

基于随机配点的高超声速飞行偏差演化分析方法

刘莉^{1,2}, 蔡伟伟³, 杨乐平¹

(1. 国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;

2. 空间物理重点实验室, 北京 1000761;

3. 国防科学技术大学 指挥军官基础教育学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对不确定性条件下高超声速飞行偏差演化问题, 提出一种基于随机配点法的偏差演化分析方法。在分析高超声速飞行偏差主要来源基础上, 综合考虑计算精度和分析效率, 基于广义多项式混沌理论, 采用随机配点方法进行偏差演化计算, 并进一步给出随机配点生成的稀疏网格技术。数值仿真表明, 随机配点法的引入有效解决了高超声速飞行器系统偏差演化问题, 可为工程设计提供有益参考。

关键词: 多项式混沌; 随机配点; 高超声速飞行; 偏差演化

中图分类号: V412

文献标识码: A

文章编号: 1002-0853 (2018) 01-

Stochastic collocation based error propagation method for hypersonic flight

LIU Li^{1,2}, CAI Wei-wei³, YANG Le-ping¹

(1. College of Aerospace Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China;

2. Science and Technology on Space Physics Laboratory, Beijing 100076, China;

3. College of Basic Education, NUDT, Changsha 410073, China)

Abstract: This paper presents a stochastic collocation based error propagation algorithm for the hypersonic flight under uncertainties. The main source of errors was firstly analyzed, and then the stochastic collocation method, which came from the generalized polynomial chaos theory, was utilized to propagate the uncertainties for the consideration of estimation accuracy and computational efficiency. The associated sparse grid technology for generating the stochastic collocation was also studied. Numerical simulation results validate that the proposed algorithm is effective for uncertainty analysis of strongly nonlinear systems, providing reference for engineering design.

Key words: polynomial chaos; stochastic collocation; hypersonic flight; error propagation

0 引言

高超声速飞行器因其在战略、战术以及效费比方面的显著优势, 受到各军事强国的高度重视, 已经成为争夺空天权发展的重点。然而, 高超声速飞行过程中, 受气动烧蚀影响, 飞行器的气动参数可能偏离地面设计值; 同时由于测控能力的限制, 飞行器位置、速度等状态也可能存在偏差, 会严重影响飞行器的终端状态精度, 甚至造成任务的失败。因此, 有必要研究高超声速飞行偏差演化分析方法, 为提高遂行任务的可靠性提供支撑。

在航空航天领域, 传统的偏差演化分析方法有

蒙特卡罗法、灵敏度矩阵和协方差方法。蒙特卡罗法原理简单, 实现容易, 但估算精度依赖于采样次数, 计算效率难以提高, 因而通常用以衡量其他方法的精确程度^[1]。灵敏度矩阵法利用状态灵敏度矩阵描述任务轨迹对初始状态偏差的灵敏程度, 并依据灵敏度矩阵动力学方程分析偏差演化特性, 但该方法仅适用于状态偏差^[2]。协方差分析法在线性化处理系统动力学模型的基础上, 利用状态转移矩阵和协方差矩阵分析偏差演化特性, 在交会对接^[3]等方面得到广泛应用, 但对于高超声速飞行器这类强非线性系统的长时间偏差演化问题, 其适用性有待进一步提高。

