

机器人学导论

3RP SCARA机器人

课程报告

2212266 张恒硕



南开大学
Nankai University



目 录

1	目的	4
2	坐标系构建	5
2.1	原理	5
2.2	坐标系构建	6
3	正运动学	7
3.1	原理	7
3.2	正运动学求解	8
4	逆运动学	8
4.1	原理	8
4.2	逆运动学求解	9
4.3	解的分析	10
5	正逆运动学仿真验证	10
5.1	MATLAB Robot Toolbox	10
5.2	正运动学	11
5.2.1	代码逻辑	11
5.2.2	验证结果	11
5.3	逆运动学	11
5.3.1	代码逻辑	11
5.3.2	验证结果	12
6	雅可比	15
6.1	原理	15
6.2	基础雅可比	16
6.3	奇异性	16
6.4	雅可比求逆运动学	17
7	动力学	18
7.1	原理	18
7.1.1	牛顿欧拉动力学方程法	18
7.1.2	拉格朗日动力学方程法	20
7.2	动力学求解	23
8	机器人控制方法调研	25
8.1	人形机器人控制	25

8.2	软体机器人驱动与控制	25
8.3	多机器人协同控制	26
8.4	其它	26
9	总结	26

图 片

图 1	3RP SCARA机器人结构示意图	4
图 2	DH参数定义	5
图 3	坐标系构建	6
图 4	多解示意图	10
图 5	机器人信息表	10
图 6	数据1可视化	13
图 7	数据2可视化	14
图 8	速度传播	15
图 9	关节分析	18

表 格

表 1	3RP SCARA机器人杆件参数	4
表 2	DH参数表	7
表 3	正运动学验证结果	11
表 4	逆运动学验证结果	12
表 5	速度传播	15
表 6	方法比较	18

1 目的

- 1. 掌握《机器人学导论》课程内容，深入理解机械臂建模、正逆运动学、雅可比和动力学。
- 2. 就图1所示的3RP SCARA机器人和表1所示的参数，实践完整流程的推导。
- 3. 调研近5年机器人控制方法的研究进展，掌握学科前沿信息。

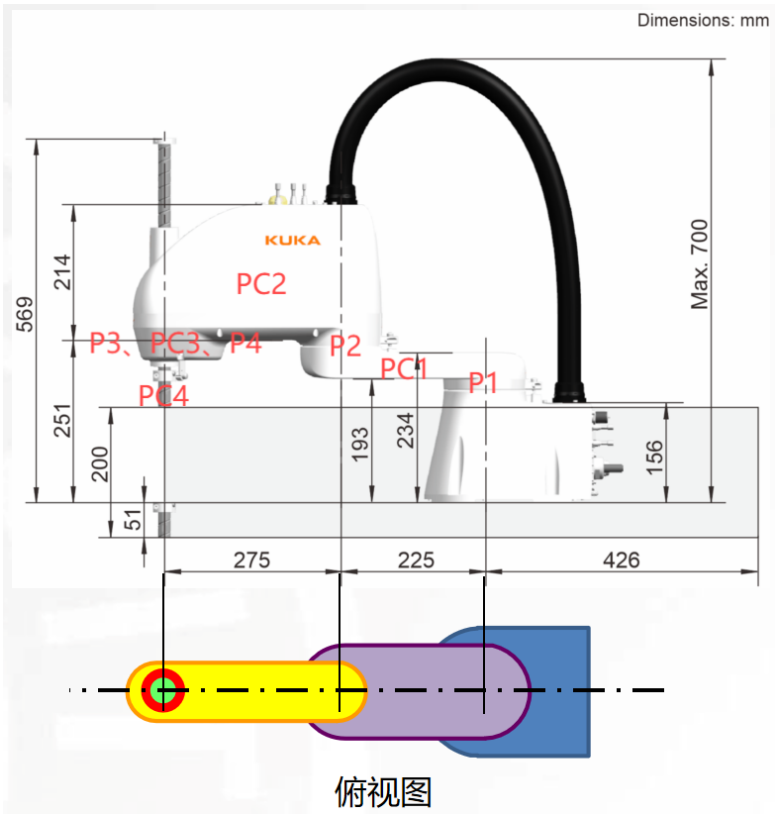


图 1: 3RP SCARA机器人结构示意图

杆件	蓝色杆件o	紫色杆件1	黄色杆件2	红色杆件3	绿色杆件4
质量 m_i (kg)	100	50	10	1	5
转动惯量 I_{ci}	$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

表 1: 3RP SCARA机器人杆件参数

各杆件质心均位于代数中心。

2 坐标系构建

2.1 原理

DH（Denavit Hartenberg）参数法是一种用于建立机器人各连杆坐标系及其之间变换关系的方法。常用的有标准DH参数法和改进DH参数法，二者的参数表排布不一样，在求解正运动学方程时的公式不同。以下是理论课采用的改进DH参数法。

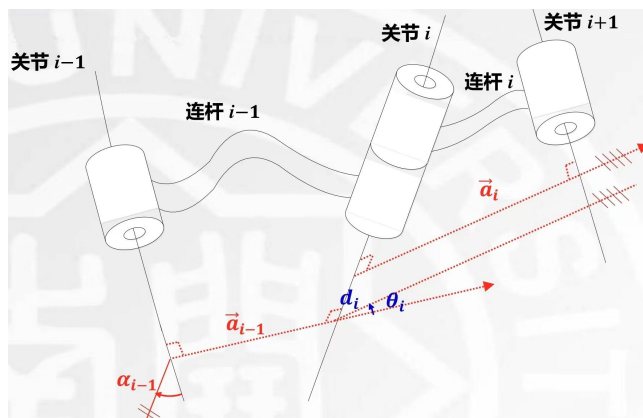


图 2: DH参数定义

定义 参考上图2，对于关节 i ：

- 连杆参数（代数参数）：沿 X_{i-1} ，由 Z_{i-1} 与 Z_i 求取，定值。
 - 连杆长度（Link Length） \vec{a}_{i-1} 。
 - 连杆扭角（Link Twist） α_{i-1} 。
- 关节参数（运动参数）：沿 Z_i ，由 X_{i-1} 与 X_i 求取，根据关节属性确定一个变量。
 - 关节偏距（Joint Offset） d_i 。
 - 关节转角（Joint Angle） θ_i 。
- - 基座：虚拟关节0与关节1重合， $\vec{a}_0 = 0, \alpha_0 = 0$ 。
 - 末端：虚拟关节 $n+1$ 与关节 n 重合， $\vec{a}_n = 0, \alpha_n = 0$ 。

求解

1. Z_i 轴：关节 i 轴延长线，标注正方向。
2. X_i 轴： Z_{i-1} 轴与 Z_i 轴公垂线（由前者指向后者）或交点（垂直平面，一般指向末端）。
3. （ Y_i 轴： Z_i 轴与 X_i 轴公垂线，右手法则确定。）
4. 标注基座坐标系和末端坐标系，尽可能与相邻坐标系重合。
5. 制表，并根据关节属性标注变量。
6. 沿 X_{i-1} ，由 Z_{i-1} 与 Z_i 求取 a_{i-1} 和 α_{i-1} ；沿 Z_i ，由 X_{i-1} 与 X_i 求取 d_i 和 θ_i 。

2.2 坐标系构建

建立如下图3左图所示的坐标系，将基坐标系与关节1坐标系重合，保证所有坐标系x轴方向一致，并使前三个旋转关节的z轴方向一致向上，而最后的平移关节由于是向下探出的，z轴方向向下。最终得到下表2 on the following page的DH参数。

