

Mindlin 板的几何方程

考虑厚度 h 的厚板 $\bar{\Omega}$, 其位移 $\bar{u}_i, i = 1, 2, 3$ 可以简化为关于 x_3 的线性函数。可以用中性面位移 u_α 和转角 $\varphi_\alpha, \alpha = 1, 2$ 表示:

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \varphi_\alpha(x_1, x_2), & \alpha = 1, 2 \\ \bar{u}_3(\mathbf{x}) = w(x_1, x_2) \end{cases}$$

将该位移带入 [kinematics relation](#), 得到相应的应变:

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} x_3 = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \frac{x_3}{2}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) \\ \epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} k \gamma_\alpha = \frac{1}{2}(w_{,\alpha} - \varphi_\alpha) \\ \epsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

其中

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha})$$

$$\gamma_\alpha = w_{,\alpha} - \varphi_\alpha$$

式中, κ 为剪切修正系数, 用于修正内能。 $\varepsilon_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}$ 和 γ_α 分别为板的应变、曲率和剪切应变。与 [Kirchhoff-Love假设](#) 不同, Uflyand-Mindlin 假设下的板剪切应变不可忽略, 即 $\gamma_\alpha \neq 0, \varphi_\alpha \neq w_{,\alpha}$ 。

伽辽金弱形式

[弹性弱形式](#) 的内力可以用厚板中性面的应力应变来重新表示:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Omega}} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + 2\delta \epsilon_{3\alpha} \sigma_{3\alpha} dx_3 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\delta \epsilon_{\alpha\beta} + \delta \kappa_{\alpha\beta} x_3) \sigma_{\alpha\beta} dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \delta \gamma_{\alpha} \sigma_{3\alpha} dx_3 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} (\delta \epsilon_{\alpha\beta} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx_3}_{N_{\alpha\beta}} + \delta \kappa_{\alpha\beta} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3}_{M_{\alpha\beta}}) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} k \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{3\alpha} dx_3}_{Q_{\alpha}} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \delta \epsilon_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega
\end{aligned}$$

式中 $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ and Q_{α} 分别是平面内应力、力矩和剪切的结果。对于各向同性弹性材料，假设应力分量 $\sigma_{33} = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} + (1-\nu) \epsilon_{\alpha\beta}) = D_{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha} \end{cases}$$

式中 $D_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为四阶弹性张量的分量，并具有以下形式:

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\eta} + \frac{1}{2} (1-\nu) (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma}))$$

应力结果可以使用平面内应变、曲率和剪切应变进一步表示为:

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = h D_{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{\gamma\eta} \\
M_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{h^3}{12} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} \\
Q_{\alpha} &= k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{3\alpha} dx_3 = k \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha} = kGh \gamma_{\alpha}
\end{aligned}$$

此时，厚板的弱形式可以用分部积分法进行化简:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \delta \epsilon_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma_N} \delta u_{\alpha} \bar{T}_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_Q} \delta w \bar{Q} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega \\
&\Rightarrow \int_{\Gamma_N} \delta u_{\alpha} (N_{\alpha\beta} n_{\beta} - \bar{T}_{\alpha}) d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_{\alpha} (N_{\alpha\beta,\beta} + \bar{b}_{\alpha}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} (M_{\alpha\beta} n_{\beta} - \bar{M}_{\alpha}) d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \varphi_{\alpha} (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha}) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Gamma_Q} \delta w (Q_{\alpha} n_{\alpha} - \bar{Q}) d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w (Q_{\alpha,\alpha} + \bar{q}_{\alpha}) d\Omega = 0
\end{aligned}$$

从上述方程可以看出，强形式中关于平面内水平位移的部分与 [平面应力问题](#) 的相同。所以，考虑挠度与转角部分的强形式如下：

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 & \text{in } \Omega \\ Q_{\alpha,\alpha} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\ Q_\alpha n_\alpha = \bar{Q} & \text{on } \Gamma_Q \\ M_{\alpha\beta} n_\beta = \bar{M}_\alpha & \text{on } \Gamma_M \\ \varphi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha & \text{on } \Gamma_\varphi \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma_w \end{cases}$$

数值模拟

在数值模拟中，位移和转角可以用形函数和节点系数来近似：

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}) w_I, \quad \varphi_\alpha^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}) \varphi_{\alpha I}$$

相应的近似应变可以重新表示为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^h &= \begin{Bmatrix} \kappa_{11}^h \\ \kappa_{22}^h \\ 2\kappa_{12}^h \end{Bmatrix} = - \sum_{I=1}^{n_p} \begin{bmatrix} 0 & N_{I,1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,2} \\ 0 & N_{I,2} & N_{I,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_I \\ \varphi_{1I} \\ \varphi_{2I} \end{Bmatrix} = - \sum_{I=1}^{n_p} \mathbf{B}_I^b \mathbf{d}_I \\ \boldsymbol{\gamma}^h &= \begin{Bmatrix} \gamma_1^h \\ \gamma_2^h \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_p} \begin{bmatrix} N_{I,1} & N_I & 0 \\ N_{I,2} & 0 & N_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_I \\ \varphi_{1I} \\ \varphi_{2I} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_p} \mathbf{B}_I^s \mathbf{d}_I \end{aligned}$$

将离散应变代入弱形式，得到以下离散平衡方程：

$$(\mathbf{K}^b + \mathbf{K}^s) \mathbf{d} = \mathbf{f}$$

其中 \mathbf{K}^b 和 \mathbf{K}^s 为刚度矩阵并具有以下分量：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ}^b &= h \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{bT} \mathbf{D} \mathbf{B}_J^b d\Omega \\ \mathbf{K}_{IJ}^s &= \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{sT} \mathbf{D} \mathbf{B}_J^s d\Omega \end{aligned}$$

式中 \mathbf{D} 为 [平面应力弹性矩阵](#)。 \mathbf{f} 为力矢量，它的分量表达式如下：

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_Q} N_I \bar{Q} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} N_I \bar{M} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \bar{q} d\Omega$$

其中：

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \bar{Q} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

混合离散方程

为了缓解由于板厚度减少引起的剪切自锁，引入对剪切实力 Q_α 的近似，近似值与位移和转角无关：

$$Q_\alpha^h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_q} \Psi_K(\mathbf{x}) q_{\alpha K}$$

相应的弱形式和离散平衡方程式如下：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega &= \int_{\Gamma_N} \delta u_{\alpha} \bar{T}_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_Q} \delta w \bar{Q} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega \\ \int_{\Omega} \delta Q_{\alpha} \gamma_{\alpha} d\Omega - \frac{1}{kGh} \int_{\Omega} \delta Q_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^b & \mathbf{K}^{wq} \\ \mathbf{K}^{wqT} & \mathbf{K}^{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

式中 \mathbf{K}^{wq} 和 \mathbf{K}^{qq} 的分量为：

$$\mathbf{K}_{IK}^{wq} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{sT} \Psi_K d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{KL}^{qq} = -\frac{1}{kGh} \int_{\Omega} \Psi_K \Psi_L d\Omega$$

