

智能工程

目 录

1	基础知识	4	4.1	运动控制	14
2	机器人运动形态	5	4.2	定点控制器	15
2.1	移动机器人	5	4.3	轨迹跟踪控制器	17
2.2	腿式机器人	6	4.4	路径跟踪控制器	18
2.2.1	腿式机器人	6	5	机器人感知与定位建图	18
2.2.2	四足机器人	6	5.1	传感器	18
2.2.3	双足机器人	7	5.2	光电传感器	19
2.3	轮式机器人	7	5.2.1	概述	19
3	机器人运动学	8	5.2.2	编码器	19
3.1	运动学模型	8	5.3	里程计	20
3.2	车轮	8	5.3.1	里程计模型	20
3.3	运动学建模	9	5.3.2	里程计误差	21
3.3.1	空间描述与状态表达	9	5.4	激光传感器	23
3.3.2	ICR法	10	5.5	点云匹配与定位	23
3.3.3	约束方程法	10	5.6	卡尔曼滤波	23
3.3.4	例子	12	5.7	蒙特卡洛定位	23
3.4	自由度	13	5.8	SLAM	23
4	机器人运动控制	14	6	机器人轨迹规划	23
			7	附录	23
			7.1	误差转化展示	23

图 片

图 1	课程内容	4	图 4	瞬心	10
图 2	两轮差速机器人模型	5	图 5	约束方程	11
图 3	车轮类型	8	图 6	两轮差速机器人正运动学建模	12
			图 7	运动控制器	14
			图 8	里程计建模方法	21
			图 9	里程计误差转化展示	23

表 格

表 1	课程内容	4	表 2	双足机器人方案对比	7
			表 3	车轮类型对比	9
			表 4	约束方程	11

要 点

要点 1	腿式机器人稳定性	6	要点 6	ICR法运动学建模	10
要点 2	腿式机器人步态	6	要点 7	约束方程法运动学建模	10
要点 3	双足机器人运动机理	7	要点 8	自由度分类	13
要点 4	非完整约束	8	要点 9	定点控制器	15
要点 5	车轮类型	8	要点 10	轨迹跟踪控制器	17
			要点 11	路径跟踪控制器	18
			要点 12	编码器	19

1 基础知识

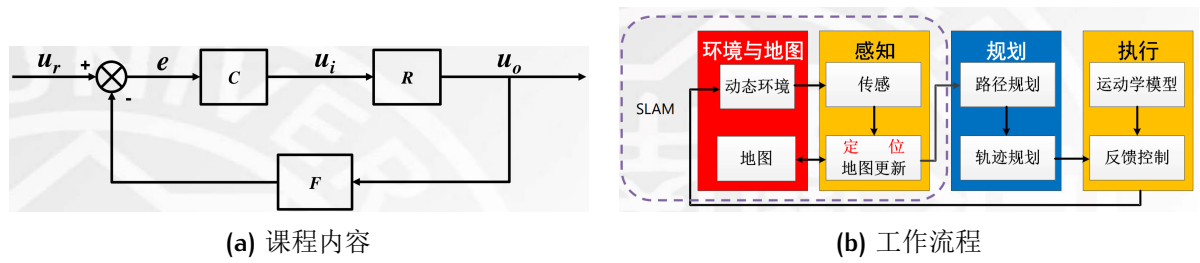


图 1: 课程内容

表 1: 课程内容

	u_i	u_o	R	F	u_r	e	C
概念	系统输入	系统输出	系统模型	反馈单元	系统给定	系统误差	控制器
含义	能对被控对象施加作用的手段	作业目标相应的可测系统状态	系统输入输出映射	系统输出映射变换	系统作业目标	作业目标与系统当前测量状态差值	系统误差与输入映射
内容	机器人运动学			机器人控制		机器人感知	机器人轨迹规划