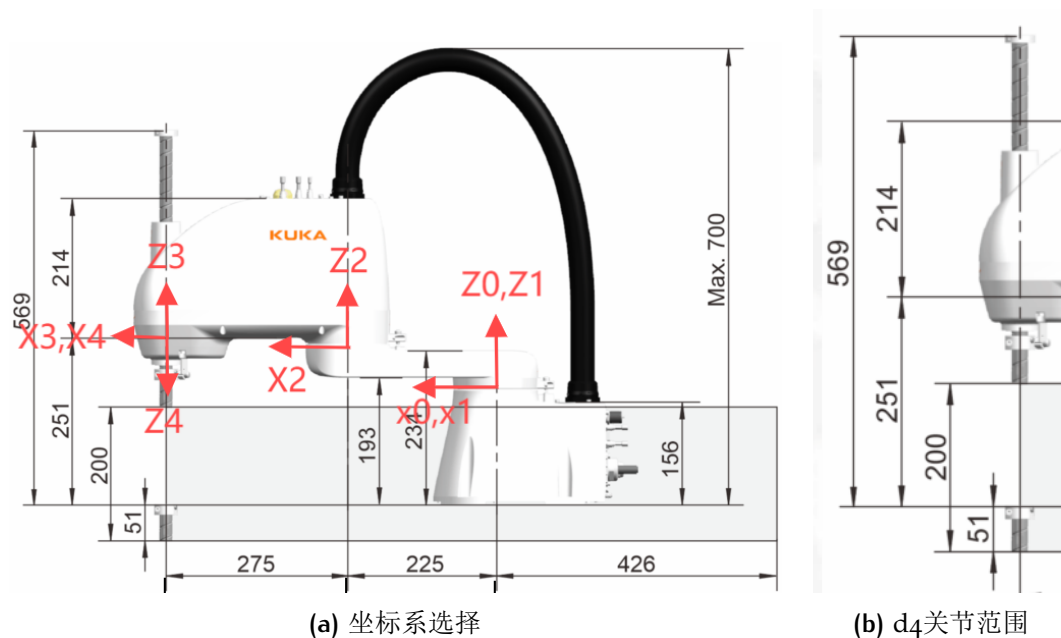


图 3: 坐标系构建

连杆i	$\alpha_{i-1}(\text{rad})$	$\vec{a}_{i-1}(\text{mm})$	$\theta_i(\text{rad})$	$d_i(\text{mm})$
1	0	0	θ_1	0
2	0	225	θ_2	41
3	0	275	θ_3	17
4	π	0	0	d_4

表 2: DH参数表

根据上图3 on the previous page右图，可以分析关节4的变化范围。从坐标原点向下为正方向，最远点在 $251 + 51 = 302$ 处，最近点在 $302 - 200 = 102$ 处，故变化范围为 $[102, 302]$ 。

3 正运动学

3.1 原理

正运动学 ($f: q \rightarrow {}^B E$): 已知关节角度和位置，计算末端执行器位姿。

相邻关节齐次变换阵 先根据连杆参数沿X轴变换，再根据关节参数沿新Z轴变换：

$$\begin{aligned}
 {}_{i-1}^i T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vec{a}_{i-1} \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & \vec{a}_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

正运动学方程 多关节正运动学方程由齐次变换阵连乘递推求得：

$${}^A_C T = {}^A_B T \cdot {}^B_C T$$

3.2 正运动学求解

代入参数和变量，得到如下齐次变换阵：

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 225 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 275 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得到完整的正运动学方程：

$$\begin{aligned} {}^0_4T &= {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & \color{red}{0} & 0 \\ s_1 & c_1 & \color{red}{0} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & \color{red}{0} & 225c_1 \\ s_{12} & c_{12} & \color{red}{0} & 225s_1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \\ &= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & \color{red}{0} & 275c_{12} + 225c_1 \\ s_{123} & c_{123} & \color{red}{0} & 275s_{12} + 225s_1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^3_4T = \begin{bmatrix} c_{123} & s_{123} & 0 & 275c_{12} + 225c_1 \\ s_{123} & -c_{123} & 0 & 275s_{12} + 225s_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 + 58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

（以上标红的z列为后续求雅可比时使用）

4 逆运动学

4.1 原理

逆运动学 ($f: \{^BE\} \rightarrow q$)：给定末端执行器位姿，求各关节需达到的角度和位置。

$$\text{由 } T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 求解关节角度。}$$

- 代数法：利用平方、和差角公式等化简齐次变化阵求解。
- 代数法：利用正余弦定理求解图形。

4.2 逆运动学求解

取位置矢量 x, y 项:

$$p_x = 275c_{12} + 225c_1 \quad (1)$$

$$p_y = 275s_{12} + 225s_1 \quad (2)$$

$(1)^2 + (2)^2$:

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 &= 275^2(c_{12}^2 + s_{12}^2) + 225^2(c_1^2 + s_1^2) + 2 \times 275 \times 225(c_{12}c_1 + s_{12}s_1) \\ &= 126250 + 123750c_2 \end{aligned}$$

有:

$$c_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - 126250}{123750}$$

可得:

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{p_x^2 + p_y^2 - 126250}{123750}$$

利用和差角消项得:

$$p_x c_1 + p_y s_1 = 275(c_{12}c_1 + s_{12}s_1) + 225(c_1^2 + s_1^2) = 275c_2 + 225 \quad (3)$$

$$p_y c_1 - p_x s_1 = 275(s_{12}c_1 - c_{12}s_1) + 225(s_1c_1 - c_1s_1) = 275s_2 \quad (4)$$

$(3)p_y - (4)p_x$:

$$p_x c_1 p_y + p_y^2 s_1 - p_y c_1 p_x + p_x^2 s_1 = (p_x^2 + p_y^2)s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{(275c_2 + 225)p_y - 275p_x s_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

$(3)p_x + (4)p_y$:

$$p_x^2 c_1 + p_y s_1 p_x + p_y^2 c_1 - p_x s_1 p_y = (p_x^2 + p_y^2)c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{(275c_2 + 225)p_x + 275p_y s_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

故:

$$\theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$$

取 r_{11}, r_{21} 求和角:

$$\theta_3 = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) - \theta_1 - \theta_2$$

另有位置矢量 z 项:

$$d_4 = 58 - p_z$$

4.3 解的分析

多解

θ_2 有正负两个解，当 θ_2 确定时，可唯一确定 θ_1 ，进而唯一确定 θ_3 ，而 d_4 仅由最终位置的z分量唯一确定。如左图4所示。

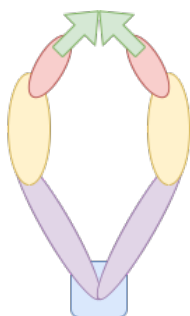


图 4: 多解示意图

$$d_4 \begin{cases} +\theta_2 \rightarrow \theta_1 \rightarrow \theta_3 \\ -\theta_2 \rightarrow \theta_1 \rightarrow \theta_3 \end{cases}$$

这两种构型一般使用肘上、肘下来区分。

无解 因为 $c_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - 126250}{123750}$ ，所以当 $|p_x^2 + p_y^2 - 126250| > 123750$ 时，即 $p_x^2 + p_y^2 > 250000$ 或 $p_x^2 + p_y^2 < 2500$ 时，无解。

5 正逆运动学仿真验证

5.1 MATLAB Robot Toolbox

完整代码请见附录代码1。

在代码最开始，导入DH参数表中的定量，设定关节4的变化范围，生成串联机械臂模型，输出右图5的信息表。

robot =

3RP SCARA:: 4 axis, RRRP, modDH, slowRNE

j	theta	d	a	alpha	offset
1	q1	0	0	0	0
2	q2	41	225	0	0
3	q3	17	275	0	0
4	0	q4	0	3.14159	0

图 5: 机器人信息表

5.2 正运动学

5.2.1 代码逻辑

- 1. 生成随机关节参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4$ 。
- 2. 基于上述推导的变换矩阵求解正运动学。
- 3. 使用机器人工具箱函数计算正运动学：正运动学方程 = robot.fkine(DH参数表)。
- 4. 比较两种方法输出的变换矩阵。

5.2.2 验证结果

以下表3拣选了两组随机数据的正运动学结果进行展示，可以发现，理论推导和工具箱求解的结果基本一致。工具箱求解的结果在部分位置会有极小值，对应理论推导的0；而二者部分结果在小数点后数位处有一定出入，这是因为选择保留的位数不一致。如果使工具箱求解的答案保留至小数点后4位，将与理论推导的结果完全一致。

