第 24 卷 第 1 期
2005 年 2 月
兰州交通大学学报(自然科学版)
Journal of Lanzhou Jiaotong University (Natural Sciences)
Vol. 24 No. 1
Feb. 2005

文章编号: 1001-4373(2005)01-0154-02

Gamma 分布密度函数的一种推导*

张正成

(兰州交通大学 数理与软件工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 在概率论与数理统计中, Gamma 分布是一种很重要的概率分布, 其密度函数已有几种推导方法. 基于将 Gamma 随机变量看作是某一等待时间的解释, 结合负二项分布, 给出了一种新的简便的推导方法.

关键词: Gamma 分布; 负二项分布; 推导

中图分类号: O211.3 文献标识码: A

0 引言

定义[1] 如果随机变量 X 的密度函数为:

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{\lambda x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

则 X 服从 Gamma 概率分布, 其中 r 和 λ 是参数, 且都是正实数,

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}\,dx,\ r\neq 0,-1,-2,\cdots.$$

定义[2] 如果随机变量 X 的密度函数为:

$$f_X(X)=\frac{\Gamma(x+r)}{\Gamma(r)\Gamma(x+1)}p^r(1-p)^x,\ x=0,1,2,\cdots.$$

则 X 服从具有参数为 r, p 的负二项分布, 其中 $r\geqslant 0, p\in[0,1]$。当 r 是正整数时, 概率密度函数为通常意义上的形式:

$$f_X(X)=\begin{pmatrix}r-1\\ r+x-1\end{pmatrix}p^r(1-p)^x,\ x=0,1,2,\cdots.$$

1 主要结果

定理 1 设在一个服务系统中只有一位服务人员, 让 T 表示第一位顾客达到时该服务人员的等待时间, $f_T(t)$ 为 T 的概率密度函数, 则有:

$$f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

证明 首先将 $[0,t]$ 区间 k 等分如下:

$$\left[0,\frac{t}{k}\right],\left[\frac{t}{k},\frac{2t}{k}\right],\cdots\left[\frac{(k-1)t}{k},t\right],$$

当 t 是固定时, 让 k 足够大, 使得在每个小区间时段上至多有一个顾客到达, 令 I_j 表示在第 j 个小区间上到达的示性函数, p 为 $P_r(I_j=1)$ 的值, λ 为每小时到达的期望数目, 为简化问题, 作以下假设:

1^0 每个顾客在每个区间上到达的概率是相等的;

2^0 随机变量 I_j 是相互独立的;

3^0 在任何区间 $(0,s)$ 上顾客到达的期望数目是 λs 个;

由已知及假设得:

P_r(第 1 位顾客到达时的等待时间) =

P_r(第 1 位顾客到达时子区间中有到达者的数目)(这显然服从几何分布) =

$$P_r\left(t-\frac{t}{k}\leqslant T\leqslant t\right)=p(1-p)^{k-1}$$

另外 k 个区间中有顾客到达的区间数目是 kp 个, 这相当于 $[0,t]$ 时间段上到达的顾客数目即 λt 个, 因而有: $kp=\lambda t$, 即 $p=\dfrac{\lambda t}{k}$, 则有:

$$P_r\left(t-\frac{t}{k}\leqslant T\leqslant t\right)\Big/\frac{t}{k}=$$

$$\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^k\lambda\frac{t}{k}\Big/\left[\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)\frac{t}{k}\right]$$

因此有:

$$f_T(t)=\lim_{k\to\infty}P_r\left(t-\frac{t}{k}\leqslant T\leqslant t\right)\Big/\frac{t}{k}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^k\lambda\frac{t}{k}\Big/\left[\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)\frac{t}{k}\right]=\lambda e^{-\lambda t}.$$

定理 2 设在一个服务系统中只有一位服务人员, 假设该服务系统有很多顾客, 各顾客是否到服务系统中接受服务是相互独立的, 让 T_r 表示第 r 位顾

* 收稿日期: 2004-10-21

作者简介: 张正成(1970-), 男, 甘肃榆中人, 讲师, 硕士生.

