智 能 工 程

目 录

1 基础知识 4
2 机器人运动学 5
2.1 运动学模型 5
2.2 车轮 5
2.3 运动学建模 6
2.3.1 空间描述与状态表达 . . 6
2.3.2 瞬心法 7
2.3.3 约束方程法 7
2.3.4 例子 9
2.4 自由度 10
3 机器人运动控制 11
3.1 运动控制 11
3.2 定点控制器 12
3.3 轨迹跟踪控制器 13
3.4 路径跟踪控制器 14
4 机器人感知 15
4.1 传感器 15
4.2 光电传感器 16
4.2.1 概述 16
4.2.2 编码器 16
4.3 里程计 17
4.3.1 里程计模型 17
4.3.2 里程计误差 18
4.4 激光传感器 19
5 机器人点云处理 20
5.1 直线提取 20
5.1.1 最小二乘法 20
5.1.2 Split-and-Merge 20
5.1.3 Line-Regression 20
5.1.4 RANSAC 21
5.1.5 Hough-Transform 21
5.1.6 性能对比 22
5.2 定位与匹配 22
5.2.1 基于SVD的定位算法 . . 22
5.2.2 基于ICP的点云匹配算法 24
6 机器人定位 24
6.1 定位与导航 24
6.2 贝叶斯定位 25
6.3 基于卡尔曼滤波的定位 26
6.3.1 卡尔曼滤波 26
6.3.2 基于卡尔曼滤波的定位算法 28
6.4 蒙特卡洛定位 29
6.4.1 蒙特卡洛方法 29
6.4.2 蒙特卡洛定位算法（粒子滤波算法） 29
6.4.3 自适应蒙特卡洛定位算法 31
7 机器人建图 32
7.1 地图 32
7.2 SLAM 34
7.3 基于滤波的SLAM算法 34
7.3.1 EKF-SLAM 34
7.3.2 FastSLAM 37
7.4 基于优化的SLAM算法 38
7.5 LOAM 40
8 机器人运动规划 40
8.1 运动规划 40
8.2 基于图搜索的路径规划 41
8.2.1 静态路径规划 41
8.2.2 动态路径规划 42
8.3 基于采样的路径规划 43
8.4 面向碰撞的局部路径规划 44
8.5 路径平滑 44
8.6 轨迹规划 44

返回目录

9 附录 44
9.1 误差转化展示 44
9.2 奇异值分解 45

图 片

图 1 课程内容 4
图 2 两轮差速机器人模型 4
图 3 车轮类型 5
图 4 瞬心 7
图 5 车轮约束示意图 8
图 6 两轮差速机器人正运动学建模 9
图 7 运动控制器 11
图 8 里程计建模方法 17
图 9 里程计误差转化展示 19
图 10 卡尔曼滤波框图 27
图 11 基于卡尔曼滤波的定位算法示意图 28
图 12 图优化例题 39

表 格

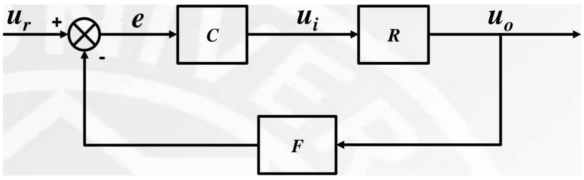
表 1 课程内容 4
表 2 车轮类型对比 6
表 3 车轮约束方程 8
表 4 传感器分类 15
表 5 直线特征提取算法性能对比 22
表 6 卡尔曼滤波算法描述维度 28
表 7 图搜索算法对比 42

要 点

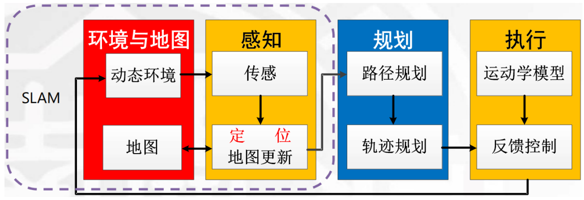
要点 1 非完整约束 5
要点 2 车轮类型 5
要点 3 瞬心法运动学建模 7
要点 4 约束方程法运动学建模 7
要点 5 自由度 10
要点 6 定点控制器（误差信号转换） 12
要点 7 轨迹跟踪控制器 13
要点 8 路径跟踪控制器 14
要点 9 传感器 15
要点 10 编码器 16
要点 11 里程计建模方法 17
要点 12 误差传播 18
要点 13 最小二乘法矩阵形式求解 20
要点 14 Split-and-Merge直线提取 20
要点 15 RANSAC直线提取 21
要点 16 基于SVD的定位算法 22
要点 17 基于ICP的点云匹配算法 24
要点 18 卡尔曼滤波迭代公式 27
要点 19 基于卡尔曼滤波的定位算法 28
要点 20 蒙特卡洛定位算法（粒子滤波算法） 29
要点 21 自适应蒙特卡洛定位算法 31
要点 22 EKF-SLAM 34
要点 23 FastSLAM 37
要点 24 图优化例题 39
要点 25 图搜索算法 41

返回目录

1 基础知识



(a) 课程内容



(b) 工作流程

图 1: 课程内容

	u_i	u_o	R	F	u_r	e	C
概念	系统输入	系统输出	系统模型	反馈单元	系统给定	系统误差	控制器
含义	对被控对象施加作用的手段	作业目标的可测系统状态	系统输入输出映射	系统输出映射变换	系统作业目标	作业目标与系统当前测量状态差值	系统误差与输入映射
内容	机器人运动学			机器人控制		机器人感知	机器人运动规划

表 1: 课程内容

课程内容

课程案例 移动机器人->轮式机器人->两轮差速机器人。

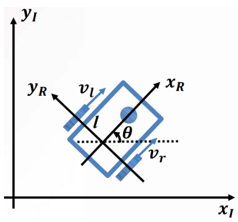


图 2: 两轮差速机器人模型

- 车轮半径r。
- 两轮转速φ_l, φ_r: $v_i = r\varphi_i$。
- 车轮到两轮中间点距离l。

1. 正运动学模型2.3.4。
2. 运动控制器3.1。
3. 里程计模型4.3.1。

2 机器人运动学

2.1 运动学模型

表征机器人驱动（输入）和机器人空间位姿（输出）的关系。

机械臂与移动机器人的区别

- 机械臂本体坐标系固定，精度高；移动机器人本体坐标系随动，精度低。
- 非完整约束 [1] ：移动机器人只知道码盘变化量无法获取位姿，状态取决于路径，源于不可积的微分约束（车轮侧向滑动约束）。
- 微分运动学（Differential Kinematics）：速度空间替代位置空间。

2.2 车轮

类型 [2]

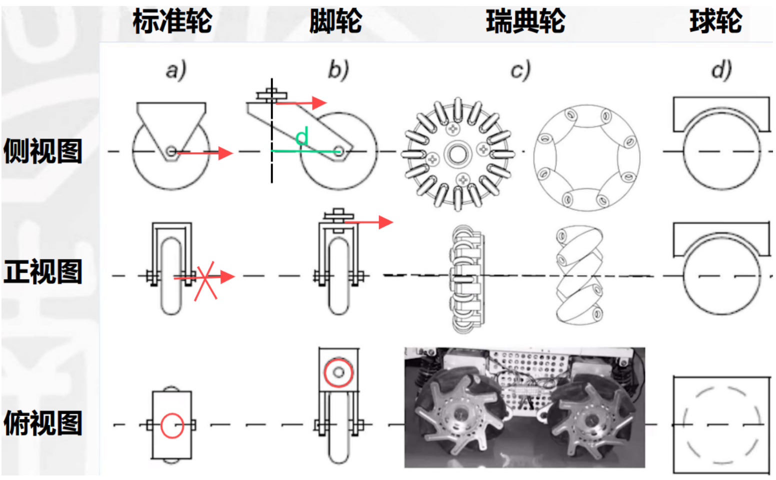


图 3: 车轮类型

类型	自由度	约束	分类/特点
标准轮（Standard wheel）	2 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动	1 沿轮轴滑动	标准固定轮（无法旋转，只有一个自由度） 标准转向轮（舵轮）
脚轮（Castor wheel）	3 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动 沿路轴运动	0	偏心距 d：触地点到垂直旋转轴距离。 扭矩压力，易损坏。
瑞典轮（Swedish wheel）	3 沿轮平面滚动（被动） 沿轮轴转动（主动） 沿垂直轴转动（被动）	0	麦克纳姆轮（Macanum wheel）：45，至少需要4个共同使用。 连续切换轮：90，至少需要3个共同使用。 对地面冲击大，噪音大，易损坏，成本高。
球轮（Spherical wheel）	3（全主动） 沿两个正交轮轴转动 沿垂直轴转动	0	成本高，可靠性差。

表 2: 车轮类型对比

选取

- 数量：至少三轮同时着地，才能保证静态稳定性。四轮可以提升稳定性，但需要悬架。
- 大小：越大的轮子通过性越好，但需要更大的扭矩。
- 多数形态都有非完整约束。

2.3 运动学建模

2.3.1 空间描述与状态表达

坐标系

- 惯性系I：作业目标、控制指令、传感器感知测量信息。
- 机器人系R：控制器误差输入、控制器控制指令。

返回目录

- 笛卡尔系：右手法则。

位姿（POSE）

位置空间求导得到速度空间：

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ \theta_I \end{bmatrix}, \xi_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{求导}} \xi_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}, \xi_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

惯性系旋转得到机器人系：

$$\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I$$

旋转阵$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$为单位正交阵，$R^T = R^{-1}$。

2.3.2 瞬心（*ICR*）法 [3]

