

4 时间序列的分形特性

4	时间序列的分形特性.....	1
4.1	引言.....	2
4.2	序列的常用分形维数和计盒维计算方法.....	2
4.2.1	容量维数 D_C	3
4.2.2	计盒维数 D_B	3
4.2.3	信息维数 D_I	5
4.2.4	关联维数 D_2	5
4.2.5	广义维数 $D_q^{[2]}$	5
4.3	分形布朗运动模型和小波分形维计算方法.....	6
4.4	多尺度小波多分形模型 ^[9-11]	8
4.5	基于小波模极大值的多重分形谱估计 ^[12]	11
4.6	消除趋势波动分析(Detrended Fluctuation Analysis, DFA)	15
4.6.1	波动分析(Fluctuation Analysis, FA) ^[15]	15
4.6.2	消除趋势波动分析(DFA) ^[16, 17]	16
4.6.3	多分形消除趋势波动分析(Multifractal-DFA, MDFA) ^[18]	17
4.7	高阶分形特征(缝隙值)	17
4.8	海杂波的分形特征和目标检测	19
4.9	本章小结	19
4.10	后记	19

4.1 引言

在以往的生产实际和科学研究中,人们用来描述客观世界的几何学是欧几里德几何学,以及解析几何、射影几何、微分几何等。它们能有效地对人为设计的规则形体进行描述,是千百年来生产实践的有力工具。但随着人类的发展,人们发现用传统几何并不能包罗万象的描述大自然中所有的现象,如海岸线、山形、河川、岩石、裂谷、树木、云团、闪电等等。这些不规则的对象是不能用传统的欧几里德几何学来描述的,因此Mandelbrot在20世纪70年代为了表征复杂图形和复杂过程首先将分形(fractal)引入自然科学领域,它的原意是不规则的、支离破碎的。

本文主要研究时间序列的分形特性,介绍了各种分形特征的概念、意义和计算方法,指出他们在分析时间序列性质中的应用,本章中各节主要内容如下:4.2介绍序列的常用分形维数和计盒维计算方法;4.3节介绍时间序列的分形布朗运动模型和小波尺度分析的分形维计算方法;4.4节介绍fbm和fgn的改进模型,多尺度小波多分形模型;4.5节介绍基于小波奇异谱的时间序列多分形特征的计算;4.6节介绍了能够消除序列趋势对分形特征影响的消除趋势波动分形方法;4.7节介绍序列的高阶分形特征,缝隙值的计算方法和意义;4.8节介绍了海杂波的分形特征和目标检测;4.9节为本章小结。

4.2 序列的常用分形维数和计盒维计算方法

虽然数学家豪斯道夫(F.Hausdorff)于1919年就提出了分数维的概念,但对集合维数性质的研究直到20世纪70年代才引起学术界的广泛重视。Mandelbrot于1975年指出,Hausdorff维数严格大于其拓扑维数的集合称为分形集,简称为分形。但这仅是最初的定义,不仅很不严格,也缺乏可操作性。而后在1986年Mandelbrot给分形另一种定义:其组成部分以某种方式与整体相似的形体叫分形。后一种定义突出了相似性的作用,反映了自然界中很广泛的一类物质的基本属性:局部与局部,局部与整体在形态、功能、信息、时间和空间等方面具有统计意义上的相似性。Falconer也从数学角度对分形进行过更详细的描述,但分形至今仍无一个能够为人们所接受的严格的定义^[1]。

实际上,对于什么是分形,到目前为止还不能给出一个确切的定义,人们通常是列出分形的一系列特性来加以说明。分形特性有:

- 1) 分形集都具有任意小尺度下的比例细节,或者说它具有精细的结构。分形集不能用传统的几何语言来描述,它既不是满足某些条件的点的轨迹,也不是某些简单方程的解集,是不规则的。

- 2) 分形集具有某种自相似形式，可能是近似的自相似或者统计的自相似。
- 3) 在某种意义下，分形集的“分形维数”，严格大于它相应的拓扑维数。
- 4) 在大多数令人感兴趣的情形下，分形集由非常简单的方法定义，可能以变换的迭代产生。

对于各种不同的分形，有的可能同时具有上述的全部性质，有的可能只有上述性质中大部分，而对某个性质的例外，但这并不影响我们把这个集合称为分形。自然界和各部门应用科学中涉及的分形绝大部分都是近似的。

虽然分形本身的定义不明确，但由于分形维数直观上与物体表面的粗糙程度相吻合，而自然界中的不同物体粗糙度有很大差别，可用分形维数作为区分不同类别物体的有效参数。由于分形的维数反映了人们对物体表面粗糙程度的感受，同时又具有尺度变换下不变性等优异的性质，因而如何准确地估计计算分形维数成为关键。在分形中，已经提出了许多关于维数的新概念。常见的有相似维、Hausdorff维、分形维、容量维、信息维、李亚普诺夫维数、盒维数、拓扑维数和广义维数等^[1, 2]。

4.2.1 容量维数 D_C

假定要考虑的对象是 d 维欧几里得空间 R^d 中的有界集合。用半径为 ε 的 d 维球包覆其集合时，假定 $N(\varepsilon)$ 是球的个数的^[1, 2]最小值。容量维数 D_C 即可用下式来定义：

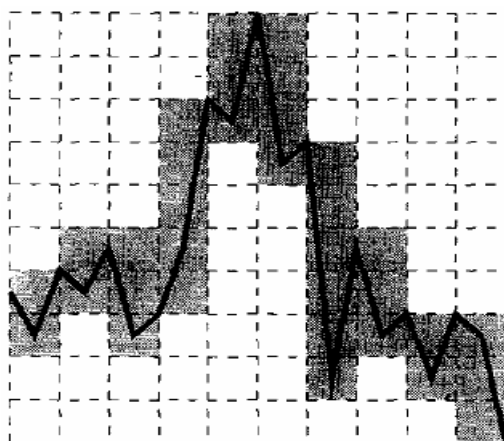
$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (4.1)$$

此定义与 Hausdorff 维数 D_H 很相近，但在 Hausdorff 维数中，虽然把球的大小作为比 ε 还小的任意球，但如果把它限定 1 个大小为特殊情况下则为容量维数。 D_C 和 D_H 一般具有如下关系： $D_C \geq D_H$ 。Hausdorff 和容量维数的定义在数学上都是很严密的，但要广泛用于自然科学的研究中，有时后不太实用。比方说，两者在定义中都把包覆球的半径的极限考虑为趋近于 0 的无穷小，这在实际测定中是不能达到的，因此实际中广泛使用的是便于计算的盒维数。

