,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} \int_{\tau^*} |\nabla v_h| \\ & \lesssim \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} h_\tau^{3/2} \|u\|_{1,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} |v_h|_{1,\tau^*} \lesssim h_\Gamma^2 \|u\|_{1,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} |v_h|_{1,\tau} \\ & \lesssim h_\Gamma^{3/2} \|u\|_{1,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} |v_h|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

其中利用了  $\nabla v_h$  在  $\tau$  上是常数的事实. 显然,  $\lesssim$  中包含的常数是依赖于  $|\beta^- - \beta^+|$ .  $\square$

下面给出一个稍微不同于 [28] 中的引理 2.2 的引理. 不同之处在于我们用  $\bar{q}_1 = q_1(\mathcal{P}_0(x))$  来代替 [28] 中的  $q_1$  在  $\Gamma_h$  上的插值.

**引理 3.2** 假设  $q_1 \in W^{0,\infty}(\Gamma)$ , 且  $\Gamma \in C^2$ . 那么

$$|\langle q_1, v_h \rangle_\Gamma - \langle \bar{q}_1, v_h \rangle_{\Gamma_h}| \lesssim h_\Gamma^{3/2} \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.7)$$

其中  $\bar{q}_1(x) = q_1(\mathcal{P}_0(x))$ ,  $\forall x \in \Gamma_h$ .

证明

$$\begin{aligned}
& \langle q_1, v_h \rangle_\Gamma - \langle \bar{q}_1, v_h \rangle_{\Gamma_h} \\
&= \sum_{E_h \in \Gamma_h} \int_{E_h} q_1(\mathcal{P}_0(x)) v_h(\mathcal{P}_0(x)) J(x) ds - \int_{E_h} q_1(\mathcal{P}_0(x)) v_h(x) ds \\
&= \sum_{E_h \in \Gamma_h} \left[ \int_{E_h} q_1(\mathcal{P}_0(x))(v_h(\mathcal{P}_0(x)) - v_h(x)) J(x) ds + \int_{E_h} q_1(\mathcal{P}_0(x)) v_h(x)(J(x) - 1) ds \right] \\
&= \sum_{E_h \in \Gamma_h} [I_1 + I_2],
\end{aligned}$$

其中  $J(x)$  是投影  $\mathcal{P}_0$  的雅可比行列式的绝对值.

对于  $I_1$ , 因为  $v_h$  是分片线性函数, 所以

$$\begin{aligned}
|I_1| &\lesssim \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \int_{E_h} |\nabla v_h(\mathcal{P}_0(x)) \cdot (\mathcal{P}_0(x) - x)| \lesssim h_\Gamma^2 \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \int_{E_h} |\nabla v_h(\mathcal{P}_0(x))| \\
&\lesssim h_\Gamma \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \int_{\Omega_{E_h}} |\nabla v_h| \lesssim h_\Gamma^2 \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \|v_h\|_{1,\Omega_{E_h}}.
\end{aligned}$$

对于  $I_2$ , 因为  $\Gamma \in C^2$ , 所以  $|J(x) - 1| \lesssim h^2$ . 那么有

$$\begin{aligned}
|I_2| &\lesssim h_\Gamma^2 \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \int_{E_h} |v_h| \lesssim h_\Gamma^{5/2} \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \|v_h\|_{0,E_h} \\
&\lesssim h_\Gamma^{5/2} \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} (h_\Gamma^{-1/2} \|v_h\|_{0,\Omega_{E_h}} + h_\Gamma^{1/2} |v_h|_{1,\Omega_{E_h}}) \lesssim h_\Gamma^2 \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \|v_h\|_{1,\Omega_{E_h}},
\end{aligned}$$

其中利用了带尺度的迹定理. 最后

$$|\langle q_1, v_h \rangle_\Gamma - \langle \bar{q}_1, v_h \rangle_{\Gamma_h}| \lesssim h_\Gamma^2 \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \sum_{E_h \in \Gamma_h} \|v_h\|_{1,\Omega_{E_h}} \lesssim h_\Gamma^{3/2} \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma} \|v_h\|_{1,\Omega}. \quad \square$$

下面给出本章主要的超收敛结果.

**定理 3.2** 假设界面拟合网格  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的. 记  $u$  为(3.1)解,  $u_h$  为(3.3)的有限元解,  $u_I$  为  $u$  在  $V_h$  中的线性插值. 如果  $u \in H^1(\Omega) \cap H^3(\Omega^- \cup \Omega^+) \cap W^{2,\infty}(\Omega^- \cup \Omega^+)$ ,  $\Gamma \in C^2$ , 那么对于所有的  $v_h \in V_h$ , 我们有

$$\begin{aligned}
(\beta_h \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_\Omega &\lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+}) |v_h|_{1,\Omega} \\
&\quad + h_\Gamma^{3/2} \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} |v_h|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

和

$$\begin{aligned}
\|\beta_h^{1/2} (\nabla u_h - \nabla u_I)\|_{0,\Omega} &\lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+}) \\
&\quad + h_\Gamma^{3/2} (\|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma}).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

**证明** 记  $u^-$  和  $u^+$  分别为  $u$  在  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$  上的限制. 我们有  $u^- \in H^3(\Omega^-) \cap W^{2,\infty}(\Omega^-)$  和  $u^+ \in H^3(\Omega^+) \cap W^{2,\infty}(\Omega^+)$ . 根据 [80] 中的扩展定理, 因为  $\Gamma \in C^2$ , 我们可以把  $u^-$  扩

展到整个区域  $\Omega$  上, 且仍记为  $u^-$ , 且有  $u^- \in H^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$  和

$$\|u^-\|_{3,\Omega} \lesssim \|u^-\|_{3,\Omega^-} \text{ 和 } \|u^-\|_{2,\infty,\Omega} \lesssim \|u^-\|_{2,\infty,\Omega^-}.$$

类似地, 也可以把  $u^+$  扩展到整个  $\Omega$  上去.

$$\begin{aligned} & (\beta_h \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_\Omega \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^+} (\beta^+ \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_\tau + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^-} (\beta^- \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_\tau \\ &+ \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} [(\beta_h \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^+} + (\beta_h \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^-}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

记  $u_I^-$  和  $u_I^+$  分别为扩展  $u^-$  和  $u^+$  在  $V_h$  中的线性插值. 对于  $\tau \in \mathcal{T}_h^0$ , 若  $|\tau^-| \lesssim h_\tau^3$ , 则在  $\tau$  上有  $\beta_h = \beta^+$ , 且有

$$\begin{aligned} & (\beta^+ \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^+} + (\beta^+ \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^-} \\ &= (\beta^+ \nabla(u^+ - u_I^+), \nabla v_h)_\tau - (\beta^+ \nabla(u^+ - u_I^+), \nabla v_h)_{\tau^-} \\ &+ (\beta^+ \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^-}. \end{aligned}$$

对于  $\tau \in \mathcal{T}_h^0$  和  $|\tau^+| \lesssim h_\tau^3$ , 有类似的等式成立.

那么(3.10)可以写成如下的形式

$$\begin{aligned} & (\beta_h \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_\Omega \\ &= (\beta^- \nabla(u^- - u_I^-), \nabla v_h)_{\Omega_h^-} + (\beta^+ \nabla(u^+ - u_I^+), \nabla v_h)_{\Omega_h^+} \\ &+ \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0, |\tau^-| \lesssim h_\tau^3} [(\beta^+ \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^-} - (\beta^+ \nabla(u^+ - u_I^+), \nabla v_h)_{\tau^-}] \\ &+ \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0, |\tau^+| \lesssim h_\tau^3} [(\beta^- \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_{\tau^+} - (\beta^- \nabla(u^- - u_I^-), \nabla v_h)_{\tau^+}] \\ &= I_1 + I_2 + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0, |\tau^-| \lesssim h_\tau^3} [I_{31} - I_{32}] + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0, |\tau^+| \lesssim h_\tau^3} [I_{41} - I_{42}]. \end{aligned}$$

对于  $I_1$  和  $I_2$ , 可以在 [25] 中找到如下的估计:

$$|I_1| \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u^-\|_{3,\Omega^-} + \|u^-\|_{2,\infty,\Omega^-}) |v_h|_{1,\Omega},$$

和

$$|I_2| \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u^+\|_{3,\Omega^+} + \|u^+\|_{2,\infty,\Omega^+}) |v_h|_{1,\Omega},$$

对于  $\tau \in \mathcal{T}_h^0$  且  $|\tau^-| \lesssim h_\tau^3$  的情形, 这意味着  $\tau$  的大部分是在  $\Omega^+$  内. 因为  $u \in$

$H^1(\tau) \cap W^{2,\infty}(\tau^- \cup \tau^+)$ , 由 Tayler 展开 [85], 可得

$$|u - u_I|_{1,\infty,\tau^-} \lesssim \|u\|_{1,\infty,\tau^- \cup \tau^+},$$

和

$$|I_{31}| \lesssim \|u\|_{1,\infty,\tau^- \cup \tau^+} \int_{\tau^-} |\nabla v_h| \lesssim h_\tau^{3/2} \|u\|_{1,\infty,\tau^- \cup \tau^+} |v_h|_{1,\tau^-} \lesssim h_\tau^2 \|u\|_{1,\infty,\tau^- \cup \tau^+} |v_h|_{1,\tau}.$$

对于  $I_{32}$ , 因为  $u^+ \in H^2(\tau) \cap W^{2,\infty}(\tau)$ , 所以有

$$|I_{32}| \lesssim \|\nabla u^+ - \nabla u_I^+\|_{0,\infty,\tau} \int_{\tau^-} |\nabla v_h| \lesssim h_\tau^{5/2} \|u^+\|_{2,\infty,\tau} |v_h|_{1,\tau^-} \lesssim h_\tau^3 \|u^+\|_{2,\infty,\tau} |v_h|_{1,\tau}.$$

类似地, 给定单元  $\tau \in \mathcal{T}_h^0$ , 若  $|\tau^+| \lesssim h_\tau^3$ , 可证明

$$\begin{aligned} |I_{41}| &\lesssim h_\tau^2 \|u\|_{1,\infty,\tau^- \cup \tau^+} |v_h|_{1,\tau}, \\ |I_{42}| &\lesssim h_\tau^3 \|u^-\|_{2,\infty,\tau} |v_h|_{1,\tau}. \end{aligned}$$

根据  $\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} 1 \lesssim h_\Gamma^{-1}$ , 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0, |\tau^-| \lesssim h_\tau^3} |I_{31} - I_{32}| + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0, |\tau^+| \lesssim h_\tau^3} |I_{41} - I_{42}| \\ &\lesssim h_\Gamma^2 \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h^0} |v_h|_{1,\tau} \lesssim h_\Gamma^{3/2} \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} |v_h|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

即证(3.8).

最后证明(3.9)如下

$$\begin{aligned} &(\beta_h \nabla(u_h - u_I), \nabla v_h)_\Omega \\ &= (\beta_h \nabla(u - u_I), \nabla v_h)_\Omega + (\beta \nabla u, \nabla v_h)_\Omega - (\beta_h \nabla u, \nabla v_h)_\Omega \\ &\quad + \langle q_1, v_h \rangle_\Gamma - \langle \bar{q}_1, v_h \rangle_{\Gamma_h}. \end{aligned}$$

结合(3.8), 引理3.2和3.1, 且取  $v_h = u_h - u_I$ , 即证(3.9).  $\square$

最后给出最大模估计. 这里假设  $h_{\min}$  是  $\mathcal{T}_h$  中最大尺寸单元的最小边长. 由离散的嵌入定理

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \lesssim |\log h_{\min}|^{1/2} |v_h|_{1,\Omega}, \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega),$$

我们可以立即得到如下推论:

**推论 3.1** 在定理3.2的假设条件下, 我们有

$$\begin{aligned} \|u_h - u_I\|_{0,\infty,\Omega} &\lesssim |\log h_{\min}|^{1/2} \left[ h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+}) \right. \\ &\quad \left. + h_\Gamma^{3/2} (\|u\|_{2,\infty,\Omega^- \cup \Omega^+} + \|q_1\|_{0,\infty,\Gamma}) \right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

**注 3.2** 对于下一章给出算法4.1生成的界面拟合网格  $\mathcal{T}_h$ ,  $h_\Gamma$  往往远小于  $\mathcal{T}_h$  的最大尺寸  $h$ .



## 第四章 界面拟合网格的快速生成算法

这一章给出一个拟合光滑界面的网格快速生成算法。我们首先简单讨论一下网格的结构和质量，然后通过一个具体的例子介绍我们的半结构界面拟合网格快速生成算法。并在算法生成网格的基础上，给出三个二维椭圆界面问题的数值算例，从数值上验证本章的网格生成算法的有效性及线性有限元的超收敛性。

### 4.1 网格结构与质量

结构网格，如笛卡尔网格和拓扑张量积网格，可以用整数指标集方便地索引每个顶点的物理位置及其上定义的函数值。这不但简化了数值方法的实施，而且具有天然的继承性，可以设计高效的多重网格解法器。与此相反，非结构网格就必须通过指定顶点的连接关系来给出每个独立的单元。顶点和单元素引通常比较复杂且没有继承结构。

网格质量是衡量网格单元形状好坏的度量。网格中每个单元质量有多种定义方法 [54]，对于平面中的三角形单元通常定义为单元直径与其内接圆半径之比，但也可以用三角形的最小角来衡量。本文就采用三角形单元的最小角来衡量。有限元中  $H^1$  模插值误差 [1] 以及有限元刚度矩阵的条件数 [44] 都会受到网格质量的影响。

有数种界面拟合三角形网格生成方法，它们的不同之处在于网格结构和网格质量之间的取舍。牺牲网格结构，可以得到高质量的界面拟合网格。一个常用的方法是 Delaunay 插入算法和网格光滑算法。一个著名的例子是软件包 Triangle [77]，如果输入的多边形没有很小的角，Triangle 可以保证生成网格的角度大于  $30^\circ$ 。另一种是优化方法，例如 DistMesh [70]，可以生成质量很高的界面拟合三角形网格。

在应用中，我们更看重网格的继承结构，因为基于这种继承结构可以设计高效的预条件子，且对于移动界面问题可以利用粗化算法来快速调整网格。因此，我们的算法将维护网格的继承结构。但仍然按非结构网格的存储方法来存储基本的网格数据：网格节点与单元信息。利用 [26] 方法，网格的继承结构隐含地存储在三角形单元的顺序中。我们称这样的网格为半结构网格。

Börgers [12] 提出了一种半结构的界面拟合网格生成算法。这种算法的基本思想是，在笛卡尔网格的基础上，把界面附近的网格结点扰动到界面上，然后对于界面附近被扰动的小四边形，选择适当的对角线来拟合界面和保持网格质量，最终生成的界面拟合网格是形状正则的，在拓扑结构上也等价于原来的笛卡尔网格。当界面  $C^2$  光滑时，界面拟合的逼近精度为  $O(h^2)$ ，见 [12] 中的定理 3。如果初始笛卡尔

网格是一致的,那么由 Börgers 算法生成的网格的最小角有一个理论的下界,约为  $18.4349^\circ$ .

本文用自适应网格加密算法来改进 Börgers 算法,生成的界面拟合网格可以很好的拟合复杂的界面,并且能维护网格的继承结构. 我们用一个离散的曲率估计子来引导算法的自适应加密过程. 如果初始的网格是由等腰直角三角形组成的话,改进后的算法生成的界面拟合网格也有一个下界,同样约为  $18.4349^\circ$ . 但在实验中,生成网格的最小角往往比这个下界要大.

与我们算法比较接近的算法是基于四叉树的自适应网格生成算法,其基本原理是通过不断把矩形区域分在四个同样尺寸的小矩形区域来捕捉界面细节. 一旦捕捉到界面的细节,就扰动界面附近的点到界面上来拟合界面. 但是最后要特别处理界面或者边界附近形状很扁的三角形,见文献 [43, 88] 及其所引文献. 四叉树方法有几个缺点限止了它的实际应用 [89]. 一方面四叉树的数据结构与我们所用的数据结构相比,存储和获得网格信息要复杂很多. 另外,它还存在悬点的问题,以及不能很好拟合界面的问题. 所以,基于四叉树的网格生成算法为了得到高质量的网格,需要对网格进行后处理,见文献 [40, 43].

## 4.2 界面拟合网格的快速生成算法

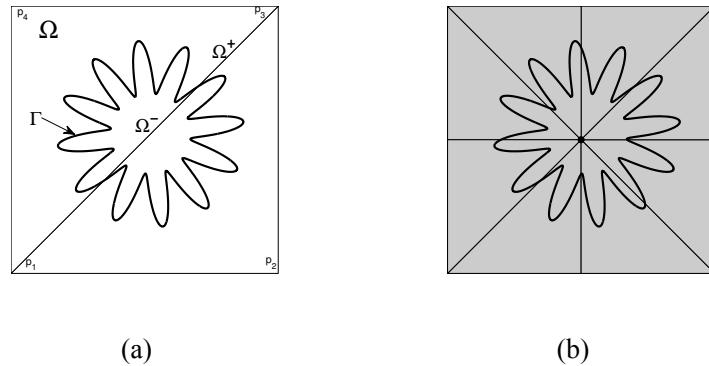


图 4.1 初始网格和一致二分加密. (a) 初始网格  $\mathcal{T}_0$ . (b) 一致二分加密  $\mathcal{T}_0$  一次.

简单起见,假设区域  $\Omega$  是一个正方形,它的四个顶点为  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  和  $p_4$ ,见图4.1(a). 并假设  $\Omega$  有一个初始的网格  $\mathcal{T}_0$ ,它的所有单元都为等腰直角三角形. 例如,连接  $p_1$  和  $p_3$  就可以构造出一个  $\mathcal{T}_0$ ,包含有两个等腰直角三角形  $(p_2, p_3, p_1)$  和  $(p_4, p_1, p_3)$ ,见图4.1(a). 每个三角形的三个顶点按逆时针方向排序,并且第一个顶点对应三角形的最长边. 如果  $\Omega$  是单位正方形,图4.1(a) 中的初始网格  $\mathcal{T}_0$  的node和elem数组形式如下:

```
node = [0 0; 1 0; 1 1; 0 1]; elem = [2 3 1; 4 1 3];
```

标记  $\mathcal{T}_0$  中的每个三角形的第一个顶点为该三角形的最新顶点, 用最新顶点加密方法来加密网格. 最新顶点加密方法的规则如下:

1. 连接最新顶点和其对边的中点, 把一个三角形二分为两个子三角形.
2. 被二分边的中点形成的新顶点设记为两个子三角形的最新顶点.

一旦对初始网格的标记完成, 规则 (2) 保证加密后的三角形网格能够继承加密前三角形网格的标记信息, 从而使得二分加密过程进行下去. 注意, 如果初始网格中所有的三角形都是等腰直角三角形, 最新顶点二分加密就等价于最长边二分加密. 读者可以在 [21] 中找到一个最新顶点二分加密的 Matlab 简单实现.

设  $\Gamma$  是一条嵌入  $\Omega$  中的简单光滑闭曲线. 假设  $\Gamma$  可以表示为函数  $\phi(x)$  的零水平集, 即  $\Gamma = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}$ .  $\Gamma$  把  $\Omega$  分为两个子区域  $\Omega^- := \{x \in \Omega : \phi(x) < 0\}$  和  $\Omega^+ := \{x \in \Omega : \phi(x) > 0\}$ . 给定  $\Omega$  的一个三角剖分  $\mathcal{T}$  和它中的一个单元  $\tau$ , 如果  $\phi$  在  $\tau$  的三个顶点处函数值的符号至少有两个是不同的, 就称该单元为**界面单元**. 所有界面单元的顶点称为**界面顶点**.

在加密过程中, 网格中将会出现两种类型的单元. 如果一个单元的两个腰分别平行于  $x$  轴和  $y$  轴, 称该单元为 Type A 单元, 见图4.5; 如果一个单元的斜边平行于  $x$  轴或  $y$  轴, 则称该单元为 Type B 单元, 见图4.6. 如果所有包含顶点  $p$  的单元类型都为 Type A, 这些单元的腰在局部上构成了一个笛卡尔网格. 如果界面从  $p$  附近经过, 就可以应用 Börgers 算法来扰动  $p$  到界面上. 因此我们的算法将会仔细控制单元的类型.

我们的算法可描述如下:

**算法 4.1 ( $\mathcal{T} = \text{interfacemesh}(\mathcal{T}_0, \phi)$ )**

**Input:**  $\mathcal{T}_0$ :  $\Omega$  上的初始网格;  $\phi$ : 描述  $\Gamma$  的水平集函数.

**Output:**  $\mathcal{T}$ : 界面拟合网格.

**Step 1** 一致二分加密  $\mathcal{T}_0$  直到至少有一个点属于  $\Omega^-$ .

**Step 2** 估计界面单元附近界面曲率, 加密曲率估计子大的界面单元.

**Step 3** 更新界面单元的类型.

**Step 4** 扰动部分界面顶点到界面上.

**Step 5** 应用边交换和网格光滑技术, 最终生成形状正则的界面拟合网格.

### 4.2.1 一个例子

下面用一个具体的例子来给出算法4.1的细节. 考虑正方形区域  $\Omega = (-1, 1)^2$  和用如下参数形式表示的界面  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} r(\theta) &= 0.5 + 0.2 \sin(12\theta), \\ X(\theta) &= 0.02 \sqrt{5} + r(\theta) \cos(\theta), \\ Y(\theta) &= 0.02 \sqrt{5} + r(\theta) \sin(\theta), \end{aligned}$$

其中  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ; 见图4.1(a). 给定一个点  $x_0 = (X, Y) \in \Omega$ ,  $\Gamma$  的水平集表示形式如下:

$$\phi(x_0) = r_0^2 - r(\theta_0)^2,$$

其中  $(r_0, \theta_0)$  是  $x_0$  的极坐标.

#### 第一步

一致二分加密  $\mathcal{T}_0$ , 直到网格中出现至少一个属于  $\Omega^-$  的顶点, 见图4.1(b). 通过检查水平集函数在每个顶点处的函数值的符号找到所有的界面单元, 见图4.1(b) 中灰色单元.

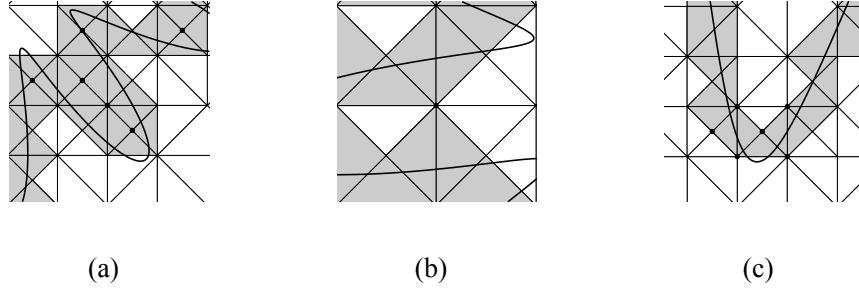


图 4.2 估计曲率时考虑的三种情形. (a) 所有包含  $p$  的单元是界面单元. (b) 包含  $p$  的界面单元被包含  $p$  的非界面单元分为两部分. (c) 界面顶点分别在  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$  内形成两条逼近界面的折线.

#### 第二步

折线逼近一条曲线的精度通常被曲线的曲率和折线局部的边长所控制. 为了得到一个更好的逼近, 曲线曲率大的地方应该放更多的点. 在这一步, 我们会重复如下的步骤, 直到没有单元被标记为加密单元为止.

$$\text{估计} \rightarrow \text{标记加密单元} \rightarrow \text{二分加密}. \quad (4.1)$$

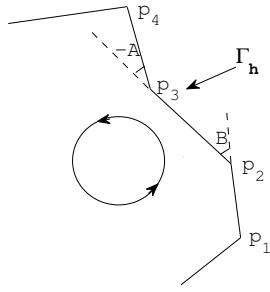


图 4.3 折线  $\Gamma_h$  在其顶点处的离散曲率. 这里设逆时针方向为折线的正向. 从线段  $(p_1, p_2)$  到线段  $(p_2, p_3)$ ,  $\Gamma_h$  向左旋转, 它在顶点  $p_2$  处的离散曲率为  $B$  度; 从线段  $(p_2, p_3)$  到线段  $(p_3, p_4)$ ,  $\Gamma_h$  向右旋转, 它在顶点  $p_3$  处的离散曲率为  $-A$  度.

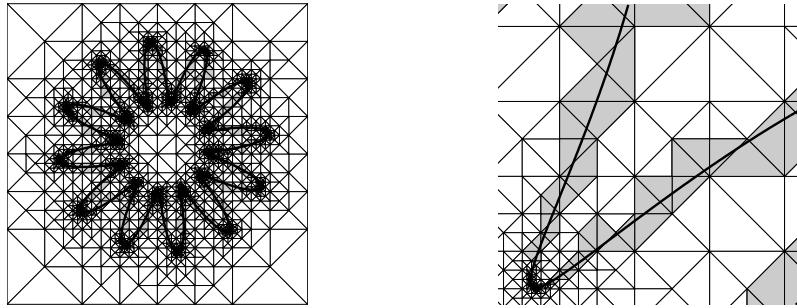


图 4.4 第二步之后的网格及其局部细节.

对于每一个界面顶点  $p$ , 我们估计界面  $\Gamma$  在  $p$  附近的曲率. 如果  $p$  曲率估计子较大, 就标记所有包含  $p$  的界面单元为加密单元, 并加密这些单元.

**估计曲率** 给定一界面顶点  $p$ , 我们根据包含  $p$  的所有界面单元的配置和角度信息来估计  $\Gamma$  在  $p$  附近的曲率, 并给出一个曲率估计子  $\eta_p = \kappa_p$ .

总共有三种情形. 第一种情形, 如果所有包含  $p$  的单元都是界面单元, 且  $p$  不在  $\Gamma$  上 ( $\phi(p) \neq 0$ ),  $\Gamma$  在  $p$  附近就很有可能有比较大的曲率, 见图4.2(a) 中黑色点标记的界面顶点. 第二种情形, 如果  $p$  有三个及以上的同类型的界面顶点与它相连, 这里的同类型是指  $\phi$  在这些点上的函数值的符号相同, 见图4.2(b) 中黑色点标记的界面顶点. 对于这两种情形, 我们设定  $\kappa_p = \infty$ .

