03. Преобразование на плоскости и в пространстве. Система однородных координат

Однородная система координат

Для упрощения вычислений в программировании трёхмерной графики используются четырёхмерные векторы, матрицы размером 4x4 и так называемые однородные координаты. Четвёртое измерение не играет никакой роли, оно вводится только лишь для упрощения вычислений.В четырёхмерном векторе, как вы возможно догадались, используются четыре компоненты: x, y, z и w. Четвёртая компонента вектора называется однородной координатой.Геометрически представить однородную координату очень сложно. Поэтому мы рассмотрим трёхмерное однородное пространство с координатами (x,y,w). Представим что двухмерная плоскость определа в точке w=1. Соответственно двухмерная точка представлена в однородном пространстве следующими координатами (x,y,1). Все точки пространства, которые не находятся в плоскости (они находятся в плоскостях, где w != 1) можно вычислить спроецировав на двухмерную плоскость. Для этого нужно разделить все компоненты этой точки на однородную. Т.е. если w!=1, в "физической" (там где мы работаем и там где w=1) плоскости координаты точки будут следующими: (x/w,y/w,w/w) или (x/w,y/w,1).

Координаты векторов следующие:

v1 = [3 3 3]

v2 = [3 1 0]

v3 = [3 -2 -2]

Эти векторы спроецируются в "физическую" плоскость (w=1) следующим образом:

v1 = [1   1 1]

v3 = [-1.5 1 1]

Для каждой точки физической плоскости существует бесконечное количество точек в однородном пространстве.

В четырёхмерном пространстве всё точно так же. Мы работаем в физическом пространстве где w=1: (x,y,z,1). Если в результате вычислений $w \neq 1$, значит нужно все координаты точки разделить на однородную: (x/w,y/w,z/w,w/w) или (x/w,y/w,z/w,1). Существует ещё особый случай, когда w=0. Мы его рассмотрим попозже.

Теперь перейдём к практике: для чего же чёрт возьми нужна однородная координата?

Как мы уже выяснили, матрица размером 3x3 представляет линейное преобразование, т.е. в ней не содержится переноса (перемещения). Для переноса используется отдельный вектор (а это уже аффинное преобразование): $v = aM + b$

Т.е. мы умножаем все точки (векторы) объекта на матрицу преобразования M, чтобы перейти в инерционную систему координат (базисные векторы которой совпадают с базисными векторами мировой системы координат), а затем добираемся до мирового пространства с помощью вектора b. Напоминаю, что вектор b соединяет начало объектного пространства и начало мирового пространства.

Так вот, используя 4е измерения можно в одну матрицу запихать как линейные преобразования (вращение, масштабирование), так и перенос.

Представим, что 4ая компонента всегда равна 1 (хотя, мы уже выяснили что это не так). Теперь линейное преобразование можно представить с помощью матрицы размером 4x4:

$$\begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & 0 \\ j_x & j_y & j_z & 0 \\ k_x & k_y & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Посмотрим на формулу умножения векторов на матрицу преобразования в четырёхмерном пространстве:
vx = (xix + yjx + zkx + w*0)
vy = (xiy + yjy + zky + w*0)
vz = (xiz + yjz + zkz + w*0)
vw = (x*0 + y*0 + z*0 + w*1)
Как видим, компоненты преобразованного вектора с помощью матрицы размером 4x4, равны компонентам преобразованного вектора с помощью матрицы размером 3x3. Четвёртая же компонента, как мы условились, всегда будет равна единице, поэтому её можно просто отбросить. Следовательно, можно сказать, что преобразования осуществляемые матрицами размером 3x3 и 3x4 - эквиваленты.

Теперь посмотрим на матрицу переноса:

$$\begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & 0 \\ j_x & j_y & j_z & 0 \\ k_x & k_y & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Умножьте любой вектор из объектного пространства (смотрите рисунок в начале урока) на данную матрицу и вы сможете выразить этот вектор в мировом координатном пространстве (это если базисные векторы объектного и мирового пространств равны).

Обратите внимание, что это тоже линейное преобразование, только в четырёхмерном пространстве.
С помощью произведения матриц мы можем объединить матрицу вращения и матрицу переноса:

$$\begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & 0 \\ j_x & j_y & j_z & 0 \\ k_x & k_y & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & 0 \\ j_x & j_y & j_z & 0 \\ k_x & k_y & k_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix}$$

Вот эта последняя матрица именно то, что нам было нужно с самого начала. Вы должны хорошо понимать что именно значат все её элементы (за исключением 4-ого столбца).