瞬时旋转/曲率中心（ICR）
刚体上各点角速度相同。

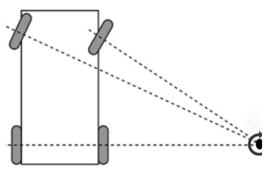


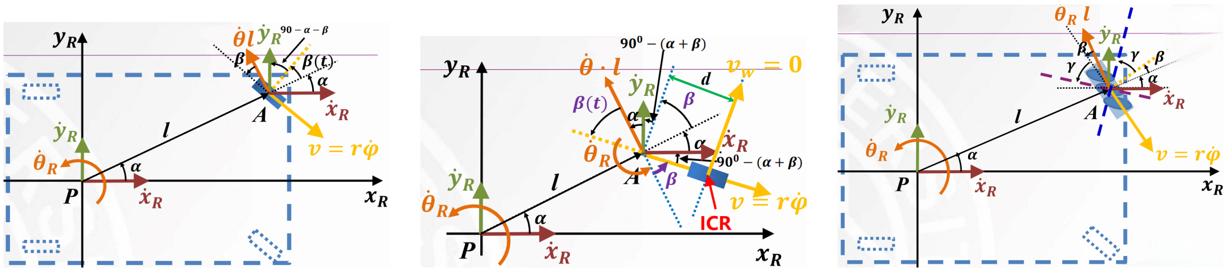
图 4: 瞬心

步骤

1. 坐标系变换。
2. 确定约束。
3. 确定瞬心：各轮轮轴到该点距离与速度成正比。
4. 求解$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R & \dot{y}_R & \dot{\theta}_R \end{bmatrix}^T$。

2.3.3 约束方程法 [4]

要求 在水平面上运动，车轮与地面点接触，不变形，安装在钢体表面，舵机转轴与地面垂直。



(a) 标准轮　　(b) 脚轮　　(c) 瑞典轮

图 5: 车轮约束示意图

类型	约束	约束方程	主动轮	随动轮
标准轮	纯滚动	$\left[\sin(\alpha+\beta(t)) \quad -\cos(\alpha+\beta(t)) \quad -l\cos\beta(t)\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$	√	x
	无滑动	$\left[\cos(\alpha+\beta(t)) \quad \sin(\alpha+\beta(t)) \quad l\sin\beta(t)\right] R\theta\dot{\xi}_I = 0$	√	√
脚轮	纯滚动	$\left[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos\beta\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$	√	x
	无滑动	$\left[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad d+l\sin\beta\right] R\theta\dot{\xi}_I = -d\dot{\beta}$	√	x
瑞典轮	纯滚动	$\left[\cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad \sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad l\sin(\beta+\gamma)\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}\sin\gamma + r_{sw}\dot{\varphi}_{sw}$	√	x
	无滑动	$\left[\sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad -\cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad -l\cos(\beta+\gamma)\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}\cos\gamma$	√ 小轮	x

表 3: 车轮约束方程

约束方程

使用　根据各轮主/随动状态列运动约束方程，得到最多三个独立约束方程（对应平面三维位姿）。

以下以N个标准轮（N_f个固定，N_s个转向）机器人为例：

- 滚动约束

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I - J_2\dot{\varphi} = 0$$

其中$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f(N_f\times 3)} \\ J_{1s}(\beta_s)_{(N_s\times 3)} \end{bmatrix}$，$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}$，$J_2 = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_N)$为轮径对角阵。

返回目录

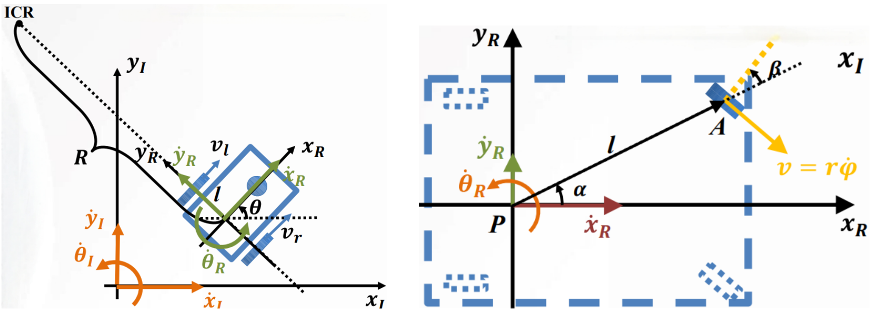
- 滑动约束

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

其中$C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f(N_f\times 3)} \\ C_{1s}(\beta_s)_{(N_s\times 3)} \end{bmatrix}$。

2.3.4 例子

以下以两轮差速机器人（见1）为例，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$：



(a) 瞬心法　　(b) 约束方程法

图 6: 两轮差速机器人正运动学建模

瞬心法

两轮差速机器人的瞬心在两轮轮轴上，设其到机器人两轮中间的距离为R，有：

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_R}{R} = \frac{\dot{\varphi}_l r}{R-l} = \frac{\dot{\varphi}_r r}{R+l}$$

解得$R = \frac{\dot{\varphi}_r+\dot{\varphi}_l}{\dot{\varphi}_r-\dot{\varphi}_l}$，代回即可。

约束方程法

- 纯滚动：$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & -l\cos\beta\end{bmatrix}\dot{\xi}_R = r\dot{\varphi}$。
- 无滑动：$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix}\dot{\xi}_R = 0$。

正运动学模型

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix}\dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R\end{bmatrix} = \frac{r}{2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_l+\dot{\varphi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\varphi}_r-\dot{\varphi}_l}{l}\end{bmatrix}$$

返回目录

2.4 自由度

概念

- 衡量机器人改变运行状态的能力。
- 需满足实际作业需求，考虑实现成本。
- 机器人设计基础、算法依据（一般同自由度机器人可采用相同控制规划算法）。
- 平面运动机器人自由度最大不能超过3。

分类 5

- 移动度（Degree of Mobility）δ_m：瞬时改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_m = \dim[C_1(\beta_s)] = 3 - \mathrm{rank}[C_1(\beta_s)] \in [0, 3]$$

- 转向度（Degree of Steerability）δ_s：间接改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_s = \mathrm{rank}[C_{1s}(\beta_s)] \in [0, 2]$$

- 机动度（Degree of Maneuverability）δ_M：改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

  - 机动度相同，结构不一定相同。
  - $\delta_M = 2$，瞬心位于一条直线上；$\delta_M = 3$，瞬心可分布于空间任何一点。

实例（TYPE(移动度,转向度)）

- 全向机器人：
  - Type(3,0)：完整约束全方位移动机器人。
  - Type(2,1)：一个同心轮+两个瑞典轮。
  - Type(1,2)：多舵机全方位移动机器人。
- 非全向机器人：
  - Type(2,0)：差分移动机器人。
  - Type(1,1)：自动驾驶汽车（阿克曼转向）、自行车、叉车。

返回目录

3 机器人运动控制

3.1 运动控制

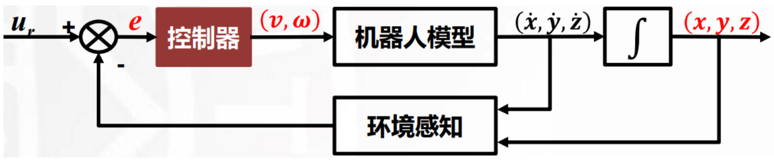


图 7: 运动控制器

误差（惯性系下给定与反馈）$\xRightarrow{\text{变换}}$输入（机器人系下控制输入）。

特点

- 大多存在滑动约束，是非完整系统，有侧向和姿态偏差。
- 非线性，控制器设计复杂，还需要根据可获得的反馈信号选取，按顺序调节控制参数，并且不能同时实现定点控制和跟踪控制。
- 不存在能完成控制目标的连续时不变（静态）反馈控制率。
- 受标定精度影响大，且由于执行单元性能约束，控制输入要合理限幅。

分类

- 定点（镇定）控制（Regulation Control）：以指定姿态到达指定位置。
- 跟踪控制：
  - 轨迹跟踪控制（Trajectory Tracking Control）：跟随给定轨迹（速度+姿态）。
  - 路径跟踪控制（Path Tracking Control）：跟随给定路线。

开环控制　将运动轨迹分割成直线和圆弧，存在以下问题：

- 直线和圆弧的曲率不一致，不连续。
- 难以实现定义若干合适轨迹。
- 速度加速度约束。

返回目录

- 无法自适应调整轨迹来面对环境变化。
- 所得轨迹不光滑。

控制器性能评价 取正定李雅普诺夫函数，其导数负定则系统渐进稳定。

两轮差速机器人运动控制 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R=\begin{bmatrix}\dot{x}_R\\ \dot{y}_R\\ \dot{\theta}_R\end{bmatrix}=\frac{r}{2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_l+\dot{\varphi}_r\\ 0\\ \frac{\dot{\varphi}_r-\dot{\varphi}_l}{l}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\ 0\\ v_2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{变换}}\dot{\xi}_I=\begin{bmatrix}\dot{x}_I\\ \dot{y}_I\\ \dot{\theta}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

3.2 定点控制器 [6]

控制目标 机器人参考坐标系下误差$e=\begin{bmatrix}x & y & \theta\end{bmatrix}^T$，设计控制阵$K=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\end{bmatrix}$，其中$k_{ij}=k(t,e)$，得到控制输入$\begin{bmatrix}v(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}=Ke$，使$\lim_{t\to\infty}e(t)=0$。

误差信号转换

惯性系下，实际状态$q=\begin{bmatrix}x & y & \theta\end{bmatrix}^T$与参考状态$q_r\begin{bmatrix}x_r & y_r & \theta_r\end{bmatrix}^T$之差为开环误差$\tilde{q}=\begin{bmatrix}\tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{\theta}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}x-x_r & y-y_r & \theta-\theta_r\end{bmatrix}^T$。