方法	理论推导				工具箱求解			
数据1	-0.3315	0.9434	0	-4.4469	-0.3315	0.9434	1.155e-16	-4.447
	0.9434	0.3315	0	494.7289	0.9434	0.3315	4.06e-17	494.7
	0	0	-1.0000	-361.5398	6.163e-33	1.225e-16	-1	-361.5
	0	0	0	1.0000	0	0	0	1
数据2	0.7470	0.6648	0	429.4391	0.747	0.6648	8.142e-17	429.4
	0.6648	-0.7470	0	-191.7026	0.6648	-0.747	-9.148e-17	-191.7
	0	0	-1.0000	4.7430	0	1.225e-16	-1	4.743
	0	0	0	1.0000	0	0	0	1

表 3: 正运动学验证结果

5.3 逆运动学

5.3.1 代码逻辑

- 1. 从仿真结果提取位置矢量 $[p_x, p_y, p_z]$ 和旋转阵分量 $[r_{11}, r_{21}]$ 。
- 2. 基于上述推导的代数法结果求解逆运动学。

3. 设定初值（如全0），使用机器人工具箱函数计算逆运动学：逆运动学结果 = robot.ikunc(正运动学方程, 初值)。其是非线性优化迭代求取的，返回的解为距离初值加权欧氏距离最近的一个。
4. 比较结果与原始输入，确定代数法多解和初始值与工具箱解的对应关系。

5.3.2 验证结果

以下表4展示了上述两组数据的逆运动学结果，可以发现，代数法求解会得到两个解，二者的 θ_2 互为相反数，其中一个解与原始输入一致。以下为输入和求解结果的相同值标注了一致的颜色。

数据组	方法	θ_1	θ_2	θ_3	d_4
数据1	原始输入	1.4193	0.2916	0.1978	419.5398
	代数法解1	1.4193	0.2916	0.1978	419.5398
	代数法解2	1.7403	-0.2916	0.4600	419.5398
	工具箱求解	1.4193	0.2916	0.1978	419.5400
数据2	原始输入	-0.8045	0.6966	0.8351	53.2570
	代数法解1	-0.8045	0.6966	0.8351	53.2570
	代数法解2	-0.0353	-0.6966	1.4591	53.2570
	工具箱求解	-0.0353	-0.6966	1.4591	53.2569

