

学校代码: 10385

分类号: \_\_\_\_\_

研究生学号: \_\_\_\_\_

密 集: \_\_\_\_\_



华侨大学  
HUAQIAO UNIVERSITY

# 硕士专业学位论文

自稳定有限元无网格混合离散分析方法及其在自锁问题中的应用

作 者 姓 名: \_\_\_\_\_

指 导 教 师: \_\_\_\_\_

合 作 教 师: \_\_\_\_\_

实 践 教 师: \_\_\_\_\_

专业学位类别: 工程硕士

专业学位领域: 土木水利

研 究 方 向: 结构体系创新与工程应用

所 在 学 院: 土木工程学院

论文提交日期: 二〇二五年三月 XX 日

## 摘 要

$\text{\LaTeX}$  是一种强大的排版系统，该系统提供了丰富的功能，包括自动编号、交叉引用、数学公式排版、参考文献管理等。它还支持多种文档类、宏包和模板，使用户能够根据自己的需求定制文档的外观和格式，广泛用于撰写学术论文、科技文档和出版物。本文主要以前期准备、图表设置、使用 Zotero 管理参考文献、 $\text{\LaTeX}$  部分所需包介绍、附录和参考格式等环节进行介绍。首先在前期准备中介绍了 Git 的相关内容以及 VS Code 的配置。此外，还介绍了文件和标签的命名规则，为编写论文的命名提供参考，并对在  $\text{\LaTeX}$  中的图表设置以例子详细说明如何在论文中插入和设置图表，涵盖了图片的插入、标注、引用和交叉引用等方面的技巧和方法，也对如何使用 Zotero 管理参考文献进行了介绍说明。最后，在附录部分给出了参考格式的理解说明。通过阅读本文，读者将获得关于前期准备、图表设置、参考文献管理、 $\text{\LaTeX}$  必需包、附录和参考格式的全面指导，有助于顺利完成论文写作和格式规范要求。

**关键词：**  $\text{\LaTeX}$ ；模板学习



## 目 录

第 1 章 引言 .....	1
1.1 选题背景及意义 .....	1
1.2 国内外研究历史及现状 .....	1
1.3 本文主要内容 .....	1
第 2 章 体积自锁问题 .....	3
2.1 体积不可压材料 .....	3
2.2 免体积自锁方案 .....	5
2.2.1 罚函数法与缩减积分方案 .....	5
2.2.2 拉格朗日乘子法与混合离散方案 .....	7
2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性 .....	9
2.3 免体积自锁条件 .....	10
2.3.1 体积约束比 .....	10
2.3.2 LBB 稳定性条件 .....	12
2.4 小结 .....	13
第 3 章 最优约束比例 .....	15
3.1 LBB 稳定系数估计 .....	15
3.2 多项式约束数 .....	17
3.3 有限元无网格混合离散 .....	17
3.3.1 再生核近似 .....	17
第 4 章 体积不可压问题实例 .....	21
第 5 章 剪切自锁问题 .....	23
参考文献 .....	25



## 第 1 章 引言

- 1.1 选题背景及意义
- 1.2 国内外研究历史及现状
- 1.3 本文主要内容



## 第2章 体积自锁问题

本章首先介绍了体积不可压材料的弹性力学问题，及其伽辽金求解过程中存在的体积自锁现象。针对该问题，介绍了罚函数型和拉格朗日乘子型两类解决方法，并讨论了这两类方法的等价性。同时，阐述了如何衡量体积自锁程度，包括体积约束比和 LBB 稳定性条件。

### 2.1 体积不可压材料

考虑如图2.1所示维度为  $n_d$  具有边界  $\Gamma$  的体积不可压材料弹性体  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_d}$ ，其中  $\Gamma_t$  和  $\Gamma_g$  分别表示其自然边界和本质边界，且  $\Gamma_t \cup \Gamma_g = \Gamma$ ,  $\Gamma_t \cap \Gamma_g = \emptyset$ 。该问题相应的强形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma}$  为应力张量，对于各向同性线弹性材料，其本构关系表示为：

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 3\kappa \boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

式中  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}^d$  为应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的体积应变和偏应变部分：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) = \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^v, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^d = 0 \quad (2.3)$$

其中， $\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  是二阶恒等张量。 $\kappa, \mu$  分别为体积模量和剪切模量，其与杨氏模量  $E$  和泊松比  $\nu$  之间存在如下关系式：

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

$\mathbf{b}$  为  $\Omega$  中的体力， $\mathbf{t}, \mathbf{g}$  分别为自然边界  $\Gamma_t$  和本质边界  $\Gamma_g$  上的牵引力和位移。