第三种情形, 界面顶点分别在  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$  中形成两条逼近  $\Gamma$  的折线, 见图4.2(c). 我们计算这两条折线在各自顶点处的离散曲率. 这里折线在顶点  $p$  的离散曲率定义为相邻两个直线段沿着折线正向的夹角. 如果折线向左旋转, 夹角为正; 向右旋转, 夹角为负; 见图4.3. 我们用顶点  $p$  和它相邻的界面顶点的离散

曲率的和的绝对值做为  $p$  处的曲率估计子  $\kappa_p$ . 这里的求和会引入一些光滑作用, 使得  $\kappa_p$  能更好的反映真实曲率的变化.

**标记加密单元** 如果顶点  $p$  的曲率估计子  $\kappa_p >= 180^\circ$ , 标记所有包含  $p$  的单元为加密单元.

**二分加密** 二分加密所有的加密单元以及这些单元的一部分相邻单元, 生成协调三角剖分.

通过局部网格加密, 界面单元可以更好的捕捉到界面. 给定一个满足于前两种情形的顶点  $p$ , 由于它到界面  $\Gamma$  的距离是固定的, 随着加密过程的进行, 包含  $p$  的界面单元的尺寸会不断减小, 所以最终网格中不会再存在满足前两种情形的顶点. 最后一种情形, 随着加密过程的进行, 所有界面顶点的曲率估计子会小于  $180^\circ$ , 所以上述的加密过程最后会终止.

**注 4.1** 对于估计曲率的第三种情形, 如果可以计算水平集函数  $\phi$  在每条折线各个顶点处的梯度  $\nabla\phi$  且  $|\nabla\phi| \neq 0$ , 我们就可以计算同一条折线上相邻两个顶点处  $\nabla\phi$  的夹角. 给出一个夹角的上限, 如果计算出的夹角的大于上限, 我们就标记包含这两个相邻顶点界面单元为加密单元. 这样通过调整给出的夹角的上限, 我们可以对最终生成的界面拟合网格尺寸进行更精细的控制.

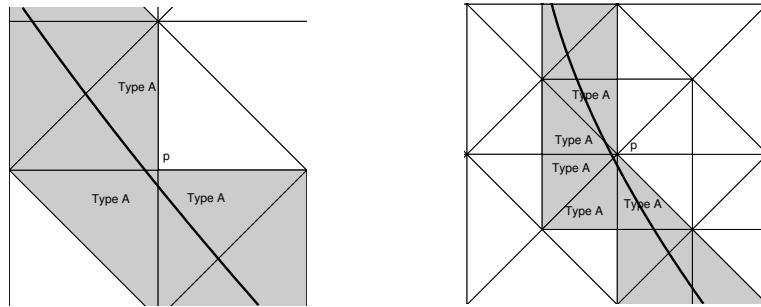


图 4.5 Type A 界面单元. 这些单元的腰局部上形成了一个笛卡尔网格.

### 第三步

对于一个顶点  $p$ , 如果所有的包含  $p$  的界面单元都为 Type A, 这些单元的腰局部上就构成一个笛卡尔网格, 见图4.5, 那么我们就可以应用 Börgers 算法到这个点上. 而一个 Type B 界面单元只需一次二分加密就可以变为两个 Type A 的单元. 但是我们不能把所有的 Type B 界面单元变为 Type A. 因为在自适应网格中, 相邻单元类型的变化反映了网格尺寸的变化, 这是自适应网格的性质, 所以我们会在网格中保留一部分 Type B 的单元.

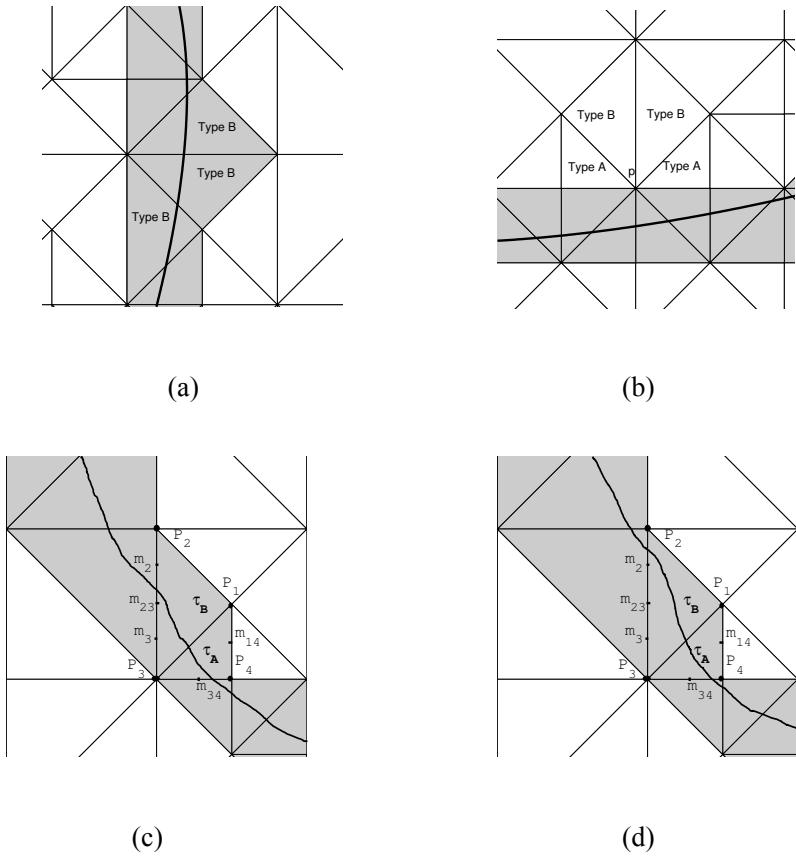


图 4.6 Type B 单元的例子. (a) Type B 界面单元. (b) 界面附近的 Type B 单元对, 但它们不是界面单元. (c) 过渡 Type B 界面单元  $\tau_B$ , 它满足条件  $\phi(m_2)\phi(m_3) < 0$ . (d) 过渡 Type B 界面单元  $\tau_B$ , 它满足条件  $\phi(m_{14})\phi(m_{34}) < 0$  和  $\phi(m_2)\phi(p_2) < 0$ .

如果两个三角形单元共用一个边, 就称这两个单元互为**邻居**. 一个单元的第  $i$  个邻居, 就是那个和它共用其第  $i$  个顶点对着的那条边的那个单元. 称一个 Type B 的界面单元为**过渡 Type B 单元**, 如果它的第一个邻居是一个 Type A 的界面单元, 并且它的第二个或者第三个邻居也是 Type A 的界面单元. 我们除了要加密所有的非过渡 Type B 界面单元外, 还要根据下面的准则加密部分过渡 Type B 界面单元.

下面以图4.6(c) 和 (d) 中的 Type B 界面单元  $\tau_B : (p_1, p_2, p_3)$  为例来说明我们的准则. 其中 Type A 界面单元  $\tau_A : (p_4, p_1, p_3)$  是  $\tau_B$  的第二个邻居. 记  $m_{23}$ 、 $m_{14}$  和  $m_{34}$  分别为边  $(p_2, p_3)$ 、 $(p_1, p_4)$  和  $(p_3, p_4)$  的中点. 进一步记  $m_2$  和  $m_3$  分别为线段  $(p_2, m_{23})$  和  $(m_{23}, p_3)$  的中点. 如果下面的两个条件之一被满足:

**(C):**  $\phi(m_2)\phi(m_3) < 0$ ,

**(D):**  $\phi(m_{14})\phi(m_{34}) < 0$  且  $\phi(m_2)\phi(p_2) < 0$ ,

$\tau_B$  就会被二分加密.

记  $p$  为  $\Gamma$  和边  $(p_2, p_3)$  的交点. 条件 **(C)** 意味着  $d(m_{23}, p) < d(p, p_2)$  和  $d(m_{23}, p) < d(p, p_3)$ , 其中  $d(\cdot, \cdot)$  表示两点之间的欧氏距离. 所有  $\tau_B$  被二分加密, 这样  $m_{23}$  就变成了一个网格顶点, 把  $m_{23}$  扰动到交点  $p$  就会更小, 单元质量变化就更小, 见图4.6(c).

如果条件 **(D)** 被满足, 根据 Börgers 算法,  $p_2$  和  $p_4$  会被扰动到  $\Gamma$  上, 而  $p_1$  和  $p_3$  就不会. 所以  $(p_1, p_3)$  会与  $\Gamma$  相交, 为了产生界面拟合的网格, 就要把由  $p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$  构成的四边形的对角边  $(p_1, p_3)$  换成  $(p_2, p_4)$ , 显然这样的边交换就会引入一个比较小的角, 例如三角形  $(p_1, p_2, p_4)$ . 所以加密  $\tau_B$  会避免这样的情况发生, 见图4.6(d).

为了在第五步中通过边交换保持网格的质量, 我们也会加密那些在界面附近但又不是界面单元的 Type B 单元对, 它们有邻居单元是界面单元, 见图4.6(c).

#### 第四步.

根据 Börgers 算法 [12], 我们找到网格中所有与坐标轴平行且与界面相交的边. 对于这样的边, 我们计算其两个顶点到交点的距离, 并把距离最近的点扰动到交点上去. 如果一个顶点可以被多于一个的交点代替, 就选择扰动距离最短的那个, 见图4.5.

#### 第五步

第四步的扰动之后, 在 Börgers 算法中, 需要对界面附近的因顶点扰动发生形变小正方形选择一条合适的对角线, 从而使得最终的三角形网格即能拟合界面又能保持形状正则. 在我们的算法中就等价于边的交换过程. 第一种情形是两个同是 Type A 的界面单元组成的单元对, 它们的共用最长边穿过界面, 我们通过边交换使其拟合界面, 见图4.7(a) 和 (b). 第二种情形, 是那种在界面附近的单元对, 每个单元对中两个单元共用一个最长边, 且两个单元的四个顶点中至少有一个扰动到了界面上. 如果可以改善最小角并且新的边不与界面相交, 我们就交换这些单元对的最长边, 见图4.7(c). 对于这个例子, 完成上面的边交换之后, 最小角为  $19.1052^\circ$ , 稍大于理论的最小角  $18.4349^\circ$ .

**注 4.2** 因为边交换会改变网格的拓扑结构, 即顶点之间的连接关系, 而这种连接关系对于粗化算法又相当重要. 因此, 我们只对以上两种情形进行边的交换, 并记录下来, 以便在要粗化时, 把这些边交换回来.

网格光滑技术可以被用来进一步改善界面附近的网格质量. 这里我们光滑格式采用的是 CPT 光滑技术, 它是论文 [19, 20, 24] 中提出的 ODT 光滑技术的变形. 找到那些有一条边拟合界面的比较差的单元, 把这条边对应的顶点  $p$  移动到所有包含  $p$  的三角形的重心的面积加权平均所得到的点上, 见图4.7(d). 对于上述例子, 网格的最小角改进到  $24.0143^\circ$ .

最终我们得到一个形状正则的界面拟合网格, 它能够捕捉到界面  $\Gamma$  的细节, 且能保留一些自适应网格的结构, 见图4.8.

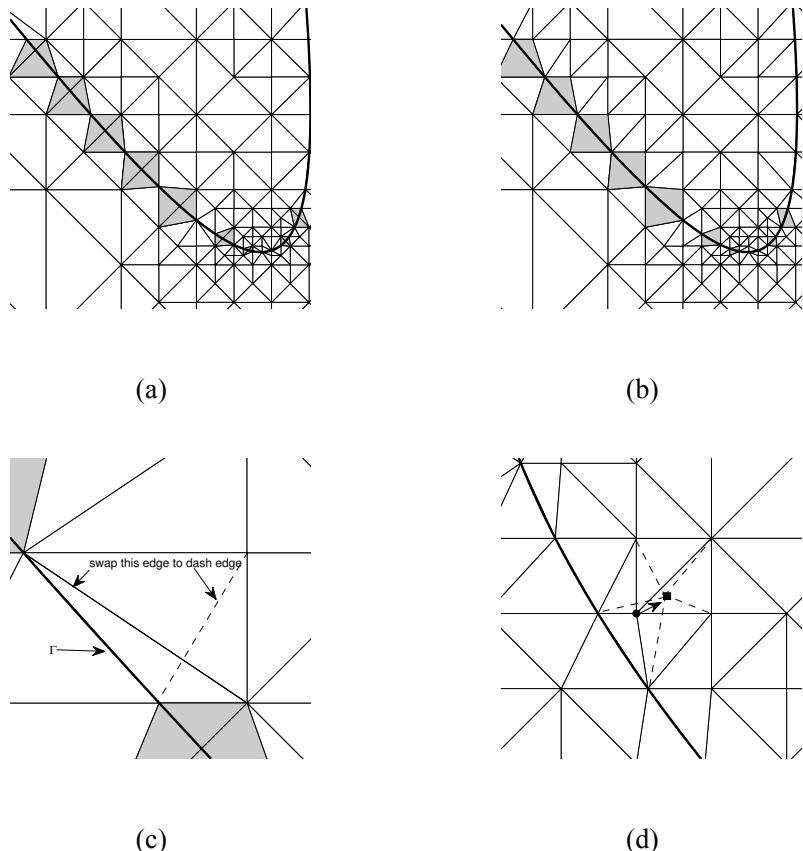


图 4.7 边交换和 CPT 光滑. (a) 扰动以后剩下的界面单元对. 每一个单元对中两个单元共用一个穿过界面的最长边. (b) 边交换使得 (a) 中的界面单元对的共用边拟合界面  $\Gamma$ . (c) 边交换来改善界面附近单元对的最小角. (d) 局部的 CPT 光滑.

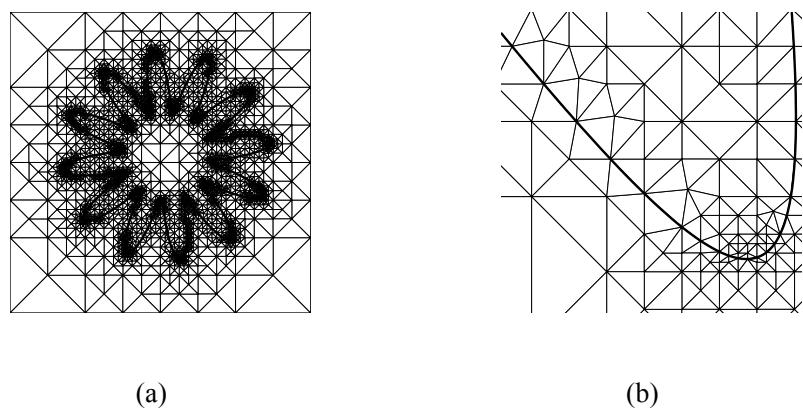


图 4.8 (a) 最终生成的网格. (b) 其局部细节.

### 4.3 数值试验

这一节将给出三个数值算例来检验界面拟合网格生成算法的有效性, 以及线性有限元的超收敛性. 我们基于 Matlab 有限元软件包 iFEM [22] 来写程序代码, 并在一台处理器为 2.8 GHz Intel Xeon 的机器上做数值试验. 为了测试收敛率, 我们首先用算法4.1生成一个界面拟合网格, 然后通过一致加密生成一个网格序列. 其中  $\Gamma_h$  的边上因加密引入的新顶点会被投影到界面上去. 对于第一个例子, 因为界面是一个圆, 非常光滑, 我们用一个致的  $32 \times 32$  的笛卡尔网格为输入网格, 然后用 Börgers 算法来生成一个界面拟合网格.

为了构造相应的数值算例, 我们首先给出模型(1.1)的系数  $\beta^+(x)$  和  $\beta^-(x)$ , 以及真解  $u^+(x)$  和  $u^-(x)$ , 然后再给出相应的右端项, 边界条件, 及界面跳跃条件. 记  $u_h^-$  和  $u_h^+$  分别为  $u^-$  和  $u^+$  的线性有限元逼近, 我们将测试如下误差:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_0 &:= (\|u^- - u_h^-\|_{0,\Omega^-}^2 + \|u^+ - u_h^+\|_{0,\Omega^+}^2)^{1/2}, \\ |u - u_h|_1 &:= (\|\nabla(u^- - u_h^-)\|_{0,\Omega^-}^2 + \|\nabla(u^+ - u_h^+)\|_{0,\Omega^+}^2)^{1/2}, \\ \|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0 &:= (\|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h^- - u_I^-)\|_{0,\Omega_h^-}^2 + \|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h^+ - u_I^+)\|_{0,\Omega_h^+}^2)^{1/2}, \\ \|u_h - u_I\|_\infty &:= \max(\|u_h^- - u_I^-\|_{0,\infty,\Omega_h^-}, \|u_h^+ - u_I^+\|_{0,\infty,\Omega_h^+}).\end{aligned}$$

**注 4.3** 注意,  $u_h^-$  和  $u_h^+$  是分别定义在  $\Omega_h^-$  和  $\Omega_h^+$  上的. 但借助界面单元上的简单线性扩展 [13], 可以把它们分别扩展到  $\Omega^-$  和  $\Omega^+$  上. 为了更精确地计算  $\|u - u_h\|_0$  和  $|u - u_h|_1$ , 我们会用二次曲线来代替  $\Gamma_h$  中的每条直边.

对于离散得到的线性系统, 我们用带预条件子的共轭梯度法求解, 其中预条件子是一个多重网格的 **V-cycle**. 这样一个解法器的关键部分是能构造嵌套网格序列的粗化算法. 有了粗化算法, 相应的延拓和限止算子可以用代数的方法构建.

我们网格序列是通过加密算法4.1生成的初始界面拟合网格得到的. 因为一致加密就是把每个三角形单元分成四个相似的小三角形, 所以一致加密的网格粗化非常容易实现. 但是局部二分加密网格的粗化就相对困难很多. 这里我们采用论文 [26] 中给出的二分网格的粗化算法. 这种粗化算法的主要思想是逐个顶点进行的, 而不是逐个单元进行的. 网格加密的继承信息隐含记录在三角形单元存储顺序当中. 注意算法4.1中的边交换, 会改变 elem 数组, 从而导致原来粗化算法无法进行下去. 因此对于初始的界面拟合网格, 需要把已经交换的边换回去, 才能使得 [26] 中的粗化算法顺利进行下去.

对于二维的拟一致网格, 网格尺寸和自由度个数有如下关系  $h \approx N^{-1/2}$  和  $h^2 \approx N^{-1}$ . 在图4.10, 4.12和4.14中, 误差的收敛率是以  $\log N$  为自变量, 误差为因变

量做线性最小二乘拟合得到的. 从下面的试验中, 易见

- $\|u - u_h\|_0$  和  $|u - u_h|_1$  可以达到最优的收敛阶, 分别为  $N^{-1}$  和  $N^{-1/2}$ ;
- $\|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$  的收敛阶为  $N^{-(1/2+\sigma/2)}$ , 其中  $\sigma \leq 1$  但是接近 1, 所以具有超收敛性;
- $\|u_I - u_h\|_\infty$  的收敛阶略小于  $\|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$ ;
- 我们给出的多重网格解法器关于问题规模和扩散系数的间断都是稳健的.

#### 4.3.1 例 1

例 1 的求解区域  $\Omega$  是  $(-1, 1)^2$ . 界面是一个圆, 由如下水平集函数表示

$$\phi(x, y) := x^2 + y^2 - 0.64.$$

真解如下

$$u^+ = \sin(\pi x) \sin(\pi y) - 1, \text{ 和 } u^- = \cos(\pi x) \cos(\pi y) - 1,$$

模型(1.1)的系数设为  $\beta^+ = 10000, \beta^- = 1$ .

在这个例子当中, 我们以一个  $32 \times 32$  的一致笛卡尔网格为输入网格, 仅用 Börgers 算法来产生一个界面拟合网格, 见图4.9(a). 真解的线性有限元逼近见图4.9(b). 其中初始界面拟合网格的最小角为  $29.0972^\circ$ .  $\|u - u_h\|_0, |u - u_h|_1, \|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$ , 和  $\|u_I - u_h\|_\infty$  误差见表格4.1, 它们的收敛率见图4.10 (a) 和 (b)

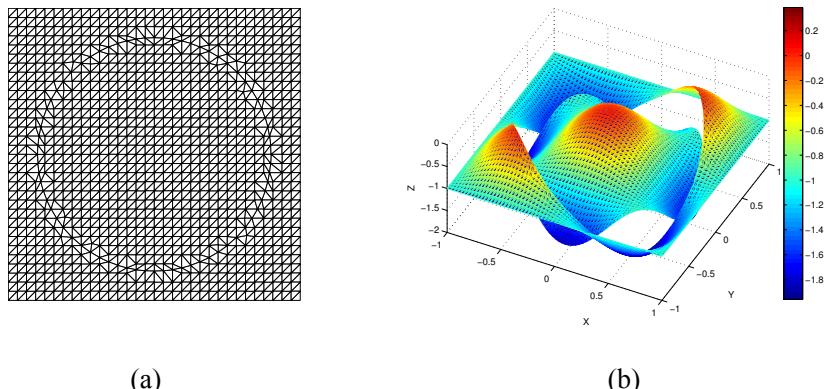


图 4.9 例 1 的网格和逼近解. (a) 初始的界面拟合网格, 其最小角为  $29.0972^\circ$ . (b) 界面拟合网格上的线性有限元解.

对于例 1, 我们固定  $\beta^- = 1$ , 在表格4.2中展示了所用解法器的迭代步数和计算时间随着自由度个数及  $\beta^+$  的变化而变化的规律.

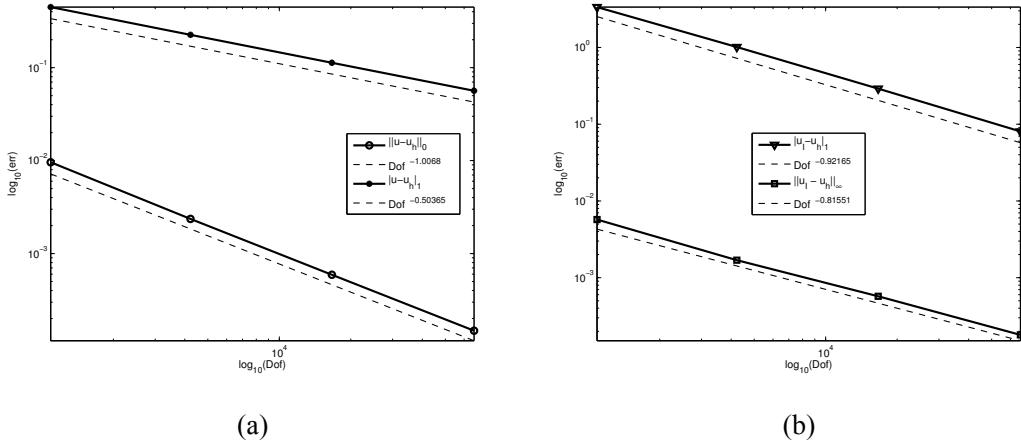


图 4.10 例 1 的误差及其收敛阶. (a)  $\|u - u_h\|_0$  和  $\|u - u_h\|_1$ . (b)  $\|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$  和  $\|u_I - u_h\|_\infty$ .

Dofs	$\ u - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _1$	$\ \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\ _0$	$\ u_I - u_h\ _\infty$
1,089	9.5970e-03	4.4924e-01	3.3603e+00	5.7255e-03
4,225	2.3570e-03	2.2545e-01	1.0142e+00	1.6907e-03
16,641	5.9135e-04	1.1286e-01	2.9050e-01	5.7175e-04
66,049	1.4800e-04	5.6451e-02	8.0473e-02	1.7961e-04

表 4.1 例 1 在  $H^1$ ,  $L^2$ , 和  $L^\infty$  范数下的误差.

Dofs	$\beta^+ = 10$		$\beta^+ = 100$		$\beta^+ = 1000$		$\beta^+ = 10000$	
	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)
1,089	10	0.021	11	0.023	10	0.021	10	0.021
4,225	10	0.031	10	0.033	10	0.032	10	0.032
16,641	10	0.092	10	0.099	10	0.093	10	0.1
66,049	10	0.36	10	0.37	10	0.37	10	0.37

表 4.2 例 1, 对于  $\beta^- = 1$  和不同的  $\beta^+$ , 以一个  $\mathcal{V}$ -cycle 为预条件子的共轭梯度法的迭代步数和时间.

### 4.3.2 例 2

这个例子来自于 [56, 61, 69]. 求解区域  $\Omega$  为  $(-1, 1)^2$ . 界面定义如下

$$X(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) + x_c, \quad Y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) + y_c,$$

其中

$$r(\theta) = r_0 + r_1 \sin(\omega\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

其中参数设为  $r_0 = 0.5$ ,  $r_1 = 0.2$ ,  $\omega = 20$ ,  $x_c = y_c = 0.02\sqrt{5}$ . 真解如下:

$$u^+ = \frac{r^4 + C_0 \log(2r)}{\beta^+}, \text{ 和 } u^- = \frac{r^2}{\beta^-},$$

其中  $\beta^+ = 10$ ,  $\beta^- = 1$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $C_0 = -0.1$ .

对于这个例子, 算法4.1生成的初始网格和线性有限元逼近解见图4.11(a) 和 (b). 其中初始界面拟合网格的最小角为  $25.7137^\circ$ .  $\|u - u_h\|_0$ ,  $|u - u_h|_1$ ,  $\|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$  和  $\|u_I - u_h\|_\infty$  误差见表格4.3, 它们的收敛率见图4.12 (a) 和 (b).

