

控制

目 录

I 自动控制

1	自动控制基础	4
1.1	自动控制	4
1.2	数学模型	5
1.2.1	拉氏变换	5
1.2.2	控制微分方程	6
1.2.3	传递函数	7
1.2.4	结构图	8
1.2.5	信号流图	9
2	时域分析	10
2.1	性能指标	10
2.2	一阶系统	11
2.3	二阶系统	14
2.4	稳定性分析	14
3	根轨迹分析	14
3.1	概念	14
3.2	绘制	14
3.3	广义根轨迹	14
4	频域分析	14
4.1	概念	14
4.2	图像	14
4.3	稳定性分析	14
5	校正	14
5.1	概念	14
5.2	串联校正	14
5.3	反馈校正	14
6	离散系统	14
6.1	概念	14
6.2	z变换	14

6.3	线性定常离散系统	14
-----	----------	----

II 现代控制

7	控制系统	14
7.1	状态空间	14
7.2	线性控制系统	14
8	控制系统的结构性质	14
8.1	能控性与能观测性	14
8.2	稳定性	14
9	反馈控制系统	14
9.1	反馈	14
9.2	李雅普诺夫方法设计反馈系统	14
9.3	极点配置	14
9.4	解耦	14
10	状态观测器与动态反馈	14
10.1	观测器	14
10.2	动态反馈	14
10.3	鲁棒控制	14

III 最优控制

11	最优控制	14
11.1	概念	14
11.2	各方法的关系	14
12	连续时间最优控制	14
12.1	变分法	14
12.2	最大值原理	14
12.3	线性二次型	14
12.4	动态规划	14
13	离散时间最优控制	14
13.1	最大值原理	14
13.2	线性二次型	14
13.3	动态规划	14

图 片

图 1	自动控制系统方框图	4	图 2	结构图	8
			图 3	信号流图	9
			图 4	二阶欠阻尼系统	10
			图 5	一阶系统结构图	11

表 格

表 1	控制方式分类	4	表 3	典型输入信号	6
表 2	典型输入信号	5	表 4	典型传递函数（单位阶跃） . .	8
			表 5	性能指标	11
			表 6	一阶系统响应情况	11

要 点

Part I.

自动控制

1 自动控制基础

1.1 自动控制

没有人直接参与，通过控制器使被控对象的被控量自动地按预定规律运行。

组成

- 被控对象。
- 被控/输出量 $C(s)$ 。
- 控制量。
- 期望/给定/输入量 $R(s)$ 。
- 扰动 $N(s)$ 。

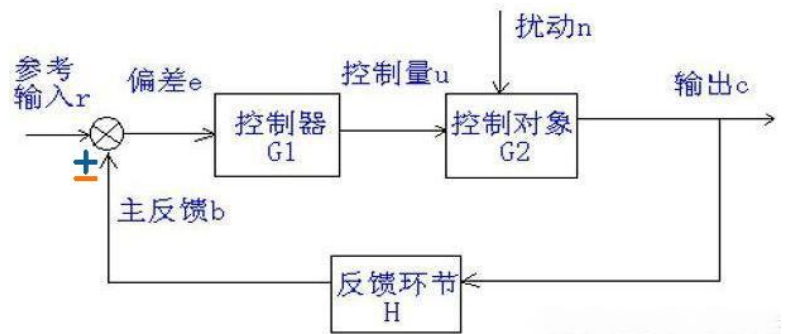


图 1: 自动控制系统方框图

分类

	价格	复杂度	精度	抗干扰性能	其它
开环	低	简单	低	差	稳定
闭环/反馈	高	复杂	高	强	
前馈	高				补偿可测量扰动
复合	闭环 + 前馈				

表 1: 控制方式分类

- 输入量变化特性：

 - 恒值。
 - 随动：未知时间函数。
 - 程序控制：预设时间函数。
- 系统特性：

 - 非线性：常数、幂。
 - 线性：导数。（齐次性，线性）
 - 定常：常系数。
 - 时变：系数不全是常数。
 - 时延：变量位移。
- 传输数据类型：

 - 连续。
 - 离散。

性能

- 稳定性：有无稳态。
- 快速性：到达稳态快慢。
- 准确性：稳态误差大小。

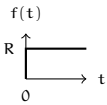
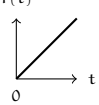
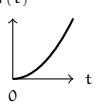
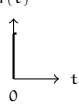
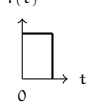
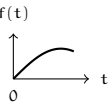
信号	阶跃	斜坡	加速度	脉冲	脉动	正弦
$f(t)(t \geq 0)$	$R(t)$	Rt	$\frac{1}{2}Rt^2$	$f(0) = \infty, \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = A$		$A \sin(\omega t - \phi)$
单位化	$R = 1$			$A = 1, \delta(t)$		
图像						

