Отчёт по лабораторной работе №4

Вариант 2

Ле Тиен Винь

Содержание

Цель работы

Изучаем модель гармонических колебаний, решаем уравнения гармонического осциллятора и построим фазовый портрет с помощью Scilab

Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: `(1032215241%70)+1` = 2 вариант.

II.Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев.

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 3x = 0$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = sin(2t)$

На интервале $t=[0;40] $ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 1, y_0 = 1$

III. Выполнение задания

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 4x = 0$

$\ddot{x} + 3x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = -3x \Leftrightarrow \dot{x} = -\frac{3x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow x = -\frac{3x^3}{6} + C_1 x + C_2$ (1)

С помощью начальных условии $x_0 = 1, y_0 = 1$, мы создаём систему уравнении, чтобы найти C_1 и C_2:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{3 * 0^3}{6} + C_1 * 0 + C_2 = 1 \\ -\dfrac{3 * 0^2}{2} + C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, мы получим общее решение: $x = -\frac{3x^3}{6} + x + 1$ (2)

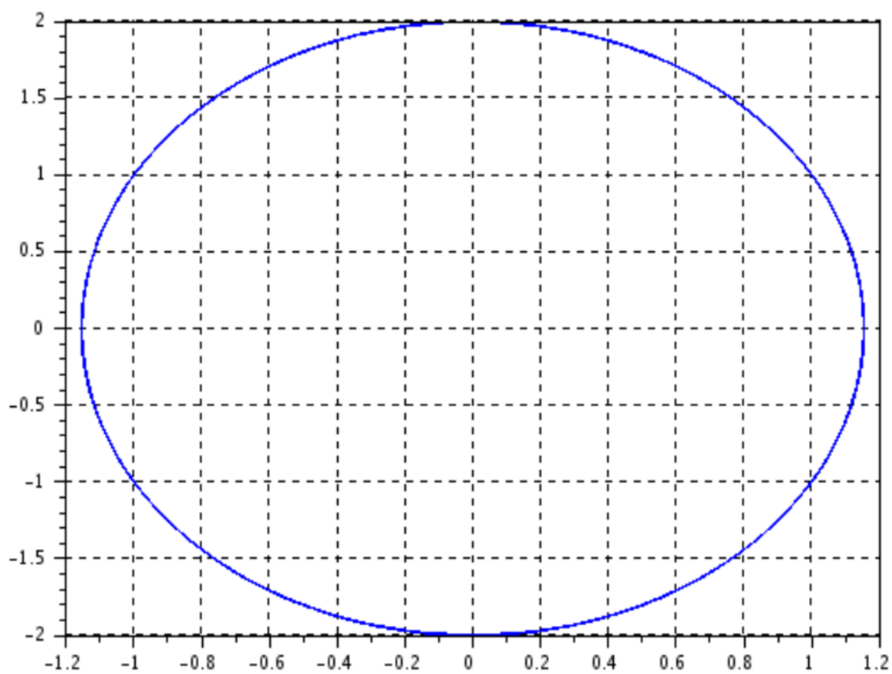
- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab

Введём следующий код:

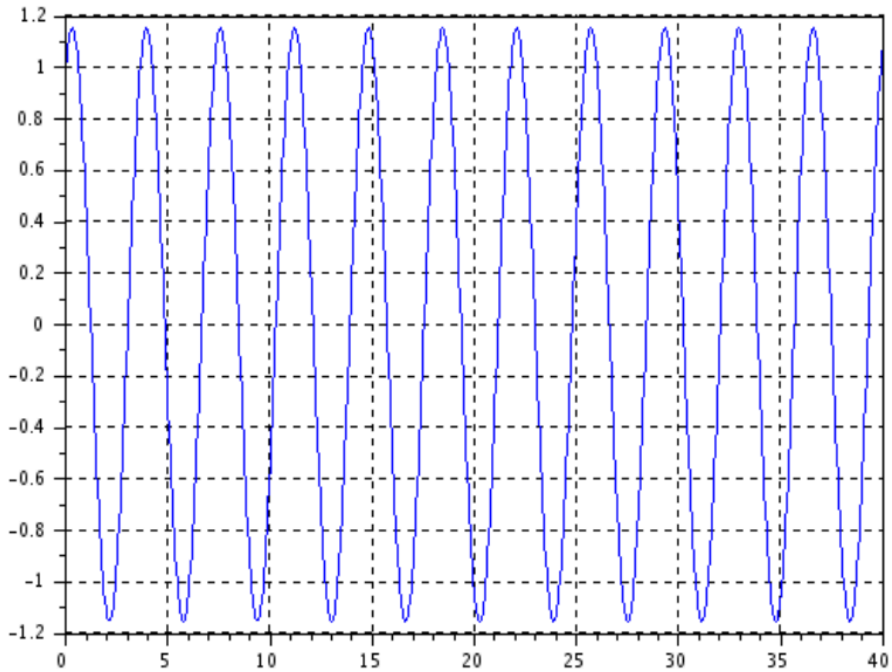
```
//x'' + w^2* x = 0
w2 = 3; //w - частота (w2 - это w^2)
g = 0; //g - затухание

// Введём функцию для решения
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w2 * x(1);
endfunction

//Точка, в которой заданы начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
x0 = [1; 1];
//Интервал на котором будет решаться задача
t = [0: 0.05: 40];
```

```
//Решаем дифференциальные уравнения и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c"); //Переписываем отдельно
//x в y1, x' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')
plot(y1, y2);
//plot(t,y1); -фазовый портрет: зависимость x(t)
xgrid()
```

И мы получим результат:



Фазовый портрет гармонического осциллятора первого случая в зависимость x(x’)



Фазовый портрет гармонического осциллятора первого случая в зависимость x(t)

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = 0$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = 0$

Характерическое уравнеие: $k^2 + k + 4 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\begin{cases} k_1 = -\dfrac{-1 - \sqrt{15} * i}{2} \\ k_2 = -\dfrac{-1 + \sqrt{15} * i}{2} \end{cases}$$

Поэтому мы получим общее решение: $x = e^{-2t}\left(C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t)\right)$ (3)

Дифференцируем (3), получим:

$$\dot{x} = \left(e^{-2t}C_1 cos(2t)\right)' + \left(e^{-2t}C_2 sin(2t)\right)'$$

$$\dot{x} = -2e^{-2t}C_1 cos(2t) - 2e^{-2t}C_1 sin(2t) - 2e^{-2t}C_2 sin(2t) + 2e^{-2t}C_2 cos(2t)$$

$\dot{x} = -2e^{-2t}[(C_1 - C_2)cos(2t) + (C_1 + C_2)sin(2t)]$ (4)

С начальными условиями получим систему уравнении:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-2*0}\left(C_1 cos(2*0) + C_2 sin(2*0)\right) = 1 \\ -2e^{-2*0}[(C_1 - C_2)cos(2*0) + (C_1 + C_2)sin(2*0) = 1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ 2(C_1 - C_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

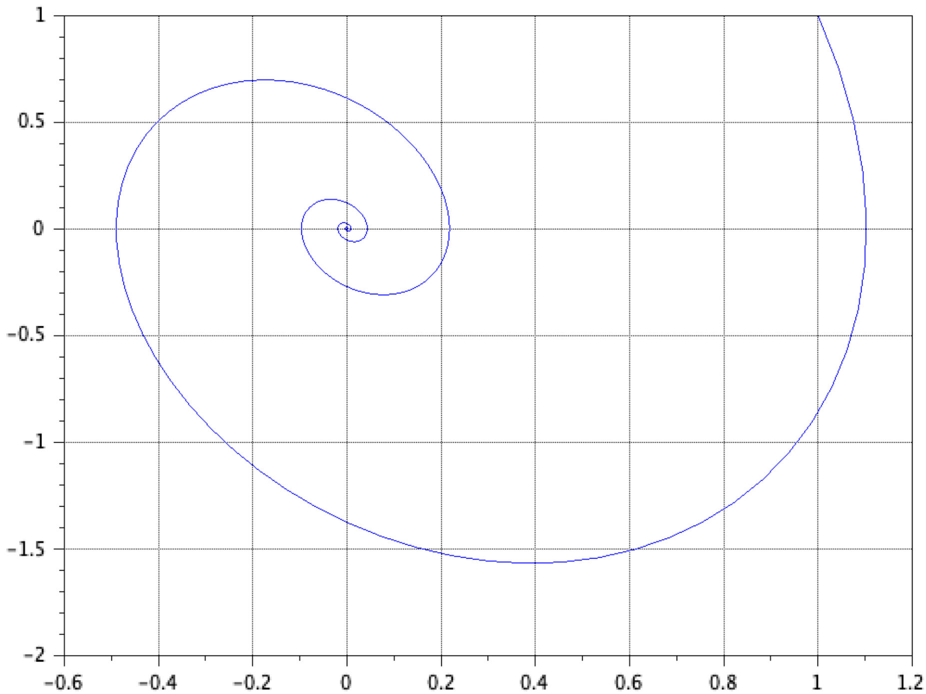
И мы получим решение: $x = 2e^{-2t}\left(cos(2t) + \frac{3}{2}sin(2t)\right)$