课程内容

课程案例 移动机器人->轮式机器人->两轮差速机器人。

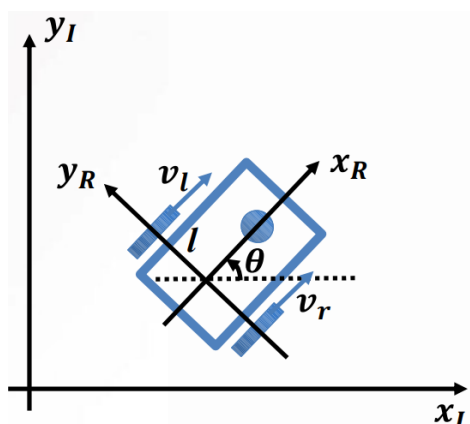


图 2: 两轮差速机器人模型

- 车轮半径 r 。
- 两轮转速 φ_l, φ_r : $v_i = \varphi_i r$ 。
- 车轮到两轮中间点距离 l 。

1. 求正运动学模型3.3.4。
2. 设计运动控制器4.1。
3. 里程计模型5.3.1。

2 机器人运动形态

2.1 移动机器人

自然界运动形态特点

- 能量利用率高。
- 适应野外复杂环境。
- 与身体尺寸、结构相适应。
- 运行速度高。

机器人实现自然界运动形态问题

- 机械结构、能量密度、感知与控制决策能力困难。
- 安全性、可靠性差。
- 成本高。
- 于人造环境低效。

运动 (LOCOMOTION) 机器人与环境的物理交互方式。

- 稳定性。
- 接触特性。
- 环境特性。

2.2 腿式机器人

2.2.1 腿式机器人

研究意义

- 复杂恶劣环境的高适应性。
- 点接触的高通过能力。
- 控制多自由度、实时感知环境的高实现难度。

腿数影响

- 机构复杂度。
- 控制复杂度。
- 环境适应性：腿越多，通过性越好，环境适应性越强。
- 系统稳定性¹：腿数增加，由动态稳定向静态稳定过度。
 - 动态稳定：执行器停止工作摔倒。运动过程中通常半数腿离地。
 - 静态稳定：执行器停止工作不摔倒。点接触需保证三腿同时着地，面接触需保证一条腿着地。

运动规划 运动学+动力学。

步态² 一个行进周期内各腿抬落组合，k腿机器人的步态模式数量为 $N = (2^k - 1)!$ 。

单位距离能耗 $COT = \frac{\text{消耗能量}}{\text{重量} \times \text{运行距离}}$ 。

2.2.2 四足机器人

- 点接触：每条腿至少需要两个自由度，执行器较少，没有冗余。
- 行走（静态平衡）：一次移动一条腿，剩下腿支持身体，重心落在支持多边形内。适合攀爬，速度低，能效低。
- 奔跑（动态平衡）：一次移动多条腿，平衡建立在周期运动上。速度高，能效高，需要实时控制与执行。

2.2.3 双足机器人

表 2: 双足机器人方案对比

方案	国家	基础方式	重心	速度	环境适应性	能效
静态稳定	日本	面接触	左右变换	低	差	低
动态稳定	美国	点接触	适时调整	高	强	高

两种方案

动态稳定运动机理 3

- 倒立摆模型：类似纯滚动，步距越小越趋于圆。步态不自然，重心变化（需做功），落地冲击大。
- 无源动态行走：摆动与向前摔落结合，势能转化为动能。
- 弹簧负载倒立摆（SLIP）：仿照动物腿肌肉，增加弹簧缓冲并储存能量。周期往复运动对称，动态稳定性可由庞加莱变换线性化后验证，条件为 $\lambda < 1$ （PPT.2.34-43）。
- 串联弹性驱动（SEA）：更为高效，更符合生物自然属性，基于运动学的位置控制，基于动力学的力矩控制。可由其获得稳定平台（PPT.2.48-50）。

2.3 轮式机器人

研究意义

- 人造环境下高效：滚动摩擦，无重心起伏。
- 结构简单，可靠性高，成本低。
- 控制简单，系统复杂度低。

轮数对稳定性的影响 轮数增加，由动态稳定向静态稳定过度。

- 动态稳定：执行器停止工作摔倒。倒立摆模型。
- 静态稳定：执行器停止工作不摔倒。陀螺效应，随动轮效应。

3 机器人运动学

3.1 运动学模型

表征机器人驱动（输入）和机器人空间位姿（输出）的关系。

机械臂与移动机器人在运动学模型上的区别

- 机械臂本体坐标系固定，精度高；移动机器人本体坐标系随动，精度低。
- 非完整约束 ⁴：移动机器人只知道码盘变化量无法获取位姿，状态取决于路径。这来源于不可积的微分约束（车轮侧向滑动约束）。
- 微分运动学（Differential Kinematics）：速度空间替代位置空间。