其中 $\mathbf{1}$ 是二阶恒等张量。

自锁约束自由度

阶数 p	n_{dof}	n_b	n_s
1	9	7	2
2	18	12	6
3	30	18	12
4	45	25	20
n	$\frac{3(p+1)(p+2)}{2}$	$\frac{(p+1)(p+6)}{2}$	$p(p+1)$

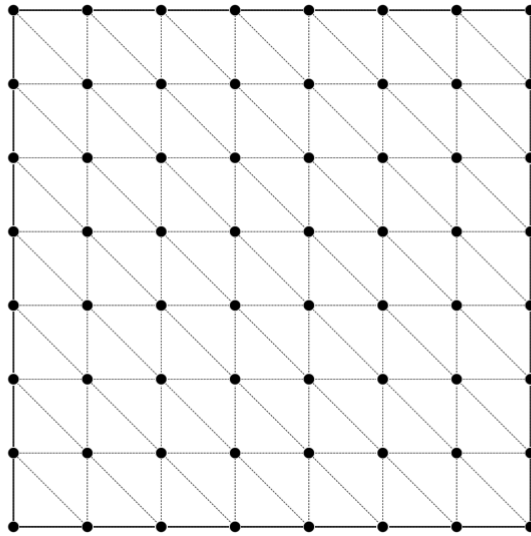
数值算例

1. 分片实验

刚度矩阵必须通过分片实验，才能保证得出正确的结果。采用挠度为一次，转角为常数的厚板分片实验验证弯曲部分刚度矩阵 \mathbf{K}^b 的正确性；采用挠度为二次，转角为一次的厚板分片实验验证剪切部分刚度矩阵 \mathbf{K}^s 和 \mathbf{K}^{wq} 的正确性。分片实验考虑求解域为 $\Omega = (0, 1) \otimes (0, 1)$ 的正方形板，求解域的四边采用罚函数法施加边界条件。分片实验的精确解如下：

$$\begin{cases} w(x, y) = x + y \\ \varphi_1(x, y) = 1 \\ \varphi_2(x, y) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} w(x, y) = x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \\ \varphi_1(x, y) = x + y + 1 \\ \varphi_2(x, y) = x + y + 1 \end{cases}$$

分片实验由 64 个节点进行离散。



采用位移误差 $L_2 - \text{Error}$ 进行分析：

$$L_2 - \text{Error} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (w - w^h)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} w^2 d\Omega}}$$

分片实验结果

		w	φ_1	φ_2
$L_2 - \text{Error}$	fem	3.72×10^{-16}	3.30×10^{-15}	2.64×10^{-15}
$L_2 - \text{Error}$	mix	2.22×10^{-16}	3.20×10^{-15}	2.99×10^{-15}

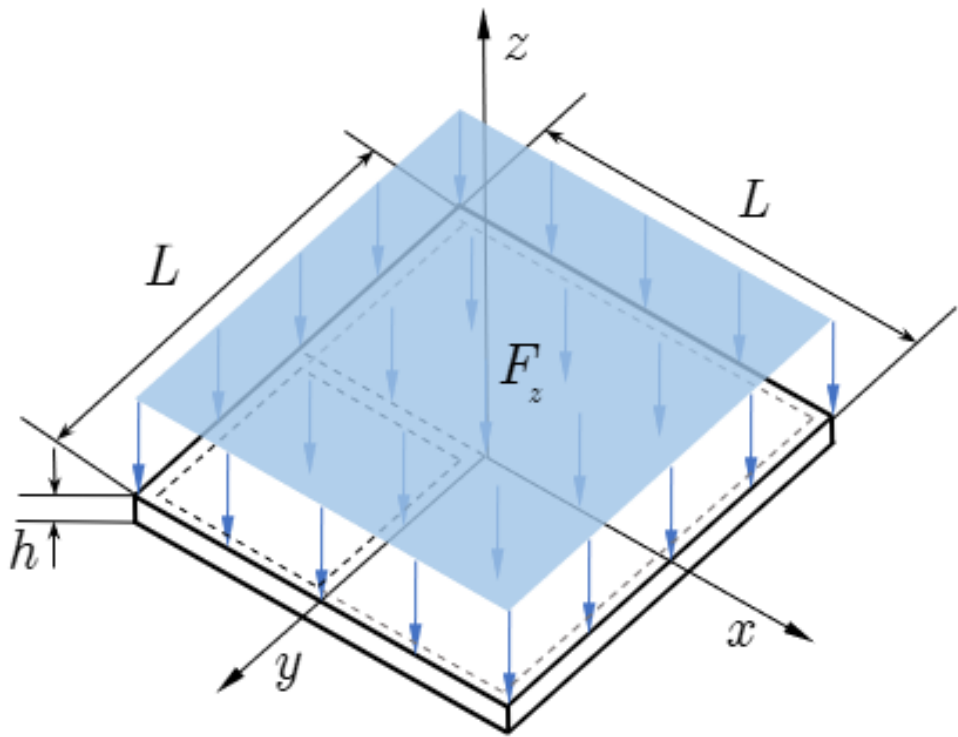
从表中结果可以看出，本方法通过了分片实验。

2. 简支方板问题

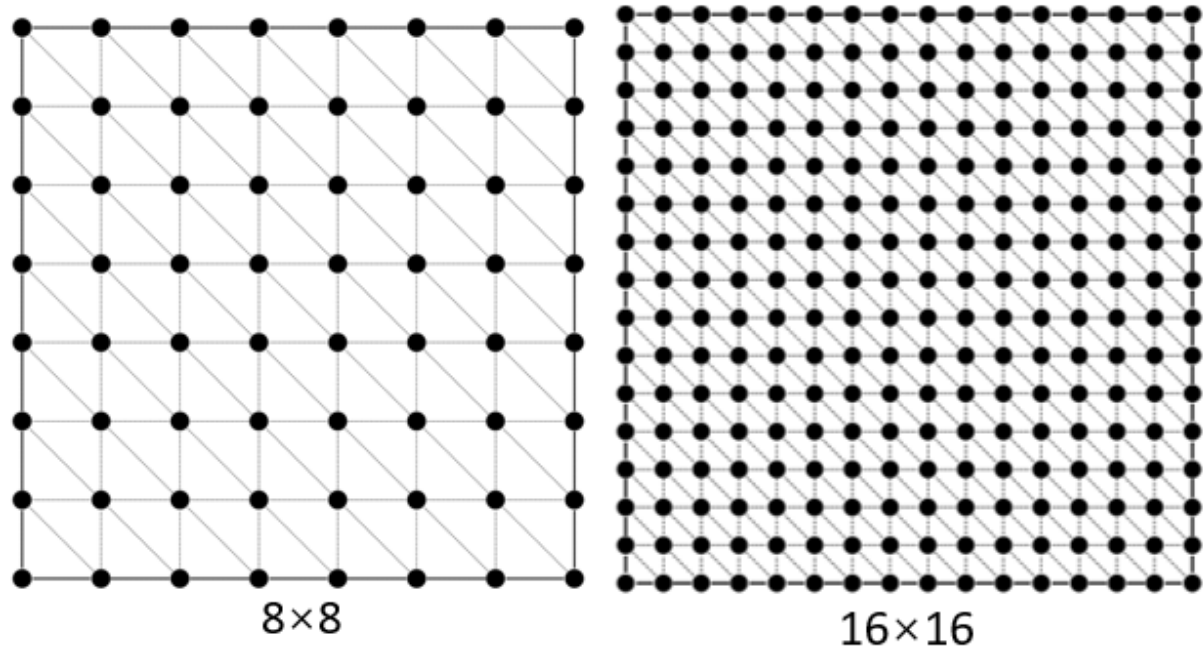
如图所示，简支方板中性面区域为 $\Omega = (0, 1000) \otimes (0, 1000)$ ，此时 Ω 边长 $L = 1000$ ，厚度 $h = 50, 100, 150, 200, 250$ ，材料系数分别为杨氏模量 $E = 10.92$ 、泊松比 $\nu = 0.3$