1. 转换到机器人系

$$e=\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{bmatrix}=R(\theta)^T\tilde{q}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{\theta}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{闭环}}\dot{e}=\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \dot{e}_3\end{bmatrix}=R(\theta)\dot{\tilde{q}}+\dot{R(\theta)}\tilde{q}=\begin{bmatrix}v_1+v_2e_2\\ -v_2e_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

2. 转换到极坐标系

$$\begin{cases}\rho &=\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}\\ \beta &=-\arctan 2(-\tilde{y},-\tilde{x})\\ \alpha &=-\beta-\tilde{\theta}\end{cases}\xrightarrow{\text{闭环}}\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos\alpha & 0\\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & 0\\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

机器人系非线性控制器

设计控制器$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}$，代入得$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}$，其有误差时扰动，效果不佳。

极坐标系线性控制器

设计控制器$\begin{cases} v_1 & = k_\rho \rho \\ v_2 & = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \end{cases}$，代入得

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos\alpha \\ -k_\rho \sin\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix} \xRightarrow{\alpha \to 0} \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \\ -k_\rho \alpha \\ k_\rho \alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix}$$

其中前两行非线性耦合，在$\alpha \to 0$时指数性稳定，非全局稳定。

极坐标系线性控制器

设计控制器$\begin{cases} v_1 & = k_\rho \rho \cos\alpha \\ v_2 & = k_\alpha \alpha + \frac{k_\rho \sin\alpha \cos\alpha}{\alpha}(\alpha - k_\beta \beta) \end{cases}$，代入得

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos^2\alpha \\ -k_\rho \cos\alpha \sin\alpha \\ k_\rho \cos\alpha \sin\alpha - k_\alpha \alpha - \frac{k_\rho \sin\alpha \cos\alpha}{\alpha}(\alpha - k_\beta \beta) \end{bmatrix} \xRightarrow{\alpha \to 0} \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \\ -k_\rho \alpha \\ -k_\alpha \alpha + k_\rho k_\beta \beta \end{bmatrix}$$

其全局渐近稳定。

3.3 轨迹跟踪控制器 [7]

控制目标与误差变换

惯性系下，实际轨迹$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & \theta(t) \end{bmatrix}^T$与参考轨迹$q_r \begin{bmatrix} x_r(t) & y_r(t) & \theta_r(t) \end{bmatrix}^T$之差为开环误差$\tilde{q}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) & \tilde{y}(t) & \tilde{\theta}(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x(t) - x_r(t) & y(t) - y_r(t) & \theta(t) - \theta_r(t) \end{bmatrix}^T$，控制目标为$\lim_{n \to \infty} \tilde{q}(t) = 0$。

返回目录

辅助误差信号为：

$$e=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{\theta}\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{闭环}}\dot{e}=\begin{bmatrix}v_1+v_2e_2-v_{1r}\cos e_3\\ -v_2e_1+v_{1r}\sin e_3\\ v_2-v_{2r}\end{bmatrix}$$

控制器

设计控制器$\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_{1r}\cos e_3\\ -v_{1r}\frac{\sin e_3}{e_3}e_2-k_2e_3+v_{2r}\end{bmatrix}$，代入得$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \dot{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_2e_2\\ -v_2e_1+v_{1r}\sin e_3\\ -k_2e_3-v_{1r}\frac{\sin e_3}{e_3}e_2\end{bmatrix}$。

$e_3\to 0$时，控制器简化为$\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_{r1}\\ -v_{r1}e_2+v_{r2}\end{bmatrix}$，代入得$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \dot{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_2e_2\\ -v_2e_1\\ -k_2e_3-v_{r1}e_2\end{bmatrix}$。

3.4 路径跟踪控制器 [8]

控制目标与误差变换

惯性系下，实际路径$q(s)=\begin{bmatrix}x(s) & y(s) & \theta(s)\end{bmatrix}^T$与参考路径$q_r\begin{bmatrix}x_r(s) & y_r(s) & \theta_r(s)\end{bmatrix}^T$之差为开环误差$\tilde{q}(s)=\begin{bmatrix}\tilde{x}(s) & \tilde{y}(s) & \tilde{\theta}(s)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}x(s)-x_r(s) & y(s)-y_r(s) & \theta(s)-\theta_r(s)\end{bmatrix}^T$，其中$s\in[0,1]$为路径参考变量，控制目标为$\lim_{n\to\infty}\tilde{q}(s)=0$。

作变换$\begin{cases}y_1 & =x+b\cos\theta\\ y_2 & =y+b\sin\theta\end{cases}$，进而得到闭环误差$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -b\sin\theta\\ \sin\theta & b\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=T(\theta)\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$。

逆运算得到$\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=T^{-1}(\theta)\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{b} & \frac{\cos\theta}{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$，故$\begin{cases}\dot{y}_1 & =u_1\\ \dot{y}_2 & =u_2\\ \dot{\theta} & =\frac{u_2\cos\theta-u_1\sin\theta}{b}\end{cases}$。

控制器

设计控制器$\begin{cases}u_1=\dot{y}_{1d}+k_1(y_{1d}-y_1)\\ u_2=\dot{y}_{2d}+k_2(y_{2d}-y_2)\end{cases}$，有$\begin{cases}\dot{\tilde{y}}_1=-k_1\tilde{y}_1\\ \dot{\tilde{y}}_2=-k_2\tilde{y}_2\end{cases}$，系统指数性收敛。

返回目录

4 机器人感知

4.1 传感器 [9]

分类	传感器	感受	源	分类	传感器	感受	源
触觉	接触开关，碰撞器	EC	P	测距	反射率传感器	EC	A
	光学屏障	EC	A		超声波传感器	EC	A
	非接触式接近传感器	EC	A		激光测距仪	EC	A
轮/电机	电刷编码器	PC	P		光学三角测量	EC	A
	电位计	PC	P		结构光	EC	A
	同步器，旋转变压器	PC	P	运动	多普勒雷达（Rader）	EC	A
	光电编码器	PC	P		多普勒声波	EC	A
	磁编码器	PC	P		激光雷达（Laser）	EC	A
	电感编码器	PC	P		里程计（Odometer）	PC	P
	电容编码器	PC	P		惯导系统（IMU）	PC	P
方向	罗盘（Compass）	EC	P		加速度传感器	PC	P
	陀螺仪（Gyroscope）	PC	P	信标	GPS	EC	A
	倾角仪	EC	A/P		有源光学或射频信标	EC	A
视觉	相机（Camera）	EC	P		有源超声波信标	EC	A
	视觉测距套件	EC	P		有源光学或射频信标	EC	A
	目标跟踪套件	EC	P		反射信标	EC	A

表 4: 传感器分类

分类

- PC（Proprioceptive，本体感受）/EC（Exteroceptive，外感受）。
- A（Active，有源）/P（Passive，无源）。

特性

- 测量范围：测量上下界之差。
- 动态范围：测量范围上下界比率，常用对数表示，单位为dB。

返回目录

- 分辨率：最小可测量变化量，一般为为动态范围下界。
- 线性度：输入输出信号的映射关系。

4.2 光电传感器

4.2.1 概述

把被测量变化转换成光信号变化，再转换成电信号。

组成 辐射源、光学通路、光电器件。

特性

- 不受电磁干扰影响。
- 非接触测量。
- 频谱宽，高精度，高分辨率，高可靠性，发应快。

4.2.2 编码器 [10]

测量系统相对运动角度，具有高精度、高分辨率和高可靠性。按结构可分为接触式、光电式和电磁式，后两种为非接触式编码。

增量式旋转编码器

- 不能直接输出数字编码，需要数字电路。
- 原理：遮光周期性变化，莫尔条纹明暗交替，电压周期性变化$U_0 = U_m \cos(\frac{2\pi}{W}x)$，形成脉冲，根据脉冲数量可推算旋转角度，位置数据是相对的，掉电后需要复位。
- 辨向：为判断光栅移动方向，使用D触发器整合两个光栅的信息。
  - D触发器：时钟信号有效时，$Q = D$。
  - 边缘D触发器：时钟信号处于有效边沿时，$Q = D$。

返回目录

绝对式光电编码器

- 能直接输出某种码制的数码，掉电后不需要复位。
- 格雷码（余3循环码）：任意相邻数只有一位二进制数不同，可以由二进制码按位异或（第一位保留）获得，属于可靠性编码，求反方便。

4.3 里程计

4.3.1 里程计模型

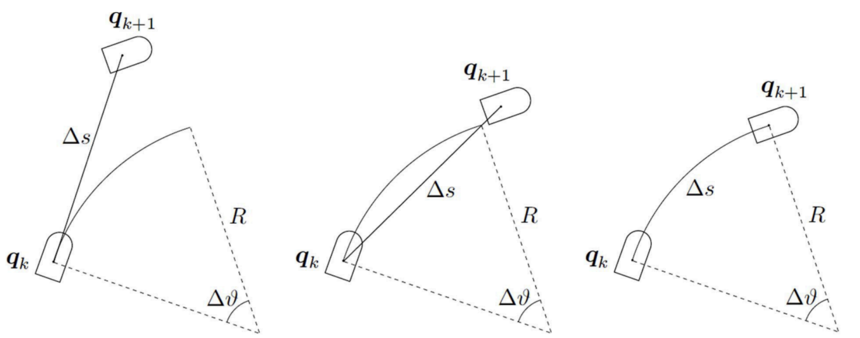
两轮差速机器人里程计模型 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_l}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{转换到惯性系}} \begin{cases} \dot{x} & = v\cos\theta \\ \dot{y} & = v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = \omega \end{cases}$$

码盘读数为：

$$\begin{cases} \Delta s = \frac{r}{2}(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L) \\ \Delta\theta = \frac{r}{2d}(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L) \end{cases} \xRightarrow{\text{小时间变化}} \begin{cases} \Delta s & = v_k T_s \\ \Delta\theta & = \omega_k T_s \end{cases}$$

建模方法 [11]