表 4: 逆运动学验证结果

以下的两个图组6 on the following page和7 on page 14展示了两组数据的可视化结果，在图片中用箭头标注了构型的凹凸方向。

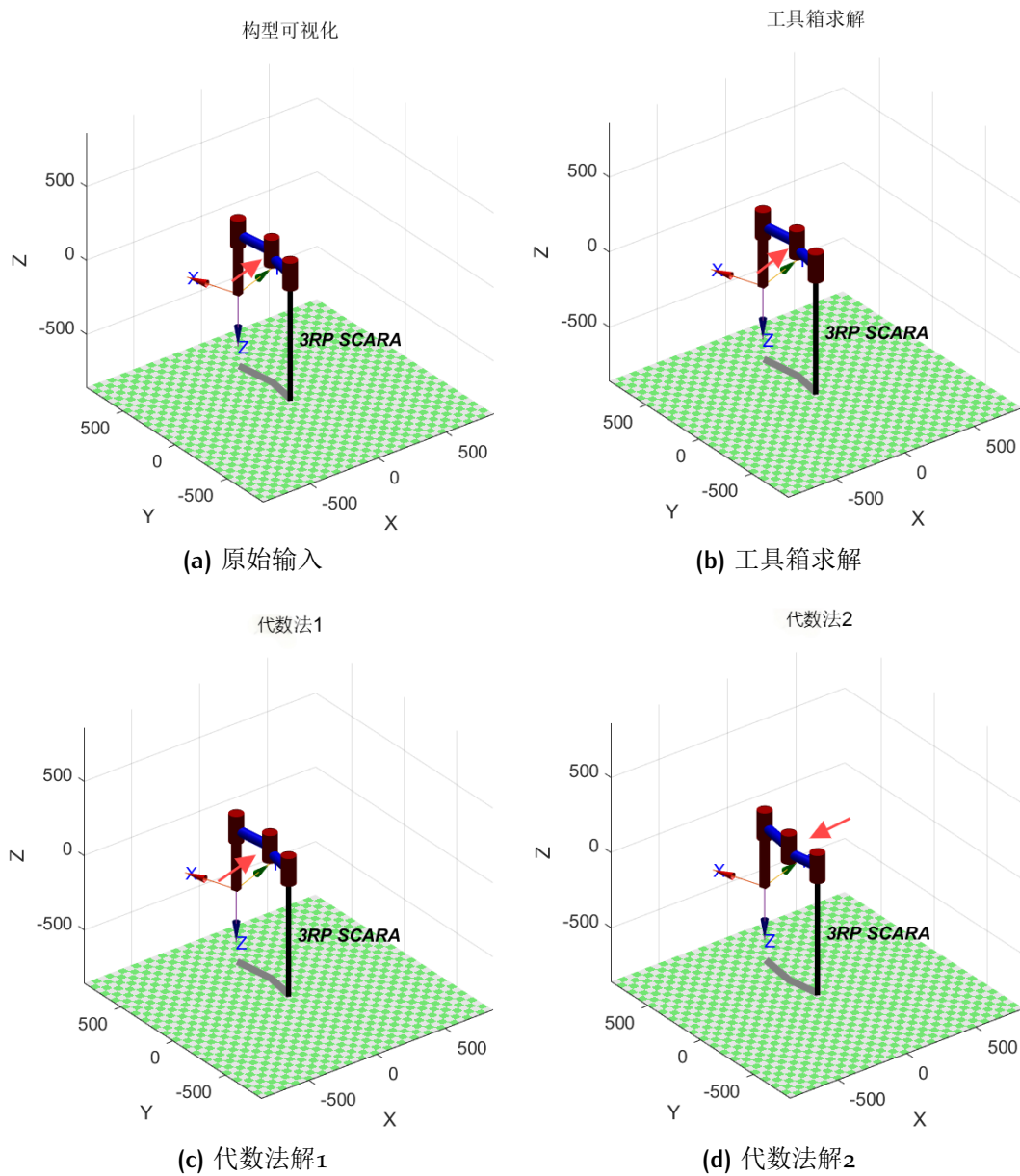


图 6: 数据1可视化

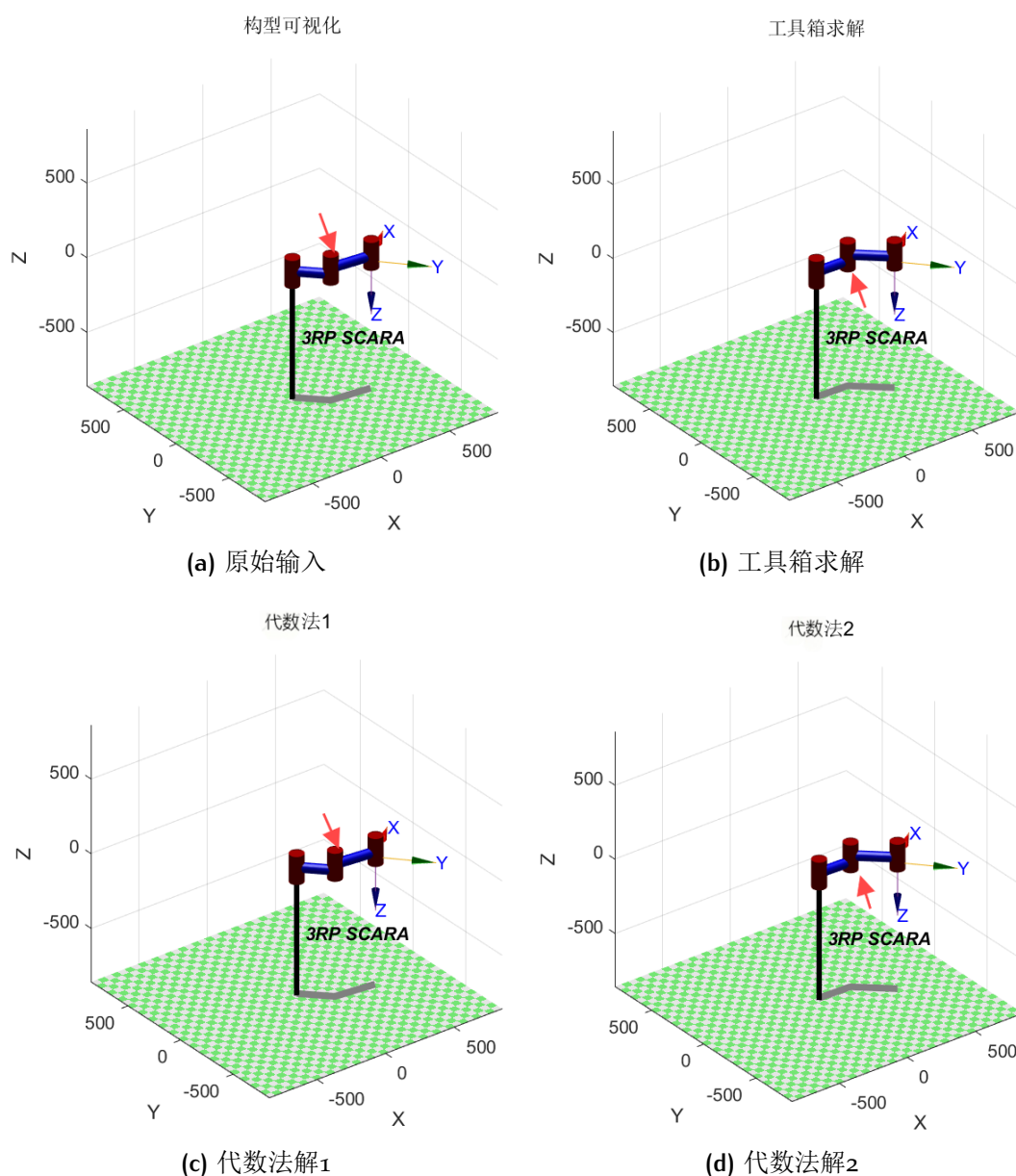


图 7: 数据2可视化

这里的工具箱求解基于雅可比的数值迭代方法，其结果与距初值欧氏距离较小的几何法解基本一致，只在舍入上略有区别。其原理会在后续介绍。

6 雅可比

6.1 原理

雅可比矩阵 J 表示关节状态（平移或旋转，由 ϵ 标注） q 变化率与末端位姿 X 变化率关系。

单关节作用 求一关节运动对末端运动影响时，将其他连杆固定，视为刚体，如下图8，得到关节 i 速度对末端速度的影响如下表5。

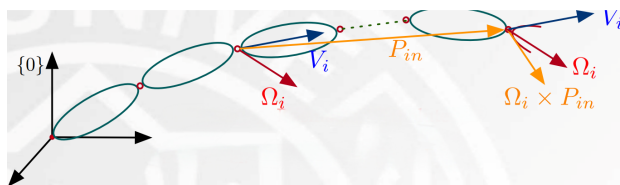


图 8: 速度传播

	平移关节	旋转关节
线速度	V_i	$\Omega_i \times P_{in}$
角速度	0	Ω_i

表 5: 速度传播

- 线速度 = 线速度传导 + 角速度转换线速度。
- 角速度 = 角速度传导。

综合作用 基于基坐标系，由 $V_i = Z_i \dot{q}_i$, $\Omega_i = Z_i \dot{q}_i$ ，综合各关节运动，得到：

$$v = \sum_{i=1}^n [\epsilon_i V_i + \bar{\epsilon}_i (\Omega_i \times P_{in})] = \sum_{i=1}^n [\epsilon_i Z_i + \bar{\epsilon}_i (Z_i \times P_{in})] \dot{q}_i$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \Omega_i = \sum_{i=1}^n (\bar{\epsilon}_i Z_i) \dot{q}_i$$

因此，线雅可比直接求导，角雅可比提取各旋转阵 z 列。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_p}{\partial q_1} & \frac{\partial X_p}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial X_p}{\partial q_N} \\ \bar{\epsilon}_1 Z_1 & \bar{\epsilon}_2 Z_2 & \cdots & \bar{\epsilon}_n Z_n \end{bmatrix}$$

6.2 基础雅可比

根据上述结论，有基础雅可比：

$$\begin{aligned}
 {}^0J_{6 \times 4} &= \begin{bmatrix} Z_1 \times P_{14} & Z_2 \times P_{24} & Z_3 \times P_{34} & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}({}^0x_p) & \frac{\partial}{\partial q_2}({}^0x_p) & \frac{\partial}{\partial q_3}({}^0x_p) & \frac{\partial}{\partial q_4}({}^0x_p) \\ {}^0Z_1 & {}^0Z_2 & {}^0Z_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} & 0 & 0 \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6.3 奇异性

在雅可比未满秩时，由于奇异，丧失特定方向上运动的能力，可能产生力传递的问题，控制困难。

当前雅可比不是方阵，去除其中全零行，得到：

$${}^0J_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} & 0 & 0 \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

根据展开定理（按第四行展开），其行列式为：

$$\begin{aligned}
 \det({}^0J_{4 \times 4}) &= \begin{vmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} & 0 & 0 \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^{(0+3)} \cdot 0 + 1 \cdot (-1)^{(1+3)} \cdot 0 + 1 \cdot (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} & 0 \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{(3+3)} \\
 &= 0 + 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} \end{vmatrix} + 0 \\
 &= -275^2 s_{12} c_{12} - 225 s_1 \cdot 275 c_{12} + 275^2 c_{12} s_{12} + 225 c_1 \cdot 275 s_{12} \\
 &= 225 \cdot 275 (c_1 s_{12} - s_1 c_{12}) \\
 &= 61875 s_2
 \end{aligned}$$

当 $s_2 = 0$ 时， $\det({}^0J_{4 \times 4}) = 0$ 。故 $\theta_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时，机械臂奇异。从构型上来看，连杆2与连杆1重合，此时达到工作空间的（内/外）边缘，末端执行器无法在圆的径向方向上运动。

6.4 雅可比求逆运动学

基于数值迭代的方法，可以使用雅可比矩阵求解逆运动学，上述逆运动学验证结果中工具箱求解即是源自这一方法，以下补充其原理。

牛顿-拉夫森法（NEWTON-RAPHSON） 适用于雅可比矩阵可逆的情况。

1. 将问题转化为求解非线性方程组 $F(q) = f(q) - x_d = 0$ 。
2. 使用泰勒展开的一阶近似 $F(q + \Delta q) \approx F(q) + J(q)\Delta q$ 。
3. 令 $F(q + \Delta q) = 0$ ，得到 $0 = F(q) + J(q)\Delta q$ ，解得关节角增量 $\Delta q = -J^{-1}(q)F(q)$ 。
4. 迭代更新关节角 $q_{k+1} = q_k - J^{-1}(q_k)F(q_k)$ 。

伪逆法（PSEUDO-INVERSE） 适用于雅可比矩阵不可逆的情况，使用Moore-Penrose伪逆。

- 当 $m \geq n$ 且 $\text{rank}(J) = n$ 时, $J^\dagger = (J^T J)^{-1} J^T$ 。
- 当 $m \leq n$ 且 $\text{rank}(J) = m$ 时, $J^\dagger = J^T (J J^T)^{-1}$ 。

之后迭代与牛顿-拉夫森法一致。

特性	牛顿-拉夫森法	伪逆法
收敛速度	快（二次收敛）	慢（线性收敛）
奇异处理	困难	自然处理
冗余机器人	需额外处理	天然适用
数值稳定性	较差	较好
实现复杂度	简单	简单

