

3 Lyapunov 指数

3	最大Lyapunov指数	1
3.1	引言	2
3.2	Lyapunov指数谱的理论计算方法	4
3.3	Wolf法求Lyapunov指数	5
3.4	小数据量和Kantz法计算最大Lyapunov指数	6
3.5	尺度相关的Lyapunov指数	8
3.6	海杂波的最大Lyapunov指数	10
3.7	本章小结	10
3.8	后记	10

3.1 引言

最大Lyapunov指数是判断和描述非线性时间序列是否为混沌系统的重要参数，因此是一个重要的混沌不变量。对于混沌系统来说，耗散是一种整体性的稳定因素，动力系统一方面作为耗散系统最终要收缩到相空间的有限区域即吸引子上。另一方面系统在相体积收缩的同时，运动轨道又是不稳定的，要沿某些方向进行指数分离。奇怪吸引子的不稳定的运动轨道在局部看来总是指数分离的。为了有效刻画吸引子，我们有必要研究动力在整个吸引子或无穷长的轨道上平均后的特征量，如Lyapunov指数、关联维和Kolmogorov熵等。混沌运动的基本特点是运动对初始条件极为敏感，两个极为靠近的初始值所产生的轨道，随时间推移按指数方式分离，Lyapunov指数就是描述这一现象的量。

在一维动力系统 $x_{n+1} = F(x_n)$ 中，初始两点迭代后互相分离还是靠拢，关键取决于导数 $\left| \frac{dF}{dx} \right|$ 的值。若 $\left| \frac{dF}{dx} \right| > 1$ ，则迭代使得两点分开；若 $\left| \frac{dF}{dx} \right| < 1$ ，则迭代使得两点靠拢。但是在不断的迭代过程中， $\left| \frac{dF}{dx} \right|$ 的值也随之而变化，呈现出时而分离时而靠拢。为了表示从整体上看相邻两个状态反而情况，必须对时间(或迭代次数)取平均。不妨设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 λ ，于是原来相距为 ε 的两点经过 n 次迭代后距离为

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = \left| F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0) \right| \quad (3.1)$$

取极限 $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ，则(3.1)变为

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (3.2)$$

$$\text{上式变形后，可简化为：} \quad \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (3.3)$$

(3.3)中的 λ 与初始值的选取没有关系，称为原动力系统的Lyapunov指数，它表示系统在多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离中的指数。若 $\lambda < 0$ ，则意味着相邻点最终要靠拢合并成一点，这对应于稳定的不动点和周期运动；若 $\lambda > 0$ ，则意味着相邻点最终要分离，对应于轨道的局部不稳定，如果轨道还有整体的稳定因素(如整体有界、耗散、存在捕捉区域等)，系统要在有限的几何对象上实现指数分离，必须无穷次折叠。则在此作用下反复折叠并形成混沌吸引子，故 $\lambda > 0$ 可以作为混沌行为的一个判据。

对于一般的 n 维动力系统，定义Lyapunov指数如下：

设 F 为 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 上的 n 维映射，假设一个 n 维离散动力系统： $x_{n+1} = F(x_n)$ 。

将系统的初始条件取为一个无穷小的 n 维小球，由于演化过程中的自然变形，球将变成椭球。将椭球上所有主轴按其长度顺序排列，那么第 i 个Lyapunov指数根据第 i 个主轴的长度 $P_i(n)$ 的增加速率定义为

$$\sigma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{P_i(n)}{P_i(0)} \right|, (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

这样Lyapunov指数是与相空间的轨线收缩或扩张的性质相关联的，在Lyapunov指数小于零的方向上轨线收缩，运动稳定，对于初始值不敏感；而在Lyapunov指数为正的方向上，轨道迅速分离，对初始值敏感。Lyapunov指数的前 j 个指数之和由前 j 个主轴定义的 j 维立体指数增加的长期平均速率确定，如椭球长度按 e^{σ_1} 增加，由前两个主轴定义的区域面积按 $e^{\sigma_1+\sigma_2}$ 增加，由前三个主轴的体积按 $e^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}$ 增加，以此类推。在Lyapunov指数谱中，最小的Lyapunov指数决定轨道收缩的快慢；最大的Lyapunov指数则决定轨道发散即覆盖整个吸引子的快慢；而所有的指数之和 $\sum \lambda_i$ 可以认为是大体上表征轨线总的平均发散快慢。