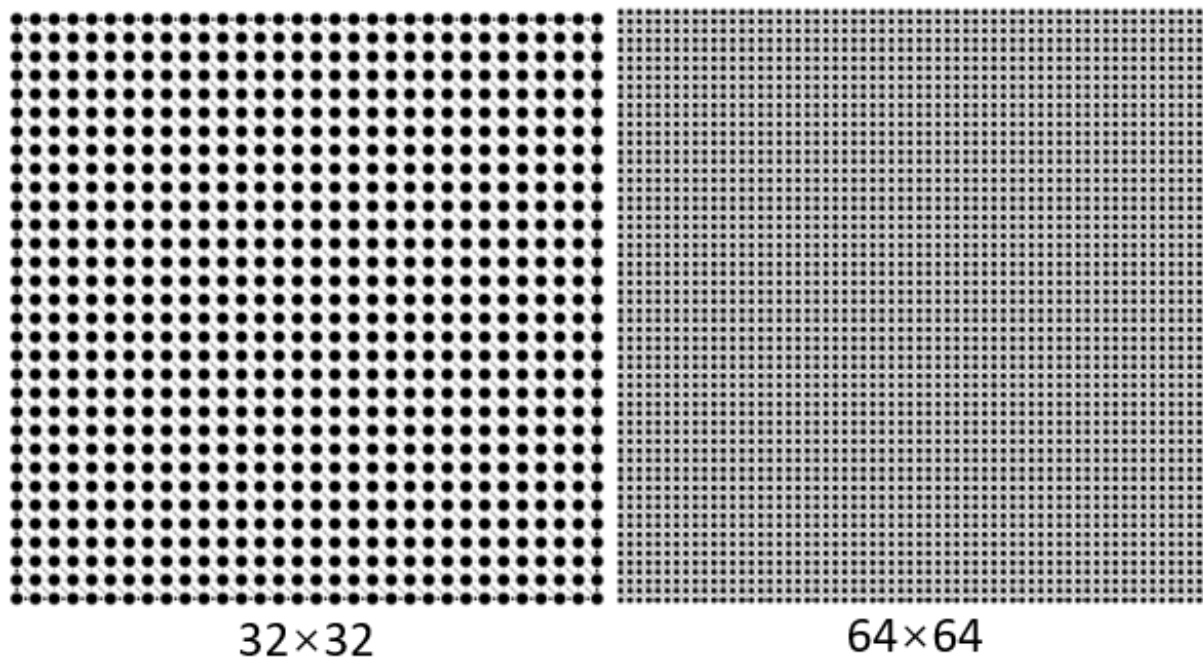
板面分布纵向荷载 $F_z = 1$ ，根据对称性截取左下角 $\frac{1}{4}$ 的方板进行分析，中心处位移的参考解如下表所示：

