智能工程

目 录

图　片

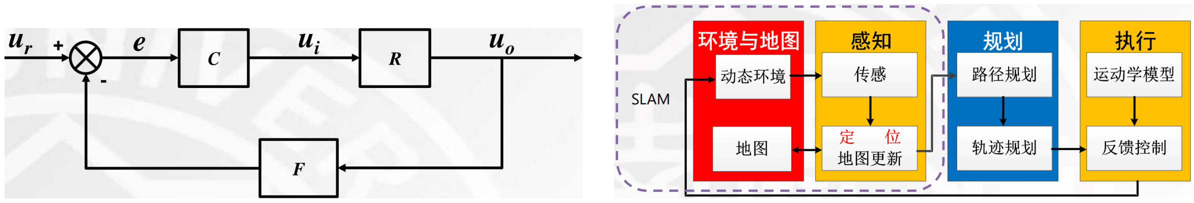
表　格

返回目录

要　点

返回目录

1 基础知识



(a) 课程内容 (b) 工作流程

图 1: 课程内容

	u_i	u_o	R	F	u_r	e	C
概念	系统输入	系统输出	系统模型	反馈单元	系统给定	系统误差	控制器
含义	对被控对象施加作用的手段	作业目标的可测系统状态	系统输入输出映射	系统输出映射变换	系统作业目标	作业目标与系统当前测量状态差值	系统误差与输入映射
内容	机器人运动学			机器人控制		机器人感知	机器人轨迹规划

表 1: 课程内容

课程内容

课程案例 移动机器人->轮式机器人->两轮差速机器人。

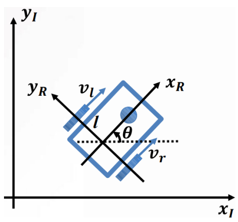


图 2: 两轮差速机器人模型

- 车轮半径r。
- 两轮转速φ_l, φ_r： $v_i = r\varphi_i$。
- 车轮到两轮中间点距离l。

1. 正运动学模型2.3.4。
2. 运动控制器3.1。
3. 里程计模型4.3.1。

2 机器人运动学

2.1 运动学模型

表征机器人驱动（输入）和机器人空间位姿（输出）的关系。

机械臂与移动机器人的区别

- 机械臂本体坐标系固定，精度高；移动机器人本体坐标系随动，精度低。
- 非完整约束 [1] ：移动机器人只知道码盘变化量无法获取位姿，状态取决于路径，源于不可积的微分约束（车轮侧向滑动约束）。
- 微分运动学（Differential Kinematics）：速度空间替代位置空间。

2.2 车轮

类型 [2]

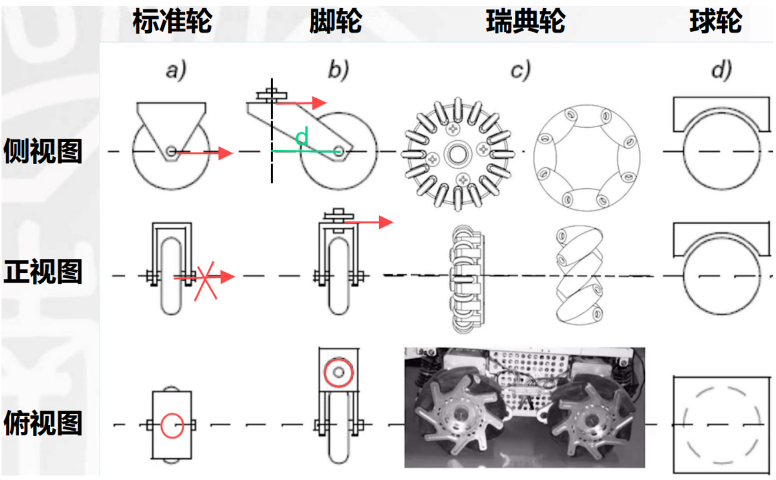


图 3: 车轮类型

类型	自由度	约束	分类/特点
标准轮（Standard wheel）	2 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动	1 沿轮轴滑动	标准固定轮（无法旋转，只有一个自由度） 标准转向轮（舵轮）
脚轮（Castor wheel）	3 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动 沿路轴运动	0	偏心距 d：触地点到垂直旋转轴距离。 扭矩压力，易损坏。
瑞典轮（Swedish wheel）	3 沿轮平面滚动（被动） 沿轮轴转动（主动） 沿垂直轴转动（被动）	0	麦克纳姆轮（Macanum wheel）：45，至少需要4个共同使用。 连续切换轮：90，至少需要3个共同使用。 对地面冲击大，噪音大，易损坏，成本高。
球轮（Spherical wheel）	3（全主动） 沿两个正交轮轴转动 沿垂直轴转动	0	成本高，可靠性差。

表 2: 车轮类型对比

选取

- 数量：至少三轮同时着地，才能保证静态稳定性。四轮可以提升稳定性，但需要悬架。
- 大小：越大的轮子通过性越好，但需要更大的扭矩。
- 多数形态都有非完整约束。

2.3 运动学建模

2.3.1 空间描述与状态表达

坐标系

- 惯性系I：作业目标、控制指令、传感器感知测量信息。
- 机器人系R：控制器误差输入、控制器控制指令。

返回目录

- 笛卡尔系：右手法则。

位姿（POSE）

位置空间求导得到速度空间：

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ \theta_I \end{bmatrix}, \xi_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{求导}} \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}, \dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

惯性系旋转得到机器人系：

$$\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I$$

旋转阵$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$为单位正交阵，$R^T = R^{-1}$。

2.3.2 瞬心（ICR）法 [3]

瞬时旋转/曲率中心（ICR） 刚体上各点角速度相同。

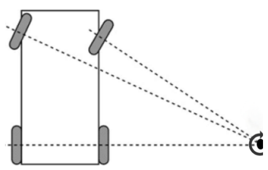


图 4: 瞬心

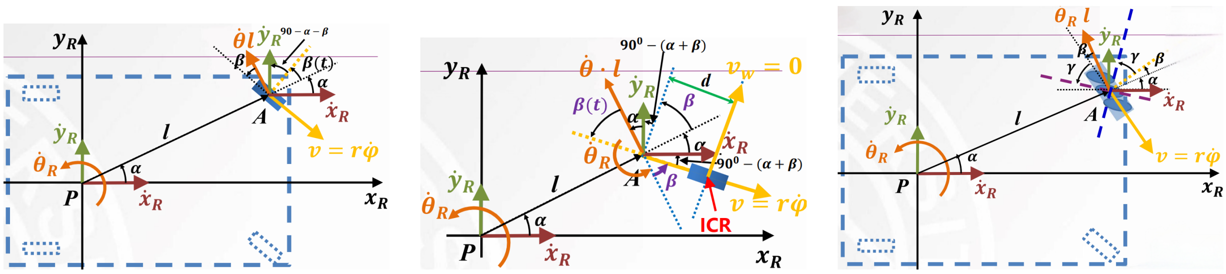
步骤

1. 坐标系变换。
2. 确定约束。
3. 确定瞬心：各轮轮轴到该点距离与速度成正比。
4. 求解$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R & \dot{y}_R & \dot{\theta}_R \end{bmatrix}^T$。