对于体积不可压缩材料，其泊松比  $\nu \rightarrow 0.5$ 。在这种情况下，式(2.4)中体积模量  $\kappa \rightarrow \infty$ ，而剪切模量  $\mu$  的变化相对较小，从而导致  $\kappa \gg \mu$ 。根据体积不可压缩材料本构关系(2.2)，当  $\kappa \rightarrow \infty$  时，体积应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  被约束，导致体积的变化  $\nabla \cdot \mathbf{u} \rightarrow 0$ 。



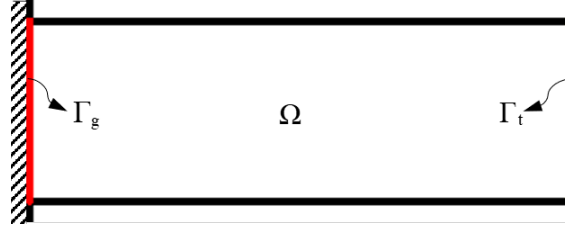


图 2.1 不可压缩材料弹性体模型

采用伽辽金法进行求解时，其相对应的伽辽金弱形式为：位移  $\mathbf{u} \in V$  满足

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \delta \boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (2.5)$$

其中，空间  $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_g\}$ 。  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^v$  和  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^d$  分别为  $\delta \mathbf{u}$  表示的体积应变和偏应变的变分。

在传统有限元法中，整个求解域  $\Omega$  可离散为一组节点  $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_u}$  表示<sup>[1]</sup>，其中  $n_u$  是位移节点的数量。位移  $\mathbf{u}$  及其变分  $\delta \mathbf{u}$  可通过  $\mathbf{x}_I$  处的节点系数和形函数进行近似：

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I \quad (2.6)$$

其中  $N_I$  和  $\mathbf{u}_I$  分别为节点  $\mathbf{x}_I$  处的形函数和节点系数张量。

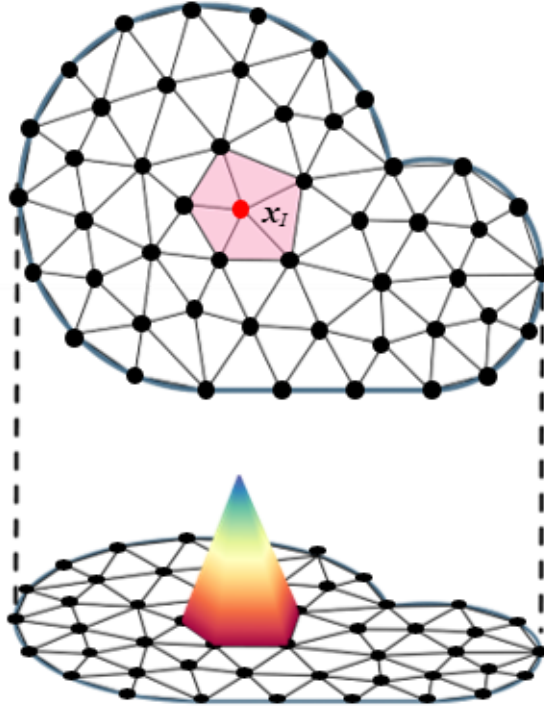


图 2.2 有限元离散示意图

将式(2.6)代入到弱形式(2.5)中可得下列的里兹-伽辽金问题：近似位移  $\mathbf{u}_h \in V_h$  满足

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\epsilon}_h^d : \boldsymbol{\epsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \delta \boldsymbol{\epsilon}_h^v : \boldsymbol{\epsilon}_h^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h \quad (2.7)$$

其中近似空间  $V_h \subseteq V$ ,  $V_h = \{\mathbf{v}_h \in (\text{span}\{N_I\}_{I=1}^{n_u})^{n_d} | \mathbf{v}_h = \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_g\}$ 。根据  $\delta \mathbf{u}_h$  的任意性，等式两边同时消除  $\delta \mathbf{u}_I$ ，上述方程可以简化为如下离散控制方程：

$$(\mathbf{K}^d + \mathbf{K}^v) \mathbf{d}^u = \mathbf{f} \quad (2.8)$$

其中， $\mathbf{d}^u$  是包含  $\mathbf{u}_I$  的系数向量， $\mathbf{K}^v$  为主应力刚度矩阵， $\mathbf{K}^d$  为偏应力刚度矩阵， $\mathbf{f}$  为力向量，其分量分别为：

$$\mathbf{K}_{IJ}^v = 3\kappa \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{vT} \mathbf{B}_J^v d\Omega \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^d = 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{dT} \mathbf{B}_J^d d\Omega \quad (2.10)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} N_I \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \mathbf{b} d\Omega \quad (2.11)$$