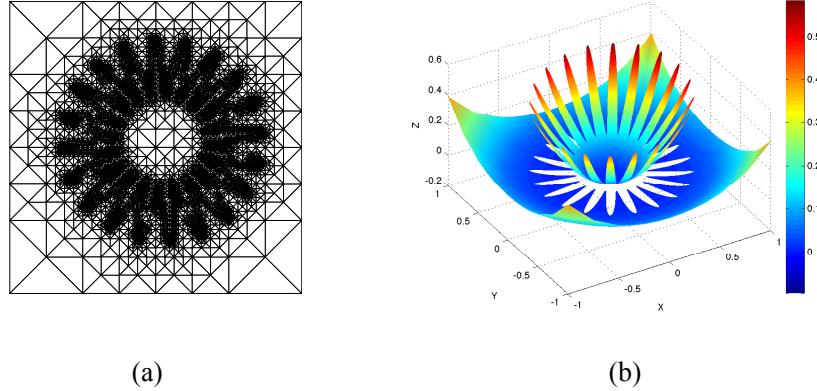


图 4.11 例 2 的网格和逼近解. (a) 初始的界面拟合网格, 其最小角为  $25.7137^\circ$ . (b) 界面拟合网格上的线性有限元解.

Dofs	$\ u - u_h\ _0$	$ u - u_h _1$	$\ \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\ _0$	$\ u_I - u_h\ _\infty$
18,004	2.1762e-02	1.2936e-01	1.5704e-01	1.3512e-02
71,987	5.3077e-03	6.6627e-02	4.3957e-02	4.0870e-03
287,893	1.3200e-03	3.3682e-02	1.1900e-02	1.2155e-03
1,151,465	3.2976e-04	1.6901e-02	3.1798e-03	3.5477e-04

表 4.3 例 2 在  $H^1$ ,  $L^2$ , 和  $L^\infty$  范数下的误差.

对于例 2, 我们固定  $\beta^- = 1$ , 在表格4.4中展示了我们所用解法器的迭代步数和计算时间随着自由度个数及  $\beta^+$  的变化而变化的规律.

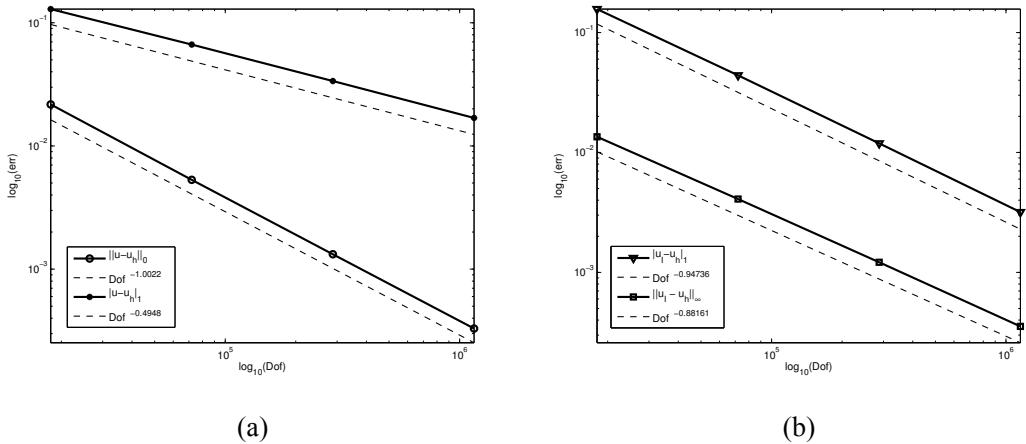


图 4.12 例 2 的误差及其收敛阶. (a)  $\|u - u_h\|_0$  和  $|u - u_h|_1$ . (b)  $\left\| \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I) \right\|_0$  和  $\|u_I - u_h\|_\infty$ .

	$\beta^+ = 10$		$\beta^+ = 100$		$\beta^+ = 1000$		$\beta^+ = 10000$	
<i>Dofs</i>	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)
18,004	9	0.38	13	0.47	15	0.51	15	0.52
71,987	10	0.51	13	0.88	15	0.96	15	0.96
287,893	10	2.2	13	2.6	14	2.7	14	2.7
1,151,465	10	8.8	13	11	14	11	14	11

表 4.4 例 2, 对于  $\beta^- = 1$  和不同的  $\beta^+$ , 以一个  $\mathcal{V}$ -cycle 为预条件子的共轭梯度法的迭代步数和时间.

### 4.3.3 例 3

这个例子来自 [9, 61]. 求解区域  $\Omega$  为  $(-1, 1)^2$ . 界面定义如下:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= t + \sin(4t), \\ r(t) &= 0.60125 + 0.24012 \cos(4t + \pi/2), \\ X(t) &= r(t) \cos(\theta(t)), \\ Y(t) &= r(t) \sin(\theta(t)),\end{aligned}$$

其中  $0 \leq t \leq 2\pi$ . 真解如下:

$$u^- = \cos(y) \sin(x), \text{ 和 } u^+ = 1 - x^2 - y^2,$$

其中  $\beta^- = 4 + \sin(x + y)$ ,  $\beta^+ = 10000 + x^2 + y^2$ .

对于这个例子, 算法4.1生成的初始网格和线性有限元逼近解见图4.13(a) 和 (b). 其中初始界面拟合网格的最小角为  $26.2797^\circ$ .  $\|u - u_h\|_0, \|u - u_h\|_1, \|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$  和

$\|u_I - u_h\|_\infty$  的误差见表格4.5, 它们的收敛率见图4.14(a) 和 (b).

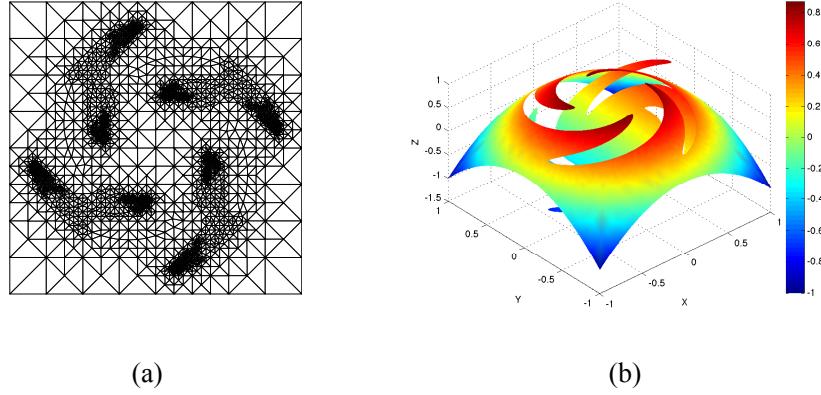


图 4.13 例 3 的网格和逼近解. (a) 初始的界面拟合网格, 其最小角为  $26.2797^\circ$ . (b) 界面拟合网格上的线性有限元解.

Dofs	$\ u - u_h\ _0$	$ u - u_h _1$	$\ \beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\ _0$	$\ u_I - u_h\ _\infty$
4,249	1.9326e-02	1.6337e-01	7.3234e+00	8.7266e-03
16,953	4.8220e-03	8.6269e-02	2.2225e+00	2.9843e-03
67,729	1.2256e-03	4.4058e-02	6.3928e-01	9.7703e-04
270,753	3.0807e-04	2.2185e-02	1.7798e-01	3.1631e-04

表 4.5 例 3 在  $H^1$ ,  $L^2$ , 和  $L^\infty$  范数下的误差.

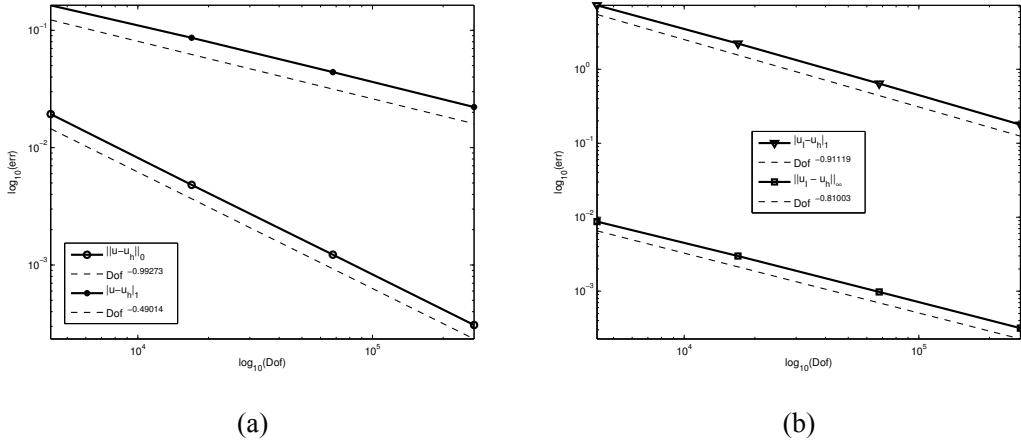


图 4.14 例 3 误差及其收敛阶. (a)  $\|u - u_h\|_0$  和  $|u - u_h|_1$ . (b)  $\|\beta_h^{1/2} \nabla(u_h - u_I)\|_0$  和  $\|u_I - u_h\|_\infty$ .

对于例 3, 我们同样固定  $\beta^- = 1$ , 在表格4.6中展示了我们所用解法器的迭代步数和计算时间随着自由度个数及  $\beta^+$  的变化而变化的规律.

	$\beta^+ = 10 + r^2$		$\beta^+ = 100 + r^2$		$\beta^+ = 1000 + r^2$		$\beta^+ = 10000 + r^2$	
<i>Dofs</i>	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)	#Iter	Time(s)
4,294	8	0.086	12	0.11	12	0.11	12	0.11
16,953	9	0.16	12	0.19	13	0.21	12	0.19
67,729	10	0.46	12	0.52	12	0.52	12	0.52
270,753	10	1.9	12	2.2	12	2.2	12	2.2

表 4.6 例 3, 对于  $\beta^- = 1$  和不同的  $\beta^+$ , 以一个  $\mathcal{V}$ -cycle 为预条件子的共轭梯度法的迭代步数和时间.

## 第五章 Laplace-Beltrami 问题的线性有限元超收敛

这一章讨论曲面有限元的超收敛性及其梯度恢复. 5.1 节给出一些主要的定义和引理. 5.2 节讨论曲面有限元解和真解线性插值的超收敛性. 5.3 节介绍几种梯度恢复方法, 并证明它们恢复得到的梯度可以更好的逼近真解的梯度, 最后把这些结果一般化到曲面有限体上.

### 5.1 预备知识

这一节首先介绍定义在曲面上的 Sobolev 空间的符号, 然后给出 LB 方程 (1.4) 的弱形式及其正则性结果. 接着讨论定义在曲面三角形网格上的 Sobolev 空间, 及定义在曲面和曲面三角形网格上的函数之间的关系. 最后, 给出曲面线性有限元及相应误差估计.

#### 5.1.1 光滑曲面上的 Sobolev 空间

因为  $S$  是一个闭曲面, 且  $\partial S = \emptyset$ , 所以  $S$  把  $\mathbb{R}^3$  分成三个不同的集合: 曲面内部的点、曲面上的点和曲面外部的点, 分别表示为  $\Omega_-$ 、 $\Omega_0$  和  $\Omega_+$ . 对于任意  $x \in \mathbb{R}^3$ , 记  $\text{dist}(x, S) = \min_{y \in S} |x - y|$  为  $x$  和  $S$  之间的距离, 其中  $|\cdot|$  为标准的欧氏距离. 我们可以定义一个带状区域:  $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(x, S) < \delta\}$ , 其中  $\delta > 0$  且要足够小, 使得可以定义一个唯一的符号距离函数  $d : U \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足如下性质:

$$\begin{cases} d \in C^3(U), \\ |d(x)| = \text{dist}(x, S), \quad \forall x \in U, \\ d(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega_- \cap U, \\ d(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega_0 \cap U, \\ d(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega_+ \cap U, \end{cases}$$

对于任意的  $x \in U$ , 可视  $S$  为距离函数的零水平集.

记  $\nabla$  为  $\mathbb{R}^3$  中通常意义下的梯度算子.  $\nabla d(x) \in \mathbb{R}^3$  为  $d(x)$  的梯度,  $\mathbf{H}(x) := \nabla^2 d(x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为  $d(x)$  的 Hessian 矩阵. 对于任意的  $x \in U$ , 记  $y$  为  $S$  上离  $x$  最近的点, 也即  $|d(x)| = |x - y|$ . 因为  $d(x)$  是符号距离函数, 且  $S$  是它的零水平集, 易知  $\nabla d(x)$  是  $S$  在  $y$  处的单位外法向向量, 即  $|\nabla d(x)| = 1$ . 对于任意的  $x \in U$ , 记  $\mathbf{n}(x) = \nabla d(x)$ . 我们可以定义如下唯一的投影  $\mathcal{P}_0 : U \rightarrow S$ :

$$\mathcal{P}_0(x) := x - d(x)\mathbf{n}(x). \tag{5.1}$$

对于  $x \in U$ , 对等式  $\nabla d(x) \cdot \nabla d(x) = 1$  两端关于  $x$  求导可得

$$\mathbf{H}(x)\nabla d(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{n}(x) = \mathbf{0}.$$

因此  $\mathbf{0}$  是  $\mathbf{H}(x)$  的特征值,  $\mathbf{n}(x)$  是相应的特征向量. 其它两个特征值分别记为  $\kappa_1(x)$  和  $\kappa_2(x)$ . 当  $x \in S$  时,  $\kappa_1(x)$  和  $\kappa_2(x)$  为  $S$  在  $x$  处的主曲率.

对于  $v \in C^1(S)$ , 因为  $S$  是  $C^3$  的, 我们可以把  $v$  扩展到  $C^1(U)$ , 且仍记为  $v$  [66].  $v$  在  $S$  上的切向梯度为

$$\nabla_S v = \nabla v - (\nabla v \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^t)\nabla v = \mathbf{P}\nabla v \in \mathbb{R}^3,$$

其中  $\mathbf{P}(x) = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^t)(x)$  是到点  $x \in S$  切平面上的投影算子, 因此有  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . 注意到这里我们用  $v$  的扩展来定义曲面梯度. 然而, 可以证明  $\nabla_S v$  的定义只依赖  $v$  的  $S$  上的值而不是  $v$  的扩展, 也即  $\nabla_S$  是一个内蕴算子.

类似地, 对于一个向量场  $\mathbf{v} \in (C^1(S))^3$ , 我们也可以把它扩展到  $(C^1(U))^3$  上去, 并定义  $\mathbf{v}$  在  $S$  上的切向散度为

$$\nabla_S \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{n}^t \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} \in \mathbb{R}.$$

$S$  上的 LB 算子定义如下:

$$\Delta_S v = \nabla_S \cdot (\nabla_S v) = \Delta v - (\nabla v \cdot \mathbf{n})(\nabla \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}^t \nabla^2 v \mathbf{n} \in \mathbb{R},$$

其中  $v \in C^2(S)$ ,  $\nabla^2 v$  是  $v$  的 Hessian 矩阵(扩展为  $C^2(U)$  函数).

记  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3$  为非负整数向量, 且记  $|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i$ . 由上面切向导数的定义,  $u$  在  $S$  上的  $|\alpha|$  阶切向导数  $D_S^\alpha u$  可以以递归的方式定义. 我们引入 Sobolev 空间

$$W_p^m(S) := \{u \in L^p(S) \mid D_S^\alpha u \in L^p(S), |\alpha| \leq m\},$$

其中  $1 \leq p \leq \infty$  和  $m$  是非负整数. 对于  $1 \leq p < \infty$ , 空间  $W_p^m(S)$  装配如下范数和半范数

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p,S} &:= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D_S^\alpha u\|_{L^p(S)}^p \right)^{1/p}, \\ |u|_{m,p,S} &:= \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D_S^\alpha u\|_{L^p(S)}^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

对于  $p = \infty$ , 对上述范数和半范数定义做标准的修改即可.

对于  $p = 2$ , 我们记  $W_2^m(S)$  为  $H^m(S)$ . 相应的范数的半范数简记为  $\|u\|_{m,S} = \|u\|_{m,2,S}$  和  $|u|_{m,S} = |u|_{m,2,S}$ .

### 5.1.2 LB 方程的弱形式及其正则性

LB 方程 (1.4) 的变分形式如下: 求  $u \in H^1(S)$  使得

$$\int_S \nabla_S u \cdot \nabla_S v \, d\sigma = \int_S f v \, d\sigma \quad \forall v \in H^1(S). \quad (5.2)$$

如下关于 (5.2) 适定和正则性结果可以在 [30] 中找到.

**引理 5.1** 设  $f \in L^2(S)$ , 且满足  $\int_S f \, d\sigma = 0$ . 那么 (5.2) 存在唯一的弱解  $u$ , 满足  $\int_S u \, d\sigma = 0$ , 且有

$$\|u\|_{2,S} \leq C \|f\|_{0,S}$$

成立, 其中常数  $C$  只依赖于曲面  $S$ .

### 5.1.3 曲面三角形网格上的 Sobolev 空间

记  $S_h$  为曲面  $S$  的一个由三角形组成的多面体面逼近. 我们假设  $S_h$  的这些三角形面都是形状正则的, 尺寸是拟一致的 (尺寸参数记为  $h$ ), 且它们的顶点都在曲面  $S$  上. 因为  $S_h$  是  $C^{0,1}$  的, 只有  $H^1(S_h)$  是适定的 [37, 49]. 记  $N_h = \{x_i\}$  为  $S_h$  为所有顶点的集合,  $T_h = \{\tau_h\}$  为所有三角形面的集合,  $E_h = \{E\}$  为所有边的集合. 对于任意的  $\tau_h \in T_h$ , 记  $\mathbf{n}_h$  为  $S_h$  在  $\tau_h$  上单位外法向向量. 对于  $v_h \in C(S_h)$  和  $v_h|_{\tau_h} \in C^1(\tau_h)$ , 我们有

$$\nabla_{S_h} v_h|_{\tau_h} := \nabla v_h - (\nabla v_h \cdot \mathbf{n}_h) \mathbf{n}_h = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_h \mathbf{n}_h^t) \nabla v_h = \mathbf{P}_h \nabla v_h \in \mathbb{R}^3,$$

其中  $\mathbf{P}_h = \mathbf{I} - \mathbf{n}_h \mathbf{n}_h^t \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . 显然,  $\nabla_{S_h} v_h \in (L^2(S_h))^3$ .

如果限止投影  $\mathcal{P}_0 : U \rightarrow S$  到  $S_h$  上, 就得到一个从  $S_h$  到  $S$  的连续可微的双射, 仍记为  $\mathcal{P}_0$ . 对于任意的  $\tau_h \in T_h$ , 我们可以得到一个曲面三角形  $\tau := \mathcal{P}_0(\tau_h)$ , 并记所有的曲面三角形集合为  $T_S$ .

由 [31], 我们建立定义在  $S$  和  $S_h$  函数之间的关系. 借助双射投影  $\mathcal{P}_0$ , 可以由函数  $v : S \rightarrow \mathbb{R}$  唯一地引入另一个函数  $\bar{v} : S_h \rightarrow \mathbb{R}$ . 对于所有的  $x \in S_h$ , 有  $\bar{v}(x) = v(\mathcal{P}_0(x))$ . 对于任意的  $\tau_h \in T_h$  和函数  $v \in C^1(\mathcal{P}_0(\tau_h))$ , 我们有

$$\nabla_{S_h} \bar{v}(x) = (\mathbf{P}_h (\mathbf{I} - d\mathbf{H}) \mathbf{P})(x) \nabla_S v(\mathcal{P}_0(x)) \quad \forall x \in \tau_h. \quad (5.3)$$

反过来, 一个函数  $v_h : S_h \rightarrow \mathbb{R}$  也可以唯一的引入一个函数  $\tilde{v}_h : S \rightarrow \mathbb{R}$ , 对于所有的  $x \in S$ , 有  $\tilde{v}_h(x) = v_h(\mathcal{P}_0^{-1}(x))$ . 对于任意的  $\tau_h \in T_h$  和函数  $v_h \in C^1(\tau_h)$ , 让  $\tau = \mathcal{P}_0(\tau_h)$ , 可得

$$\nabla_S \tilde{v}_h(x) = (\mathbf{I} - d\mathbf{H})^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{n}_h \mathbf{n}_h^t}{\mathbf{n}_h^t \mathbf{n}_h} \right) \nabla_{S_h} v_h(\mathcal{P}_0^{-1}(x)) \quad \forall x \in \tau. \quad (5.4)$$

记  $d\sigma_h$  和  $d\sigma$  分别为  $S_h$  和  $S$  曲面测度. 则它们满足  $d\sigma = J(x)d\sigma_h$  和 (见 [31])

$$J(x) = (1 - d(x)\kappa_1(x))(1 - d(x)\kappa_2(x))\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_h \quad \forall x \in \tau_h.$$

以后的证明需要如下的逼近结果 [37].

**引理 5.2** 对于任意的  $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ , 则有:

$$\|d(x)\|_{\infty, \tau_h} + \|1 - J\|_{\infty, \tau_h} + h \|\mathbf{n} - \mathbf{n}_h\|_{\infty, \tau_h} + h \|\mathbf{P} - \mathbf{P}_h\|_{\infty, \tau_h} \lesssim h^2. \quad (5.5)$$

对于定义在  $S$  上的函数  $v$  和它在  $S_h$  上的扩展  $\bar{v}$  的光滑性的关系, 我们有如下结果 [30, 37].

**引理 5.3** 设  $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ ,  $\tau = \mathcal{P}_0(\tau_h)$ . 若  $v \in W^{3,\infty}(\tau) \cap H^3(\tau)$ , 则有:

$$\|\bar{v}\|_{0, \tau_h} \lesssim \|v\|_{0, \tau} \lesssim \|\bar{v}\|_{0, \tau_h}, \quad (5.6)$$

$$|\bar{v}|_{1, \tau_h} \lesssim |v|_{1, \tau} \lesssim |\bar{v}|_{1, \tau_h}, \quad (5.7)$$

$$|\bar{v}|_{k, \tau_h} \lesssim \|v\|_{k, \tau}, \quad k = 2, 3, \quad (5.8)$$

$$|\bar{v}|_{k, \infty, \tau_h} \lesssim \|v\|_{k, \infty, \tau}, \quad k = 2, 3. \quad (5.9)$$

#### 5.1.4 曲面线性有限元

对于三角形  $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ , 记  $\{\lambda_i\}$  为  $\tau_h$  的重心坐标. 记  $\mathcal{V}_h$  为  $S_h$  上的连续分片线性有限元空间, 也即对于任意的  $v_h \in \mathcal{V}_h$  和  $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ ,  $v_h$  在  $S_h$  上连续, 且有  $v_h|_{\tau_h} \in \text{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . 我们可定义  $S$  上的提升空间

$$\tilde{\mathcal{V}}_h = \{\tilde{v}_h \mid \tilde{v}_h := v_h \circ \mathcal{P}_0^{-1}, \text{ 其中 } v_h \in \mathcal{V}_h\},$$

其中  $\mathcal{P}_0 : S_h \rightarrow S$  为定义在 (5.1) 中的双射. 对于  $f \in L^2(S)$ , 记

$$f_h(x) = \bar{f}(x) - \frac{1}{|S_h|} \int_{S_h} \bar{f} d\sigma_h, \quad (5.10)$$

其中  $|S_h|$  为  $S_h$  的总面积. 那么有  $\int_{S_h} f_h(x) d\sigma_h = 0$ , 且下列方程存在唯一的有限元解  $u_h \in \mathcal{V}_h$ , 满足  $\int_{S_h} u_h d\sigma_h = 0$  ([37])

$$\int_{S_h} \nabla_{S_h} u_h \cdot \nabla_{S_h} v_h d\sigma_h = \int_{S_h} f_h v_h d\sigma_h \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (5.11)$$

由 (5.3) 和  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ , 我们可以把  $S_h$  上的方程 (5.11) 变形到  $S$  上去

$$\int_S A_h \nabla_S \tilde{u}_h \cdot \nabla_S \tilde{v}_h d\sigma = \int_S \frac{1}{J} \tilde{f}_h \tilde{v}_h d\sigma, \quad (5.12)$$

其中  $\mathbf{A}_h = \frac{1}{J} \mathbf{P}(\mathbf{I} - d\mathbf{H})\mathbf{P}_h(\mathbf{I} - d\mathbf{H})\mathbf{P}$ . 从 (5.2) 中减去 (5.12), 可以得到误差方程

$$\int_S (\nabla_S u - \mathbf{A}_h \nabla_S \tilde{u}_h) \cdot \nabla_S \tilde{v}_h \, d\sigma = \int_S \left( f - \frac{1}{J} \tilde{f}_h \right) \tilde{v}_h \, d\sigma \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{\mathcal{V}}_h. \quad (5.13)$$

由 (5.13), 可以得到如下的估计, 见 [37].

**定理 5.1** 设  $S$  是一个  $C^2$  曲面, 则有:

$$\left\| f - \frac{1}{J} \tilde{f}_h \right\|_{0,S} \lesssim h^2 \|f\|_{0,S}, \quad (5.14)$$

$$\|(\mathbf{A}_h - \mathbf{I})\mathbf{P}\|_{\infty, \tau_h} \lesssim h^2 \quad \forall \tau_h \in \mathcal{T}_h, \quad (5.15)$$

且有如下的先验误差估计:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(S)} + h|u - \tilde{u}_h|_{H^1(S)} \lesssim h^2 (\|u\|_{2,S} + \|f\|_{0,S}). \quad (5.16)$$

## 5.2 超收敛

在这一节, 我们把 [4] 中的超收敛结果从平面网格一般化到曲面网格, 而且会考虑到因用多面体曲面  $S_h$  来逼近  $S$  带来的几何误差.

