

Сплайн порядка k - это функция $S(t)_k$, существующая на промежутке $[t_0, t_m]$ с заданными узлами $t_0 < t_1 \dots < t_m$, $k-1$ - раз непрерывно дифференцируемая на нем и на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ совпадающая с некоторым многочленом степени не выше k .

Кубический сплайн - это гладкая кусочно-кубическая кривая, удовлетворяющая следующим свойствам:

- на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ является кубическим полиномом;
- первые две производные $S_3(t)$ непрерывны в узлах $[t_0, t_m]$

С точки зрения физики сплайновые кривые минимизируют энергию внутренних напряжений. С математической точки зрения сплайновая кривая минимизирует среднюю квадратичную кривизну. Существует несколько разновидностей сплайновых кривых: классический интерполяционный сплайн и форма базового сплайна -B-сплайн1.

Интерполяционный кубический сплайн

Функция данной разновидности сплайна должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) $S_i(t_i) = f_i, i = 0 \div m$;
- 2) на любом частном отрезке $[t_i, t_{i+1}], i = 0 \div m$, функция должна иметь вид:
$$S_i(t) = \sum_{j=0}^3 a_{ij}(t-t_i)^j$$
;
- 3) на всем интервале $[t_0, t_m]$ функция должна иметь непрерывную вторую производную.

На каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, конфигурация сплайна определяется четырьмя коэффициентами: $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$. Так как таких отрезков $n-1$, то для полного построения кривой сплайна $S(t)$, проходящих через $m+1$ точку, (m - отрезков) необходимо вычислить $4m$ - коэффициентов. Первыми уравнениями, определяющими систему описания сплайна является, $m+1$ уравнение, описывающее свойство:

- 1) $S_i(t) = f_i$ таких уравнений $m+1$, условия непрерывности сплайна во всех внутренних точках дает еще $m-1$ уравнение;
- 2) $S_i(t)|_{t=1} = S_{i+1}(t)|_{t=0}$ $m-1$ уравнений. Условие непрерывности первых производных дает еще $m-1$ уравнение;
- 3) $S'_i(t)|_{t=1} = S'_{i+1}(t)|_{t=0}$ Условие непрерывности вторых производных дает еще $m-1$ уравнение;
- 4) $S''_i(t)|_{t=1} = S''_{i+1}(t)|_{t=0}$

Т.е. получается $4m-2$ уравнения. Для получения однозначного решения необходимо дополнить полученную систему двумя уравнениями. Эти уравнения могут быть выбраны произвольным образом, в зависимости от поставленной задачи, либо от удобства вычисления. Как правило, в качестве двух дополнительных уравнений рассмотрим один из следующих вариантов:

- 1) определяется значение первых производных в концевых точках отрезка $S(t_0) = R_0, S(t_m) = R_m$
- 2) определяется значение двух первых производных в начальной точке $S(t_0) = R_0, S'(t_0) = M_0$
- 3) определяется значение двух первых производных в конечной точке $S(t_m) = R_m, S'(t_m) = M_m$

Преимуществами данной сплайновой формы:

- содержит минимальную априорную информацию о производных,
- поддерживает более высокую степень гладкости кривой.

Недостаток: При изменении одной из точек или добавления новой возникает необходимость повторного решения.

Модель B-сплайна

B-сплайном k -го порядка называется сплайн, определенный на любом числе последовательно расположенных смежных отрезков, но только на k из них отличный от 0.

Кубический B-сплайн. Любой сплайн произвольного порядка m , заданный на n узлах t_0, t_1, t_2, t_3 может быть выражен в виде линейной комбинации B-сплайнов, определенных



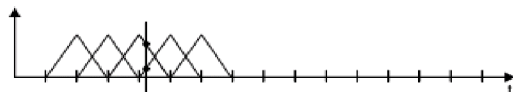
на том же количестве основных узлов с использованием $m-1$ дополнительного узла, на каждом из конечных интервалов. На расширенном таким образом множестве узлов можно построить $m+n-1$ последовательных В-сплайнов, каждый из которых отличен от 0 только на m последовательных отрезках. Тогда сплайновая кривая будет описываться следующим образом:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{m+n-1} C_i M_{m_i}(t)$$

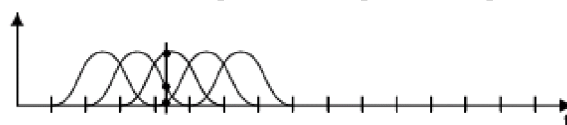
Где $S(t)$ - сплайн порядка m , определенный на n узлах, а $M_{m_i}(t_m)$ - функция В-сплайна, заданная на расширенном множестве узлов и отличный от нуля при $t_{i-m} < t < t_i$; C_i – весовые коэффициенты.

Если сплайн степени $m-1$ выражен в виде совокупности В-сплайнов, то изменение коэффициентов у одного из В-сплайнов влечет за собой изменение ровно на m отрезках кривой, без нарушения ее непрерывности.

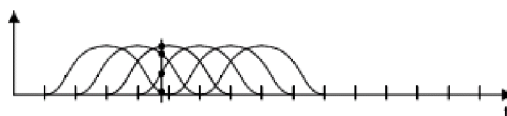
Линейный В-сплайн (первой степени или второго порядка), который определяется на двух смежных отрезках



Квадратичный сплайн второй степени или третьего порядка, определенный на трех отрезках



Кубический сплайн третьей степени, определенный на четырех отрезках



Уравнение линейного сплайна ($m = 1$)

$$S_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \end{cases}$$

Для квадратичного сплайна ($m = 2$) уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} S_i(t) = \frac{(t - t_i)^2}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+1} - t_i)} & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ S_i(t) = \frac{(t - t_i)(t_{i+2} - t)}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+2} - t_{i+1})} + \frac{(t_{i+3} - t)(t - t_{i+1})}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+2} - t_{i+1})} & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ S_i(t) = \frac{(t_{i+3} - t)^2}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+2})} & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \end{cases}$$

Данные выражения определяют наиболее общий случай неоднородных В-сплайнов.

Если размеры сегментов постоянны, сплайны называются однородными

