3.2.2. Форма представления кривых Эрмита

Данная математическая модель была представлена в середине XIX века французским математиком Шарлем Эрмитом (*Charlie Hermite,* 1822-1901). В 1963 г. американский инженер Фергюсон (*J.S.Ferguson*) впервые использовал эту форму, как базовую модель для САПР самолетостроения (фирмы «Боинг»).

Основной задачей геометрического моделирования будет являться восстановление кривых и поверхностей с максимально возможной точностью по исходным аппроксимированным описаниям. В этом смысле задача построения сегмента кривой Эрмита формируется следующим образом.

Пусть P_1 и P_4 - концевые точки сегмента кривой, а R_1 и R_4 - касательные в них.

Необходимо найти коэффициент системы уравнений (3.1), исходя из следующих условий:

$$r(0) = P_1 = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z});$$
$$r(1) = P_4 = (P_{4x}, P_{4y}, P_{4z});$$
$$r'(0) = R_1 = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z});$$
$$r'(1) = R_4 = (R_{4x}, R_{4y}, R_{4z}).$$

Рассмотрим решение задачи на примере одного уравнения. Для компактности представим уравнения в векторном виде:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x = (\, t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1 \,) \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{pmatrix} = T \cdot C_x \;, \qquad (3.2)$$

где T - вектор-строка степеней параметра t, C_x - вектор-столбец коэффициентов для первого уравнения системы (3.1).

Представим исходные данные в векторной форме:

$$\begin{aligned} & x(t)|_{t=0} = x(0);\; x(t)|_{t=1} = x(1); \\ & P_{1x} = x(0) = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) \cdot C_x \\ & P_{4x} = x(1) = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1) \cdot C_x \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Для получения значений производных продифференцируем выражение $x(t)$:

$$\begin{aligned} & x'(1) = (\, 3t^2 \;\; 2t \;\; 1 \;\; 0 \,) \cdot C_x \\ & R_{1x} = x'(0) = (\, 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \,) \cdot C_x \\ & R_{4x} = x'(1) = (\, 3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0 \,) \cdot C_x \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Объединим отдельные векторные выражения формул (3.3) и (3.4) в единую систему уравнений, которые описываются одним матричным уравнением:

$$G_{Hx} = \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot C_x = N_x \cdot C_x \,, \qquad (3.5)$$

где G_{Hx} - геометрическая матрица Эрмита, содержащая исходные данные для описания сегмента кривой линии.

Решая выражение (3.5) относительно вектора C_x, получим следующий результат:

$$C_x = N_H^{-1} \cdot G_{Hx} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G_{Hx} = M_H \cdot G_{Hx}, \qquad (3.6)$$

где $M_H = N_H^{-1}$ - матрица сопряжения Эрмита, а G_H - вектор Эрмита.

Подставим значение из (3.6) в (3.2), получим:

$$x(t) = T \cdot C_x = T \cdot M_H \cdot G_{Hx}\,.$$

Аналогичным образом получим соответствующие уравнения для координат y и z:

$$y(t) = T \cdot M_H \cdot G_{Hy}$$
$$z(t) = T \cdot M_H \cdot G_{Hz}$$

Последние три матричные уравнения можно записать в виде одного уравнения следующего вида:

$$\overline{r}(t) = T \cdot M_H \cdot G_H, \tag{3.7}$$

где геометрическая матрица Эрмита имеет следующий вид:

$$G_H = \begin{pmatrix} P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \\ P_{4x} & P_{4y} & P_{4z} \\ R_{1x} & R_{1y} & R_{1z} \\ R_{4x} & R_{4y} & R_{4z} \end{pmatrix}$$

и определяет исходные данные для описания сегмента кривой.

Таким образом, пара точек и касательные в них однозначно определяют сегменты кубической кривой, т.е. на участке данного сегмента нет необходимости сохранять координаты каждой точки. Имея исходные данные, содержащиеся в G_H и изменяя значения параметра t от нуля до единицы можно восстановить с заданной точностью точки сегмента.

Произведение $T{\cdot}M_H$ представляет собой следующий вектор:

$$T \cdot M_H = ((2t^3 - 3t^2 + 1)\ (-2t^3 + 3t^2)\ (t^3 - 2t^2 + 1)\ (t^3 - t^2)).$$

Четыре компонента данного вектора определяют четыре функции над параметром t, которые называются *функциями сопряжения*, т.к. первые из них связывают (сопрягают) координаты точек P_1 и P_2, а вторые две - векторы R_1 и R_4.

При построении гладких поверхностей необходимо следить за поведением кривой на каждом из сегментов. Ее поведение будет зависеть от величин касательных R_1 и R_4. Рассмотрим касательные R_{1x} и R_{4x}:

$$\overline{R}_1 = k_1 \overline{e}_1\ ,$$

$$\overline{R}_4 = k_4 \overline{e}_4$$

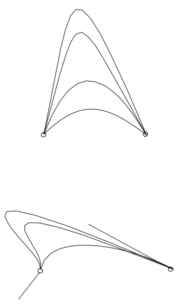

Рис. 3.3

где e_1 и e_4 - единичные векторы касательных R_1 и R_4 соответственно.