仿照 [25], 我们引入如下的符号. 对于每一条边  $E \in \mathcal{E}_h$ , 记它的长度为  $l_E$ . 设共用  $E$  的两个三角形分别为  $\tau_h$  和  $\tau'_h$ , 则两个三角形的并记为  $\Omega_E$ , 见图5.1. 对于三角形单元  $\tau_h \in \Omega_E$ , 记  $\theta_E$  为与边  $E$  相对的角的度数,  $l_{E+1}$  和  $l_{E-1}$  为另外两条边的长度,  $\mathbf{n}_h$  为  $S_h$  在  $\tau_h$  上单位外法向向量. 所有三角形的边的编号都是逆时针方向.  $E+1$  或  $E-1$  表示  $E$  的下一条边或前一条边. 记  $\mathbf{t}_E$  为  $E$  的单位切向向量, 方向为  $\tau_h$  的逆时针方向;  $\mathbf{n}_E$  为  $\tau_h$  在边  $E$  的单位外法向向量, 注意  $\mathbf{n}_E$  和  $\tau_h$  在同一个平面内. 已知  $\mathbf{n}_h$  为  $S_h$  在  $\tau_h$  上的单位外法向向量, 因此有  $\mathbf{n}_h \perp \mathbf{n}_E$  和  $\mathbf{n}_h \perp \mathbf{t}_E$ .

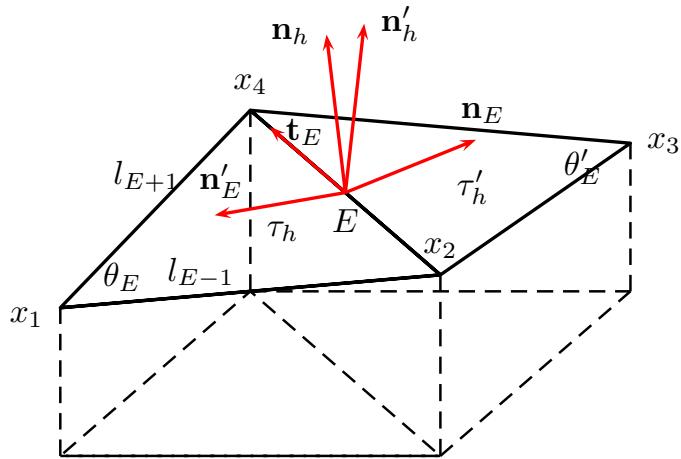


图 5.1 边  $E$  的单元片  $\Omega_E$ .

在  $\tau'_h$  中相应的量会加上一个上标  $'$ . 因为方向的原因, 有  $\mathbf{t}_E = -\mathbf{t}'_E$ . 与平面区域情形不同, 一般  $\mathbf{n}_E \neq -\mathbf{n}'_E$ . 然而由 (5.5), 可得

$$|\mathbf{n}_E + \mathbf{n}'_E| = |\mathbf{n}_h - \mathbf{n}'_h| \lesssim |\mathbf{n}_h - \mathbf{n}| + |\mathbf{n}'_h - \mathbf{n}| \lesssim h. \quad (5.17)$$

对于  $\Omega_E$ , 引入下面的定义. 这个定义首次出现在文献 [18] 中, 称为强正规条件.

**定义 5.1** 如果单元片  $\Omega_E$  满足下面的条件

$$|\overrightarrow{x_1x_4} - \overrightarrow{x_2x_3}| = O(h^2), \quad |\overrightarrow{x_1x_2} - \overrightarrow{x_4x_3}| = O(h^2),$$

则称其为  $O(h^2)$  的近似平行四边形.

注意  $\mathbf{n}_h$  和  $\mathbf{n}'_h$  的夹角是  $O(h)$ . 也即  $\tau_h$  和  $\tau'_h$  几乎在同一个平面上, 因此这里仍称  $\Omega_E$  为一近似平行四边形.

**注 5.1**  $O(h^2)$  条件可以放宽到  $O(h^{1+\rho})$  的情形, 其中  $\rho \in (0, 1)$ , 详细讨论见 [86]. 且本章的理论分析可以很容易应用到这样的情形.

**定义 5.2(见 [4, 25, 86])** 设  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$  为  $\mathcal{T}_h$  中的所有边的集合. 如果对于每一个  $E \in \mathcal{E}_1$ ,  $\Omega_E$  都形成一个近似平行四边形, 且  $\sum_{E \in \mathcal{E}_2} |\Omega_E| = O(h^{2\sigma})$ , 则称三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 其中  $\sigma > 0$ .

当三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 就可以把  $\mathcal{T}_h$  分为两部分:

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{1,h} \cup \mathcal{T}_{2,h}, \text{ 其中 } \mathcal{T}_{i,h} = \{\tau \in \mathcal{T}_h \mid \tau \in \Omega_E, \text{ 满足 } E \in \mathcal{E}_i\}. \quad (5.18)$$

定义  $\bar{\Omega}_{i,h} \equiv \bigcup_{\tau_h \in \mathcal{T}_{i,h}} \bar{\tau}_h$ ,  $i = 1, 2$ . 那么

$$\bar{\Omega}_{1,h} \cup \bar{\Omega}_{2,h} = S_h, \text{ 和 } |\Omega_{2,h}| = O(h^{2\sigma}). \quad (5.19)$$

对于  $u \in C(S)$ , 有  $\bar{u} = u \circ \mathcal{P}_0 \in C(S_h)$ . 那么可以定义  $\bar{u}$  在  $S_h$  上的两种插值. 首先, 记  $\bar{u}_I \in \mathcal{V}_h$  为  $\bar{u}$  在  $S_h$  上的线性插值, 定义如下

$$\bar{u}_I(x_i) = \bar{u}(x_i) \quad \forall x_i \in \mathcal{N}_h,$$

其中  $\mathcal{N}_h$  为  $S_h$  的顶点集. 记  $W_h$  为  $S_h$  上的连续分片二次有限元空间, 也即对于任意  $w_h \in W_h$  和  $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ ,  $w_h$  是连续的, 且  $w_h|_{\tau_h} \in \text{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \lambda_2\lambda_3\}$ . 我们定义  $\bar{u}_Q \in W_h$  为  $\bar{u}$  的二次插值, 满足

$$\bar{u}_Q(x_i) = \bar{u}(x_i) \quad \forall x_i \in \mathcal{N}_h, \text{ 和 } \int_E \bar{u}_Q = \int_E \bar{u} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h.$$

我们可以利用  $\mathcal{P}_0$  把  $\bar{u}_I$  和  $\bar{u}_Q$  提升到  $S$  上, 即  $u_I = \bar{u}_I \circ \mathcal{P}_0^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}$  和  $u_Q = \bar{u}_Q \circ \mathcal{P}_0^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

在平的三角形  $\tau_h$  上, 有如下两个重要引理, 见 [25].

**引理 5.4**  $\bar{u}_I$  和  $\bar{u}_Q$  如上定义, 分别为  $\bar{u}$  的线性和二次插值. 对于所有的  $v_h \in \mathcal{V}_h$ , 有如下的局部误差展开式:

$$\int_{\tau_h} \nabla_{S_h}(\bar{u} - \bar{u}_I) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h = \sum_{E \in \partial\tau_h} \left[ \alpha_E \left( \int_E \frac{\partial^2 \bar{u}_Q}{\partial \mathbf{t}_E^2} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \right) + \beta_E \left( \int_E \frac{\partial^2 \bar{u}_Q}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{n}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \right) \right],$$

其中

$$\alpha_E = \frac{1}{12} \cot \theta_E (l_{E+1}^2 - l_{E-1}^2), \quad \beta_E = \frac{1}{3} \cot \theta_E |\tau_h|.$$

**引理 5.5** 对于任意的边  $E \in \mathcal{E}_h$ , 有

$$|\alpha_E| + |\alpha'_E| = O(h^2), \quad |\beta_E| + |\beta'_E| = O(h^2), \quad (5.20)$$

$$|\alpha_E - \alpha'_E| = O(h^3), \quad |\beta_E - \beta'_E| = O(h^3) \text{ 若 } E \in \mathcal{E}_1, \quad (5.21)$$

$$\int_E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{z}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \lesssim h^{-1} \|u\|_{2,\infty,S} \int_{\tau_h} |\nabla_{S_h} v_h|, \quad (5.22)$$

$$\int_E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{z}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \lesssim \int_{\tau_h} (h^{-1} |\nabla_{S_h}^2 \bar{u}| + |\nabla_{S_h}^3 \bar{u}|) |\nabla_{S_h} v_h|, \quad (5.23)$$

$$\int_E \frac{\partial^2 (\bar{u} - \bar{u}_Q)}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{z}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \lesssim \int_{\tau_h} |\nabla_{S_h}^3 \bar{u}| |\nabla_{S_h} v_h|, \quad (5.24)$$

其中  $\mathbf{z}_E$  是  $\mathbf{n}_E$  或者  $\mathbf{t}_E$ .

下面给出本节的主要结果, 即曲面线性有限元解与真解在多面体面网格上线性插值之间的超收敛性.

**定理 5.2** 假设  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的.  $u$  是 (1.4) 的真解,  $u_h$  是  $S_h$  上的有限元解. 若  $u \in H^3(S) \cap W_\infty^2(S)$ , 那么对于所有的  $v_h \in \mathcal{V}_h$ , 有

$$\int_{S_h} \nabla_{S_h}(\bar{u} - \bar{u}_I) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,S} + \|u\|_{2,\infty,S}) |v_h|_{1,S_h}, \quad (5.25)$$

和

$$\|\nabla_{S_h} u_h - \nabla_{S_h} \bar{u}_I\|_{0,S_h} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,S} + \|u\|_{2,\infty,S}) + h^2 \|f\|_{0,S}. \quad (5.26)$$

**证明** 利用引理5.4中的基本等式, 有

$$\begin{aligned} (\nabla_{S_h}(\bar{u} - \bar{u}_I), \nabla_{S_h} v_h) &= \sum_{\tau_h \in T_h} \sum_{E \in \partial\tau_h} \left[ \alpha_E \left( \int_E \frac{\partial^2 \bar{u}_Q}{\partial \mathbf{t}_E^2} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \right) + \beta_E \left( \int_E \frac{\partial^2 \bar{u}_Q}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{n}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \right) \right] \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_i &= \sum_{E \in \mathcal{E}_i} \left[ (\alpha_E - \alpha'_E) \int_E \frac{\partial^2 \bar{u}_Q}{\partial \mathbf{t}_E^2} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} + (\beta_E - \beta'_E) \int_E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{n}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \right], \quad i = 1, 2, \\ I_3 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left[ \beta'_E \int_E \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{n}_E} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{n}'_E} \right) \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} + \beta_E \int_E \frac{\partial^2 (\bar{u}_Q - \bar{u})}{\partial \mathbf{t}_E \partial \mathbf{n}_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}_E} \right. \\ &\quad \left. + \beta'_E \int_E \frac{\partial^2 (\bar{u}_Q - \bar{u})}{\partial \mathbf{t}'_E \partial \mathbf{n}'_E} \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{t}'_E} \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

为估计  $I_1$ , 利用引理5.3, 估计式 (5.21) 和 (5.23) 可得到

$$\begin{aligned} |I_1| &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_1} \left[ |\alpha_E - \alpha'_E| \int_{\tau_h} h^{-1} |\nabla_{S_h}^2 \bar{u}_Q| |\nabla_{S_h} v_h| \right. \\ &\quad \left. + |\beta_E - \beta'_E| \int_{\tau_h} (h^{-1} |\nabla_{S_h}^2 \bar{u}| + |\nabla_{S_h}^3 \bar{u}|) |\nabla_{S_h} v_h| \right] \\ &\lesssim h^2 \sum_{\tau_h \in \mathcal{T}_{1,h}} \int_{\tau_h} (|\nabla_{S_h}^2 \bar{u}| + h |\nabla_{S_h}^3 \bar{u}|) |\nabla_{S_h} v_h| \\ &\lesssim h^2 \|u\|_{3,S} |v_h|_{1,S_h}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

为估计  $I_2$ , 利用引理5.3, 估计式 (5.20) 和 (5.22) 可得到

$$|I_2| \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_2} h \|u\|_{2,\infty,S} \int_{\Omega_E} |\nabla_{S_h} v_h| \lesssim h^{1+\sigma} \|u\|_{2,\infty,S} |v_h|_{1,S_h}.$$

为估计  $I_3$ , 利用引理5.3, (5.17), 估计式 (5.20), (5.23), 和 (5.24) 可得

$$\begin{aligned} |I_3| &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |\beta'_E| \int_E \left| \nabla_{S_h} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_E} \cdot (\mathbf{n}_E + \mathbf{n}'_E) \frac{\partial v_h}{\partial t_E} \right| + \sum_{\tau_h \in \mathcal{T}_h} h^2 \int_{\tau_h} |\nabla_{S_h}^3 \bar{u}| |\nabla_{S_h} v_h| \\ &\lesssim h^2 \sum_{\tau_h \in \mathcal{T}_h} (|\bar{u}|_{2,\tau_h} + h |\bar{u}|_{3,\tau_h} + |\bar{u}|_{3,\tau_h}) |v_h|_{1,\tau_h} \\ &\lesssim h^2 \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \|u\|_{3,\tau} |v_h|_{1,\tau_h} \\ &\lesssim h^2 \|u\|_{3,S} |v_h|_{1,S_h}. \end{aligned}$$

即可得到不等式 (5.25). 现证明 (5.26) 如下

$$\begin{aligned} &\int_{S_h} \nabla_{S_h} (u_h - \bar{u}_I) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h \\ &= \int_{S_h} \nabla_{S_h} (u_h - \bar{u}) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h + \int_{S_h} \nabla_{S_h} (\bar{u} - \bar{u}_I) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h \\ &= \int_S (\mathbf{A}_h \nabla_S \tilde{u}_h - \nabla_S u) \cdot \nabla_S \tilde{v}_h \, d\sigma + \int_S (\nabla_S u - \mathbf{A}_h \nabla_S u) \cdot \nabla_S \tilde{v}_h \, d\sigma \quad (5.29) \\ &\quad + \int_{S_h} \nabla_{S_h} (\bar{u} - \bar{u}_I) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h \\ &= I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

$I_6$  的估计可由 (5.25) 得到. 使  $C_0 = \frac{\int_S \tilde{v}_h \, d\sigma}{|S|}$ . 由 (5.13) 和 (5.15), 可估计  $I_4$  如下

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{A}_h \nabla_S \tilde{u}_h - \nabla_S u) \cdot \nabla_S \tilde{v}_h \, d\sigma &= \int_S (\mathbf{A}_h \nabla_S \tilde{u}_h - \nabla_S u) \cdot \nabla_S (\tilde{v}_h - C_0) \, d\sigma \\ &= \int_S \left( \frac{1}{J} \tilde{f}_h - f \right) (\tilde{v}_h - C_0) \, d\sigma \quad (5.30) \\ &\lesssim h^2 \|f\|_{0,S} |\tilde{v}_h|_{1,S} \lesssim h^2 \|f\|_{0,S} |v_h|_{1,S_h}. \end{aligned}$$

由 (5.7) 和 (5.15), 又可估计  $I_5$  如下

$$\begin{aligned} \left| \int_S (\nabla_S u - \mathbf{A}_h \nabla_S u) \cdot \nabla_S \tilde{v}_h \, d\sigma \right| &= \left| \int_S (\mathbf{I} - \mathbf{A}_h) \mathbf{P} \nabla_S u \cdot \nabla_S \tilde{v}_h \, d\sigma \right| \\ &\lesssim \|(\mathbf{A}_h - \mathbf{I}) \mathbf{P}\|_{\infty,S} |u|_{1,S} |\tilde{v}_h|_{1,S} \lesssim h^2 |u|_{1,S} |\tilde{v}_h|_{1,S} \quad (5.31) \\ &\lesssim h^2 |u|_{1,S} |v_h|_{1,S_h}. \end{aligned}$$

结合 (5.13), (5.15), (5.17), (5.25), 及 (5.31), 即证 (5.26).  $\square$

利用  $u$  和  $\bar{u}$  的  $H^1$  模的等价性 (见引理5.3), 又可得  $\tilde{u}_h$  和  $u_I$  的超逼近性.

**推论 5.1** 在定理5.2的条件下, 记  $\tilde{u}_h$  和  $u_I$  分别为  $u_h$  和  $\bar{u}_I$  到  $S$  上的提升. 则

$$\|\nabla_S \tilde{u}_h - \nabla_S u_I\|_{0,S} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,S} + \|u\|_{2,\infty,S}) + h^2 \|f\|_{0,S}. \quad (5.32)$$

### 5.3 几种梯度恢复方法

这一节讨论如何把平面三角形网格上的梯度恢复方法, 包括局部和全局格式, 一般化到多面体网格.

#### 5.3.1 曲面三角形网格上的局部平均格式

我们首先给出平面三角形网格的局部平均梯度恢复格式. 给定一个顶点  $x_i$  周围的单元片  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ , 即  $\bar{\Omega}_i = \bigcup_{x_j \in \bar{\tau}_h} \bar{\tau}_j$ . 记  $\{x_{ij}\}_{j=1}^m$  为  $\Omega_i$  的边界顶点, 排列顺序为逆时针方向. 记  $\tau_j = \Delta x_i x_{ij} x_{i(j+1)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , 且有  $x_{i(m+1)} = x_{i1}$ , 见图5.2(a).

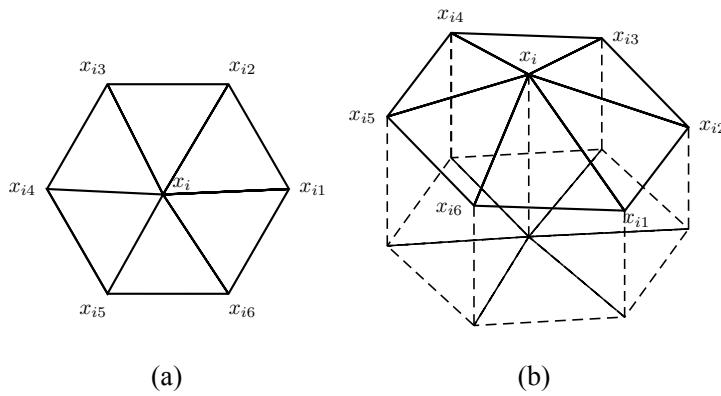


图 5.2 平面网格和曲面网格上的单元片. (a) 平面上  $x_i$  周围的单元片  $\Omega_i$ . (b) 曲面上  $x_i$  周围的单元片  $\Omega_i$ .

我们考虑如下的两个梯度恢复算子  $G_h$ , 它们可以应用到有线性有限元函数  $v_h \in \mathcal{V}_h$  上:

$$1. \text{ 简单平均 } (G_h \nabla v_h)(x_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \nabla v_h|_{\tau_j}(x_i).$$

$$2. \text{ 面积加权平均 } (G_h \nabla v_h)(x_i) = \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|}{|\Omega_i|} \nabla v_h|_{\tau_j}(x_i).$$

**定理 5.3 (见 [86])** 设  $\Omega_i$  中每两个相邻的三角形构成一个  $O(h^2)$  近似平行四边形, 且  $u \in W_\infty^3(\Omega_i)$ . 记  $u_I$  为  $u$  在  $\Omega_i$  上的节点插值,  $(G_h \nabla u_I)(x_i)$  为简单平均或面积加权平均. 则

$$|(G_h \nabla u_I)(x_i) - \nabla u(x_i)| \lesssim h^2 \|u\|_{3,\infty,\Omega_i}. \quad (5.33)$$

定理5.3可在 [86] 中找到, 但其证明有一点问题. 我们会把定理5.3推广到多面体曲面网格上去, 并提供一个新的证明.

给定一个顶点  $x_i$  和它的单元片  $\Omega_i \subset S_h$ ; 见图5.2(b). 记  $\tilde{\Omega}_i = \mathcal{P}_0(\Omega_i) \subset S$  为  $\Omega_i$  提升到  $S$  上的单元片. 对于一个有限元函数  $v_h \in V_h(S_h)$ , 曲面三角形网格上局部恢复算子定义如下:  $(G_h \nabla_{S_h} v_h)(x_i)$ :

$$1. \text{ 简单平均 } (G_h \nabla_{S_h} v_h)(x_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \nabla_{S_h} v_h|_{\tau_j}(x_i).$$

$$2. \text{ 面积加权平均 } (G_h \nabla_{S_h} v_h)(x_i) = \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|}{|\Omega_i|} \nabla_{S_h} v_h|_{\tau_j}(x_i).$$

这里仅仅把  $\mathbb{R}^2$  中通常意义的梯度算子  $\nabla$  换成多面体网格上的梯度算子.

本质上, 一个顶点周围的单元片的对称性是超收敛性的来源 [76]. 因此我们给出下面的概念. 称  $x_i$  的单元片  $\Omega_i$  是  $O(h^2)$  对称的, 如果对于  $\Omega_i$  的任何一个边界顶点  $x_{ij}$ ,  $\Omega_i$  存在另一个边界顶点  $x'_{ij}$ , 使得

$$x_{ij} - 2x_i + x'_{ij} = O(h^2), \quad (5.34)$$

上式意味着  $x_{ij}$  和  $x'_{ij}$  是关于  $x_i$  近似对称的. 记  $\mathbf{n}$  为  $S$  在顶点  $x_i$  处的单位外法向向量;  $\mathbf{n}_h|_{\tau_j}$  为  $S_h$  在三角形  $\tau_j \subset \Omega_i$  上的单位外法向向量. 因为  $S$  的  $C^3$  光滑性和单元片  $\Omega_i$  的  $O(h^2)$  的对称性, 对于  $\Omega_i$  中的任意三角形  $\tau_j$ , 存在另一个三角形  $\tau'_j \subset \Omega_i$ , 使得两个三角形在  $x_i$  处的单位外法向向量  $\mathbf{n}_h$  和  $\mathbf{n}'_h$  满足

$$\mathbf{n}_h - 2\mathbf{n} + \mathbf{n}'_h = O(h^2), \quad (5.35)$$

且两个三角形的面积  $|\tau_j|$  和  $|\tau'_j|$  满足

$$|\tau_j| - |\tau'_j| = O(h^3). \quad (5.36)$$

**定理 5.4** 设  $u \in W_\infty^3(S)$ ,  $\bar{u} = u \circ \mathcal{P}_0$ , 且  $\bar{u}_I$  是  $\bar{u}$  在  $\Omega_i$  上的线性插值.  $(G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I)(x_i)$  是在顶点  $x_i$  处的简单平均或面积加权平均. 若  $\Omega_i$  是  $O(h^2)$  对称的, 则

$$|(G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I)(x_i) - \nabla_S u(x_i)| \lesssim h^2 \|u\|_{3,\infty,S}. \quad (5.37)$$

**证明** 对于加权平均, 利用三角不等式, 把  $x = x_i$  代入 (5.3) 中, 且由  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ , 可得

$$\begin{aligned} & |(G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I)(x_i) - \nabla_S u(x_i)| \\ & \leq \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} \bar{u})|_{\tau_j}(x_i) \right| + \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\nabla_{S_h} \bar{u}|_{\tau_j} - \mathbf{P} \nabla_S u)(x_i) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\nabla_{S_h} \bar{u}_I|_{\tau_j} - \nabla_{S_h} \bar{u})|_{\tau_j}(x_i) \right| + \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m ((\mathbf{P}_h|_{\tau_j} - \mathbf{P}) \nabla_S u)(x_i) \right| \\ & = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

估计  $I_1$  和  $I_2$  如下. 首先对于  $I_2$ , 根据  $\mathbf{P}_h = I - \mathbf{n}_h \mathbf{n}_h^t$ ,  $\mathbf{P} = I - \mathbf{n} \mathbf{n}^t$ , 和 (5.35), 有

$$|I_2| \lesssim \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\mathbf{P}_h|_{\tau_j} - \mathbf{P})(x_i) \right| \|u\|_{1,\infty,S} \lesssim h^2 \|u\|_{1,\infty,S}.$$

对于  $I_1$ , 我们有如下的误差展式. 对于  $\Omega_i$  中的一个三角形  $\tau_j = \Delta x_i x_{ij} x_{i(j+1)}$  和  $\bar{u} \in W_\infty^3(\tau_j)$ , 有如下等式 [93]:

$$\nabla_{S_h}(\bar{u}_I - \bar{u})(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 d_k^2 \bar{u}(x) \nabla_{S_h} \lambda_k(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \nabla_{S_h} \lambda_k(x) \int_0^1 d_k^3 \bar{u}(\varsigma_k) t^2 dt, \quad (5.38)$$

其中  $x$  是  $\tau_h^j$  中的一点,  $d_k = (x - x_k)^T \nabla_{S_h}$ ,  $x_1 = x_i$ ,  $x_2 = x_{ij}$ ,  $x_3 = x_{i(j+1)}$ ,  $\varsigma_k = x_k + t(x - x_k)$ ;  $\lambda_k$  是  $\tau_j$  关于其三个顶点  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$  的重心坐标. 然后由引理5.3和 (5.38), 可得

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 d_k^2 \bar{u}(x_i) \nabla_{S_h} \lambda_k(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \nabla_{S_h} \lambda_k(x_i) \int_0^1 d_k^3 \bar{u}(\varsigma_k) t^2 dt \right] \right| \\ &\lesssim \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 d_k^2 \bar{u}(x_i) \nabla_{S_h} \lambda_k(x_i) \right] \right| + h^2 \|u\|_{3,\infty,S}. \end{aligned}$$

对于一个三角形单元  $\tau_j$  中的任一  $d_k^2 \bar{u}(x_i) \nabla_{S_h} \lambda_k(x_i)$ , 由  $O(h^2)$  对称性和重心坐标的梯度公式, 可知存在另一个单元  $\tau'_j$  中的  $d_{k'}^2 \bar{u}(x_i) \nabla_{S_h} \lambda_{k'}(x_i)$ , 使得

$$d_k^2 \bar{u}(x_i) \nabla_{S_h} \lambda_k(x_i) + d_{k'}^2 \bar{u}(x_i) \nabla_{S_h} \lambda_{k'}(x_i) = O(h^2).$$

即可得结论(5.37).