表 2: 典型输入信号

外作用

1.2 数学模型

1.2.1 拉氏变换

微分方程（时域） $\xrightarrow{\text{拉氏变换}}$ 代数方程（频域） $\xrightarrow{\text{求解}}$ 输出量表达式（频域） $\xrightarrow{\text{反拉氏变换}}$ 方程解（时域）

变换 单边衰减的傅里叶变换，记 $s = \sigma + j\omega t$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

而傅里叶变换为 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$ 。

性质

- 微分定理（非零初始条件）： $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0)$ 。
- 线性： $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \Rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s)$ 。
- 终值定理： $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ 。
初值定理： $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 。
- 位移定理： $L[f(t)] = F(s) \Rightarrow L[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s), L[f(t)e^{\alpha t}] = F(s - \alpha)$ 。
- 相似定理： $L[f(t)] = F(s) \Rightarrow L[f(\frac{t}{a})] = aF(as)$ 。

时域	$\delta(t)$	$1(t)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	e^{-at}	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-at} \cos \omega t$
频域	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

表 3: 典型输入信号

常用变换

1.2.2 控制微分方程

输入输出方程 \Rightarrow 按信号传递顺序列微分方程 \Rightarrow 消去中间变量 \Rightarrow 输出量归一得到标准形式

非线性微分方程的线性化

- 泰勒展开： $y = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx}|_{x_0} \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ 。
- 增量线性化方程： $\Delta y = \frac{df(x)}{dx}|_{x_0} \cdot \Delta x$ 。

解

- 解 = 特解 + 通解（特征根）。
- 解的模态：几点。

1.2.3 传递函数

概念 系统在零初始条件下，输出输入量拉式变换之比， $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。反应线性系统特性，与输入量无关，对应微分方程为s的有理真分式。

求解

- 零初始条件： $G(s) = L[g(t)]$ ，其中g(t)为单位脉冲响应（等效反馈函数）。
- 非零初始条件：微分定理。

应用

$$R(s) = L[r(t)] \Rightarrow C(s) = G(s)R(s) \Rightarrow c(t) = L^{-1}[C(s)]$$

输入输出关系 输入是微积分关系，则输出也是，常数用零初始条件确定。

$$r_2(t) = r_1(t) \Rightarrow c_2(t) = c_1(t)$$

零极点

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad n > m$$

$$= K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

- 零点 z_i ：影响比重、曲线形状，不决定模态。
- 极点 p_j ：特征根，决定模态，对系统响应影响大（近原点、远零点的影响大）。
- 传递系数/根轨迹增益 K^* 。

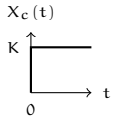
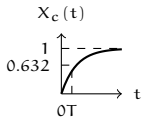
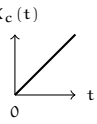
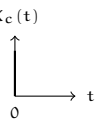
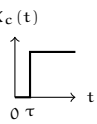
	微分方程	输出 $X_c(t)$	传递函数 $G(s)$	图像
比例	$X_c(t) = KX_r(t)$		K	
惯性	$T \frac{dX_c(t)}{dt} + X_c(t) = X_r(t)$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts+1}$	
积分	$X_c(t) = K \int X_r(t) dt$	t	$\frac{K}{s}$	
微分	$X_c(t) = K \frac{dX_r(t)}{dt}$	$\delta(t)$	Ks	
滞后	$X_c(t) = X_r(t - \tau)$		e^{-Ts}	

表 4: 典型传递函数（单位阶跃）

典型传递函数

开环与闭环

- 开环（断开主反馈）： $G_k(s) = G(s)H(s)$ 。
- 闭环： $G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G_k(s)}$ 。

1.2.4 结构图

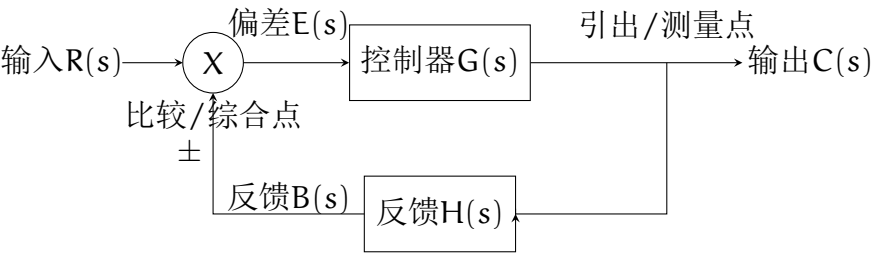


图 2: 结构图

简化 原则：等效原则，引出点信号保持不变。

- 串联和并联积。
- 反馈： $\frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$ 。
- 比较点、引出点移动：前后通路/回路乘积不变。
- 相邻信号相加点、同一信号分支点位置可互换，二者间不可互换。

