

# 智能工程

# 目 录

1	基础知识	5	4.1	运动控制	15
2	机器人运动形态	6	4.2	定点控制器	16
2.1	移动机器人	6	4.3	轨迹跟踪控制器	18
2.2	腿式机器人	6	4.4	路径跟踪控制器	19
2.2.1	腿式机器人	6	5	机器人感知与定位建图	19
2.2.2	四足机器人	7	5.1	传感器	19
2.2.3	双足机器人	7	5.2	光电传感器	20
2.3	轮式机器人	8	5.2.1	概述	20
3	机器人运动学	8	5.2.2	编码器	20
3.1	运动学模型	8	5.3	里程计	21
3.2	车轮	9	5.3.1	里程计模型	21
3.3	运动学建模	10	5.3.2	里程计误差	22
3.3.1	空间描述与状态表达	10	5.4	激光传感器	24
3.3.2	ICR法	11	5.5	点云匹配与定位	24
3.3.3	约束方程法	11	5.6	卡尔曼滤波	24
3.3.4	例子	13	5.7	蒙特卡洛定位	24
3.4	自由度	14	5.8	SLAM	24
4	机器人运动控制	15	6	机器人轨迹规划	24
			7	附录	24
			7.1	误差转化展示	24

图 片

图 1	课程内容 . . . . .	5	图 4	瞬心 . . . . .	11
图 2	两轮差速机器人模型 . . . . .	5	图 5	约束方程 . . . . .	12
图 3	车轮类型 . . . . .	9	图 6	两轮差速机器人正运动学建模 . . . . .	13
			图 7	运动控制器 . . . . .	15
			图 8	里程计建模方法 . . . . .	22
			图 9	里程计误差转化展示 . . . . .	24

表 格

表 1	课程内容 . . . . .	5	表 2	双足机器人方案对比 . . . . .	7
			表 3	车轮类型对比 . . . . .	9
			表 4	约束方程 . . . . .	12

要 点

要点 1 腿式机器人稳定性 . . . . . 7

要点 2 腿式机器人步态 . . . . . 7

要点 3 双足机器人运动机理 . . . . . 7

要点 4 非完整约束 . . . . . 8

要点 5 车轮类型 . . . . . 9

要点 6 ICR法运动学建模 . . . . . 11

要点 7 约束方程法运动学建模 . . . . . 11

要点 8 自由度分类 . . . . . 14

要点 9 定点控制器 . . . . . 16

要点 10 轨迹跟踪控制器 . . . . . 18

要点 11 路径跟踪控制器 . . . . . 19

要点 12 编码器 . . . . . 20

1 基础知识

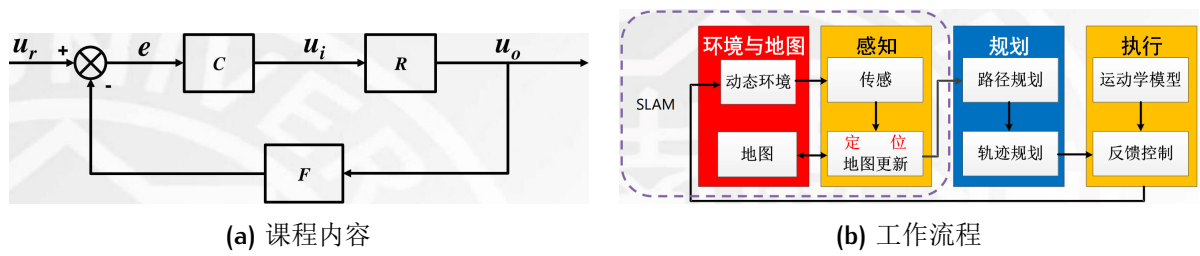


图 1: 课程内容

	$u_i$	$u_o$	R	F	$u_r$	$e$	C
概念	系统输入	系统输出	系统模型	反馈单元	系统给定	系统误差	控制器
含义	能对被控对象施加作用的手段	作业目标相应的可测系统状态	系统输入输出映射	系统输出映射变换	系统作业目标	作业目标与系统当前测量状态差值	系统误差与输入映射
内容	机器人运动学			机器人控制		机器人感知	机器人轨迹规划