借助引理5.3, (5.34), (5.35), (5.36), 和 (5.38), 面积加权平均类似可证.  $\square$

**注 5.2** 如果单元片  $\Omega_i$  不是  $O(h^2)$  对称的, 但因为  $S_h$  形状正则和拟一致的,  $\Omega_i$  至少是  $O(h)$  对称的. 所为利用同样的证明可以得到

$$|(G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I)(x_i) - \nabla_S u(x_i)| \lesssim h \|u\|_{2,\infty,S}. \quad (5.39)$$

### 5.3.2 切平面上的局部最小二乘拟合

记  $\Omega_i \subset S_h$  为顶点  $x_i$  处的单元片.  $\mathbf{n}_i$  为  $S$  在  $x_i$  处的单位外法向向量,  $M_i$  为  $S$  在  $x_i$  处的切平面. 沿着  $\mathbf{n}_i$  的方向, 定义投影

$$\mathcal{P}_1(x) = x + (x_i - x, \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \in M_i \quad \forall x \in \Omega_i. \quad (5.40)$$

那么我们可以把  $\Omega_i$  投影到  $M_i$  上去, 从而得到切平面  $M_i$  上的一个单元片  $\bar{\Omega}_i = \mathcal{P}_1(\Omega_i)$ . 若  $\Omega_i$  是  $O(h^2)$  对称的, 则因  $S$  是  $C^3$  光滑的, 由 Taylor 展开易证  $\bar{\Omega}_i$  也是

$O(h^2)$  对称的. 在 [36] 中, 作者首先把  $\Omega_i$  投影到  $S$  在  $x_i$  处的切平面  $M_i$  上, 然后用简单平均来恢复  $x_i$  处的梯度. 我们就采用这样的方法给出几种恢复格式.

记  $\{\bar{x}_{ij} | \bar{x}_{ij} = \mathcal{P}_1(x_{ij}), j = 1, m\}$  为  $M_i$  上的单元片  $\bar{\Omega}_i$  的边界顶点. 然后构造一个以  $x_i$  为原点的局部坐标系,  $z$  轴方向取为  $\mathbf{n}_z := \mathbf{n}_i$ ,  $x$  轴方向取为  $\mathbf{n}_x := (\bar{x}_{i1} - x_i) / |\bar{x}_{i1} - x_i|$ , 那么  $y$  轴的方向就取为  $\mathbf{n}_y := \mathbf{n}_z \times \mathbf{n}_x$ . 最后记  $\bar{x}'_j := ((\bar{x}_{ij} - x_i) \cdot \mathbf{n}_x, (\bar{x}_{ij} - x_i) \cdot \mathbf{n}_y)$ ,  $j = 1, m$ . 我们就得到一个单元片  $\bar{\Omega}'_i \subset \mathbb{R}^2$ , 它的原点是  $x_O := (0, 0)$ , 边界顶点是  $\{\bar{x}'_j\}_{j=1}^m$ .

记  $v_h$  为  $\Omega_i$  上的线性有限元函数. 我们可以定义一个  $\bar{\Omega}'_i$  上的有限元函数  $\bar{v}'_h$ , 满足  $\bar{v}'_h(x_O) = v_h(x_i)$ , 且  $\bar{v}_h(\bar{x}'_j) = v_h(x_{ij})$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

利用如下的最小二乘拟合格式:

1. 局部  $L^2$  投影. 求线性函数  $p_l \in P_1(\bar{\Omega}'_i)$  ( $l = 1, 2$ ) 使得

$$\int_{\Omega_i} [p_l(x) - \partial_l \bar{v}'_h(x)] q \, dx = 0 \quad \forall q \in P_1(\bar{\Omega}'_i), l = 1, 2. \quad (5.41)$$

2. Zienkiewicz 和 Zhu 提出的局部离散最小二乘拟合 [90]. 记  $c_j$  为  $\tau_j \in \bar{\Omega}'_i$  重心. 求线性函数  $p_l \in P_1(\bar{\Omega}'_i)$  ( $l = 1, 2$ ) 使得

$$\sum_{j=1}^m [p_l(c_j) - \partial_l \bar{v}'_h(c_j)] q(c_j) = 0 \quad \forall q \in P_1(\bar{\Omega}'_i), l = 1, 2. \quad (5.42)$$

最后, 由下式得到  $v_h$  的恢复梯度  $G_h \nabla_{S_h} v_h \in V_h$ :

$$(G_h \nabla_{S_h} v_h)(x_i) = p_1(x_O) \mathbf{n}_x + p_2(x_O) \mathbf{n}_y.$$

**定理 5.5** 设  $u \in W_\infty^3(S)$ ,  $\bar{\Omega}_i = \mathcal{P}_1(\Omega_i)$ , 且  $u^M(\mathcal{P}_1) = u(\mathcal{P}_0)$ ;  $u_I^M$  为  $u^M$  在  $\bar{\Omega}_i$  上的线性插值,  $G_h$  为定义在切平面单元片上的四种梯度恢复算子之一: 简单平均, 面积加权平均, 局部  $L^2$  投影 (5.41), 局部离散最小二乘拟合 (5.42). 如果  $\Omega_i$  是  $O(h^2)$  对称的, 则有

$$|\nabla_S u(x_i) - G_h \nabla_{M_i} u_I^M(x_i)| \lesssim h^2 \|u\|_{3,\infty,S}. \quad (5.43)$$

**证明** 因为  $\nabla_{M_i} u^M(x_i) = \nabla u(x_i) - (\nabla u(x_i) \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i = \nabla_S u(x_i)$ , 所以

$$|\nabla_S u(x_i) - G_h \nabla_{M_i} u_I^M(x_i)| = |\nabla_{M_i} \bar{u}(x_i) - G_h \nabla_{M_i} u_I^M(x_i)|,$$

这样就把一个曲面单元片问题转为一个平面单元片问题.

当  $G_h$  是简单平均或面积加权平均时, (5.43) 就是定理 5.4 的一个特殊情形. 对于局部  $L^2$  投影和局部离散最小二乘拟合 (ZZ), 由简单平均和面积加权平均的结果, 及 [86] 中定理 3.1 的证明方法, 同样可证 (5.43) 成立.  $\square$

**注 5.3** 同样如果单元片不是  $O(h^2)$  对称的, 就有如下估计

$$|\nabla_S u(x_i) - G_h \nabla_{M_i} u_I^M(x_i)| \lesssim h \|u\|_{2,\infty,S}. \quad (5.44)$$

**定理 5.6** 设  $u$  为 (5.2) 的解,  $u_h$  为 (5.11) 的解.  $G_h$  是如下六种恢复算子的一种: 分别在曲面单元片和切平面上单元片的简单平均和面积加权平均, 及切平面上单元片的局部  $L^2$  投影和局部最小二乘拟合 (ZZ). 记  $w_h = G_h \nabla_{S_h} u_h$ . 若三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 且  $u \in W_\infty^3(S)$ , 则

$$\|\nabla_S u - \tilde{w}_h\|_{0,S} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|u\|_{3,\infty,S} + h^2 \|f\|_{0,S}.$$

**证明** 记  $\overline{\nabla_S u} = (\nabla_S u) \circ \mathcal{P}_0$ . 根据范数等价性(5.7), 我们只需要估计  $\|\overline{\nabla_S u} - G_h \nabla_{S_h} u_h\|_{0,S_h}$ . 我们有如下分解

$$\overline{\nabla_S u} - G_h \nabla_{S_h} u_h = \overline{\nabla_S u} - (\overline{\nabla_S u})_I + (\overline{\nabla_S u})_I - G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I + G_h (\nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} u_h).$$

对于第一项, 由标准的逼近理论, 可得

$$\left\| \overline{\nabla_S u} - (\overline{\nabla_S u})_I \right\|_{0,S_h} \lesssim h^2 \|u\|_{3,S}. \quad (5.45)$$

为了控制第二项, 我们  $O(h^{2\sigma})$  非正规的  $\mathcal{T}_h$  分成两部分, 但与 (5.18) 的分法稍微不同. 定义  $\mathcal{N}_{1,h} = \{x_i \in \mathcal{N}_h | \Omega_i\text{中的每两个相邻的三角形都满足强正规条件}\}, \mathcal{N}_{2,h} = \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_{1,h}$ , 以及  $\Omega_{i,h} = \cup_{x_k \in \mathcal{N}_{i,h}} \Omega_k$ , 其中  $i = 1, 2$ .

若引入  $\mathcal{E}_{x_i} = \{E \in \mathcal{E}_h | x_i \text{为 } E \text{的一个端点}\}$ , 那么  $x_i \in \mathcal{N}_{2,h}$  就等价于存在至少一条边  $E \in \mathcal{E}_{x_i}$ , 使得  $E \subset \mathcal{E}_2$ . 由网格的形状正则性, 仍然有

$$|\Omega_{2,h}| \lesssim \bigcup_{E \in \mathcal{E}_2} |\Omega_E| = O(h^{2\sigma}).$$

在  $\Omega_{1,h}$  中, 根据(5.37)和(5.43), 有

$$\begin{aligned} \left\| (\overline{\nabla_S u})_I - G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I \right\|_{0,\Omega_{1,h}} &\leq \left( \sum_{\tau_h \in \mathcal{T}_{1,h}} |\tau_h| \sum_{z \in \mathcal{N}_h \cap \bar{\tau}_h} |G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I(z) - \nabla_S u(z)|^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim h^2 \|u\|_{3,\infty,S} |\Omega_{1,h}|^{1/2} \lesssim h^2 \|u\|_{3,\infty,S}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

而在  $\Omega_{2,h}$  中, 根据 (5.39) 和 (5.44), 有

$$\left\| (\overline{\nabla_S u})_I - G_h \nabla_{S_h} \bar{u}_I \right\|_{0,\Omega_{2,h}} \lesssim h \|u\|_{3,\infty,S} |\Omega_{2,h}|^{1/2} \lesssim h^{1+\sigma} \|u\|_{3,\infty,S}. \quad (5.47)$$

结合 (5.46) 和 (5.47), 有

$$\left\| (\overline{\nabla_S u})_I - \nabla_{S_h} \bar{u}_I \right\|_{0,S_h} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|u\|_{3,\infty,S}. \quad (5.48)$$

因为  $G_h$  在  $L^2$  范数下是线性有界算子 [86], 那么由定理5.2可得,

$$\begin{aligned} \|G_h(\nabla_{S_h}\bar{u}_I - \nabla_{S_h}u_h)\|_{0,S_h} &\lesssim \|\nabla_{S_h}(\bar{u}_I - u_h)\|_{0,S_h} \\ &\lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,S} + \|u\|_{2,\infty,S}) + h^2 \|f\|_{0,S}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

由 (5.45), (5.48) 和 (5.49), 即可得最后结论.  $\square$

### 5.3.3 全局 $L^2$ 投影

这一小节讨论全局  $L^2$  投影后处理算子  $Q_h : L^2(S_h) \mapsto V_h$ :

$$(Q_h v, w_h) = (v, w_h) \quad \forall w_h \in V_h.$$

一个向量函数  $v \in (L^2(S_h))^3$  的全局  $L^2$  投影是空间  $(V_h)^3$  中的一个向量函数, 它的第  $k$  个分量是  $v$  的第  $k$  个分量的全局  $L^2$  投影.

为了分析的目的, 引入  $Q_h$  的一个扰动. 记  $\varphi_i \in V_h$  顶点  $x_i$  处节点基函数. 设  $V = (v_1, \dots, v_N)^t$ , 其中  $v_i = (v, \varphi_i)$ ;  $\mathbf{M} = (m_{ij})$ , 其中  $m_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$ ; 矩阵  $\mathbf{M}$  就是所谓的质量矩阵. 那么  $Q_h$  的矩阵表示为

$$Q_h v = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \mathbf{M}^{-1} V.$$

对于分片连续函数  $v$ , 定义  $V' = (v'_1, \dots, v'_N)^t$ , 其中  $v'_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m v|_{\tau_j}(x_i)|\tau_j|$ . 注意  $v'_i$  是  $v_i$  的一个逼近, 且有  $v'_i = \int_{\Omega_i} v(x_i) \varphi_i \, d\sigma_h$ . 定义  $Q_h$  的扰动  $Q'_h$  如下

$$Q'_h v = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \mathbf{M}^{-1} V'.$$

注意如果  $v$  在  $\mathcal{T}_h$  是分片常数, 就有  $Q_h v = Q'_h v$ .

下面首先考虑因不精确的积分带来的误差.

**引理 5.6** 设  $v \in W_\infty^2(S)$ , 且三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的. 记  $\bar{v} = v \circ \mathcal{P}_0$ ; 则

$$\|Q_h \bar{v} - Q'_h \bar{v}\|_{0,S_h} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|v\|_{2,\infty,S}. \quad (5.50)$$

**证明** 根据  $Q_h$  和  $Q'_h$  的定义, 可得

$$\|Q_h \bar{v} - Q'_h \bar{v}\|_{0,S_h}^2 = (V - V')^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} (V - V') \lesssim h^{-2} \sum_{i=1}^N (\bar{v}_i - \bar{v}'_i)^2. \quad (5.51)$$

然后由 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}
& |\bar{v}_i - \bar{v}'_i| \\
&= \left| \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j} (\bar{v} - \bar{v}(x_i)) \varphi_i \, d\sigma_h \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j} \left[ \nabla_{S_h} \bar{v}|_{\tau_j}(x_i) \cdot (x - x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i) \cdot \nabla_{S_h}^2 \bar{v}|_{\tau_j}(x_i + t(x - x_i))(x - x_i) \right] \varphi_i \, d\sigma_h \right| \quad (5.52) \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j} \nabla_S v(x_i) \cdot (x - x_i) \varphi_i \, d\sigma_h \right| + \left| \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j} (\nabla_{S_h} \bar{v}|_{\tau_j} - \nabla_S v)(x_i) \cdot (x - x_i) \varphi_i \, d\sigma_h \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j} \frac{1}{2}(x - x_i) \cdot \nabla_{S_h}^2 \bar{v}|_{\tau_j}(x_i + t(x - x_i))(x - x_i) \varphi_i \, d\sigma_h \right| \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

下面分别对上面三项进行估计. 首先对于  $I_2$ , 由引理5.2中的(5.5), 可得

$$I_2 = \left| \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j} (\mathbf{P}_h|_{\tau_j} - \mathbf{P}) \nabla_S v(x_i) \cdot (x - x_i) \varphi_i \, d\sigma_h \right| \lesssim h^4 \|v\|_{1,\infty,S}. \quad (5.53)$$

对于  $I_3$ , 有

$$I_3 \lesssim h^4 \|v\|_{2,\infty,\mathcal{P}_0(\Omega_i)}. \quad (5.54)$$

对于  $I_1$ , 因为  $\nabla_S v(x_i) \cdot (x - x_i) \psi_i$  是一个二次函数, 利用三点 (三边的中点) 数值积分公式, 可得

$$I_1 \lesssim \|v\|_{1,\infty,S} \left| \Omega_i \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|}{|\Omega_i|} (x_{ij} - x_i) \right|. \quad (5.55)$$

然后如果  $\Omega_i$  是  $O(h^2)$  对称的, 由(5.34), (5.53), (5.54), 和(5.55), 可得

$$|\bar{v}_i - \bar{v}'_i| \lesssim h^4 (\|v\|_{1,\infty,S} + \|v\|_{2,\infty,S}). \quad (5.56)$$

否则仅有

$$|\bar{v}_i - \bar{v}'_i| \lesssim h^3 (\|v\|_{1,\infty,S} + \|v\|_{2,\infty,S}). \quad (5.57)$$

把  $\mathcal{T}_h$  所有的顶点分成两部分, 如定理5.6, 使  $\mathcal{N}_h = \mathcal{N}_{1,h} \cup \mathcal{N}_{2,h}$ . 那么由  $\mathcal{T}_h$  的  $O(h^{2\sigma})$  非正规性, 可得  $|\mathcal{N}_{1,h}| = O(h^{-2})$  和  $|\mathcal{N}_{2,h}| = O(h^{-2+2\sigma})$ , 其中  $|\cdot|$  表示集合的势. 那么

$$\begin{aligned}\|Q_h \bar{v} - Q'_h \bar{v}\|_{0,S_h}^2 &\lesssim (h^{-2} |\mathcal{N}_{1,h}| h^8 + h^{-2} |\mathcal{N}_{2,h}| h^6) (\|v\|_{1,\infty,S} + \|v\|_{2,\infty,S})^2 \\ &\lesssim (h^4 + h^{2+2\sigma}) (\|v\|_{1,\infty,S} + \|v\|_{2,\infty,S})^2,\end{aligned}$$

即证(5.50).  $\square$

接下来考虑几何逼近带来的误差.

**引理 5.7** 设  $u \in W_\infty^1(S)$ , 且三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的. 记  $\bar{u} = u \circ \mathcal{P}_0$ ,  $\overline{\nabla_S u} = (\nabla_S u) \circ \mathcal{P}_0$ ; 则

$$\left\| Q'_h (\overline{\nabla_S u} - \nabla_{S_h} \bar{u}) \right\|_{0,S_h} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|u\|_{1,\infty,S}. \quad (5.58)$$

**证明** 由  $Q'_h$  的定义,  $\mathcal{T}_h$  的  $O(h^{2\sigma})$  非正规性,  $\mathbf{P}_h = I - \mathbf{n}_h \mathbf{n}_h^t$ ,  $\mathbf{P} = I - \mathbf{n} \mathbf{n}^t$ , 及(5.35), 可以利用引理5.6中(5.50)式相同的证明模式得到

$$\begin{aligned}\left\| Q'_h (\overline{\nabla_S u} - \nabla_{S_h} \bar{u}) \right\|_{0,S_h}^2 &\lesssim h^{-2} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^m |\tau_j| (\nabla_S u - (\nabla_{S_h} \bar{u})|_{\tau_j})(x_i) \right)^2 \\ &= h^{-2} \sum_{i=1}^N \left( |\Omega_i| \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|}{|\Omega_i|} (\nabla_S u - (\nabla_{S_h} \bar{u})|_{\tau_j})(x_i) \right)^2 \\ &= h^{-2} \sum_{i=1}^N \left( |\Omega_i| \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|}{|\Omega_i|} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_h|_{\tau_j}) \nabla_S u(x_i) \right)^2 \\ &\lesssim (h^4 + h^{2+2\sigma}) \|u\|_{1,\infty,S}^2.\end{aligned}$$

进而(5.58)得证.  $\square$

**引理 5.8** 设  $u \in W_\infty^3(S)$ , 且三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的. 记  $\bar{u} = u \circ \mathcal{P}_0$ ,  $\bar{u}_I$  是  $\bar{u}$  在  $S_h$  上的线性插值; 则

$$\left\| Q'_h (\nabla_{S_h} \bar{u} - \nabla_{S_h} \bar{u}_I) \right\| \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|u\|_{3,\infty,S}. \quad (5.59)$$

**证明** 由  $Q'_h$  的定义, 三角剖分  $\mathcal{T}_h$  的非正则性, 等式(5.38), 以及与引理5.6中(5.50)的证明相同的模式, 可得

$$\begin{aligned}\left\| Q'_h (\nabla_{S_h} \bar{u} - \nabla_{S_h} \bar{u}_I) \right\|_{0,S_h}^2 &\lesssim h^{-2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m |\tau_j| (\nabla_{S_h} \bar{u} - \nabla_{S_h} \bar{u}_I)|_{\tau_j}(x_i) \right)^2 \\ &\lesssim h^{-2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{3} |\Omega_i| \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|}{|\Omega_i|} (\nabla_{S_h} \bar{u} - \nabla_{S_h} \bar{u}_I)|_{\tau_j}(x_i) \right)^2 \\ &\lesssim (h^4 + h^{2+2\sigma}) \|u\|_{3,\infty,S}^2.\end{aligned} \quad (5.60)$$

即证(5.59).  $\square$

现在可以给出关于全局  $L^2$  投影的主要结论:

**定理 5.7** 设  $u \in W_\infty^3(S)$  是(5.2)的解,  $u_h$  是(5.11)的解. 记  $w_h = Q_h \nabla_{S_h} u_h$ . 若三角剖分  $\mathcal{T}_h$  是  $O(h^{2\sigma})$  非正规的, 则

$$\|\nabla_S u - \tilde{w}_h\|_{0,S} \lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} \|u\|_{3,\infty,S} + h^2 \|f\|_{0,S}. \quad (5.61)$$

**证明** 记  $\overline{\nabla_S u} = (\nabla_S u) \circ \mathcal{P}_0$ . 由范数等价性(5.7), 只需估计  $\|\overline{\nabla_S u} - Q_h \nabla_{S_h} u_h\|_{0,S_h}$ . 我们有如下分解式

$$\begin{aligned} \overline{\nabla_S u} - Q_h \nabla_{S_h} u_h &= (I - Q_h) \overline{\nabla_S u} + (Q_h - Q'_h) \overline{\nabla_S u} + Q'_h (\overline{\nabla_S u} - \nabla_{S_h} \bar{u}) \\ &\quad + Q'_h (\nabla_{S_h} \bar{u} - \nabla_{S_h} \bar{u}_I) + Q'_h (\nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} u_h). \end{aligned}$$

根据标准的逼近性质, 上面第一项有如下估计

$$\|\overline{\nabla_S u} - Q_h \overline{\nabla_S u}\|_{0,S_h} \lesssim h^2 \|u\|_{3,S}. \quad (5.62)$$

第二项可由引理5.6中的(5.50), 第三项由引理5.7中的(5.58)及第四项可由引理5.8中的(5.59)来估计. 对于最后一项, 由定理5.2中的(5.26)及  $Q_h$  的有界性可得,

$$\begin{aligned} \|Q'_h (\nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} u_h)\|_{0,S_h} &= \|Q_h (\nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} u_h)\|_{0,S_h} \\ &\lesssim \|\nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} u_h\|_{0,S_h} \\ &\lesssim h^{1+\min\{1,\sigma\}} (\|u\|_{3,S} + \|u\|_{2,\infty,S}) + h^2 \|f\|_{0,S}. \end{aligned}$$

最终结论(5.61)可由三角不等式得到.  $\square$

### 5.3.4 有限体解的恢复格式

本小节讨论 LB 方程 (1.4) 的有限元解和有限体积解的超收敛性.

给定一个三角剖分  $\mathcal{T}$ , 其对偶网格可以如下方式构建: 对于每一个三角形  $\tau \in \mathcal{T}$ , 选择一点  $c_\tau \in \tau$ . 点  $c_\tau$  可与三边中点中的一个重合, 但不能与三角形的三个顶点重合 (为了避免控制体的退化). 在每个三角形中, 把  $c_\tau$  和  $\tau$  的三边中点连接起来. 这样会把  $\mathcal{T}$  中的每个三角形分成三个小区域. 对于  $\mathcal{T}$  的每个顶点  $x_i$ , 记所有所含  $x_i$  的小区域组成的区域为  $\omega_i$ .

下面给出 (1.4) 以顶点为中心的有限体离散格式如下: 求  $u_h^B \in V_h$  使得

$$-\int_{\partial\omega_i} \nabla_{S_h} u_h^B \cdot \mathbf{n}_{\omega_i} \, ds = \int_{\omega_i} f_h \, d\sigma_h \quad \forall \omega_i, \quad (5.63)$$

其中  $\mathbf{n}_{\omega_i}$  为  $\omega_i$  边界上的单位外法向向量, 和相应的三角形在同一个平面内.

下面的等式可以在文献 [3, 23, 48, 87] 中找到. 为了完整性, 我们把文献 [87] 中的一个简单证明放在这里.

**引理 5.9** 记  $u_h$  是线性有限元解, 则有

$$-\int_{\partial\omega_i} \nabla_{S_h} u_h \cdot \mathbf{n}_{\omega_i} ds = \sum_{\tau_h \subset \Omega_i} \int_{\tau_h} \nabla_{S_h} u_h \cdot \nabla_{S_h} \varphi_i d\sigma_h, \quad (5.64)$$

其中  $\varphi_i \in V_h$  是顶点  $x_i$  处的基函数. 因此有限元和有限体的刚度矩阵是相同的.

**证明** 首先考虑  $\Omega_i$  中的一个三角形  $\tau_h = \Delta x_i x_j x_k$ , 方向为逆时针方向. 设  $c$  为  $\tau_h$  的一内部点,  $m_1$  和  $m_2$  分别为  $x_i x_j$  和  $x_i x_k$  的中点. 所以线段  $m_1 c$  和  $c m_2$  是  $\partial\omega_i$  的一部分. 由散度定理,  $\nabla_{S_h} u_h$  是分片常数, 及  $\varphi_i$  在边  $x_i x_j$  和  $x_i x_k$  上是线性的, 且  $x_j x_k$  上恒为零, 可得

$$\begin{aligned} -\left(\int_{m_1}^c + \int_c^{m_2}\right) \nabla_{S_h} u_h \cdot \mathbf{n}_{\omega_i} ds &= \left(\int_{x_i}^{m_1} + \int_{m_2}^{x_i}\right) \nabla_{S_h} u_h \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{x_i}^{x_j} + \int_{x_k}^{x_i}\right) \nabla_{S_h} u_h \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\partial\tau_h} \varphi_i \nabla_{S_h} u_h \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\tau_h} \nabla_{S_h} u_h \cdot \nabla_{S_h} \varphi_i d\sigma_h. \end{aligned} \quad \square$$

**定理 5.8** 对于 LB 方程 (1.4), 设  $u_h^G$  为其 Galerkin 逼近解,  $u_h^B$  为其有限体积逼近解若  $f \in H_1(S)$ , 则有

$$|u_h^G - u_h^B|_{1,S_h} \leq Ch^2 \|f\|_{1,S}. \quad (5.65)$$

**证明** 记  $V_{0,B}$  为  $B$  上分片常数空间. 我们可以定义映射  $\Pi_h^* : V_h \mapsto V_{0,B}$ , 对于任意  $v_h \in V_h$  有  $\Pi_h^* v_h = \sum_{i=1}^N v_h(x_i) \chi_{\omega_i}$ , 其中  $\chi_{\omega_i}$  是  $\omega_i$  的特征函数. 因为使用重心做为控制体的顶点, 可得

$$\int_{\tau_h} v_h = \int_{\tau_h} \Pi_h^* v_h.$$

记  $f_c$  为  $f_h$  到  $S_h$  上分片常数空间的  $L^2$  投影 (见 (5.10)), 则

$$\begin{aligned} (f_h, v_h - \Pi_h^* v_h) &= (f_h - f_c, v_h - \Pi_h^* v_h) \leq \|f_h - f_c\|_{0,S_h} \|v_h - \Pi_h^* v_h\|_{S_h} \\ &\leq Ch^2 \|f\|_{1,S} |v_h|_{1,S_h}. \end{aligned}$$

这里在每个三角形单元  $\tau_h$  上, 对  $f_h$  和  $v_h$  利用了平均类型的 Poincaré 不等式. 由引理 5.9 和 (13), 可得

$$\int_{S_h} \nabla_{S_h} u_h^B \cdot \nabla_{S_h} v_h d\sigma_h = - \sum_{\omega_i} \int_{\partial\omega_i} v_h(x_i) \nabla_{S_h} u_h^B \cdot \mathbf{n}_{\omega_i} ds = (f_h, \Pi_h^* v_h).$$

那么对于任意的  $v_h \in V_h$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{S_h} \nabla_{S_h} (u_h^G - u_h^B) \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h &= (f_h, v_h) - \int_{S_h} \nabla_{S_h} u_h^B \cdot \nabla_{S_h} v_h \, d\sigma_h \\ &= (f_h, v_h - \Pi_h^* v_h) \leq Ch^2 \|f\|_{1,S} |v_h|_{1,S_h}. \end{aligned}$$

取  $v_h = u_h^G - u_h^B$ , 即可得估计 (5.65). □

由上面定理, 可知有限元的梯度恢复方法也可应用到有限体逼近当中, 且有超收敛性.