表 6: 方法比较

比较

7 动力学

7.1 原理

7.1.1 牛顿欧拉动力学方程法

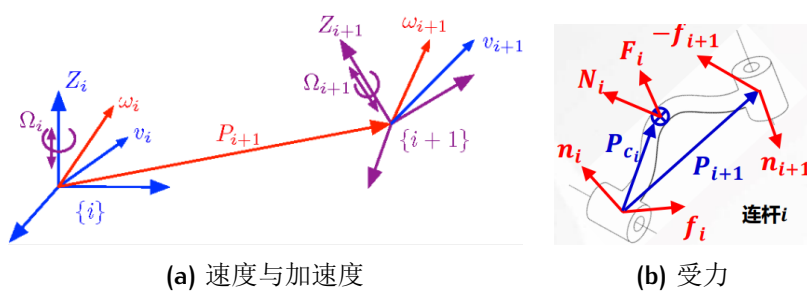


图 9: 关节分析

关节分析

- 速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{P}_{i+1} + \dot{\mathbf{d}}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \end{aligned}$$

- 加速度: (平移关节)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{P}_{i+1} + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\mathbf{P}}_{i+1}}_{\text{离心力}} + \underbrace{2\dot{\mathbf{d}}_{i+1} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{Z}_{i+1}}_{\text{科里奥利力}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} \cdot \dot{\mathbf{Z}}_{i+1}}_{\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{Z}_{i+1}} \end{aligned}$$

- 质心处速度:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_{i+1}} &= \mathbf{v}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{P}_{C_{i+1}} \\ \boldsymbol{\omega}_{C_{i+1}} &= \boldsymbol{\omega}_{i+1} \end{aligned}$$

- 质心处速度:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}} &= \dot{\mathbf{v}}_{i+1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times \mathbf{P}_{C_{i+1}} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{P}_{C_{i+1}}) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{C_{i+1}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \end{aligned}$$

- 连杆惯性力 (矩):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1} &= m_{i+1} \dot{\mathbf{v}}_{C_{i+1}} \\ \mathbf{N}_{i+1} &= \mathbf{I}_{C_{i+1}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{I}_{C_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_{i+1} \end{aligned}$$

- 质心处受力分析:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} = m_i \dot{\mathbf{v}}_{C_i} \\ \mathbf{N}_i &= \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (-\mathbf{P}_{C_i}) \times \mathbf{f}_i + (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{C_i}) \times (-\mathbf{f}_{i+1}) \end{aligned}$$

步骤

1. 初始化 (基坐标系固定时表征重力): ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = 0, {}^0\mathbf{v}_0 = 0, {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{g}$ 。
2. 外推:

- a) 关节速度、加速度。
 - b) 质心速度、加速度。
 - c) 质心处受力（矩）。
3. 内推：关节力（矩）。
4. 标准形式： $\Gamma = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q)$ 。

7.1.2 拉格朗日动力学方程法

拉格朗日动力学方程

- 势能 $U(q, t)$: $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial q} = G(q)$ 。
- 动能 $K(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$: $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = Q(q, \dot{q}) \Rightarrow F = \frac{dQ(q, \dot{q})}{dt}$, $\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial M(q)}{\partial q}$ 。

有：

$$\Gamma = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q}}_{\text{非惯性系力 } M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q}}_{\text{重力 } G(q)}$$

动能

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} K(q, \dot{q}) &= M(q) \dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} K(q, \dot{q}) \right) = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} \\ \frac{\partial}{\partial q} K(q, \dot{q}) &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_N} \dot{q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial q} = \underbrace{M(q) \ddot{q}}_{\text{惯性力}} + \underbrace{\dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_N} \dot{q} \end{bmatrix}}_{\text{科里奥利力}}$$

$M(q)$

连杆*i*动能 $K_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{C_i}^T m_i \mathbf{v}_{C_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{C_i}^T I_{C_i} \boldsymbol{\omega}_{C_i}$ ，故机器人系统总动能：

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(q) \dot{\mathbf{q}} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_{C_i}^T m_i \mathbf{v}_{C_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{C_i}^T I_{C_i} \boldsymbol{\omega}_{C_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{v_{C_i}}^T m_i \mathbf{J}_{v_{C_i}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\omega_{C_i}}^T I_{C_i} \mathbf{J}_{\omega_{C_i}} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n [\mathbf{J}_{v_{C_i}}^T m_i \mathbf{J}_{v_{C_i}} + \mathbf{J}_{\omega_{C_i}}^T I_{C_i} \mathbf{J}_{\omega_{C_i}}] \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

$V(q, \dot{q})$

- 记号： $b_{i,j,k} = b_{j,i,k} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}$, $c_{i,j,k} = b_{i,j,k} + b_{i,k,j}$, $c_{ijk} = \frac{1}{2}(b_{i,j,k} + b_{i,k,j} - b_{j,k,i})$ 。
- 总体：

$$V(q, \dot{q}) = \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

- 前者：

$$\dot{\mathbf{M}}(q) = \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & \cdots & m'_{1n} \\ m'_{21} & m'_{22} & \cdots & m'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m'_{n1} & m'_{n2} & \cdots & m'_{nn} \end{bmatrix}$$

令 $\dot{\mathbf{M}}(q) \dot{\mathbf{q}} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]^T$ ，其中 $p_i = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n \frac{\partial m_{ix}}{\partial q_y} \dot{q}_x \dot{q}_y$ ， $x=y$ 的项对应离心力， $x \neq y$ 的项对应科里奥利力。可转化为：

$$\dot{\mathbf{M}}(q) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} b_{1,1,1} & b_{1,2,2} & \cdots & b_{1,n,n} \\ b_{2,1,1} & b_{2,2,2} & \cdots & b_{2,n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1,1} & b_{n,2,2} & \cdots & b_{n,n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{1,12} & c_{1,13} & \cdots & c_{1,n-1n} \\ c_{2,12} & c_{2,13} & \cdots & c_{2,n-1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,12} & c_{n,13} & \cdots & c_{n,n-1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

- 后者：

$$\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_i} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n \frac{\partial m_{xy}}{\partial q_i} \dot{q}_x \dot{q}_y = \begin{bmatrix} b_{1,1,i} \\ b_{2,2,i} \\ \vdots \\ b_{n,n,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_{1,2,i} \\ 2b_{1,3,i} \\ \vdots \\ 2b_{n-1,n,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

故:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1,1} & b_{2,2,1} & \cdots & b_{n,n,1} \\ b_{1,1,2} & b_{2,2,2} & \cdots & b_{n,n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,1,n} & b_{2,2,n} & \cdots & b_{n,n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} b_{1,2,1} & b_{1,3,1} & \cdots & b_{n-1,n,1} \\ b_{1,2,2} & b_{1,3,2} & \cdots & b_{n-1,n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,2,n} & b_{1,3,n} & \cdots & b_{n-1,n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

• 整合:

$$V(q, \dot{q}) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{111} & c_{122} & \cdots & c_{1nn} \\ c_{211} & c_{222} & \cdots & c_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n11} & c_{n22} & \cdots & c_{nnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix}}_{\text{离心力 } c(q) \dot{q}^2} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} c_{112} & c_{113} & \cdots & c_{1(n-1)n} \\ c_{212} & c_{213} & \cdots & c_{1(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n12} & c_{n13} & \cdots & c_{n(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{bmatrix}}_{\text{科里奥利力 } B(q) \dot{q} \dot{q}}$$

$G(q)$

求解连杆*i*势能时，将其质心位置矢量投影到重力方向。对各连杆势能求和，得到：

$$G(q) = - \sum_{i=1}^n m_i J_{v_{C_i}}^T g$$

步骤

1. 各连杆质心位置矢量 P_{C_i} 。
2. 各连杆质心处雅可比 $J_{v_{C_i}}, J_{\omega_{C_i}}$ 。
3. 惯性阵 $M(q) = \sum_{i=1}^n [J_{v_{C_i}}^T m_i J_{v_{C_i}} + J_{\omega_{C_i}}^T I_{C_i} J_{\omega_{C_i}}]$ ，需检查 m_{ii} 是否合理。
4. 惯性力 $V(q, \dot{q})$:

a) $b_{i,j,k} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}, c_{ijk} = \frac{1}{2}(b_{i,j,k} + b_{i,k,j} - b_{j,k,i})$ 。

b) $V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{111} & c_{122} & \cdots & c_{1nn} \\ c_{211} & c_{222} & \cdots & c_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n11} & c_{n22} & \cdots & c_{nnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} c_{112} & c_{113} & \cdots & c_{1(n-1)n} \\ c_{212} & c_{213} & \cdots & c_{1(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n12} & c_{n13} & \cdots & c_{n(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{bmatrix}。$