Lyapunov指数是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标，它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的指数率。对于系统是否存在动力学混沌，可以从最大Lyapunov指数是否大于零非常直观的判断出来：一个正的Lyapunov指数，意味着在系统相空间中，无论初始两条轨线的间距多么小，其差别都会随着时间的演化而成指数率的增加以致达到无法预测，这就是混沌现象^[1]。

Lyapunov指数对应混沌系统的初始值敏感性，它与吸引子至少有如下关系^[2]：

- 1) 任何吸引子，不论是否为奇怪吸引子，都至少有一个Lyapunov指数是负的，否则轨线就不可能收缩为吸引子。
- 2) 稳定定态和周期运动(以及准周期运动)都不可能具有正的Lyapunov指数。稳定定态的Lyapunov都是负的；周期运动的最大Lyapunov等于0，其余的Lyapunov都是负的。
- 3) 对于任何混沌运动，都至少有一个正的Lyapunov指数，如果经过由计算得知系统至少有一个正的李雅普诺夫指数，则可肯定系统作混沌运动。

Lyapunov指数的计算方法可分为两类：如果知道系统的动力学方程，则可以根据定义来计算^[3, 4]；如果不知道系统的动力学方程，则只有通过观测时间序列来估计。目前在工程上，由观测时间序列来计算Lyapunov指数的方法主要有以下两种^[5]：

(1)分析法：该方法通常先进行相空间重构，求系统状态方程的雅可比矩阵，然后对雅可比矩阵进行特征值分解或奇异值分解求取系统的Lyapunov指数，但该方法对噪声非常敏感。

(2)轨道跟踪法：该方法以Wolf方法^[3]和Rosenstein的小数据法^[6-8]为代表，对系统两条或更多条的轨道进行跟踪，获得它们的演变规律以提取Lyapunov指数。该方法的优点是计算结果不易受拓扑复杂性(如Lorenz吸引子)的影响。

本文主要研究以Wolf方法为基础的轨道跟踪法及其改进算法，本章中各节主要内容如下：3.2节介绍 Lyapunov指数谱的理论计算方法，3.3节介绍Wolf提出的基于轨道跟踪的Lyapunov指数计算方法，3.4节介绍Wolf方法的改进：小数据量和Kantz算法，3.5节介绍能有效区分混沌、噪声、分形布朗运动等多种时间序列的尺度相关Lyapunov指数，3.6节介绍海杂波的Lyapunov指数，3.7节为本章小结。

3.2 Lyapunov 指数谱的理论计算方法

在已知动力学微分方程的情况下，经过理论推导或对微分方程离散化采用某种数值迭代算法，就可以得到已知动力学系统的精确 Lyapunov 指数谱。本文介绍的算法基本原理是首先求解出系统常微分方程的近似解，然后对系统的 Jacobi 矩阵进行 QR 分解，同时对多个小时间段进行必要的正交化重整过程，反复迭代计算后从而得到系统的 Lyapunov 指数谱。

$$\text{设动力学系统由右侧方程式决定：} \dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \quad (3.5)$$

并考虑轨道相邻两点 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' ($\xi = \mathbf{X} - \mathbf{X}'$)，将(3.5)式线性化得

$$\dot{\xi} = T(\mathbf{X}(t)) \cdot \xi \quad (3.6)$$

式中 $\mathbf{T} = (\partial F / \partial \mathbf{X})$ 是雅可比矩阵， ξ 是切平面上的切矢量，将(3.6)式积分有

$$\xi(t) = \mathbf{A}' \xi(0) \quad (3.7)$$

其中， \mathbf{A}' 是切向量 $\xi(0)$ 到 $\xi(t)$ 的线性映射算子，因此得到平均指数增长率为

$$\lambda(\mathbf{X}(0), \xi(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\xi(t)\|}{\|\xi(0)\|} \quad (3.8)$$

对于重构相空间中的某一点 \mathbf{X}_i ，与 \mathbf{X}_i 点距离小于 ε 的所有点为 $\{\mathbf{X}_k, i=1, 2, \dots\}$ ，它们的位移矢量为

$$\{\mathbf{Y}^i\} = \{\mathbf{X}_{k_i} - \mathbf{X}_i \mid \|\mathbf{X}_{k_i} - \mathbf{X}_i\| \leq \varepsilon\} \quad (3.9)$$