收稿日期: 2017-05-18; 修订日期: 2017-06-29; 网络出版时间: 2017-06-29 08:09:15

基金项目: 航空科学基金资助 (2016ZC88007); 一院高校联合创新基金资助 (CALT201603)。

作者简介: 刘莉 (1973-), 女, 吉林松原人, 高级工程师, 博士研究生, 研究方向为临近空间飞行器飞行监控及任务规划设计。

针对传统分析方法的不足,人们研究提出基于广义多项式混沌展开的偏差演化分析方法,该方法将偏差影响下的系统状态视作随机过程,依据偏差统计特性,将状态变量展开为相应的 Wiener-Askey 系列超几何正交多项式的加权和^[4]。若偏差因素的概率密度函数与正交多项式的积分权函数一致,则多项式混沌展开对随机过程的逼近具有指数收敛速度^[5]。按实现方式不同,多项式混沌展开法分为嵌入式和非嵌入式两种。嵌入式将不确定性系统的状态展开成混沌多项式后,代入系统方程重新推导得到更高维的确定性模型进行求解,在分析精度和计算效率方面具有一定优势,但推导过程易出错且难以继承用于其他系统。非嵌入式将系统模型视作黑箱,直接将系统输出展开为广义多项式混沌形式,实现偏差演化与系统模型解耦,从而能够运用确定性系统动力学模型进行偏差演化分析,有效降低了演化分析的难度,但如何优化随机空间采样点的分布以提高演化分析的精度和效率是需要研究的问题。由于广义多项式混沌展开方法对是否为线性系统以及偏差演化的时间跨度没有限制,因而在火星着陆^[6]、空间态势感知^[7]等方面得到应用。

本文针对高超声速飞行器偏差演化分析问题,综合考虑估算精度和计算效率,基于广义多项式混沌理论,采用随机配点法开展偏差演化分析。首先建立高超声速飞行器纵向运动动力学模型,并分析系统主要偏差因素来源;在此基础上提出了适用于非线性动力学系统偏差演化分析的随机配点法,并给出生成随机配点的张量积方法和稀疏网格技术;最后,以美国 CAV-H 飞行器为例开展数值仿真分析,验证所提出的演化分析方法的有效性。

1 问题描述

1.1 运动方程

假设地球为不旋转的均质圆球,则高超声速飞行器无量纲纵向运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= u \sin \gamma \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{u \cos \gamma}{z} \\ \frac{du}{d\tau} &= -\bar{D} - \frac{\sin \gamma}{z^2} \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= \frac{1}{u} \left[\bar{L} + \frac{\cos \gamma}{z} \left(u^2 - \frac{1}{z} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: z , s , u 和 τ 分别为无量纲地心距、航程、

速度和时间,其中地心距和航程的无量纲基准为地球半径 $R_e = 6378.14 \text{ km}$, 速度 and 时间的无量纲基准分别为 $\sqrt{R_e g} = 7908 \text{ m/s}$ 和 $\sqrt{R_e/g} = 806.47 \text{ s}$; γ 为航迹倾角; \bar{D} 和 \bar{L} 分别为无量纲阻力和升力。

$$\left. \begin{aligned} \bar{D} &= \rho u^2 S_{ref} R_e C_D / (2m) \\ \bar{L} &= \rho u^2 S_{ref} R_e C_L / (2m) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: ρ 为大气密度; m 和 S_{ref} 分别为飞行器质量和气动参考面积; C_L 和 C_D 分别为升力和阻力系数。

$$C_L = \lambda C_L^*, \quad C_D = \frac{C_L^*}{2E^*} (1 + \lambda^2) \quad (3)$$

式中: λ 为泛化升力系数; E^* 和 C_L^* 分别为最大升阻比及其相应的升力系数。

对指定高超声速飞行器,其气动特性参数 E^* 和 C_L^* 的取值均为已知,因此可将泛化升力系数 λ 作为弹道设计参数。实际上,高超声速飞行标称弹道的设计通常还需考虑驻点热流密度、过载和动压等约束条件,以满足热防护、结构和控制性能要求,但本文着重于研究高超声速飞行中偏差因素演化的数值分析方法,因而假设文中所涉及的标称弹道(泛化升力系数曲线)均满足这些约束条件。

1.2 偏差因素分析

高超声速飞行需考虑的偏差因素大致包括三类:运动模型偏差、初始状态偏差和控制输入偏差。运动模型偏差主要包括飞行器性能参数不确定性、大气密度等环境模型不确定性以及其他未建模的动态特性。例如地面风洞试验难以准确模拟真实飞行环境,导致估计的飞行器气动参数存在偏差。初始状态偏差是指由于测控能力的限制,导致飞行器的初始位置、速度等状态测量值偏离实际值。控制输入不确定性是指控制执行机构实际产生的控制输入与理论输入之间的差别。