3.2 车轮

类型 ⁵

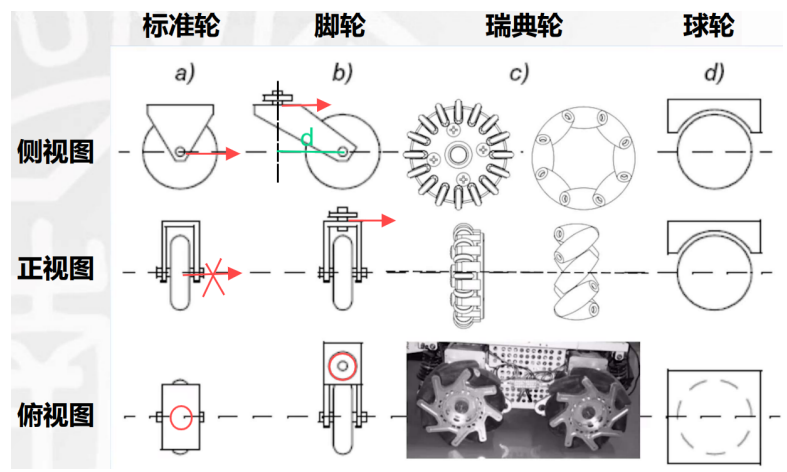


图 3: 车轮类型

表 3: 车轮类型对比

类型	自由度	约束	分类/特点
标准轮 (Standard wheel)	2 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动	1 沿轮轴滑动	标准固定轮（无法旋转，只有一个自由度） 标准转向轮（舵轮）
脚轮 (Castor wheel)	3 沿轮平面滚动 沿垂直轴转动 沿路轴运动	0	偏心距 d : 触地点到垂直旋转轴距离。 扭矩压力，易损坏。
瑞典轮 (Swedish wheel)	3 沿轮平面滚动（被动） 沿轮轴转动（主动） 沿垂直轴转动（被动）	0	麦克纳姆轮（Macanum wheel）: 45，至少需要4个共同使用。 连续切换轮: 90，至少需要3个共同使用。 对地面冲击大，噪音大，易损坏，成本高。
球轮 (Spherical wheel)	3（全主动） 沿两个正交轮轴转动 沿垂直轴转动	0	成本高，可靠性差。

选取

- 数量：至少三轮同时着地，才能保证静态稳定性。四轮可以提升稳定性，但需要适当的悬架系统。
- 大小：越大的轮子通过性越好，但需要更大的扭矩。
- 多数形态都有非完整约束。

3.3 运动学建模

3.3.1 空间描述与状态表达

坐标系

- 惯性参考坐标系I: 作业目标、控制指令、传感器感知测量信息。

- 机器人参考坐标系R：控制器误差输入、控制器控制指令。
- 笛卡尔坐标系：右手法则。

位姿 (POSE)

位置空间求导得到速度空间：

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ \theta_I \end{bmatrix}, \xi_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{求导}} \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}, \dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

惯性参考坐标系旋转得到机器人参考坐标系：

$$\dot{\xi}_R = R\dot{\xi}_I$$

$$\text{旋转阵 } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 为单位正交阵, } R^T = R^{-1}.$$

3.3.2 ICR法 ⁶

瞬时旋转/曲率中心 (ICR)

刚体上各点角速度相同。

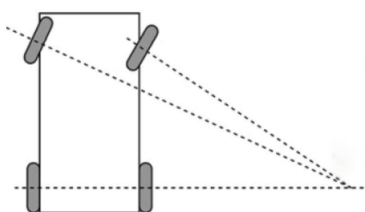


图 4: 瞬心

步骤

1. 坐标系变换。
2. 确定约束。
3. 计算瞬心：各轮轮轴到该点距离与速度成正比。
4. 求解 $\xi_R = [\dot{x}_R \ \dot{y}_R \ \dot{\theta}_R]^T$ 。