## 第六章 光滑隐函数曲面的三角形网格逼近的 CVT 优化

这一章讨论利用 Lloyd 方法来优化光滑隐函数曲面的三角形网格逼近的问题.

给定一个光滑的曲面  $S := \{x \in \Omega | \phi(x) = 0\}$ , 其中  $\phi$  为定义在有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  上函数. 简单起见, 假设  $S$  没有边界. 另外, 对于任意  $x \in \Omega$ , 我们可以方便地计算  $\phi(x)$  和梯度  $\nabla \phi(x)$ . 同时假设我们有一个  $S$  的初始多面体网格逼近  $S_h$ , 它的每一个面都是三角形, 且每一个顶点都在  $S$  上.  $S_h$  的每条边  $e$  都满足 Delaunay 性质, 即共用  $e$  的两个三角形面中与  $e$  相对的角度之和小于或等于  $\pi$ .

本章安排如下, 6.1 节讨论平面情形下的 CVT 和 CVDT 的基本概念及 Lloyd 算法. 6.2 节讨论曲面上的 CVT 概念及 Lloyd 算法. 6.3 节给出几个光滑隐函数曲面三角形网格的优化例子, 验证 6.2 节给出算法的有效性. 6.4 节给出几个曲面上的 LB 模型的数值例子, 来验证第五章的超收敛理论.

### 6.1 二维区域上 CVT 和 CVDT

首先回忆二维情形下的 Centroid Voronoi Tessellation (CVT) 和 Delaunay 三角剖分的概念. 给定一个开区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  和一组点  $\mathbf{z} = \{z_i\}_{i=1}^m$ . 对于每一个  $z_i$ , 可定义如下区域

$$V_i = \left\{ x \in \Omega \mid d(x, z_i) < d(x, z_j) \forall j = 1, \dots, m, j \neq i \right\},$$

称为  $z_i$  的 Voronoi 区域, 其中  $d(\cdot, \cdot)$  表示  $\mathbb{R}^2$  中的欧氏距离, 并称  $z_i$  为  $V_i$  的生成子.

$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$  称为  $\Omega$  的 Voronoi 图. 显然, 当  $i \neq j$  时, 有  $V_i \cap V_j = \emptyset$ , 且有  $\cup_{i=1}^m V_i = \bar{\Omega}$ .

给定一个定义在  $\Omega$  上的密度函数  $\rho(x)$ , 每一个 Voronoi 区域的质心  $z_i^*$  定义如下

$$z_i^* = \frac{\int_{V_i} \rho(x) x \, dx}{\int_{V_i} \rho(x) \, dx}.$$

如果有  $z_i^* = z_i, i = 1, \dots, m$ , 则称  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$  为一个 CVT.

Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图是一对对偶概念. 把图中 Voronoi 区域相邻的生成子用线段连接起来, 就构成了一个 Delaunay 三角剖分, 而 Delaunay 三角剖分中三角形的外接圆圆心为相应 Voronoi 区域的顶点. 由 CVT 得到的 Delaunay 三角剖分称为 Centroidal Voronoi Delaunay Triangulation (CVDT), 关于 CVT 和 CVDT 的详细介绍, 见 [33, 34, 68]. 给定一个 Delaunay 三角剖分  $\mathcal{T}$ . 对于每一条边  $e \in \mathcal{T}$ , 它满足如下性质: 共用  $e$  的两个三角形中与  $e$  相对的角度之和小于或等于  $\pi$ . 图6.1 的边  $e$  不满足 Delaunay 网格的这个性质, 但对  $e$  进行换边操作即可满足.

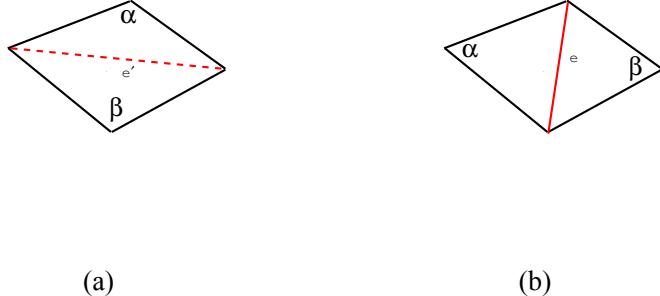


图 6.1 (a) 不满足 Delaunay 性质的边  $e'$ , 其中  $\alpha+\beta > \pi$ . (b) 换边后得到的新边  $e$ , 满足  $\alpha+\beta < \pi$ .

基于以上性质, 可知在二维情形下, 对任一三角形网格, 只要通过换边操作就可以得到最终的 Delaunay 三角剖分, 见文献 [41, 78].

下面给出生成 CVT 的 Lloyd 方法. 给定一个定义在  $\Omega$  上的密度函数  $\rho(x)$ , 一组初始的生成子  $\mathbf{z}^0 = \{z_i^0\}_{i=1}^m \subset \Omega$ , 以这些生成子为顶点的 Delaunay 三角剖分  $\mathcal{T}_h^0$ , 一步 Lloyd 迭代如下:

1. 连接  $\mathcal{T}_h^k$  中每两个相邻三角形的外接圆圆心, 从而构造 Voronoi 图  $\mathcal{V}^k(\mathbf{z}^k)$ .
2. 更新生成子  $z_i^{k+1} = \frac{\int_{V_i^k} \rho(x)x \, dx}{\int_{V_i^k} \rho(x) \, dx}, i = 1, \dots, m$ .
3. 通过换边操作得到新的 Delaunay 三角剖分  $\mathcal{T}_h^{k+1}$ .

## 6.2 光滑隐函数曲面上 CVT 优化

首先给出一般曲面上的 CVT 的定义. 给定一个  $\mathbb{R}^3$  中的一般曲面  $S$  及其上的一组生成子  $\mathbf{z}$ , 对于每一个生成子  $z_i$ , 定义如下区域

$$V_i = \left\{ x \in S \mid d(x, z_i) < d(x, z_j), \forall j = 1, \dots, m, j \neq i \right\},$$

其中  $d(\cdot, \cdot)$  为  $S$  上的测地距离.  $V_i$  就称为  $z_i$  的测地 Voronoi 区域,  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$  就称为  $S$  的测地 Voronoi 图. 对于一般曲面, 计算测地距离是一件很困难的事, 需要知道曲面的曲率等更多的信息. 为简化问题起见, 我们首先构造一个多面体三角形网格  $S_h$  来逼近  $S$ , 且  $S_h$  的每条边  $e$  满足 Delaunay 性质. 然后在  $S_h$  的基础上, 就可以用分片的平面片来逼近  $S_h$  上每个网格点对应的测地 Voronoi 区域. 首先找到每一个三角形面  $\tau$  的外接圆心  $c_\tau$ , 但如果  $\tau$  有一个角为钝角,  $c_\tau$  就在三角形面的外部, 这时就用与该钝角相对的边的中点代替  $c_\tau$ , 仍记为  $c_\tau$ . 然后把  $c_\tau$  和  $\tau$  的三边中点用线段连起

来, 就把  $\tau$  分成了三个小区域. 最后, 把所有以网格点  $z_i$  为顶点的小区域的并做为  $z_i$  的测地 Voronoi 区域的逼近, 见图6.2(b).

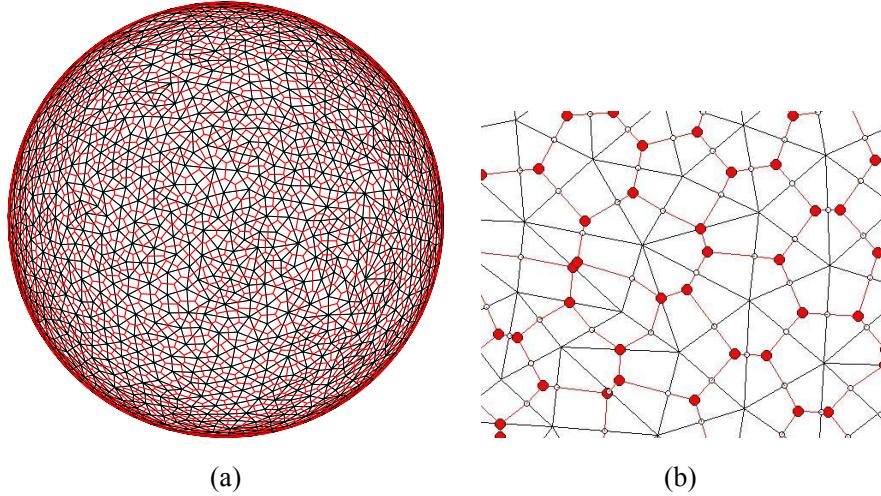


图 6.2 (a) 单位球面的 Delaunay 三角形网格逼近和测地 Voronoi 区域逼近. (b) 左图的局部细节.

下面在  $S_h$  上定义一个密度函数  $\rho_h(x)$ , 其中包含了曲面  $S$  的曲率信息, 且适当光滑, 使生成的网格的尺寸可以光滑过渡. 给定曲面  $S$  的一个三角形网格逼近  $S_h$ , 假设  $S_h$  的所有顶点都在曲面  $S$  上. 对于  $S_h$  中的每个三角形面  $\tau$ , 记  $n_1$ 、 $n_2$  和  $n_3$  分别为  $S$  在  $\tau$  的三个顶点处单位外法线向量, 见图6.3. 首先在  $\tau$  上定义  $\hat{\rho}_h$  如下:

$$\hat{\rho}_h|_{\tau} = \frac{|9 - |n_1 + n_2 + n_3|^2|}{|\tau|} + \epsilon,$$

其中  $|\tau|$  表示  $\tau$  的面积, 除以  $|\tau|$  是为了去掉  $|9 - |n_1 + n_2 + n_3|^2|$  中包含的尺度信息;  $\epsilon$  是一个正的平移量, 使得当曲面  $S$  在  $\tau$  附近接近一个平面时,  $\hat{\rho}_h$  大于 0.

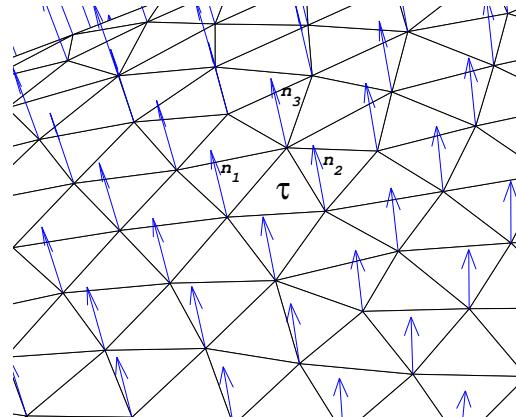


图 6.3  $S$  在三角形顶点处的单位外法线方向.

上面定义的密度函数  $\hat{\rho}_h$  是一个定义在  $S_h$  上的分片常数函数, 相邻三角形面上的函数值过渡还不够光滑. 还需要对其做一些磨光处理, 才能用于 CVT 的计算, 进而得到比较高质量的网格. 我们的做法是先把  $\hat{\rho}_h$  投影到  $S_h$  上的分片线性连续函数空间 (可用简单平均或面积加权平均, 见5.3节), 然后再插值到分片常数函数空间, 反复这样做就能达到磨光效果. 为使  $\hat{\rho}_h$  标准化, 即取值在 0 和 1 之间, 只要除以  $\hat{\rho}_h$  的最大值即可, 得  $\bar{\rho}_h = \hat{\rho}_h / \max(\hat{\rho}_h)$ . 最后再引入一个分级参数  $\gamma \geq 0$  为控制网格尺寸的过渡, 最终得到密度函数  $\rho_h = (\bar{\rho}_h)^\gamma$ .

有了上面定义的密度函数, 下面给出一般隐函数曲面上的 Lloyd 方法. 给定一个曲面  $S$  上的初始 Delaunay 三角剖分逼近  $S_h^0$ , 记  $\{z_i^0\}_{i=1}^m$  为  $S_h^0$  所有顶点集,  $\{n_i^0\}_{i=1}^m$  为  $S$  在所有顶点处的单位外法线向量, 一步 Lloyd 迭代如下:

1. 基于  $S_h^k$  来构造  $S$  的测地 Voronoi 图逼近.
2. 计算每个顶点对应的测地 Voronoi 区域的质心  $\bar{z}_i^{k+1} = \int_{V_i^k} \rho_h x \, dx / \int_{V_i^k} \rho_h \, dx$ .
3. 把质心投影到  $S$  在  $z_i^k$  处的切平面上.

$$\hat{z}_i^{k+1} = \bar{z}_i^{k+1} - \langle \bar{z}_i^{k+1} - z_i^k, n_i^k \rangle n_i^k$$

4. 把  $\hat{z}_i^{k+1}$  投影到曲面  $S$  上, 得到  $z_i^{k+1}$ .
5. 通过换边操作, 使  $S_h^{k+1}$  满足 Delaunay 性质.

### 6.3 光滑隐函数曲面上的高质量网格生成

下面给出几个曲面例子, 来检验上述算法的有效性. 其中所有曲面的初始三角形网格逼近都由 CGAL 中的三维曲面网格生成器生成 (<http://www.cgal.org/>). 这个曲面网格生成器的算法是基于受限 Delaunay 三角剖分 [11] 的概念设计的. 基本思想就是计算出曲面上的一组样本点, 然后从这些点形成的受限 Delaunay 四面体网格中抽取出曲面网格. 在 Delaunay 细分过程中, 新的点不断被加入到样本点中, 直到曲面网格中的单元满足一定的尺寸和形状准则.

我们有了初始网格后, 就在初始网格的基础上, 给出每个曲面在固定的分级参数  $\gamma$ (0,1 或 2) 和固定的 Lloyd 迭代步数下得到的网格图, 其中 Lloyd 的迭代步数取为 200 步. 由下面的例子可以看出, 对于光滑的曲面, 我们给出的密度函数结合 Lloyd 算法, 可以有效改善曲面三角形网格的质量.

### 6.3.1 单位球面

单位球面的隐函数表示形式如下：

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

由于球面的曲率为常数，所以这里我们只给出初始的网格图和  $\gamma = 0$  时的网格优化图，见图6.4。同时这里还给出图6.4(a) 中的网格在优化过程中最小角和最大角随着

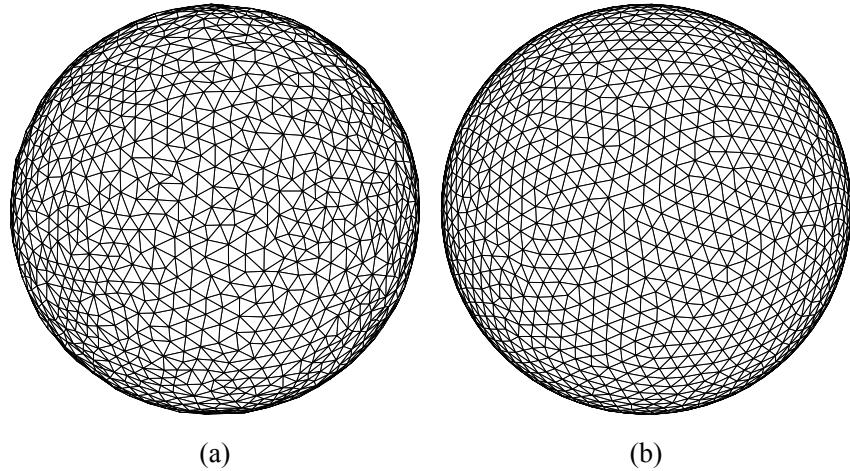


图 6.4 单位球面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 1789. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格.

Lloyd 迭代过程的变化图, 见图6.5

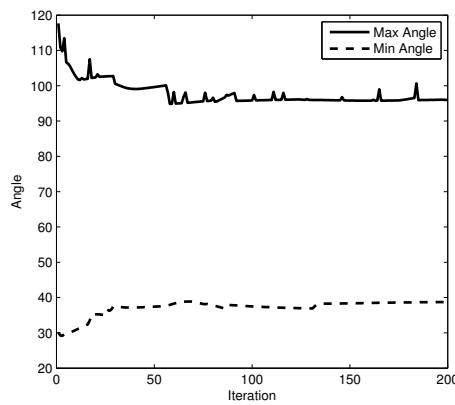


图 6.5 在 Lloyd 优化过程中, 单位球面的三角形网格的最大角和最小角的变化趋势. 其中实线为最大角的变化趋势, 虚线为最小角的变化趋势.

### 6.3.2 椭球面

椭球面的隐函数表示形式如下:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

其中  $a = 9, b = 3, c = 1$ . 见图6.6, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

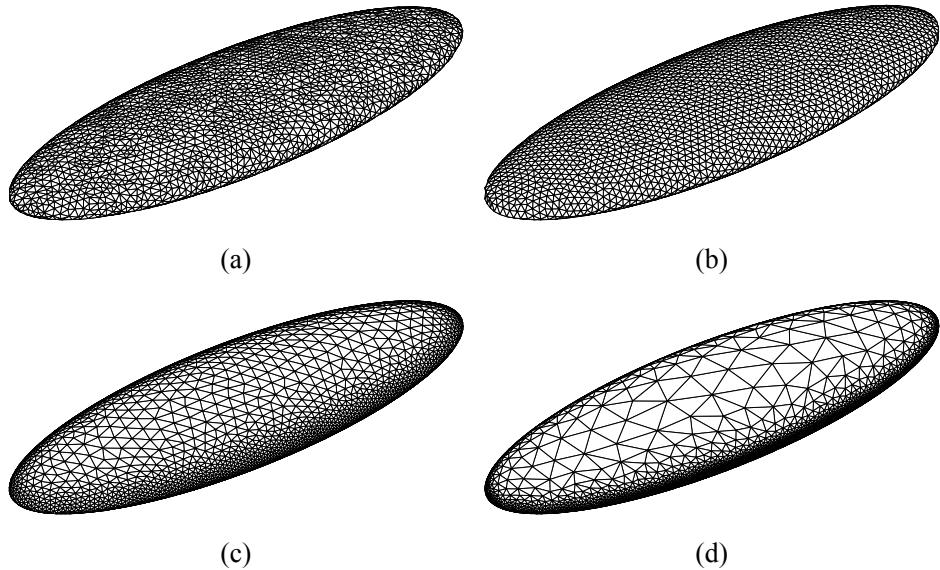


图 6.6 椭球面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 3394. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格. (c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

### 6.3.3 心形曲面

这个曲面来取自 [37], 隐函数表示形式如下:

$$(x - z^2)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

见图6.7, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

### 6.3.4 Quartics 曲面

这个曲面的隐函数表示形式如下:

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (z^2 - 1) - 1.05 = 0,$$

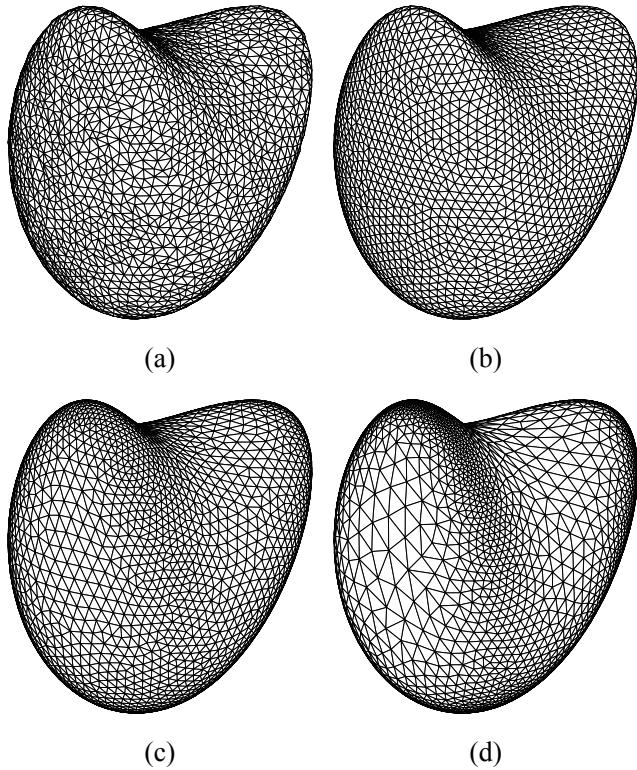


图 6.7 心形曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 2697. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格. (c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

见图6.8, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

### 6.3.5 McMullen K3 曲面

这个曲面来自 <http://paulbourke.net/geometry/mullen/>, 隐函数表示形式如下:

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + 8xyz - 2 = 0.$$

见图6.9, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

### 6.3.6 Orthocircle 曲面

这个曲面来自 <http://paulbourke.net/geometry/orthocircle/>, 它的隐函数表示形式如下:

$$[(x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2][(y^2 + z^2 - 1)^2 + x^2][(z^2 + x^2 - 1)^2 + y^2] - c_1^2[1 + c_2(x^2 + y^2 + z^2)] = 0$$

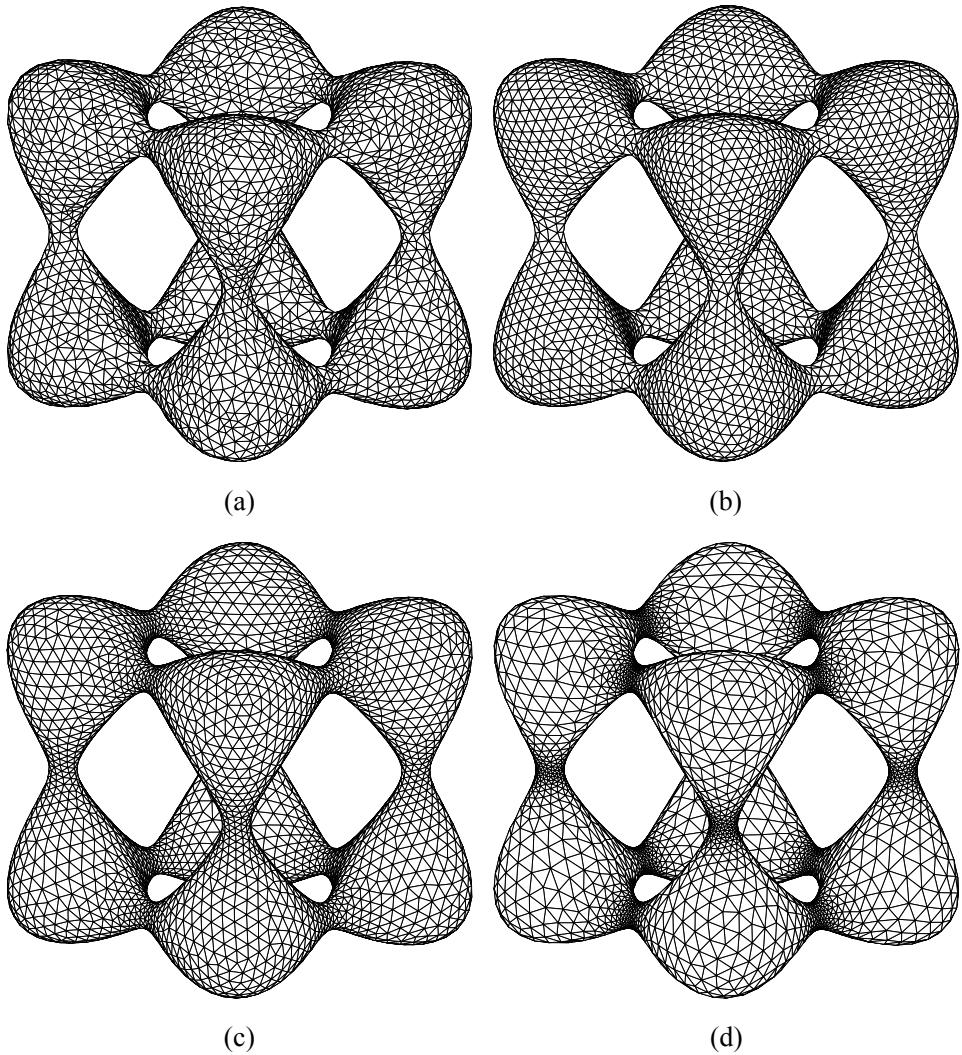


图 6.8 Quartics 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 4528. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格. (c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

其中  $c_1 = 0.075, c_2 = 3$ . 见图6.10, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

### 6.3.7 Squared Sphere 曲面

这个曲面的隐函数表示形式如下:

$$x^8 + y^8 + z^8 - c = 0,$$

其中  $c = 1$ . 见图6.11, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

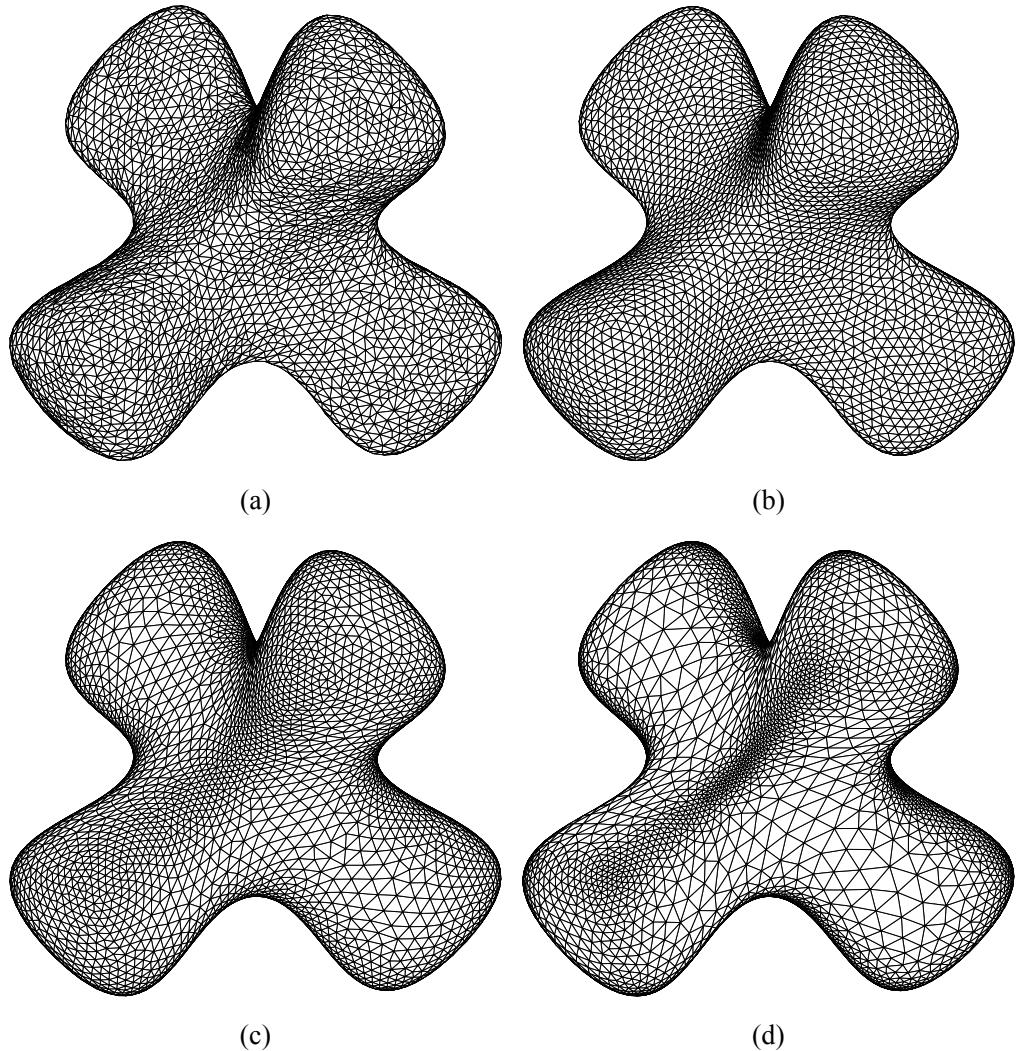


图 6.9 McMullen K3 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 4906. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格.  
 (c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

### 6.3.8 Double Torus 曲面

这个曲面取自 <http://paulbourke.net/geometry/doubletorus/>, 它的隐函数表示形式如下:

$$x^2(x^2 - 1)[x^2(x^2 - 1) + 2y^2] + y^4 + z^2 - 0.04 = 0,$$

见图6.12, 图 (a) 是初始网格, (b), (c) 和 (d) 分别为在不同尺寸分级参数下优化得到的网格图.