式中  $\mathbf{B}_I$  为形函数梯度矩阵，在二维问题中  $\mathbf{B}_I$  具有如下表达式：

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

## 2.2 免体积自锁方案

### 2.2.1 罚函数法与缩减积分方案

由式(??)可知，对于体积不可压材料，当外力向量  $\mathbf{f}$  具有一定的数值时， $\kappa \rightarrow \infty$  将导致主应力刚度矩阵  $\mathbf{K}^v$  中的所有模态也趋向零。此时，体积刚度矩阵  $\mathbf{K}^v$  可作为罚函数项将主应力刚度矩阵中所有模态约束住，体积模量  $\kappa$  为其中的罚因子。使用传统有限元法进行求解时，由于离散的有限元近似阶次较低，导致过多的位移自由度受到体积约束的限制，位移解将远小于实际情况，即出现体积自锁现象。

引入数值积分实现体积刚度矩阵(2.9)，有：

$$\mathbf{K}_{IJ}^v = 3\kappa \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G=1}^{n_g} \mathbf{B}_I^{vT}(\mathbf{x}_G) \mathbf{B}_J^v(\mathbf{x}_G) w_G \quad (2.13)$$

式中,  $\mathbf{x}_G$  和  $w_G$  分别为积分点的位置和权重。  $n_e$  是单元的数量,  $n_g$  是每个单元中积分点的数量。当引入数值积分后,  $\mathbf{K}^v$  将要求体积约束在所有数值积分点处满足,  $\text{rank}(\mathbf{K}^v)$  将受限于数值积分点数量:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^v) \leq n_e \times n_g \quad (2.14)$$

FIXME 由式(2.14)可知, 减少用于体积刚度矩阵得积分点数量可以减少体积自锁约束。如图2.3所示的经典二维四边形单元 (Quad4) 缩减积分方案为例, Quad4 单元需要采用  $2 \times 2$  高斯积分点以保证数值精度, 称之为完全积分方案。为了缓解体积自锁现象, Quad4 单元在对主应力刚度矩阵  $\mathbf{K}^v$  进行数值积分时, 采用 1 点高斯积分作为缩减积分方案。此时, 被约束的自由度个数将被单元数  $n_e$  限制:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^v) \leq n_e \quad (2.15)$$

需要指出在有限元离散中, 单元数量  $n_e$  将原小于自由度个数  $2n_u$ 。如单边单元数为  $n$  的正方形均布有限元离散, 此时的单元数量为  $n_e = n^2$ , 而位移自由度个数为  $2n_u = 2(n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$ ,  $n_e < 2n_u$ , 体积自锁现象得以缓解。

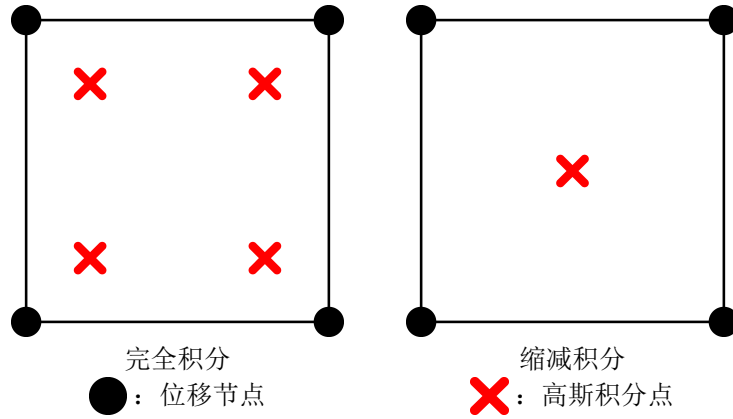


图 2.3 Quad4 单元缩减积分方案

TODO 相反, 为保证整体刚度矩阵的正定性, .....

由上述例子可知, 缩减积分方案通过减少体积刚度矩阵离散单元的积分点数量, 减少了体积约束自由度, 缓解体积自锁现象。但是低阶高斯积分将伴随着数值积分精度不足, 引起数值计算结果振荡和精度下降。

### 2.2.2 拉格朗日乘子法与混合离散方案

施加约束的方式除了传统罚函数法外，常用的方法还有拉格朗日乘子法。对于体积自锁问题，将压力  $p$  作为拉格朗日乘子独立变量，可以得到拉格朗日乘子型体积约束施加方案，相对应的强形式中增加了压力  $p$  与体积应变  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  之间的约束：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (2.16)$$

式中应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  采用两个变量表示：

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = p\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) \quad (2.17)$$