3.3.3 约束方程法 ⁷

要求 在水平面上运动，车轮与地面点接触，不变形，安装在钢体表面，舵机转轴与地面垂直。

约束方程

使用 根据各轮主/随动状态列运动约束方程，得到最多三个独立约束方程（对应平面三维位姿）。

以下以N标准轮（ N_f 个固定， N_s 个转向）机器人为例：

- 滚动约束

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I - J_2\dot{\varphi} = 0$$

其中 $J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f}(N_f \times 3) \\ J_{1s}(\beta_s)_{(N_s \times 3)} \end{bmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}$, $J_2 = \text{diag}(r_1, \dots, r_N)$ 为轮径对角阵。

- 滑动约束

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

其中 $C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f}(N_f \times 3) \\ C_{1s}(\beta_s)_{(N_s \times 3)} \end{bmatrix}$ 。

3.3.4 例子

以下以两轮差速机器人（见1）为例， $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ ：

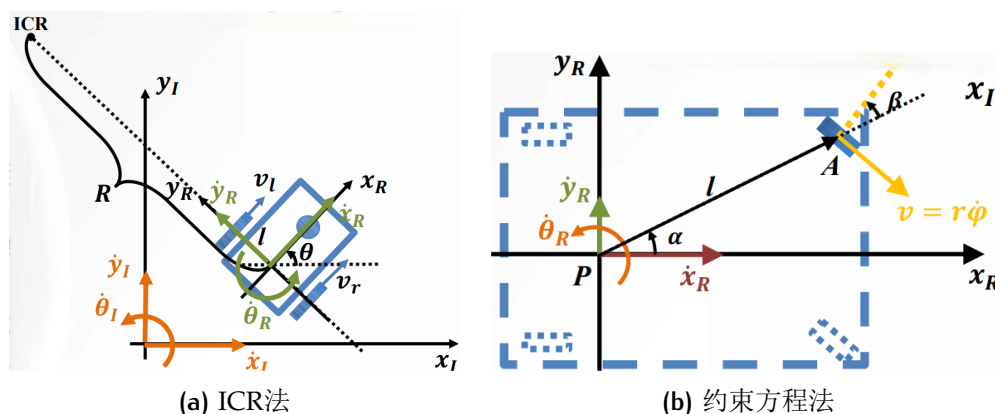


图 6: 两轮差速机器人正运动学建模

ICR法

两轮差速机器人的瞬心在两轮轮轴上，设其到机器人两轮中间的距离为R，有：

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_R}{R} = \frac{\dot{\varphi}_l r}{R - l} = \frac{\dot{\varphi}_r r}{R + l}$$

解得 $R = \frac{\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l}{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}$ ，代回即可。

约束方程法

- 纯滚动: $\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = r \dot{\phi}$ 。
- 无滑动: $\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = 0$ 。

正运动学模型

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_l + \dot{\phi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{l} \end{bmatrix}$$

3.4 自由度

概念

- 衡量机器人改变运行状态的能力。
- 需满足实际作业需求，考虑实现成本。
- 机器人设计基础、算法依据（一般自由度相同的机器人可采用相同的控制和规划算法）。
- 平面运动机器人自由度最大不能超过3。

分类 8

- 移动度（Degree of Mobility） δ_m ：瞬时改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_m = \dim[C_1(\beta_s)] = 3 - \text{rank}[C_1(\beta_s)] \in [0, 3]$$

- 转向度（Degree of Steerability） δ_s ：间接改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_s = \text{rank}[C_{1s}(\beta_s)] \in [0, 2]$$

- 机动度（Degree of Maneuverability） δ_M ：改变机器人运动状态的能力。

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

- 机动度相同，结构不一定相同。
- $\delta_M = 2$ ，瞬心位于一条直线上； $\delta_M = 3$ ，瞬心可分布于空间任何一点。

实例

- 全向机器人：
 - Type(3,0): 完整约束全方位移动机器人。
 - Type(2,1): 一个同心轮+两个瑞典轮。
 - Type(1,2): 多舵机全方位移动机器人。
- 非全向机器人：
 - Type(2,0): 差分移动机器人。
 - Type(1,1): 自动驾驶汽车（阿克曼转向）、自行车、叉车。