4.2.2 计盒维数 D_B

计盒维数（或盒维数）是应用最广泛的维数之一，它的普遍应用主要是由于这种维数的数学计算及经验估计相对容易一些。由前面容量维数的定义，它提示了一种测量分形的方法。若取边长为 ε 的小盒子，把所研究的对象覆盖起来。由于分形内部有各种层

次的空洞和缝隙，有些小盒子会是空的。数一数有多少盒子不是空的，把这个数记为 $N(\varepsilon)$ 。然后缩小盒子的尺寸 ε ，所数得的 $N(\varepsilon)$ 自然要增大。根据前面的定义，只要在双对数坐标纸上画出 $\ln N(\varepsilon)$ 对 $\ln \varepsilon$ 的曲线，其直线部分的斜率就是此分形对象的计盒子维数 D_B 。



图表 4-1: 计盒维的计算方法示意图^[3]

对于时间序列，以下是它的计算步骤^[3-5]：

- (1) 选择一个长度为 N 的时间序列信号 $F(n)$ ，将它的幅度和时间轴归一化后放入一正方形内，如图表 4-1。
- (2) 选取一些边长为 ε_m , $m=1,2,\dots,M$ 的方格网，每个小正方形称为盒子，用盒子去覆盖单位正方形。然后数一下每种尺寸的 ε_m 盒子与 $F(n)$ 相交的个数 $N_m(\varepsilon)$ 。
- (3) 如果待求时间序列信号是一种分形信号，则双对数坐标系上 $\ln N(\varepsilon)$ 对 $\ln \varepsilon$ 为一直线，时间序列的盒维数 D_B 就由直线的斜率给出，或者是由对数比曲线的最小方差拟合直线的斜率给出。

在图表 4-1 中，使用 $\varepsilon=1/10$ 的小盒子把时间序列所在的单位正方形分成 100 个小方格。覆盖分形曲线带阴影的小盒数 $N_m(1/10)=33$ 个，则在该尺度下的盒维数为：

$$D_B(\varepsilon=1/10)=\frac{\log 33}{-\log(1/10)}=1.518 \quad (4.2)$$

这种看起来很简便的“数盒子”方法，有着理论和实践两方面的局限性。对于实际分形维的计算，只有分维小于二维或在二维附近，而相空间维数也不高时它才是可行的；

维数增高后，计算量迅速上升，以致很难得到收敛的结果。从理论上讲，一个小盒子不管是包含了分形的一个点或是一批点，都算是非空的，可在 $N_m(\varepsilon)$ 中占有一席之地，这就完全不能反映分形内部的不均匀性。

4.2.3 信息维数 D_I

信息维数不是新的概念，早在 20 世纪 50 年代匈牙利数学家瑞奈(A. Renyi)就从概率论角度建立了定义，不过当时没有把它和分形联系起来。将计盒维方法中的小盒子编号，如果知道分形中的点落入第 i 只盒子的概率是 P_i ，那就可以写出用尺寸为 ε 的盒子进行测算所得的信息量为：

$$I = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i \quad (4.3)$$

然后就可以用 I 代替 $N(\varepsilon)$ ，定义信息维数 D_I 为：

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i}{\ln \varepsilon} \quad (4.4)$$

假如落入每只盒子的概率都相同，即 $P_i = 1/N(\varepsilon)$ ，则求和记号下面的每一项都和编号 i 无关，因此有 $I = \ln N(\varepsilon)$ ，此时信息维数和前面的前面盒子维数 D_B 等价。对于一般的情况，有

$$D_I \leq D_B \quad (4.5)$$

成立。从计算角度看，信息维数 D_I 的算法比盒子维数 D_B 还要麻烦一些(因为要先求出 P_i)，因而在实际中很难推广采用^[1]。

4.2.4 关联维数 D_2

在前面章节中已经详细介绍，这里不再阐述。

4.2.5 广义维数 D_q ^[2]

计盒维数是一种最常见的维数计算方法，在理论上它的值应和容量维数一致，同时它也可以用来描述广义维数。计盒法是最通用的计算广义维数的方法，即用尺度为 ε 的相同大小的盒子覆盖整个集合(研究对象)，设所需盒子总数为 $N(\varepsilon)$ ，信息点落入第 i 个盒子的概率为 P_i ，则对于任意给定的 q ，可得到 Renyi 广义维数的信息熵表达式为

$$K_q(\varepsilon) = \left\{ \ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (P_i)^q \right\} / (1-q) \quad (4.6)$$

由于具有不同标度指数的子集可通过的改变 q 进行区分，所以

当 $q=0$ 时，容量维数(计盒维数) D_0 为

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln K_0(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \quad (4.7)$$

当 $q=1$ 时，信息维数 D_1 为

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i P_i \ln P_i / \ln \varepsilon \quad (4.8)$$

当 $q=2$ 时，关联维数 D_2 为

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \ln P_i^2 / \ln \varepsilon \quad (4.9)$$

广义维数的计算方法为，首先利用计盒维数方法来计算覆盖时间序列点集合的盒子数 $N(\varepsilon)$ ，及每一个盒子所覆盖集合的点数 d_{ij} ，则可得到由第 ij 个盒子所覆盖的集合的概率为 $P_{ij} = d_{ij}/L$ ，其中 L 为该时间序列的总长度，即总的集合点数。将 P_{ij} 代入式(4.6)便可求出一系列的 $K_q(\varepsilon)$ 。

各种维数虽然对于不同的研究对象具有广泛的应用，但是对于大多数客观存在的分形对象而言，仅用一个分形维数并不能完全刻画其结构，广义维数是对几种分形维数的一种推广。进入 20 世纪 80 年代后，学者们系统地提出了多重分形理论，用多重分形谱来描述分形时间序列，进一步能够更加精细地描述分形特征。

4.3 分形布朗运动模型和小波分形维计算方法

对分数布朗运动(FBM)是一个常用的分形数学模型。它具有自相似、长程相关等分形特点。Mandelbrot 将其定义如下^[6]:

$$B_H(t) = B_H(0) + \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_{-\infty}^t K(t-s) dB(s) \quad (4.10)$$

