数 学

目　录

标　签

1 基础

1.1 逻辑

充要条件

- $A \Rightarrow B$则$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$，A是B的充分条件，B是A的必要条件；$A \Leftrightarrow B$，A是B的充要条件；$A \not\Leftrightarrow B$，A是B的无关条件。
- 证明充要条件：充分性+必要性。

对立判断 $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$，$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$。

数学归纳法 [1]

$T(n)$是$n \in N$的命题,先判断$T(n_0)$成立，再假设$T(k)$成立（即n_0到k都成立），推断$T(k+1)$成立。

1.2 解析式

$$\textbf{解析式}\begin{cases}\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\begin{cases}\text{真分式}\\ \text{假分式}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}\\ \text{超越式}\end{cases}$$

- 单项式：系数和次数。
- 多项式：次数（最高次）。
- 分式：分母非0。
- 真/假分式：分子次数小/大于分母次数。
- 无理式：根式中含字母。

- 代数式：数与字母有限次代数运算。
- 超越式：超越运算（无理数次指数运算、对数运算、三角运算、反三角运算）。

分式运算 分母分子最大公因式为常数时互质。

根式运算

- 平方根与算术平方根（非负）。
- $\sqrt{a^2} = |a|$。
- 分母有理化、分子有理化。

1.3 方程与不等式

一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$

- 判别式$\Delta = b^2 - 4ac$。
- $x_{1,2} = \begin{cases} \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} & ,\Delta > 0 \\ \frac{-b}{2a} & ,\Delta = 0 \\ \frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}i}{2a} & ,\Delta < 0 \end{cases}$
- 对称轴$x = -\frac{b}{2a}$。
- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$
- 区间根、区间最值、区间正负性。

一元N次方程$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0(a_n \neq 0)$**根与系数的关系**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

基本不等式 [2]

- 绝对值不等式。
- 均值不等式（$x_i > 0$）：$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n}}$，
  依次为调和平均数(HM)、几何平均数(GM)、算术平均数(AM)和平方平均数(RMS)。
- 三角不等式：$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$，
  应用：$|b| = |b-a+a| \leqslant |b-a|+|a|$，两个$a$可以是相等的不同量。
- 柯西不等式：$(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2)(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2) \geqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$。
  应用：$(A+B)^2 = (a_1a_2+b_1b_2)^2 \leqslant (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$。

多项式函数最值问题

- 检验能否取到最值。
- $x+\frac{1}{x}$最值，$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$。
- 代入化简为单变量函数。

1.4 坐标系

直角坐标系 坐标系旋转，转θ，$(x,y) \to (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$，不可以用极坐标。

极坐标系

- 极点（$r=0$，θ不定）与极轴（射线$\overline{Ox}$）。
- 极半径（第一坐标）与辐/极角（第二坐标）。
- 狭义极坐标系（各点表示方法唯一）与广义极坐标系（负极半径，非主值辐角）。
- 极坐标表示直线和圆的方程。
- 函数极值问题。

坐标系转化

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。
$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

1.5 常数

- $\pi = 3.1415926\ldots$。
- $e = 2.71828\ldots$。

2 极限与无穷级数

2.1 函数

2.1.1 概念

函数($y = f(x)$)

- 自变量与因变量。
- 定义域与值域。
- 单值函数（一对一，多对一）与多值函数（一对多）。

反函数($x = f^{-1}(y)$) 严格单调⇒有反函数。

复合函数($y = f[g(x)]$) 定义域。

隐函数($F(x, y) = 0$确定的函数) 求函数一点：化为两函数相等，画图观察。

2.1.2 性质

有界性 区间内绝对值不超过某正数。

单调性 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]$的符号。

奇偶性

- 奇函数：$y = -f(-x)$（另一表述：$\forall x, y, f(x+y) = f(x) + f(y)$）。
- 偶函数：$y = f(-x)$。
- 复合函数奇偶性。
- 微分或积分后奇偶性转变。

周期性

- 最小正周期T。
- 复合函数周期：内函数周期。
- 微分或积分保持周期。

函数对称

- 关于$(0, 0)$：$y = -f(-x)$。
- 关于$x = 0$：$y = f(-x)$。
- 关于$x = a$：$y = f(2a - x)$。
- 关于$y = x$：$x = f(y)$。

2.1.3 常用函数

幂函数($y = x^\mu$)

指数函数($y = a^x$) a^0代换1。

对数函数($y = log_a x$) $log_a 1$代换0。$u^v = e^{v \ln u}$（$x^x = e^{x \ln x}$是初等函数）。

三角函数

- 诱导公式。
- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$：$\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}=\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\alpha}$。
- 和差化积（积化和差）：

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})
\end{aligned}
$$

- 和角公式：

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

- 正弦公式：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。
  余弦公式：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。
- $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$，$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$。
  $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$。

反三角函数

- 主值区间： $\arcsin\theta$为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$， $\arccos\theta$为$[0,\pi]$， $\arctan\theta$为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。
- 代换：$\arcsin x=t$，则$x=\sin t$，$\cos t=\sqrt{1-x^2}$。
- $\sin(\arcsin x)=\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1]$,
  $\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$,
  $\arcsin(\sin x)=x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,
  $\arccos(\cos x)=x, x\in[0,\pi]$。
- $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$，
  $\arctan x+arccot x=\frac{\pi}{2}, x\in R$。

双曲函数与反双曲函数

- 双曲正弦函数$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$：奇函数。
- 反双曲正弦函数$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$：奇函数，x的等价无穷小，导数为$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

初等函数

- 基本初等函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。
- 初等函数：初等函数经有限次四则运算以及复合得到的可以由一个式子表示的函数。定义域可以是孤立点集。