1.2.5 信号流图

适用于复杂系统。

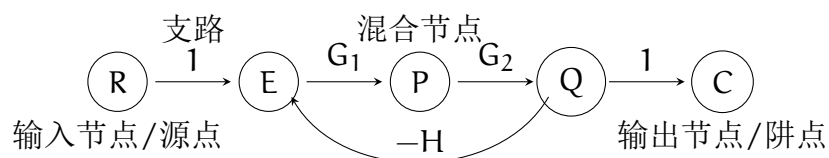


图 3: 信号流图

概念

- 混合节点：流向该结点信号代数和。
- 支路：方向 + 传递函数，相当于乘法器，保证信号单向传递。
- 前向通路：输入到输出，不重复过节点。
- 回路：起止于同一节点，不重复过节点。
- 不接触回路：回路间无公共节点。

简化

- 串联积并联和。
- 回路消除：反馈消去。
自回路消除：节点自延长，增益为1，有回路，反馈消去。

绘制 根据结构图或拉屎变换得到的微分方程。

- 节点：比较点右侧、分支点，可多画再删除。
- 源点、阱点不要和相邻节点合并。

梅森公式

$$P = \frac{1}{\underbrace{\Delta}_{\text{简单回路}}} \sum_{k=1}^n \underbrace{P_k}_{\text{前向通路}} \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_{L_i} + \sum_{L_i, L_j} - \sum_{L_i, L_j, L_r} + \dots$$

其中， Δ_k 是余子式，由 Δ 略去与 P_k 接触项获得。

- 两节点间增益为1，若合并后两回路接触，则不可合并。
- 求解的是输出对输入的增益，若求解中间变量，可省去前面输入、比值进行计算。

2 时域分析

2.1 性能指标

典型输入信号：线性系统选取单位阶跃信号。

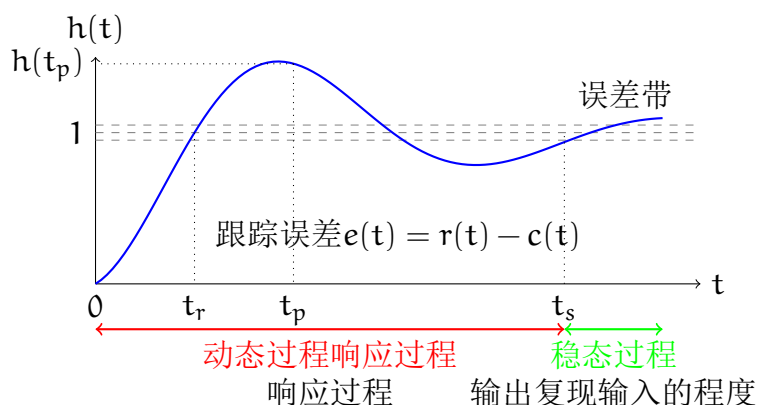


图 4: 二阶欠阻尼系统

状态	指标	符号	定义
动态	延迟时间	t_d	首次达到终值50%的时间
	上升时间	t_r	终值10% – 90%的时间（有震荡系统为0% – 100%）
	峰值时间	t_p	首次达到最大值的时间
	超调量	σ	$\frac{h(t_p)-h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$
	调整时间	t_s	达到并保持在误差带的时间
稳态	稳态误差	e_{ss}	$e(t) _{t \rightarrow \infty} = r(t) _{t \rightarrow \infty} - h(t) _{t \rightarrow \infty}$

表 5: 性能指标

2.2 一阶系统

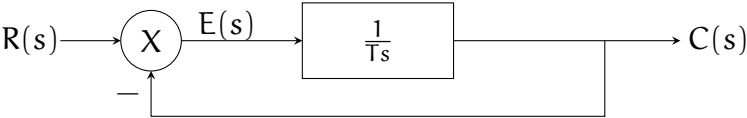


图 5: 一阶系统结构图

$r(t) \rightarrow R(s)$	$c(t)$	$e(t)$	e_{ss}	备注	图像
$1(t) \rightarrow \frac{1}{s}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$-\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	0		
$\delta(t) \rightarrow 1$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$-\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	0		
$t \rightarrow \frac{1}{s^2}$	$t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$	$T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$	T	T越小跟踪精度越高	
$\frac{1}{2}t^2 \rightarrow \frac{1}{s^3}$	$(\frac{1}{2}t^2 + Tt) + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$	$Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$	∞	无法跟踪	

表 6: 一阶系统响应情况

响应情况

单位阶跃响应 T 越大，惯性越大，响应越慢。

$$h(T) = 0.632,$$

$$t_d = 0.69T,$$

$$h(2T) = 0.865,$$

$$t_r = 2.2T,$$

$$h(3T) = 0.95$$

$$t_s = 3T$$

2.3 二阶系统

2.4 稳定性分析

3 根轨迹分析

3.1 概念

3.2 绘制

3.3 广义根轨迹

4 频域分析

4.1 概念

4.2 图像

4.3 稳定性分析

5 校正

5.1 概念

5.2 串联校正

5.3 反馈校正

6 离散系统

6.1 概念

6.2 z 变换

6.3 线性定常离散系统

[返回目录](#)

Part II.

现代控制