2.3.3 约束方程法 [4]

要求 在水平面上运动，车轮与地面点接触，不变形，安装在钢体表面，舵机转轴与地面垂直。

返回目录



(a) 标准轮　　(b) 脚轮　　(c) 瑞典轮

图 5: 车轮约束示意图

类型	约束	约束方程	主动轮	随动轮
标准轮	纯滚动	$\left[\sin(\alpha+\beta(t)) \quad -\cos(\alpha+\beta(t)) \quad -l\cos\beta(t)\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$	√	x
	无滑动	$\left[\cos(\alpha+\beta(t)) \quad \sin(\alpha+\beta(t)) \quad l\sin\beta(t)\right] R\theta\dot{\xi}_I = 0$	√	√
脚轮	纯滚动	$\left[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos\beta\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$	√	x
	无滑动	$\left[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad d+l\sin\beta\right] R\theta\dot{\xi}_I = -d\dot{\beta}$	√	x
瑞典轮	纯滚动	$\left[\cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad \sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad l\sin(\beta+\gamma)\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}\sin\gamma + r_{sw}\dot{\varphi}_{sw}$	√	x
	无滑动	$\left[\sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad -\cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad -l\cos(\beta+\gamma)\right] R\theta\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}\cos\gamma$	√ 小轮	x

表 3: 车轮约束方程

约束方程

使用　根据各轮主/随动状态列运动约束方程，得到最多三个独立约束方程（对应平面三维位姿）。

以下以N个标准轮（N_f个固定，N_s个转向）机器人为例：

- 滚动约束

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I - J_2\dot{\varphi} = 0$$

其中$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f(N_f\times 3)} \\ J_{1s}(\beta_s)_{(N_s\times 3)} \end{bmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}$, $J_2 = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_N)$为轮径对角阵。

返回目录

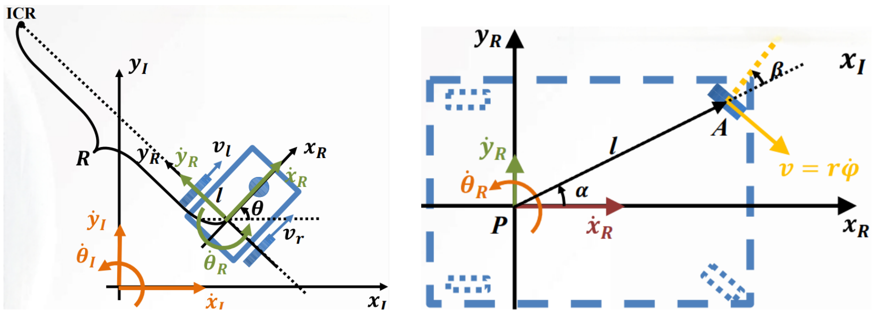
- 滑动约束

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

其中$C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f(N_f\times 3)} \\ C_{1s}(\beta_s)_{(N_s\times 3)} \end{bmatrix}$。

2.3.4 例子

以下以两轮差速机器人（见1）为例，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$：



(a) 瞬心法　(b) 约束方程法

图 6: 两轮差速机器人正运动学建模

瞬心法

两轮差速机器人的瞬心在两轮轮轴上，设其到机器人两轮中间的距离为R，有：

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_R}{R} = \frac{\dot{\varphi}_l r}{R-l} = \frac{\dot{\varphi}_r r}{R+l}$$

解得$R = \frac{\dot{\varphi}_r+\dot{\varphi}_l}{\dot{\varphi}_r-\dot{\varphi}_l}$，代回即可。

约束方程法

- 纯滚动：$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & -l\cos\beta\end{bmatrix}\dot{\xi}_R = r\dot{\varphi}$。
- 无滑动：$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix}\dot{\xi}_R = 0$。

正运动学模型

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix}\dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R\end{bmatrix} = \frac{r}{2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\varphi}_r-\dot{\varphi}_l}{l}\end{bmatrix}$$

返回目录

2.4 自由度

概念

- 衡量机器人改变运行状态的能力。
- 需满足实际作业需求，考虑实现成本。
- 机器人设计基础、算法依据（一般同自由度机器人可采用相同控制规划算法）。
- 平面运动机器人自由度最大不能超过3。

分类 [5]

- 移动度（Degree of Mobility）δ_m：瞬时改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_m = \dim[C_1(\beta_s)] = 3 - \mathrm{rank}[C_1(\beta_s)] \in [0,3]$$

- 转向度（Degree of Steerability）δ_s：间接改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_s = \mathrm{rank}[C_{1s}(\beta_s)] \in [0,2]$$

- 机动度（Degree of Maneuverability）δ_M：改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

  - 机动度相同，结构不一定相同。
  - $\delta_M = 2$，瞬心位于一条直线上；$\delta_M = 3$，瞬心可分布于空间任何一点。

实例（TYPE(移动度,转向度)）

- 全向机器人：
  - Type(3,0)：完整约束全方位移动机器人。
  - Type(2,1)：一个同心轮+两个瑞典轮。
  - Type(1,2)：多舵机全方位移动机器人。
- 非全向机器人：
  - Type(2,0)：差分移动机器人。
  - Type(1,1)：自动驾驶汽车（阿克曼转向）、自行车、叉车。

返回目录

3 机器人运动控制

3.1 运动控制

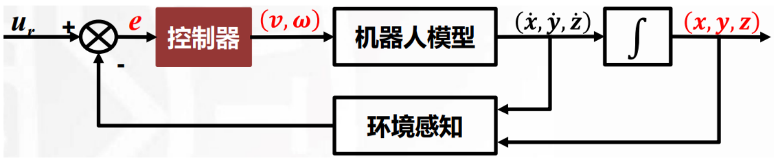


图 7: 运动控制器

误差（惯性系下给定与反馈）$\xRightarrow{\text{变换}}$输入（机器人系下控制输入）。

特点

- 大多存在滑动约束，是非完整系统，有侧向和姿态偏差。
- 非线性，控制器设计复杂，还需要根据可获得的反馈信号选取，按顺序调节控制参数，并且不能同时实现定点控制和跟踪控制。
- 不存在能完成控制目标的连续时不变（静态）反馈控制率。
- 受标定精度影响大，且由于执行单元性能约束，控制输入要合理限幅。