分段函数　用几个式子表示一个函数，一般不是初等函数。

- 绝对值函数$|x|$。
- 符号函数$\operatorname{sgn}(x)$。
- 取整函数（$[x]$，$\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$）和取小函数（$\{x\}$）。
- 狄利克雷函数$D(x)=\begin{cases}1 & ,x\in Q\\ 0 & ,x\in R-Q\end{cases}$。

2.2 函数极限

2.2.1 概念

δ邻域

- δ邻域$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$。
- 去心δ邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$。
- 左/右δ邻域$U^{\mp}(x_0,\delta)=\{x|0<\mp(x-x_0)<\delta\}$。

极限

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。
$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|>M$。
$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

无穷与超实数

- 非零无穷小量x^*：$\forall n \in N, |x^*| < \frac{1}{n}$；无穷大量$\frac{1}{x^*}$。
- 超实数$X^* = x_0 + x^* = std(X^*) + [X^* - std(X^*)](x_0 \in R)$，其中$std(X^*)$是超实数的标准实数部分。$x_0 + x^*$为有限超实数，$x_0 + \frac{1}{x^*}$为无穷超实数。
- 超实数系R^*：由R与$x^*, \frac{1}{x^*}$构成。

核与趋核运算

- 实数核x_0周围的超实数光环$x_0 + x^*$有无穷多个。
- 极限计算[3]：先对求极限部分做实数运算，再进行求极限的趋核运算（替换等价无穷小属于后者，故要在通分后才能做替换）。
- 趋核速度：

表 1: 趋核运算（极限的四则运算）

$f(x)$与$g(x)$的核值	核值	
	加减	乘除
都有	存在	存在
一有一无	不存在	可能存在
都无	可能存在	可能存在

2.2.2 性质

唯一性 极限存在则唯一，若左右极限（$x \to \infty$为$x \to \infty^{\pm}$，$x \to x_0$为$x \to x_0^{\pm}$。）不同，则不存在极限（指数函数、绝对值函数、断点）。

局部有界性

- 极限存在$\Rightarrow$函数局部有界。
- 闭区间内连续的函数必有界；开区间内连续的函数在边界处有极限则必有界。
- 有界函数的和、差、积（没有商）仍有界。

局部保号性 函数在极值点的邻域保持符号。

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = A >/< 0$，$U(x_0,\delta)$内$f(x) >/< 0$。
- $\mathring{U}(x_0,\delta)$内$f(x) \geqslant / \leqslant 0$，$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则$A \geqslant / \leqslant 0$。
- 证明：取$\varepsilon = \frac{A}{2}$。

2.2.3 无穷小$\lim_{x\to \cdot} f(x) = 0$

运算

- 有限个无穷小的和是无穷小，无限个无穷小的和不一定是无穷小（$\lim_{x\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}) = \ln 2$）。
- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小，有限个无穷小的乘积是无穷小。
- 无穷小（余项）运算：加减法取低阶，乘除法阶数做加减，非零常系数不影响阶数。

比阶

- $$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0 & ,\alpha(x)\text{是}\beta(x)\text{的高阶无穷小，记}\alpha(x) = o(\beta(x)) \\ \infty & ,\alpha(x)\text{是}\beta(x)\text{的低阶无穷小} \\ c \neq 0 & ,\alpha(x)\text{是}\beta(x)\text{的同价无穷小} \\ 1 & ,\alpha(x)\text{是}\beta(x)\text{的等价无穷小，记}\alpha(x)\sim\beta(x) \end{cases}$$
- $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0, k > 0$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小。
- 不是任意两个无穷小都可以比阶。

等价无穷小（$x \to 0$） [4]

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \ln(x+\sqrt{1+x^2})$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \sim x - \ln x$
- $\tan x - \sin x \sim x^3$
- $a^x - 1 \sim x\ln a$

- $(1+x)^a-1\sim ax$
- $(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\sim -\frac{e}{2}x$

根据需要的阶数选择替换等价无穷小还是泰勒展开。

无穷大

$\lim_{x\to\cdot}f(x)=\infty$，自变量的同一变化过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大。

$x\to+\infty,\ln^{\alpha}n\leqslant x^{\beta}\leqslant a^x\leqslant x!\leqslant x^x$ （后两者$x\in N_+$）。

2.2.4 计算

重要极限 [5] $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

洛必达法则 [6]

- 使用条件： $\lim_{x\to\cdot}f(x)$与$\lim_{x\to\cdot}F(x)$同时为0或∞， $\lim_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}(F'(x)\neq 0)$存在或为无穷大（区间内$f(x),F(x)$可导，$\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}$有极限$\not\Rightarrow\lim_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$有极限）。
- $\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ （仍满足条件可继续使用）。
- 证明：柯西中值定理。

泰勒公式

- $f(x)$在$x=a$处n阶可导，则$\forall x\in U(a,\delta)$， $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x^n)$。其中，$o(x^n)$为佩亚诺余项。
- 可以用多项式表达任何一个可导性好的函数，且函数的展开式唯一。

- 常用泰勒展开 [7]

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+O(x^{2n+2})$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+O(x^{2n+2})$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots+\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}+O(x^{2n})$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+O(x^{2n+2})$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+O(x^{n+1}),-1<x\leqslant 1$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$$
$$+O(x^{n+1}),x\text{范围随}a\text{变化}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+O(x^{n+1}),-1<x<1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+O(x^{n+1}),-1<x<1$$

夹逼定理（隐式上下界） $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，而$\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则$\lim f(x)=A$（条件换为$\lim[g(x)-h(x)]=0$，无法说明$\lim g(x)$和$\lim h(x)$存在）。

过程

- 化简：提出极限不为0的因式、等价无穷小代换、提公因式、拆并项、同除幂、换元。
- 以上公式、定理。

情形 [8]

- $\lim_{x\to\cdot}\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}$，趋于无穷时看最高次项，趋于0时看最低次项。

- $0\cdot\infty$：倒换简单因式。
- $\infty\cdot\infty$：通分或倒换。
- ∞^0或0^0：$u^v=e^{v\ln u}$。
- 1^∞：$\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$。