(a) 欧拉法 (b) RK2法 (c) 解析积分法

图 8: 里程计建模方法

返回目录

- 欧拉法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos\theta_k \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin\theta_k \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- RK2（二阶Runge-Kutta）法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- 解析积分法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{v_k}{\omega_k}(\sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k) \\ y_{k+1} = y_k - \frac{v_k}{\omega_k}(\cos\theta_{k+1} - \cos\theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases} \xRightarrow{\omega_k=0} \begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \\ y_{k+1} = y_k \end{cases}$$

4.3.2 里程计误差

误差来源

- 数值积分误差。
- 运动学参数误差：速度不恒定，半径误差。
- 打滑。

误差传播（RK2法） 12

位姿更新为：

$$p' = f(x, y, \theta, \Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r(\Delta\phi_R+\Delta\phi_L)}{2}\cos(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R-\Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R+\Delta\phi_L)}{2}\sin(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R-\Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R-\Delta\phi_L)}{2d} \end{bmatrix}$$

其中$\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$是控制输入量，有误差协方差矩阵迭代公式：

$$\sum_{p'} = \underbrace{\nabla_p f \cdot \sum_{p} \cdot \nabla_p f^T}_{\text{位姿}} + \underbrace{\nabla_{r|l} f \cdot \sum_{\Delta} \cdot \nabla_{r|l} f^T}_{\text{控制输入量}}$$

初始化姿态协方差矩阵$\sum_{p'}$（可零初始化），其更新量为：

$$\nabla_p f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 1 & \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

返回目录

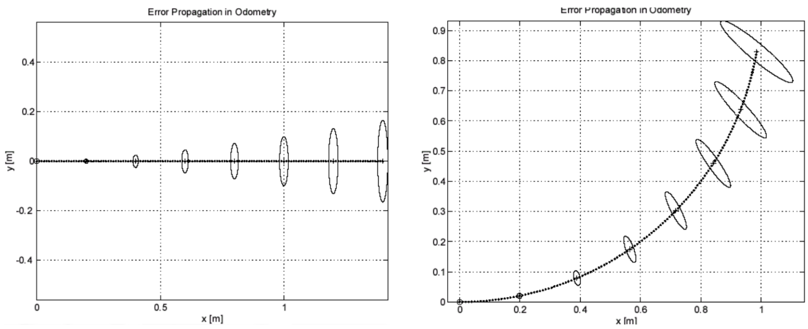
假设$\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$的误差相互独立，有控制输入量协方差矩阵：

$$\sum_{\Delta} = covar(\Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} k_r\|\Delta\phi_R\| & 0 \\ 0 & k_l\|\Delta\phi_L\| \end{bmatrix}$$

其更新量为：

$$\nabla_{rl}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_R} & \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d}\Delta s\sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2}\cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d}\Delta s\sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2}\sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d}\Delta s\cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2}\sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d}\Delta s\cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix}$$

误差转化展示 原理见9.1。



(a) 直线运动 **(b)** 曲线运动

图 9: 里程计误差转化展示

直线运动时误差方向与运动方向垂直，曲线运动时则不垂直。

4.4 激光传感器

- 组成：激光器，激光检测器，测量电路。
- 特点：无接触远距离测量，速度快，精度高，量程大，抗干扰能力强。
- 激光测距：到达时间法（Time of Flight，TOF）：时间精度 $= \frac{\text{测量精度}}{c(3\times10^8)}$。
- 位移测量：对参考信号和测量信号进行相位测量。

5 机器人点云处理

5.1 直线提取

5.1.1 最小二乘法（*Least Squares Method*）

在求解拟合直线时，最小化拟合误差平方和，目标式为：

$$\min \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

其中$f(x) = ax + b$是拟合直线，(x, y)是待拟合的点坐标。

求解方法

1. 求偏导：求目标式关于a, b的偏导，得到如下极值条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)] = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - (a + bx_i)] = 0 \end{cases}$$

2. 矩阵形式 [13] ：将拟合直线$f(x) = ax + b$增广为矩阵形式$Y = X\beta$，在误差$d = Y - X\beta$趋于0时，有$Y = X\beta$，因此：

$$Y = X\beta \Rightarrow X^T Y = X^T X\beta \Rightarrow \beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

5.1.2 *Split-and-Merge*（分割与合并） [14]

1. 分裂（Split）：以全集作为初始点集。对当前点集拟合直线（采用端点拟合），计算到最远点的距离，距离大于阈值则在该最远点处将点集分裂为两个子集，并对分裂后的两个子集进行迭代。

2. 合并（Merge）：检查相邻线段是否满足合并要求（合并后是否有过远点），若满足要求，则合并并拟合新的直线。

5.1.3 *Line-Regression*（线性回归）

1. 滑动拟合：选取窗口，在其内采用最小二乘法拟合直线，之后滑动窗口拟合新的直线。

2. 合并：检查相邻线段是否满足合并的角度和距离要求，满足则合并并拟合新的直线，直到所有线段不可再合并。

5.1.4 RANSAC（Random Sample Consensus，随机抽样一致性算法）[15]

- 外点（outliers）：异常值。
- 内点（inliers）：符合模型的数据点。

1. 根据内点比例w和找到一个完全由内点组成的样本的希望概率p计算迭代次数：
$$k = \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^2)}$$
2. 从所有数据点中随机选择最小数量（直线2点，平面3点）的数据点子集，确定唯一的模型参数。
3. 计算剩余数据点与该模型的误差，小于设定阈值的为内点。
4. 重复迭代次数次采样，选取包含最多内点的模型。

5.1.5 Hough-Transform（霍夫变换）

图像空间中的一个点对应Hough空间中的一条线。激光定位任务中，常用极坐标$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$表示。在定距下，误差呈正态分布；而在变距下，误差增长与距离正相关。

1. 计算数据范围（Hough空间参数分辨率），并初始化累加器。
2. 遍历边缘点，计算可能的参数组合，并在对应位置进行投票。
3. 在累加器中寻找峰值（可能不唯一），获得相应Hough空间参数。
4. 转换回图像空间，确定直线。

最小二乘直线拟合

点(ρ_i, θ_i)到拟合直线(r, α)的距离近似为d_i：
$$\rho_i \cos(\theta_i - \alpha) - r = d_i$$
使其加权平方和最小，得到最优拟合直线。

误差传播为：
$$C_x = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\sigma_\rho^2) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\sigma_\theta^2) \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \quad F_{\rho\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_1} & \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_2} & \cdots & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_{n-1}} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_n} \\ \frac{\partial r}{\partial\rho_1} & \frac{\partial r}{\partial\rho_2} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial\theta_{n-1}} & \frac{\partial r}{\partial\theta_n} \end{bmatrix}$$
$$C_{\alpha r} = F_{\rho\theta} C_x F_{\rho\theta}^T$$

返回目录

5.1.6 性能对比

算法	复杂度	假阳性率FPR	精度	多直线检测	属性
Split-and-Merge	$n\log n$	低	低	适用	
Line-Regression	nn_f	低	低	适用	有序点云
RANSAC	Snk	高	高	需调整	容忍外点
Hough-Transform	$Snn_C + Sn_Rn_C$	高	高	适用	

表 5: 直线特征提取算法性能对比

5.2 定位与匹配

5.2.1 基于*SVD*的定位算法 [16]

条件与目标

在二维平面上，有基于世界坐标系的点云$P=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$和基于激光坐标系的点云$Q=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$，它们按下标顺序匹配，求解刚体变换（旋转阵R和平移量t）。

以误差平方加权和的形式建模，得到目标式：

$$(R,t)=\operatorname{argmin}\sum_{i=1}^{n} w_i\|(Rp_i+t)-q_i\|^2$$

其中w_i表示匹配点对(p_i,q_i)的权重，可取为距离的倒数$w_i=\frac{1}{\sigma_i(\rho_i)}$。

加权平均

为求极值，对目标式求关于t的偏导：

$$2t(\sum_{i=1}^{n} w_i)+2R(\sum_{i=1}^{n} w_ip_i)-2\sum_{i=1}^{n} w_iq_i=0 \xrightarrow[\sum_{i=1}^{n} w_i]{\text{等号两边同除}} t+R\frac{(\sum_{i=1}^{n} w_ip_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i}-\frac{\sum_{i=1}^{n} w_iq_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}=0$$

取两个点云的加权中心点$\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i},\hat{q}=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_iq_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$，上式可化简为$t=\hat{q}-R\hat{p}$。该式描述了平移量和旋转阵的关系，将其带回目标式，得到单变量最值问题：

$$R=\operatorname{argmin}\sum_{i=1}^{n} w_i\|R(p_i-\hat{p})-(q_i-\hat{q})\|^2$$

返回目录

去中心化

取去中心化$x_i = p_i - \hat{p}, y_i = q_i - \hat{q}$，目标式可化简为：

$$R = \text{argmin} \sum_{i=1}^{n} w_i ||Rx_i - y_i||^2$$

将平方项变成矩阵相乘的形式：

$$||Rx_i - y_i||^2 = (Rx_i - y_i)^T (Rx_i - y_i) = x_i^T (R^T R) x_i - y_i^T R x_i - x_i^T R^T y_i + y_i^T y_i$$

- 旋转阵为标准正交阵，$R^{-1} = R^T$，因此$R^T R = E$。
- $x_i^T R^T y_i$是一个1×1标量，转置后不变，$x_i^T R^T y_i = y_i^T R x_i$。

所以:

$$||Rx_i - y_i||^2 = x_i^T x_i - 2y_i^T R x_i + y_i^T y_i$$

其中仅有负号项与R相关，其它项都是定值，目标可改写为：

$$R = \text{argmax} \sum_{i=1}^{n} w_i y_i^T R x_i$$

SVD分解

将其写成对角阵的迹的形式：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i y_i^T R x_i &= tr(diag(w_1 y_1^T R x_1, w_2 y_2^T R x_2, \ldots, w_n y_n^T R x_n)) \\
&= tr(diag(w_1, w_2, \ldots, w_n) \begin{bmatrix} y_1^T & y_2^T & \vdots & y_n^T \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}) \\
&= tr(WY^T RX)
\end{aligned}$$