这里的 $B_H(0)$ 可以取为 0， $dB(s)$ 是高斯分布决定的位移，式中积分核

$$K(t-s) = \begin{cases} (t-s)^{H-1/2} & (0 \leq s \leq t) \\ (t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} & (s < 0) \end{cases} \quad (4.11)$$

其中 $H \in (0,1)$ ，是描述自相似性或表面不规则度的因子，它和分维 D 有下面的关系：

$$H = 2 - D \quad (4.12)$$

当 $H=1/2$ 时, 分数布朗运动就退化为一般的布朗运动。**FBM** 是描述具有时间(或空间)长程相关、功率谱满足指数规律的非平稳随机过程的数学模型之一。**FBM** 具有非平稳性, 使之应用起来不方便, 但它的增量为平稳的高斯随机过程, 称为分数高斯噪声(**FGN**), 其概率分布为:

$$P_r\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H} < y\right) = F(y) \quad (4.13)$$

$F(y)$ 是与 t 无关, 具有 $N(0, \sigma^2)$ 的分布函数:

$$F(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (4.14)$$

由以上两式可得到 **FGN** 的统计特性:

$$\begin{aligned} E[B_H(t+\Delta t)-B_H(t)] \cdot \|\Delta t\|^{-H} &= 2\sigma/\sqrt{2\pi} \\ \text{Var}[B_H(t+\Delta t)-B_H(t)] \cdot \|\Delta t\|^{-2H} &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

其相关函数为:

$$R_{G_H}(t, s, \Delta t) = \frac{\sigma^2}{2} [|t-s-\Delta t|^{2H} + |t-s+\Delta t|^{2H} - 2|t-s|^{2H}] \quad (4.16)$$

最后, 能够得到 **FGN** 的谱特性为:

$$W_{G_H}(t, w) = \frac{1}{|w|^{2H-1}} \quad (4.17)$$

从上述的统计量可看出 **FGN** 的平稳性。另外它同样具有自相似性, 长程相关性等分形特征。

在分形信号处理中, 很多学者深入研究了**FBM**的性质, 下面介绍一种利用**FBM**性质和小波变换来求信号Hurst参数的方法。分形信号在尺度变换下具有自相似和多分辨率特征, 其非平稳性又要求分析工具兼有时频分析功能, 所以建立在平稳过程上的分析方法往往很难处理这样的信号。小波变换具有时频分析功能, 其核心是通过小波基的伸缩变换, 多分辨地研究信号在各个尺度上的特征, 因此它是分析分形对象的有效工具。对**FBM**信号进行离散小波变换后, 将小波分解的系数进行数学处理, 就可求得该信号的分形特征。目前使用小波方法求解Hurst参数的方法主要有方差法、谱估计法和能量法等^[7], 实际上这几种方法实际上是相似的, 一致的^[8]。本文主要介绍方差法。

我们定义尺度函数为 ϕ_0 , 小波函数为 ψ_0 , 最大分解层数为 J 。离散小波变换各尺度下的小波函数 $\psi_{j,k}$ 和尺度函数 $\phi_{j,k}$ 为

$$\phi_{j,k} = 2^{-j/2} \phi_0(2^{-j/2} - k), \psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j/2} - k), k \in Z \quad (4.18)$$

分数布朗运动 $B_H(t)$ 可分解为

$$B_H(t) \rightarrow \{a(J, K), d(j, k), j \in [1, J], k \in Z\} \quad (4.19)$$

其中

$$\begin{aligned} a(J, K) &= \langle B_H, \phi_{J,k} \rangle, \quad a(J, K) \text{ 为尺度系数} \\ d(j, k) &= \langle B_H, \psi_{j,k} \rangle, \quad d(j, k) \text{ 为小波系数} \end{aligned} \quad (4.20)$$

因此 $B_H(t)$ 可表示为

$$B_H(t) = \sum_k a(J, K) \phi_{J,K}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k d(j, k) \psi_{j,k}(t) \quad (4.21)$$

由 $B_H(t)$ 是一个自相似过程，即：

$$\forall c > 0, \{c^{-H} B_H(ct), t \in R\} \stackrel{d}{=} \{B_H(t), t \in R\} \quad (4.22)$$

对于 $j \in Z$ ，有

$$B_H(2^j u) \stackrel{d}{=} 2^{jH} B_H(u) \quad (4.23)$$

上式进行变量替换可得

$$d_{j,k} = \int B_H(2^j u) 2^{-j/2} \psi(u-k) 2^j du \stackrel{d}{=} 2^{j(H+1/2)} d_{0,k} \quad (4.24)$$

对于分形高斯噪声，其均值为 $E[d_{j,k}] = 0$ ，有下式成立：

$$\Gamma(j) = E[d^2(j, k)] = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} d^2(j, k) = c_0 2^{j(2H+1)} \quad (4.25)$$

其中， $c_0 = E[d_{0,0}^2]$ 为常数， n_j 是第 j 层小波系数的个数，Hurst 参数 H 可用下式计算：

$$\log_2 \Gamma(j) = (2H+1)j + c_1, \quad \text{其中 } c_1 \text{ 为常数} \quad (4.26)$$

4.4 多尺度小波多分形模型^[9-11]

fBm和fGn两种典型模型其优点是构造和算法简单，但同时有很大的局限性。对于下面三类分形信号的逼近能力较差，不能很好地反映出原信号的分形特性：

- (1) 信号的长相关性不强
- (2) 在各个尺度上表现出非严格的自相似性
- (3) 数据不满足严格的高斯分布，或其差分也不满足高斯分布。

离散小波变换可以对信号 $X(t)$ 进行多尺度分析，设小波基函数为 $\Psi(t)$ ，尺度函数为 $\phi(t)$ ，将两函数在平移的同时进行尺度伸缩，可以得到两个函数集合：

$$\begin{aligned}\Psi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \Psi(2^{-j/2}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \\ \phi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j/2}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\quad (4.27)$$

由公式(4.27)可以分别得到时间序列的小波系数和尺度系数为

$$\begin{aligned}W_{j,k} &= \langle X(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle \\ U_{j,k} &= \langle X(t), \phi_{j,k}(t) \rangle\end{aligned}\quad (4.28)$$

在尺度 J 上, 信号 $X(t)$ 可以用小波分解表示为:

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (4.29)$$

我们以最简单的 Haar 小波为例, 相邻尺度的尺度系数与小波系数存在如下关系:

$$\begin{aligned}U_{j+1,2k} &= 2^{-1/2} (U_{j,k} + W_{j,k}) \\ U_{j+1,2k+1} &= 2^{-1/2} (U_{j,k} - W_{j,k})\end{aligned}\quad (4.30)$$