2.3 函数的连续与间断

2.3.1 连续

函数存在与函数连续 $f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义，且$\lim_{x\to x_0}f(x)=(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=)f(x_0)$。

连续性运算法则

- 在x_0处连续的函数的四则运算（被除数不为0）也在x_0处连续。
- $\varphi(x)$在x_0处连续，$f(u)$在u_0处连续，且$u_0=\varphi(x_0)$, 则$f[\varphi(x)]$在x_0处连续。
- 区间内单调且连续的函数，在对应区间的反函数单调且连续，且二者单调性相同。

连续函数邻域保号 $f(x)$在x_0处连续，$f(x_0)>/<0$，则$\exists\delta$使$U(x_0,\delta)$内，$f(x)>/<0$。

2.3.2 间断

9

- 第一类间断点：
  - 可去/补间断点：$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$，补充$f(x_0)=A$即可连续。
  - 跳跃间断点：$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$和$\lim_{x\to x_0^-}f(x)$存在但不等。
- 第二类间断点：
  - 无穷间断点：$\lim_{x\to x_0^+}f(x)$和$\lim_{x\to x_0^-}f(x)$至少有一个是∞。
  - 振荡间断点：$\lim_{x\to x_0}f(x)$震荡不存在。

2.4 数列$\{a_n\}$

概念

- 无穷多项的整标函数。
- 通项a_n：递推$a_n = S_n - S_{n-1}$。
- 前n项和S_n（有限项，不会发散）：$\frac{\text{等差数列}}{\text{等比数列}}$，错位$(1-q)S_n = S_n - qS_n$。
- 子列$\{a_{n_k}\}$。

常见数列

- 等差数列：$a_n = a_1 + (n-1)d$，$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$。
- 等比数列：$a_n = a_1 q^{n-1}$，$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q \neq 1)$。
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$，
  $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，
  $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$。

性质

- 单调性：单调递增（减）与单调不减（增），可用作差、作比、数学归纳法、不等式和导数等方法证明。
- 有界性：$\forall n \in N_+, \exists M > 0, |a_n| \neq M$，可用放缩、最值和基本不等式等方法证明。

2.5 数列极限

2.5.1 收敛与发散

$\lim_{n\to\infty} x_n = a(x_n \to a(n \to \infty))$， $a = 0$时，x_n为$n \to \infty$的无穷小量； $a = \infty$时，x_n为$n \to \infty$的无穷大量。

收敛数列性质

- 唯一性：极限存在则唯一。
- 全局有界性：极限存在则有界。
- 保号性：$\lim_{n\to\infty} x_n = a > (<) b$，则$\exists N > 0$，当$n > N$时，$x_n > (<) b$；$\{x_n\}$从某项开始$x_n \geqslant (\leqslant) b$，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \geqslant (\leqslant) b$。

数列收敛与子列收敛

- $\{a_n\}$收敛则$\forall \{a_{n_k}\}$收敛，且极限一致。
- 证明发散：$\{a_{n_k}\}$发散或不同$\{a_{n_k}\}$收敛到不同值。
- 证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$：对$\lim_{n\to\infty} |a_n|$ 使用夹逼定理，证明其上界为0。

2.5.2 计算

四则运算 $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n$存在$\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$存在；$\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$存在$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n$存在。

海涅定理（数列极限与函数极限的联系） [10]

$\mathring{U}(x_0, \delta)$内定义的$f(x)$，$\lim_{n\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \mathring{U}(x_0, \delta)$内以$x_0$为极限的数列 $\{x_n\}(x_n \neq x_0)$，$\lim_{n\to\infty} f(x) = A$存在。常用$\lim_{x\to 0} f(x) = A$与$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = A$。

夹逼定理 $\exists n_0 \in N_+, n > n_0$时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$，则$\lim_{n\to\infty} x_n = a$。

常用放缩 [11]

- $nu_{min} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant nu_{max}$，
  当$u_i \geqslant 0$时，$u_{max} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant nu_{max}$。
- 三角不等式、均值不等式。
- 同号元素幂放缩。
- 反向作比：如$n\pi < x < (n+1)\pi, 2n < S(x) < 2(n+1)$，则$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$。

- $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$，四个<的区间分别是$(0, \frac{\pi}{2}), (0, \infty), (0, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{4})$。
  $\arctan x < x < \arcsin x, [0, 1]$。
  $\ln(x+1) \leqslant x \leqslant e^{x-1}$。
  $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x > 0$。
- 闭区间上函数最值。
- 压缩映射原理（$n = 1, 2, \ldots$）：
  - $\exists k \in (0, 1), |x_{n+1} - a| \leqslant k|x_n - a|$，则$\{x_n\}$收敛于$a$。
  - $x_{n+1} = f(x_n)$，$f(x)$可导且$\forall x \in R, |f'(x)| \leqslant k < 1$，$a$是$f(x) = x$的唯一解，则$\{x_n\}$收敛于$a$。
- $\lim_{n\to\infty}(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \min\{a, b\}$。

单调有界准则　$\{x_n\}$单调增加/减少且有上/下界$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n$存在。即$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant a$或$a \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$，$\lim_{n\to\infty} x_n$存在。

收敛速度　$\{x_n\}$与$\{y_n\}$在$n \to \infty$时都趋于a，$u_n = |x_n - a|$，$v_n = |y_n - a|$，无穷小量阶数高的收敛速度快。

2.6 无穷级数

3 一元微分

3.1 导数与微分

3.1.1 导数

可导

- 自变量增量$\triangle x$和函数增量$\triangle y$的比的极限存在则可导。

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \frac{d[f(x)]}{dx}|_{x=x_0} = y'(x_0) = y'|_{x=x_0} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{(x_0 + \triangle x) - x_0}，\text{增量式} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x) - x_0}，\text{函数式}
\end{aligned}
$$