本文以初始状态偏差为例分析其在高超声速飞行过程中的演化特性,其余两类偏差因素的研究方法类似。对于高超声速飞行器的纵向运动,初始状态偏差可以表示为:

$$z = z_0 + \delta z_0, \quad u = u_0 + \delta u_0, \quad \gamma = \gamma_0 + \delta \gamma_0 \quad (4)$$

根据以上描述,高超声速飞行器偏差演化分析可以抽象为初始状态存在偏差的随机微分方程求解问题。

2 偏差演化分析

2.1 多项式混沌展开

对于高超声速飞行纵向运动方程, 由于状态变量初值存在不确定性, 且飞行过程中状态变量间相互影响, 因此每一时刻的系统状态变量均是随机变量, 对应整个时间序列上的系统状态为二阶随机过程。为便于描述, 下文以无量纲地心距 z 为例, 介绍其多项式混沌展开形式及其统计特性计算方法, 其余状态变量的求解方法相同。

以 $\tau_k (k=1,2,\dots, N)$ 表示无量纲时间序列, 则由多项式混沌展开基本理论, τ_k 时刻对应的 z 可以用式(5)所示的截断多项式在 L_2 意义上近似逼近:

$$z(\tau_k) = \sum_{i=0}^{P_c} c_i(\tau_k) \Phi_i(\xi) \quad (5)$$

式中: $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ 为表征状态变量初值不确定性的随机矢量。

多项式混沌展开的项数:

$$P_c + 1 = (d + p)! / (d! p!) \quad (6)$$

式中: $d=3$ 为随机矢量 ξ 的维数; p 为多维正交多项式族 $\{\Phi_i(\xi)\}$ 的最高阶次, 且 $\{\Phi_i(\xi)\}$ 满足:

$$\langle \Phi_m(\xi), \Phi_n(\xi) \rangle = \langle \Phi_m^2(\xi) \rangle \delta_{mn} \quad (7)$$

$$\langle \Phi_m(\xi), \Phi_n(\xi) \rangle = \int \omega(\xi) \Phi_m(\xi) \Phi_n(\xi) d\xi \quad (8)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ 为内积符号; $\omega(\xi)$ 为 $\Phi(\xi)$ 相应的权函数;

δ_{mn} 为 Kronecker 算子:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (9)$$

表 1 随机变量类型与正交多项式基函数间的对应关系

Table1 Correspondence between the generalized polynomial chaos and their underlying random variables

概率分布	正交多项式	支撑集
均匀分布	Legendre	$[a, b]$
γ 分布	Laguerre	$[0, +\infty)$
β 分布	Jacobi	$[a, b]$

在多项式混沌展开中, 当 $\{\Phi_i(\xi)\}$ 的权函数 $\omega(\xi)$ 与随机变量 ξ 的概率密度函数一致时, 式(5)对 τ_k 时刻无量纲地心距 $z(\tau_k)$ 的逼近具有指数收敛速

度^[5]。对标准高斯分布型的随机变量, 通常选择 Hermite 正交多项式族作为多项式混沌展开的基函数; 对其他分布类型的随机变量, 对应的正交多项式基函数如表 1 所示, 相应展开形式称为广义多项式混沌展开^[5]。

利用式(7)和式(8)所示正交多项式的性质推导可得 τ_k 时刻 z 的期望、方差等统计特性, 其中期望为:

$$\begin{aligned} E[z(\tau_k)] &= E\left[\sum_{i=0}^{P_c} c_i(\tau_k) \Phi_i(\xi)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{P_c} c_i(\tau_k) E[\Phi_i(\xi)] = c_0(\tau_k) \end{aligned} \quad (10)$$