表 1: 课程内容

课程内容

课程案例 移动机器人->轮式机器人->两轮差速机器人。

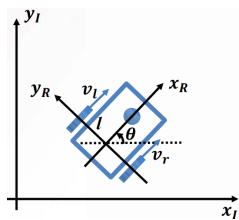


图 2: 两轮差速机器人模型

- 车轮半径 $r$ 。
  - 两轮转速 $\varphi_l, \varphi_r$ :  $v_i = \varphi_i r$ 。
  - 车轮到两轮中间点距离 $l$ 。
1. 求正运动学模型3.3.4。
  2. 设计运动控制器4.1。
  3. 里程计模型5.3.1。

## 2 机器人运动形态

### 2.1 移动机器人

#### 自然界运动形态特点

- 能量利用率高。
- 适应野外复杂环境。
- 与身体尺寸、结构相适应。
- 运行速度高。

#### 机器人实现自然界运动形态问题

- 机械结构、能量密度、感知与控制决策能力困难。
- 安全性、可靠性差。
- 成本高。
- 于人造环境低效。

**运动 (LOCOMOTION)**      机器人与环境的物理交互方式。

- 稳定性。
- 接触特性。
- 环境特性。

### 2.2 腿式机器人

#### 2.2.1 腿式机器人

#### 研究意义

- 复杂恶劣环境的高适应性。
- 点接触的高通过能力。
- 控制多自由度、实时感知环境的高实现难度。

#### 腿数影响

- 机构复杂度。
- 控制复杂度。
- 环境适应性：腿越多，通过性越好，环境适应性越强。

- 系统稳定性 <sup>1</sup>：腿数增加，由动态稳定向静态稳定过度。
  - 动态稳定：执行器停止工作摔倒。运动过程中通常半数腿离地。
  - 静态稳定：执行器停止工作不摔倒。点接触需保证三腿同时着地，面接触需保证一条腿着地。

**运动规划**    运动学+动力学。

**步态** <sup>2</sup>    一个行进周期内各腿抬落组合，k腿机器人的步态模式数量为 $N = (2^k - 1)!$ 。

**单位距离能耗**     $COT = \frac{\text{消耗能量}}{\text{重量} \times \text{运行距离}}$ 。

2.2.2 四足机器人

- 点接触：每条腿至少需要两个自由度，执行器较少，没有冗余。
- 行走（静态平衡）：一次移动一条腿，剩下腿支持身体，重心落在支持多边形内。适合攀爬，速度低，能效低。
- 奔跑（动态平衡）：一次移动多条腿，平衡建立在周期运动上。速度高，能效高，需要实时控制与执行。

2.2.3 双足机器人

方案	国家	基础方式	重心	速度	环境适应性	能效
静态稳定	日本	面接触	左右变换	低	差	低
动态稳定	美国	点接触	适时调整	高	强	高

表 2: 双足机器人方案对比

两种方案

**动态稳定运动机理** <sup>3</sup>

- 倒立摆模型：类似纯滚动，步距越小越趋于圆。步态不自然，重心变化（需做功），落地冲击大。
- 无源动态行走：摆动与向前摔落结合，势能转化为动能。

- 弹簧负载倒立摆 (SLIP): 仿照动物腿肌肉, 增加弹簧缓冲并储存能量。周期往复运动对称, 动态稳定性可由庞加莱变换线性化后验证, 条件为 $\lambda < 1$  (PPT.2.34-43)。
- 串联弹性驱动 (SEA): 更为高效, 更符合生物自然属性, 基于运动学的位置控制, 基于动力学的力矩控制。可由其获得稳定平台 (PPT.2.48-50)。