- $y = f(x)$在x_0处可导$\Leftrightarrow y = f(x)$在x_0处导数存在 $\Leftrightarrow f'(x) = A$。

- 两个单侧导数存在且相等$\Leftrightarrow$可导。

- 可导$\Rightarrow$连续。

求导技巧

- 奇偶性改变，保持周期。

- $f(x)$与$|f(x)|$：
  - 连续性：$f(x)$在x_0连续$\Rightarrow |f(x)|$在x_0连续。
  - 可导性：$f(x)$在x_0可导，当$f(x_0) \neq 0$时，$|f(x)|$在x_0可导；当$f(x_0) = 0$时，$f'(x_0) = 0$则$|f(x)|$在x_0可导，$f'(x_0) \neq 0$则$|f(x)|$在x_0不可导。

几何意义

- 驻点：导数为0的点。
  角点：$f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$，不可导，无切线。

- 切线斜率$f'(x_0) = k$：切线方程$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$，法线方程$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0)$。

- 切线存在$\Rightarrow$导数存在（无穷导数处有切线，但视为无导数）。

高阶导数　$f^n(x_0)$存在$\Rightarrow f^{n-1}(x_0)$在x_0附近有定义且在x_0连续。

3.1.2 微分

可微与微分　$\exists$与$\triangle x$无关的常数A，使$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x) = A \triangle x + o(\triangle x)$，则称$f(x)$在$x_0$可微，线性主部$dy|_{x=x_0} = A \triangle x = f'(x_0)dx$称为$f(x)$在$x_0$的微分。

判别

- $\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y-A\triangle x}{\triangle x}$。
- 可导⇒可微。

几何意义 可微点附近可用切线段近似代替曲线段。

技巧 通过$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x)-x_0}$，反向凑形式求$f'(x_0)$。

$\triangle$ y与dy $\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y-dy}{dy}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{o(\triangle x)}{f'(x_0)\triangle x}=0$，$\triangle$ $y-dy$是dy的高阶无穷小。

3.2 导数的计算

3.2.1 求导公式

基本与常用求导公式 [12]

$$(x^a)'=ax^{a-1}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a,(a>0,a\neq 1) \qquad (e^x)'=e^x$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},(a>0,a\neq 1) \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sqrt{x^2+a^2})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

四则运算 [13]

- 线性。

- 积：$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$。多项连乘求导问题，可化为一项与剩余项的积，通过该项值为0消去剩余项求导。
- 商：$[\frac{u(x)}{vx}]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}, v(x) \neq 0$。

复合函数 $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$。

分段函数 分段点处左右导数不等则该点导数不存在。

反函数$x = \varphi(y)$ $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$。

隐函数 视y为x的函数，对等式两边分别求导，归纳并解关于y'的方程。

参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$。

技巧

- 多项连续运算：求对数后求导。
- $u(x)^{v(x)}, u(x) > 0, u(x) \neq 1$化为$e^{v(x)\ln u(x)}$后求导。

3.2.2 高阶导数

常用高阶导数

$$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}$$
$$(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}$$
$$(\ln(ax+b))^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$$
$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$
$$(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

反复求导得到通项。

莱布尼茨公式 [14] $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$，$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$。

泰勒展开

3.3 导数的几何应用

3.3.1 单调性与极值

单调性　区间内$f'(x) \geqslant / \leqslant 0$，且等号仅在有限点处成立，则$y = f(x)$在区间上严格单调增加/减少。

极值

- $\forall x \in U(x_0, \delta), f(x) \leqslant / \geqslant f(x_0)$，则$f(x)$在$x_0$取极大/小值。
- 局部非端点，间断点可能是。
- 常函数处处极值。

极值点条件

- $f(x)$在x_0可导并取极值$\Rightarrow f'(x) = 0$。
- $U^{\pm}(x_0, \delta)$内$f'(x)$异号（x_0处不一定可导）$\Rightarrow f(x)$在x_0取极值。
- $f'(x_0) = 0, f''(x) < / > 0 \Rightarrow f(x)$在$x_0$取极大/小值（可推广到偶数阶）。

3.3.2 凹凸性与拐点

凹凸性

- 连续区间内，$\forall x_1, x_2, f(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}) < / > \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} \Rightarrow$凹/凸弧（可将$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$拓展为任意非负凸组合）。
- 可导区间内，$\forall x, x_0, x \neq x_0, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < / > f(x) \Rightarrow$凹/凸弧。
- 二阶可导区间内，$f''(x) > / < 0 \Rightarrow$凹/凸弧。

拐点　连续曲线凹凸弧分界点，不能是间断点。

- x_0是拐点$\Rightarrow f''(x_0) = 0$（或不存在）。

- $U^{\pm}(x_0, \delta)$内$f''(x)$异号$\Rightarrow x_0$是拐点。
- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$是拐点（可推广到奇数阶，中间阶导数为0）。

极值点与拐点讨论

- 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点，但不可导点可以。
- $f(x) = (x-a)^n g(x), n > 1, g(a) \neq 0$，$n$为偶数时，$x = a$是$f(x)$的极值点；$n$为奇数时，$x = a$是$f(x)$的拐点。
- $f(x) = \Pi_{i=1}^{k}(x-a_i)^{n_i}$，$a_i$两两不等，$n_i$为正整数，为1的有$k_1$个，为偶数的有$k_2$个，为非1奇数的有$k_3$个，则$f(x)$的极值点数为$k_1 + 2K_2 + k_3 - 1$，拐点数为$k_1 + 2K_2 + 3k_3 - 2$。

3.3.3 其他

渐近线

- 铅直渐近线（无定义点、定义域端点、分段点处）$x = x_0$：$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$。
- 水平渐近线（无穷远处）$y = a$：$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$。
- 斜渐近线（无穷远处）$y = ax + b$：$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \to \pm\infty}[f(x) - a(x)] = b$。

