

考点一 分式方程

1. 概念: 分母中含有未知数: 方程

2. 使分式方程分母为零: 未知数: 值即为增根

分式方程: 增根有两个特征:

1) 增根使最简公分母为零

✓ 分式方程分母为0无意义

2) 增根是分式方程化成: 整式方程: 根; 而不是分式方程: 根

考点二 分式方程: 基本解法

解分式方程: 一般步骤:

1) 去分母, 把分式方程化为整式方程

2) 解这个整式方程, 求得方程: 根

3) **检验**: 把解得: 整式方程: 根代入最简公分母, 若最简公分母为零, 则它不是原方程: 根, 而是方程: 增根, 无意义, 舍去; 若最简公分母不为零, 则它是原方程: 根

考点三 分式方程: 实际应用

解分式方程: 实际问题: 解整式方程: 实际问题类似, 不同: 是要注意检验:

1) 检验所求: 解是否为增根 (增根则舍去)

2) 检验所求: 解是否符合实际意义

习题

1. 解 $\frac{x}{3+x} - \frac{2}{2+x} = 1$

$$\frac{2x+x^2-6-2x}{(3+x)(2+x)} = 1$$

$$x^2 - 6 = 6 + 3x + 2x + x^2$$

$$x^2 - 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$5x + 12 = 0$$

$$x = -\frac{12}{5}$$

检验后: $x = -\frac{12}{5}$

2. 若分式方程 $\frac{2x}{x+1} - \frac{m+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x}$ 有增根, 则 $m = ?$

$$\frac{2x^2}{x(x+1)} - \frac{m+1}{x(x+1)} - \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{2x^2 - m - 1 - (x+1)^2}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{2x^2 - m - 1 - x^2 - 2x - 1}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - m - 2}{x(x+1)} = 0$$

$$x^2 - 2x - m - 2 = 0 \quad (1)$$

增根为: $x = 0$ 或 $x = -1$

将 $x = 0$ 代入 (1): $-m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2$

将 $x = -1$ 代入 (1): $1 + 2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$

答: $m = -2$ 或 $m = 1$

$$3. \text{解: } \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2-x}$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{-1}{x-2}$$

$$x = -1$$

$$\text{检验后: } x = -1$$

$$4. \text{解: } \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x(x-1)} + \frac{x^2}{x(x-1)} - \frac{\frac{5}{2}x(x-1)}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x}{x(x-1)} = 0$$

$$x(x-1)$$

$$\text{增根: } x=0 \text{ 或 } x=1$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

经检验, x_1, x_2 均非增根

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 2$$

法二: 换元法

$$\text{令: } y = \frac{x-1}{x} \quad \text{①}$$

$$\text{原式} = y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$$

$$y + \frac{1}{y} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\frac{y^2 + 1 - \frac{5}{2}y}{y} = 0$$

$$\text{增根 } y = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$(y-2)(2y-1) = 0$$

$$y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{代入①: } x_1 = -1, x_2 = 2$$

$$\text{检验后: } x_1 = -1, x_2 = 2$$