## 2.3 轮式机器人

### 研究意义

- 人造环境下高效: 滚动摩擦, 无重心起伏。
- 结构简单, 可靠性高, 成本低。
- 控制简单, 系统复杂度低。

**轮数对稳定性的影响** 轮数增加, 由动态稳定向静态稳定过度。

- 动态稳定: 执行器停止工作摔倒。倒立摆模型。
- 静态稳定: 执行器停止工作不摔倒。陀螺效应, 随动轮效应。

## 3 机器人运动学

### 3.1 运动学模型

表征机器人驱动 (输入) 和机器人空间位姿 (输出) 的关系。

#### 机械臂与移动机器人在运动学模型上的区别

- 机械臂本体坐标系固定, 精度高; 移动机器人本体坐标系随动, 精度低。
- 非完整约束 <sup>4</sup>: 移动机器人只知道码盘变化量无法获取位姿, 状态取决于路径。这来源于不可积的微分约束 (车轮侧向滑动约束)。
- 微分运动学 (Differential Kinematics): 速度空间替代位置空间。



3.2 车轮

类型 5

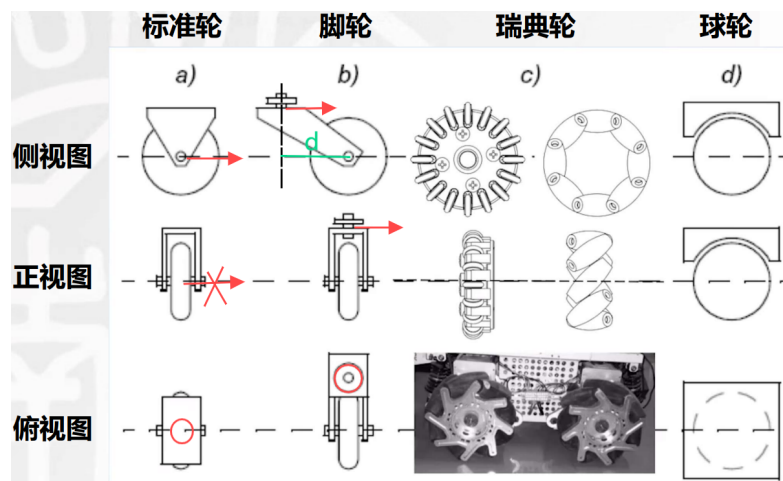


图 3: 车轮类型

类型	自由度	约束	分类/特点
标准轮 (Standard wheel)	2 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动	1 沿轮轴滑动	标准固定轮（无法旋转，只有一个自由度） 标准转向轮（舵轮）
脚轮 (Castor wheel)	3 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动 沿路轴运动	0	偏心距 $d$ ：触地点到垂直旋转轴距离。 扭矩压力，易损坏。
瑞典轮 (Swedish wheel)	3 沿轮平面滚动（被动） 沿轮轴转动（主动） 沿垂直轴转动（被动）	0	麦克纳姆轮（Macanum wheel）：45，至少需要4个共同使用。 连续切换轮：90，至少需要3个共同使用。 对地面冲击大，噪音大，易损坏，成本高。
球轮 (Spherical wheel)	3（全主动） 沿两个正交轮轴转动 沿垂直轴转动	0	成本高，可靠性差。

表 3: 车轮类型对比

## 选取

- 数量：至少三轮同时着地，才能保证静态稳定性。四轮可以提升稳定性，但需要适当的悬架系统。
- 大小：越大的轮子通过性越好，但需要更大的扭矩。
- 多数形态都有非完整约束。

## 3.3 运动学建模

### 3.3.1 空间描述与状态表达

#### 坐标系

- 惯性参考坐标系I：作业目标、控制指令、传感器感知测量信息。
- 机器人参考坐标系R：控制器误差输入、控制器控制指令。
- 笛卡尔坐标系：右手法则。

#### 位姿 (POSE)

位置空间求导得到速度空间：

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ \theta_I \end{bmatrix}, \xi_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{求导}} \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}, \dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

惯性参考坐标系旋转得到机器人参考坐标系：

$$\dot{\xi}_R = R\dot{\theta}\dot{\xi}_I$$

$$\text{旋转阵 } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 为单位正交阵, } R^T = R^{-1}。$$