多尺度小波多分形模型(MWM)的设计基于以下两点:

- 1) 合成的信号 $X(t)$ 为非负值
- 2) $X(t)$ 的小波能量衰减为一尺度的函数。

要确保合成的 $X(t)$ 始终为非负值, 就必须对其小波系数和尺度系数加以限制, 从(4.30)式中可以看出, 要使 $X(t) \geq 0$, 应保证下式成立

$$\forall j, k \quad U_{j,k} \geq 0, \quad |W_{j,k}| \leq U_{j,k} \quad (4.31)$$

基于上述约束条件, 我们作如下定义:

$$W_{j,k} = A_{j,k} U_{j,k} \quad (4.32)$$

其中, 上式中的 $A_{j,k}$ 为区间 $[-1, +1]$ 上的随机变量, 结合(4.30)和(4.32)式, 可以得出:

$$\begin{aligned}U_{j+1,2k} &= 2^{-1/2} (1 + A_{j,k}) U_{j,k} \\ U_{j+1,2k+1} &= 2^{-1/2} (1 - A_{j,k}) U_{j,k}\end{aligned}\quad (4.33)$$

上式保证了合成的信号 $X(t)$ 为非负值, 为了使信号 $X(t)$ 的小波能量满足要求, 在建立模型时, 可以通过控制各个尺度上小波系数的能量衰减来控制输出信号的相关性, 该方法是以近似地控制每一个尺度上的二阶矩(即能量)来近似地控制相关性。最简单的方法是在最粗尺度 $J_0 (j=0)$ 上给定一个能量基值, 以后的各级尺度的能量按照一定 η 的比率求得其他尺度上的能量。这一比率定义为

$$\eta_j = \frac{E[W_{j-1,k}^2]}{E[W_{j,k}^2]} = \frac{2E[A_{j-1}^2]E[U_{j-1,k}^2]}{E[(1+A_{j-1})^2]E[U_{j-1,k}^2]} = \frac{2E[A_{j-1}^2]}{E[A_j^2](1+E[A_{j-1}^2])} \quad (4.34)$$

通过控制各个尺度上小波系数的高阶矩来控制输出信号的高阶矩，尺度系数的高阶矩的比取决于 $A_{j,k}$ 的分布，因此它的分布将直接影响到建立模型的性能。

$A_{j,k}$ 一般有三种分布情况，分别为：

(1) 对称 β 分布，

其 A 为 $(-1, +1)$ 之间对称 $\beta(p, p)$ 分布的随机变量，其概率密度函数为

$$g_A(a) = \frac{(1+a)^{p-1}(1-a)^{p-1}}{\beta(p, p)2^{2p-1}} \quad (4.35)$$

其中， p 是尺度因子， $\beta(\cdot, \cdot)$ 为 β 函数。对于较大值的 p ，此时 $\beta(p, p)$ 趋近于高斯分布。此时随机变量 A 的方差为

$$\text{var}(A) = E[A^2] = \frac{1}{2p+1} \quad (4.36)$$

结合公式(4.34)和(4.36)，文献[5]得到 η_j 和 p_j 之间参数关系如下

$$p_j = \frac{\eta_j}{2}(p_{j-1} + 1) - 1/2 \quad (4.37)$$

对称 β 分布的优点在于分布形式随 p 的变化而变化，这为描述分形对象体在各个尺度上的分布提供了灵活性。在确定了各个尺度上的 p_j 后，即可得到各个尺度上的小波系数，从而利用 Mallat 算法合成信号，得到原始信号的一个逼近。这种模型逼近方式称为 β 多尺度小波多分形模型(β -MWM)。

(2) 点集分布

对有些信号而言， β -MWM 能够在某些局部范围内逼近得很好，但在另外一些范围的逼近能力很差，因此又考虑了另外一种对称点集分布：

$$\begin{aligned} P[A=c] &= \Pr[A=-c] = r \\ \Pr[A=0] &= 1-2r \quad 0 \leq r, c \leq 1 \end{aligned} \quad (4.38)$$

在这种分布下的模型称为点集分布的多重分形模型(pm -MWM)，在建立模型时，与 β -MWM 的方法类似，首先需要确定参数 r 和 c ，它们由信号的各个尺度的负一阶矩和二阶矩产生；然后由参数产生各个尺度上的系数，最后合成逼近信号。

(3) β -pmMWM 混合模型

pm -MWM 型的逼近性能与 β -MWM 类似，呈现出良好的局部逼近能力，但不具

备全局逼近的能力。 β -MWM 在大尺度时,逼近原始信号性能较好,而在小尺度上逼近性能很差且运算量非常大; pm -MWM 在小尺度上表现出很好的逼近性能,另外运算量比 β -MWM 小许多,但在大尺度上的逼近误差较大。从大量的实验中发现,虽然两个模型建立过程中都产生偏差,但两者的优缺点具有一定的互补性,因此 pm -MWM 可以在各个尺度上显示出很好的逼近能力,将两者结合的产物称之为 β -pmMWM 混合模型。

在不同的尺度范围中分别应用两个模型,即 β -MWM 模型应用于大尺度,而 pm -MWM 应用于小尺度,这样的混合模型的逼近性能是最好的。但是 β -pmMWM 的建模关键是如何寻找出这一尺度交接点。由模型参数形成过程可以看出,两种模型的参数都与各个尺度上小波系数的二阶矩有关。假设时间序列为 $X(k)$,对于不同模型在尺度 j 上的二阶矩分别为 $m_2^{j,\beta}$ 和 $m_2^{j,pm}$,设误差限定值为 e ,当相对误差

$$e_2^j = \frac{m_2^{j,\beta} - m_2^{j,pm}}{m_2^{j,pm}} > e \quad (4.39)$$

成立,则此时的尺度 j 即为尺度模型交接点。

要由 MWM 产生仿真序列,应按以下步骤进行:

- 1) 设 $j=0$, 计算系数 $U_{0,0}$ 建立起信号的全局均值;
- 2) 在尺度 j 上产生随机倍乘变量 $A_{j,k}$, 选 $A_{j,k}$ 为对称的 β 分布,并通过(4.32)式计算系数 $W_{j,k}, k=0,1,\dots,2^j-1$;
- 3) 增加 j , 重复步骤 2)和 3), 直至达到尺度 $j=n$ 为止。