因为矩阵的迹满足$tr(AB) = tr(BA)$，所以$tr(WY^T RX) = tr(RXWY^T)$。令$S = XWY^T$，基于SVD原理（见附录9.2），$S = U\Sigma V^T$，其中U, V是单位正交阵，Σ为对角阵。所以$tr(RXWY^T) = tr(RU\Sigma V^T) = tr(\Sigma V^T RU)$，后三者都是单位正交阵，它们的积M也是单位正交阵。目标改写为：

$$R = \text{argmax} tr(\Sigma M)$$

求解R和t 由于单位正交阵的最大迹是在单位阵下取得的，最大值条件为$M = E$，即$R = VU^T$。代回R和t的关系式，可确定t。

5.2.2 基于*ICP*（*Iterative Closest Point*，迭代最近点）的点云匹配算法 [17]

1. 条件与目标：求解二维平面上检测点云$P = \{p_1, p_2, \dots, p_{N_p}\}$和目标点云$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_x}\}$的匹配。

2. 计算最近点集：采取采样方法获得目标点云，并采用点集匹配方法为检测点云数据点匹配最近的目标点云数据点。
    - 均匀采样。
    - 随机采样。
    - 基于特征的采样。
    - 法向量空间采样。
    - Closest point Matching（CMP）。
    - Normal Shooting Matching。
    - Point-to-Plane Matching。
    - Projection Matching。

3. 变换：使用基于SVD的定位算法求解齐次变换矩阵并应用于检测点云。

4. 目标函数计算：统计对齐误差，如果达到阈值则停止迭代，否则重复上述操作。

6 机器人定位

6.1 定位与导航

导航 不能碰障碍物，掌握目标的方向。

- 基于行为：如沿墙边前进。
- 基于地图：已知地图，需要定位。

定位

- 问题
  - 全局定位：未知初始位置，根据地图进行定位。
  - 位置跟踪：已知初始位置，跟踪位置变化。
  - 绑架问题。
- 方法：基于机载传感器、基于额外传感器和路标、里程计。

- 分类（不确定度分布）：连续单峰（卡尔曼滤波）、连续多峰、离散多峰（粒子滤波）、拓扑。

6.2 贝叶斯定位

原理　新信息出现后的概率 = 概率 × 新信息带来的调整：

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

思想　使用低精度传感器（如里程计）跟踪运动状态，不确定度不断提高，定期使用高精度传感器（如激光雷达），修正估计。

特点

- 连续型
  - 精度受传感器数据限制。
  - 通常是单一假设位姿估计。
  - 对于单一假设发散时会丢失。
  - 表示紧凑，计算资源需求合理。
- 离散型
  - 精度受离散化分辨率限制。
  - 通常是多假设位姿估计。
  - 发散时收敛到另一单元，永不丢失。
  - 需大量内存和计算资源。

6.3 基于卡尔曼滤波的定位

6.3.1 卡尔曼滤波

推导 两次独立测量的概率均服从正态分布$p_1(q)=N(\hat{q}_1,\sigma_1^2), p_2(q)=N(\hat{q}_2,\sigma_2^2)$，它们整合得到的最终分布也服从正态分布：

$$
\begin{aligned}
p(q)=p_1(q)\cdot p_2(q) &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(q-\hat{q}_1)^2}{2\sigma_1^2})\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(q-\hat{q}_2)^2}{2\sigma_2^2})\\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp[-\frac{(q-\hat{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(q-\hat{q}_2)^2}{2\sigma_2^2}]\\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{q^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-2q(\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2)+(\hat{q}_1^2\sigma_2^2+\hat{q}_2^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}]\}\\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{q^2-\frac{2q(\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\frac{(\hat{q}_1^2\sigma_2^2+\hat{q}_2^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]\}\\
&= \underbrace{\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp[-\frac{1}{2}\frac{\frac{\hat{q}_1^2\sigma_2^2+\hat{q}_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-(\frac{\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]}_{\text{常数}}\underbrace{\exp[-\frac{1}{2}\frac{(q-\frac{\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]}_{\text{正态分布}}\\
&= N(\hat{q},\sigma^2)
\end{aligned}
$$

有：

$$
\hat{q}=\underbrace{\frac{\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}_{\text{方差小的项权重大}}\Leftrightarrow\hat{q}=\hat{q}_1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\underbrace{(\hat{q}_2-\hat{q}_1)}_{\text{校正量}}
$$

$$
\sigma^2=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\Leftrightarrow\sigma^2=\underbrace{\sigma_1^2-\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}_{<\sigma_1^2,\sigma_2^2}
$$

以$P=\sigma_1^2, Q=\sigma_2^2, R=\sigma^2$，记卡尔曼增益$K=P(P+Q)^{-1}$和创新协方差$\Sigma_{IN}=P+Q$：

$$
\begin{aligned}
&\hat{q}=\hat{q}_1+P(P+Q)^{-1}(\hat{q}_2-\hat{q}_1)=\hat{q}_1+K(\hat{q}_2-\hat{q}_1)\\
&R=P-P(P+Q)^{-1}P=P-K\cdot\Sigma_{IN}\cdot K^T
\end{aligned}
$$

过程（推算）方程：$x_k=Ax_{k-1}+Bu_{k-1}+w_{k-1}$

测量方程：$z_k=Hx_k+v_k$

其中$x_k \in R^n$为系统状态，$z_k \in R^m$为测量输出，$u_k \in R^l$为系统输入。$w_k \in R^n$为过程噪声（Process Noise）$p(w) = N(0, Q)$，$v_k \in R^m$为测量噪声（Measurement Noise，白噪声）$p(v) = N(0, R)$。

有先/后验估计$\hat{x}_k^-, \hat{x}_k$，先/后验估计误差$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-, e_k = x_k - \hat{x}_k$，先/后验估计方差$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], P_k = E[e_k e_k^T]$。其中，优化目标是$\mathrm{argmin}_K P_k$。

先后验转化关系为：

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \underbrace{K}_{\text{卡尔曼增益}} \underbrace{(z_k - H\hat{x}_k^-)}_{\text{新息}}$$

P_k可进行转化：

$$\begin{aligned}
P_k &= E[e_k e_k^T] = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T](\text{误差展开}) \\
&= E[\{x_k - [\hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)]\}\{x_k - [\hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)]\}^T](\text{代入先后验转化关系}) \\
&= E\{[(x_k - \hat{x}_k^-) - K(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)][(x_k - \hat{x}_k^-) - K(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)]^T\}(\text{代入测量方程}) \\
&= E\{[(I - KH)e_k^- - Kv_k][(I - KH)e_k^- - Kv_k]^T\}(\text{误差重构}) \\
&= (I - KH)\underbrace{E[e_k^- e_k^{-T}]}_{P_n^-}(I - KH)^T + K\underbrace{E[v_k v_k^T]}_{R}K^T - K\underbrace{E[v_k e_k^{-T}]}_{\text{不相干，0}}(I - KH)^T - (I - KH)\underbrace{E[e_k^- v_k^T]}_{\text{不相干，0}}K^T \\
&= (I - KH)P_k^-(I - KH)^T + KRK^T
\end{aligned}$$

令偏导为0：

$$\frac{\partial P_k}{\partial K} = -2P_k^- H^T + 2KHP_k^- H^T + 2KR = 0$$

有$K = P_k^- H^T(HP_k^- H^T + R)^{-1}$，在方差趋于0时，$\lim_{R\to 0} K = H^{-1}, \lim_{P_k^- \to 0} K = 0$。

步骤 [18]

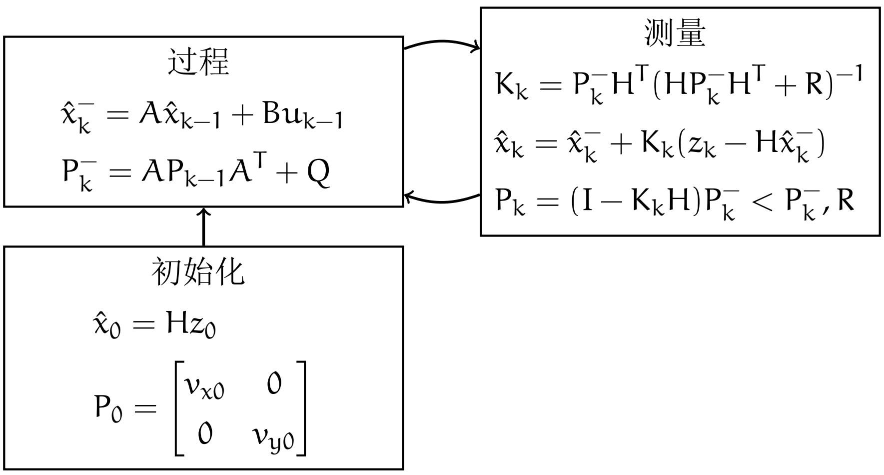


图 10: 卡尔曼滤波框图

返回目录

6.3.2 基于卡尔曼滤波的定位算法 [19]