分类

- 定点（镇定）控制（Regulation Control）：以指定姿态到达指定位置。
- 跟踪控制：
  - 轨迹跟踪控制（Trajectory Tracking Control）：跟随给定轨迹（速度+姿态）。
  - 路径跟踪控制（Path Tracking Control）：跟随给定路线。

开环控制 将运动轨迹分割成直线和圆弧，存在以下问题：

- 直线和圆弧的曲率不一致，不连续。
- 难以实现定义若干合适轨迹。
- 速度加速度约束。

返回目录

- 无法自适应调整轨迹来面对环境变化。
- 所得轨迹不光滑。

控制器性能评价 取正定李雅普诺夫函数，其导数负定则系统渐进稳定。

两轮差速机器人运动控制 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_l}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{变换}} \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

3.2 定点控制器 [6]

控制目标 机器人参考坐标系下误差$e = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^T$，设计控制阵$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$，其中$k_{ij} = k(t, e)$，得到控制输入$\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = Ke$，使$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$。

误差信号转换

惯性系下，实际状态$q = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^T$与参考状态$q_r \begin{bmatrix} x_r & y_r & \theta_r \end{bmatrix}^T$之差为开环误差$\tilde{q} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{\theta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x - x_r & y - y_r & \theta - \theta_r \end{bmatrix}^T$。

1. 转换到机器人系

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = R(\theta)^T \tilde{q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{闭环}} \dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = R(\theta)\dot{\tilde{q}} + R(\dot{\theta})\tilde{q} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

2. 转换到极坐标系

$$\begin{cases} \rho & = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \\ \beta & = -\arctan 2(-\tilde{y}, -\tilde{x}) \\ \alpha & = -\beta - \tilde{\theta} \end{cases} \xRightarrow{\text{闭环}} \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & 0 \\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & 0 \\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

返回目录

机器人系非线性控制器

设计控制器$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}$，代入得$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}$，其有误差时扰动，效果不佳。

极坐标系线性控制器

设计控制器$\begin{cases} v_1 &= k_\rho \rho \\ v_2 &= k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \end{cases}$，代入得

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos\alpha \\ -k_\rho \sin\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix} \overset{\alpha \to 0}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \\ -k_\rho \alpha \\ k_\rho \alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix}$$

其中前两行非线性耦合，在$\alpha \to 0$时指数性稳定，非全局稳定。

极坐标系线性控制器

设计控制器$\begin{cases} v_1 &= k_\rho \rho \cos\alpha \\ v_2 &= k_\alpha \alpha + \frac{k_\rho \sin\alpha \cos\alpha}{\alpha}(\alpha - k_\beta \beta) \end{cases}$，代入得

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos^2\alpha \\ -k_\rho \cos\alpha \sin\alpha \\ k_\rho \cos\alpha \sin\alpha - k_\alpha \alpha - \frac{k_\rho \sin\alpha \cos\alpha}{\alpha}(\alpha - k_\beta \beta) \end{bmatrix} \overset{\alpha \to 0}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \\ -k_\rho \alpha \\ -k_\alpha \alpha + k_\rho k_\beta \beta \end{bmatrix}$$

其全局渐近稳定。

3.3 轨迹跟踪控制器 [7]

控制目标与误差变换

惯性系下，实际轨迹$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & \theta(t) \end{bmatrix}^T$与参考轨迹$q_r \begin{bmatrix} x_r(t) & y_r(t) & \theta_r(t) \end{bmatrix}^T$之差为开环误差$\tilde{q}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) & \tilde{y}(t) & \tilde{\theta}(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x(t) - x_r(t) & y(t) - y_r(t) & \theta(t) - \theta_r(t) \end{bmatrix}^T$，控制目标为$\lim_{n \to \infty} \tilde{q}(t) = 0$。

返回目录

辅助误差信号为：

$$e=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{\theta}\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{闭环}}\dot{e}=\begin{bmatrix}v_1+v_2e_2-v_{1r}\cos e_3\\ -v_2e_1+v_{1r}\sin e_3\\ v_2-v_{2r}\end{bmatrix}$$

控制器

设计控制器$\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_{1r}\cos e_3\\ -v_{1r}\frac{\sin e_3}{e_3}e_2-k_2e_3+v_{2r}\end{bmatrix}$，代入得$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \dot{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_2e_2\\ -v_2e_1+v_{1r}\sin e_3\\ -k_2e_3-v_{1r}\frac{\sin e_3}{e_3}e_2\end{bmatrix}$。

$e_3\to 0$时，控制器简化为$\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_{r1}\\ -v_{r1}e_2+v_{r2}\end{bmatrix}$，代入得$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \dot{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1e_1+v_2e_2\\ -v_2e_1\\ -k_2e_3-v_{r1}e_2\end{bmatrix}$。

3.4 路径跟踪控制器 [8]

控制目标与误差变换

惯性系下，实际路径$q(s)=\begin{bmatrix}x(s) & y(s) & \theta(s)\end{bmatrix}^T$与参考路径$q_r\begin{bmatrix}x_r(s) & y_r(s) & \theta_r(s)\end{bmatrix}^T$之差为开环误差$\tilde{q}(s)=\begin{bmatrix}\tilde{x}(s) & \tilde{y}(s) & \tilde{\theta}(s)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}x(s)-x_r(s) & y(s)-y_r(s) & \theta(s)-\theta_r(s)\end{bmatrix}^T$，其中$s\in[0,1]$为路径参考变量，控制目标为$\lim_{n\to\infty}\tilde{q}(s)=0$。

作变换$\begin{cases}y_1 & =x+b\cos\theta\\ y_2 & =y+b\sin\theta\end{cases}$，进而得到闭环误差$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -b\sin\theta\\ \sin\theta & b\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=T(\theta)\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$。

逆运算得到$\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=T^{-1}(\theta)\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{b} & \frac{\cos\theta}{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$，故$\begin{cases}\dot{y}_1 & =u_1\\ \dot{y}_2 & =u_2\\ \dot{\theta} & =\frac{u_2\cos\theta-u_1\sin\theta}{b}\end{cases}$。

控制器

设计控制器$\begin{cases}u_1=\dot{y}_{1d}+k_1(y_{1d}-y_1)\\ u_2=\dot{y}_{2d}+k_2(y_{2d}-y_2)\end{cases}$，有$\begin{cases}\dot{\tilde{y}}_1=-k_1\tilde{y}_1\\ \dot{\tilde{y}}_2=-k_2\tilde{y}_2\end{cases}$，系统指数性收敛。

返回目录

4 机器人感知

4.1 传感器 [9]