客到达该服务系统该服务人员的等待时间, 用 $f_{T_r}(t)$ 表示 T_r 的概率密度函数, 则 $f_{T_r}(t)$ 为具有参数 r, λ的 Gamma 分布, 即: 当 $t > 0$ 时, 有

$$f_{T_r}(t) = \frac{\lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(r)}.$$

证明　将[0, t]的 k 等分过程及假设情况同上, 此时有:

P_r(第 r 位顾客到达时的等待时间) =

P_r(第 r 位顾客到达时子区间中有到达者的数目)(这显然服从负二项分布) =

$$P_r\left(t-\frac{t}{k}\leqslant T_r\leqslant t\right)=\begin{pmatrix}k-1\\ r-1\end{pmatrix}p^r(1-p)^{k-r},$$

则有:

$$P_r\left(t-\frac{t}{k}\leqslant T\leqslant t\right)\Big/\frac{t}{k}=\begin{pmatrix}k-1\\ r-1\end{pmatrix}p^r(1-p)^{k-r}\Big/\frac{t}{k}=$$

$$\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{(r-1)!\,k^{r-1}}\lambda^r t^{r-1}\times$$

$$\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^k\Big/\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^r=$$

$$\begin{pmatrix}k-1\\ r-1\end{pmatrix}\left(\lambda\frac{t}{k}\right)^r\left(1-\lambda\frac{t}{k}\right)^{k-r}\frac{t}{k}=$$

$$\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{(r-1)!}\frac{\lambda^r t^{r-1}}{k^{r-1}}\times$$

$$\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^k\Big/\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^r$$

从而有:

$$f_{T_r}(t)=\lim_{k\to\infty}P_r\left(t-\frac{t}{k}\leqslant T_r\leqslant t\right)\Big/\frac{t}{k}=$$

$$\frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}\lim_{k\to\infty}\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{k^{r-1}}\times$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^k\Big/\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^r=\left[\frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}\times\right.$$

$$\left.\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{k}\right)^{-\frac{k}{\lambda t}}\right]^{-\lambda t}=\frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda t},\ (t>0).$$

2　与其它分布的关系

Gamma 分布在应用方面非常重要, 它和许多不同分布具有一定的关系[3], 在这里给出一些在实践中经常出现的关系:

1) 如果 r 是一个正整数, 则

$P_r(\mathrm{Gamma}(r,\lambda)>t)=P_r(\mathrm{Possion}(\lambda t)\leqslant(r-1))$.

2) 如果 $(N\mid\Lambda=\lambda)\sim\mathrm{Possion}(\lambda)$ and $\Lambda\sim\mathrm{Gamma}(r,a)$, 则

$N\sim NB(r,a/(a+1))$.

3) 如果 $(N\mid\Lambda=\lambda)\sim\mathrm{Possion}(\lambda)$ and $\Lambda\sim\mathrm{Gamma}(r,a)$ 则

$(\Lambda\mid N=n)\sim\mathrm{Gamma}(r+a,a+1)$

4) 如果 $(X\mid\Lambda=\lambda)\sim\mathrm{Exponential}(\lambda)$ and $\Lambda\sim\mathrm{Gamma}(s,\beta)$, 则

$X\sim\mathrm{Pareto}(s,\beta)$.

5) 如果 $X\sim\mathrm{Gamma}(r,\lambda)$ and $Y\sim\mathrm{Gamma}(s,\lambda)$, 并且 X 和 Y 是相互独立的, 则

$X/(X+Y)\sim\mathrm{Beta}(r,s)$.

参考文献:

[1]　Hogg Robert. Elliot A Tanis. Probability and statistical inferance[M]. New York: Macmillian Publishing Company, 1993.

[2]　Meyer PL. 概率引论及统计应用[M]. 潘孝瑞, 邓杲贤, 杨维权, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1986.

[3]　Bean Michael A. Probability: The science of uncertainty with application to investments, insurance and engineering[M]. Beijing: China Machine Press, 2003.

A Kind of Deriation of Gamma Distribution Density Function

Zhang Zhengcheng

(School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In probability and mathematical statistics, Gamma distribution is a very important probability distribution, whose distribution density function has been derived in a few ways. Here they are not necessary to point out. Based on the interpretation of regarding Gamma random variable as a waiting time, a new and simple derivation way is presented according to negative binomial distribution.

Key words: Gamma distribution; negative binomial distribution; derivation

MR(1991) Subject Classification: 60E15; 62G30