4 机器人运动控制

4.1 运动控制

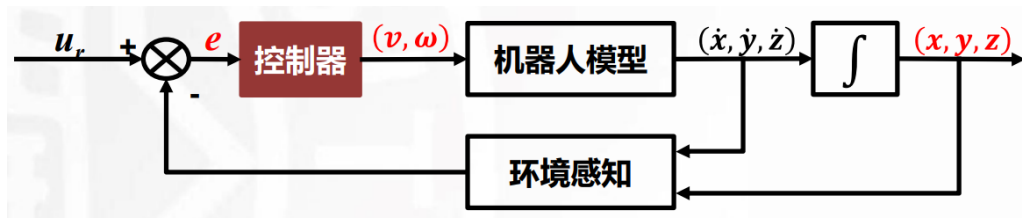


图 7: 运动控制器

误差（惯性系下给定与反馈） $\xrightarrow{\text{变换}}$ 输入（机器人系下控制输入）。

特点

- 大多存在滑动约束，是非完整系统，有侧向偏差和姿态偏差。
- 非线性，控制器设计复杂，还需要根据可获得的反馈信号选取，按顺序调节控制参数，并且不能同时实现定点控制和跟踪控制。
- 不存在能完成控制目标的连续时不变（静态）反馈控制率。
- 受标定精度影响大，且由于执行单元性能约束，控制输入要合理限幅。

分类

- 定点（镇定）控制（Regulation Control）：以指定姿态到达指定位置。
- 跟踪控制：
 - 轨迹跟踪控制（Trajectory Tracking Control）：跟随给定轨迹（包含速度、姿态信息）。
 - 路径跟踪控制（Path Tracking Control）：跟随给定路线。

开环控制 将运动轨迹分割成直线和圆弧，存在以下问题：

- 直线和圆弧的曲率不一致，不连续。
- 难以实现定义若干合适轨迹。
- 速度加速度约束。
- 无法自适应调整轨迹来面对环境变化。
- 所得轨迹不光滑。

控制器性能评价 取正定李雅普诺夫函数，其导数负定则系统渐进稳定。

两轮差速机器人运动控制 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_l + \dot{\phi}_r \\ 0 \\ \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{变换}} \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

4.2 定点控制器 ⁹

控制目标

机器人参考坐标系下误差 $e = [x \ y \ \theta]^T$,

设计控制阵 $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$, 其中 $k_{ij} = k(t, e)$,

得到控制输入 $\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = Ke$, 使 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

误差信号转换

惯性系下，实际状态 $q = [x \ y \ \theta]^T$ 与参考状态 $q_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$ 之差为开环误差：

$$\tilde{q} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{\theta}]^T = [x - x_r \ y - y_r \ \theta - \theta_r]^T$$

1. 转换到机器人系

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = R(\theta)^T \tilde{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{闭环}} \dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = R(\theta) \dot{\tilde{q}} + R(\dot{\theta}) \tilde{q} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

2. 转换到极坐标系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \\ \beta = -\arctan 2(-\tilde{y}, -\tilde{x}) \\ \alpha = -\beta - \tilde{\theta} \end{cases} \xrightarrow{\text{闭环}} \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{\rho} & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{\rho} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

机器人系非线性控制器

$$\text{设计控制器} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}, \text{代入得} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 \\ -k_2 e_2 + e_2^2 \sin(t) \end{bmatrix}。$$

其有误差时扰动，效果不佳。

极坐标系线性控制器

$$\text{设计控制器} \begin{cases} v_1 = k_\rho \rho \\ v_2 = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \end{cases}, \text{代入得}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos \alpha \\ -k_\rho \sin \alpha \\ k_\rho \sin \alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \\ -k_\rho \alpha \\ k_\rho \alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \end{bmatrix}$$