### 3.3.2 ICR法 <sup>6</sup>

#### 瞬时旋转/曲率中心 (ICR)

刚体上各点角速度相同。

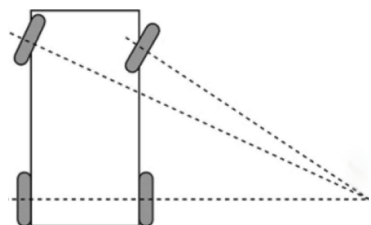


图 4: 瞬心

#### 步骤

1. 坐标系变换。
2. 确定约束。
3. 计算瞬心：各轮轮轴到该点距离与速度成正比。
4. 求解  $\xi_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R & \dot{y}_R & \dot{\theta}_R \end{bmatrix}^T$ 。

### 3.3.3 约束方程法 <sup>7</sup>

**要求** 在水平面上运动，车轮与地面点接触，不变形，安装在钢体表面，舵机转轴与地面垂直。



## 约束方程

**使用** 根据各轮主/随动状态列运动约束方程，得到最多三个独立约束方程（对应平面三维位姿）。

以下以N标准轮（ $N_f$ 个固定， $N_s$ 个转向）机器人为例：

- 滚动约束

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I - J_2\dot{\varphi} = 0$$

其中  $J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f}(N_f \times 3) \\ J_{1s}(\beta_s)_{(N_s \times 3)} \end{bmatrix}$ ,  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}$ ,  $J_2 = \text{diag}(r_1, \dots, r_N)$  为轮径对角阵。

- 滑动约束

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

其中  $C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f}(N_f \times 3) \\ C_{1s}(\beta_s)_{(N_s \times 3)} \end{bmatrix}$ 。

### 3.3.4 例子

以下以两轮差速机器人（见1）为例， $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ ：

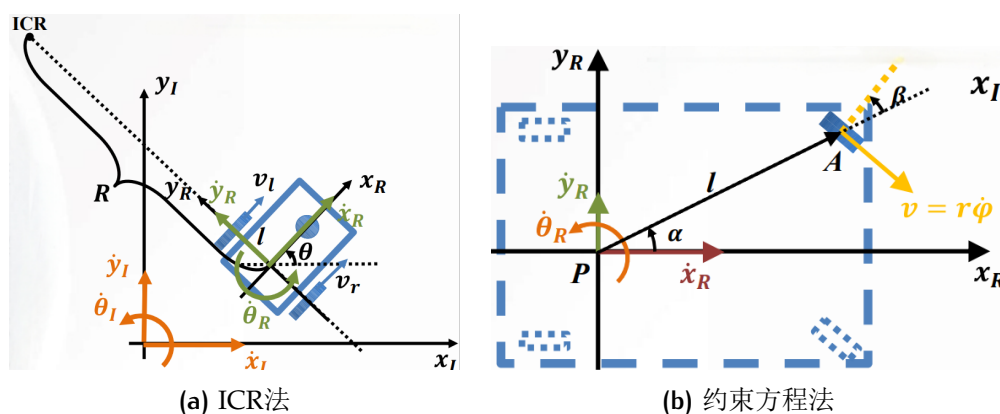


图 6: 两轮差速机器人正运动学建模

### ICR法

两轮差速机器人的瞬心在两轮轮轴上，设其到机器人两轮中间的距离为R，有：

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_R}{R} = \frac{\dot{\varphi}_l r}{R - l} = \frac{\dot{\varphi}_r r}{R + l}$$

解得  $R = \frac{\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l}{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}$ ，代回即可。

### 约束方程法

- 纯滚动:  $\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = r \dot{\phi}$ 。
- 无滑动:  $\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = 0$ 。

### 正运动学模型

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_l + \dot{\phi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{l} \end{bmatrix}$$

## 3.4 自由度

### 概念

- 衡量机器人改变运行状态的能力。
- 需满足实际作业需求，考虑实现成本。
- 机器人设计基础、算法依据（一般自由度相同的机器人可采用相同的控制和规划算法）。
- 平面运动机器人自由度最大不能超过3。