h	50	100	150	200	250
w_c	4.11	4.268	4.532	4.902	5.377

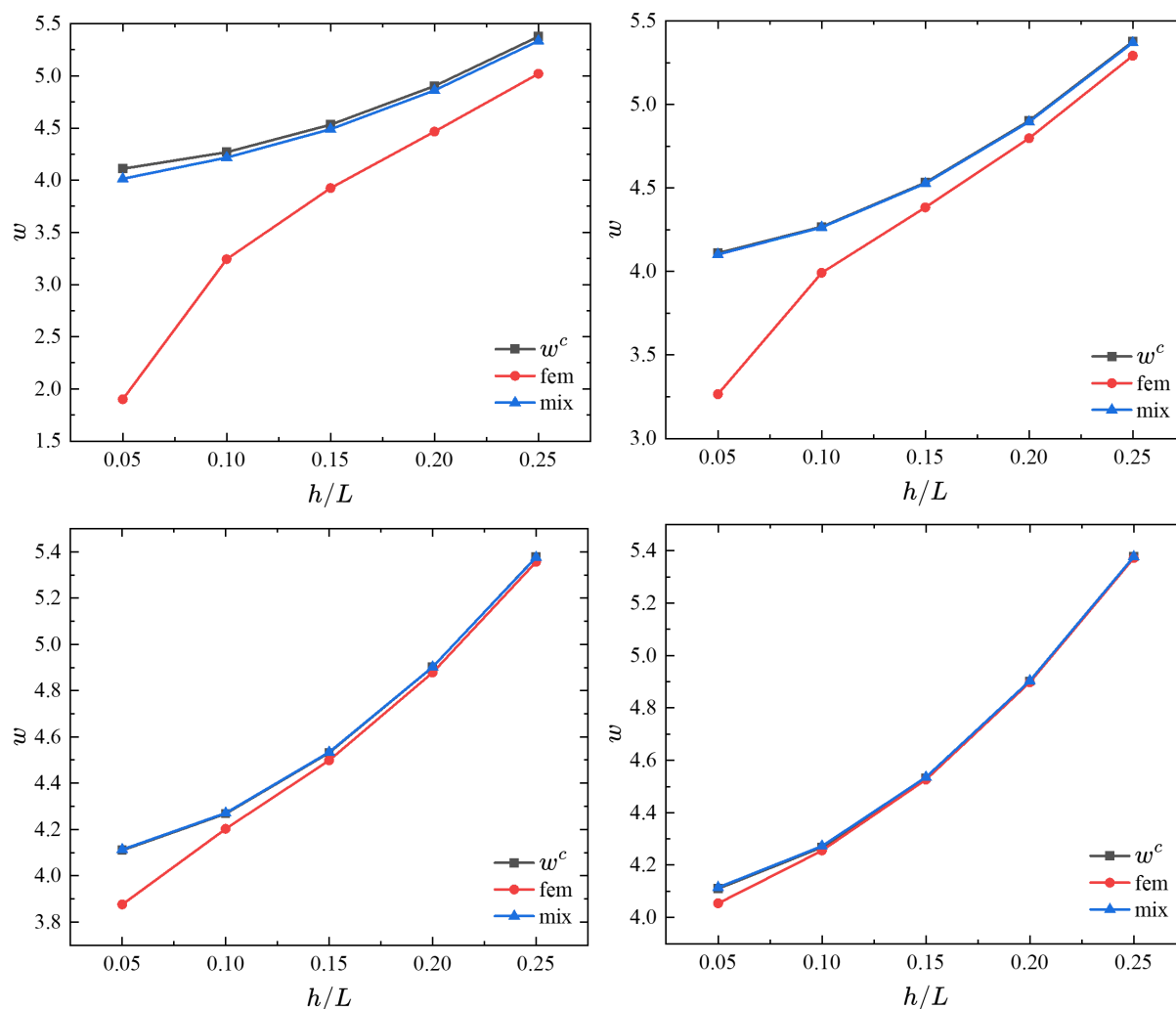


如图采用均布的 8×8 、 16×16 、 32×32 、 64×64 的四个疏密不同的节点进行离散。





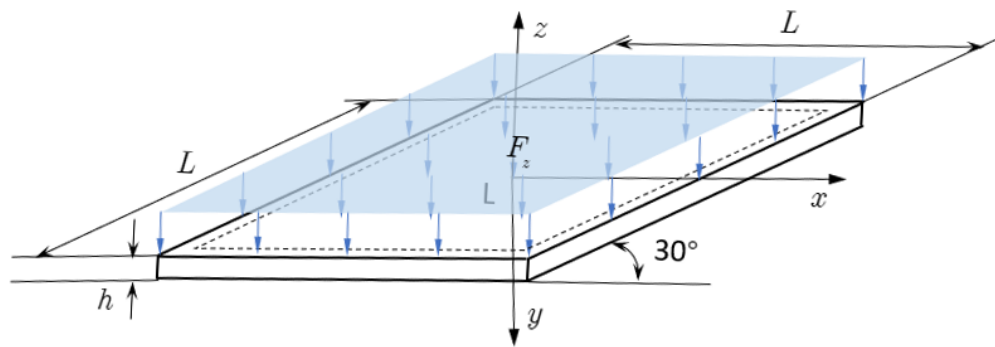
图为简支方板问题分别在四个不同节点下得出的位移与参考解的关系。从图中可以明显看出，由于自锁现象随着厚度的减小传统有限元方法得出的位移精度明显减少，节点数增加位移精度有所提高。而采用有限元无网格混合离散方法得出的位移精度保持不变，可以消除自锁现象。



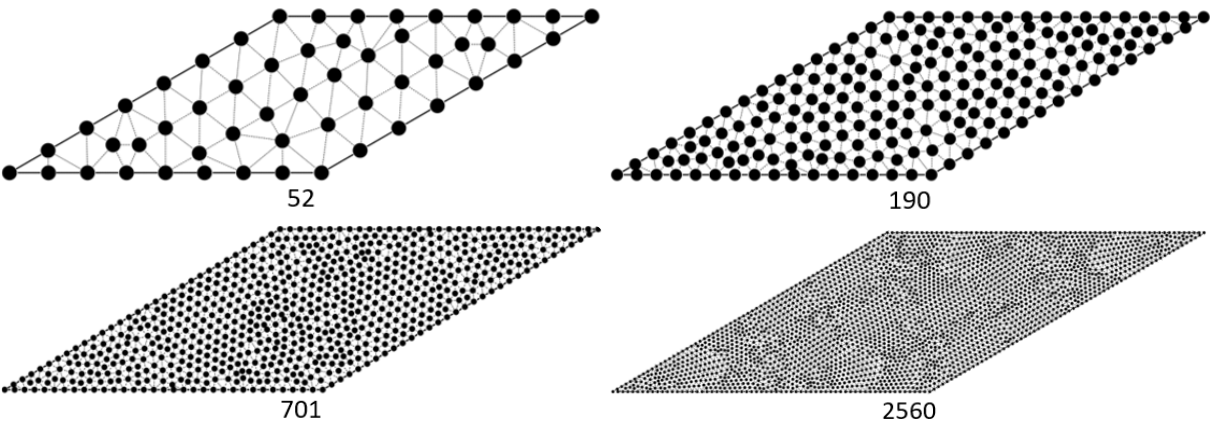
3. 简支急性斜板问题

如图所示简支急性斜板，其中边长 $L = 1000$ 厚度 $h = 0.1、1.0、10$ ，材料系数分别为杨氏模量 $E = 10.92$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 板面分布纵向荷载 $F_z = 1$ ，中心处位移的参考解如下表所示：