其中前两行非线性耦合，在 $\alpha \rightarrow 0$ 时指数性稳定，非全局稳定。

极坐标系线性控制器

$$\text{设计控制器} \begin{cases} v_1 = k_\rho \rho \cos \alpha \\ v_2 = k_\alpha \alpha + \frac{k_\rho \sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} (\alpha - k_\beta \beta) \end{cases}, \text{代入得}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos \alpha \cos \alpha \\ -k_\rho \cos \alpha \sin \alpha \\ k_\rho \cos \alpha \sin \alpha - k_\alpha \alpha - \underbrace{\frac{k_\rho \sin \alpha \cos \alpha}{\alpha}}_{\alpha \rightarrow 0, \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1} (\alpha - k_\beta \beta) \end{bmatrix}$$

其全局渐近稳定。

4.3 轨迹跟踪控制器 10

控制目标与误差变换

惯性系下，实际轨迹 $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$ 与参考轨迹 $q_r [x_r(t) \ y_r(t) \ \theta_r(t)]^T$ 之差为开环误差：

$$\tilde{q}(t) = [\tilde{x}(t) \ \tilde{y}(t) \ \tilde{\theta}(t)]^T = [x(t) - x_r(t) \ y(t) - y_r(t) \ \theta(t) - \theta_r(t)]^T$$

控制目标为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$ 。

开环误差转换坐标系后求闭环误差，进而得到辅助误差信号：

$$e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{闭环}} \dot{e} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 e_2 - v_{1r} \cos e_3 \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ v_2 - v_{2r} \end{bmatrix}$$

控制器

$$\text{设计控制器} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_{1r} \cos e_3 \\ -v_{1r} \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_2 e_3 + v_{2r} \end{bmatrix}, \text{代入得}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 e_1 + v_2 e_2 \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ -k_2 e_3 - v_{1r} \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 \end{bmatrix}$$

4.4 路径跟踪控制器 11

控制目标与误差变换

惯性系下，实际路径 $q(s) = [x(s) \ y(s) \ \theta(s)]^T$ 与参考路径 $q_r [x_r(s) \ y_r(s) \ \theta_r(s)]^T$ 之差为开环误差：

$$\tilde{q}(s) = [\tilde{x}(s) \ \tilde{y}(s) \ \tilde{\theta}(s)]^T = [x(s) - x_r(s) \ y(s) - y_r(s) \ \theta(s) - \theta_r(s)]^T$$

其中 $s \in [0, 1]$ 为路径参考变量，控制目标为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}(s) = 0$ 。

$$\text{作变换} \begin{cases} y_1 = x + b \cos \theta \\ y_2 = y + b \sin \theta \end{cases},$$

$$\text{进而得到闭环误差} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -b \sin \theta \\ \sin \theta & b \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T(\theta) \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}。$$

$$\text{逆运算得到} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{b} & \frac{\cos \theta}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{故} \begin{cases} \dot{y}_1 = u_1 \\ \dot{y}_2 = u_2 \\ \dot{\theta} = \frac{u_2 \cos \theta - u_1 \sin \theta}{b} \end{cases}。$$

控制器

$$\text{设计控制器} \begin{cases} u_1 = \dot{y}_{1d} + k_1(y_{1d} - y_1) \\ u_2 = \dot{y}_{2d} + k_2(y_{2d} - y_2) \end{cases}, \text{ 有} \begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = -k_1 \tilde{y}_1 \\ \dot{\tilde{y}}_2 = -k_2 \tilde{y}_2 \end{cases}, \text{ 系统指数性收敛。}$$

5 机器人感知与定位建图

5.1 传感器

常见传感器 激光雷达 (Laser)、里程计 (Odometer)、声纳 (Rader)、摄像机 (Camera)、惯导系统 (IMU)、加速度传感器 (Accelerometer)、陀螺 (Gyroscope)、力觉传感器 (Force Sensor)、罗盘 (Compass)。

分类

- PC (Proprioceptive, 本体感受) / EC (Exteroceptive, 外感受)。
- A (Active, 有源) / P (Passive, 无源)。

特性

- 测量范围：测量上下界之差。
- 动态范围：测量范围上下界比率，常用对数表示，单位为dB。
- 分辨率：最小可测量变化量，一般为动态范围下界。
- 线性度：输入输出信号的映射关系。