步骤 Prediction → Observation → Estimation

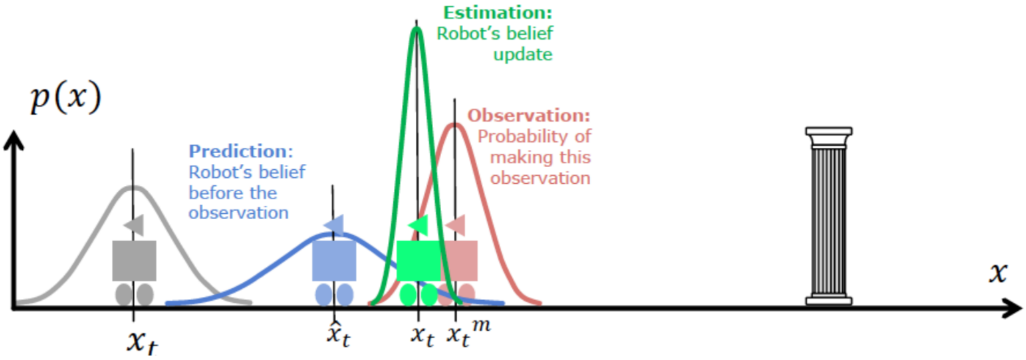


图 11: 基于卡尔曼滤波的定位算法示意图

1. 先验估计：预测模型，如里程计模型。
2. 先验估计误差：误差传导模型。
3. 观测：如激光定位，采用SVD确定位姿，采用ICP配准。
4. 观测误差：SVD匹配误差。
5. 基于观测的后验估计：卡尔曼滤波。

状态	状态转移A	测量	测量矩阵H	性能
$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$	动态误差大 静止误差小 适合缓慢移动
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 未测量速度	动态误差小 静止误差大 低维估计高维

表 6: 卡尔曼滤波算法描述维度

描述维度

特点

- 严重依赖匹配精度，匹配失败则定位失败，且无法判断和恢复。
- 收敛速度受初始状态误差和协方差阵精度影响较大。
- 无法进行全局定位，无法应对绑架问题，只能位置跟踪。
- 不确定度需为单峰高斯分布。

6.4 蒙特卡洛定位

6.4.1 蒙特卡洛方法（*Monte Carlo Method*）

不断抽样，逐渐逼近的方法。

特点

- 优点：通用。
- 缺点：收敛速度慢，不精确。

分布函数拟合 用样本（粒子）分布来处理各种分布。

- 已知概率分布求粒子分布：采样排除法，概率高的地方采样密集。
- 未知概率分布求粒子分布：重要性评估，迭代，根据预估分布（以均匀分布开始）洒粒子，再根据结果调整重要性评估（归一化）。

6.4.2 蒙特卡洛定位算法（粒子滤波算法，*MCL*）[20]

多信息融合，提高真值处的重要性。

重要性采样

目标分布$f_i = [p(x_i|z_1, z_2, z_3)]$，根据贝叶斯定理，有：

$$p(x_i|z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{\prod_k p(z_k|x_i)p(x_i)}{p(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$$

返回目录

建议分布$g_i = [p(x|z_i)]$，有：

$$p(x_i|z_i) = \frac{p(z_i|x_i)p(x_i)}{p(z_i)}$$

有重要性权重：

$$w_i = \frac{f_i}{g_i} = \frac{p(x_i|z_1, z_2, \cdots, z_n)}{p(x_i|z_i)} = \frac{p(z_i)\prod_{k\neq i} p(z_k|x_i)}{p(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$$

令$\eta = \frac{p(z_i)}{p(z_1,z_2,\cdots,z_n)}$，则有$w_i \propto \prod_{k\neq i} p(z_k|x_i)$。

步骤 在一次迭代（$X_{t-1} \to X_t$）中，经历以下过程：

1. 预测：基于运动模型（建议分布）对粒子进行更新和采样：

$$x_t^{(i)} = f(x_{t-1}^{(i)}, u_t)$$

2. 校正：使用传感器模型计算粒子权重：

$$w_t^{(i)} = p(z_t|x_t^{(i)})$$

3. 重采样：根据归一化后的权重进行重采样（采用轮盘赌），权重越大的粒子被采样的概率越高。

激光雷达观测误差模型 m指地图。

- 误差
  - 激光雷达测量误差$p_{hit}(z_t|x_t, m)$。
  - 没有检测到障碍物$p_{max}(z_t|x_t, m)$：常值分布，返回激光雷达最大测距距离。

$$p_{max}(z_t|x_t, m) = \begin{cases} 1 & z_t^k = z_{max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - 随机错误$p_{rand}(z_t|x_t, m)$：均匀分布，返回错误的距离值。

$$p_{rand}(z_t|x_t, m) = \begin{cases} \frac{1}{z_{max}} & 0 \leqslant z_t^k \leqslant z_{max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  – 激光雷达观测误差模型$p(z_t|x_t,m)$：上述误差的线性组合。

$$p(z_t|x_t,m)=\alpha_{hit}p_{hit}+\alpha_{max}p_{max}+\alpha_{rand}p_{rand}\quad \alpha_{hit}+\alpha_{max}+\alpha_{rand}=1$$

- 物理模型：$p_{hit}(z_t|x_t,m)$包含随机噪声，一般为高斯分布。

$$p_{hit}(z_t|x_t,m)=\begin{cases}N(z_t^{k*},\sigma_{hit}^2) & 0\leqslant z_t^k\leqslant z_{max}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- 可能域（likelihood）：$p_{hit}(z_t|x_t,m)$，将激光束投影到地图中，以距投影最近的点的距离为均值，激光测距偏差为方差。
  – 优点：在线计算量小，平滑性好，收敛性强，更符合实际情况。
  – 缺点：没有明确的物理意义，仅适用于相对静态的环境（如有路标的工厂）。

特点

- 优点：计算简单，可解决大范围全局定位问题，适用于多种分布。
- 缺点：粒子数过大时占用内存大，计算效率低；大地图下，只用少量粒子可能发散；无法应对绑架问题。

6.4.3 自适应蒙特卡洛定位算法（AMCL）[21]

改进　引入短、长期指数滤波器衰减率$\alpha_{slow}\ll\alpha_{fast}$，计算短、长期重要性指数似然评价估计$w_{slow},w_{fast}$，二者计算公式格式一致，正常时$w_{slow}<w_{fast}$。

解决问题

- 绑架问题：发生绑架问题时，w_{avg}会突然下降，导致$w_{slow}>w_{fast}$，将按照概率$\max(0,1-\frac{w_{fast}}{w_{slow}})$向粒子集中注入随机粒子。
- 粒子数问题：使用KLD（Kullback-Leibler Divergence，库尔贝克-莱布勒散度，计算概率分布间差异）采样，在趋于收敛的过程中减少粒子。

算法　其中标红部分是AMCL相较MCL的改进。

返回目录

算法 1：AMCL

参数：$\alpha_{slow}, \alpha_{fast}$
初始化：初始化$\overline{X}_t = X_t$为空，初始化w_{slow}, w_{fast}
对于 $m = 1, \ldots, M$ 执行
　　$x_t^{[m]} = f(u_t, x_{t-1}^{[m]})$
　　$w_t^{[m]} = p(z_t, x_t^{[m]}, m)$
　　$\overline{X}_t = \overline{X}_t + \langle x_t^{[m]}, w_t^{[m]} \rangle$
　　$w_{avg} = w_{avg} + \frac{1}{M} w_t^{[m]}$　▷ 平均权重
$w_{slow} = w_{slow} + \alpha_{slow}(w_{avg} - w_{slow})$　▷ 慢速权重
$w_{fast} = w_{fast} + \alpha_{fast}(w_{avg} - w_{fast})$　▷ 快速权重
对于 $m = 1, \ldots, M$ 执行
　　以概率$\max(0, 1 - \frac{w_{fast}}{w_{slow}})$向$X_t$添加随机姿态　▷ 应对绑架问题
　　否则，从$\overline{X}_t$中按概率$w_t^{[m]}$采样$x_t^{[m]}$，并将其添加到X_t　▷ 重采样
返回X_t

7 机器人建图

7.1 地图

功能

- 支持机器人进行定位、导航、规划。
- 容易加入新的信息进行更新。
- 便于计算机储存和处理。

表示法

- 点云地图
  - 优点：可以完全表示环境三维信息，不需要预定义尺寸。
  - 缺点：存储要求高，存在盲区和空洞，需要处理来判断占用和联通状态，不具有通用性（不同机器人无法共用）。

返回目录

- 栅格地图：以允许误差大小确定栅格大小，用$0-1$的值表示栅格被占用的概率（不同激光数据中占用的概率）。
  - 计算
    - 概率：$p(m_i|s_n) = 1 - E_r E_\alpha$，其中：

$$E_r = 1 - k_r(\frac{2(\rho_i - r_i)}{\Delta r})^2, E_\alpha = 1 - k_\alpha(\frac{2(\theta_i - \alpha)}{\Delta\alpha})^2$$

    - 几率：几率$l = \frac{概率p}{1-概率p}$，几率与概率非线性正相关。

      利用贝叶斯公式得到每次测量（相互独立）的递推关系：

$$\begin{aligned}
p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_n) &= \frac{p(s_n|m_i, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})}{p(s_n|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})} \\
&= \frac{p(s_n|m_i)p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})}{p(s_n)} \\
&= \frac{p(m_i|s_n)p(s_n)p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})}{p(m_i)p(s_n)} \\
&= \frac{p(m_i|s_n)p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})}{p(m_i)}
\end{aligned}$$

      有对数几率更新公式：

$$\begin{aligned}
l_{i,n} = \log\frac{p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_n)}{p(\bar{m}_i|s_1, s_2, \cdots, s_n)} &= \log\frac{p(m_i|s_n)p(\bar{m}_i)p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})}{p(\bar{m}_i|s_n)p(m_i)p(\bar{m}_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})} \\
&= \log\frac{p(m_i|s_n)}{p(\bar{m}_i|s_n)} + \underbrace{\log\frac{p(\bar{m}_i)}{p(m_i)}}_{l_0\text{与测量无关}} + \log\frac{p(m_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})}{p(\bar{m}_i|s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})} \\
&= \log\frac{p(m_i|s_n)}{p(\bar{m}_i|s_n)} + \underbrace{l_0}_{\text{占用情况未知时，令}p(m_i)=0.5, l_0=0} + l_{i,n-1}
\end{aligned}$$