其中  $p \in Q$ ,  $Q = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\}$ 。此时，能量泛函具有位移  $\mathbf{u}$  压力和  $p$  两个变量，分别对两变量进行变分，可得相对应的伽辽金弱形式为：位移  $\mathbf{u} \in V$ , 压力  $p \in Q$  满足

$$\begin{aligned} a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\delta \mathbf{u}, p) &= f(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned} \quad (2.18)$$

式中， $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  为双线性算子， $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  为线性算子，它们具有以下形式：

$$a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \nabla^s \mathbf{u} d\Omega \quad (2.19)$$

$$b(\delta \mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} p d\Omega \quad (2.20)$$

$$f(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (2.21)$$

采用伽辽金法进行求解时，位移  $\mathbf{u}$  和压力  $p$  双变量可以采用不同的离散方式进行近似，形成混合离散框架。近似的位移  $u_h$  和压力  $p_h$  及其变分可表示为：

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I \quad (2.22)$$

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) p_K, \quad \delta p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) \delta p_K \quad (2.23)$$

式中,  $n_p$  分别为压力节点的总数,  $p_K$  为压力节点系数,  $\Psi_K$  为离散  $p_h$  的形函数。

根据  $\delta \mathbf{u}_h$  和  $\delta p_h$  的任意性, 式(2.18)可得到如下离散控制方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{up} \\ (\mathbf{K}^{up})^T & \mathbf{K}^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^u \\ \mathbf{d}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

式中,  $\mathbf{K}^{uu} = \mathbf{K}^d$ ,  $\mathbf{K}^{up}$  为刚度矩阵中和位移、压力都有关的部分。  $\mathbf{K}^{pp}$  为刚度矩阵中只和压力相关的部分, 其分量分别为:

$$\mathbf{K}_{IJ}^{up} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \Psi_J d\Omega \quad (2.25)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{pp} = -\frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \Psi_I^T \Psi_J d\Omega \quad (2.26)$$

为统计约束的自由度个数, 将离散控制方程式(2.24)进行变换。由式(2.24)可将  $\mathbf{d}^p$  采用  $\mathbf{d}^u$  表示:

$$\mathbf{d}^p = (\mathbf{K}^{pp})^{-1} (\mathbf{K}^{up})^T \mathbf{d}^u \quad (2.27)$$

将上式代入到式(2.24)的第一式中可得:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\mathbf{K}^{uu})}_{\mathbf{K}^d} + \underbrace{\mathbf{K}^{up} (\mathbf{K}^{pp})^{-1} (\mathbf{K}^{up})^T}_{\tilde{\mathbf{K}}^v} \mathbf{d}^u = \mathbf{f} \\ \Rightarrow & (\mathbf{K}^d + \tilde{\mathbf{K}}^v) \mathbf{d}^u = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.28)$$

为保证积分精度, 混合离散方案均采用完全积分进行数值积分, 且考虑离散控制方程(2.24)中整体刚度矩阵的正定性,  $\mathbf{K}^{uu}$ 、 $\mathbf{K}^{pp}$  为满秩矩阵。因此, 结合式(2.28)可得混合离散方案中的位移自由度  $\text{rank}(\mathbf{K}^d)$ 、压力自由度  $\text{rank}(\tilde{\mathbf{K}}^v)$  分别为:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^d) = n_d \times n_u \quad (2.29)$$

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{K}}^v) = \min(\text{rank}(\mathbf{K}^{up}), \text{rank}(\mathbf{K}^{pp})) = n_p \quad (2.30)$$

以图2.4所示的常用于免自锁的 Q4P1 单元混合离散方案为例, Q4P1 单元由四个位移节点和一个压力节点组成。图中单个单元的位移自由度为:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^d) = 2 \times 4 = 8 \quad (2.31)$$

压力自由度为:

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{K}}^v) = 1 \quad (2.32)$$

由上述例子可知, 混合离散方案依附单元布置不同的位移节点和压力节点, 减少了压力节点的数量从而减少了位移自由度的个数, 缓解体积自锁现象。

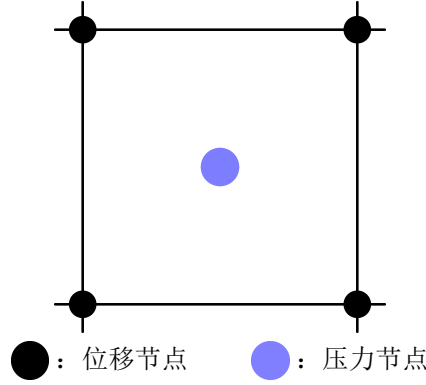


图 2.4 Q4P1 单元混合离散方案

### 2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性

由上述小节可知，罚函数型和拉格朗日乘子型缓解体积自锁方案均可以达到相类似的效果，两者也可通过数值积分法的等效投影证明两类方法的等价性。从拉格朗日乘子法的离散方程(2.28)第二式中可以看出，压力  $p_h$  的解是  $3\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}_h$  的一个正交投影。令  $\mathcal{P}_h$  为正交投影算子，满足：

$$(q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{u}_h) = (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h), \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.33)$$