5. 重力 $G(q) = - \sum_{i=1}^n m_i J_{v_{C_i}}^T g$ 。

6. 标准形式: $\Gamma = M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q)$ 。

7.2 动力学求解

以下采用拉格朗日动力学方程法进行求解。部分计算较为繁琐，使用MATLAB Symbolic Math Toolbox进行符号运算，代码请见附录代码2。

1. 关节位置矢量 P_i :

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & P_2 &= \begin{bmatrix} 225c_1 & 225s_1 & 41 \end{bmatrix}^T \\ P_3 &= \begin{bmatrix} 275c_{12} + 225c_1 & 275s_{12} + 225s_1 & 58 \end{bmatrix}^T & P_4 &= \begin{bmatrix} 275c_{12} + 225c_1 & 275s_{12} + 225s_1 & -d_4 + 58 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

2. 连杆质心位置矢量 P_{C_i} : 连杆1质心位于关节1,2中点, 连杆2质心位于关节2,3中点, 连杆3质心与关节3重合, 连杆4质心位于关节3,4中点。

$$\begin{aligned} P_{C_1} &= \begin{bmatrix} 112.5c_1 & 112.5s_1 & 20.5 \end{bmatrix}^T & P_{C_2} &= \begin{bmatrix} 137.5c_{12} + 225c_1 & 137.5s_{12} + 225s_1 & 49.5 \end{bmatrix}^T \\ P_{C_3} &= \begin{bmatrix} 275c_{12} + 225c_1 & 275s_{12} + 225s_1 & 58 \end{bmatrix}^T & P_{C_4} &= \begin{bmatrix} 275c_{12} + 225c_1 & 275s_{12} + 225s_1 & -\frac{d_4}{2} + 58 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

3. 连杆质心处雅可比 $J_{v_{C_i}}, J_{\omega_{C_i}}$:

$$\begin{aligned} J_{v_{C_1}} &= \frac{\partial P_{C_1}}{\partial q} = \begin{bmatrix} -112.5s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 112.5c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J_{\omega_{C_1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_{v_{C_2}} &= \frac{\partial P_{C_2}}{\partial q} = \begin{bmatrix} -137.5s_{12} - 225s_1 & -137.5s_{12} - 225s_1 & 0 & 0 \\ 137.5c_{12} + 225c_1 & 137.5c_{12} + 225c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J_{\omega_{C_2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_{v_{C_3}} &= \frac{\partial P_{C_3}}{\partial q} = \begin{bmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} - 225s_1 & 0 & 0 \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} + 225c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J_{\omega_{C_3}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ J_{v_{C_4}} &= \frac{\partial P_{C_4}}{\partial q} = \begin{bmatrix} -275s_{12} - 225s_1 & -275s_{12} - 225s_1 & 0 & 0 \\ 275c_{12} + 225c_1 & 275c_{12} + 225c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & J_{\omega_{C_4}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 惯性阵 $M(q)$:

$$M(q) = \sum_{i=1}^4 [J_{v_{C_i}}^T m_i J_{v_{C_i}} + J_{\omega_{C_i}}^T I_{C_i} J_{\omega_{C_i}}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1361250 \cos(q_2) + 2085756 & 1361250 \cos(q_2) + \frac{2905687}{2} & 11 & 0 \\ 1361250 \cos(q_2) + \frac{2905687}{2} & 1361250 \cos(q_2) + \frac{2905687}{2} & 11 & 0 \\ 11 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

其是正定对称阵, 且 m_{ii} 只与 $q_j, j > i$ 相关。

5. 惯性力 $V(q, \dot{q})$:

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -1361250 \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 680625 \sin(q_2) & -680625 \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \\ \dot{q}_4^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -680625 \sin(q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_4 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_4 \\ \dot{q}_3 \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

6. 重力 $G(q)$:

$$G(q) = - \sum_{i=1}^4 m_i J_{v_{C_i}}^T g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}g \end{bmatrix}^T$$

7. 标准形式:

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q)$$

$$= \begin{bmatrix} 1361250 \cos(q_2) + 2085756 & 1361250 \cos(q_2) + \frac{2905687}{2} & 11 & 0 \\ 1361250 \cos(q_2) + \frac{2905687}{2} & 1361250 \cos(q_2) + \frac{2905687}{2} & 11 & 0 \\ 11 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -1361250 \sin(q_2) \\ 680625 \sin(q_2) & -680625 \sin(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} - 1361250 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}g \end{bmatrix}^T$$

8 机器人控制方法调研

参考大模型提供的调研方向，就机器人控制近五年的研究进展进行查找（仅在IEEE上进行了搜索）和阅读，并特别补充了南开师生参与（标绿项）的研究成果。由于理解能力有限，仅就各文献的摘要内容作以总结。

8.1 人形机器人控制（Control for Humanoid Robots）

实现高自由度人形机器人的精细化运动控制，包括步态生成、平衡保持、动态运动优化等。

MIT的学者[1]就他们推出的机器人，提出了规划器和控制器以实现跳跃、翻转。

Yang, Yuwei等人[2]提出了适用于轮式人形机器人的全身阻抗控制方法，利用模糊自适应系统补偿不确定动态特性。

Dantec等人[3]聚焦双足机器人的预测控制器，提出了基于差分动态规划的全身模型预测控制方案。

Ju, Fengjia等人[4]聚焦移动型仿人上肢机器人双臂末端执行器的耦合性，基于冗余度机械臂伪逆方法，提出了运动学解耦的全身控制方法，充分释放了高冗余度的应用潜力。

Hiraoka等人[5]就真人大小的人形机器人的全身扭矩控制问题，提出了分层控制方法。

8.2 软体机器人驱动与控制（Soft Robot Actuation and Control）

利用气动人工肌肉（Pneumatic Artificial Muscle, PAM）、扭曲卷曲型人造肌肉（Twisted and Coiled Artificial Muscle, TCAM）等软体驱动器，可以提升柔顺性与适应性，常用于人机交互场景，其核心问题是迟滞逆补偿（Hysteresis Inverse Compensation）。

Liang, Dingkun等人[6]提出了适用于人形PAM手臂机器人的自适应模糊滑模控制方法，无需任何精确的模型结构和系统参数信息，能够抑制干扰并实现高性能的跟踪控制。

Tang, Haoqi等人[7]设计了基于强化学习的鲁棒控制器，将气动执行器的迟滞效应排除在闭环控制之外，并利用逆补偿器精确规划控制目标，实现有效而鲁棒的被动柔顺装置。

Li, Zhiyuan等人[8]研制了气缸驱动的柔性磨削装置，提出惯性元件与饱和模型串联的改进PI迟滞模型，相较传统模型改善了迟滞曲线的拟合结果。

Zhu, Wenxin等人[9]基于一对拮抗McKibben肌肉驱动软体康复机器人，开发了滑模变刚度控制器。

Liu, Jidong等人[10]针对非对称全状态约束的气动执行器驱动的柔性磨削装置（CGD），开发了带滞后补偿的规划与带神经状态观测器的控制方案，验证了有效性和鲁棒性。

8.3 多机器人协同控制（Multi-Robot Cooperative Control）

提升机器人集群在动态环境中的自主导航、避障与任务分配能力，涉及非对称自博弈（Asymmetric Self-Play），需要分布式运动规划。

Doerr等人[11]基于大型机器人群体控制的诸多挑战，包括机器人数量、群体功能不确定性以及群体配置不确定性等，提出了分散基于随机有限集（RFS）的大型协作群体控制。

Youssef等人[12]针对多智能体深度确定性策略梯度（MADDPG）算法在解决多机器人群集控制问题时存在的高估偏差等问题，提出了多智能体双延迟深度确定性策略梯度（MATD₃），并使用时间差分误差优先的重放缓冲区来实现高效学习。