### 分类 8

- 移动度（Degree of Mobility） $\delta_m$ ：瞬时改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_m = \dim[C_1(\beta_s)] = 3 - \text{rank}[C_1(\beta_s)] \in [0, 3]$$

- 转向度（Degree of Steerability） $\delta_s$ ：间接改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_s = \text{rank}[C_{1s}(\beta_s)] \in [0, 2]$$

- 机动度（Degree of Maneuverability） $\delta_M$ ：改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

- 机动度相同，结构不一定相同。
- $\delta_M = 2$ ，瞬心位于一条直线上； $\delta_M = 3$ ，瞬心可分布于空间任何一点。

## 实例

- 全向机器人：
  - Type(3,0): 完整约束全方位移动机器人。
  - Type(2,1): 一个同心轮+两个瑞典轮。
  - Type(1,2): 多舵机全方位移动机器人。
- 非全向机器人：
  - Type(2,0): 差分移动机器人。
  - Type(1,1): 自动驾驶汽车（阿克曼转向）、自行车、叉车。

## 4 机器人运动控制

### 4.1 运动控制



图 7: 运动控制器

误差（惯性系下给定与反馈） $\xrightarrow{\text{变换}}$  输入（机器人系下控制输入）。

## 特点

- 大多存在滑动约束，是非完整系统，有侧向偏差和姿态偏差。
- 非线性，控制器设计复杂，还需要根据可获得的反馈信号选取，按顺序调节控制参数，并且不能同时实现定点控制和跟踪控制。
- 不存在能完成控制目标的连续时不变（静态）反馈控制率。
- 受标定精度影响大，且由于执行单元性能约束，控制输入要合理限幅。

## 分类

- 定点（镇定）控制（Regulation Control）：以指定姿态到达指定位置。
- 跟踪控制：
  - 轨迹跟踪控制（Trajectory Tracking Control）：跟随给定轨迹（包含速度、姿态信息）。
  - 路径跟踪控制（Path Tracking Control）：跟随给定路线。

**开环控制** 将运动轨迹分割成直线和圆弧，存在以下问题：

- 直线和圆弧的曲率不一致，不连续。
- 难以实现定义若干合适轨迹。
- 速度加速度约束。
- 无法自适应调整轨迹来面对环境变化。
- 所得轨迹不光滑。

**控制器性能评价** 取正定李雅普诺夫函数，其导数负定则系统渐进稳定。

**两轮差速机器人运动控制** 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_l + \dot{\phi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{变换}} \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

## 4.2 定点控制器 <sup>9</sup>

### 控制目标

机器人参考坐标系下误差  $e = [x \ y \ \theta]^T$ ,

设计控制阵  $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$ , 其中  $k_{ij} = k(t, e)$ ,

得到控制输入  $\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = Ke$ , 使  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。



## 误差信号转换

惯性系下，实际状态  $q = [x \ y \ \theta]^T$  与参考状态  $q_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$  之差为开环误差：

$$\tilde{q} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{\theta}]^T = [x - x_r \ y - y_r \ \theta - \theta_r]^T$$

### 1. 转换到机器人系

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = R(\theta)^T \tilde{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{闭环}} \dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = R(\theta) \dot{\tilde{q}} + R(\dot{\theta}) \tilde{q} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

### 2. 转换到极坐标系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \\ \beta = -\arctan 2(-\tilde{y}, -\tilde{x}) \\ \alpha = -\beta - \tilde{\theta} \end{cases} \xrightarrow{\text{闭环}} \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{\rho} & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{\rho} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

## 机器人系非线性控制器

$$\text{设计控制器} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}, \text{代入得} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}。$$

其有误差时扰动，效果不佳。

## 极坐标系线性控制器

$$\text{设计控制器} \begin{cases} v_1 = k_\rho \rho \\ v_2 = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \end{cases}, \text{代入得}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos \alpha \\ -k_\rho \sin \alpha \\ k_\rho \sin \alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \\ -k_\rho \alpha \\ k_\rho \alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix}$$