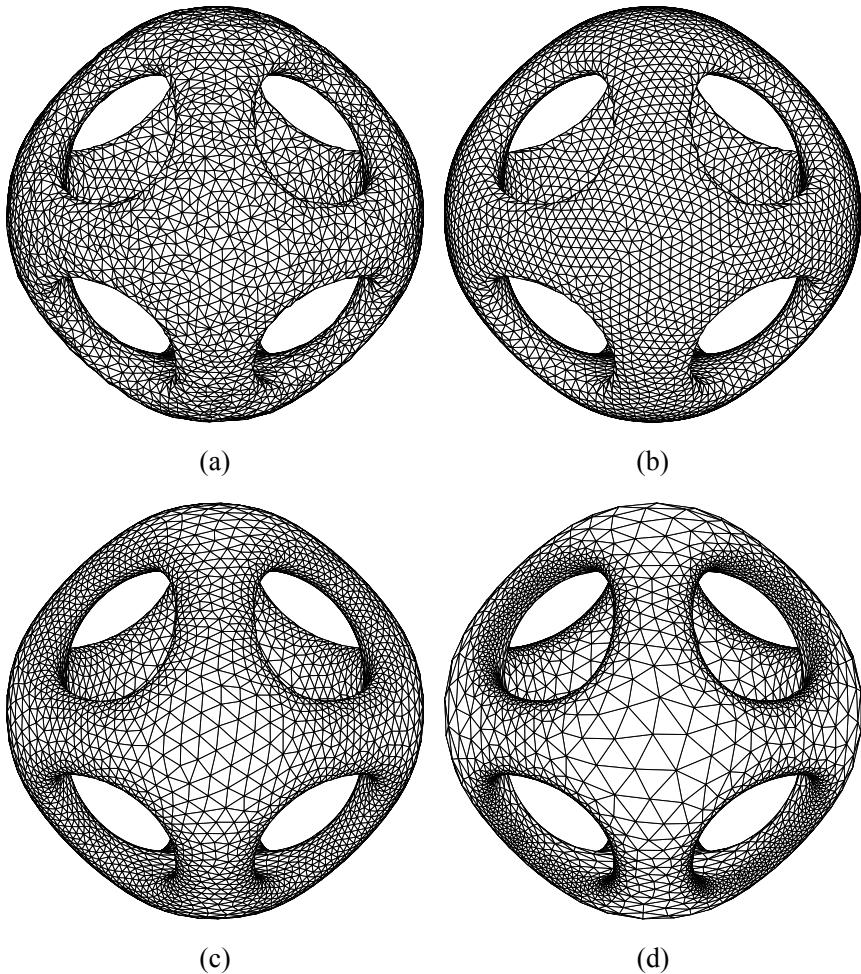


图 6.10 Orthocircle 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 5482. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格.  
(c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

## 6.4 超收敛数值算例

这一节将在几个不同曲面上用曲面线性有限元求解 LB 方程, 从数值上来验证曲面有限元的超收敛性. 所有曲面的初始三角形网格逼近都是由 CGAL 中的三维曲面网格生成器得到 (<http://www.cgal.org/>), 并由前面给出的 Lloyd 方法进行相应的优化.

记  $u$  为定义在曲面  $S$  上的 LB 方程 (1.4) 的真解,  $\bar{u} = u \circ \mathcal{P}_0$ ,  $\overline{\nabla_S u} = (\nabla_S u) \circ \mathcal{P}_0$ . 记  $u_h$  为  $u$  的曲面线性有限元逼近,  $\bar{u}_I$  为  $\bar{u}$  在  $S_h$  上的线性有限元插值. 为了便于计

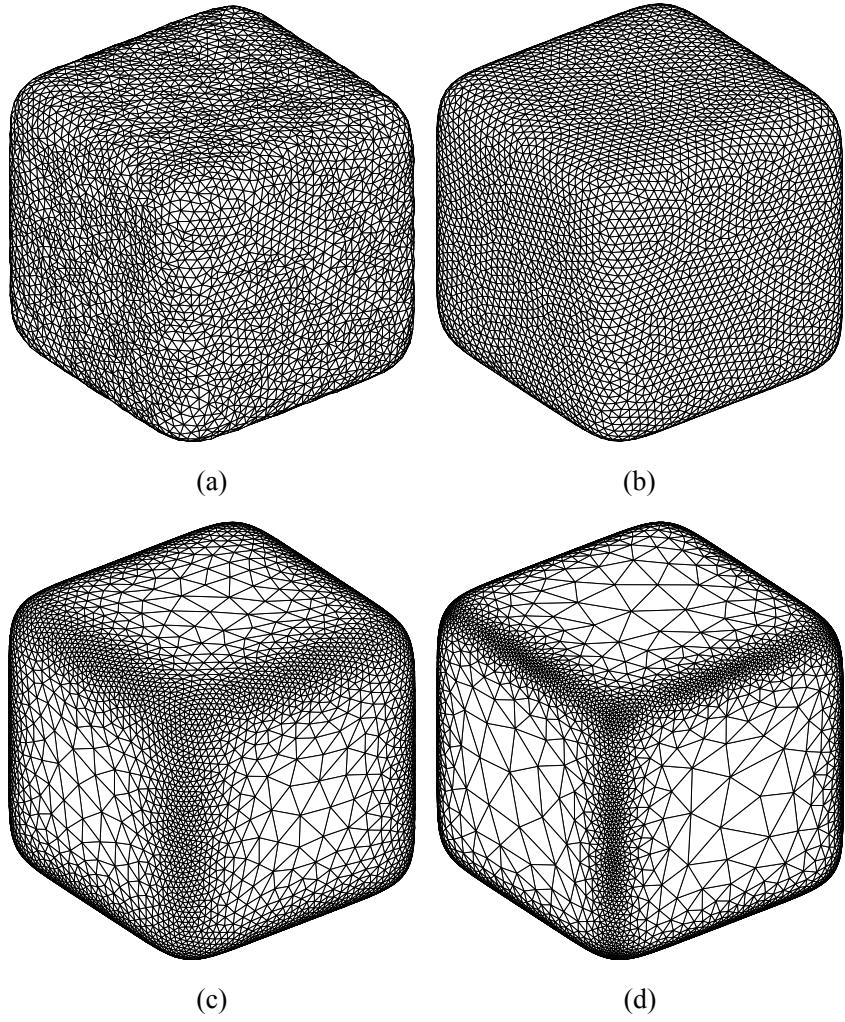


图 6.11 Squared Sphere 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 5847. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格. (c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

算, 本节将给出下列定义在  $S_h$  的误差

$$\begin{aligned} E_I &= \left\| \nabla_{S_h} \bar{u}_I - \nabla_{S_h} u_h \right\|_{0, S_h}, \\ E_h &= \left\| \overline{\nabla_S u} - Q_h \nabla_{S_h} u_h \right\|_{0, S_h}, \\ E_i &= \left\| \overline{\nabla_S u} - G_h^i \nabla_{S_h} u_h \right\|_{0, S_h}, \quad i = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

其中  $G_h^1$  和  $G_h^2$  分别表示  $S_h$  的直接简单平均和面积加权平均梯度恢复算子;  $G_h^3, G_h^4, G_h^5$ , 和  $G_h^6$  分别表示切平面上的简单平均, 面积加权平均, 局部  $L^2$  投影, 和局部离散最小二乘拟合 (ZZ) 梯度恢复算子. 所有误差都是在多面体曲面  $S_h$  上计算的, 积分公式为九阶的 Gauss 积公式. 所有的数值试验程序都是基于软件包 iFEM [22].

记  $\{\mathcal{T}_h^i\}_{i=1}^k$  为曲面的初始网格通过 Loop 细分算法得到的网格序列. Loop 细分算法与平面的一致加密算法不同之处在于, 要按一定的规则重新计算网格上的旧

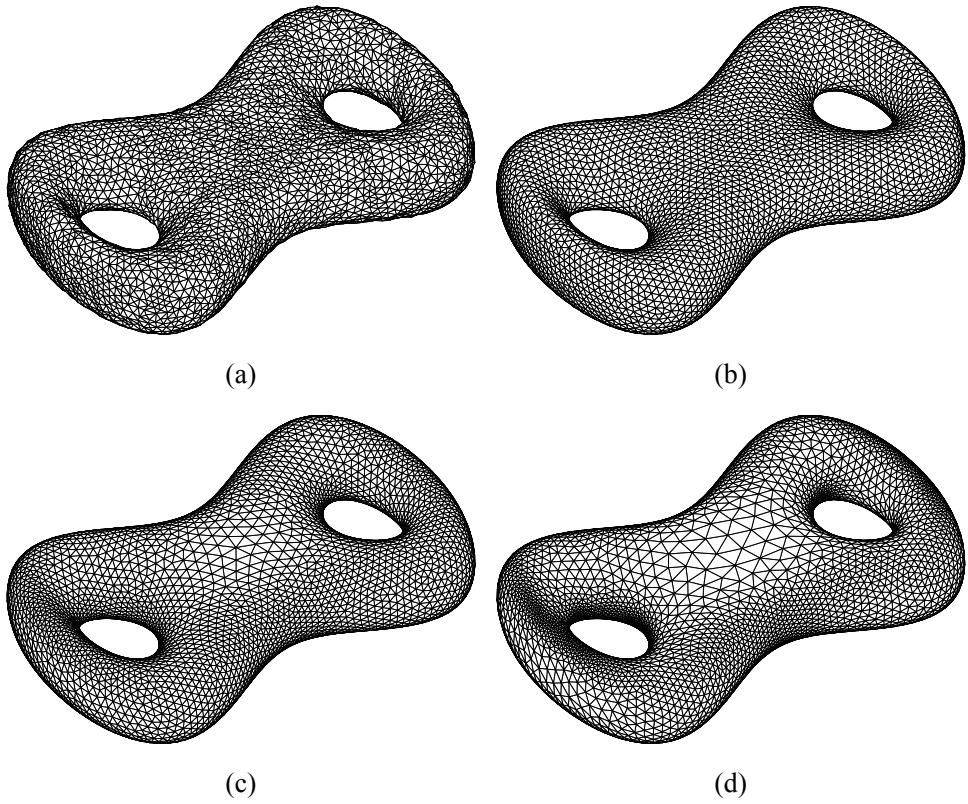


图 6.12 Double Torus 曲面. (a) 初始网格, 网格顶点个数为 5482. (b) 当  $\gamma = 0$  时优化后的网格. (c) 当  $\gamma = 1$  时优化后的网格. (d) 当  $\gamma = 2$  时优化后的网格.

顶点和新顶点的位置, 具体细节见 [64]. 当然, 每次细分之后还要把所有顶点重新投影到曲面上. 使用 Loop 细分算法是为了避免因投影带来的三角形的变形和质量下降.  $E(\mathcal{T}_h^i)$  表示每个网格  $\mathcal{T}_h^i$  上的误差. 因为网格尺寸  $h_{i-1} \approx 2h_i$ , 误差收敛阶可由如下方式进行计算

$$\ln \frac{E(\mathcal{T}_h^{i-1})}{E(\mathcal{T}_h^i)} / \ln 2, \quad i = 2, \dots, k.$$

#### 6.4.1 单位球面

考虑6.3.1节中的单位球面, 对于定义在其上的 LB 方程 (1.4), 取  $u(x, y, z) = xy$  为它的解, 右端  $f$  相应的给出. 数值结果见表6.1;  $u(x, y, z) = xy$  的数值逼近图像见图6.13, 其自由度个数为 3734.

#### 6.4.2 环面

考虑环面, 它的隐函数表示形式如下:

$$\sqrt{(4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} - 1 = 0. \quad (6.1)$$

表 6.1 例 1. 单位球面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表.

$N$	$E_I$	Order	$E_h$	Order	$E_1$	Order	$E_2$	Order
935	1.72e-02	0.00	2.03e-02	0.00	5.06e-02	0.00	5.01e-02	0.00
3734	4.77e-03	1.85	5.37e-03	1.92	1.32e-02	1.94	1.30e-02	1.95
14930	1.34e-03	1.83	1.43e-03	1.91	3.39e-03	1.96	3.36e-03	1.95
59714	3.75e-04	1.84	3.82e-04	1.90	8.72e-04	1.96	8.76e-04	1.94

$N$	$E_3$	Order	$E_4$	Order	$E_5$	Order	$E_6$	Order
935	4.00e-02	0.00	3.93e-02	0.00	3.78e-02	0.00	3.76e-02	0.00
3734	1.05e-02	1.93	1.02e-02	1.95	9.55e-03	1.99	9.49e-03	1.99
14930	2.74e-03	1.94	2.65e-03	1.94	2.40e-03	1.99	2.38e-03	1.99
59714	7.14e-04	1.94	6.91e-04	1.94	6.03e-04	1.99	5.99e-04	1.99

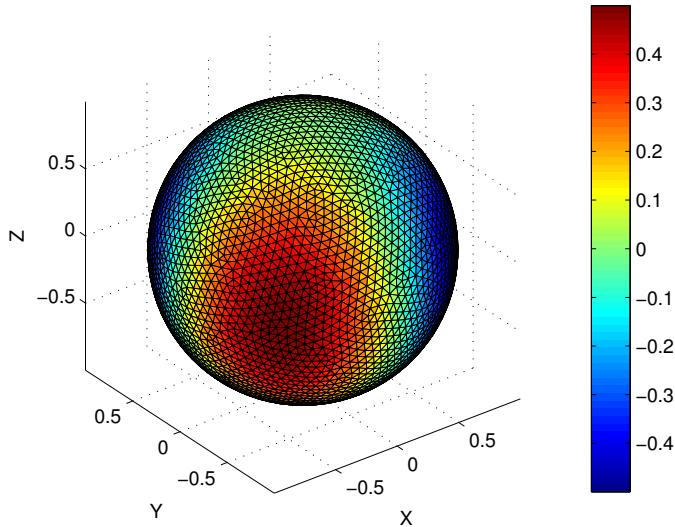


图 6.13 单位球面上的解  $u(x, y, z) = xy$  的数值逼近, 自由度个数为 3734 .

对于定义在环面上的 LB 方程 (1.4), 取  $u(x, y, z) = x - y$  为它的解, 右端  $f$  相应的给出. 相应的数值结果见表6.2;  $u(x, y, z) = x - y$  数值逼近图像见图6.14, 其自由度个数为 3164.

### 6.4.3 椭球面

考虑6.3.2中的椭球面, 对于定义在其上的 LB 方程 (1.4), 取  $u(x, y, z) = \sin(x)$  为它的解, 右端  $f$  相应的给出. 相应的数值结果见表6.3;  $u(x, y, z) = \sin(x)$  的数值逼近图像见图6.15, 其自由度个数为 3990.

表 6.2 例 2. 环面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表.

$N$	$E_I$	Order	$E_h$	Order	$E_1$	Order	$E_2$	Order
791	2.67e-01	0.00	4.49e-01	0.00	1.04e+00	0.00	1.03e+00	0.00
3164	6.90e-02	1.95	1.14e-01	1.98	2.74e-01	1.92	2.74e-01	1.92
12656	1.78e-02	1.96	2.92e-02	1.97	7.00e-02	1.97	7.00e-02	1.97
50624	4.59e-03	1.95	7.50e-03	1.96	1.77e-02	1.98	1.77e-02	1.98

$N$	$E_3$	Order	$E_4$	Order	$E_5$	Order	$E_6$	Order
791	5.62e-01	0.00	5.57e-01	0.00	5.53e-01	0.00	5.53e-01	0.00
3164	1.45e-01	1.95	1.44e-01	1.96	1.42e-01	1.97	1.41e-01	1.97
12656	3.69e-02	1.98	3.64e-02	1.98	3.56e-02	1.99	3.56e-02	1.99
50624	9.34e-03	1.98	9.22e-03	1.98	8.93e-03	2.00	8.91e-03	2.00

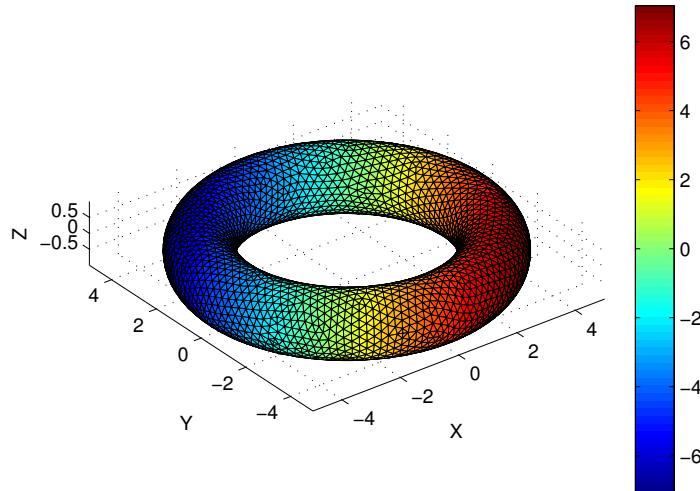


图 6.14 环面上的解  $u(x, y, z) = x - y$  的数值逼近, 自由度个数为 3164.

#### 6.4.4 心形曲面

考虑6.3.3节中的心形曲面, 对于定义在其上的 LB 方程 (1.4), 取  $u(x, y, z) = xy$  为它的解, 右端  $f$  相应的给出. 相应的数值结果见表6.4;  $u(x, y, z) = xy$  的数值逼近图像见图6.16, 其自由度个数为 3782.

表 6.3 例 3. 椭球面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表.

$N$	$E_I$	Order	$E_h$	Order	$E_1$	Order	$E_2$	Order
999	6.14e-01	0.00	7.90e-01	0.00	1.23e+00	0.00	1.26e+00	0.00
3990	1.24e-01	2.31	1.88e-01	2.07	3.36e-01	1.88	3.45e-01	1.87
15954	3.32e-02	1.90	4.87e-02	1.95	9.58e-02	1.81	9.88e-02	1.80
63810	8.64e-03	1.94	1.20e-02	2.02	2.57e-02	1.90	2.66e-02	1.89

$N$	$E_3$	Order	$E_4$	Order	$E_5$	Order	$E_6$	Order
999	1.22e+00	0.00	1.24e+00	0.00	1.23e+00	0.00	1.22e+00	0.00
3990	3.22e-01	1.93	3.30e-01	1.91	3.18e-01	1.95	3.16e-01	1.95
15954	8.72e-02	1.88	9.03e-02	1.87	8.54e-02	1.90	8.45e-02	1.90
63810	2.27e-02	1.95	2.36e-02	1.94	2.20e-02	1.96	2.17e-02	1.96

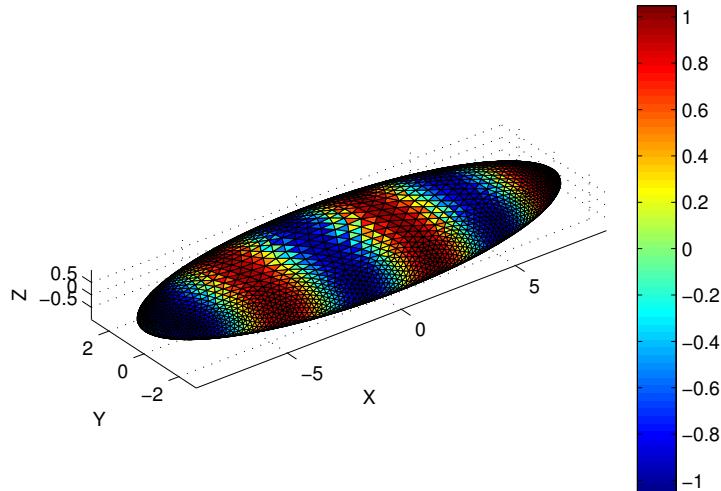


图 6.15 椭球面上的解  $u(x, y, z) = \sin(x)$  的数值逼近, 自由度个数为 3990.

#### 6.4.5 Quartics 曲面

考虑6.3.4节中的曲面, 对于定义在其上的 LB 方程 (1.4), 取  $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$  为它的解, 右端  $f$  相应的给出. 相应的数值结果见表6.5;  $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$  的数值逼近图像见图6.17, 其自由度个数为 4976.

表 6.4 例 4. 心形曲面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表.

$N$	$E_I$	Order	$E_h$	Order	$E_1$	Order	$E_2$	Order
947	2.65e-02	0.00	4.41e-02	0.00	1.00e-01	0.00	1.00e-01	0.00
3782	7.15e-03	1.89	1.10e-02	2.00	2.71e-02	1.89	2.69e-02	1.90
15122	1.93e-03	1.89	2.81e-03	1.97	6.99e-03	1.96	6.94e-03	1.95
60482	5.23e-04	1.89	7.27e-04	1.95	1.78e-03	1.97	1.77e-03	1.97

$N$	$E_3$	Order	$E_4$	Order	$E_5$	Order	$E_6$	Order
947	7.69e-02	0.00	7.66e-02	0.00	7.49e-02	0.00	7.51e-02	0.00
3782	2.04e-02	1.91	2.02e-02	1.93	1.95e-02	1.94	1.96e-02	1.94
15122	5.26e-03	1.96	5.19e-03	1.96	4.95e-03	1.98	4.96e-03	1.98
60482	1.34e-03	1.97	1.33e-03	1.97	1.24e-03	1.99	1.25e-03	1.99

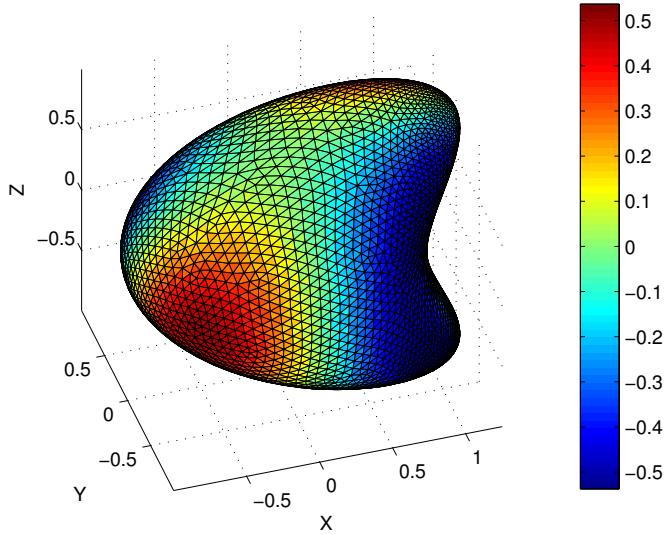


图 6.16 心形曲面上的解  $u(x, y, z) = xy$  的数值逼近, 自由度个数为 3782.

