15. Моделирование в форме Безье.

Для описания кривой линии в форме Безье было достаточно четырех точек в трехмерном пространстве. Для описания сегмента поверхности требуется $4 \times 4 = 16$ точек. При этом сегмент поверхности аппроксимируется многогранником, у которого только четыре угловые точки совпадают с точками самой аппроксимируемой поверхности. Остальные определяют охватывающий многогранник.

Таким образом, матрица описания сегмента в форме Безье будет содержать координаты шестнадцати точек: $\left\| P_{ij} \right\|_{4\times 4}$.

Уравнение, определяющее один сегмент поверхности Безье, будет иметь бикубическую форму:

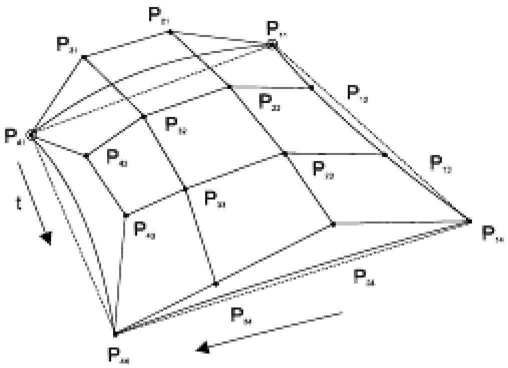

Рис. 3.15

$$r(u,t) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} P_{ij} \cdot q_i(u) \cdot q_j(t) \qquad (3.20)$$

где параметры $u \in [0,1]$, $t \in [0,1]$, а функции

$$q_k(s) = \frac{3!}{k!(3-k)!} s^k (1-s)^{3-k} \quad (k,s) = \begin{Bmatrix} (i,u) \\ (j,t) \end{Bmatrix}$$

Данная кривая описывает бикубическую пространственную форму. Запишем уравнение (3.20) в матричном виде:

$$r(u,t) = G_u \cdot P \cdot G_t \qquad (3.21)$$

где P - матрица исходных данных, а векторы G_u и G_t имеют следующий вид:

$$G_u = \begin{pmatrix} q_0(u) & q_1(u) & q_2(u) & q_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = U \cdot M_B$$

Аналогичным образом определяется последняя составляющая этого уравнения G_t:

$$G_t = M_B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

Подставим выражения G_u и G_t в (3.21), получим:

$$r(u,t) = U \cdot M_B \cdot P \cdot M_B^T \cdot T$$

Определим связь между формами Безье и Эрмита. Поскольку эти две кривые эквивалентны, то приравняем выражения функций Эрмита и Безье:

$$M_B \cdot P \cdot M_B^T = M_H \cdot Q \cdot M_H^T$$
$$Q = (M_H^{-1} \cdot M_B) \cdot P \cdot (M_B \cdot M_H^{-1})^T$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P'_{S00} & P'_{S01} \\ P_{10} & P_{11} & P'_{S10} & P'_{S11} \\ P'_{t00} & P'_{t01} & P''_{00} & P''_{01} \\ P'_{t10} & P'_{t11} & P''_{10} & P''_{11} \end{pmatrix}.$$

При сопряжении сегментов (рис.3.16), описанных моделью Безье также необходимо соблюдать $C^{(0)}$ и $C^{(1)}$ - непрерывности. Для обеспечения $C^{(0)}$ непрерывности достаточно совпадение четырех точек, определяющих граничное ребро двух сегментов.

$$P_{1i}^A = P_{4i}^B .$$

Для обеспечения $C^{(1)}$ - непрерывности требуется, чтобы линии, соединяющие управляющие точки P_{ij} по обеим сторонам граничного ребра были коллинеарны (отрезки расположены на одной или параллельных прямых).