其中前两行非线性耦合，在  $\alpha \rightarrow 0$  时指数性稳定，非全局稳定。

### 极坐标系线性控制器

$$\text{设计控制器} \begin{cases} v_1 = k_\rho \rho \cos \alpha \\ v_2 = k_\alpha \alpha + \frac{k_\rho \sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} (\alpha - k_\beta \beta) \end{cases}, \text{代入得}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos \alpha \cos \alpha \\ -k_\rho \cos \alpha \sin \alpha \\ k_\rho \cos \alpha \sin \alpha - k_\alpha \alpha - \underbrace{\frac{k_\rho \sin \alpha \cos \alpha}{\alpha}}_{\alpha \rightarrow 0, \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1} (\alpha - k_\beta \beta) \end{bmatrix}$$

其全局渐近稳定。

## 4.3 轨迹跟踪控制器 10

### 控制目标与误差变换

惯性系下，实际轨迹  $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$  与参考轨迹  $q_r [x_r(t) \ y_r(t) \ \theta_r(t)]^T$  之差为开环误差：

$$\tilde{q}(t) = [\tilde{x}(t) \ \tilde{y}(t) \ \tilde{\theta}(t)]^T = [x(t) - x_r(t) \ y(t) - y_r(t) \ \theta(t) - \theta_r(t)]^T$$

控制目标为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$ 。

开环误差转换坐标系后求闭环误差，进而得到辅助误差信号：

$$e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{闭环}} \dot{e} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 e_2 - v_{1r} \cos e_3 \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ v_2 - v_{2r} \end{bmatrix}$$

### 控制器

$$\text{设计控制器} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_{1r} \cos e_3 \\ -v_{1r} \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_2 e_3 + v_{2r} \end{bmatrix}, \text{代入得}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ -k_2 e_3 - v_{1r} \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 \end{bmatrix}$$

## 4.4 路径跟踪控制器 11

### 控制目标与误差变换

惯性系下，实际路径 $q(s) = [x(s) \ y(s) \ \theta(s)]^T$ 与参考路径 $q_r [x_r(s) \ y_r(s) \ \theta_r(s)]^T$ 之差为开环误差：

$$\tilde{q}(s) = [\tilde{x}(s) \ \tilde{y}(s) \ \tilde{\theta}(s)]^T = [x(s) - x_r(s) \ y(s) - y_r(s) \ \theta(s) - \theta_r(s)]^T$$

其中 $s \in [0, 1]$ 为路径参考变量，控制目标为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}(s) = 0$ 。

$$\text{作变换} \begin{cases} y_1 = x + b \cos \theta \\ y_2 = y + b \sin \theta \end{cases},$$

$$\text{进而得到闭环误差} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -b \sin \theta \\ \sin \theta & b \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T(\theta) \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}。$$

$$\text{逆运算得到} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{b} & \frac{\cos \theta}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{故} \begin{cases} \dot{y}_1 = u_1 \\ \dot{y}_2 = u_2 \\ \dot{\theta} = \frac{u_2 \cos \theta - u_1 \sin \theta}{b} \end{cases}。$$

### 控制器

$$\text{设计控制器} \begin{cases} u_1 = \dot{y}_{1d} + k_1(y_{1d} - y_1) \\ u_2 = \dot{y}_{2d} + k_2(y_{2d} - y_2) \end{cases}, \text{ 有} \begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -k_1 \tilde{y}_1 \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -k_2 \tilde{y}_2 \end{cases}, \text{ 系统指数性收敛。}$$

## 5 机器人感知与定位建图

### 5.1 传感器

**常见传感器** 激光雷达 (Laser)、里程计 (Odometer)、声纳 (Rader)、摄像机 (Camera)、惯导系统 (IMU)、加速度传感器 (Accelerometer)、陀螺 (Gyroscope)、力觉传感器 (Force Sensor)、罗盘 (Compass)。

## 分类

- PC (Proprioceptive, 本体感受) / EC (Exteroceptive, 外感受)。
- A (Active, 有源) / P (Passive, 无源)。

## 特性

- 测量范围：测量上下界之差。
- 动态范围：测量范围上下界比率，常用对数表示，单位为dB。
- 分辨率：最小可测量变化量，一般为动态范围下界。
- 线性度：输入输出信号的映射关系。