4.5 基于小波模极大值的多重分形谱估计^[12]

实际数据的多重分形谱计算是一个非常复杂的工作,最早的估计算法是 Frish 和 Parisi 提出的,该方法首先定义了一种基于配分函数的估计方法,配分函数中包含了信号数据的方差信息,所以配分函数也给出结构函数的尺度行为。在一定条件下,由配分函数的 Legendre 变换得到多重分形谱。

计算多重分形谱 $f(\alpha)$ 的方法一般有盒计数法、直方图法和配分函数法等。但这些方法都有其不可避免的缺点,如盒计数法对 $\alpha(x_0)$ 的估计在某些情况下非常不稳定。直方图法收敛非常慢。结构函数法虽然比较简单,但它的计算结果不能完全反映奇异性的分布情况。小波模极大法是近年来发展的一种有效且相对比较简单多重分形谱计算方法之一,它的有效性和简单性已经在很多应用方面得到了检验。

函数在某点 x_0 的奇异性由局部标度指数 Hölder (有时称为 Lipschitz) 指数 $\alpha(x_0)$ 来反映,定义为在 x_0 附近满足关系

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \sim |x - x_0|^{\alpha(x_0)} \quad (4.40)$$

的指数 $\alpha(x_0)$ 的上确界值，其中 $P_n(x - x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的 n ($n < \alpha(x_0)$) 阶泰勒展开， $\alpha(x_0)$ 越小，则函数在 x_0 越奇异，对 Dirac 脉冲函数，指数为-1，对阶梯形的 Heviside 函数，指数为 0。小波可视为一具有放大和平移作用的算子，由于可以自适应地聚焦到任意的细节，被称为数学显微镜，这使其成为奇异性检测及分形分析的理想工具。

基于小波模极大计算多重分形谱算法如下：设 $f(x)$ 是一有限能量的函数，即 $f(x) \in L^2$ ，则该函数的小波变换定义为以函数族 $\Psi_{ab}(x)$ 为积分核的积分变换，如下式所示：

$$W_f(a, b; \Psi) = \langle f(x), \Psi_{ab}(x) \rangle = a^{-1/2} \int f(x) \Psi_{ab}(x) dx \quad a > 0 \quad (4.41)$$

其中函数族 $\Psi_{ab}(x)$ 由基本小波函数 $\Psi(x)$ 通过伸缩和平移产生。如果选取母小波 ψ 的消失矩大于 $\alpha(x_0)$ ，则小波变换可对信号奇异性进行测量：

$$W_\psi[f](x_0, s) \sim s^{\alpha(x_0)} \quad (4.42)$$

当尺度 $a = a_0$ 时，若对 $b = b_0$ 的某一邻域内的任一点 b ，都有：

$$|W_f(a_0, b; \Psi)| \leq |W_f(a_0, b_0; \Psi)| \quad (4.43)$$

则称 (a_0, b_0) 为局部模极大点。而尺度空间 (a_0, b_0) 中所有模极大点的连线称为模极大线。对奇异性分析而言，重要的是由 Mallat 和 Hwang 引入的小波变换模极大 (WTMM) 具有如下性质^[13]：给定尺度 s 上的模极大，定义为该尺度上小波变换模的严格局部极大。由于 Ψ 具有 0 均值，所以小波系数 $W(a, b)$ 在区间大小正比于 a 的 b 附近的局部方差，即存在 $H(b)$ ：

$$W(a, b) \sim a^{H(b)} \quad (4.44)$$

Arneodo 等发展了基于小波变换极大模的多重分形谱估计技术，提出的基于小波的配分函数定义为^[14]：

$$T(q, a) = \int_R |W(a, b)|^q db \quad (4.45)$$

通常 CWT 中含有大量的冗余信息，为了减少 CWT 中的冗余信息对计算量的增加，常用的方法是小波变换模极大 (WTMM) 法。WTMM 的第一步是确定在每一个伸缩因子 $\alpha_i \in (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 和平移因子 $b_i \in (b_1, \dots, b_n)$ 的 $W(a, b)$ ，再对每一个尺度 α_i 寻找小波系数 $W(a_i, b_i)$ 的局部最大值，再沿尺度方向将这些局部最大系数连接起来，形成最大值曲线，可以证明最大值线上的系数所包含的信息，完全可以给出规则性的充分信息，因而(4.45)

式中的积分可用沿着模最大线的小波系数离散和代替，得到 $T(q, a_i)$ 的“粗”估计为在尺度 a_i 沿最大线的和。 $\tau(q)$ 可在对数坐标下式的递归运算中得到

$$T(q, a_i) \sim a_i^{\tau(q)} \quad (4.46)$$

小波局部模极大线的一个非常重要的性质是当被分析信号某一点 x_0 的 Hausdorff 指数 α 小于小波的消失矩阶数时，则至少存在一条局部模极大线指向该点，而且沿模极大线，小波变换系数存在以下尺度行为：

$$|W_f(a, b_0; \Psi)| \sim a^{\alpha(b_0)} \quad (4.47)$$

信号的多重分形特征主要表现为奇异性的层次分布，而通过小波局部模极大线可突出奇异性的层次结构。另一方面，当把分析小波 $\Psi(x)$ 看作为具有特殊形状的“盒子”，尺度参数 a 为它的大小 r 时，我们会很自然的发现式(4.47)和关系式(4.46)之间的类比关系。由此可得到由小波模极大来计算多重分形谱的计算方法。

小波模极大计算多重分形谱的关键是配分函数的表示。设 $L(\alpha)$ 为尺度 a 下所有小波模极大线的集合，在 $L(\alpha)$ 上定义配分函数：

$$T(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left[\sup_{\substack{(a', b) \\ a' \leq a}} |W_f(a', b; \Psi)| \right]^q \quad (4.48)$$

上式中选择模极大值的上确界，可克服由于极大值线上点附近的小波变换模值很小时，所引起的 $T(q, a)$ 不稳定问题。同时，也能避免由于 $T(q, a)$ 快速震荡产生的较近极大值引发的数据剧增问题。

对于离散小波变换，设

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k) \quad (4.49)$$

$\Psi(\bullet)$ 是具有 R 阶消失矩的紧支小波。对于一个过程 $f(x)$ 的离散小波系数定义为：

$$W_{j,k} = \int f(x) \Psi_{j,k}(t) dx \quad (4.50)$$

对于较大的正数 j ， $W_{j,k}$ 含有 $f(x)$ 对应的小尺度和高频信息，对于较大的负数 j ， $W_{j,k}$ 含有 $f(x)$ 对应的粗尺度和低频信息。这时(4.48)式可表示为：

$$T(q, j) = \sum_{l \in L(j)} \left[\sup_{\substack{(j', k) \\ j' \leq j}} |W_{j',k}| \right]^q \quad (4.51)$$