Shi, Andong等人[13]提出了“巡检-清除”模型和基于时间窗约束的扩展共识捆绑算法CBBA，有效解决了机场跑道背景下的巡检机器人和清除机器人的协同问题。

Li, Silan等人[14]针对多机器人系统在随机链路故障网络环境下的控制问题，提出了多机器人群集的离散时间控制模型，将信息传输中固有的不稳定性描述为伯努利变量。与现有控制器相比，所需信息交换更少，易于实现。

Luo, Yiting等人[15]研究了非对称信息结构的领导者-追随者自主水下机器人集群的控制问题，采用正交分解方法，推导了最优分散控制策略。

8.4 其它

Lu, Biao等人[16]针对轮式双足机器人（WBR）的跑跳运动规划和控制，将其分解为三个阶段：准备、腾空和恢复，实现了跑跳模式间的无缝过渡。

Mulkana等人[17]关注强化学习训练的协作机器人在现实环境中与人类交互的安全性，提出了改进屏蔽强化学习模型。

9 总结

在本次作业的学习中，从坐标系构建、正逆运动学求解、雅可比求解到动力学求解，全流程地实现了机器人的建模分析。作业针对3RP SCARA机器人展开，相比于习题作业，其自

由度更多，相较复杂，但在求解和MATLAB Robot Toolbox仿真验证的交叉过程下，获得了完整的结果。

在调研机器人控制方法的近年研究现状时，从人形机器人、软体机器人、多机器人协同三个方面展开搜索和学习，并补充了其它小点。综合发现，强化学习在机器人控制中扮演了很重要的角色，在理论证明时多采用李雅普诺夫方法，之后需要进行仿真或实际实验来验证。另外，经过粗略的搜索统计，发现南开师生在机器人控制领域的研究成果多集中于软体机器人的驱动与控制，可能在这个方面是学界的领军人物。

附录

Listing 1: SCARA

```

1 clc; clear;
%% 机器人模型（改进DH参数）
L1 = Revolute('d', 0, 'a', 0, 'alpha', 0, 'modified');
L2 = Revolute('d', 41, 'a', 225, 'alpha', 0, 'modified');
L3 = Revolute('d', 17, 'a', 275, 'alpha', 0, 'modified');
6 L4 = Prismatic('theta', 0, 'a', 0, 'alpha', pi, 'modified', 'qlim', [102, 302]);
robot = SerialLink([L1, L2, L3, L4]); % 串联
robot.name = '3RP SCARA';
robot.display();
%% 正运动学
11 % 随机生成关节变量
thetaConfig = randn(1, 4);
q1 = thetaConfig(1);
q2 = thetaConfig(2);
q3 = thetaConfig(3);
16 d4 = thetaConfig(4)*200 + 102;
thetaConfig = [q1, q2, q3, d4];
% 理论推导
T_theoretical = [cos(q1+q2+q3), sin(q1+q2+q3), 0, 275*cos(q1+q2) + 225*cos(q1);
                sin(q1+q2+q3), -cos(q1+q2+q3), 0, 275*sin(q1+q2) + 225*sin(q1);
21                0, 0, -1, -d4 + 58;
                0, 0, 0, 1];

disp('===== 理论推导求解正运动学 =====');
disp(T_theoretical);
% 工具箱求解
26 T_toolbox = robot.fkine(thetaConfig);
disp('===== 工具箱求解正运动学 =====');
disp(T_toolbox);
disp('===== 工具箱求解正运动学（保留小数点后四位） =====');
Tmat = T_toolbox.T; % 提取矩阵，保留小数点后四位
31 Tmat_4 = round(Tmat, 4);
disp(Tmat_4);

```

```

%% 逆运动学
% 提取计算信息
Px = T_toolbox.t(1);
36 Py = T_toolbox.t(2);
Pz = T_toolbox.t(3);
r11 = T_toolbox.n(1);
r21 = T_toolbox.n(2);
denominator = Px^2 + Py^2;
41 if abs(denominator - 126250) > 123750
    error('超出工作空间, 无解');
end
% q2 (双解)
radicand = (Px^2 + Py^2 - 126250) / 123750;
46 q2_sol1 = acos(radicand);
q2_sol2 = -acos(radicand);
% q1
[sin_q2_1, cos_q2_1] = deal(sin(q2_sol1), cos(q2_sol1));
s1_sol1 = ((275*cos_q2_1 + 225)*Py - 275*Px*sin_q2_1) / denominator;
51 c1_sol1 = ((275*cos_q2_1 + 225)*Px + 275*Py*sin_q2_1) / denominator;
q1_sol1 = atan2(s1_sol1, c1_sol1);
[sin_q2_2, cos_q2_2] = deal(sin(q2_sol2), cos(q2_sol2));
s1_sol2 = ((275*cos_q2_2 + 225)*Py - 275*Px*sin_q2_2) / denominator;
c1_sol2 = ((275*cos_q2_2 + 225)*Px + 275*Py*sin_q2_2) / denominator;
56 q1_sol2 = atan2(s1_sol2, c1_sol2);
% q3
q3_sol1 = atan2(r21, r11) - q1_sol1 - q2_sol1;
q3_sol2 = atan2(r21, r11) - q1_sol2 - q2_sol2;
% d4
61 d4_sol = 58 - Pz;
disp('==== 原始关节输入 ====');
fprintf('[θ1=%.4f, θ2=%.4f, θ3=%.4f, d4=%.4f]\n', thetaConfig);
% 代数法求解
inverseSolution1 = [q1_sol1, q2_sol1, q3_sol1, d4_sol];
66 inverseSolution2 = [q1_sol2, q2_sol2, q3_sol2, d4_sol];
disp('==== 代数法求解逆运动学 ====');
fprintf('解1:  [θ1=%.4f, θ2=%.4f, θ3=%.4f, d4=%.4f]\n', inverseSolution1);

```

```

fprintf('解2:  [θ1=%.4f, θ2=%.4f, θ3=%.4f, d4=%.4f]\n', inverseSolution2);
% 工具箱求解
71 q = [0 0 0 0]; % 初始猜测
q_toolbox = robot.ikunc(T_toolbox, q); % 接近初始猜测的一个解
disp('==== 工具箱求解逆运动学 ====');
disp(q_toolbox);
% 可视化（防止覆盖，立即保存）
76 xyzlim = [-500 500 -500 500 -500 500]; % 坐标轴范围
figure;
robot.plot(thetaConfig);
title('构型可视化');
saveas(gcf, '构型可视化.png');
81 figure;
robot.plot(inverseSolution1);
title('代数法1');
saveas(gcf, '代数法1.png');
figure;
86 robot.plot(inverseSolution2);
title('代数法2');
saveas(gcf, '代数法2.png');
figure;
robot.plot(q_toolbox);
91 title('工具箱求解');
saveas(gcf, '工具箱求解.png');

```

Listing 2: cal

```

clc; clear;
%% 信息
3 % 定义符号变量
syms q1 q2 q3 q4 real
syms m1 m2 m3 m4 real
syms I1xx I1yy I1zz real
syms I2xx I2yy I2zz real
8 syms I3xx I3yy I3zz real
syms I4xx I4yy I4zz real
syms g real