分类	传感器	感受	源	分类	传感器	感受	源
触觉	接触开关，碰撞器	EC	P	测距	反射率传感器	EC	A
	光学屏障	EC	A		超声波传感器	EC	A
	非接触式接近传感器	EC	A		激光测距仪	EC	A
轮/电机	电刷编码器	PC	P		光学三角测量	EC	A
	电位计	PC	P		结构光	EC	A
	同步器，旋转变压器	PC	P	运动	多普勒雷达（Rader）	EC	A
	光电编码器	PC	P		多普勒声波	EC	A
	磁编码器	PC	P		激光雷达（Laser）	EC	A
	电感编码器	PC	P		里程计（Odometer）	PC	P
	电容编码器	PC	P		惯导系统（IMU）	PC	P
方向	罗盘（Compass）	EC	P		加速度传感器	PC	P
	陀螺仪（Gyroscope）	PC	P	信标	GPS	EC	A
	倾角仪	EC	A/P		有源光学或射频信标	EC	A
视觉	相机（Camera）	EC	P		有源超声波信标	EC	A
	视觉测距套件	EC	P		有源光学或射频信标	EC	A
	目标跟踪套件	EC	P		反射信标	EC	A

表 4: 传感器分类

分类

- PC（Proprioceptive，本体感受）/EC（Exteroceptive，外感受）。
- A（Active，有源）/P（Passive，无源）。

特性

- 测量范围：测量上下界之差。
- 动态范围：测量范围上下界比率，常用对数表示，单位为dB。

返回目录

- 分辨率：最小可测量变化量，一般为为动态范围下界。
- 线性度：输入输出信号的映射关系。

4.2 光电传感器

把被测量变化转换成光信号变化，再转换成电信号。

4.2.1 概述

组成 辐射源、光学通路、光电器件。

特性

- 不受电磁干扰影响。
- 非接触测量。
- 频谱宽，高精度，高分辨率，高可靠性，发应快。

4.2.2 编码器 [10]

测量系统相对运动角度，具有高精度、高分辨率和高可靠性。按结构可分为接触式、光电式和电磁式，后两种为非接触式编码。

增量式旋转编码器

- 不能直接输出数字编码，需要数字电路。
- 原理：遮光周期性变化，莫尔条纹明暗交替，电压周期性变化$U_0 = U_m \cos(\frac{2\pi}{W}x)$，形成脉冲，根据脉冲数量可推算旋转角度，位置数据是相对的，掉电后需要复位。
- 辨向：为判断光栅移动方向，使用D触发器整合两个光栅的信息。
  - D触发器：时钟信号有效时，$Q = D$。
  - 边缘D触发器：时钟信号处于有效边沿时，$Q = D$。

返回目录

绝对式光电编码器

- 能直接输出某种码制的数码，掉电后不需要复位。
- 格雷码（余3循环码）：任意相邻数只有一位二进制数不同，可以由二进制码按位异或（第一位保留）获得，属于可靠性编码，求反方便。

4.3 里程计

4.3.1 里程计模型

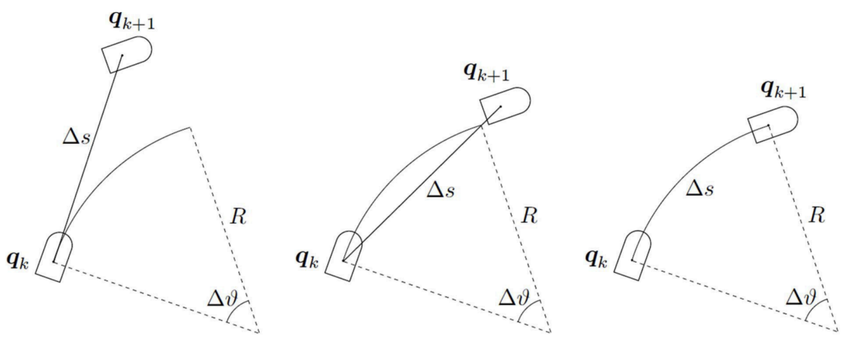
两轮差速机器人里程计模型 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_l}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{转换到惯性系}} \begin{cases} \dot{x} & = v\cos\theta \\ \dot{y} & = v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = \omega \end{cases}$$

码盘读数为：

$$\begin{cases} \Delta s = \frac{r}{2}(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L) \\ \Delta\theta = \frac{r}{2d}(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L) \end{cases} \xRightarrow{\text{小时间变化}} \begin{cases} \Delta s & = v_k T_s \\ \Delta\theta & = \omega_k T_s \end{cases}$$

建模方法 [11]



(a) 欧拉法 (b) RK2法 (c) 解析积分法

图 8: 里程计建模方法

- 欧拉法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos\theta_k \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin\theta_k \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- RK2（二阶Runge-Kutta）法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- 解析积分法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{v_k}{\omega_k}(\sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k) \\ y_{k+1} = y_k - \frac{v_k}{\omega_k}(\cos\theta_{k+1} - \cos\theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases} \xRightarrow{\omega_k=0} \begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \\ y_{k+1} = y_k \end{cases}$$

4.3.2 里程计误差

误差来源

- 数值积分误差。
- 运动学参数误差：速度不恒定，半径误差。
- 打滑。

误差传播（RK2法）[12]

位姿更新为：

$$p' = f(x, y, \theta, \Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L)}{2}\cos(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R - \Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L)}{2}\sin(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R - \Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L)}{2d} \end{bmatrix}$$

其中$\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$是控制输入量，有误差协方差矩阵迭代公式：

$$\sum_{p'} = \underbrace{\nabla_p f \cdot \sum_p \cdot \nabla_p f^T}_{\text{位姿}} + \underbrace{\nabla_{r|l} f \cdot \sum_\Delta \cdot \nabla_{r|l} f^T}_{\text{控制输入量}}$$

初始化姿态协方差矩阵$\sum_{p'}$（可零初始化），其更新量为：

$$\nabla_p f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 1 & \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

返回目录

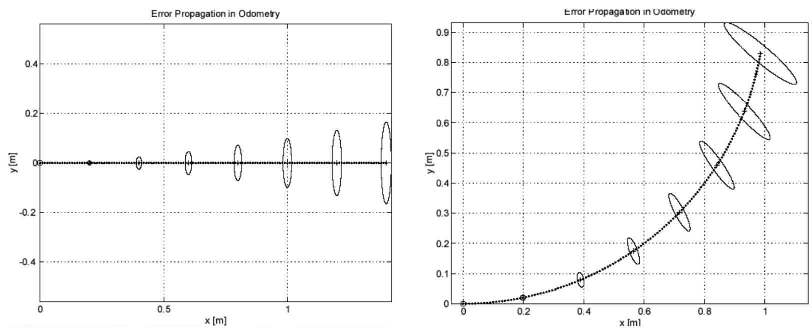
假设$\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$的误差相互独立，有控制输入量协方差矩阵：

$$\sum_{\Delta} = covar(\Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} k_r\|\Delta\phi_R\| & 0 \\ 0 & k_l\|\Delta\phi_L\| \end{bmatrix}$$