其中， $(\bullet, \bullet)$  为内积算子。为表示方便，可将投影后的位移散度写作  $p_h = \mathcal{P}_h \mathbf{u}_h = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h$ 。且有  $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h \in \text{Im} \mathcal{P}_h$ ，其中  $\text{Im} \mathcal{P}_h \in Q_h$  为  $\mathcal{P}_h$  的相空间<sup>[2]</sup>。此时，式(2.33)可改写为：

$$\int_{\Omega} q_h (\nabla \cdot \mathbf{u}_h - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h) d\Omega = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.34)$$

将上式代入弱形式(2.24)中，其主应力部分可转化为：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h p_h d\Omega &= \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h - \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h) p_h d\Omega}_0 + \int_{\Omega} \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \underbrace{p_h}_{\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

里兹-伽辽金变分方程变为：位移  $\mathbf{u}_h \in V_h$  满足

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h \quad (2.36)$$

与此同时对于罚函数法，数值积分也可以被视作一种投影。设  $\varrho_i$  为正交多

项式满足：

$$\int_{\Omega_C} \varrho_i \varrho_j d\Omega = \begin{cases} w_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.37)$$

正交插值  $\mathcal{T}^k : V_h \rightarrow W^k$ ，其中  $W^k$  是由  $k$  个正交多项式构成的插值空间：

$$W^k := \text{span}\{\varrho_i\}_{i=1}^k \quad (2.38)$$

对于传统高斯积分方案， $\varrho_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ ， $\mathbf{x}_j$  是积分点的位置。体积应变可以通过正交插值法表示为：

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \approx \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{G=1}^{n_g} \varrho_G(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) = \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \quad (2.39)$$

而积分点被视为插值系数。虽然积分点的总数  $n_g$  低于完全积分，这意味着  $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$  投影到子空间。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\Omega &= \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G,L=1}^{n_g} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_L) \int_{\Omega} \varrho_G \varrho_L d\Omega \\ &= \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G=1}^{n_g} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) J_C w_G \end{aligned} \quad (2.40)$$

通过对比式(2.40)和式(2.35)，罚函数法实际上与拉格朗日乘子法等价，两种方法都可以用投影的方式来描述。缩减积分方案与混合离散方案调整体积自由度的方法也等价，即  $n_g = n_p$

## 2.3 免体积自锁条件

### 2.3.1 体积约束比

从上文介绍的两种方法可知，调整体积约束自由度可以免体积自锁。相关的结论 Hughes 已经做出了总结<sup>[1]</sup>，并提出了约束比的概念。约束比是用来衡量变量间的约束程度的重要指标。对于体积不可压问题而言，约束比定义为位移总自由度与压力总自由度的比值。在理想情况下，最优约束比应与相应的偏微分控制方程一致。

$$r = \frac{n_d \times n_u}{n_p}, \quad \begin{cases} r > n_d & \text{过少的约束} \\ r = n_d & \text{最优} \\ r < n_d & \text{过多的约束} \end{cases} \quad (2.41)$$

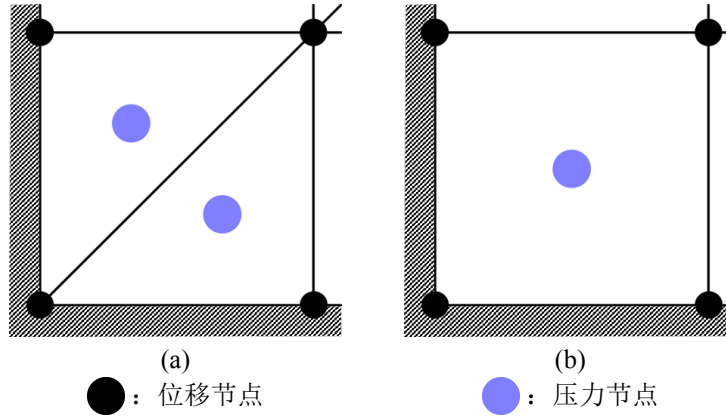


图 2.5 二维位移压力单元示例

在二维情况下，不可压问题涉及两个位移控制方程和一个压力控制方程，因此最优约束比为 2。当约束比小于 2 时会出现体积自锁的倾向。当约束比大于 2 时可能会导致压力计算出现较大误差。图 2.5 为两个不同的二维单元混合离散方案，图中阴影部分为边界条件，边界上节点自由度均受到约束。