经过一段时间 t 后，数据点演化为 $\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_{i+t}$, $\mathbf{X}_{k_i} \rightarrow \mathbf{X}_{k_i+t}$ ，因此原位移矢量 $\{\mathbf{Y}^i\}$ 映射为

$$\{\mathbf{Z}^i\} = \{\mathbf{X}_{k_i+t} - \mathbf{X}_{i+t} \mid \|\mathbf{X}_{k_i} - \mathbf{X}_i\| \leq \varepsilon\} \quad (3.10)$$

如果半径 ε 足够小，则位移矢量 $\{\mathbf{Y}^i\}$ 和 $\{\mathbf{Z}^i\}$ 可近似为切平面上的切矢量，因此从 \mathbf{Y}^i 到 \mathbf{Z}^i 的矩阵 \mathbf{A}_j 满足

$$\mathbf{Z}^i = \mathbf{A}_j \mathbf{Y}^i \quad (3.11)$$

使用最小二乘法，可以求得式(3.11)中的矩阵 \mathbf{A} ，应用QR分解矩阵 \mathbf{A} ，同时在不同时间段内进行必要的Gram-Schmidt正交化重整过程，即可得到所需的Lyapunov指数 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, d$ [3, 4, 9]。

3.3 Wolf 法求 Lyapunov 指数

对于一般的实际时间序列，我们无法确切知道该时间序列代表的原始动力学过程，因此无法根据动力学方程求得该时间序列的精确Lyapunov指数。一般只能对单变量的时间序列进行相空间重构，然后使用分析法和轨道跟踪法来提取系统的Lyapunov指数。由于在1985年，Wolf等人首先提出直接基于相平面、相体积等演化来估计Lyapunov指数，因此传基于轨道跟踪的这类方法有被统称为Wolf方法，它在混沌系统的研究和基于Lyapunov指数的混沌时间序列预测中应用十分广泛^[1, 3]。

设混沌时间序列为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，嵌入维数 m ，时间延迟为 τ ，则重构相空间为

$$\mathbf{Y}(t_i) = (x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)), \quad i = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau \quad (3.12)$$

相空间重构后，利用混沌吸引子的轨道分离特性，Wolf方法计算最大Lyapunov指数的整个过程如图3-1所示。

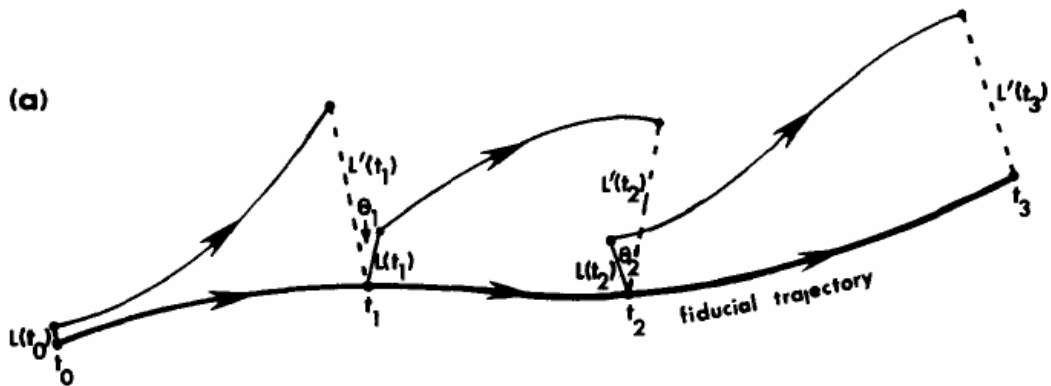


图 3-1: Wolf法求最大Lyapunov指数示意图(此图取自wolf论文^[3]，因时间关系没有重绘)

我们取相空间中的初始点为 $\mathbf{Y}(t_0)$ ，设它的最邻近点为 $\mathbf{Y}_0(t_0)$ ，两点之间的距离设为 $L(t_0)$ ，从 t_0 时刻开始追踪这两点的时间演化，直至 t_1 时刻两点的间距超过规定值 ε

$$L'(t_1) = |\mathbf{Y}(t_1) - \mathbf{Y}_0(t_1)| > \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (3.13)$$