其更新量为：

$$\nabla_{rl} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_R} & \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d}\Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2}\cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d}\Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2}\sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d}\Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2}\sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d}\Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix}$$

误差转化展示　原理见9.1。



(a) 直线运动　　**(b)** 曲线运动

图 9: 里程计误差转化展示

直线运动时误差方向与运动方向垂直，曲线运动时则不垂直。

4.4 激光传感器

- 组成：激光器，激光检测器，测量电路。
- 特点：无接触远距离测量，速度快，精度高，量程大，抗干扰能力强。
- 激光测距：到达时间法（Time of Flight，TOF）：时间精度 $= \frac{测量精度}{c(3\times10^8)}$。
- 位移测量：对参考信号和测量信号进行相位测量。

5 机器人点云处理

5.1 直线提取

5.1.1 最小二乘法（*Least Squares Method*）

在求解拟合直线时，最小化拟合误差平方和，目标式为：

$$\min\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \min\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]^2$$

其中$f(x) = ax + b$是拟合直线，(x, y)是待拟合的点坐标。

求解方法

1. 求偏导：求目标式关于a, b的偏导，得到如下极值条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial\Pi}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)] = 0 \\ \frac{\partial\Pi}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - (a + bx_i)] = 0 \end{cases}$$

2. 矩阵形式 [13] ：将拟合直线$f(x) = ax + b$增广为矩阵形式$Y = X\beta$，在误差$d = Y - X\beta$趋于0时，有$Y = X\beta$，因此：

$$Y = X\beta \Rightarrow X^TY = X^TX\beta \Rightarrow \beta = (X^TX)^{-1}X^TY$$

5.1.2 *Split-and-Merge*（分割与合并） [14]

1. 分裂（Split）：以全集作为初始点集。对当前点集拟合直线（采用端点拟合），计算到最远点的距离，距离大于阈值则在该最远点处将点集分裂为两个子集，并对分裂后的两个子集进行迭代。

2. 合并（Merge）：检查相邻线段是否满足合并要求（合并后是否有过远点），若满足要求，则合并并拟合新的直线。

5.1.3 *Line-Regression*（线性回归）

1. 滑动拟合：选取窗口，在其内采用最小二乘法拟合直线，之后滑动窗口拟合新的直线。

2. 合并：检查相邻线段是否满足合并的角度和距离要求，满足则合并并拟合新的直线，直到所有线段不可再合并。

返回目录

5.1.4 *RANSAC（Random Sample Consensus*，随机抽样一致性算法） 15

- 外点（outliers）：异常值。
- 内点（inliers）：符合模型的数据点。

1. 根据内点比例w和找到一个完全由内点组成的样本的希望概率p计算迭代次数：
$$k = \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^2)}$$
2. 从所有数据点中随机选择最小数量（直线2点，平面3点）的数据点子集，确定唯一的模型参数。
3. 计算剩余数据点与该模型的误差，小于设定阈值的为内点。
4. 重复迭代次数次采样，选取包含最多内点的模型。

5.1.5 *Hough-Transform*（霍夫变换）

图像空间中的一个点对应Hough空间中的一条线。激光定位任务中，常用极坐标$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$表示。在定距下，误差呈正态分布；而在变距下，误差增长与距离正相关。

1. 计算数据范围（Hough空间参数分辨率），并初始化累加器。
2. 遍历边缘点，计算可能的参数组合，并在对应位置进行投票。
3. 在累加器中寻找峰值（可能不唯一），获得相应Hough空间参数。
4. 转换回图像空间，确定直线。

最小二乘直线拟合

点(ρ_i, θ_i)到拟合直线(r, α)的距离近似为d_i：
$$\rho_i \cos(\theta_i - \alpha) - r = d_i$$
使其加权平方和最小，得到最优拟合直线。
误差传播为：
$$C_x = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\sigma_\rho^2) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(\sigma_\theta^2) \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \quad F_{\rho\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_1} & \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_2} & \cdots & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_{n-1}} & \frac{\partial\alpha}{\partial\theta_n} \\ \frac{\partial r}{\partial\rho_1} & \frac{\partial r}{\partial\rho_2} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial\theta_{n-1}} & \frac{\partial r}{\partial\theta_n} \end{bmatrix}$$
$$C_{\alpha r} = F_{\rho\theta} C_x F_{\rho\theta}^T$$

返回目录

5.1.6 性能对比

算法	复杂度	假阳性率FPR	精度	多直线检测	属性
Split-and-Merge	$n\log n$	低	低	适用	
Line-Regression	nn_f	低	低	适用	有序点云
RANSAC	Snk	高	高	需调整	容忍外点
Hough-Transform	$Snn_C + Sn_Rn_C$	高	高	适用	

表 5: 直线特征提取算法性能对比

5.2 定位与匹配

5.2.1 基于*SVD*的定位算法 [16]

条件与目标

在二维平面上，有基于世界坐标系的点云$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$和基于激光坐标系的点云$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$，它们按下标顺序匹配，求解刚体变换（旋转阵R和平移量t）。

以误差平方加权和的形式建模，得到目标式：

$$(R, t) = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{n} w_i \|(Rp_i + t) - q_i\|^2$$

其中w_i表示匹配点对(p_i, q_i)的权重，可取为距离的倒数$w_i = \frac{1}{\sigma_i(\rho_i)}$。

加权平均

为求极值，对目标式求关于t的偏导：

$$2t(\sum_{i=1}^{n} w_i) + 2R(\sum_{i=1}^{n} w_i p_i) - 2\sum_{i=1}^{n} w_i q_i = 0 \xrightarrow[\sum_{i=1}^{n} w_i]{\text{等号两边同除}} t + R\frac{(\sum_{i=1}^{n} w_i p_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i q_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = 0$$

取两个点云的加权中心点$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \hat{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i q_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$，上式可化简为$t = \hat{q} - R\hat{p}$。该式描述了平移量和旋转阵的关系，将其带回目标式，得到单变量最值问题：

$$R = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{n} w_i \|R(p_i - \hat{p}) - (q_i - \hat{q})\|^2$$

返回目录

去中心化

取去中心化$x_i = p_i - \hat{p}, y_i = q_i - \hat{q}$，目标式可化简为：

$$R = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{n} w_i ||Rx_i - y_i||^2$$