图 2.5(a) 为线性位移-常数压力三角形单元 (T3P1)，它的约束比为：

$$r = \frac{2 \times n_u}{n_p} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \quad (2.42)$$

表明此单元体积约束过多，会产生体积自锁，与实际情况一致。

图 2.5(b) 为双线性位移-常数压力四边形单元 (Q4P1)，约束比为：

$$r = \frac{2 \times n_u}{n_p} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \quad (2.43)$$

此单元满足最优约束比，能够缓解体积自锁。

从上述分析来看，Hughes 对约束比的总结只是一种启发式手段，并不能确保单元组合能够缓解自锁现象。它主要作为一种便捷的工具来评估单元是否有缓解自锁的潜在能力，在全面评估单元性能时，还需要综合考虑其它相关因素。对于具有相同数量位移和压力节点的经典单元，尽管其约束比为最优，但在实际应用中仍会出现体积自锁问题。尽管其它满足最优约束比的单元可以在一定程度上缓解体积自锁现象，但它们并不一定能满足 LBB 稳定性条件。例如图 2.5(b) Q4P1 单元就不满足 LBB 稳定性条件，压力的解出现了明显的振荡现象，这种现象通常被称为伪压力模式或应力棋盘模式。



### 2.3.2 LBB 稳定性条件

Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi(LBB) 条件, 也被称为 inf-sup 条件<sup>[3-4]</sup>, 是对免自锁方法更为精确的要求。这一条件基于混合离散框架构建, 当满足 inf-sup 条件时, 可以确保混合方程的准确性和稳定性。

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(q_h, \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \beta > 0 \quad (2.44)$$

其中  $\beta$  为与单元尺寸  $h$  无关的常数。

建立特征值问题<sup>[5]</sup>可以数值验证离散方案是否通过满足 inf-sup 条件。

$$\mathbf{K}^d = \lambda \mathbf{K}^v, \quad \beta = \sqrt{\lambda_p} \quad (2.45)$$

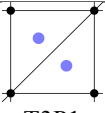
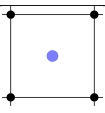
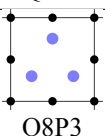
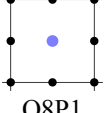
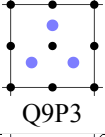
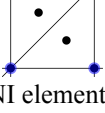
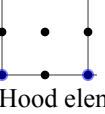
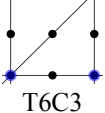
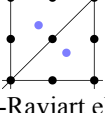


式中  $\lambda_p$  为最小非零特征值。

在理论分析方面, 以下解析证明框架<sup>[5]</sup>始终满足 inf-sup 条件, 通过确定离散方案是否包含在该框架内, 可以验证其是否满足 inf-sup 条件。

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Pi_1 w\|_V \leq c_1 \|w\|_W \\ b(\Pi_2 \nu - \nu, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ \|\Pi_2(I - \Pi_1)w\|_V \leq c \|w\|_W \end{array} \right. \quad (2.46)$$

表2.1详细列出了用于体积锁定的经典单元, 包括它们的约束比、数值验证以及解析证明结果。显然, 传统混合有限元法中使用的单元在约束比最优的情况下无法满足 inf-sup 条件。相反, 满足 inf-sup 条件的单元通常存在体积约束不足的情况。无论是不满足 inf-sup 条件还是体积约束不足, 都会对结果的准确性和稳定性产生影响。同时, 对 inf-sup 条件的数值验证和解析证明都相当复杂, 约束比与 inf-sup 条件之间的关系也并不明确。

表 2.1 inf-sup 条件验证

离散方案	约束比	inf-sup 条件	
		数值验证	解析证明
 T3P1	1	×	×
 Q4P1	2	×	×
 Q8P3	2	×	×
 Q8P1	6	✓	✓
 Q9P3	$\frac{8}{3}$	✓	✓
 MINI element <sup>[6-7]</sup>	$\frac{8}{3}$	✓	✓
 Taylor-Hood element <sup>[8]</sup>	$\frac{8}{3}$	✓	✓
 T6C3	8	✓	
 Crouzeix-Raviart element <sup>[9]</sup>	4	✓	
 : 位移节点  : 压力节点			

## 2.4 小结

本章讨论了体积自锁问题及其目前的解决方法。首先介绍了体积不可压材料的性质，随后详细讨论了通过罚函数法和拉格朗日乘子法两个常用的免体积

自锁方法，且两种方法在数学上等价。最后根据上述两种方法介绍了免体积自锁条件，包括体积约束比和 **LBB** 稳定性条件，并指出传统混合离散法无法同时满足最优约束比和 **LBB** 稳定性条件。