方差为:

$$\begin{aligned} \sigma^2[z(\tau_k)] &= E\left\{[z(\tau_k) - E[z(\tau_k)]]^2\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{P_c} [c_i^2(\tau_k)] \end{aligned} \quad (11)$$

由此可见, 确定 τ_k 时刻 z 的统计特性关键在于确定多项式混沌展开的系数 $c_i(\tau_k)$, ($i=0,1,\dots,P_c$)。运用 Galerkin 投影和正交多项式的性质, 可获得展开系数 $c_i(\tau_k)$ 的解析表达式:

$$\begin{aligned} c_i(\tau_k) &= \frac{E[z(\tau_k) \Phi_i(\xi)]}{E[\Phi_i(\xi) \Phi_i(\xi)]} \\ &= \frac{1}{\gamma_i} \int z(\tau_k) \Phi_i(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $f(\xi)$ 为 ξ 的联合概率密度函数; γ_i 为正交多项式规范化常数。由于正交多项式 $\Phi(\xi)$ 是关于随机矢量 ξ 的函数, 其形式均为已知, 故可很方便地求出 γ_i ; 展开系数 $c_i(\tau_k)$ 的计算量主要来源于分子的计算。

2.2 随机配点法

随机配点法的基本思想是采用带权积分公式代替式(12)右端的积分运算:

$$c_i(\tau_k) = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j=1}^M \rho_j z(\tau_k) \Phi_i(\xi_j) \quad (13)$$

式中: ξ_j , ρ_j ($j=1,2,\dots,M$) 分别为随机空间中所选择的配点及其对应的积分权重; $z(\tau_k)$ 为 τ_k 时刻对应每个配点 ξ_j 的无量纲地心距。显然, 只需计算出

每个配点 ξ_j 对应的 $z(\tau_k)$ 就能够最终确定多项式混沌展开的系数 $c_i(t)$ ，而前者只需在相应配点上求解确定性问题，且这些确定性问题是相互解耦的，因此随机配点法降低了展开系数求解的难度。

利用式(13)求解多项式混沌展开系数时，计算精度受随机配点的分布和数目影响。对多维随机矢量 ξ ，在其张成的随机空间内选取随机配点的方法主要有直接张量积法和稀疏网格法。

直接张量积法的基本思想是从各位随机变量对应的一维高斯型积分形式出发，将这些一维积分进行直接张量积操作来求解多变量函数的数值积分。假设关于第 k ($k=1,2,\dots,d$) 维随机变量 ξ_k 的高斯求积公式为 U^{m_k} ，相应的 m_k 个积分节点记作 $\Theta_1^{m_k}$ ，则对随机矢量 $\xi=[\xi_1,\dots,\xi_d]$ 张成的随机空间，高斯求积公式为：

$$U^Q = U^{m_1} \otimes \dots \otimes U^{m_d} \quad (14)$$

相应的张量积配点为：

$$\Theta^Q = \Theta_1^{m_1} \otimes \dots \otimes \Theta_1^{m_d} \quad (15)$$

显然直接张量积法的配的总个数 $M = m_1 \dots m_d$ ，可见该方法仅适用于低维随机空间情形，否则容易引起配点的“维数灾难”。

稀疏网格法采用 Smolyak 算法，通过张量积的加权线性组合将单变量求积公式扩展为多变量求积公式，在保证了解积公式近似精度的同时显著减少了配点数目。文献[5, 8]详细介绍了直接张量积法和稀疏网格法的具体步骤，限于篇幅本文不再赘述。