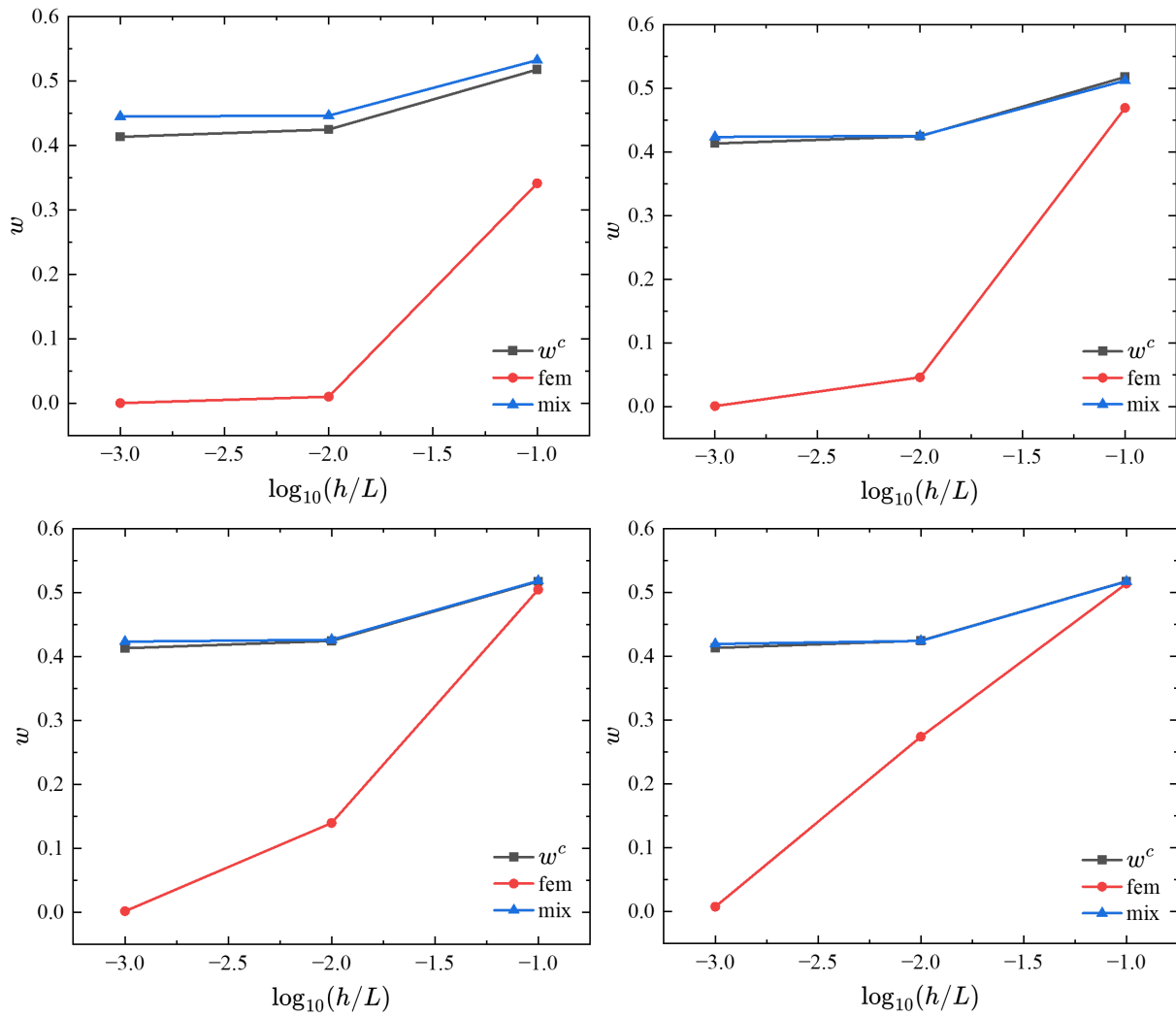
h	0.1	1.0	10
w_c	0.4134	0.4248	0.5177



如图简支急性斜板求解域采用的 52、190、701、2560 的四个疏密不同的节点进行离散。



图为简支急性斜板问题分别在四个不同节点下得出的位移与参考解的关系。从图中可以明显看出，由于自锁现象随着厚度的减小传统有限元方法得出的位移精度明显减少，节点数增加位移精度有所提高。而采用有限元无网格混合离散方法得出的位移精度保持不变，可以消除自锁现象。

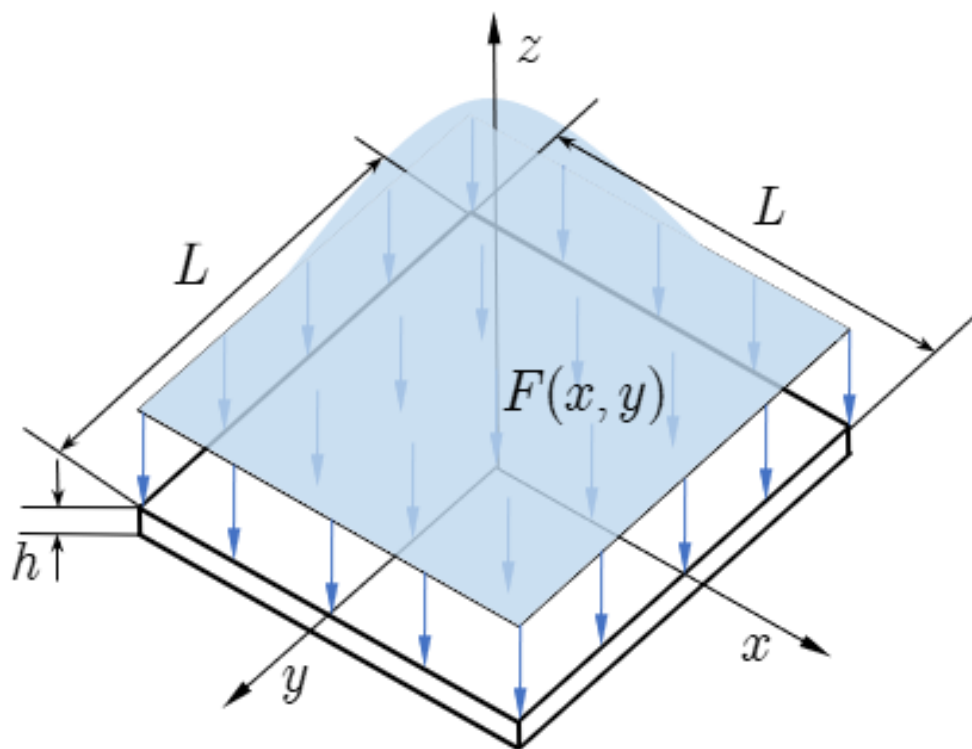


4. 四边固支方板问题

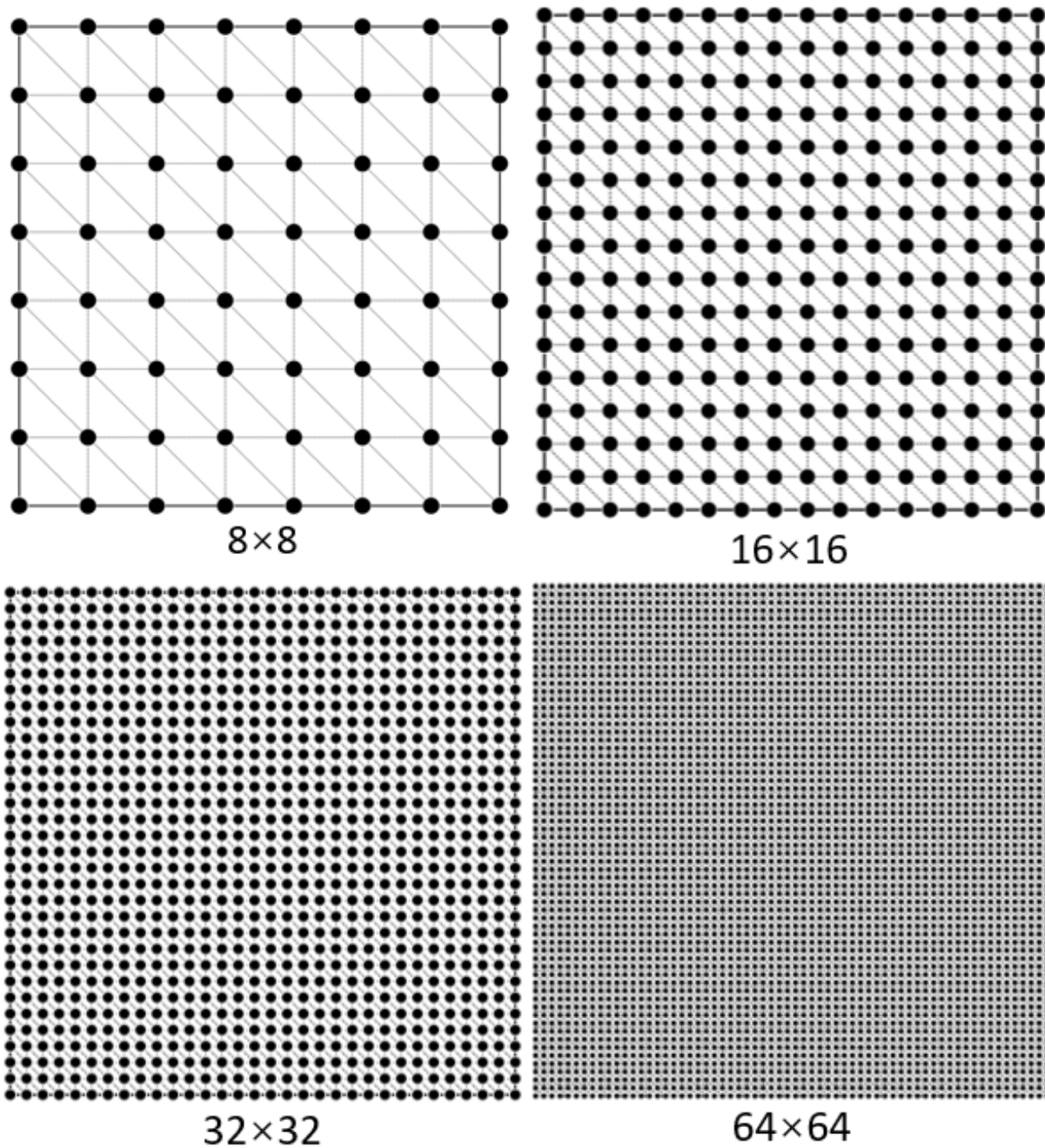
如图所示，简固支方板中性面区域为 $\Omega = (0, 1) \otimes (0, 1)$ ，此时 Ω 边长 $L = 1$ ，厚度 $h = 0.1$ 、 0.01 、 0.001 、 0.0001 、 0.00001 ，材料系数分别为杨氏模量 $E = 10.92 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 板面分布如图所示纵向荷载及精确解：