```

```

c1 = cos(q1);
s1 = sin(q1);
13 c12 = cos(q1+q2);
s12 = sin(q1+q2);
% 实际参数
n = 4; % 自由度
m1_val = 50;    m2_val = 10;    m3_val = 1;    m4_val = 5;
18 % 转动惯量矩阵
I1xx_val = 50; I1yy_val = 50; I1zz_val = 100;
I2xx_val = 10; I2yy_val = 10; I2zz_val = 20;
I3xx_val = 1;  I3yy_val = 1;  I3zz_val = 1;
I4xx_val = 5;  I4yy_val = 5;  I4zz_val = 10;
23 Ic1 = diag([I1xx, I1yy, I1zz]);
Ic2 = diag([I2xx, I2yy, I2zz]);
Ic3 = diag([I3xx, I3yy, I3zz]);
Ic4 = diag([I4xx, I4yy, I4zz]);
%% 雅可比 (质心)
28 % 连杆1
Jv1 = [-112.5*s1, 0, 0, 0;
        112.5*c1, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 0];
Jw1 = [0, 0, 0, 0;
33       0, 0, 0, 0;
        1, 0, 0, 0];
% 连杆2
Jv2 = [-137.5*s12 - 225*s1, -137.5*s12 - 225*s1, 0, 0;
        137.5*c12 + 225*c1, 137.5*c12 + 225*c1, 0, 0;
38       0, 0, 0, 0];
Jw2 = [0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 0;
        1, 1, 0, 0];
% 连杆3
43 Jv3 = [-275*s12 - 225*s1, -275*s12 - 225*s1, 0, 0;
        275*c12 + 225*c1, 275*c12 + 225*c1, 0, 0;
        0, 0, 0, 0];
Jw3 = [0, 0, 0, 0];

```

```

    0, 0, 0, 0;
48    1, 1, 1, 0];
% 连杆4
Jv4 = [-275*s12 - 225*s1, -275*s12 - 225*s1, 0, 0;
        275*c12 + 225*c1, 275*c12 + 225*c1, 0, 0;
        0, 0, 0, -0.5];
53 Jw4 = [0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 0;
        1, 1, 1, 0];
%% M
M = sym(zeros(4,4));
58 M = M + simplify(Jv1' * m1 * Jv1 + Jw1' * Ic1 * Jw1 + Jv2' * m2 * Jv2 + Jw2' * Ic2 *
    Jw2 + Jv3' * m3 * Jv3 + Jw3' * Ic3 * Jw3 + Jv4' * m4 * Jv4 + Jw4' * Ic4 * Jw4);
M = subs(M, [m1, m2, m3, m4, ...
    I1xx, I1yy, I1zz, ...
    I2xx, I2yy, I2zz, ...
    I3xx, I3yy, I3zz, ...
63    I4xx, I4yy, I4zz], ...
    [m1_val, m2_val, m3_val, m4_val, ...
    I1xx_val, I1yy_val, I1zz_val, ...
    I2xx_val, I2yy_val, I2zz_val, ...
    I3xx_val, I3yy_val, I3zz_val, ...
68    I4xx_val, I4yy_val, I4zz_val]);
disp('M:');
pretty(M)
%% V
%  $b_{\{i,j,k\}} = \partial m_{\{ij\}} / \partial q_k$ 
73 b = sym(zeros(n, n, n));
for i = 1:n
    for j = 1:n
        for k = 1:n
            b(i, j, k) = diff(M(i, j), ['q' num2str(k)]);
78        end
    end
end
end
%  $c_{\{ijk\}} = 1/2 * (b_{\{i,j,k\}} + b_{\{i,k,j\}} - b_{\{j,k,i\}})$ 

```



```

c = sym(zeros(n, n, n));
83 for i = 1:n
    for j = 1:n
        for k = 1:n
            c(i, j, k) = 0.5 * (b(i, j, k) + b(i, k, j) - b(j, k, i));
        end
88    end
end
% 系数矩阵格式
C_squared = sym(zeros(n,n));
93 for i = 1:n
    for j = 1:n
        C_squared(i,j) = c(i,j,j);
    end
end
C_cross = sym(zeros(n, n*(n-1)/2));
98 col = 1;
for j = 1:n-1
    for k = j+1:n
        for i = 1:n
            C_cross(i,col) = c(i,j,k);
103        end
        col = col + 1;
    end
end
disp('V:');
108 pretty(C_squared)
pretty(C_cross)
%% G
gravity = [0; 0; g];
G = (-m1_val * Jv1' - m2_val * Jv2' - m3_val * Jv3' - m4_val * Jv4') * gravity;
113 disp('G:');
pretty(G)

```

参考文献

- [1] Matthew Chignoli, Donghyun Kim, Elijah Stanger-Jones, and Sangbae Kim. The mit humanoid robot: Design, motion planning, and control for acrobatic behaviors. In *2020 IEEE-RAS 20th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pages 1–8, 2021.
- [2] Yuwei Yang, Xiaoyu Wu, Bo Song, and Zhijun Li. Whole-body fuzzy based impedance control of a humanoid wheeled robot. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 7(2):4909–4916, 2022.
- [3] Ewen Dantec, Maximilien Naveau, Pierre Fernbach, Nahuel Villa, Guilhem Saurel, Olivier Stasse, Michel Taix, and Nicolas Mansard. Whole-body model predictive control for biped locomotion on a torque-controlled humanoid robot. In *2022 IEEE-RAS 21st International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pages 638–644, 2022.
- [4] Fengjia Ju, Hongzhe Jin, and Jie Zhao. A kinematic decoupling whole-body control method for a mobile humanoid upper body robot. In *2023 International Conference on Frontiers of Robotics and Software Engineering (FRSE)*, pages 85–90, 2023.
- [5] Takuma Hiraoka, Shimpei Sato, Naoki Hiraoka, Annan Tang, Kunio Kojima, Kei Okada, Masayuki Inaba, and Koji Kawasaki. Whole-body torque control without joint position control using vibration-suppressed friction compensation for bipedal locomotion of gear-driven torque sensorless humanoid. In *2023 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 8544–8550, 2023.
- [6] Dingkun Liang, Ning Sun, Yiming Wu, Gendi Liu, and Yongchun Fang. Fuzzy-sliding mode control for humanoid arm robots actuated by pneumatic artificial muscles with unidirectional inputs, saturations, and dead zones. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 18(5):3011–3021, 2022.
- [7] Haoqi Tang, Zhuoqing Liu, Tong Yang, Lei Sun, Yongchun Fang, Xingjian Jing, and Ning Sun. Reinforcement-learning-based robust force control for compliant grinding via inverse hysteresis compensation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 28(6):3364–3375, 2023.

- [8] Zhiyuan Li, Jidong Liu, Wanbiao Lin, and Lei Sun. Hysteresis fitting for grinding robots based on compliant device force control. In *2023 42nd Chinese Control Conference (CCC)*, pages 6993–6997, 2023.
- [9] Wenxin Zhu, Maotong Cheng, Yilin Lang, and Qinyuan Ren. Variable stiffness control of a soft rehabilitation robot with sliding mode method. In *2023 35th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 1514–1519, 2023.
- [10] Jidong Liu, Lu Zhou, Ben Niu, and Lei Sun. Removing feasibility conditions on force control for a compliant grinding device with asymmetric full-state constraints and hysteresis nonlinearity. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, pages 1–12, 2024.
- [11] Bryce Doerr and Richard Linares. Decentralized control of large collaborative swarms using random finite set theory. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 8(2):587–597, 2021.
- [12] Mario Salama Youssef, Nouran Adel Hassan, and Ayman El-Badawy. Multi-robot flocking control using multi-agent twin delayed deep deterministic policy gradient. In *2022 19th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–5, 2022.
- [13] Andong Shi, Shilei Cheng, Lei Sun, and Jingtai Liu. Multi-robot task allocation for airport runway inspection. In *2022 34th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 5631–5636, 2022.
- [14] Silan Li, Shengyu Zhang, Guojun He, and Tao Jiang. Discrete-time flocking control in multi-robot systems with random link failures. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 73(9):12290–12304, 2024.
- [15] Yiting Luo, Shuai Liu, Qingyuan Qi, and Yue Sun. Optimal decentralized control for leader-follower autonomous underwater vehicle swarm with asymmetric information structure. In *2024 IEEE International Conference on Unmanned Systems (ICUS)*, pages 1480–1485, 2024.
- [16] Biao Lu, Haixin Cao, Yunsong Hao, Yongchun Fang, and Shuang Tang. A planning and control scheme for the run-and-jump motion of a wheeled bipedal robot considering dynamic constraints. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pages 1–12, 2025.

- [17] Sundas Rafat Mulkana. Safe reinforcement learning for collaborative robots in dynamic human environments. In *2024 12th International Conference on Affective Computing and Intelligent Interaction Workshops and Demos (ACIIW)*, pages 61–65, 2024.