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab

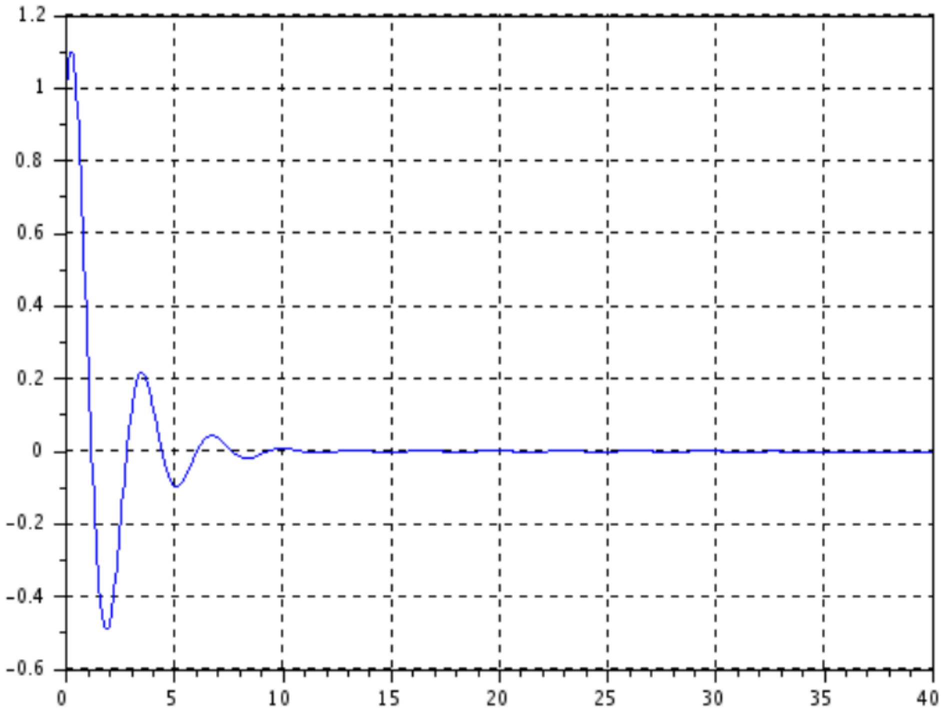
Введём следующий код:

```
//x'' + g* x' + w^2* x = 0
w2 = 4;
g = 1;

// Введём функцию для решения
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w2 * x(1) - g * x(2);
endfunction

//Точка, в которой заданы начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
x0 = [1; 1];
//Интервал на котором будет решаться задача
t = [0: 0.05: 40];

//Решаем дифференциальные уравнения и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c");//Переписываем отдельно
//x в y1, x' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')
plot(y1, y2);
//plot(t,y1); -фазовый портрет: зависимость x(t)
xgrid();
```

И мы получим результат:



Фазовый портрет гармонического осциллятора второго случая в зависимость x(x')



Фазовый портрет гармонического осциллятора второго случая в зависимость x(t)

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = sin(2t)$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = sin(2t)$

Сначала нам нужно решать однородные линейные дифференцирующие уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$, чтобы найти общее решение однородного уравнения:

Характерическое уравнеие: $k^2 + 2k + 1 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\{k_1 = k_2 = -1$$

Мы получим общее решение однородного уравнения:

$x = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$ (5)

Затем мы наидём частное решение неоднородного уравнения. Оно зависит от вида правой части $f(x) = sin(2x)$ и кратности корней характеристического уравнения числу m

Видно, что $m = 0, n = 2, m \neq \alpha, n \neq \beta \Rightarrow$ решение имеет вид:

$x = e^{mx}\big(Acos(nt) + Bsin(nt)\big)$ (6)

Поставим $m = 0, n = 2$ в (6), получим $x = Acos(2t) + Bsin(2t)$. Дифференцируем этот уравнение, получим:

$$\dot{x} = -2Asin(2t) + 2Bcos(2t)$$

$$\ddot{x} = -4Acos(2t) - 4Bsin(2t)$$

Поставим $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнеие $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = sin(2t)$, получим:

$$\big(-4Acos(2t) - 4Bsin(2t)\big) + 2\big(-2Asin(2t) + 2Bcos(2t)\big) + \big(Acos(2t) + Bsin(2t)\big) = sin(2t)$$

$$\Leftrightarrow (-3A + 4B)cos(2t) - (4B + 4A)sin(2t) = sin(2t) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{7} \\ B = -\dfrac{3}{28} \end{cases}$$

Так мы получим частное решение неоднородного уравнения: $x = -\frac{1}{7}cos(2t) - \frac{3}{28}cos(2t)$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$x = e^{-t}(C_1 + C_2 t) * \left(-\frac{1}{7}cos(2t) - \frac{3}{28}cos(2t)\right)$ (7)

Чтобы найти конкретное значение C_1 и C_2, мы дифференцируем (7) и с начальными условиями, получим:

$\dot{x} = \frac{3sin(2t) - 4cos(2t)*e^{-t}(c2*t+c1) + 6cos(2t) - 8sin(2t)*e^{-t}(c2*t+c1)}{28}$ (8)

От (7), (8) мы создаём систему уравнении:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - \dfrac{7}{28} = 1 \\ 6C_1 - 20 * C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{72} \\ C_2 = \dfrac{25\sqrt{9}}{14} \end{cases}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$x = e^{-\frac{3}{2}t}\left(\frac{5}{6}cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{19\sqrt{7}}{42}sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) - \frac{5}{6}cos(2t)$$

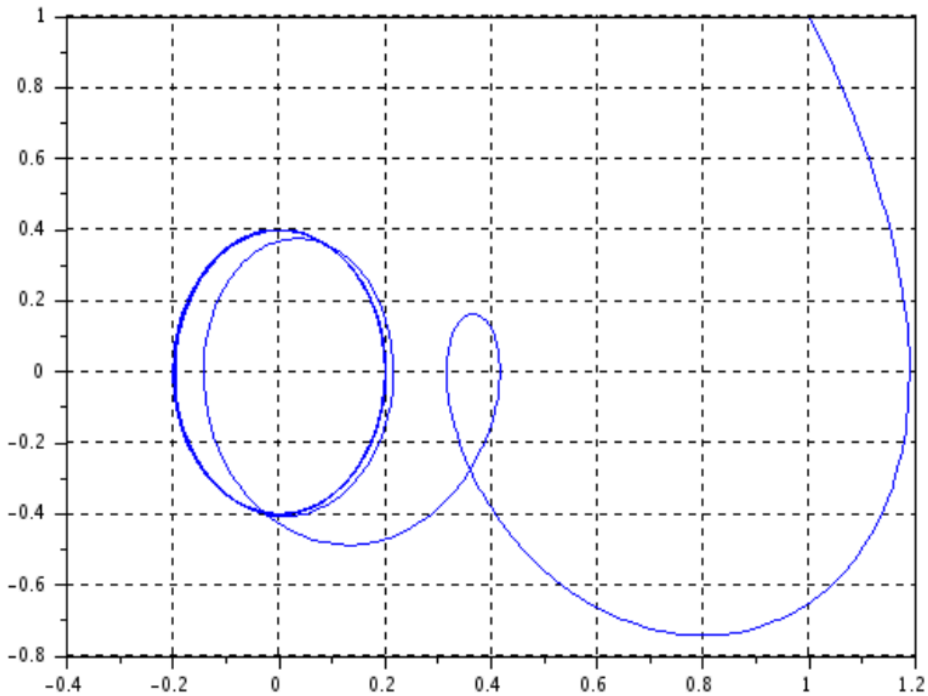
- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab

Введём следующий код:

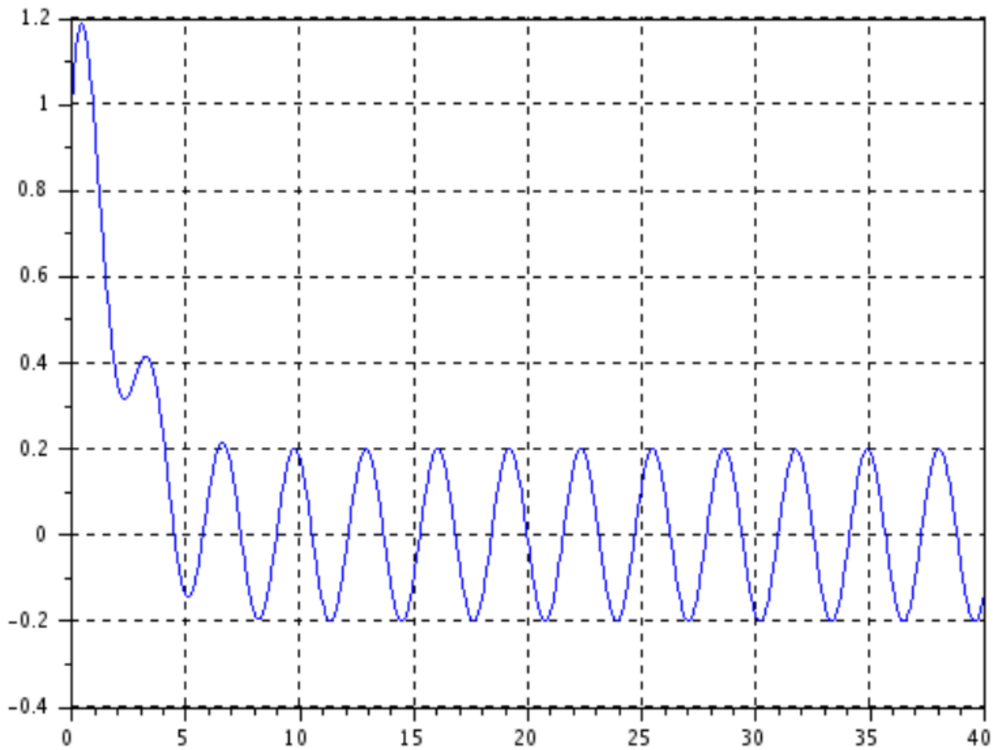
```
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
w2 = 1;
```

```
g = 2;
//Правая часть уравнения f(t)
function f=f(t)
f = sin(2*t);
endfunction

// Введём функцию для решения
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w2 * x(1) - g * x(2) - f(t);
endfunction

//Точка, в которой заданы начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
x0 = [1; 1];
//Интервал на котором будет решаться задача
t = [0: 0.05: 40];

//Решаем дифференциальные уравнения и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c");//Переписываем отдельно
//x в y1, x' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')
plot(y1, y2);
//plot(t,y1); -фазовый портрет: зависимость x(t)
xgrid();
```

И мы получим результат:



Фазовый портрет гармонического осциллятора третьего случая в зависимость x(x')



Фазовый портрет гармонического осциллятора третьего случая в зависимость x(t)

IV. Вывод

После лабораторной работы, я познакомился с моделей гармонических колебаний, получил навыки по решению уравнения гармонического осциллятора и приобрел построить фазовый портрет с помощью Scilab.

Список литература ссыка

1. https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C6%B0%C6%A1ng_tr%C3%ACnh_vi_ph%C3%A2n
2. https://mathdf.com/dif/vi/
3. blob:chrome-extension://mhnlakgilnojmhinhkckjpncpbhabphi/7232cf15-3332-4e09-99cf-363cce66b33b