## 5.2 光电传感器

把被测量变化转换成光信号变化，再转换成电信号。

### 5.2.1 概述

**组成** 辐射源、光学通路、光电器件。

## 特性

- 不受电磁干扰影响。
- 非接触测量。
- 频谱宽，高精度，高分辨率，高可靠性，发应快。

### 5.2.2 编码器 <sup>12</sup>

测量系统相对运动角度，具有高精度、高分辨率和高可靠性。按结构可分为接触式、光电式和电磁式，后两种为非接触式编码。

## 增量式旋转编码器

- 不能直接输出数字编码，需要增数字电路。
- 原理：遮光周期性变化，莫尔条纹明暗交替，电压周期性变化  $U_0 = U_m \cos(\frac{2\pi}{W}x)$ ，形成脉冲，根据脉冲数量可推算旋转角度，位置数据是相对的。
- 辨向：为判断光栅移动方向，使用D触发器（）整合两个光栅的信息。
  - D触发器：时钟信号有效时， $Q = D$ 。
  - 边缘D触发器：时钟信号处于有效边沿时， $Q = D$ 。

## 绝对式光电编码器

- 能直接输出某种码制的数码。
- 格雷码（余3循环码）：任意相邻数只有一位二进制数不同，可以由二进制码按位异或（第一位保留）获得，属于可靠性编码，求反方便。

## 5.3 里程计

### 5.3.1 里程计模型

**两轮差速机器人里程计模型** 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L + \dot{\phi}_R \\ 0 \\ \frac{\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{转换到惯性系}} \begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

码盘读数为：

$$\begin{cases} \Delta s = \frac{r}{2}(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L) \\ \Delta\theta = \frac{r}{2d}(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L) \end{cases} \xrightarrow{\text{小时间变化}} \begin{cases} \Delta s = v_k T_s \\ \Delta\theta = \omega_k T_s \end{cases}$$

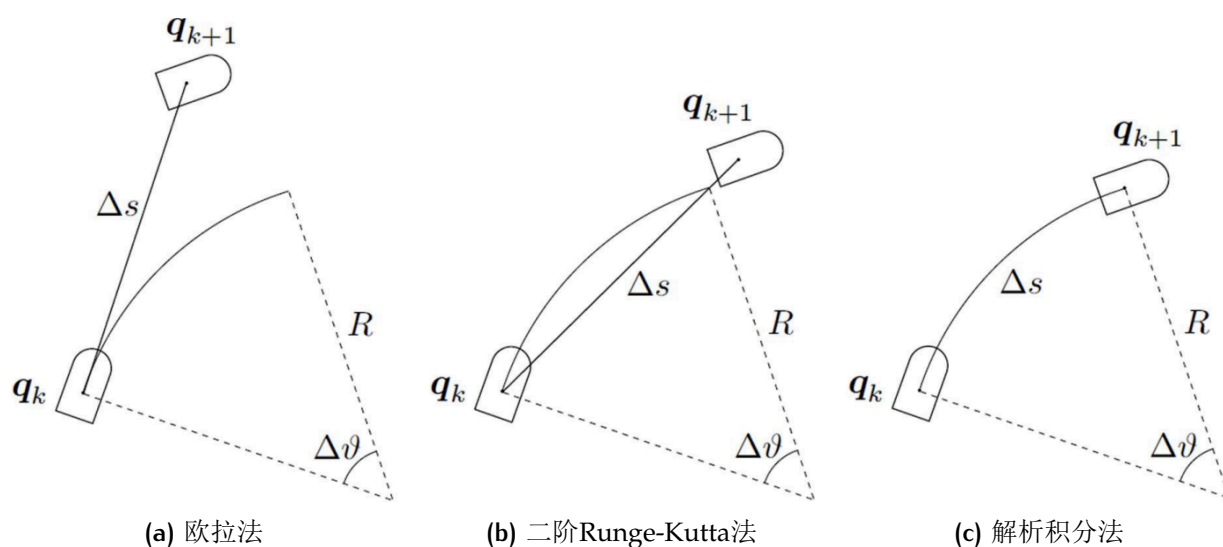


图 8: 里程计建模方法

## 建模方法

- 欧拉法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos \theta_k \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin \theta_k \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- 二阶Runge-Kutta法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- 解析积分法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{v_k}{\omega_k} (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) \\ y_{k+1} = y_k - \frac{v_k}{\omega_k} (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases} \xrightarrow{\omega_k=0} \begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \\ y_{k+1} = y_k \end{cases}$$