最值

- 定义：$\forall x \in$定义域，$f(x) \leqslant / \geqslant f(x_0)$，则$f(x_0)$为$f(x)$的最大/小值。
- 最值与极值：最值点不一定是极值点（边界点），极值点不一定是最值点（局部极值），非端点最值点是极值点。
- 求解：比较驻点、不可导点和端点值/端点侧极限值。

作图

- 定义域，奇偶性、周期性。
- 一阶导数确定单调性与极值点，二阶导数确定凹凸区间与拐点。
- 渐近线。

曲率

- 曲率$k = \frac{|y^n|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$，曲率半径$R = \frac{1}{k}$。
- 弯曲程度越大，曲率越大，曲率半径越小。

4 一元积分

4.1

5 微分方程

5.1

6 多元微积分

6.1

7 行列式与矩阵

7.1 行列式

几何意义 二阶行列式是两个行向量组成的平行四边形的面积，三阶行列式是三个行向量组成的平行六面体的体积。

- 一阶：$|a| = a$。
- 二阶：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$。
- 三阶：沙路法（补两列）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

逆序数

- 排列$i_i i_2 \dots i_s \dots i_r \dots i_n$中，$s < r, i_s > i_r$ 称为逆序，τ为逆序（总）数，根据τ的奇/偶划分奇/偶排列，无逆序称为自然排序。
- $|a|_{n\times n} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$， $n!$项之和。

展开定理（降阶计算）

- 余子式M_{ij}为去掉i行j列的剩余行列式；代数余子式$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$。
- 展开公式：$|A| = \sum_{i/j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, j/i = 1, 2, \dots, n$。
- 某行/列元素乘以另一行/列元素对应的代数余子式之和为0。
- （代数）余子式的线性组合：某行/列代数余子式的线性组合相当于将该行/列替换为相应系数后的行列式。

性质

- 行列地位等价。
- 行列式为0：有全零行/列，有两行/列对应成比例。
- 数乘：一行/列乘系数，行列式也乘同一系数（区别kA与$k|A|$）。
- 加法：拆一行/列，原行列式等于新行列式之和。
- 换行/列：换奇数次变号，换偶数次不变。
- 倍加：行/列倍加另一行/列，行列式不变。

重要行列式

- 对角线行列式（上/下三角形行列式）：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$。

- 拉普拉斯展开式：分块矩阵的对角线（三角形）行列式。
- 范德蒙德行列式：$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$。
- $|A + B_{n\times m}C_{m\times n}| = |A||E_m + CA^{-1}B|$：
  - 向量：$|A + \alpha\beta^T| = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{vmatrix} = |A|(1 + \beta^T A^{-1}\alpha)$，提取易算行列式$|A|$（如对角阵），剩余部分满秩分解。特例为爪型行列式。
  - 分块矩阵：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$。

计算技巧

- 生成0，展开定理。
- 归结为常用形式或分块矩阵形式。
- 归纳法，递推法。
- 改写成线性组合的形式（$|AB| = |BA| = |A||B|$）；$AB \neq BA$；$AB = 0$，则A, B必有一个为0。
- 各行/列和相同，提取归1。
- 对$A_{n\times m}, B_{m\times n}$，有$x^n|xE_m - BA| = x^m|xE_n - AB|$（可用于求特征值）。

克拉默法则（解线性方程组）

- 非齐次（$Dx = b, b \neq 0$）：$x_i = \frac{D_i}{D}$，其中D_i是把D中第i列替换为b（$D = 0$，方程组无解或有无穷多解）。

- 齐次（$Dx=0$）：$D\neq 0$只有零解，$D=0$有非零解。

7.2 矩阵

7.2.1 定义

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，由若干行/列向量拼接而成，$m=n$时为方阵。
- 行列数分别相同为同型矩阵，进而对应元素全部相同为相等矩阵。
- 区别零阵$\mathbf{0}$和0。

7.2.2 运算

基本运算

- 线性运算：满足交换律、结合律、分配律。
  - 加法：对应元素相加。
  - 数乘：所有元素乘系数。
- 乘法：满足结合律（连乘括号移动）、分配律，一般不满足交换律。
  - $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}, c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$（C的列向量是A的列向量的线性组合，C的行向量是B的行向量的线性组合）。
  - $AB=\mathbf{0}\nRightarrow A/B=\mathbf{0}; AB=AC\nRightarrow B=C$。
  - 满秩分解：将矩阵变成行列向量之积。

转置A^T

- 对称阵$A^T=A, a_{ij}=a_{ji}$；反对称阵$A^T=-A, a_{ij}=-a_{ji}, a_{ii}=0$。
- 正交矩阵：$AA^T=E\Leftrightarrow A^T=A^{-1}$，行/列向量组是规范正交基。

幂（方阵）A^n $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，则$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$。

伴随$A^*=(A_{ji})_n$

- 求对应位余子式，用逆序数获得符号，再转置。
- $A^*=|A|A^{-1}$。

行列式（方阵） $|A|$

- $|kA| = k^n|A|$。
- $A \neq B \nRightarrow |A| \neq |B|$，$A \neq \mathbf{0} \nRightarrow |A| \neq 0$。

逆 A^{-1}　可逆则唯一。

- $A_{n\times n}$可逆充要条件[15]：
  - $\exists B, BA = AB = E$。
  - $|A| \neq 0$。
  - 等价标准型为E（可经初等行/列变换化为E/可分解为若干初等矩阵的乘积）。
  - $r(A) = n$（其左/右乘任何矩阵不改变后者秩）。
  - 齐次线性方程组只有零解，非齐次线性方程组有（唯一）解。
  - 行/列向量组线性无关（行/列向量组是R^n的一个基）。
  - 特征值不包含0。
  - AA^T/A^TA正定（特征值全正/与E合同/正惯性系数为n/数序主子式全正）。
- 求解：$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$。