$$F(x, y) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [12y(y-1)(5x^2-5x+1)(2y^2(y-1)^2+x(x-1)(5y^2-5y+1)) + 12x(x-1)(5y^2-5y+1)(2x^2(x-1)^2+y(y-1)(5x^2-5x+1))]$$

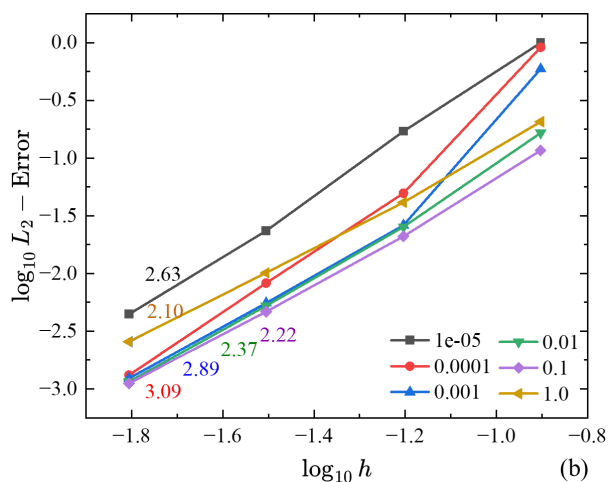
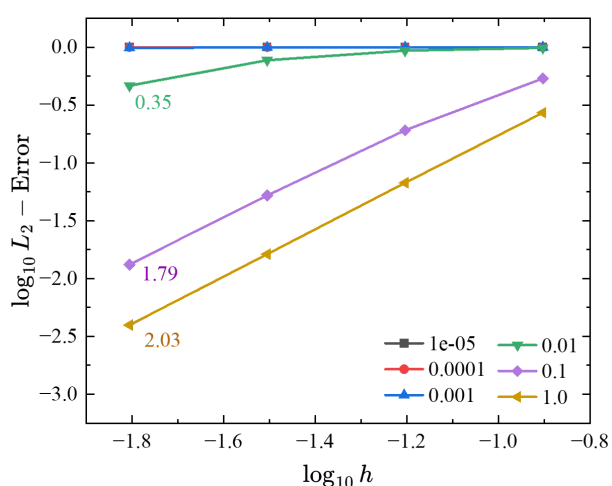
$$w(x, y) = \frac{1}{3}x^3(x-3)^3y^3(y-1)^3 - \frac{2h^2}{5(1-\nu)}(y^3(y-1)^3x(x-1)(5x^2-5x+1) + x^3(x-1)^3y(y-1)(5y^2-5y+1))$$



如图固支方板求解域采用均布的 8×8 、 16×16 、 32×32 、 64×64 的四个疏密不同的节点进行离散。

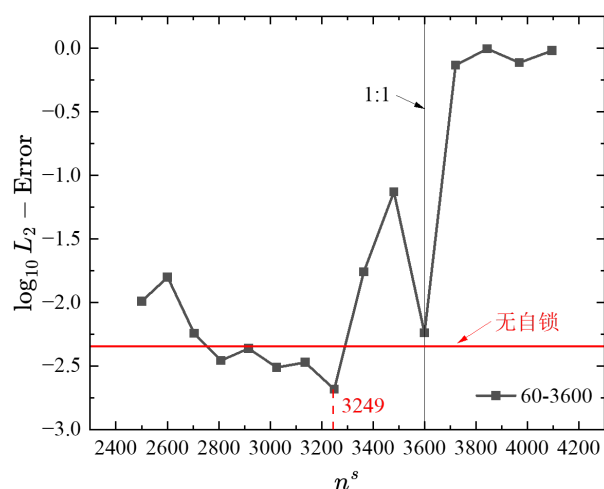
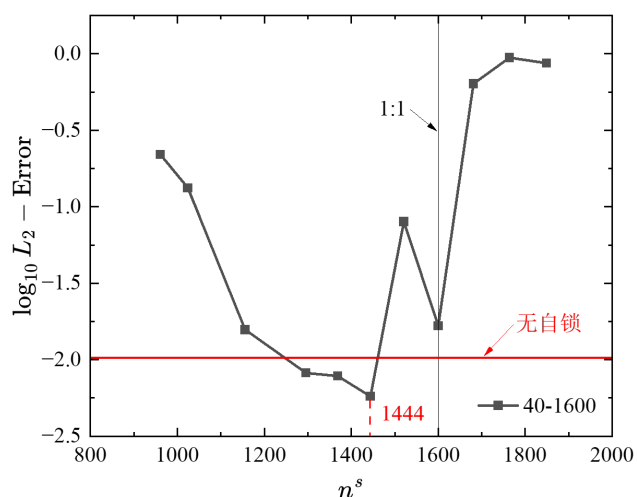
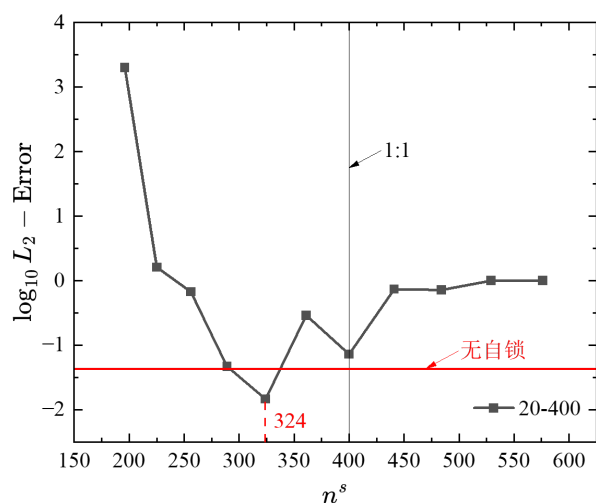