此时保留点 $\mathbf{Y}(t_1)$ ，并在 $\mathbf{Y}(t_1)$ 临近找一点 $\mathbf{Y}_1(t_1)$ ，此时需要保证两点间距离不但保证

$$L(t_1) = |\mathbf{Y}(t_1) - \mathbf{Y}_1(t_1)| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (3.14)$$

并且使得 $L(t_1)$ 与 $L'(t_1)$ 之间的夹角 θ_1 尽可能的小，继续重复上述过程，直至 $\mathbf{Y}(t)$ 到达时间序列的终点，这时追踪演化过程总的迭代次数为 M ，则最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \ln \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (3.15)$$

如果要计算次大的 Lyapunov 指数，如图 3-2 所示，则要追踪一个点以及相邻两个点构成三角形 $A(t_0)$ 的演化过程，当这个三角形 $A'(t_1)$ 变得太偏斜或者面积太大，则重新取一个两边与原三角形两边夹角最小的三角形 $A(t_1)$ ，反复重复该过程直到终点，则次大的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_2 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \ln \frac{A'(t_k)}{A(t_{k-1})} - \lambda_1 \quad (3.16)$$

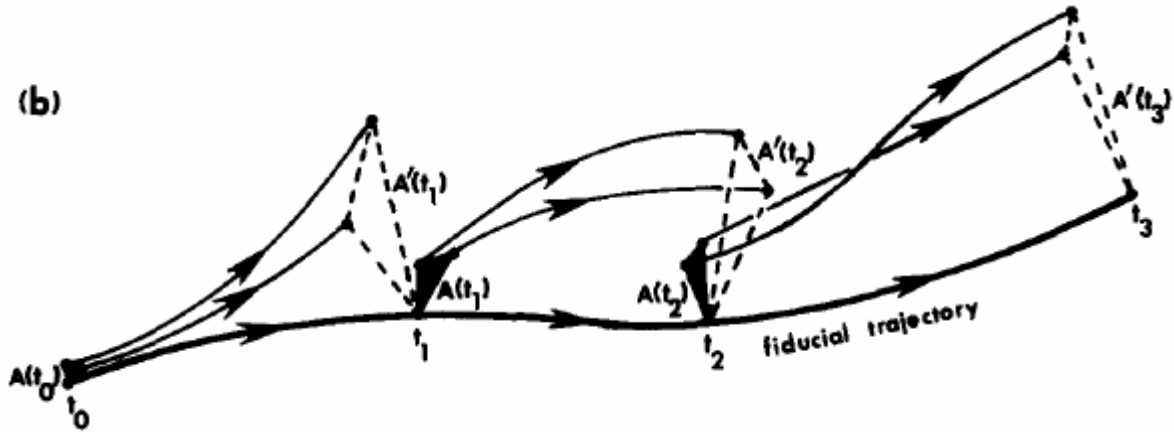


图 3-2: Wolf 法求次大 Lyapunov 指数示意图(此图取自 wolf 论文^[3]，因时间关系没有重绘)

从理论上，对于无噪声的无限长数据，Wolf 方法可以精确求得系统所有的 Lyapunov 指数，但实际时间序列长度有限，并且由于噪声的影响，该方法只能较为可靠地计算最大 Lyapunov 指数。

3.4 小数据量和 Kantz 法计算最大 Lyapunov 指数

在计算Lyapunov 指数的各种方法中, 以Wolf法为代表轨道跟踪法较为实用且效果相对较好, 因而获得了较广泛的运用。但Wolf法也存在以下问题^[6]:

(1) 需要较大的数据长度 (2) 计算结果受各种参数影响 (3) 实现困难

在混沌研究和实际应用中, 判断时间序列是否具有混沌属性时, 并不需要计算出时间序列的Lyapunov指数谱, 而只要计算出最大Lyapunov指数就够了。只要观察最大Lyapunov指数是否大于零就能判别一个时间序列是否为混沌系统, 另外时间序列的预测一般也是基于最大Lyapunov指数进行的, 所以最大Lyapunov指数的计算就显得特别重要。小数据量方法是一种简便的只计算混沌时间序列最大Lyapunov指数的方法, 其基本原理如下:

在时间序列相空间重构后, 寻找轨道上第 j 点 $\mathbf{Y}_j(\mathbf{t}_0)$ 的最近临近点 $\mathbf{Y}_{j'}(\mathbf{t}_0)$, 即

$$d_j(0) = \min \|\mathbf{Y}_j(\mathbf{t}_0) - \mathbf{Y}_{j'}(\mathbf{t}_0)\|, \quad |j - j'| > p \quad (3.17)$$

其中 p 为时间序列的平均周期, 它可以通过能量谱的平均功率的导数估计出来。我们由3.2已知, 最大Lyapunov指数可以通过轨道上每个点和其最临近点演化的平均发散速率估计出来。根据这一思想, Sato等^[10]推导出最大Lyapunov指数可表示为

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{i\Delta t} \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (3.18)$$

其中, Δt 为样本周期, $d_j(i)$ 是基本轨道上第 j 对最临近点对经过 i 个离散时间步长后的距离。Sato等将(3.18)改写为如下形式:

$$\lambda_1(i, k) = \frac{1}{k\Delta t} \frac{1}{(M-k)} \sum_{j=1}^{M-k} \ln \frac{d_j(i+k)}{d_j(i)} \quad (3.19)$$

式中 k 是常数, $d_j(i)$ 的意义同上, $\lambda_1(i, k)$ 随着演化时间 i 的增大而变化, 最大Lyapunov指数的几何意义是量化初始轨道的随指数发散特征演化的参量, 即有

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t} \quad (3.20)$$

对于离散形式有 $d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i \cdot \Delta t)}$, $C_j = d_j(0)$ (3.21)

其中 C_j 为轨道的初始距离, 将式(3.21)两边取对数, 得到

$$\ln d_j(i) = \ln C_j + \lambda_1(i \cdot \Delta t) \quad (j = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau) \quad (3.22)$$

显然, 可以通过最小二乘法逼近式(3.22)的斜率得到最大Lyapunov指数 λ_1 的值, 即

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad \text{其中} \langle \bullet \rangle \text{表示对所有的点取平均值} \quad (3.23)$$

Kantz在与Rosenstein同时期也独立提出一种类似小数据量法的最大Lyapunov指数计算方法^[7]。与小数据量法不同的是，为了减小噪声的影响，Kantz算法在计算时，给定了一个邻域范围 $U(\mathbf{Y}_j)$ ，提出使用间距在这个邻域范围内的所有邻近点作为参考点，然后对所有点的演化结果取平均值作为计算值。即对于一个固定的 $\mathbf{Y}_j(\mathbf{t}_0)$ ，有多个满足条件的 $\mathbf{Y}_{j'}(\mathbf{t}_0)$ ，最后的演化距离 $d_j(i)$ 可表示为：

$$d_j(i) = \frac{1}{|U(\mathbf{Y}_j)|} \sum_{\mathbf{Y}_{j'} \in U(\mathbf{Y}_j)} |\mathbf{Y}_{j+i} - \mathbf{Y}_{j'+i}| \quad (3.24)$$

小数据量法在寻找相空间中每一点的最近邻点时只找距其最近的一点，而由于噪声的影响，这一点可能并非真正的最近邻点。Kantz提出寻找间距小于邻域尺寸 ε 的所有邻点，用多点平均来减少噪声的影响。这种算法由于充分地利用了能够利用的数据，并对它们进行了某种意义上的平均，因而计算结果更加稳定，但增加了计算量，而且选取合适的邻域范围 $U(\mathbf{Y}_j)$ 是Kantz算法的难点。如果选取固定的邻域尺寸 ε ，对于不均匀的混沌吸引子，可能造成有的点附近可以找到很多近邻点，而有的点附近一个满足条件的近邻点也找不到。如果选择固定的近邻点数目 N ，则可能有的数据点的邻域很小，符合对邻域的要求，而有的数据点所构成的邻域范围很大，此时反映出来的就是一个较大区域的平均效果，违背了采用近邻点的本意。为了解决这一问题，梁勇等提出采用可变邻域的方法来进行改进^[8]。

3.5 尺度相关的 Lyapunov 指数

无论是Wolf方法还是小数据量方法，都仅仅根据轨道跟踪算法使用最小二乘策略来计算最大Lyapunov指数。固然他们对于确定的已知混沌系统，能比较准确求出最大Lyapunov指数，也有一些抗噪声干扰的能力，但都无法区分混沌、含噪混沌和噪声诱发混沌^[11, 12]，更不能识别出分形布朗运动的尺度特性。Gao jianbo等提出基于尺度相关的LYapunov指数，可以有效地对各种混沌和分形现象进行区分和描述^[13]。