分块矩阵

- 幂：$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix}$。
- 行列式：$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$，$\begin{vmatrix} 0 & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{(n+m)}|A||B|$。
- 逆：$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$，
  $\begin{bmatrix} B & 0 \\ D & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$。

表 2: 矩阵运算总结1

转置	幂	伴随	行列式	逆
$AA^T = A^TA = \|\|A\|\|^2 \cos\theta$	x	$AA^* = A^*A = \|A\|E$	x	$AA^{-1} = A^{-1}A = E$
$(AB)^T = B^TA^T$	$(AB)^m \neq A^mB^m$	$(AB)^* = B^*A^*$	$\|AB\| = \|BA\| = \|A\|\|B\|$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A+B)^T = A^T + B^T$	$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$	$(A+B)^* \neq A^* + B^*$	$\|A+B\| \neq \|A\| + \|B\|$	$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

表 3: 矩阵运算总结2

	转置	伴随	行列式	逆
转置	$(A^T)^T = A$	$(A^T)^* = (A^*)^T$	$\|A^T\| = \|A\|$	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
伴随	x	$(A^*)^* = \|A\|^{n-2}A$	$\|A^*\| = \|A\|^{n-1}$	$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{\|A\|}$
行列式	x	x	x	$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$
逆	x	x	x	$(A^{-1})^{-1} = A$

总结 [16]

- 以上两表默认可以运算（同型，方阵，可逆）。
- 表1：
  - $\cos\theta$为相关系数。
  - 幂列：$AB = BA$时相等。
  - A, B可逆，$A + B$不一定可逆。
- 表2：
  - 伴随行A为n阶方阵。

7.2.3 初等矩阵与秩

初等变换 倍乘、倍乘、倍加，左乘行变换，右乘列变换。

初等矩阵 单位阵经一次初等变换得到，其转置仍是初等矩阵。可逆矩阵可表示为有限个初等矩阵的乘积。

应用

- 求秩：行+列。
- 求逆：行/列，$[A\vdots E]\to[E\vdots A^{-1}]$, $\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}E\\A^{-1}\end{bmatrix}$。
- 求极大线性无关组：行/列。
- 求线性方程组的解：行。
- 求等价标准形（反过来即是满秩分解）：行+列。

行阶梯形矩阵　零行全部位于非零行下方，非零行按首个非零元素位序排序，为行阶梯形矩阵。进而，非零行首个非零元素为1，且所在列其他元素为0，为行最简阶梯形矩阵。非零矩阵可以经有限次初等行变换化为行最简阶梯形矩阵。

等价矩阵　$PAQ=B,|P|,|Q|\neq 0$，则$A\cong B,r(A)=r(B)$，A,B为等价矩阵。$A\cong\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},r=r(A)$，后者为唯一的等价标准形。

矩阵方程

秩　[17]

- 最大不为零子式阶数，零阵为0。
- $r(A_{n\times n})=n\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow \exists A^{-1}$。
- 求法：行阶梯形的非零行数。
- 行/列变换（乘以可逆矩阵）不改变秩。
- $A_{m\times n}B_{n\times s}=\mathbf{0}$，则$r(A)+r(B)\leqslant n$。

7.2.4 特征值与特征向量

定义　$A\zeta=\lambda\zeta$，其中A是n阶方阵，λ是特征值，ζ是其对应的特征向量（ζ是$(\lambda E-A)x=0$的非零解。）。

表 4: 矩阵的秩

AB	A+B	A^*	A^T
$r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$	$r(A+B) \leqslant r(A)+r(B)$	$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$	$r(A^T) = r(A) = r(AA^T)$

求法 [18]

- 求特征矩阵$\lambda E - A$的特征行列式$|\lambda E - A|$。
- 解特征方程（特征多项式$=0$）$|\lambda E - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n) = 0$，得到$\lambda$。
- 解$(\lambda E - A)x = 0$（列向量组合得0），得到ζ（k重λ 对应的线性无关ζ不多于k个）。

其他表述

- $|aA+bE| = 0, r(aA+bE) < n$，则$\lambda = -\frac{b}{a}$。
- 每行元素和相等（成比例）。

相关结论

- 只有特征值是特征方程的解。
- 行列式$|A| = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$，迹$tr(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$。
- 不同特征值对应的特征向量线性无关，一个特征向量只对应一个特征值。
- 同一特征值对应的特征向量的线性组合还是特征向量，不同特征值对应的特征向量的线性组合不是特征向量。

表 5: 变换后的特征值与特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
特征向量	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	$P^{-1}\zeta$

变换后的特征值与特征向量

7.2.5 相似与对角化

概念

- n阶方阵A,B，$\exists P_{n\times n},|P|\neq 0$，使$P^{-1}AP=B$，则$A$相似于$B$，记为$A\sim B$。
- 等价的特殊化：A,B为方阵，$Q=P^{-1}$。
- 反身性、对称性和传递性。
- 判别：定义法，传递性。

性质 $A\sim B,C\sim D,|A|,|B|\neq 0$：

- 可用于判别（有一个不成立则不相似）或求取：
  - $|A|=|B|$。
  - $r(A)=r(B),r(\lambda E-A)=r(\lambda E-B)$。
  - $tr(A)=tr(B)$。
  - $\lambda_A=\lambda_B$。
  - A,B各阶主子式之和（任意k个特征值乘积之和）分别相等。
- 其它：
  - $A^k\sim B^k,f(A)\sim f(B),A^{-1}\sim B^{-1},f(A^{-1})\sim f(B^{-1}),A^*\sim B^*$，且$P$不变。
  - $A^T\sim B^T$，P改变。
  - $AB\sim BA$。
  - $\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}$。