#### 6.4.6 Squared sphere 曲面

考虑6.3.7节中的曲面,对于定义在其上的LB方程(1.4),取  $u(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$  为它的解,右端  $f$  相应的给出. 相应的数值结果见表6.6;  $u(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$  的数值逼近图像见图6.18,其自由度个数为 3370.

#### 6.4.7 总结

从上面的数值实验,我们可以清楚地观察到曲面线性有限元的超收敛性. 其中全局  $L^2$  投影梯度恢复方法看起来要比局部恢复方法要好一些. 这里全局  $L^2$  投影需要对一个质量矩阵求逆,需要的计算时间可能要比局部方法多一些,但由于质量

表 6.5 例 5. Quartics 曲面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表.

$N$	$E_I$	Order	$E_h$	Order	$E_1$	Order	$E_2$	Order
1238	4.10e+00	0.00	6.45e+00	0.00	1.00e+01	0.00	9.95e+00	0.00
4976	1.09e+00	1.92	1.65e+00	1.97	3.16e+00	1.66	3.17e+00	1.65
19928	2.76e-01	1.97	4.13e-01	2.00	8.58e-01	1.88	8.62e-01	1.88
79736	6.98e-02	1.99	1.04e-01	2.00	2.20e-01	1.96	2.21e-01	1.96

$N$	$E_3$	Order	$E_4$	Order	$E_5$	Order	$E_6$	Order
1238	8.25e+00	0.00	8.17e+00	0.00	8.27e+00	0.00	8.29e+00	0.00
4976	2.43e+00	1.76	2.44e+00	1.75	2.42e+00	1.77	2.42e+00	1.78
19928	6.40e-01	1.92	6.46e-01	1.92	6.36e-01	1.93	6.33e-01	1.93
79736	1.62e-01	1.98	1.64e-01	1.97	1.61e-01	1.98	1.60e-01	1.98

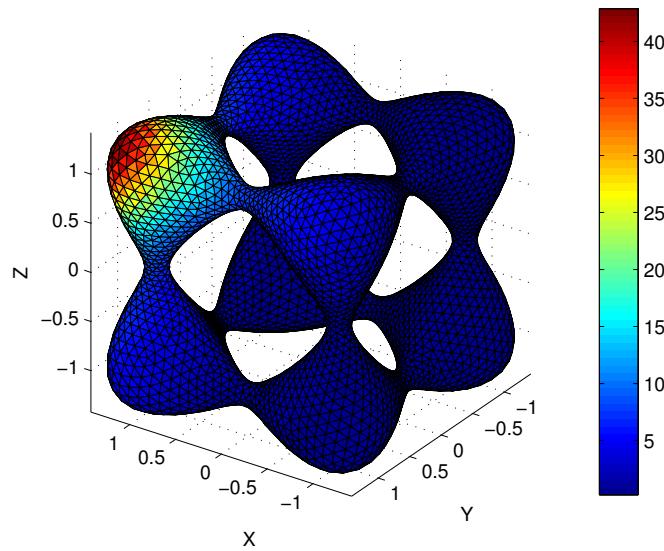


图 6.17 Quartics 曲面上的解  $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$  的数值逼近, 自由度个数为 4976.

矩阵的优良性态, 结合预条件共轭梯度法也可以很高效的求解. 在六种局部方法中, 定义在切平面上的方法要比直接定义在  $S_h$  上的方法要好. 定义在切平面上的方法的误差明显要小一点, 原因是其所使用的单位外法线向量是精确的.

表 6.6 例 6. Squared sphere 曲面上的曲面线性有限元和几种梯度恢复方法的误差表.

$N$	$E_I$	Order	$E_h$	Order	$E_1$	Order	$E_2$	Order
844	2.53e-02	0.00	1.19e-01	0.00	1.97e-01	0.00	1.97e-01	0.00
3370	7.08e-03	1.84	2.94e-02	2.02	6.72e-02	1.55	6.72e-02	1.55
13474	1.92e-03	1.88	7.08e-03	2.05	1.87e-02	1.84	1.87e-02	1.84
53890	5.19e-04	1.89	1.75e-03	2.01	4.83e-03	1.95	4.83e-03	1.95

$N$	$E_3$	Order	$E_4$	Order	$E_5$	Order	$E_6$	Order
844	1.89e-01	0.00	1.88e-01	0.00	1.88e-01	0.00	1.89e-01	0.00
3370	6.11e-02	1.63	6.09e-02	1.63	6.06e-02	1.64	6.05e-02	1.64
13474	1.66e-02	1.88	1.66e-02	1.88	1.64e-02	1.88	1.64e-02	1.88
53890	4.25e-03	1.97	4.25e-03	1.96	4.20e-03	1.97	4.19e-03	1.97

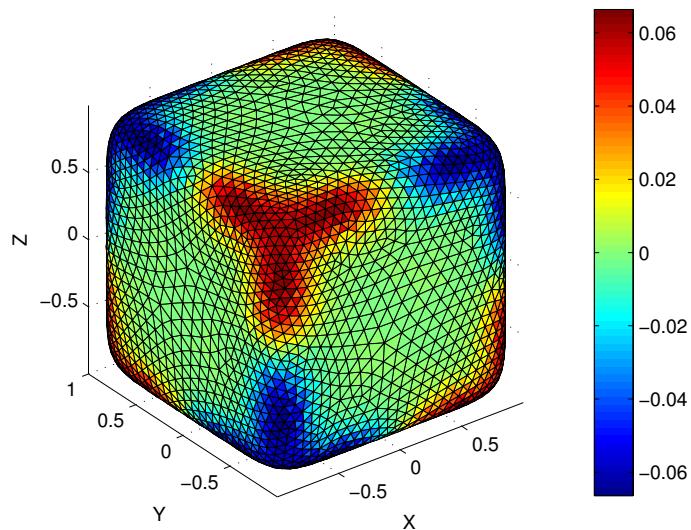


图 6.18 Squared sphere 曲面上的解  $u(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$  的数值逼近, 自由度个数为 3370.

## 第七章 总结及下一步工作

本文主要利用 Bank 和 Xu [4] 给出的思想方法来研究二维椭圆界面问题和 Laplace-Beltrami 问题线性有限元解的超收敛性.

对于二维椭圆界面问题, 我们在适度结构网格的假设下, 考虑了界面拟合对超收敛的影响, 证明了有限元解的超收敛性. 同时利用最新顶点自适应加密算法来改进 Börgers 算法 [12], 提出一种新的半结构界面拟合网格的快速生成算法, 生成的网格可以更好地拟合复杂的界面. 同时我们使用一种简单数据结构来维护生成网格的继承结构. 基于这种继承结构, 我们利用 [26] 中的粗化算法构造了一个嵌套的网格序列, 进而设计了一个高效的多重网格解法器. 基于超收敛分析, 我们还给出二维椭圆界面问题的一个最大模估计. 我们下一步会考虑二维移动界面问题, 结合粗化, 最新顶点加密及 Börgers 算法设计高效的网格调整算法, 使得当界面移动时, 可以快速的调整网格生成新的界面拟合网格. 最后把我们的算法应用到一些实际问题的数值模拟当中, 如关于固化过程和晶体生长的 Stefan 问题, 复合材料, 多相流, 及细胞和汽泡的变形等. 进一步我们还会研究三维界面问题的界面拟合网格快速生成算法及其实际应用.

对于 Laplace-Beltrami 问题, 我们在适度结构网格的假设下, 考虑了多面体网格逼近带来的几何误差对超收敛的影响, 证明了曲面有限元解的超收敛性. 同时把平面有限元中的几种梯度恢复方法推广到了曲面线性有限元, 并证明了恢复后的梯度可以更好的逼近真解的梯度. 另外还讨论了有限元和有限体之间的关系, 证明了有限元的梯度恢复技术同样可以应用到有限体上来, 且具有超收敛性. 基于曲面的三角形网格逼近, 我们还设计了一个与曲面曲率相关的密度函数, 它适当光滑且易于构造, 数值试验表明基于这个密度函数的 Lloyd 方法可以有效地改善光滑隐函数曲面三角形网格的质量. 我们下一步将着手设计基于恢复型后验误差估计子和 CVT 优化技术的曲面自适应有限元算法, 并应用到实际问题的数值模拟当中, 如细胞极化现象.



## 参考文献

- [1] I. Babuška and A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13(2):pp. 214–226, 1976.
- [2] I. Babuška, T. Strouboulis, C. Upadhyay, and S. Gangaraj. Computer-based proof of the existence of superconvergence points in the finite element method; superconvergence of the derivatives in finite element solutions of laplace’s, poisson’s, and the elasticity equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12(3):pp. 347–392, 1996.
- [3] R. Bank and D. Rose. Some error estimates for the box scheme. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(4):pp. 777–787, 1987.
- [4] R. E. Bank and J. Xu. Asymptotically exact a posteriori error estimators, Part I: Grids with superconvergence. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6):pp. 2294–2312, 2003.
- [5] R. E. Bank and J. Xu. Asymptotically exact a posteriori error estimators, Part II: General unstructured grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6):pp. 2313–2332, 2003.
- [6] R. E. Bank, J. Xu, and B. Zheng. Superconvergent derivative recovery for lagrange triangular elements of degree  $p$  on unstructured grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45:pp. 2032–2046, 2007.
- [7] E. Bänsch, F. Haußer, O. Lakkis, B. Li, and A. Voigt. Finite element method for epitaxial growth with attachment-detachment kinetics. *J. Comput. Phys.*, 194(2):pp. 409–434, 2004.
- [8] E. Bänsch, P. Morin, and R. H. Nochetto. A finite element method for surface diffusion: the parametric case. *J. Comput. Phys.*, 203(1):pp. 321–343, 2005.
- [9] J. Bedrossian, J. H. V. Brecht, S. Zhu, E. Sifakis, and J. M. Teran. A second order virtual node method for elliptic problems with interfaces and irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 229(18):pp. 6405–6426, 2010.
- [10] B. Bejanov, J. L. Guermond, and P. D. Minev. A grid-alignment finite element technique for incompressible multicomponent flows. *J. Comput. Phys.*, 227(13):pp. 6473–6489, 2008.
- [11] J. D. Boissonnat and S. Oudot. Provably good sampling and meshing of surfaces. *Graphical Models*, 67(5):pp. 405–451, 2005.
- [12] C. Börgers. A triangulation algorithm for fast elliptic solvers based on domain imbedding. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(5):pp. 1187–1196, 1990.

- [13] J. H. Bramble and J. T. King. A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces. *Adv. Comput. Math.*, 6(1):pp. 109–138, 1996.
- [14] J. H. Bramble and A. H. Schatz. Higher order local accuracy by averaging in the finite element method. *Math. Comp.*, 31(137):pp. 74–111, 1977.
- [15] W. K. Burton, N. Cabrera, and F. C. Frank. The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, (866):pp. 299–358, 1951.
- [16] R. E. Caflisch and B. Li. Analysis of island dynamics in epitaxial growth of thin films. *Multiscale Model. Simul.*, 1(1):pp. 150–171, 2003.
- [17] C. Carstensen and S. Bartels. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I. low order conforming, nonconforming, and mixed FEM. *Math. Comput.*, 71(239):pp. 945–969, 2002.
- [18] C. Chen. Optimal points of the stresses approximated by triangular linear element in fem. *J. Xiangtan Univ.*, 1:pp. 77–90, 1978.
- [19] L. Chen. Mesh smoothing schemes based on optimal Delaunay triangulations. In *13th International Meshing Roundtable*, pages 109–120, Williamsburg, VA, 2004. Sandia National Laboratories.
- [20] L. Chen. *Robust and Accurate Algorithms for Solving Anisotropic Singularities*. PhD thesis, Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, University Park, PA, USA, 2005.
- [21] L. Chen. Short implementation of bisection in MATLAB. In P. Jorgensen, X. Shen, C. Shu, and N. Yan, editors, *Recent Advances in Computational Sciences – Selected Papers from the International Workshop on Computational Sciences and Its Education*, pages 318–332, 2008.
- [22] L. Chen. iFEM: An Integrated Finite Element Methods Package in MATLAB. *Technical Report, University of California at Irvine*, 2009.
- [23] L. Chen. A new class of high order finite volume methods for second order elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(6):pp. 4021–4043, 2010.
- [24] L. Chen and M. Holst. Efficient mesh optimization schemes based on Optimal Delaunay Triangulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(9–12):pp. 967–984, 2011.

- [25] L. Chen and J. Xu. Topics on adaptive finite element methods. In T. Tang and J. Xu, editors, *in Adaptive Computations: Theory and Algorithms*, pages 1–31. Sci. Pr., Beijing, 2007.
- [26] L. Chen and C. Zhang. A coarsening algorithm on adaptive grids by newest vertex bisection and its applications. *J. Comput. Math.*, 28(6):pp. 767–789, 2010.
- [27] Z. Chen, Y. Xiao, and L. Zhang. The adaptive immersed interface finite element method for elliptic and maxwell interface problems. *J. Comput. Phys.*, 228(14):pp. 5000–5019, 2009.
- [28] Z. Chen and J. Zou. Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems. *Numer. Math.*, 79(2):pp. 175–202, 1998.
- [29] I. Chern and Y. Shu. A coupling interface method for elliptic interface problems. *J. Comput. Phys.*, 225(2):pp. 2138–2174, 2007.
- [30] A. Demlow. Higher-order finite element methods and pointwise error estimates for elliptic problems on surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(2):pp. 805–827, 2009.
- [31] A. Demlow and G. Dziuk. An adaptive finite element method for the laplace-beltrami operator on implicitly defined surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(1):pp. 421–442, 2007.
- [32] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *SIGGRAPH '99: Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 317–324, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [33] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms. *SIAM Rev.*, 41(4):pp. 637–676, 1999.
- [34] Q. Du, M. Gunzburger, and L. Ju. Constrained centroidal voronoi tessellations in general surfaces. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(5):pp. 1488–1506, 2003.
- [35] Q. Du, M. Gunzburger, and L. Ju. Advances in studies and applications of centroidal voronoi tessellations. *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.*, 3(2):pp. 119–142, 2010.
- [36] Q. Du and L. Ju. Finite volume methods on spheres and spherical centroidal voronoi meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(4):pp. 1673–1692, 2005.
- [37] G. Dziuk. Finite elements for the beltrami operator on arbitrary surfaces. In S. Hildebrandt and R. Leis, editors, *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*, volume 1357 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 142–155. Springer Berlin - Heidelberg, 1988.

- [38] G. Dziuk. An algorithm for evolutionary surfaces. *Numer. Math.*, 58(1):pp. 603–611, 1990.
- [39] G. Dziuk and C. M. Elliott. Finite elements on evolving surfaces. *IMA J. Numer. Anal.*, 27(2):pp. 262–292, 2007.
- [40] M. S. Ebeida, R. L. Davis, and R. W. Freund. A new fast hybrid adaptive grid generation technique for arbitrary two-dimensional domains. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 84(3):pp. 305–329, 2010.
- [41] H. Edelsbrunner. Triangulations and meshes in computational geometry. *Acta Numer.*, 9:pp. 133–214, 2000.
- [42] X. Feng and H. Wu. A posteriori error estimates and an adaptive finite element method for the allen–cahn equation and the mean curvature flow. *J. Sci. Comput.*, 24(2):pp. 121–146, 2005.
- [43] P. J. Frey and L. Marechal. Fast adaptive quadtree mesh generation. In *Proceedings of the Seventh International Meshing Roundtable*, pages 211–224. Citeseer, 1998.
- [44] I. Fried. Condition of finite element matrices generated from nonuniform meshes. *AIAA J.*, 10:pp. 219–221, 1972.
- [45] M. Garland and P. S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH ’97, pages 209–216, New York, NY, USA, 1997. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [46] A. Gelas, S. Valette, R. Prost, and W. L. Nowinski. Variational implicit surface meshing. *Comput. Graph.*, 33(3):pp. 312–320, 2009.
- [47] Y. Gong, B. Li, and Z. Li. Immersed-interface finite-element methods for elliptic interface problems with non-homogeneous jump conditions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(1):pp. 472–495, 2008.
- [48] W. Hackbusch. On first and second order box schemes. *Computing*, 41(4):pp. 277–296, 1989.
- [49] E. Hebey. *Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds*. Springer Berlin / Heidelberg, New York, 1996.
- [50] B. Heimsund, X. Tai, and J. Wang. Superconvergence for the gradient of the finite element approximations by  $l^2$ -projections. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(4):pp. 1538–1560, 2002.

- [51] M. Holst. Adaptive numerical treatment of elliptic systems on manifolds. *Adv. Comput. Math.*, 15(1):pp. 139–191, 2001.
- [52] Y. Huang and J. Xu. Superconvergence of quadratic finite elements on mildly structured grids. *Math. Comp.*, 77(263):pp. 1253–1268, 2008.
- [53] H. Johansen and P. Colella. A cartesian grid embedded boundary method for poisson’s equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 147(1):pp. 60–85, 1998.
- [54] P. Knupp. Algebraic mesh quality metrics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(1):pp. 193–218, 2001.
- [55] R. J. Leveque and Z. Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(4):pp. 1019–1044, 1994.
- [56] Z. Li. A fast iterative algorithm for elliptic interface problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(1):pp. 230–254, 1998.
- [57] Z. Li. An overview of the immersed interface method and its applications. *Taiwanese J. Math.*, 7(1):pp. 1–49, 2003.
- [58] Z. Li and K. Ito. *The immersed interface method: numerical solutions of PDEs involving interfaces and irregular domains*. SIAM, Philadelphia,PA, 2006.
- [59] Z. Li, T. Lin, and X. Wu. New cartesian grid methods for interface problems using the finite element formulation. *Numer. Math.*, 96(1):pp. 61–98, 2003.
- [60] D. Liu and J. Nocedal. On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Math. Program.*, 45(1):pp. 503–528, 1989.
- [61] X. Liu, R. Fedkiw, and M. Kang. A boundary condition capturing method for poisson’s equation on irregular domain. *J. Comput. Phys.*, 160:pp. 151–178, 2000.
- [62] Y. Liu, W. Wang, B. Lévy, F. Sun, D. M. Yan, L. Lu, and C. Yang. On centroidal voronoi tessellation — energy smoothness and fast computation. *ACM Trans. Graph.*, 28(4):pp. 1–17, 2009.
- [63] S. Lloyd. Least squares quantization in pcm. *IEEE T. Inform. Theory.*, 28(2):pp. 129–137, 1982.
- [64] C. Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master’s thesis, University of Utah, Utah, USA, 1987.
- [65] U. F. Mayer. Numerical solutions for the surface diffusion flow in three space dimensions. *comput. Appl. Math.*, 20(3):pp. 361–379, 2001.

- [66] K. Mekchay. *Convergence of adaptive finite element methods*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Maryland at College Park, College Park, MD, USA, 2005.
- [67] K. Mekchay, P. Morin, and R. H. Nochetto. Afem for the laplace-beltrami operator on graphs: Design and conditional contraction property. *Math. Comput.*, 80(274):pp. 625–648, 2009.
- [68] H. Nguyen. *Centroidal Voronoi tessellations for mesh generation: From uniform to anisotropic adaptive triangulations*. PhD thesis, The Florida State University, Tallahassee, FL, USA, 2008.
- [69] M. Oevermann and R. Klein. A cartesian grid finite volume method for elliptic equations with variable coefficients and embedded interfaces. *J. Comput. Phys.*, 219(2):pp. 749–769, 2006.
- [70] P. Persson and G. Strang. A simple mesh generator in matlab. *SIAM Rev.*, (2):pp. 329–345, Jun. 2004.
- [71] C. Pflaum. Semi-unstructured grids. *Comput.*, 67(2):pp. 141–166, 2001.
- [72] J. Roitberg and Z. Šeftel. A theorem on homeomorphisms for elliptic systems and its applications. *MATH USSR SB+*, 7(3):pp. 439–465, 1969.
- [73] B. H. Romeny. *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1994.
- [74] J. S. Sachdev and C. P. T. Groth. A mesh adjustment scheme for embedded boundaries. In C. Groth and D. Zingg, editors, *Computational Fluid Dynamics 2004*, pages 109–114. Springer Berlin - Heidelberg, New York, 2006.
- [75] G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [76] A. Schatz, I. Sloan, and L. Wahlbin. Superconvergence in finite element methods and meshes that are locally symmetric with respect to a point. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(2):pp. 505–521, 1996.
- [77] J. R. Shewchuk. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Comput. Geom.*, 22(1-3):pp. 21–74, 2002.
- [78] R. Sibson. Locally equiangular triangulations. *Comput. J.*, 21(3):pp. 243–245, 1978.
- [79] G. Simonett. The willmore flow for near spheres. *Differential Integral Equations*, 14(8):pp. 1005–1014, 2001.

- [80] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 30. Princeton Univ. Pr., 1970.
- [81] L. B. Wahlbin. *Superconvergence in Galerkin finite element methods*. Lecture notes in mathematics. Springer, 1995.
- [82] H. Xie, K. Ito, Z. Li, and J. Toivanen. A finite element method for interface problems with locally modified triangulations. *Moving Interface Problems and Applications in Fluid Dynamics: January 8–March 1, 2007, the Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore*, 466:pp. 179–190, 2008.
- [83] H. Xie, Z. Li, and Z. Qiao. A finite element method for elasticity interface problems with locally modified triangulations. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 8(2):pp. 189–200, 2011.
- [84] G. Xu. *Geometric Partial Differential Equation Methods in Computational Geometry*. Science Press, Beijing, PR China, 2008.
- [85] J. Xu. Error estimates of the finite element method for the 2nd order elliptic equations with discontinuous coefficients. *J. Xiangtan University*, 1:pp. 1–5, 1982.
- [86] J. Xu and Z. Zhang. Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids. *Math. Comp.*, 73:pp. 1139–1152, 2004.
- [87] J. Xu and Q. Zou. Analysis of linear and quadratic simplicial finite volume methods for elliptic equations. *Numer. Math.*, 111(3):pp. 469–492, 2009.
- [88] M. A. Yerry and M. S. Shephard. A modified quadtree approach to finite element mesh generation. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 3(1):pp. 39–46, 1983.
- [89] K. F. C. Yiu, D. M. Greaves, S. Cruz, A. Saalehi, and A. G. L. Borthwick. Quadtree grid generation: Information handling, boundary fitting and cfd applications. *Comput. & Fluids*, 25(8):pp. 759–769, 1996.
- [90] O. C. Zienkiewicz and J. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33(7):pp. 1331–1364, 1992.
- [91] 陈传森. 有限元超收敛构造理论. 湖南科学技术出版社, 长沙, 2001.
- [92] 陈传森, 朱起定. 有限单元法的一种新估计和应力佳点定理. 湘潭大学通讯, 1:pp. 10–20, 1978.
- [93] 陈传森, 黄云清. 有限元高精度理论. 湖南科学技术出版社, 长沙, 1995.



## 致谢

本文是在黄云清教授和陈龙副教授两位导师的共同精心指导下完成的。两位导师四年来的关心、指导和照顾，他们对待科研的求真严谨，对待教育的认真负责，是我终身学习的榜样。我在此向他们表示最诚挚的谢意！感谢陈艳萍教授在硕士阶段对我的悉心培养，正是因为她的大力推荐才使我获得了难得的读博机会。感谢北京大学的李若教授，正是由于他对他的有限元软件包 AFEPack 深入浅出的讲解，以及对我的疑问的耐心解答，让我对有限元编程有了更深入的理解，并在短时间内掌握有限元编程，极大的提高了科研能力。还有很多老师、同学和朋友，尤其是周光明、杨银、秦衡峰、戴永泉、易年余、周志阳、张浩、唐跃龙、刘春梅、王冬岭、杨伟、侯天亮、李雪阳等都给我提供了很多的帮助，借此机会一并向他们表示深深的感谢！同时感谢湘潭大学数学与计算科学学院提供的优良的办公环境，使得我能够顺利完成学业。

感谢湖南省研究生创新项目 CX2009B122 对我研究工作的支持。感谢国家留学基金委资助我去美国加州大学欧文分校 (UCI) 访问学习一年，开阔了学术视野，进一步提高科研能力，本文的一部分工作就是在那完成的。我的第二导师陈龙老师就是在 UCI 工作，在此特别感谢在美国期间他对我的指导与关心。还要感谢 UCI 的那些朋友，王明、James、李永学、周海平、侯波、翟韬、张晓奇、王浩冉等，正是由于你们陪伴，让我在异国他乡少了些许孤独，多了很多色彩。

最后，我要感谢我的家人，感谢父母二十多年来的养育之恩，感谢姐姐和哥哥多年来的关心和照顾，感谢我的爱人熊婷对我的支持和鼓励，还要感谢很多的亲人和朋友一直以来对我的支持，在此向他们表示最深切的感激！



# 个人简历、在学期间发表的学术论文及研究成果

## 个人简历

姓名：魏华袆

性别：男

籍贯：河南邓州

出生年月：1984年10月

- 2002.9—2006.6 在河南大学数学与信息科学学院获得理学学士学位.
- 2006.9—2012.6 在湘潭大学数学与计算科学学院攻读博士学位.

## 发表和完成投稿的学术论文

- [1] Yanping Chen, Yao Fu, Huanwen Liu, Yongquan Dai, and Huayi Wei, Recovery a posteriori error estimates for general convex elliptic optimal control problems subject to pointwise control constraints, *Journal of Computational Mathematics*, 2009, 27(4):pp. 543–560, SCI.
- [2] Yunqing Huang, Huayi Wei, Wei Yang, and Nianyu Yi, A New a Posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Methods, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XIX*, Springer, 2011, pp. 63–74, EI
- [3] Huayi Wei, Long Chen, and Yunqing Huang, Superconvergence and Gradient Recovery of Linear Finite Elements for the Laplace–Beltrami Operator on General Surfaces, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2010, 48(5):pp. 1920–1943, SCI.
- [4] Huayi Wei, Long Chen, Yunqing Huang, and Bin Zheng, Adaptive mesh refinement and superconvergence for two dimensional interface problems, submitted.
- [5] James C Hateley, Huayi Wei, and Long Chen, Fast Solvers for Computing Centroidal Voronoi Tessellations, submitted.