В том случае, если одновременно и пропорционально увеличивать значения длин k_1 и k_4, кривая становится более изогнутой.

При значительном возрастании величин k_1 и k_4 могут возникать изломы и петли на сегменте кривой. Если изменение значений k_1 и k_4 происходит неравномерно, то деформация сегмента кривой происходит в одном направлении. Для того чтобы конструируемая поверхность не содержала изломов и петель на значения коэффициентов k_1 и k_4 накладываются следующие ограничения: их величина не должна более чем в три раза превышать размер хорды, которая определяется как $(\overline{r}(0) - \overline{r}(1))$.

При сопряжении сегментов кривой в единую кривую линию на величины касательных векторов и коэффициентов k_1 и k_4 накладываются дополнительные ограничения:

– направление касательных $\overline{R}_i(1)$ в следующем сегменте должно совпадать с направлением $\overline{R}_{i+1}(0)$ в текущем сегменте;

– длины этих касательных $\overline{R}_i(1)$ и $\overline{R}_{i+1}(0)$ могут не совпадать;

– в отдельных случаях в точках сопряжения сегментов накладываются дополнительные требования на заданную кривизну кривой. Под кривизной понимается величина:

$$\sigma = \frac{1}{\rho},$$

обратная радиусу кривой ρ.

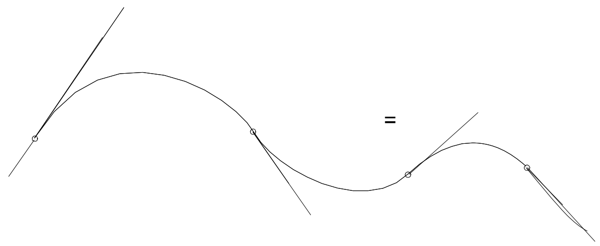

Рис. 3.4.

Достоинство формы Эрмита:

- позволяет с математической точностью определить гладкость сопряжения сегментов;

Недостатками данной формы является то, что она

- не позволяет задавать сегмент кривой в интерактивном режиме (например, при помощи курсора «мыши»);
- не позволяет определять охватывающий четырехугольник (см. достоинства формы Безье).

3.2.7. Модель поверхности в форме Эрмита

Для моделирования сегмента трехмерной поверхности в данной форме используются координаты концевых (угловых) точек сегмента и касательные векторы в них. На основании этих исходных данных определяется коэффициент бикубического многочлена - a_{ij}. Описание кривой линии в трехмерном пространстве, в форме Эрмита определяется:

$$x(u) = U \cdot M \cdot G_{Hx}.$$

Перемещая подобную кривую во времени получим:

$$x(u,t) = U \cdot M_H \cdot G_{Hx}(t) = U \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} P_{1x}(t) \\ P_{4x}(t) \\ R_{1x}(t) \\ R_{4x}(t) \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

В данном выражении функции $P_1(t)$ и $P_4(t)$ описывают перемещение во времени концевых точек, а $R_1(t)$ и $R_4(t)$ - перемещение касательных векторов.

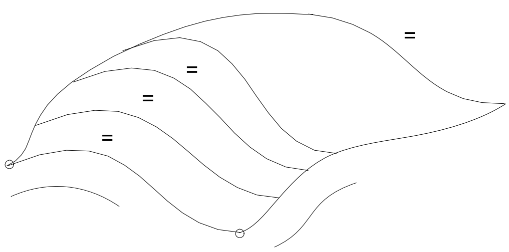

Рис. 3.11

Если интерполируемые линии являются прямыми, то полученная поверхность называется линейчатой. Если, кроме того, кривые $P_1(t)$ и $P_4(t)$ находятся в одной плоскости, то моделируемый сегмент буде плоским.

Введем следующие обозначения для функции $P_1(t)$, $P_4(t)$, $R_1(t)$, $R_4(t)$:

$$P_{1x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{pmatrix}; \quad P_{4x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{pmatrix};$$

$$R_{1x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{pmatrix}; \quad R_{4x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} q_{41} \\ q_{42} \\ q_{43} \\ q_{44} \end{pmatrix};$$

Представим четыре многочлена в виде одного вектора:

$$G_{Hx}^T(t) = (\, P_1(t) \;\; P_4(t) \;\; R_1(t) \;\; R_4(t)\,) = T \cdot M_H \cdot \widetilde{Q}_x \qquad (3.15)$$

где $\widetilde{Q}_x = \left\| q_{ij} \right\|_{4\times 4}$.

Используя тождество матричной алгебры $((ABC)^T = C^T B^T A^T)$ применительно к выражению (3.15), получим следующие значение:

$$G_{Hx} = \begin{pmatrix} P_{1x}(t) \\ P_{4x}(t) \\ R_{1x}(t) \\ R_{4x}(t) \end{pmatrix} = \widetilde{Q}_x^T \cdot M_H^T \cdot T^T = Q_x \cdot M_H^T \cdot T^T \qquad (3.18)$$

где $Q_x = \widetilde{Q}_x^T = \left\| q_{ji} \right\|_{4\times 4}$.