3 数值仿真

本节以 CAV-H 高超声速飞行器为例，运用所提

出的偏差演化算法分析初始状态偏差的影响。CAV-H 飞行器的模型参数如表 2 所示：

表 2 CAV-H 模型参数

Table2 Model parameters of CAV-H

m / kg	S_{ref} / m^2	E^*	C_L^*
907	0.483 9	3.24	0.45

在标称条件下，飞行器初始高度、航程、速度和速度倾角分别为 60 km，0 km，5 800 m/s， -1° ，飞行时间为 1 800 s，设计泛化升力系数变化规律为：

$$\lambda = \begin{cases} 1.2 & (0 \leq t \leq 300 \text{ s}) \\ 1.4 - t/1500 & (300 \text{ s} < t \leq 600 \text{ s}) \\ 1.0 & (600 \text{ s} < t \leq 1800 \text{ s}) \end{cases} \quad (16)$$

由积分再入运动方程(1)得到终端状态变量依次为：30.876 km，7353.1 km，2026.9 m/s， 0.21° 。假设初始高度、速度和航迹倾角存在偏差，且概率统计特性如表 3 所示。

表 3 初始状态偏差统计特性

Table3 Statistic Property of Initial State Errors

状态变量	分布类型	分布区间
高度	均匀分布	$[-2000 \text{ m}, 2000 \text{ m}]$
速度	均匀分布	$[-150 \text{ m/s}, 150 \text{ m/s}]$
速度倾角	均匀分布	$[-0.5^\circ, 0.5^\circ]$

以上述泛化升力系数变化规律为控制输入，采用随机配点法和蒙特卡洛法分析初始状态不确定性的传递特性。由于随机变量呈均匀分布，因此以 Legendre 正交多项式为基函数进行广义多项式混沌展开；采用 Clenshaw-Curits 稀疏网格技术确定广义多项式混沌展开的系数，设置稀疏网格最高水平为 4，得到的随机配点数目为 177。