Gao等在最初在1994年定义了时间相关指数(Time-dependent Exponent, TDE)为^[14]

$$\Lambda(k) = \left\langle \ln \left(\frac{\|\mathbf{X}_{i+k} - \mathbf{X}_{j+k}\|}{\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|} \right) \right\rangle \quad (3.25)$$

式中的 \mathbf{X}_i 和 \mathbf{X}_j 的取值范围为 $r \leq \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\| \leq r + \Delta r$ ，其中 r 和 Δr 都为大于零的较小距离值。 $\langle \cdot \rangle$ 运算符表示对所有的数据点对 $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ 的演化情况取总体平均，整数值 k 被称为演化时间，对应的实际时间值为 $k\delta t$ ，其中 δt 为采样时间。距离值 $(r, r + \Delta r)$ 的限定条件为TDE的计算定义了一个区间，不同的区间会捕捉到系统在不同尺度上的特征。

将(3.25)式变形，Gao等定义了另一重要参数为对数分离曲线(Logarithmic Displacement Curves, LDC)，它的表达式如下^[15]

$$D(k) = \left\langle \ln \|\mathbf{X}_{i+k} - \mathbf{X}_{j+k}\| \right\rangle = \left\langle \ln \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\| \right\rangle + \Lambda(k) \quad (3.26)$$

$D(k)$ 描述了动力系统随时间 k 演化的情况。在没有噪声情况下，任意两条对数分离曲线 $D_1(k)$ 和 $D_2(k)$ 会有一定的区别。而噪声会影响轨道分离，使得曲线 $D_1(k)$ 和 $D_2(k)$ 变得相同，因此可以通过比较参数 NA 可以看出噪声对轨道演化的影响^[15]

$$NA \approx \frac{\sum_i (D_1(k_i) - D_2(k_i)) \Big|_{with\ noise}}{\sum_i (D_1(k_i) - D_2(k_i)) \Big|_{without\ noise}} \quad (3.27)$$

NA 的值将会随着噪声的增加逐步由 1 趋近于 0，时间相关指数(TDE)和对数分离曲线(LDC)在研究噪声诱发混沌^[11, 12]、区分噪声和混沌信号^[15-18]中获得了大量应用。

最大Lyapunov指数等价于求 $\Lambda(k)/k$ ，这里的 $\Lambda(k)$ 的定义和式(3.25)相同，只不过其限定条件有一些改变， $\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\| < r$ 和 $\|\mathbf{X}_{i+k} - \mathbf{X}_{j+k}\| < R$ ， r 是一个较小的距离尺度。 R 是一个较大的距离尺度，它要小于可以预测的时间尺度。

因此如果假设最相邻两轨道之间的平均距离为 ε_0 ，在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻轨道分离演化后的平均距离分别为 ε_t 和 $\varepsilon_{t+\Delta t}$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，有

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \varepsilon_t e^{\lambda(\varepsilon_t)\Delta t} \quad (3.28)$$

其中 $\lambda(\varepsilon_t)$ 被称为尺度相关的 Lyapunov 指数(Scale-Dependent Lyapunov Exponent, SDLE)，它可通过如下公式进行计算

$$\lambda(\varepsilon_t) = \frac{\ln \varepsilon_{t+\Delta t} - \ln \varepsilon_t}{\Delta t} \quad (3.29)$$

SDLE 的尺度特性主要通过使用不同的 ε_t 作限制条件来实现，具体计算时需要选取满足如下条件的相空间向量 \mathbf{Y}_j 和 \mathbf{Y}_i ：

$$\varepsilon_k \leq \|\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_i\| \leq \varepsilon_k + \Delta \varepsilon_k \quad (3.30)$$

我们可以将(3.30)式的 k 取不同值，来获取多尺度上的轨道演化特征—SDLE。由式(3.28)我们已知 ε_t 和 $\varepsilon_{t+\Delta t}$ 为在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻轨道分离距离，因此公式(3.29)可改写为

$$\lambda(\varepsilon_t) = \frac{\left\langle \ln \|\mathbf{X}_{i+t+\Delta t} - \mathbf{X}_{j+t+\Delta t}\| - \ln \|\mathbf{X}_{i+t} - \mathbf{X}_{j+t}\| \right\rangle}{\Delta t} \quad (3.31)$$

