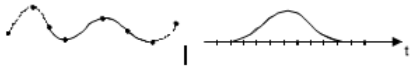
18. В-сплайновые модели кривых поверхностей и их рановидности

В-сплайном k -го порядка (или k −1 степени) называется сплайн, определенный на любом числе последовательно расположенных смежных отрезков, но только на k из них отличный от 0 .



Любой сплайн произвольного порядка m , заданный на n узлах t0,t1...tn может быть выражен в виде линейной комбинации B-сплайнов, определенных на том же количестве основных узлов с использованием m −1 дополнительного узла, на каждом из концевых интервалов. На расширенным таким образе множестве узлов можно построить m+n-1 последовательных B-сплайнов,каждый из которых отличен от 0 тоько на m последовательных отрезках. Тогда сплайновая кривая будет описываться след обр:

$$S(\mathrm{t}) = a_0 + \sum_{i=1}^{m+n-1} (C_i M_{mi}(\mathrm{t}))$$

Где S (t) - сплайн порядка m , определенный на n узлах, а Mmi(t) - функция B-сплайна, заданная на расширенном множестве узлов и отличный от нуля при ti-m< t < ti ; Ci – весовые коэффициенты. Если сплайн степени m-1 выражен в виде совокупности B-сплайнов, то изменение коэффициентов у одного из B-сплайнов влечет за собой изменение ровно на m отрезках кривой, без нарушения ее непрерывности. Кроме того, редставление сплайновой кривой в виде B-сплайнов имеет преимуществас точки зрения устойчивости вычислений. Линейный B-сплайн (первой степени или второго порядка), который определяется на двух смежных отрезках, изображен на рис.3.7.

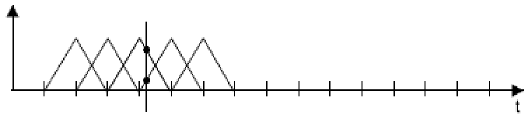


Рис. 3.7

Квадратичный сплайн второй степени или третьего порядка, определенный на трех отрезках, имеет вид, представленный на рис.3.8.

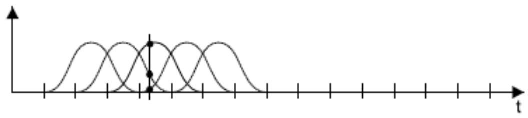


Рис. 3.8

Уравнение линейного сплайна (m = 1):

$$S_i(\mathrm{t}) = \begin{cases} \dfrac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \dfrac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}}, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_i(\mathrm{t}) = \dfrac{(t - t_i)^2}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+1} - t_i)} \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \\ S_i(t) = \dfrac{(t - t_i)(t_{i+2} - t)}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+2} - t_{i+1})} + \dfrac{(t_{i+3} - t)(t - t_{i+1})}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+2} - t_{i+1})} \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ S_i(\mathrm{t}) = \dfrac{(t_{i+3} - t)^2}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+2})} \quad t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \end{cases}$$

Данные выражения определяют наиболее общий случай неоднородных B-сплайнов, т.е. B-сплайнов у которых размеры сегментов [ti,ti+1]могут изменяться. В том случае, если размеры сегментов постоянны, сплайны называются однородными. Например, для однородного линейного сплайна приведенная выше формула упрощается до следующего вида

$$\mathrm{S_i}\left(\frac{i + j}{L}\right) = f(x) = \begin{cases} j, & 0 \le j \le 1 \\ 2 - j, & 1 \le j \le 2 \end{cases}$$

где L - длина сплайновой кривой, j - дополнительная нормированная переменная $j = \frac{t - t_i}{L} = \frac{t}{L} - i$

Разновидности В-сплайновых кривых.

На практике часто возникает задача, при которой необходимо скорректировать форму кривой (поверхности) не изменяя исходных данных, т.е. опорных точек. Для решения задачи используются такие разновидности В-сплайновых моделей как рациональные В-сплайны и -сплайны. Рациональны кубич. Сплайны опр-ся с помощью выражения

$$r(t) = \frac{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i K_i(t) P_i}{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i K_i(t)}$$

P_i –исходные данные – координаты опорных точек, t – параметр сегмента кривой($0 \div 1$),
α_i - положительные коэ-ты, которые опр-ся весами или параметрами формы, K_i - функции от параметра, определяемые выр-ми:

$K_1(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3$

$K_2(t) = \frac{1}{6}(3t^2 - 6t^2 + 6)$

$K_3(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$

$K_4(t) = \frac{1}{6}t^3$

Изменяя коэ-ты α_i,польз-ль получает возм-ть изм-ть форму сплайновой кривой. При равном значении коэ-в α_i, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ рациональный кубический сплайн вырождается в обычную В-сплайновую форму.(см. рис 1.10)

Рис. 1.10

β-сплайны. Данная модель предназначена для тех же самых целей, однако использует некоторые другие формальные соотношения. Для решения задачи используется следующее усл-е:

$r_2(0) = r_1(1)$

$r_2'(0) = \beta_1 r_1'(1)$

$r_2''(0) = \beta_1^2 r_1'(1) + \beta_2 r_1'(1)$

β – коэ-ты называемые параметрами формы В-сплайнов. β_1 - пар-р скоса ($\beta_1 > 0$), β_2 - пар-р напряжения кривой ≥ 0.

При . $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0$ сплайн вырождается в традиционно кубический В-сплайн.