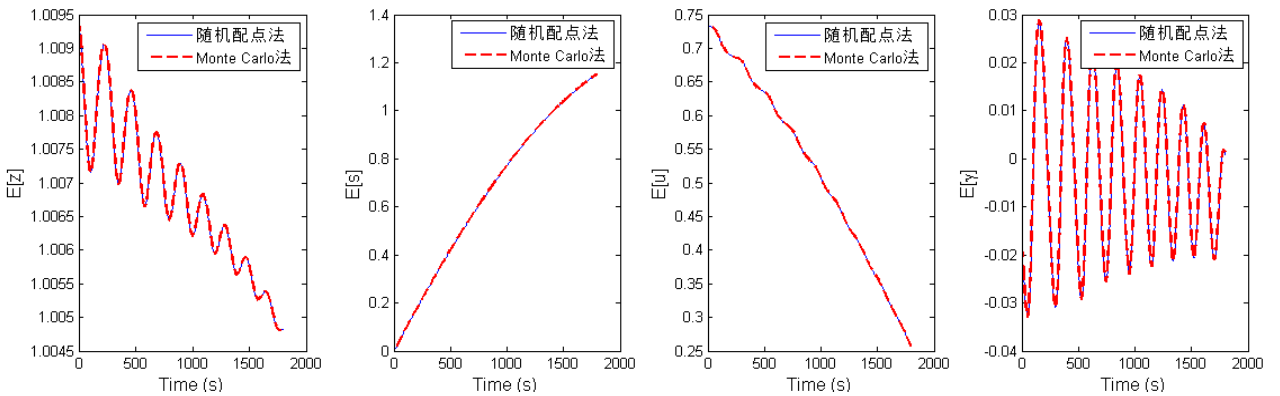


图 1 状态变量期望值曲线

Fig.1 Expectation of the states

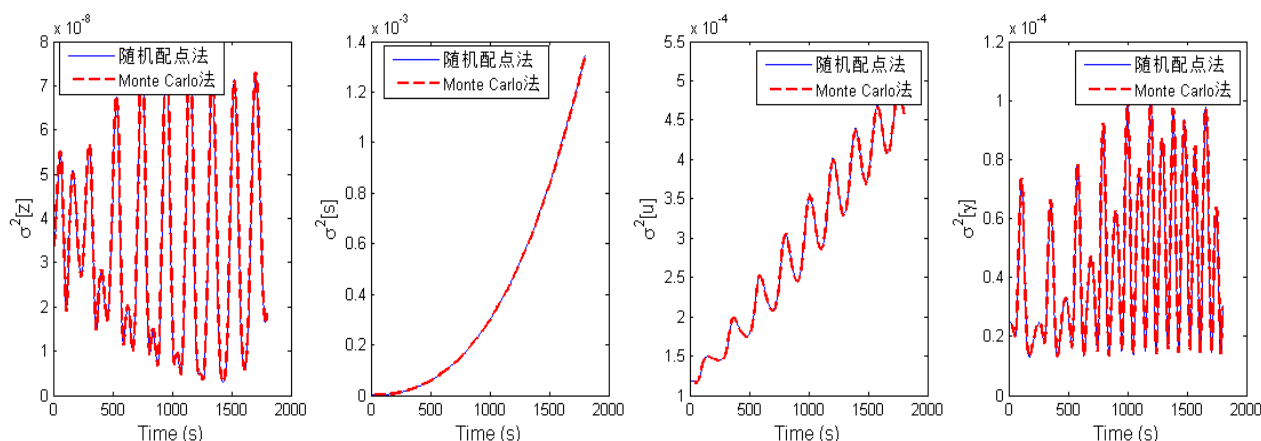


图 2 状态变量方差曲线

Fig.2 Variances of the states

基于随机配点法仿真得到飞行器各个状态变量的期望和方差曲线分别如图 1 和图 2 中实线所示。进一步地,采用蒙特卡洛法在相同配置下进行仿真分析以验证随机配点法结果的准确性;设置每 500 次采样计算一次系统状态的统计特性,若相邻两次统计计算时所有状态变量的期望值变化均小于 1.0×10^{-5} ,则认为蒙特卡洛结果收敛。蒙特卡洛仿真最终采样次数为 18500,所得状态变量的统计特性如图 1 和图 2 中虚线所示。显然随机配点法分析得到的系统状态统计特性与蒙特卡洛法的结果吻合程度很高,但采样次数(配点数目)远少于后者,体现了随机配点法分析偏差影响的优势。

4 结束语

本文研究了高超声速飞行过程中的偏差特性演化问题,在分析偏差因素主要来源基础上,提出基于随机配点的偏差演化算法,并以 CAV-H 飞行器为例进行数值仿真实验以验证算法的性能。相对传统蒙特卡洛法,本文方法在保证分析精度的同时显著降低了计算量,更易于实现。所提出的偏差演化算法对其他强非线性系统的偏差演化问题同样适用。

参考文献:

- [1] Xiong Fenfen, Chen Shishi, Xiong ying. Dynamic system uncertainty propagation using polynomial chaos [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2014, 27(5): 1156-1170.
- [2] Li Shuang, Peng Yuming. Mars entry trajectory optimization using DOC and DCNLP [J]. Advances in Space Research, 2011, 47(3): 440-452.
- [3] You Yue, Wang Hua, Paccolat C, et al. Time and covariance threshold triggered optimal uncooperative

rendezvous using angles-only navigation [J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2017, 2017:1-10.

- [4] Xiu Dongbin, Karniadakis G E. The wiener-askey polynomial chaos for stochastic differential equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2): 619-644.
- [5] Xiu Dongbin. Numerical methods for stochastic computations: a spectral method [M]. New Jersey: Princeton University Press, 2010: 78-83..
- [6] 任高峰, 朱圣英. 火星着陆任务落点误差快速分析方法 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2012, 44(7): 14-20.
- [7] Jones B A, Doostan A, Born G H. Nonlinear propagation of orbit uncertainty using non-intrusive polynomial chaos [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(2): 430-444.
- [8] 熊芬芬, 杨树兴. 工程概率不确定性分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 119-136.

(编辑: 崔立峰)