  - 特点
    - 优点：可以详细描述环境信息，易于定位和路径规划，不需要预定义尺寸。
    - 缺点：存储要求高，存在盲区和空洞，需要处理来判断占用和联通状态（点占用不够），不具有通用性（不同机器人无法共用）。
  - 拓展
    - 2.5维占用栅格地图（扩展高度图）：为每个栅格附加高度信息（障碍物最高高度）。

返回目录

  * 3维占用栅格地图（Voxel Map，体素地图）：将空间分解为正方体，判断占用情况。
  * 多分辨率地图：障碍质密处栅格小，无障碍处栅格大，空间占用率高，计算复杂度高，存储存在稀疏特征。

- 特征（语义）地图：连续多边形地图，空间占用效率高，定位精度高。
- 拓扑地图：节点和连线的拓扑结构图，便于导航和路径规划，难以精确定位。

7.2 SLAM（Simultaneous Localization and Mapping，同步定位与建图）

问题描述

- 定位（Localization）：根据观测序列、运动序列和地图，确定位姿。误差源于全局定位的初始误差和局部定位的观测误差。

$$E[X^t|Z^t, U^{t-1}, m]$$

- 建图（Mapping）：根据观测序列和位姿，构建地图。误差源于观测噪声。

$$E[m|Z^t, X^t]$$

- SLAM：根据观测序列、运动序列，确定位姿并构建地图。

$$E[X^t, m|Z^t, U^{t-1}]$$

SLAM关键 使用闭环检测进行数据关联，降低估计的不确定度。错误的匹配会使算法发散。

分类

- 基于滤波：EKF-SLAM（卡尔曼滤波）、FastSLAM（粒子滤波，GMAPPING包）。
- 基于优化：图优化（g2o包），主流。

7.3 基于滤波的SLAM算法

7.3.1 *EKF-SLAM*（扩展卡尔曼滤波*SLAM*）[22]

第一个SLAM算法，面向特征地图，采用maximum likelihood进行数据关联。

返回目录

状态 机器人位姿为三维$X_R = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^T$，地图特征为二维$M_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}^T$。

$$x_t = \begin{bmatrix} X_R \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}_{(3+2n)\times 1} \qquad \Sigma_t = \begin{bmatrix} \Sigma_{X_R} & \Sigma_{X_R m_1} & \Sigma_{X_R m_2} & \cdots & \Sigma_{X_R m_n} \\ \Sigma_{m_1 X_R} & \Sigma_{m_1} & \Sigma_{m_1 m_2} & \cdots & \Sigma_{m_1 m_n} \\ \Sigma_{m_2 X_R} & \Sigma_{m_2 m_1} & \Sigma_{m_2} & \cdots & \Sigma_{m_2 m_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{m_n X_R} & \Sigma_{m_n m_1} & \Sigma_{m_n m_2} & \cdots & \Sigma_{m_n} \end{bmatrix}_{(3+2n)\times(3+2n)}$$

高斯协方差矩阵表征了高度互相关性。

步骤

1. 初始状态：$X_0 = 0, \Sigma_0 = diag(\infty)$。
2. 基于运动模型进行状态估计：地图保持不变，与其相关项为0。

$$\bar{X}_t = f'(X_{t-1}, U_{t-1})$$

$$\bar{\Sigma}_{X_R} = \nabla f \cdot \Sigma_{R_{t-1}} \cdot \nabla f^T + R_t, \quad \bar{\Sigma}_t = \nabla f' \cdot \Sigma_{R_{t-1}} \cdot \nabla f'^T + F_x^T R_t F_x, \quad \nabla f' = \begin{bmatrix} \nabla f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

3. 基于观测模型进行预估观测：每个路标观测独立，交叉项为0。

$$\hat{Z}_t = \begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \\ \vdots \\ Z_{nt} \end{bmatrix}, \quad Q_t = \begin{bmatrix} Q_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{2t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{nt} \end{bmatrix}$$

4. 建立状态估计和预估观测的数据关联。

$$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

5. 状态更新。

$$X_t = \bar{X}_t + K_t[\hat{Z}_t - h(\bar{X}_t)], \quad \Sigma_t = [I - K_t H_t]\bar{\Sigma}_t$$

6. 获得实际观测：全局地图 = 全局观测位置 + 机器人测量数据。

   机器人系的激光观测数据$z_t^i = [r_t^i, \phi_t^i]$，投影到世界坐标系：

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_m \\ \bar{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_R \\ \bar{y}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_t^i \cos(\phi_t^i + \bar{\theta}_R) \\ r_t^i \sin(\phi_t^i + \bar{\theta}_R) \end{pmatrix}$$

返回目录

转换得到：

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_m - \bar{x}_R \\ \bar{y}_m - \bar{y}_R \end{pmatrix}, \quad q = \delta^T \delta, \quad \hat{z}_t^i = \begin{pmatrix} \sqrt{q} \\ \operatorname{atan2}(\delta_y, \delta_x) - \bar{\theta}_R \end{pmatrix}$$

有单路标雅可比：

$$\begin{aligned} H_i^j &=^{low} H_i^j F_{x,j} \\ &= \frac{1}{q} \begin{pmatrix} -\sqrt{q}\delta_x & -\sqrt{q}\delta_y & 0 & \sqrt{q}\delta_x & \sqrt{q}\delta_y \\ \delta_y & -\delta_x & -q & -\delta_y & \delta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & 0_{2j-2} & 0 & 0_{2N-2j} \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. 在地图中加入新的路标：新路标与原路标不独立，因为前者由不确定度决定，而不确定度有后者计算。

$$\begin{aligned} & m_{n+1} = f(X_R, Z_{n+1}) \\ & \nabla f_R = \frac{\partial f(X_R, Z_{n+1})}{\partial X_R}, \quad \nabla f_Z = \frac{\partial f(X_R, Z_{n+1})}{\partial Z_{n+1}} \\ & \Sigma_{m_{n+1}} = \nabla f_R \cdot \Sigma_{X_R} \cdot \nabla f_R^T + \nabla f_Z \cdot Q_{Z_{n+1}} \cdot \nabla f_Z^T \\ & \Sigma_{m_{n+1} m_i} = \nabla f_R \cdot \Sigma_{X_R m_i} \\ & \Sigma_{m_{n+1} X_R} = \nabla f_R \cdot \Sigma_{X_R} \end{aligned}$$

得到新的状态（标红部分为扩充内容）：

$$X_t = \begin{bmatrix} X_R \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \\ \color{red}{M_{n+1}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{bmatrix} \Sigma_{X_R} & \Sigma_{X_R m_1} & \cdots & \Sigma_{X_R m_n} & \color{red}{\Sigma_{X_R m_{n+1}}} \\ \Sigma_{m_1 X_R} & \Sigma_{m_1} & \cdots & \Sigma_{m_1 m_n} & \color{red}{\Sigma_{m_1 m_{n+1}}} \\ \Sigma_{m_2 X_R} & \Sigma_{m_2 m_1} & \cdots & \Sigma_{m_2 m_n} & \color{red}{\Sigma_{m_2 m_{n+1}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \color{red}{\vdots} \\ \Sigma_{m_n X_R} & \Sigma_{m_n m_1} & \cdots & \Sigma_{m_n} & \color{red}{\Sigma_{m_n m_{n+1}}} \\ \color{red}{\Sigma_{m_{n+1} X_R}} & \color{red}{\Sigma_{m_{n+1} m_1}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{\Sigma_{m_{n+1} m_n}} & \color{red}{\Sigma_{m_{n+1}}} \end{bmatrix}$$

8. 重复2-7步。

特点

- 计算复杂度高。
- 要求高斯分布，只能处理单峰假设。
- 依赖数据关联正确性。
- 仅适用于有全连接人工路标的点云地图或特征地图，无法使用栅格地图。

返回目录

7.3.2 FastSLAM（粒子滤波SLAM） [23]

集成粒子滤波器与EKF，使用粒子分布表示位姿。

粒子降维 每个粒子相当于对机器人路径的一个假设，构建独立的地图，协方差矩阵只有对角线。

$$x = (\underbrace{x_1, \cdots, x_t}_{3t\text{，撒粒子获得}}, \underbrace{l_{1,x}, l_{1,y}, \cdots, l_{N,x}, l_{N,y}}_{2N\text{，计算获得}})^T$$

基于饶布莱克维尔定理进行因式分解：

$$\begin{aligned} p(x_{0:t}, \underbrace{l_{1:M}}_{\text{地图（路标）}} | z_{1:t}, u_{1:t}) &= \underbrace{p(x_{0:t}|z_{1:t}, u_{1:t})}_{\text{根据观测定位}} \underbrace{p(l_{1:M}|x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t})}_{\text{根据观测建图}} \\ &= \underbrace{p(x_{0:t}|z_{1:t}, u_{1:t})}_{\text{粒子滤波}} \underbrace{\Pi_{i=1}^{M} p(l_i|x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t})}_{M\text{个独立2维EKF}} \end{aligned}$$

其中粒子滤波部分不需要修正过去位姿信息，只需要维护当前位姿。

步骤

1. 运动更新。
2. 计算新特征的EKF。
3. 地图更新。
4. 基于观测计算权重：仅与当前观测相关。

$$\begin{aligned} w^{[k]} &= \frac{\overbrace{p(x_{1:t}^{[k]}|z_{1:t}, u_{1:t})}^{\text{目标分布}}}{\underbrace{p(x_{1:t}^{[k]}|z_{1:t-1}, u_{1:t})}_{\text{建议分布}}} \\ &= \frac{\eta p(z_t|x_{1:t}^{[k]}, z_{1:t-1}) p(x_t^{[k]}|x_{t-1}, u_t) p(x_{1:t-1}^{[k]}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})}{p(x_t^{[k]}|x_{t-1}, u_t) p(x_{1:t-1}^{[k]}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})} \\ &= \eta p(z_t|x_{1:t}^{[k]}, z_{1:t-1}) \end{aligned}$$