5.2 光电传感器

把被测量变化转换成光信号变化，再转换成电信号。

5.2.1 概述

组成 辐射源、光学通路、光电器件。

特性

- 不受电磁干扰影响。
- 非接触测量。
- 频谱宽，高精度，高分辨率，高可靠性，发应快。

5.2.2 编码器 ¹²

测量系统相对运动角度，具有高精度、高分辨率和高可靠性。按结构可分为接触式、光电式和电磁式，后两种为非接触式编码。

增量式旋转编码器

- 不能直接输出数字编码，需要增数字电路。
- 原理：遮光周期性变化，莫尔条纹明暗交替，电压周期性变化 $U_0 = U_m \cos(\frac{2\pi}{W}x)$ ，形成脉冲，根据脉冲数量可推算旋转角度，位置数据是相对的。
- 辨向：为判断光栅移动方向，使用D触发器（）整合两个光栅的信息。
 - D触发器：时钟信号有效时， $Q = D$ 。
 - 边缘D触发器：时钟信号处于有效边沿时， $Q = D$ 。

绝对式光电编码器

- 能直接输出某种码制的数码。
- 格雷码（余3循环码）：任意相邻数只有一位二进制数不同，可以由二进制码按位异或（第一位保留）获得，属于可靠性编码，求反方便。

5.3 里程计

5.3.1 里程计模型

两轮差速机器人里程计模型 以下以两轮差速机器人（见1）为例。

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_L + \dot{\phi}_R \\ 0 \\ \frac{\dot{\phi}_R - \dot{\phi}_L}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{转换到惯性系}} \begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

码盘读数为：

$$\begin{cases} \Delta s = \frac{r}{2}(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L) \\ \Delta\theta = \frac{r}{2d}(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L) \end{cases} \xrightarrow{\text{小时间变化}} \begin{cases} \Delta s = v_k T_s \\ \Delta\theta = \omega_k T_s \end{cases}$$

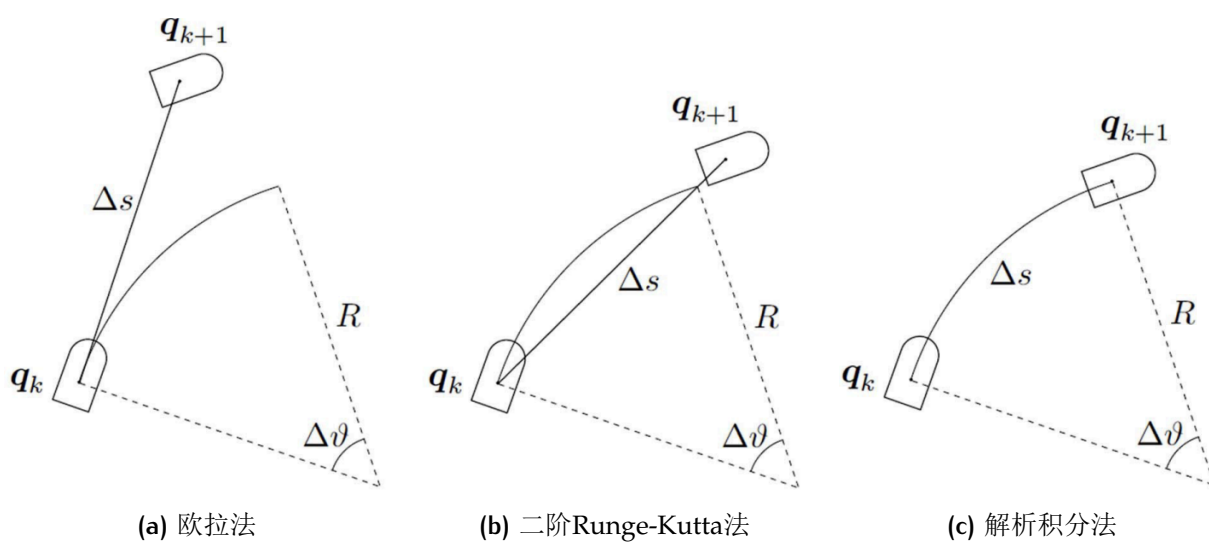


图 8: 里程计建模方法

建模方法

- 欧拉法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos \theta_k \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin \theta_k \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- 二阶Runge-Kutta法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases}$$