相似对角化

- n阶方阵A，$\exists P_{n\times n},|P|\neq 0$，使$P^{-1}AP=\Lambda$，则$A$可以相似对角化，$\Lambda$是其相似标准形。
- 条件：
  - A有n个线性无关特征向量（重根对应特征向量都线性无关）$\Leftrightarrow$可相似对角化。
  - A有n个不同特征值$\Rightarrow$可相似对角化。

- 求解 [19] ：$P=[\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n]$可使$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$。$P$不唯一，注意$\zeta$与$\lambda$的对应性（一个特征根对应的多个线性无关特征向量的线性组合，也对应这一特征根）。
- 实对称阵：可以相似对角化，不同特征值对应的特征向量相互正交，存在正交矩阵使其相似对角化。

求矩阵高阶幂　转换为对角阵，求高阶幂，再逆变换。

7.2.6 二次型与合同

（n元）二次型

- 完全展开式：$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_i x_i^2+\sum_{i\neq j}^n a_{ij}x_ix_j$。
- 和式：$f(x)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$。
- 矩阵形式：$f(x)=x^TAx$，A为对称阵（保证唯一性）。
- 最值（与特征值的关系）：$\lambda_{min}x^tx\leqslant x^TAX\leqslant\lambda_{max}x^tx$。

合同变换与标准型 [20]

- 合同变换：$f(x)=x^TAx$（A为对称阵），取$x=Cy$，则$f(x)=y^T(C^TAC)y=y^TBy=g(y)$，$B$也为对称阵。
  - A,B合同，记为$A\overset{\sim}{-}B$，$f(x),g(y)$为合同二次型。
  - 反身性、对称性、传递性。
  - 合同$\Rightarrow r(A)=r(B)$。
  - 惯性定理：合同变换不改变惯性指数（正$_p$负$_q$零特征根数）。合同$\Leftrightarrow p_A=p_B,q_A=q_B$。
  - 与相似比较：相似变换不改变特征值（惯性指数），合同变换只保证惯性指数，因此相似一定合同。
- $f(x)=\sum_{i=1}^n d_ix_i^2$为标准型，进而$d_i\in\{1,-1,0\}$为规范型，其余为一般型。
  - 合同矩阵的规范型一致。
  - （拉格朗日）配方法：配方得到完全平方，补足完全完全平方项数，确保可逆，并用原变量线性表示新变量。任何二次型均可由此化成标准型和规范型（不唯一）。

- 一般型：可以采用中间变量（可逆线性变换），使只有交叉项的部分获得平方项。
- 正交变换法：C为特征向量阵（另外使其正交），标准型为特征值对角阵，等同于相似。任何二次型均可由此化成标准型。

正定二次型 二次型无论变量取值（除了全为0），恒正，其A阵为正定矩阵。

- 几何意义：封闭几何图形。
- [21] 正定
  $\Leftrightarrow \forall x \neq 0, x^T A x > 0$；
  $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$（正惯性指数$p = n$）；
  $\Leftrightarrow \exists D, |D| \neq 0$，使$A = D^T D$；
  $\Leftrightarrow A \tilde{-} E$；
  $\Leftrightarrow$A的全部顺序主子式（从左上角取）均大于0。
- 正定$\Rightarrow a_{ij} > 0, |A| > 0$。

8 向量组与线性方程组

8.1 向量组

8.1.1 向量

- n个元素分量构成的有序数组为n维向量。
- 模：$||\alpha|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$，单位向量模为1。
- 线性运算。
- 内积（点积）：$(\alpha, \beta) = ||\alpha||||\beta|| \cos\theta = \alpha^T \beta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$。
- 正交（垂直）：$(\alpha, \beta) = 0$。

8.1.2 线性相关

概念 m个n维向量组成的向量组$\{\alpha_i\}$：

- 线性组合$\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i$。

- 线性表示：$\exists k_i, \beta = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i$，则$\beta$可被向量组线性表示。
- 线性相关：存在不全为0的k_i，使$\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0$，则向量组线性相关。
  线性无关：只有$k_i = 0$时，$\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0$。
- 空间：m个n维向量张成n维空间的m维子空间（$m \leqslant n$）。

判别 [22]

- 向量数大于维数/含有零向量/有向量对应成比例$\Rightarrow$线性相关。
- 至少有一个向量能用剩余向量线性表示$\Leftrightarrow$线性相关。
- 一个向量组（t个向量）可由另一个向量组（s个向量）线性表示。若$t > s$，则前者线性相关；若前者线性无关，则$t \leqslant s$。
- 部分向量线性相关，则向量组线性相关；向量组线性无关，则部分向量线性无关。
- 线性无关向量组升维仍线性无关，线性相关向量组降维仍线性相关。
- 向量数=维数：
  $|A| = 0 \Leftrightarrow A$不满秩$\Leftrightarrow AX = 0$有非零解$\Leftrightarrow$线性相关；
  $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$满秩$\Leftrightarrow AX = 0$只有零解$\Leftrightarrow$线性无关。

相关结论

- 向量组线性无关，加入一个新向量后线性相关，则新向量可用向量组唯一线性表示。
- β可由向量组$\{\alpha_i\}$线性表示
  $\Leftrightarrow [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]X^T = \beta$有解
  $\Leftrightarrow r([\alpha_1, \ldots, \alpha_m]) = r([\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta])$；
  β不能由向量组$\{\alpha_i\}$线性表示
  $\Leftrightarrow [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]X^T = \beta$无解
  $\Leftrightarrow r([\alpha_1, \ldots, \alpha_m]) \neq r([\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta])$。

等价向量组

- 向量组$\{\alpha_i\}$中所有向量都能被向量组$\{\beta_i\}$中向量线性表示，则称$\{\alpha_i\}$可以被$\{\beta_i\}$线性表示。
  若两个向量组能相互线性表示，则二者是等价向量组，记为$\{\alpha_i\} \cong \{\beta_i\}$。