如图为固支方板问题在不同厚度下有限元方法和有限元无网格混合离散方法的位移误差对比图。从图中可以明显看出，当厚度为 1.0 时有限元方法的位移收敛率为 2.03，当厚度逐渐减少有限元方法计算精度明显下降。而有限元无网格混合离散方法位移收敛始终大于 2.03。



如图使用有限元无网格混合离散方法，在厚度为 $h = 0.00001$ 通过改变节点的数量验证自锁自由度的规律。分别取 $n_b = 400$ 、1600、3600，改变 n^s 的节点数量求出位移误差，理论约束自由度数量如下表。

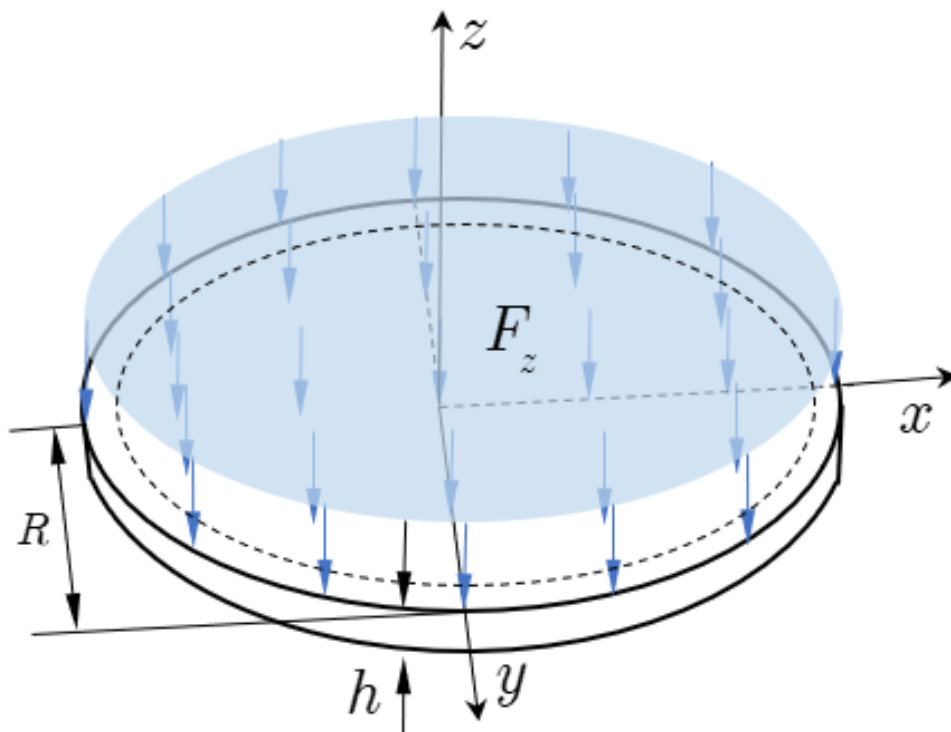
n_{dof}	p	n_s
400	14.8375	234.99
1600	31.1636	1002.33
3600	47.4923	2303.011