### 第 3 章 最优约束比例

本章用一种新的方式推导了 LBB 稳定性条件，建立了 LBB 稳定性条件与特征值问题和压力自由度之间的关系，提出了更精确的最优约束比。

#### 3.1 LBB 稳定系数估计

对于 LBB 稳定性条件(2.44)，假设  $\mathcal{P}_h : V_h \rightarrow Q_h$  是  $\mathcal{P}$  的正交投影算子，定义为：

$$b(q_h, \mathbf{v}_h) = (q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h) = (q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h), \quad \forall q_h \in Q_h \quad (3.1)$$

式中， $\mathcal{P} : V \rightarrow Q$  散度算子， $\mathcal{P} = \nabla \cdot$ 。

正如  $\mathcal{P}_h$  的定义，有  $\text{Im} \mathcal{P}_h \in Q_h$ 。式(2.44)可以改写为：

$$\beta \leq \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(q_h, \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \leq \inf_{q_h \in \text{Im} \mathcal{P}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \quad (3.2)$$

对于给定的  $q_h \in \text{Im} \mathcal{P}_h$ ，假设空间  $V'_h \subset V_h \setminus \ker \mathcal{P}_h$  定义为：

$$V'_h = \{\mathbf{v}_h \in V_h \mid \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h = q_h\} \quad (3.3)$$

由  $\text{Im} \mathcal{P}_h \in Q_h$ ，根据柯西-施瓦茨不等式，有

$$|(q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h)| \leq \|q_h\|_Q \|\mathcal{P}_h \mathbf{v}_h\|_Q \quad (3.4)$$

当且仅当  $q_h = \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h$  时，等式成立，即

$$|(q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h)| = \|q_h\|_Q \|\mathcal{P}_h \mathbf{v}_h\|_Q, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V'_h \quad (3.5)$$

代入到式(3.2)中可得：

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} = \sup_{\mathbf{v}_h \in V'_h} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathbf{v}_h\|_Q}{\|\mathbf{v}_h\|_V} \quad (3.6)$$

结合式(3.2)、(3.6)可得 LBB 稳定系数估算式：

$$\beta \leq \inf_{V'_h \subset V_h \setminus \ker \mathcal{P}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V'_h} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathbf{v}_h\|_Q}{\|\mathbf{v}_h\|_V} \quad (3.7)$$

其中  $\ker \mathcal{P}_h \subset V$  是  $\mathcal{P}_h$  的核，定义为  $\ker \mathcal{P}_h := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathcal{P}_h \mathbf{v} = 0\}$ 。

上述方法与传统数值 inf-sup 测试一致<sup>[10]</sup>，而根据极小-极大值原理<sup>[11]</sup>，式(3.7)计算刚度矩阵  $\mathbf{K}^v$  和  $\mathbf{K}^d$  的最小非零特征值。

为了进一步找出最优约束数量，假设  $P_{n_u}$  是一个  $n_u$  维的多项式空间,  $V_{n_u}$  是位移多项式空间, 且  $V_{n_u} = P_{n_u}^2$ 。由于  $V_h$  和  $V_{n_u}$  的维度相同,  $\dim V_{n_u} = \dim V_h = n_d \times n_u$ ，存在一个唯一的  $\mathbf{v} \in V_{n_u}$  满足  $\mathbf{v}_h = \mathcal{I}_h \mathbf{v}$ 。于是式(3.7)的右边可以改写为：

$$\inf_{V'_h \subset V_h \setminus \ker \mathcal{P}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V'_h} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathbf{v}_h\|_Q}{\|\mathbf{v}_h\|_V} = \inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{\mathbf{v} \in V'} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathcal{I}_h \mathbf{v}\|_Q}{\|\mathcal{I}_h \mathbf{v}\|_V} \quad (3.8)$$

压力的自由度为  $n_p = \dim(V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h)$

根据三角不等式、柯西-施瓦茨不等式和式(3.1)中的等式关系可得：

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_h \mathcal{I}_h \mathbf{v}\|_Q &= \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h \mathbf{v})|}{\|q_h\|_Q} = \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P} \mathcal{I}_h \mathbf{v})|}{\|q_h\|_Q} \\ &\leq \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P} \mathbf{v})| + |(q_h, \mathcal{P} \mathbf{v} - \mathcal{P} \mathcal{I}_h \mathbf{v})|}{\|q_h\|_Q} \\ &= \|\mathcal{P}_h \mathbf{v}\|_Q + \|\mathcal{P}(\mathcal{I} - \mathcal{I}_h) \mathbf{v}\|_Q \end{aligned} \quad (3.9)$$