5. 插入新特征。
6. 基于权重重采样。

数据关联 计算观测特征和地图特征的匹配概率，准的粒子概率高，不会因关联错误而全盘错误。

- 选择概率大的进行匹配。
- 按照概率进行随机匹配。

特点

- 降维高效。
- 随机采样使数据关联更鲁棒，利用多假设分析忽略位姿误差。
- 粒子数量选取：尽量多，过多可能占用过大内存，过少可能导致错误。

7.4 基于优化的SLAM算法

图优化SLAM：位姿通过约束相互连接，表征不确定性，寻求最优的节点构型使约束误差最小。

构建图（前端）

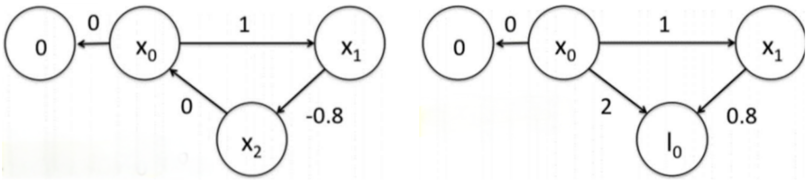
- 节点（Node）：机器人位姿，包含位姿$x_{1:n}(x, y, \theta)$、特征或路标$m_{1:k}(x, y)$信息。
  - 定位（Pose）：$x^T = (x_1^T, x_2^T, \cdots, x_n^T) \in R^{3n}$。
  - SLAM（Pose feature）：$x^T = (x_1^T, x_2^T, \cdots, x_n^T, m_1^T, m_2^T, \cdots, m_K^T) \in R^{3n+2K}$。
- 边（Edge）：位姿间的空间约束，齐次坐标。
  - 里程计测量$(X_i^{-1}X_{i+1})$和观测$(X_i^{-1}X_j)$。
  - 信息矩阵：节点间空间约束的不确定性，优化的权重。协方差的逆，值越大相关性越高，越应重视。

图优化（后端）

- 定位：$e_{ij}(x_i, x_j) = t2v[z_{ij}^{-1}(x_i^{-1}x_j)] \overset{e_{ij}(x_i,x_j)=0}{\Longrightarrow} z_{ij} = (x_i^{-1}x_{i+1})$。
- SLAM：$e_{ij}(z_i, x_j) = \hat{z}_{ij} - z_{ij} = R_j^T(z_i - t_j) - z_{ij} \overset{e_{ij}(x_i,x_j)=0}{\Longrightarrow} z_{ij} = R_i^T(z_i - t_j)$。

返回目录

例题 [24]



(a) 定位　　(b) SLAM

图 12: 图优化例题

1. 定位：起点在0处，向前移动到达远点，编码器测得位移1m，向后移动回到起点（闭环检测），编码器测得位移0.8米。

   有目标函数：

   $$c = \sum_{i=1}^{4} f_i^2 = (x_0 - 0)^2 + (x_1 - x_0 - 1)^2 + [x_2 - x_1 - (-0.8)]^2 + (x_2 - x_0 - 0)^2$$

   求偏导的得到方程组，解得：

   $$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.8 \\ -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.93 \\ 0.07 \end{bmatrix}$$

2. SLAM：起点在0处，观测到前方2m处有路标。向前移动到路标前0.8m处，编码器测得位移1m。

   有目标函数：

   $$c = \sum_{i=1}^{4} f_i^2 = (x_0 - 0)^2 + (x_1 - x_0 - 1)^2 + (l_0 - x_0 - 2)^2 + (l_0 - x_1 - 0.8)^2$$

   求偏导的得到方程组，解得：

   $$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3.0 \\ 0.2 \\ 2.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.07 \\ 1.93 \end{bmatrix}$$

优化求解　略

特点

- 仅将实际发生关联的约束构建连接并进行优化，且不是每次观测都需要更新（多分辨率），效率高。
- 优化思想而非概率思想，易理解和计算。

7.5 LOAM

基于激光和里程计。

- 运动畸变矫正：点云时间戳对齐，利用IMU信息（无IMU时假设匀速）。
- 特征点提取：平面点、边缘点。
- 双odom：高频低精度和低频高精度结合。

8 机器人运动规划

8.1 运动规划（Motion Planning）

需求

- 安全性：规避障碍物。
- 可达性：从起点到终点的连通域。
- 光滑性：平稳舒适地运行。
- 可执行性：动力学约束和执行单元的性能约束。

分层规划

- 路径规划：只考虑几何约束，不考虑机器人和执行器约束。
  - 基于图搜索：算法完备，有限时间内返回解或返回无解。
  - 基于采样：概率完备。

返回目录

- 轨迹规划：在给定路径上考虑机器人和执行器约束，生成随时间变化的运动序列。
  - 在线。
  - 离线

8.2 基于图搜索的路径规划

8.2.1 静态路径规划

图的构建

- 可视图（visibilty graph）：连线障碍物顶点和起点终点，找最短路径。可实现无碰撞最短路径距离规划，但太靠近障碍物。
- 维诺图（Voronoi graph）：路径距周围两个最近障碍物等距（L1/L2）。最大化与障碍物的距离，安全但较长。
- Bug算法图：起点和重点连线，在障碍物处沿边缘行走，更新起点迭代。
- 精确单元分解地图。
- 栅格地图：关联格间无障碍。
- 拓扑地图。
- 搜索树。

算法 [25]

算法	原理	完备性	最优性	补充
深度优先（DFS）	分支遍历	完备	不最优	无方向性，效率低下
宽/广度优先（BFS，泛洪搜索）	层次遍历	完备	不最优	无方向性，效率低下
Dijkstra	计算节点到起点的代价，优先遍历队列中代价最小的节点	完备	最优	地图信息利用不充分
A*	路径评价由移动开销$G(n)$和启发函数代价估计$H(n)$组合得到	完备	最优（需满足可采纳性和一致性）	高效，多解，不一定平滑

表 7: 图搜索算法对比

启发函数：

- 可选：曼哈顿距离、欧几里得距离、切比雪夫距离。
- 可采纳性：低估代价。
- 一致性：符合三角不等式。
- 选取优劣是算法效率的重要因素。

算法补充

- 权重A*：为启发函数添加权重$\epsilon \geqslant 1$，限制扩展节点，提高效率，但不满足可采纳性，只能得到局部最优。
- ARA*（任意时间法+权重A*）：快速得到次优，再优化。

8.2.2 动态路径规划

动态环境特点

- 运行过程中地图可能改变，有动态障碍物。

- 一般性环境，更符合实际。
- 需降低复杂度，提高实时性。

算法

- D*（动态A*）：由目标点向当前位置Dijkstra，利用变化前的地图信息进行动态规划。
- Fucussed D*：将D*的Dijkstra改为A*。
- LPA*：增量式搜索。
- D*-Lite：LPA*的动态形式。
- AD*：结合ARA*和D*-Lite。

8.3 基于采样的路径规划

概述

- 采样：在障碍物处密集采样。
- 距离评估。
- 碰撞检测：凸障碍已比较完善，非凸障碍尚未完善。

PRM（概率路图） 略

RRT（快速探索随机树）

- RRT：迭代撒点，选择离目标近的点，按照这个方向步进（不一定到达），更新起点；最后到达终点附近，无法准确到达重点。完备而高效，但是只能得到可行解而非最优解。
- RRT*：在路径的大圈中进行局部优化，重构节点关系，使局部最优。
- Informed RRT*：在起点终点连线为主轴的椭圆中进行优化。

8.4 面向碰撞的局部路径规划

- DWA（Dynamic Window Approach）：评价函数对方向角、空隙、速度进行加权。计算复杂度低，但可能得不到全局最优。
- TEB（Timed Elastic Band）：连接起点终点为可变形路径，将约束视作引起形变的外力。

8.5 路径平滑

- 约束：初始、终止状态约束。曲线光滑。
- 曲线形态：圆弧、贝塞尔曲线。

8.6 轨迹规划

- 目标：在执行器约束下，沿给定光滑曲线的可执行的运动命令序列。
- 约束：初始、终止状态约束，执行器约束，运动学约束。

9 附录

9.1 误差转化展示

将误差传播协方差矩阵$\sum_p$转化成椭圆展示。

计算 取$\sum_p$左上二阶子阵$\sum_{p_{xy}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$，计算特征值$\lambda_1, \lambda_2$和特征向量$\vec{p}_1, \vec{p}_2$，其分别表示长短轴的大小和方向，圆心是$(x_k, y_k)$（直接对$\sum_p$求取特征根和特征向量，再取前两个，结果与其不同）。

意义

- 长短轴表示误差在不同方向上的大小，可通过开根号、乘系数等方法调节。

- 方向角表示误差传播的主要方向，体现了误差传播的各向异性。
- 椭圆大小反映了系统的误差范围，可按置信度缩放。

返回里程计12。

9.2 奇异值分解（Singular Value Decomposition，SVD）

根据$A_{m\times n}$计算$(A^TA)_{n\times n}$ 和$(AA^T)_{m\times m}$两个对称矩阵，求二者的特征值和特征向量：

$$A^TAv_i = \lambda_i v_i, i = 1, 2, \ldots, n \quad AA^Tu_i = \mu_i u_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

其中，λ_i, μ_i是特征值，v_i, u_i是其对应的特征向量，分别组成$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$和$U = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$。

奇异值σ_i是λ_i, μ_i的平方根，将其按降序排列，并构造对角矩阵$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$，得到SVD分解$A = U\Sigma V^T$。

返回里程计5.2.1。