- 解析积分法

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{v_k}{\omega_k} (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) \\ y_{k+1} = y_k - \frac{v_k}{\omega_k} (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s \end{cases} \xrightarrow{\omega_k=0} \begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k T_s \\ y_{k+1} = y_k \end{cases}$$

5.3.2 里程计误差

误差来源

- 数值积分误差。

- 运动学参数误差：速度不恒定，半径误差。
- 打滑。

误差传播

二阶Runge-Kutta法的位姿更新为：

$$\mathbf{p}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta, \Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L)}{2} \cos(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R - \Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L)}{2} \sin(\theta_k + \frac{r[\Delta\phi_R - \Delta\phi_L]}{4d}) \\ \frac{r(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L)}{2d} \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$ 是控制输入量，有误差协方差矩阵迭代公式：

$$\sum_{\mathbf{p}'} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \sum_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f^T}_{\text{位姿}} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{r|l}} f \cdot \sum_{\Delta} \cdot \nabla_{\mathbf{r|l}} f^T}_{\text{控制输入量}}$$

初始化姿态协方差矩阵 $\sum_{\mathbf{p}'}$ （可零初始化），其更新量为：

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 1 & \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设 $\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$ 的误差相互独立，有控制输入量协方差矩阵：

$$\sum_{\Delta} = \text{covar}(\Delta\phi_R, \Delta\phi_L) = \begin{bmatrix} k_r \|\Delta\phi_R\| & 0 \\ 0 & k_l \|\Delta\phi_L\| \end{bmatrix}$$

其更新量为：

$$\nabla_{\mathbf{r|l}} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_R} & \frac{\partial f}{\partial \Delta\phi_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d} \Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2} \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d} \Delta s \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) + \frac{r}{4d} \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) & \frac{r}{2} \sin(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{r}{4d} \Delta s \cos(\theta_k + \frac{\Delta\theta}{2}) \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix}$$

误差转化展示 原理见7.1。

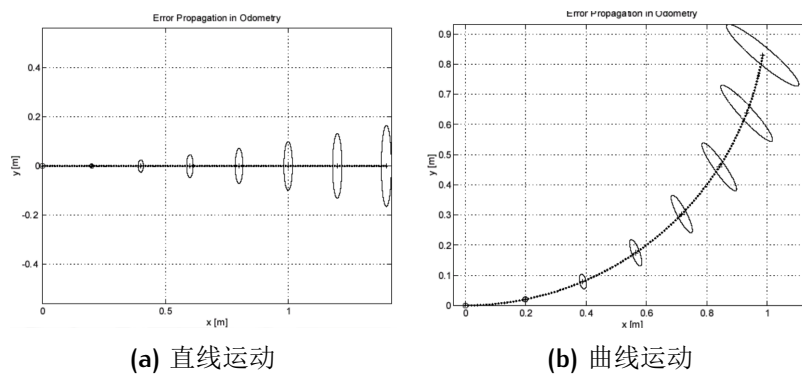


图 9: 里程计误差转化展示

直线运动时误差方向与运动方向垂直，曲线运动时则不垂直。

5.4 激光传感器

5.5 点云匹配与定位

5.6 卡尔曼滤波

5.7 蒙特卡洛定位

5.8 SLAM

6 机器人轨迹规划

7 附录

7.1 误差转化展示

将误差传播协方差矩阵 Σ_p 转化成椭圆展示。

计算 取 Σ_p 左上二阶子阵 $\Sigma_{p_{xy}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$ ，计算特征值 λ_1, λ_2 和特征向量 \vec{p}_1, \vec{p}_2 ，其分别表示长短轴的大小和方向，圆心是 (x_k, y_k) （直接对 Σ_p 求取特征根和特征向量，再取前两个，结果与其不同）。

意义

- 长短轴表示误差在不同方向上的大小，可通过开根号、乘系数等方法调节。
- 方向角表示误差传播的主要方向，体现了误差传播的各向异性。
- 椭圆大小反映了系统的误差范围，可按置信度缩放。

返回里程计[5.3.2](#)