## 5.3.2 里程计误差

### 误差来源

- 数值积分误差。

- 运动学参数误差：速度不恒定，半径误差。
- 打滑。

## 误差传播

二阶Runge-Kutta法的位姿更新为：

$$\mathbf{p}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta, \Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L)}{2} \cos(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R - \Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L)}{2} \sin(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R - \Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L)}{2d} \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$ 是控制输入量，有误差协方差矩阵迭代公式：

$$\sum_{\mathbf{p}'} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \sum_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f^T}_{\text{位姿}} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{r|l}} f \cdot \sum_{\Delta} \cdot \nabla_{\mathbf{r|l}} f^T}_{\text{控制输入量}}$$

初始化姿态协方差矩阵 $\sum_{\mathbf{p}'}$ （可零初始化），其更新量为：

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 1 & \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设 $\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$ 的误差相互独立，有控制输入量协方差矩阵：

$$\sum_{\Delta} = \text{covar}(\Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} k_r \|\Delta\phi_R\| & 0 \\ 0 & k_l \|\Delta\phi_L\| \end{bmatrix}$$

其更新量为：

$$\nabla_{\mathbf{r|l}} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_R} & \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d} \Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2} \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d} \Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d} \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2} \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d} \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix}$$

**误差转化展示** 原理见7.1。

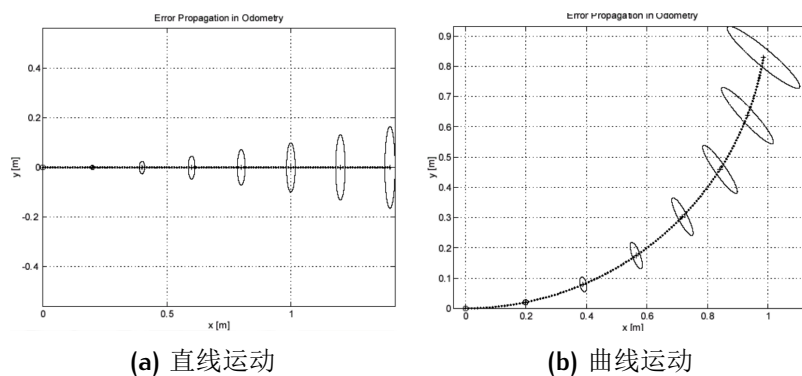


图 9: 里程计误差转化展示

直线运动时误差方向与运动方向垂直，曲线运动时则不垂直。

## 5.4 激光传感器

## 5.5 点云匹配与定位

## 5.6 卡尔曼滤波

## 5.7 蒙特卡洛定位

## 5.8 SLAM

# 6 机器人轨迹规划

# 7 附录

## 7.1 误差转化展示

将误差传播协方差矩阵 $\Sigma_p$ 转化成椭圆展示。



**计算** 取 $\Sigma_p$ 左上二阶子阵 $\Sigma_{p_{xy}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$ ，计算特征值 $\lambda_1, \lambda_2$ 和特征向量 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ ，其分别表示长短轴的大小和方向，圆心是 $(x_k, y_k)$ （直接对 $\Sigma_p$ 求取特征根和特征向量，再取前两个，结果与其不同）。

### 意义

- 长短轴表示误差在不同方向上的大小，可通过开根号、乘系数等方法调节。
- 方向角表示误差传播的主要方向，体现了误差传播的各向异性。
- 椭圆大小反映了系统的误差范围，可按置信度缩放。

返回里程计[5.3.2](#)