- 不需要同型，只需要同维。
- 反身性、对称性和传递性。
- 初等行变换前后的行向量组是等价向量组，任何相应的部分列向量组具有相同的线性相关性。

极大线性无关组 向量组的部分向量线性无关，且能线性表示向量组中所有向量，则该部分向量为极大线性无关组，一般不唯一。零向量不存在极大线性无关组，线性无关向量组的极大线性无关组是其本身。向量组和其最大线性无关组是等价向量组。

秩 极大线性无关组向量数。

- 等价向量组有相等的秩。
- 一个向量组被另一个向量组线性表示，则前者秩小于后者。
- $r(\text{矩阵}A) = r(\text{行向量组}A) = r(\text{列向量组}A)$。
- $r(A+B) \neq r[A \vdots B] \neq r(A) + r(B)$。
- $r([A \vdots B]) = r(\begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix}) \neq r([A^T \vdots B^T])$。
- 证$r(A) = r(B)$：夹逼或同解。

8.1.3 向量空间R^n

基与坐标 R^n中的n维线性无关有序向量组ξ_i，可线性表示空间中任意向量$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$。$\xi_i$称为$R^n$的一个基，$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$称为$\alpha$在$\xi_i$下的坐标。

基变换与坐标变换 $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]C = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$是$R^n$下基$\xi_i$到基$\eta_i$的基变换公式，矩阵$C$为可逆过渡矩阵。向量$\alpha$在基$\xi_i, \eta_i$下的坐标分别为$x, y$，则$x = Cy$是坐标变换公式。

张成 $V = span\{\alpha_i\}$指向量空间V由向量组α_i张成。

规范正交基（标准正交向量，单位正交向量） 施密特正交化?? on page ??+单位化。

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$，可利用$\alpha_1, \alpha_2$构建垂直于$\alpha_1$的向量。

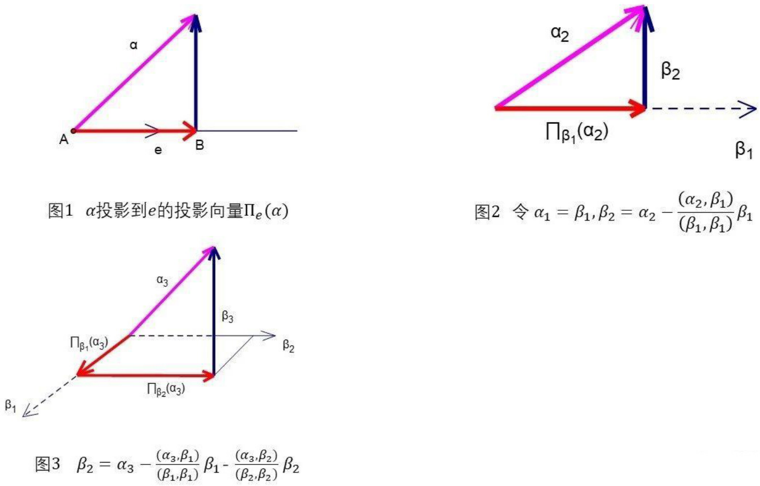

图 1: 施密特正交化

8.2 线性方程组

$A_{m\times n}x = b_{m\times 1}$，系数矩阵$A$，解向量$x$，增广矩阵$[A \vdots b]$。$b = 0$时为齐次线性方程组，$b \neq 0$时为非齐次线性方程组。

8.2.1 齐次线性方程组$Ax = 0$

有解条件

- $r(A) = n$：唯一零解。
- $r(A) = r < n$：有无穷多非零解（解的线性组合还是解），且其中$n - r$个线性无关。

基础解系与通解

- 基础解系：$\xi_i(i = 1, \ldots, n - r)$是$Ax = 0$的解，线性无关且能线性表示任意解。
- 通解：$\sum_{i=1}^{n-r} k_i\xi_i$，$k_i$是任意常数。

求解 [23]

- 初等行变换得到行阶梯形矩阵，其秩为r，则自由变量数为$n-r$。
- 取满秩子矩阵，则剩余$n-r$列为自由未知量，取值为$k_i(i=1,\dots,n-r)$。
- 将非全零行表示成方程，用k_i表示其他未知量。
- 汇总为通解形式，并注明k_i为任意常数。

8.2.2 非齐次线性方程组$Ax=b$

有解条件

- $r(A)\neq r([A\vdots b])$：无解。
- $r(A)=r([A\vdots b])=n$：有唯一解。
- $r(A)=r([A\vdots b])=r<n$：有无穷多解。

$Ax=0$与$Ax=b$解的关系 非齐次解的仿射组合（系数和为1）是非齐次解，非齐次解与任意倍数齐次解的组合是非齐次解，非齐次解系数和为0的组合是齐次解。

广义基础解系 $Ax=0$对应的基础解系和$Ax=b$的一个特解能线性表示后者任意解。

求解 [24]

- 求$Ax=0$的通解$\sum_{i=1}^{n-r}k_i\xi_i$。
- 求$Ax=b$的特解η（最简行阶梯形下用自由变量和常数表示非自由变量）。
- $Ax=b$的通解为$\eta+\sum_{i=1}^{n-r}k_i\xi_i$。

8.2.3 公共解与同解方程组

公共解

- $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$存在公共解$\Leftrightarrow r(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}A&\alpha\\B&\beta\end{bmatrix})$。
- $\alpha=\beta=0$时，可用二者通解相等的等式求公共解（解系数关系），也可用一方通解代入另一方解系数关系。

同解 $Ax = a$与$Bx = b$的解相互满足。

- 齐次：
  - A, B行向量组等价（$r(A) = r(B) = r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$）。
  - A, B之间可线性变换。
- 非齐次：
  - 齐次同解且非齐次有公共解。
  - $[A \vdots a], [B \vdots b]$行向量组等价（$r(A) = r(B) = r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A & a \\ B & b \end{bmatrix})$）。

9 概率论

9.1

10 数理统计

10.1