微分方程及拉普拉斯变换推导

1、线性定常微分方程

线性微分方程符合**叠加和比例**的特性：

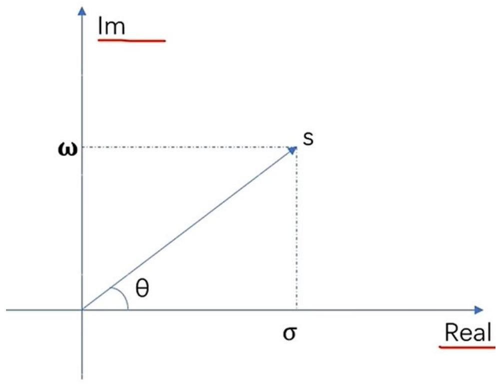
叠加： $f(ax) = af(x)$

比例： $f(ax + \mathrm{by}) = af(x) + bf(y)$

定常： 微分项前面的系数是常数：

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{d^1 r(t)}{dt^1} + b_0 r(t)$$

2、复数



$$s = \sigma + jw, j = \sqrt{-1}, \theta = \arctan \frac{\varpi}{\sigma}$$

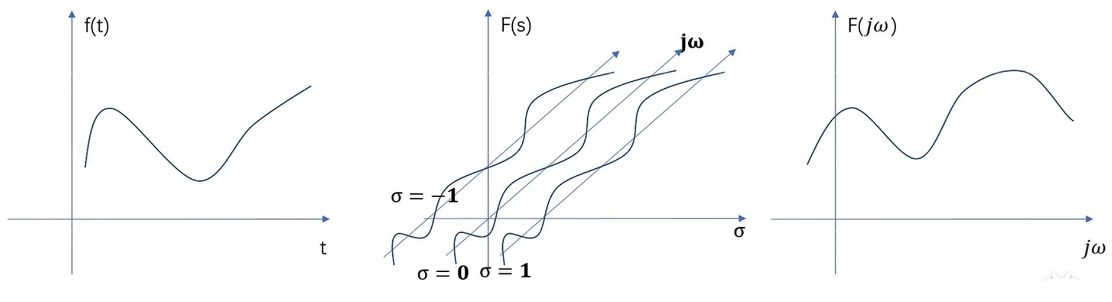
$$s = |s|\cos\theta + j|s|\sin\theta = |s|(\cos\theta + j\sin\theta),$$

$$= |s|e^{j\theta}$$

当|s|等于 1，$\theta = \pi$ 时，$s = -1$，$e^{j\pi} + 1 = 0$

3、拉普拉斯变换

拉氏变换的定义：$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，$F(s)$称为像，$f(t)$称为原像。



$f(t)$；　　$F(s) = F(\sigma + jw) = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma - jwt}dt$；$F(s) = F(jw) = \int_0^\infty f(t)e^{-jwt}dt$

常见函数拉氏变换：

	$f(t)$	$F(s)$
单位脉冲	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡	t	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
指数函数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
正弦函数	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
余弦函数	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$

L 变换重要定理：

（1）线性性质：$L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$

（2）微分定理：$L[f^{'}(t)] = sF(s) - f(0)$

（3）积分定理：$L[f(t)dt] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$

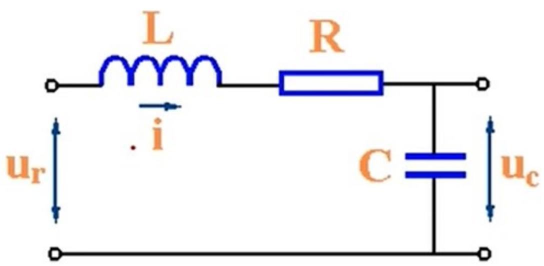
（4）实位移定理：$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$

（5）复位移定理：$L[e^{At}f(t)] = F(s-A)$

（6）初值定理：$\lim\limits_{t->0} f(t) = \lim\limits_{s->\infty} sF(s)$

（7）微分定理：$\lim\limits_{t->\infty} f(t) = \lim\limits_{s->0} sF(s)$

RLC 电路分析：



$$u_r(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri + u_c(t), i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$u_r(t)=LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{LC}u_c(t)=\frac{1}{LC}u_r(t)$$

根据变换公式：

$$L[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$L[f^{'}(t)]=sF(s)-f(0)$$

得到：

$$U_c(s)s^2+\frac{R}{L}U_c(s)s+\frac{1}{LC}U_c(s)=\frac{1}{LC}U_r(s)$$

$$\Rightarrow \mathrm{G(s)}=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

传递函数：在零初始条件下，线性定常系统输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比。

4、传递函数分析

有传递函数：

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$$

求得极点：$s=-1\pm j2$

$$G(s)=\frac{\frac{-1}{4i}}{s+1+j2}+\frac{\frac{1}{4i}}{s+1-j2}$$

拉氏反变换：

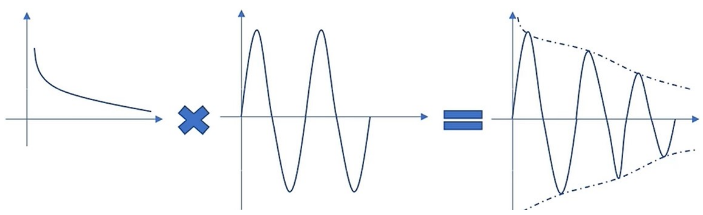
$$L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\left[\frac{\frac{-1}{4i}}{s+1+j2}+\frac{\frac{1}{4i}}{s+1-j2}\right]=\frac{1}{4i}e^{(-1+i2)t}-\frac{1}{4i}e^{(-1-i2)t}$$

$$=\frac{1}{4i}e^{-t}(e^{2it}-e^{-2it})=\frac{1}{4i}e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t-(\cos(2t)-i\sin(2t)))$$

$$=\frac{1}{4i}e^{-t}(2i\sin(2t))$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

e^{-t} 和 sin(2t)的图像如下图所示：



可知 e^{a} 时，a<0 时，极点为实部是负数，系统收敛，稳定；

a>0 时，极点为实部是正数，系统不收敛，不稳定；

a=0 时，极点为实部是 0，系统临界稳定；