将平方项变成矩阵相乘的形式：

$$||Rx_i - y_i||^2 = (Rx_i - y_i)^T (Rx_i - y_i) = x_i^T (R^T R) x_i - y_i^T R x_i - x_i^T R^T y_i + y_i^T y_i$$

- 旋转阵为标准正交阵，$R^{-1} = R^T$，因此$R^T R = E$。
- $x_i^T R^T y_i$是一个1×1标量，转置后不变，$x_i^T R^T y_i = y_i^T R x_i$。

所以:

$$||Rx_i - y_i||^2 = x_i^T x_i - 2 y_i^T R x_i + y_i^T y_i$$

其中仅有负号项与R相关，其它项都是定值，目标可改写为：

$$R = \operatorname{argmax} \sum_{i=1}^{n} w_i y_i^T R x_i$$

SVD分解

将其写成对角阵的迹的形式：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i y_i^T R x_i &= tr(diag(w_1 y_1^T R x_1, w_2 y_2^T R x_2, \ldots, w_n y_n^T R x_n)) \\
&= tr(diag(w_1, w_2, \ldots, w_n) \begin{bmatrix} y_1^T & y_2^T & \vdots & y_n^T \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}) \\
&= tr(WY^T RX)
\end{aligned}$$

因为矩阵的迹满足$tr(AB) = tr(BA)$，所以$tr(WY^T RX) = tr(RXWY^T)$。令$S = XWY^T$，基于SVD原理（见附录9.2），$S = U\Sigma V^T$，其中U, V是单位正交阵，Σ为对角阵。所以$tr(RXWY^T) = tr(RU\Sigma V^T) = tr(\Sigma V^T RU)$，后三者都是单位正交阵，它们的积M也是单位正交阵。目标改写为：

$$R = \operatorname{argmax} tr(\Sigma M)$$

求解R和t　由于单位正交阵的最大迹是在单位阵下取得的，最大值条件为$M = E$，即$R = VU^T$。代回R和t的关系式，可确定t。

5.2.2 基于*ICP*（*Iterative Closest Point*，迭代最近点）的点云匹配算法 [17]

1. 条件与目标：求解二维平面上检测点云$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{N_p}\}$和目标点云$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N_x}\}$的匹配。
2. 计算最近点集：采取采样方法获得目标点云，并采用点集匹配方法为检测点云数据点匹配最近的目标点云数据点。
   - 均匀采样。
   - 随机采样。
   - 基于特征的采样。
   - 法向量空间采样。
   - Closest point Matching（CMP）。
   - Normal Shooting Matching。
   - Point-to-Plane Matching。
   - Projection Matching。
3. 变换：使用基于SVD的定位算法求解齐次变换矩阵并应用于检测点云。
4. 目标函数计算：统计对齐误差，如果达到阈值则停止迭代，否则重复上述操作。

6 机器人定位

6.1 定位与导航

导航 不能碰障碍物，掌握目标的方向。

- 基于行为：如沿墙边前进。
- 基于地图：已知地图，需要定位。

定位

- 问题
  - 全局定位：未知初始位置，根据地图进行定位。
  - 位置跟踪：已知初始位置，跟踪位置变化。
  - 绑架问题。
- 方法：基于机载传感器、基于额外传感器和路标、里程计。

返回目录

- 分类（不确定度分布）：连续单峰（卡尔曼滤波）、连续多峰、离散多峰（粒子滤波）、拓扑。

6.2 贝叶斯定位

原理 新信息出现后的概率 = 概率 × 新信息带来的调整：

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

思想 使用低精度传感器（如里程计）跟踪运动状态，不确定度不断提高，定期使用高精度传感器（如激光雷达），修正估计。

特点

- 连续型
  - 精度受传感器数据限制。
  - 通常是单一假设位姿估计。
  - 对于单一假设发散时会丢失。
  - 表示紧凑，计算资源需求合理。
- 离散型
  - 精度受离散化分辨率限制。
  - 通常是多假设位姿估计。
  - 发散时收敛到另一单元，永不丢失。
  - 需大量内存和计算资源。

6.3 基于卡尔曼滤波的定位

6.3.1 卡尔曼滤波

推导 两次独立测量的概率均服从正态分布$p_1(q) = N(\hat{q}_1, \sigma_1^2), p_2(q) = N(\hat{q}_2, \sigma_2^2)$，它们整合得到的最终分布也服从正态分布：

$$
\begin{aligned}
p(q) = p_1(q)\cdot p_2(q) &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(q-\hat{q}_1)^2}{2\sigma_1^2})\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(q-\hat{q}_2)^2}{2\sigma_2^2}) \\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp[-\frac{(q-\hat{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(q-\hat{q}_2)^2}{2\sigma_2^2}] \\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{q^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-2q(\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2)+(\hat{q}_1^2\sigma_2^2+\hat{q}_2^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}]\} \\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{q^2-\frac{2q(\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\frac{(\hat{q}_1^2\sigma_2^2+\hat{q}_2^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\exp[-\frac{1}{2}\frac{\frac{\hat{q}_1^2\sigma_2^2+\hat{q}_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-(\frac{\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]}_{\text{常数}}\underbrace{\exp[-\frac{1}{2}\frac{(q-\frac{\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}]}_{\text{正态分布}} \\
&= N(\hat{q}, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

有：

$$
\hat{q} = \underbrace{\frac{\hat{q}_1\sigma_2^2+\hat{q}_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}_{\text{方差小的项权重大}} \Leftrightarrow \hat{q} = \hat{q}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\underbrace{(\hat{q}_2-\hat{q}_1)}_{\text{校正量}}
$$

$$
\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \Leftrightarrow \sigma^2 = \underbrace{\sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}_{<\sigma_1^2,\sigma_2^2}
$$

以$P = \sigma_1^2, Q = \sigma_2^2, R = \sigma^2$，记卡尔曼增益$K = P(P+Q)^{-1}$和创新协方差$\Sigma_{IN} = P + Q$：

$$
\begin{aligned}
&\hat{q} = \hat{q}_1 + P(P+Q)^{-1}(\hat{q}_2-\hat{q}_1) = \hat{q}_1 + K(\hat{q}_2-\hat{q}_1) \\
&R = P - P(P+Q)^{-1}P = P - K\cdot\Sigma_{IN}\cdot K^T
\end{aligned}
$$

过程（推算）方程：$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$

测量方程：$z_k = Hx_k + v_k$

返回目录

其中$x_k \in R^n$为系统状态，$z_k \in R^m$为测量输出，$u_k \in R^l$为系统输入。$w_k \in R^n$为过程噪声（Process Noise）$p(w) = N(0, Q)$，$v_k \in R^m$为测量噪声（Measurement Noise，白噪声）$p(v) = N(0, R)$。