SDLE 可以有效区分各种非线性现象，具有广泛的应用前景。

3.6 海杂波的最大 Lyapunov 指数

内容 (略)

3.7 本章小结

本章介绍了Lyapunov指数谱的基本概念和理论计算方法，讨论了基于轨道跟踪法计算实际时间序列最大Lyapunov指数的常用算法。最大Lyapunov指数是判断时间序列是否为混沌的重要非线性不变量，但目前的计算方法在含有噪声或对于未确定性质的信号均不稳定^[19]，计算时线性区间的选取也具有主观因素。因此对于实际时间序列，不能绝对地说出现正的最大Lyapunov指数就是混沌，分形噪声或含有噪声的非混沌信号也完全有可能出现正的Lyapunov指数值。

3.8 后记

本版本为 Lyapunov 的初稿，语言上我没有校对和晕色，因此可能有语病或语言错误，请谅解。

你的关注是我前进的最大动力☺。

任何意见、建议、批评和讨论我都热烈欢迎。

我的信箱: xuxkboy@newmail.dlmu.edu.cn

欢迎大家到研学论坛 (<http://bbs.matwav.com/>) 混沌分形版进行讨论

本文版权目前归本人所有，引用格式如下：

许小可. 海杂波的非线性分析与建模: (博士学位论文). 大连: 大连海事大学, 2007

参考文献:

- [1] 吕金虎, 陆君安, 陈士华. 混沌时间序列分析及其应用. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- [2] 罗利军, 李银山, 李彤, 等. 李雅普诺夫指数谱的研究与仿真. 计算机仿真. 2005, 22(12): 285-288.
- [3] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985, 16(3): 285-317.
- [4] Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*. 1985, 57(3): 617-656.
- [5] 杨绍清, 章新华, 赵长安. 一种最大李雅普诺夫指数估计的稳健算法. 物理学报. 2000, 49(04): 636-640.
- [6] Rosenstein Michael T., Collins James J., De Luca Carlo. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993, 65(1-2): 117-134.
- [7] Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*. 1994, 185(1): 77-87.
- [8] 梁勇, 孟桥, 陆佶人. Lyapunov指数的算法改进与加权预测. 声学技术. 2006, 25(05): 463-467.
- [9] 李国辉, 徐得名, 周世平. 时间序列最大Lyapunov指数的计算. 应用科学学报. 2003, 21(02): 127-131.
- [10] Sato S, Sano M, Sawada Y, et al. Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems. *Progress of Theoretical Physics*. 1987, 77(1): 1-5.
- [11] Gao J B, Hwang S K, Liu J M, et al. When Can Noise Induce Chaos? *Physical Review Letters*. 1999, 82(6): 1132-1135.
- [12] Gao J B, Chen C C, Hwang S K, et al. NOISE-INDUCED CHAOS. *International Journal of Modern Physics B*. 1999, 13(28): 3283-3305.
- [13] Gao J B, Hu J, Tung W W, et al. Distinguishing chaos from noise by scale-dependent Lyapunov exponent. *Physical Review E*. 2006, 74(6): 066204-1-9.
- [14] Gao J, Zheng Z. Direct dynamical test for deterministic chaos and optimal embedding of a chaotic time series. *Physical Review E*. 1994, 49(5): 3807-3814.
- [15] Gao J. Recognizing randomness in a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1997, 106(1-2): 49-56.
- [16] Hu J, Tung W, Gao J, et al. Reliability of the 0-1 test for chaos. *Physical Review E*. 2005, 72(5): 056207-1-5.
- [17] Cellucci C J, Albano A M, Rapp P E, et al. Detecting noise in a time series. *Chaos*. 1997, 7(3): 414-422.
- [18] Gao J, Rao N S. TCP AIMD dynamics over Internet connections. *Communications Letters, IEEE*. 2005, 9(1): 4-6.
- [19] Liu H F, Dai Z H, Li W F, et al. Noise robust estimates of the largest Lyapunov exponent. *Physics Letters A*. 2005, 341(1-4): 119-127.