无感 FOC 扩展卡尔曼观测器

状态空间方程引入：

$$\dot{\hat{X}}_t = A\hat{X}_t + Bu_t$$

$$Z_t = HX_t$$

当 T 为 1 时离散化后：

$$\hat{X}_k = A\widehat{X_{k-1}} + Bu_{k-1}$$
$$Z_k = HX_k$$

$$\hat{X}_k = A\hat{X}_{k-1} + Bu_k + W_k$$
$$Z_k = HX_k + V_k$$

其中 W_k 为过程噪音，V_k 为测量噪音；

卡尔曼观测器的作用就是通过递归的思想，找到最准确的 W_k 和 V_k，使得观测器计算的结果无限接近于实际系统。卡尔曼滤波器是对一系列随机信号的估算方法，所以与其说它属于滤波器，不如称它为最优控制。

卡尔曼观测器模型引入：

表贴式永磁同步电机公式如下

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s\dfrac{d}{dt} & 0 \\ 0 & R_s + L_s\dfrac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_e\psi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{di_\alpha}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{w_e\psi_f}{L_s}\sin\theta - \frac{u_\alpha}{L_s}$$
$$\frac{di_\beta}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{w_e\psi_f}{L_s}\cos\theta - \frac{u_\beta}{L_s}$$

由于电机控制环路的采样时间非常短，我们可以近似的认为每个时刻的转速不变，进而简化卡尔曼观测器模型。

状态空间方程：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_\alpha}{dt} \\ \frac{di_\beta}{dt} \\ \frac{dw_e}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{\psi_f}{L_s}\sin\theta & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\psi_f}{L_s}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix}$$

卡尔曼观测器方程：

$$\begin{bmatrix} \frac{di_\alpha}{dt} \\ \frac{di_\beta}{dt} \\ \frac{dw_e}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{\psi_f}{L_s}\sin\theta & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\psi_f}{L_s}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

W_k，V_k 满足正态分布：

$$P(W_k) \sim N(0,Q)$$
$$P(V_k) \sim N(0,R)$$

W_k 各项独立，V_k 各项独立

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{w4}^2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sigma_{v1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 \end{bmatrix}$$

卡尔曼核心公式 1：先验估计值 $\hat{X}_k^-$

先验估计值 $\hat{X}_k^-$：

$$\hat{X}_k^- = A\hat{X}_{k-1} + Bu_{k-1}$$
$$Z_k = HX_k \Rightarrow X_k = H^- Z_k$$

卡尔曼核心公式 2：最优估计值 $\hat{X}_k$

后验估计值 $\hat{X}_k$：

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + G(H^- Z_k - \hat{X}_k^-)$$

其中 $G = K_k H$，得到：

$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k H(H^- Z_k - \hat{X}_k^-) = \hat{X}_k^- + K_k(Z_k - H\hat{X}_k^-)$， $K_k \in [0, H^-]$，其中 K_k 为卡尔曼增益。

当 $K_k = 0$ 时， $\hat{X}_k = \hat{X}_k^-$；表示当前测量误差较大，不取采样值，信任先验值；

当 $K_k = H^-$ 时， $\hat{X}_k = H^{-1} Z_k = X_k$；表示当前测量精度较高，信任测量值。

卡尔曼核心公式 3：增益 K_k

我们的目标是 $\hat{X}_k = X_k$，即：

$$e_k = X_k - \hat{X}_k = 0$$

计算观测误差的协方差矩阵：

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{e}1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{e}2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{e}3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{e}4}^2 \end{bmatrix}$$

我们的期望是 $e_{k1}, e_{k2}, e_{k3}, e_{k4}$ 尽可能小，也就是对应的方差最小，即协方差矩阵的迹最小：

协方差矩阵 P 的迹： $tr(P) = \sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2 + \sigma_{e3}^2 + \sigma_{e4}^2$

推导 $tr(P_k)$：

$$\begin{aligned}
e_k &= X_k - \hat{X}_k = X_k - \left\lfloor \hat{X}_k^- + K_k H(H^- Z_k - \hat{X}_k^-) \right\rfloor \\
&= X_k - \hat{X}_k^- - K_k Z_k + K_k H \hat{X}_k^- \\
&= X_k - \hat{X}_k^- - K_k H X_k - K_k V_k + K_k H \hat{X}_k^- \\
&= (X_k - \hat{X}_k^-) - K_k H(X_k - \hat{X}_k^-) - K_k V_k \\
&= (I - K_k H)(X_k - \hat{X}_k^-) - K_k V_k \\
&= (I - K_k H) e_k^- - K_k V_k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_k &= \operatorname{cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\
&= E[(X_k-\hat{X}_k)(X_k-\hat{X}_k)] = E[e_k e_k^T] \\
&= E\left[\left((I-K_kH)e_k^- - K_kV_k\right)\left((I-K_kH)e_k^- - K_kV_k\right)^T\right] \\
&= E[((I-K_kH)e_k^- - K_kV_k)(e_k^{-T}(I-K_kH)^T - V_{\mathrm{k}}^T K_k^T)] \\
&= (I-K_kH)E(e_k^- e_k^{-T})(I-K_kH)^T - K_kE(V_ke_k^{-T})(I-K_kH)^T - \\
&\quad (I-K_kH)E(e_k^-V_k^T)K_k^T + K_kE(V_kV_k^T)K_k^T
\end{aligned}
$$