当 $a \rightarrow 0$ 时，配分函数的尺度行为可用质量因子 $\tau(q)$ 来描述：

$$T(q, a) = a^{\tau(q)} \quad (4.52)$$

通过对 $\tau(q)$ 进行 Legendre 变换可得到:

$$D(q) = \begin{cases} \frac{\tau(q)}{1-q} & q \neq 1 \\ -\tau^2(1) & q = 1 \text{ 且 } \tau(q) \text{ 可微} \end{cases} \quad (4.53)$$

由此得到多重分形谱 $f(\alpha)$ 为:

$$f(\alpha(q)) = f_L(\alpha(q)) = \inf_q \{q\alpha - \tau(q)\} \quad (4.54)$$

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (4.55)$$

由(4.53)式可知, 在多重分形谱估计过程中, 需要计算的关键量是 $\tau(q)$ 由小波系数的统计矩的尺度特性, 即:

$$E|W_{j,k}|^q \sim (2^{-j})^{\tau(q)} E|W_{0,1}|^q \quad (4.56)$$

对上式两边取对数, 得到线性化公式:

$$\log_2 E|W_{j,k}|^q \sim -j\tau(q) + \log_2 E|W_{0,1}|^q \quad (4.57)$$

由上式可知: 对于尺度 j , 可由小波系数的 q 阶矩的递归斜率得到 $\tau(q)$, 一旦求出 $\tau(q)$ 的估计值, 由 $\tau(q)$ 的微分可得到 $\alpha(q)$, $f(\alpha)$ 可由 Legendre 变换得到。

设对尺度 j , 由小波系数的 q 阶矩得到式(4.56)的左边表示为:

$$\hat{N}_j(q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |W_{j,k}|^q \quad (4.58)$$

n_j 表示小波系数在尺度 j 下的个数, 对所有的尺度 $j \in \{j_1, \dots, j_n\}$ 和所有求 q , 求 $\log_2 \hat{N}_j(q)$ 的拟合曲线, 拟合曲线的斜率即为 $\tau(q)$ 的估计。再对 $\tau(q)$ 求差分可得到 $\alpha(q)$, 最后由 $\tau(q)$ 的 Legendre 变换求得 $f(\alpha)$ 。

由前面的讨论可知, 小波系数中含有大量的冗余信息, 为了减少这些冗余信息对计算量的增加, 本章提出了对(4.58)式的计算采用小波变换模极大值来实现。其结果不影响对奇异性的分析。这时(4.58)式变为:

$$\hat{N}_j(q) = \frac{1}{n_j} \sum_{L(j)} |W_{j,k}|^q \quad (4.59)$$

式中 $L(j)$ 表示求和只对 j 尺度下模极大线上的系数进行, n_j 表示模极大线上小波系数在尺度 j 下的个数。在这种情况下, $\tau(q)$ 的拟合公式表示为:

$$\begin{pmatrix} \log_2 T_{j_1}(q) \\ \vdots \\ \log_2 T_{j_2}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -j_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\tau(q)} \\ \tau(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{\tau j_1}(q) \\ \vdots \\ \varepsilon_{\tau j_2}(q) \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$\text{式中} \quad \text{Var} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\tau j_1}(q) \\ \vdots \\ \varepsilon_{\tau j_2}(q) \end{pmatrix} = \sum \tau(q) \quad (4.61)$$

最后由最小二乘 LS 估计器得 $\tau(q)$ 估计 $\hat{\tau}(q)$: $\hat{\tau}(q)$ 得差分可得到 $\alpha(q)$ 的估计。设 q_0 是一足够小的值, 令 $q_i = iq_0$ ($i=1, \dots, Q$), 由有限差分得:

$$\hat{\alpha}_{FD}(q_i) = (\hat{\tau}(q_{i+1}) - \hat{\tau}(q_i)) / q_0 \quad (4.62)$$

再由 Legendre 变换得多重分形谱估计为:

$$\hat{f}_{FD}(\alpha(q_i)) = \hat{f}_L(\alpha(q_i)) = q_i \hat{\alpha}(q_i) - \hat{\tau}(q_i) \quad (4.63)$$

总之, 基于矩的(有限差分)多重分形谱估计算法如下:

- (1) 计算 $W_{j,k}$
- (2) 计算 $T_j(q) = \frac{1}{n_j} \sum_{L(j)} |W_{j,k}|^q \quad q \in (q_{\min}, q_{\max})$
- (3) 在 $-j \in (j_1, \dots, j_2)$ 内递归得到 $\hat{\tau}(q)$
- (4) $\hat{\alpha}_{FD}(q_i) = (\hat{\tau}(q_{i+1}) - \hat{\tau}(q_i)) / q_0$
- (5) $\hat{f}_{FD}(\alpha(q_i)) = \hat{f}_L(\alpha(q_i)) = q_i \hat{\alpha}(q_i) - \hat{\tau}(q_i)$

下标 FD 表示估计结果以 $\tau(q)$ 的有限差分为基础。从实用的角度来看, 用矩方法估计多重分形谱需要解决两个问题(或作两个选择)。

首先需要确定间隔 (q_{\min}, q_{\max}) 的范围, 从原理上讲, 由于 $\alpha(q)$ 的估计需完成有限差分运算, 所以要提高 $\alpha(q)$ 的估计精度, 间隔划分越精细越好, 进一步从理论上讲, q_{\min} 和 q_{\max} 的选择必须保证小波系数 q 阶统计矩的存在。

其次是实现递归的尺度范围, 即 j_1 和 j_2 的选择。尺度范围选择的一种有效方法由方差和偏差来决定。一般大的尺度系数可以减小偏差, 但增加方差^[12]。

4.6 消除趋势波动分析 (Detrended Fluctuation Analysis, DFA)

4.6.1 波动分析 (Fluctuation Analysis, FA)^[15]