有先/后验估计$\hat{x}_k^-, \hat{x}_k$，先/后验估计误差$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-, e_k = x_k - \hat{x}_k$，先/后验估计方差$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], P_k = E[e_k e_k^T]$。其中，优化目标是$\mathrm{argmin}_K P_k$。

先后验转化关系为：

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \underbrace{K}_{\text{卡尔曼增益}} \underbrace{(z_k - H\hat{x}_k^-)}_{\text{新息}}$$

P_k可进行转化：

$$\begin{aligned}
P_k &= E[e_k e_k^T] = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T](\text{误差展开}) \\
&= E[\{x_k - [\hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)]\}\{x_k - [\hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)]\}^T](\text{代入先后验转化关系}) \\
&= E\{[(x_k - \hat{x}_k^-) - K(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)][(x_k - \hat{x}_k^-) - K(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)]^T\}(\text{代入测量方程}) \\
&= E\{[(I - KH)e_k^- - Kv_k][(I - KH)e_k^- - Kv_k]^T\}(\text{误差重构}) \\
&= (I - KH)\underbrace{E[e_k^- e_k^{-T}]}_{P_n^-}(I - KH)^T + K\underbrace{E[v_k v_k^T]}_{R}K^T - K\underbrace{E[v_k e_k^{-T}]}_{\text{不相干，0}}(I - KH)^T - (I - KH)\underbrace{E[e_k^- v_k^T]}_{\text{不相干，0}}K^T \\
&= (I - KH)P_k^-(I - KH)^T + KRK^T
\end{aligned}$$

令偏导为0：

$$\frac{\partial P_k}{\partial K} = -2P_k^- H^T + 2KHP_k^- H^T + 2KR = 0$$

有$K = P_k^- H^T(HP_k^- H^T + R)^{-1}$，在方差趋于0时，$\lim_{R \to 0} K = H^{-1}, \lim_{P_k^- \to 0} K = 0$。

步骤 [18]

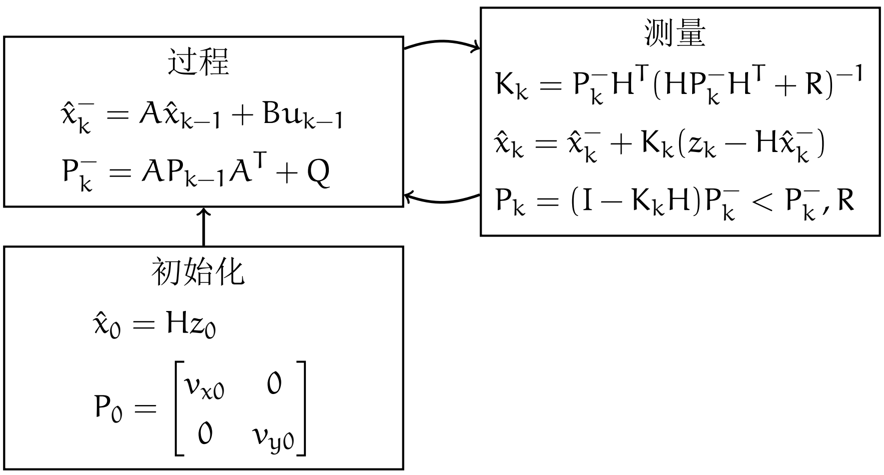


图 10: 卡尔曼滤波框图

返回目录

6.3.2 基于卡尔曼滤波的定位算法 [19]

步骤 Prediction → Observation → Estimation

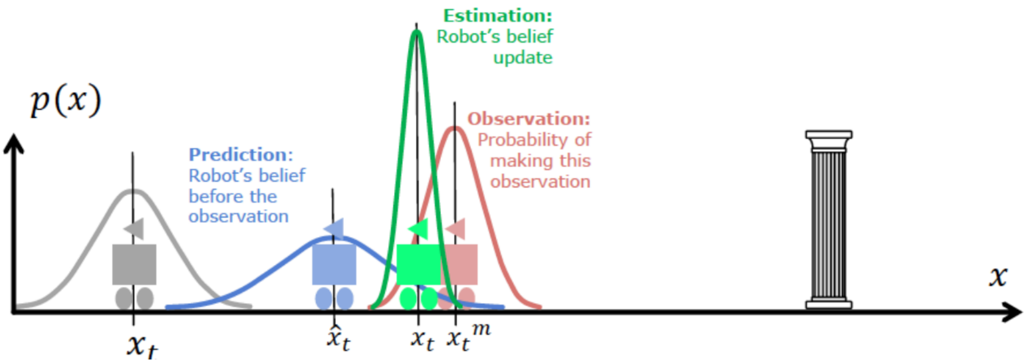


图 11: 基于卡尔曼滤波的定位算法示意图

1. 先验估计：预测模型，如里程计模型。
2. 先验估计误差：误差传导模型。
3. 观测：如激光定位，采用SVD确定位姿，采用ICP配准。
4. 观测误差：SVD匹配误差。
5. 基于观测的后验估计：卡尔曼滤波。

状态	状态转移A	测量	测量矩阵H	性能
$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$	动态误差大 静止误差小 适合缓慢移动
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 未测量速度	动态误差小 静止误差大 低维估计高维

表 6: 卡尔曼滤波算法描述维度

描述维度

返回目录

特点

- 严重依赖匹配精度，匹配失败则定位失败，且无法判断和恢复。
- 收敛速度受初始状态误差和协方差阵精度影响较大。
- 无法进行全局定位，无法应对绑架问题，只能位置跟踪。
- 不确定度需为单峰高斯分布。

6.4 蒙特卡洛定位

6.4.1 蒙特卡洛方法（*Monte Carlo Method*）

不断抽样，逐渐逼近的方法。

特点

- 优点：通用。
- 缺点：收敛速度慢，不精确。

分布函数拟合 用样本（粒子）分布来处理各种分布。

- 已知概率分布求粒子分布：采样排除法，概率高的地方采样密集。
- 未知概率分布求粒子分布：重要性评估，迭代，根据预估分布（以均匀分布开始）洒粒子，再根据结果调整重要性评估（归一化）。

6.4.2 蒙特卡洛定位算法（粒子滤波算法，*MCL*）[20]

多信息融合，提高真值处的重要性。

重要性采样

目标分布$f_i = [p(x_i|z_1, z_2, z_3)]$，根据贝叶斯定理，有：

$$p(x_i|z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{\prod_k p(z_k|x_i)p(x_i)}{p(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$$