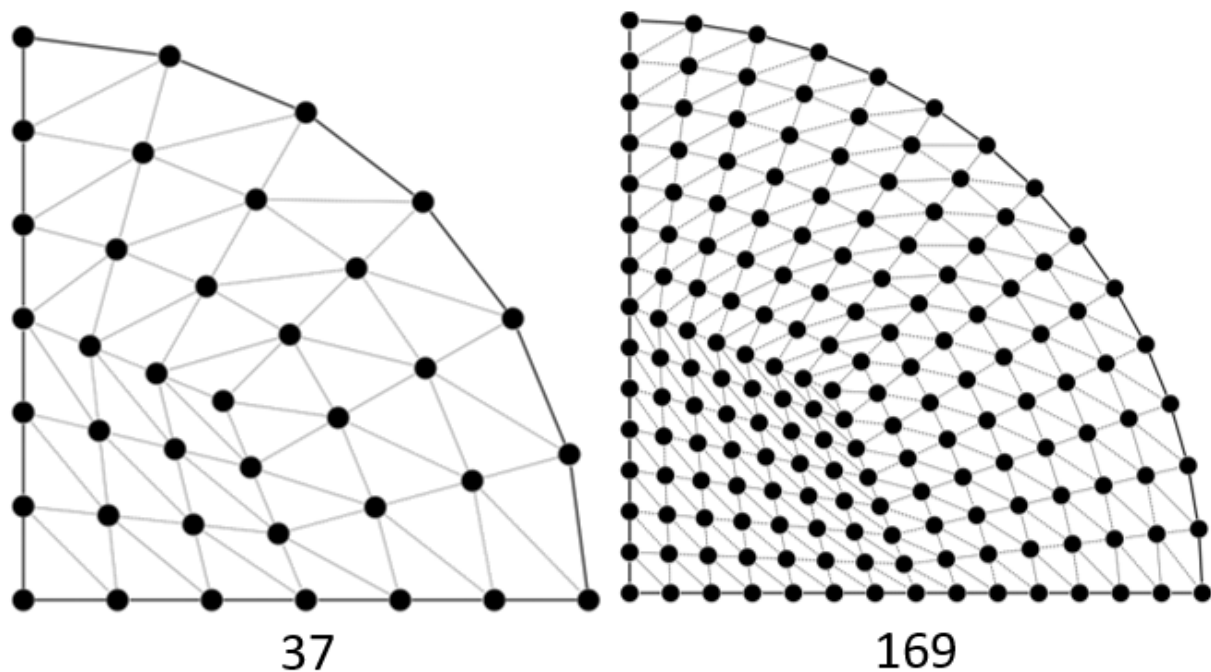
5. 简支圆板问题

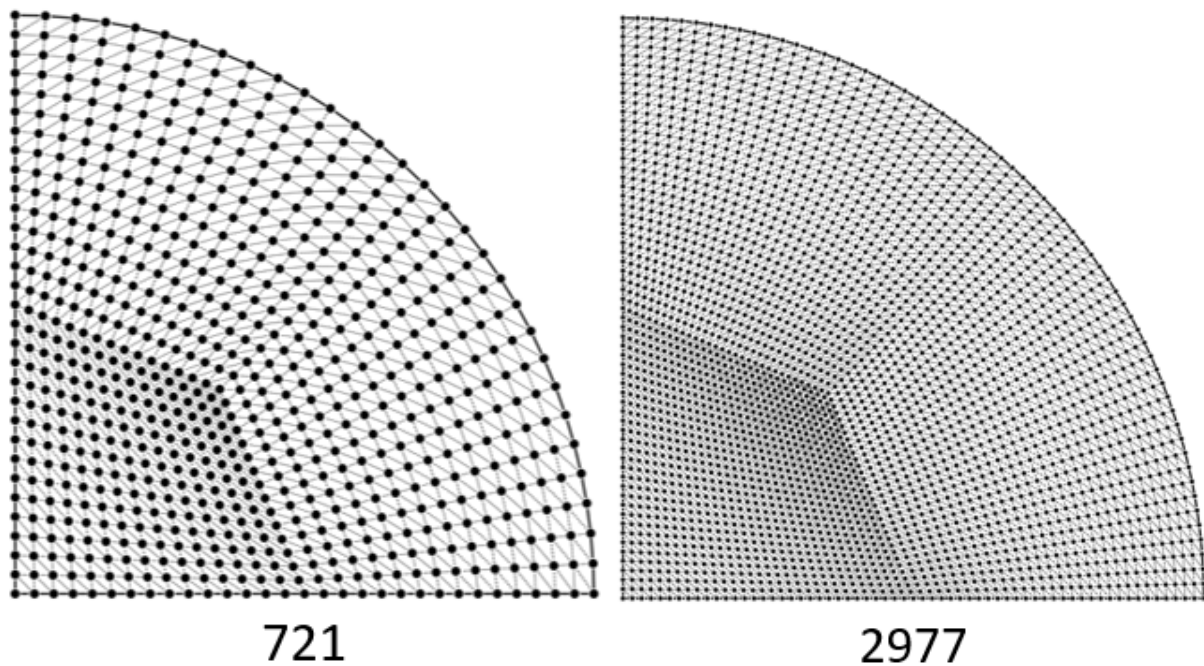
如图所示简支圆板，其中半径 $R = 5$ 厚度 $h = 0.1、1.0、5$ ，材料系数分别为杨氏模量 $E = 10.92$ 、泊松比 $\nu = 0.3$ 板面分布纵向荷载 $F_z = 1$ ，根据对称性截取 $\frac{1}{4}$ 圆板进行分析，中心处位移的精确解如下表所示：

h	0.1	1.0	2.5
w_e	39831	49.299	3.262

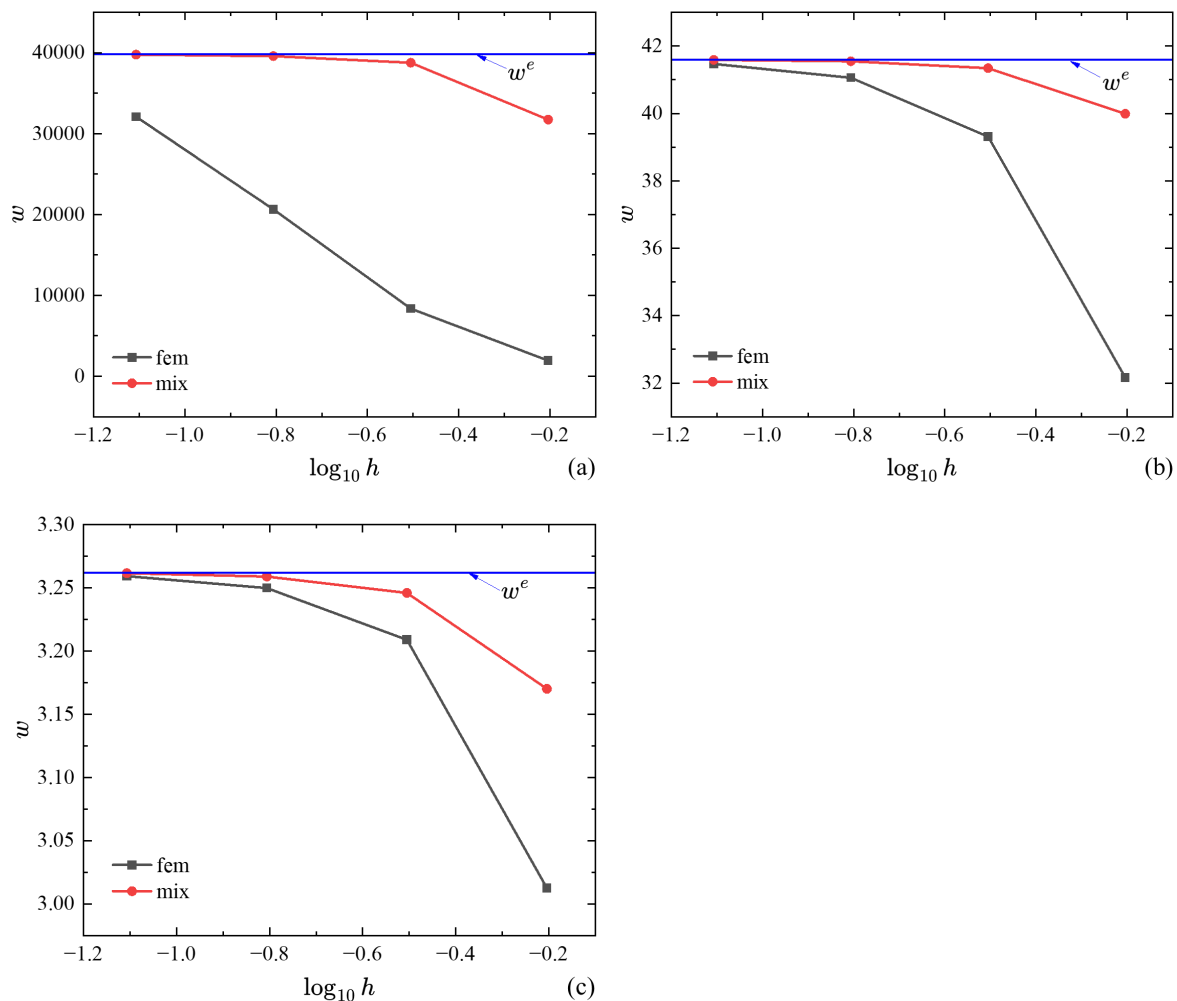


如图简支圆板求解域采用的 37、169、721、2977 的四个疏密不同的节点进行离散。





如图为简支圆板问题，在厚度不同时得有限元方法和有限元无网格混合离散方法得位移误差对比图，从图中可以看出厚度为 0.1 时有限元方法位移误差大；有限元无网格混合离散方法在三个厚度中没有明显变化。



如图使用有限元无网格混合离散方法，在厚度为 $h = 0.1$ 通过改变节点的数量验证自锁自由度的规律。分别取 $n_b = 217$ 、1141、2611，改变 n^s 的节点数量求出位移误差，理论约束自由度数量如下表。

n_{dof}	p	n_s
217	10.5381	121.59
1141	26.0847	706.49
2611	40.2243	1,658.21