FA 方法描述的是序列的二阶统计特性—相关特性, 它的整个计算过程如下, 设

$$X = \{X(i), i=1, 2, \dots\} \quad (4.64)$$

表示一个协方差平稳的随机序列，它的均值和方差为 μ 和 σ^2 。从原序列中减掉均值 μ 后，得到一个新序列

$$x = \{x(i), i=1, 2, \dots\}, \text{ 其中 } x(i) = X(i) - \mu \quad (4.65)$$

此时可以根据序列 x 本身的特点，从以下三种处理方式选取合适的一种：

- (1) x 序列本身为分形布朗运动(FBM)过程，可以直接对序列 x 进行下一步处理
- (2) x 序列为分形布朗噪声(FGN)过程， x 序列的部分增量和序列 y 为 FBM 过程

$$y = \{y(n), n=1, 2, \dots\}, \text{ 其中 } y(n) = \sum_{i=1}^n x(i), \text{ 然后对序列 } y \text{ 进行处理}$$

- (3) 我们将 x 的差分序列 $z = \{z(i), i=1, 2, \dots\}$ ，其中 $z(i) = x(i+1) - x(i)$ 看成 FBM 过程

总之，我们总是假设要处理序列的性质为分形布朗运动(FBM)过程，经过计算后，待处理序列的 Hurst 指数在 $0.1 < H < 1$ 为佳，Hurst 较大或较小，则说明假设可能有问题，要对待处理序列进行某种变换后再计算 Hurst 指数，下面的其他计算方法也是如此。

FA 方法的计算公式为

$$F(m) = \sqrt{\langle |x(n+m) - x(n)| \rangle} \approx m^H \quad (4.66)$$

变形后得到 Hurst 指数 H 为：

$$H = \frac{\log_2 F(m)}{\log_2 m} = \frac{\log_2 \sqrt{\langle |x(n+m) - x(n)| \rangle}}{\log_2 m} \quad (4.67)$$

4.6.2 消除趋势波动分析(DFA)^[16, 17]

DFA方法的具体计算过程为：

- 1) 首先将待处理序列分成长度为 m 的 $N_m = \text{int}(N/m)$ 个不相交的等长子区间。因为序列长度 N 通常不是分隔跨度 m 的整数倍，一般对待处理序列末端剩余的一小部分保留待用，短序列可以从原序列末端开始往回重新分隔一次，这样一共可以得到 $2N_m$ 个等长区间，为了简便，我们将末端剩余序列丢掉，只处理 N_m 个子区间上的前 $N_m * m$ 个数据。
- 2) 设第 j 个子区间上的原始序列可以表示为 $x_j(i)$, $i=1, 2, \dots, m$ ，我们通过 k 阶多项式 $\hat{x}_j^{(k)}(i)$ 使用最小二乘法拟合 $x_j(i)$ ，这里的 $\hat{x}_j^{(k)}(i)$ 叫做局部趋势函数，用来表征该子区间原始序列的大致趋势，又根据 k 阶次选择的不同，分别叫做消除趋势波(DFA)的 k 阶方法。

- 3) 通过 $\hat{x}_j^{(k)}(i)$ 来消除子区间上的局部趋势，我们得到第 j 个子区间上的消除趋势序列为 $z_j(i) = x_j(i) - \hat{x}_j^{(k)}(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 计算子区间上的消除趋势序列的平方均值为

$$F^2(j) = \langle z_j^2(i) \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_j^2(i) \quad (4.68)$$

- 4) 计算整个原始序列共 N_m 个子区间的 $F^2(j)$ 的均值平方根为

$$F_m = \left[\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} F^2(j) \right]^{1/2} \propto m^H \quad (4.69)$$

由上式，可知 Hurst 指数表现了 m 和 F_m 的函数关系。

- 5) F_m 是随着分隔长度 m 变化，我们取两者的对数的函数关系图，求 Hurst 指数为：

$$H = \frac{\log_2 F_m}{\log_2 m} = \frac{\log_2 \left[\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} F^2(j) \right]^{1/2}}{\log_2 m} \quad (4.70)$$

4.6.3 多分形消除趋势波动分析 (Multifractal-DFA, MDFA) [18]

计算序列的 q 阶波动函数 $F_q(s)$ 为

$$F_q(s) = \left[\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} F^q(j) \right]^{1/q} \propto m^H \quad (4.71)$$

$F_q(s)$ 和 q 、 m 有关，我们感兴趣的是对于给定的 q ， $F_q(s)$ 是怎么随着时间标度 m 变化的。 F_m 是随着分隔长度 m 变化，我们取两者的对数的函数关系图，求出 Hurst 指数 H 为：

$$H_q = \frac{\log_2 F_q}{\log_2 m} = \frac{\log_2 \left[\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} F^q(j) \right]^{1/q}}{\log_2 m} \quad (4.72)$$

4.7 高阶分形特征(缝隙值)

Mandelbrot 在提出分形理论之初，已经注意到分形维的非普适性或非唯一性，他建议研究缝隙作为分维的一个补充。在研究分形特征的时候，常常会发现几个表面或结构完全不同的分形集有相同或相似的分形维数，这时仅用分形维数已无法对其进行区分。分形维数仅仅指出了分形表面的不规则程度，而缝隙特征则描述了分形集质量变化的快慢。缝隙值作为高阶分形特征，近年来常用于信号和图像分析中，尤其是心电信号^[19, 20]和医疗图像的分析中。杜干等将其引入雷达信号分析领域，在探讨缝隙特性的基础上，利用它进行了海上目标检测和 SAR 图像中的目标检测，取得了良好的效果^[21]。

缝隙的概念是基于分形维计算的表达式：

$$M(\varepsilon) = K\varepsilon^D \quad (4.73)$$

上式中包含了两个参量，即前项系数 K 和指数项 D ， ε 为尺度。在分形理论中，指数项是分形维数的表达式，过去人们的注意力常集中在指数项，即计算和研究分形维数的大小，而忽略了对前项系数的研究，在双对数坐标系中，指数项反映的是直线的斜率，而前项系数的对数为直线的截距。直线是由斜率和截距共同决定的，因此，对一个分形集而言，如果只研究它的分形维数是不全面的。分形维数指出了物体表面的不规则程度，却没有描述表面起伏的快慢，缝隙与前项系数 K 是有关的。缝隙参数描述质量变化的快慢，其定义式为

$$\Lambda = E\left[\left(M/E(M)-1\right)^2\right] \quad (4.74)$$

上式中 M 是分形集的质量， $E(M)$ 是其期望值。(4.74)式反映的是分形集质量 M 的理论值与实际值的偏差。缝隙参数是一个二阶统计量，因此称缝隙参数是高阶分形特征。