由于V_k与e_k^-相互独立，且e_k^-的期望为 0，故：

$$K_kE(V_ke_k^{-T})(I-K_kH)^T = 0, (I-K_kH)E(e_k^-V_k^T)K_k^T = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow P_k = (I-K_kH)P_k^-(I-K_kH)^T + K_kRK_k^T \\
&= P_k^- - K_kHP_k^- - P_k^-H^TK_k^T + K_kHP_k^-H^TK_k^T + K_kRK_k^T
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow tr(P_k) = tr(P_k^-) - 2tr(K_kHP_k^-) + tr(K_kHP_k^-H^TK_k^T) + tr(K_kRK_k^T)$$

求$tr(P_k)$的极值，令

$$\frac{dtr(P_k)}{dK_k} = 0 \text{，} \Rightarrow -P_k^-H^T + K_k(HP_k^-H^T + R) = 0$$

卡尔曼增益计算公式：

$$K_k = \frac{P_k^-H^T}{(HP_k^-H^T + R)}$$

卡尔曼核心公式 4：误差协方差先验P_k^-

$$
\begin{aligned}
P^- &= E[e_k^- e_k^{-T}] \\
e_k^- &= X_k - \hat{X}_k^-
\end{aligned}
$$

基于状态空间方程及先验估计公式：

$$
\begin{aligned}
X_k &= AX_{k-1} + Bu_{k-1} + W_{k-1} \\
\hat{X}_k{}^- &= A\hat{X}_{k-1} + Bu_{k-1} \\
e_k^- &= X_k - \hat{X}_k^- = A(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + W_{k-1} = Ae_{k-1} + W_{k-1}
\end{aligned}
$$

将e_k^-带入先验误差协方差计算公式：

$$
\begin{aligned}
P^- &= E[e_k^- e_k^{-T}] = E[(Ae_{k-1} + W_{k-1})(Ae_{k-1} + W_{k-1})^T] = E[(Ae_{k-1} + W_{k-1})(e_{k-1}^TA^T + W_{k-1}^T)] \\
&= E(Ae_{k-1}e_{k-1}^TA^T) + E(Ae_{k-1}W_{k-1}^T) + E(W_{k-1}e_{k-1}^TA^T) + E(W_{k-1}W_{k-1}^T)
\end{aligned}
$$

由于e_{k-1}与W_{k-1}相互独立，并且e_{k-1}的期望值是 0，故：

$$
\begin{aligned}
P_k^- &= E(Ae_{k-1}e_{k-1}^TA^T) + E(W_{k-1}W_{k-1}^T) \\
P_k^- &= AP_{k-1}A^T + Q
\end{aligned}
$$

卡尔曼核心公式4：误差协方差P_k

由于P_k^-中存在上次一次的误差协方差P_{k-1}，故我们需要计算出P_{k-1}

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k H P_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T$$

将K_k带入上式：

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k H P_k^- H^T K_k^T + K_k R K_k^T$$
$$= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + K_k (H P_k^- H^T + R) K_k^T$$
$$= P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T K_k^T + \frac{P_k^- H^T}{(H P_k^- H^T + R)} (H P_k^- H^T + R) K_k^T$$
$$= P_k^- - K_k H P_k^-$$
$$\Rightarrow P_k = (I - K_k H) P_k^-$$

卡尔曼五大核心公式：

（1）预估：

先验状态值：$\hat{X}_k^- = A\hat{X}_{k-1} + Bu_{k-1}$

先验误差协方差：$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$

（2）校正：

卡尔曼增益：$K_k = \dfrac{P_k^- H^T}{(H P_k^- H^T + R)}$

最优（后验）估计值：$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (Z_k - H\hat{X}_k^-)$

更新最优协方差：$P_k = (I - K_k H) P_k^-$

扩展卡尔曼观测器

由于卡尔曼观测器（滤波器）算法都是需要线性、离散的系统模型，但是在实际应用中所倡建的系统大多是非线性的，包括无刷和永磁同步电机系统。此时就需要扩展卡尔曼观测器（Extended Kalman Filter,EKF）的理论应用于实际。在使用 EKF 时，首先需要对非线性系统的模型方程进行线性化和离散化处理。