返回目录

建议分布$g_i = [p(x|z_i)]$，有：

$$p(x_i|z_i) = \frac{p(z_i|x_i)p(x_i)}{p(z_i)}$$

有重要性权重：

$$w_i = \frac{f_i}{g_i} = \frac{p(x_i|z_1, z_2, \cdots, z_n)}{p(x_i|z_i)} = \frac{p(z_i)\prod_{k\neq i} p(z_k|x_i)}{p(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$$

令$\eta = \frac{p(z_i)}{p(z_1, z_2, \cdots, z_n)}$，则有$w_i \propto \prod_{k\neq i} p(z_k|x_i)$。

步骤 在一次迭代（$X_{t-1} \to X_t$）中，经历以下过程：

1. 预测：基于运动模型（建议分布）对粒子进行更新和采样：

$$x_t^{(i)} = f(x_{t-1}^{(i)}, u_t)$$

2. 校正：使用传感器模型计算粒子权重：

$$w_t^{(i)} = p(z_t|x_t^{(i)})$$

3. 重采样：根据归一化后的权重进行重采样（采用轮盘赌），权重越大的粒子被采样的概率越高。

激光雷达观测误差模型 m指地图。

- 误差
  - 激光雷达测量误差$p_{hit}(z_t|x_t, m)$。
  - 没有检测到障碍物$p_{max}(z_t|x_t, m)$：常值分布，返回激光雷达最大测距距离。

$$p_{max}(z_t|x_t, m) = \begin{cases} 1 & z_t^k = z_{max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - 随机错误$p_{rand}(z_t|x_t, m)$：均匀分布，返回错误的距离值。

$$p_{rand}(z_t|x_t, m) = \begin{cases} \frac{1}{z_{max}} & 0 \leqslant z_t^k \leqslant z_{max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

返回目录

- 激光雷达观测误差模型$p(z_t|x_t,m)$：上述误差的线性组合。

$$p(z_t|x_t,m)=\alpha_{hit}p_{hit}+\alpha_{max}p_{max}+\alpha_{rand}p_{rand}\quad \alpha_{hit}+\alpha_{max}+\alpha_{rand}=1$$

- 物理模型：$p_{hit}(z_t|x_t,m)$包含随机噪声，一般为高斯分布。

$$p_{hit}(z_t|x_t,m)=\begin{cases}N(z_t^{k*},\sigma_{hit}^2) & 0\leqslant z_t^k\leqslant z_{max}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- 可能域（likelihood）：$p_{hit}(z_t|x_t,m)$，将激光束投影到地图中，以距投影最近的点的距离为均值，激光测距偏差为方差。
  - 优点：在线计算量小，平滑性好，收敛性强，更符合实际情况。
  - 缺点：没有明确的物理意义，仅适用于相对静态的环境（如有路标的工厂）。

特点

- 优点：计算简单，可解决大范围全局定位问题，适用于多种分布。
- 缺点：粒子数过大时占用内存大，计算效率低；大地图下，只用少量粒子可能发散；无法应对绑架问题。

6.4.3 自适应蒙特卡洛定位算法（*AMCL*）[21]

改进 引入短、长期指数滤波器衰减率$\alpha_{slow}\ll\alpha_{fast}$，计算短、长期重要性指数似然评价估计$w_{slow},w_{fast}$，二者计算公式格式一致，正常时$w_{slow}<w_{fast}$。

解决问题

- 绑架问题：发生绑架问题时，w_{avg}会突然下降，导致$w_{slow}>w_{fast}$，将按照概率$\max(0,1-\frac{w_{fast}}{w_{slow}})$向粒子集中注入随机粒子。
- 粒子数问题：使用KLD（Kullback-Leibler Divergence，库尔贝克-莱布勒散度，计算概率分布间差异）采样，在趋于收敛的过程中减少粒子。

算法 其中标红部分是AMCL相较MCL的改进。

返回目录

算法 1：AMCL

参数：$\alpha_{slow}, \alpha_{fast}$
初始化：初始化$\overline{\mathcal{X}}_t = \mathcal{X}_t$为空，初始化$w_{slow}, w_{fast}$
对于 $m = 1, \dots, M$ 执行
  $x_t^{[m]} = f(u_t, x_{t-1}^{[m]})$
  $w_t^{[m]} = p(z_t, x_t^{[m]}, m)$
  $\overline{\mathcal{X}}_t = \overline{\mathcal{X}}_t + \langle x_t^{[m]}, w_t^{[m]} \rangle$
  $w_{avg} = w_{avg} + \frac{1}{M} w_t^{[m]}$ ▷ 平均权重
$w_{slow} = w_{slow} + \alpha_{slow}(w_{avg} - w_{slow})$ ▷ 慢速权重
$w_{fast} = w_{fast} + \alpha_{fast}(w_{avg} - w_{fast})$ ▷ 快速权重
对于 $m = 1, \dots, M$ 执行
  以概率$\max(0, 1 - \frac{w_{fast}}{w_{slow}})$向$\mathcal{X}_t$添加随机姿态 ▷ 应对绑架问题
  否则，从$\overline{\mathcal{X}}_t$中按概率$w_t^{[m]}$采样$x_t^{[m]}$，并将其添加到$\mathcal{X}_t$ ▷ 重采样
返回$\mathcal{X}_t$

7 机器人建图

7.1 SLAM

8 机器人轨迹规划

9 附录

9.1 误差转化展示

将误差传播协方差矩阵$\sum_p$转化成椭圆展示。

计算 取$\sum_p$左上二阶子阵$\sum_{p_{xy}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$，计算特征值$\lambda_1, \lambda_2$和特征向量$\vec{p}_1, \vec{p}_2$，其分别表示长短轴的大小和方向，圆心是$(x_k, y_k)$（直接对$\sum_p$求取特征根和特征向量，再取前两个，结果与其不同）。

返回目录

意义

- 长短轴表示误差在不同方向上的大小，可通过开根号、乘系数等方法调节。
- 方向角表示误差传播的主要方向，体现了误差传播的各向异性。
- 椭圆大小反映了系统的误差范围，可按置信度缩放。

返回里程计12。

9.2 奇异值分解（Singular Value Decomposition，SVD）

根据$A_{m\times n}$计算$(A^TA)_{n\times n}$ 和$(AA^T)_{m\times m}$两个对称矩阵，求二者的特征值和特征向量：

$$A^TAv_i = \lambda_i v_i, i = 1, 2, \ldots, n \quad AA^Tu_i = \mu_i u_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

其中，λ_i, μ_i是特征值，v_i, u_i是其对应的特征向量，分别组成$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$和$U = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$。

奇异值σ_i是λ_i, μ_i的平方根，将其按降序排列，并构造对角矩阵$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$，得到SVD分解$A = U\Sigma V^T$。

返回里程计5.2.1。