Подставив (3.18) в (3.14), получим:

$$x(u,t) = U \cdot M_H \cdot Q_x \cdot M_H^T \cdot T^T \qquad (3.19)$$

Аналогичным образом получается выражение для зависимостей $y(u,t)$ и $z(u,t)$. Таким образом, задача конструирования поверхности в форме Эрмита заключается в определении элементов матриц $\widetilde{Q}_x$, $\widetilde{Q}_y$, $\widetilde{Q}_z$.

Рассмотрим структуру матрицы Q_x:

$$Q_x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{00} & \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{01} \\ x_{10} & x_{11} & \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{10} & \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{11} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{00} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{01} & \left(\frac{\partial x^2}{\partial u \partial t}\right)_{00} & \left(\frac{\partial x^2}{\partial u \partial t}\right)_{01} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{10} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{11} & \left(\frac{\partial x^2}{\partial u \partial t}\right)_{10} & \left(\frac{\partial x^2}{\partial u \partial t}\right)_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{00} & Q_{01} \\ Q_{10} & Q_{11} \end{pmatrix}.$$

Элементы подматрицы Q_{00} представляют собой координаты четырех углов сегмента поверхности. Элементы подматриц Q_{01} и Q_{10} определяют тангенсы углов наклона касательных векторов в узловых точках сегмента по параметрам u и t соответственно. Элементы подматрицы Q_{11} определяют частные производные по обоим параметрам в узловых точках сегмента (кривизна поверхности). Чем больше значение кривизны, тем сильнее изгиб в узловой точке. Вид сегмента в форме Эрмита представлен на рис.3.12.

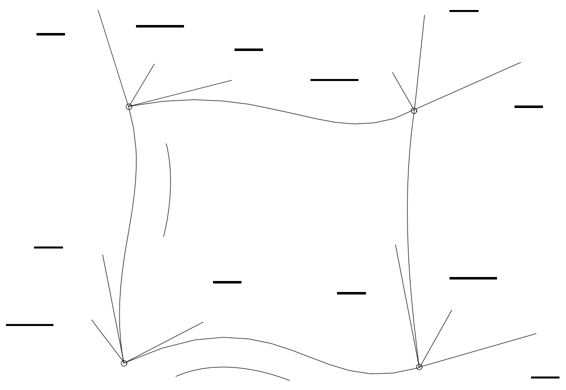

Рис. 3.12

При соединении отдельных сегментов, представленных в форме Эрмита, в единую поверхность, возникает задача сопряжения сегментов таким образом, чтобы при переходе от одного сегмента к другому поверхность сохранила гладкость. Для этого необходимо соблюдать условия $C^{(1)}$ - непрерывности:

- кривые граничащих граней сегментов, должны совпадать;
- касательные векторы, пересекающие ребро должны иметь в точке соединения двух сегментов одно и тоже направление.

Рассмотрим геометрическую матрицу, описывающую исходную матрицу, необходимую для формы Эрмита:

$$Q_S = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}.$$

В данной матрице строка $\{q_{1i}\}$- соответствует кривой линии, при значении параметра $u = 0$. Строка $\{q_{2i}\}$- описывает кривую при $u = 1$, Аналогичным образом строка $\{q_{3i}\}$ описывает кривую при $u = 0$, а $\{q_{4i}\}$- при $u = 1$.

Таким же образом определяется поведение кривой при фиксированном параметре t: столбцы $\{q_{i1}\}$ и $\{q_{i3}\}$ соответствуют кривой при $t = 0$, а $\{q_{i2}\}$ и $\{q_{i4}\}$ – при $t = 1$.

При соединении сегментов в поверхность возможно два случая сопряжения:

1) сопряжение грани с фиксированным параметром *u*;
2) сопряжение грани с фиксированным параметром *t*.

Рассмотрим первый случай представленный на рис.3.13.

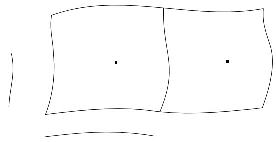

Рис. 3.13

Исходя из смысла элементов матрицы Q, для двух приведенных сегментов A и B должны присутствовать следующие эквивалентные соотношения между элементами матриц Q_A и Q_B:

$$\begin{cases} q^A_{2i} = q^B_{1i}\text{ , i = 1÷4 ,} \\ q^A_{4i} = q^B_{3i}\text{ , i = 1÷4 .} \end{cases}$$

Рассмотрим второй случай, изображенный на рис.3.14. В этом случае аналогичное соотношение будет выглядеть следующим образом:

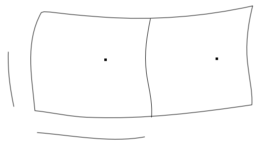

Рис. 3.14

$$\begin{cases} q^A_{i2} = q^B_{i1}\text{ , i = 1÷4 ,} \\ q^A_{i4} = q^B_{i3}\text{ , i = 1÷4 .} \end{cases}$$

Достоинства и недостатки аналогичны достоинствам и недостаткам при описании кривой в форме Эрмита.