（1）线性化

1）一元系统线性化：

泰勒展开：$f(x) = f(x_0) + \dfrac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0), x - x_0 \to 0$

2）多元系统线性化：

雅可比矩阵：$\begin{bmatrix} \dot{X}1 \\ \dot{X}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f1}{\partial X1} & \frac{\partial f1}{\partial X2} \\ \frac{\partial f2}{\partial X1} & \frac{\partial f2}{\partial X2} \end{bmatrix}_{x=x_0} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix}$

扩展卡尔曼观测器建模：

$$\begin{bmatrix} \frac{di_\alpha}{dt} \\ \frac{di_\beta}{dt} \\ \frac{dw_e}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{\psi_f}{L_s}\sin\theta & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\psi_f}{L_s}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{di_\alpha}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{w_e \psi_f}{L_s}\sin\theta - \frac{u_\alpha}{L_s}$$

$$\frac{di_\beta}{dt} = -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{w_e \psi_f}{L_s}\cos\theta - \frac{u_\beta}{L_s}$$

线性化：

$$\begin{bmatrix} \frac{di_\alpha}{dt} \\ \frac{di_\beta}{dt} \\ \frac{dw_e}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{\psi_f}{L_s}\sin\theta & \frac{w_e\psi_f}{L_s}\cos\theta \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\psi_f}{L_s}\cos\theta & \frac{w_e\psi_f}{L_s}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ w_e \\ \theta \end{bmatrix}$$

前向欧拉法离散：

$$\begin{bmatrix}\hat{i}_{\alpha k}\\ \hat{i}_{\beta k}\\ \hat{w}_{ek}\\ \hat{\theta}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i}_{\alpha k-1}\\ \hat{i}_{\beta k-1}\\ \hat{w}_{ek-1}\\ \hat{\theta}_{k-1}\end{bmatrix}+T_s\left\{\begin{bmatrix}-\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{\psi_f}{L_s}\sin\theta & \frac{w_e\psi_f}{L_s}\cos\theta\\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\psi_f}{L_s}\cos\theta & \frac{w_e\psi_f}{L_s}\sin\theta\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i}_{\alpha k-1}\\ \hat{i}_{\beta k-1}\\ \hat{w}_{ek-1}\\ \hat{\theta}_{k-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_s} & 0\\ 0 & \frac{1}{L_s}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\alpha k-1}\\ u_{\beta k-1}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}i_{\alpha k}\\ i_{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{\alpha k}\\ i_{\beta k}\\ w_{ek}\\ \theta_k\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}\hat{i}_{\alpha k}\\ \hat{i}_{\beta k}\\ \hat{w}_{ek}\\ \hat{\theta}_k\end{bmatrix}=\left[I+T_s\begin{bmatrix}-\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{\psi_f}{L_s}\sin\theta & \frac{w_e\psi_f}{L_s}\cos\theta\\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\psi_f}{L_s}\cos\theta & \frac{w_e\psi_f}{L_s}\sin\theta\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\hat{i}_{\alpha k-1}\\ \hat{i}_{\beta k-1}\\ \hat{w}_{ek-1}\\ \hat{\theta}_{k-1}\end{bmatrix}+T_s\begin{bmatrix}\frac{1}{L_s} & 0\\ 0 & \frac{1}{L_s}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\alpha k-1}\\ u_{\beta k-1}\end{bmatrix}$$

卡尔曼滤波流程：

（1）状态变量的先验值：$\hat{X}_k^- = \hat{x}_{k-1} + T_s(F(\hat{x}_{k-1}) + Bu_{k-1})$

（2）状态转移矩阵：$\phi = A = I + T_s F(\hat{x}_{k-1})$

（3）误差协方差矩阵先验：$P_k^- = \phi P_{k-1}\phi^T + Q$

（4）卡尔曼增益系数：$K_k = \dfrac{P_k^- H^T}{(HP_k^- H^T + R)}$

（5）最优估计值：$\hat{x}_k = \hat{X}_k^- + K_k(Z_k - H\hat{X}_k^-)$

（6）更新最新估计值的误差协方差矩阵：$P_k = (I - K_k H)\hat{P}_k^-$

其中，Q 矩阵为过程噪声的协方差矩阵，R 矩阵为测量噪声的协方差矩阵，对系统的收敛性有着决定性的影响，选取的不适当可能会导致收敛过慢、抖动过大甚至完全发散。

参考矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix}0.01 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.01 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.01\end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}$$

转速 We 方差要偏大，且 θ 作为 We 的积分，θ 的方差要比 We 小。