为了计算缝隙的值，Ross 提出根据分形集的概率分布 $P(m,L)$ 来计算缝隙值的方法：

$$\sum_{m=1}^N P(m,L) = 1 \quad (4.75)$$

$P(m,L)$ 表示有 m 个点在边长为 L 的盒子中的概率，是盒子中可能有的最多点数，所以 $P(m,L)$ 包含了分形集合的质量分布信息。根据分形集的概率分布定义如下两式：

$$\begin{aligned} M(L) &= \sum_{m=1}^N mP(m,L) \\ M^2(L) &= \sum_{m=1}^N m^2P(m,L) \end{aligned} \quad (4.76)$$

则缝隙值的计算公式为：

$$\Lambda(L) = \frac{M^2(L) - [M(L)]^2}{[M(L)]^2} = \frac{M^2(L)}{[M(L)]^2} - 1 \quad (4.77)$$

从上式可看出，研究对象的质量分布越均匀，缝隙值 $\Lambda(L)$ 越小，反之 $\Lambda(L)$ 值越大。同时随着 L 的增大(即盒子大小的加大)，分形集将均匀地分布于各个盒子中，因此 $\Lambda(L)$ 会减小并趋于零。由 $\Lambda(L)$ 随 L 的变化快慢可以看出物体纹理基元的大小，若基元较小时，盒子中的质量能较快地变得均匀；若基元较大，则要很慢才能得到均匀。

缝隙值是一种二阶分形特征，同理我们也可以求得更高阶的有关分形质量特征矩，如分形对象质量分布特征的三阶矩

$$\Lambda_3(L) = \frac{M^3(L)}{[M(L)]^3} - 3 * \frac{M^2(L)}{[M(L)]^2} + 2 \quad (4.78)$$

对于理论上的分形集，如 Cantor 集、Sierpinski 三角等，他们的缝隙值为一固定值，对于实际时间信号，他们一般只具有统计意义上的分形特征，他们的缝隙值一般为一单调递减曲线，我们可以使用如下方式进行拟合

$$\Lambda(L) = a * L^m - 1 \quad (4.79)$$

对于理想分形集，上式中 $m = 0$ ，缝隙值为 $\Lambda(L) = a - 1$ 。

4.8 海杂波的分形特征和目标检测

内容 (略)

4.9 本章小结

本章介绍了时间序列分形特性的基本概念和理论计算方法，分形特征在时间序列建模和分析领域的应用近年不断发展。其中，小波模极大值的多重分形谱估计和消除趋势波动分析是分形析的较新方法，多尺度小波多分形模型是较新的分形建模方法。

4.10 后记

本版本为时间序列的分形特性初稿，主要是对文献中的方法进行了综述和重复叙述，并没有校对和修改，请谅解。

你的关注是我前进的最大动力☺。

任何意见、建议、批评和讨论我都热烈欢迎。

我的信箱: xuxkboy@newmail.dlmu.edu.cn

欢迎大家到研学论坛 (<http://bbs.matwav.com/>) 混沌分形版进行讨论

本文版权目前归本人所有，引用格式如下：

许小可. 海杂波的非线性分析与建模: (博士学位论文). 大连: 大连海事大学, 2007

参考文献:

- [1] 孙博玲. 分形维数(Fractal dimension)及其测量方法. 东北林业大学学报. 2004, 32(03): 116-119.
- [2] 武薇, 范影乐, 庞全. 基于广义维数距离的语音端点检测方法. 电子与信息学报. 2007, 29(02): 465-468.
- [3] Lo T, Leung H, Litva J, et al. Fractal characterisation of sea-scattered signals and detection of sea-surface targets. Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F. 1993, 140(4): 243-250.
- [4] 王永诚, 吴小飞. 海杂波的分形维数测量在对海面目标探测中的应用研究. 现代雷达. 2000, 22(05): 28-31.
- [5] 文必洋, 王颂. 一种应用海杂波分形维数检测海面目标的方法. 华中科技大学学报(自然科学版). 2006, 34(01): 68-70.
- [6] 王红光, 康士峰, 张忠治. 海杂波的分形布朗运动模型及其应用. 现代雷达. 2005, 27(11): 58-62.
- [7] Flandrin P. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion. IEEE Transactions on Information Theory. 1992, 38(2): 910-917.
- [8] 李永利, 刘贵忠, 王海军, 等. 自相似数据流的Hurst指数小波求解法分析. 电子与信息学报. 2003, 25(01): 100-105.
- [9] Riedi R H, Crouse M S, Ribeiro V J, et al. A multifractal wavelet model with application to network traffic. IEEE Transactions on Information Theory. 1999, 45(3): 992-1018.
- [10] 周越, 杨杰. 基于多重分形模型的非高斯信号建模. 上海交通大学学报. 2002, 36(04): 502-505.
- [11] 石志广, 周剑雄, 付强. 基于多重分形模型的海杂波特性分析与仿真. 系统仿真学报. 2006, 18(08): 2289-2292.
- [12] 李会方. 多重分形理论及其在图象处理中应用的研究: 博士学位论文. 西安: 西北工业大学, 2004.
- [13] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Transactions on Information Theory. 1992, 38(2): 617-643.
- [14] Arneodo A, Bacry E, Muzy J F, et al. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. Physica A: Statistical and Theoretical Physics. 1995, 213(1-2): 232-275.
- [15] Hu J, Gao J B, Posner F L, et al. Target detection within sea clutter: a comparative study by fractal scaling analyses. Fractals. 2006, 14: 187-204.
- [16] Hu K, Ivanov P C, Chen Z, et al. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. Physical Review E. 2001, 64(1): 011114-1-24.
- [17] Chen Z, Ivanov P C, Hu K, et al. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis. Physical Review E. 2002, 65(4): 041107-1-17.
- [18] Kantelhardt J W, Zschiegner S A, Koscielny-bunde E, et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002, 316(1-4): 87-114.
- [19] Esgiar A N, Chakravorty P K. Electrocardiogram signal classification based on fractal features. Computers in Cardiology, 2004, 2004:661-664.
- [20] Esgiar A N, Chakravorty P K. Wave nature of fractal lacunarity: a higher resolution scale to capture subtle changes in ECG signals. Computers in Cardiology, 2005:1009-1012.
- [21] 杜干, 张守宏. 高阶分形特征在雷达信号检测中的应用. 电子学报. 2000, 28(03): 90-92.