显然，式(3.9)右侧的第二项和第三项是  $V_h$  中近似值的插值误差和正交投影误差，可以由如下式子估计<sup>[12]</sup>：

$$\|\mathcal{P}(\mathcal{I} - \mathcal{I}_h) \mathbf{v}\|_Q \leq Ch \|\mathbf{v}\|_H \quad (3.10)$$

从闭图像定理<sup>[13]</sup>可得  $\|\mathcal{I}_h \mathbf{v}\|_V \geq C \|\mathbf{v}\|_V$ 。结合式(3.9)–(3.10)，式(3.8)的右边可以表示为：

$$\inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{\mathbf{v} \in V'} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathcal{I}_h \mathbf{v}\|_Q}{\|\mathcal{I}_h \mathbf{v}\|_V} \leq \inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{\mathbf{v} \in V'} \frac{\|\mathcal{P} \mathbf{v}\|_Q}{\|\mathbf{v}\|_V} + Ch \quad (3.11)$$

将等式(3.8),(3.11)替换为(3.7) 可以得到以下关系：

$$\beta \leq \beta_s + Ch \quad (3.12)$$

其中

$$\beta = \inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{\mathbf{v} \in V'} \frac{\|\mathcal{P} \mathbf{v}\|_Q}{\|\mathbf{v}\|_V} \quad (3.13)$$

TODO 压力最优约束自由度怎么得出的

压力的最优自由度  $n_p$  为  $n_s = \dim(V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P})$

### 3.2 多项式约束数

根据上述内容,  $n_c$  为最优压力自由度, 确定  $n_c$  的方法如下。例如, 在二维弹性体积不可压缩问题中, 对于维数为3的线性多项式空间  $P_3$ , 对应的位移空间  $V_3$  由下式给出:

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right\} \quad (3.14)$$

或者按照如下式子重新排列:

$$V_3 = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}}_{\ker \mathcal{P}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{V_3 \setminus \ker \mathcal{P}} \right\} \quad (3.15)$$

从式(3.15)可以看出,  $n_u = 3$ ,  $n_s = 1$ 。根据这个方法, 具有二次多项式基的位移空间  $V_6$  可以表述为:

$$V_6 = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix}}_{\ker \mathcal{P}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 \end{pmatrix}}_{V_6 \setminus \ker \mathcal{P}} \right\} \quad (3.16)$$

在这种情况下,  $n_u = 6$ ,  $n_s = 3$ 。表中列出了随着多项式空间阶数的增加, 各阶空间的最优约束自由度的数量, 并总结了  $n_u$  与  $n_s$  之间的关系。

### 3.3 有限元无网格混合离散

第二章介绍的混合离散方案压力节点要依附单元上, 无法任意布置。为了使压力自由度达到最优, 在所提出的混合公式中, 使用传统有限元法来近似位移, 采用再生核无网格法来近似压力。

#### 3.3.1 再生核近似

如图所示, 再生核无网格近似将整个域  $\Omega$  及其边界  $\Gamma$  由  $n_p$  个无网格节点离散  $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_p}$ 。每个无网格节点  $\mathbf{x}_I$  对应的形函数为  $\Psi_I$ , 节点系数为  $p_I$ 。于是近似

表 3.1 体积约束自由度

$n_u$	$2n_u$	$n$	$n_s$
3	6	1	1
6	12	2	3
10	20	3	6
15	30	4	10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n_u$	$2n_u$	$\lfloor \frac{\sqrt{1+8n_u}-3}{2} \rfloor$	$\frac{n(n+1)}{2}$

压力  $p_h$  可以表示为:

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) p_I \quad (3.17)$$

TODO 无网格近似的图

根据再生核近似理论, 无网格形函数可以假设为如下形式:

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.18)$$

其中  $\mathbf{p}$  为  $n$  阶基函数向量, 其表达式为:

$$\mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, y^n\}^T \quad (3.19)$$

而  $\phi$  为核函数, 其影响域的大小由影响域尺寸  $s$  决定, 核函数及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。在二维情况下, 核函数的影响域通常为圆形或者矩形。本文的影响域形状为矩形, 矩形影响域的核函数可由下列公式计算得到:

$$\phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \phi(r_x) \phi(r_y), \quad r_x = \frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}|}{s_x}, r_y = \frac{|\mathbf{y}_I - \mathbf{y}|}{s_y} \quad (3.20)$$

其中,  $s_x$  和  $s_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的影响域尺寸, 若节点均匀布置, 一般使两个方向上的影响域大小相等, 即  $s_x = s_y = s$ 。为保证形函数紧支性和光滑性,  $\phi$  通常取为阶次大于  $n$  的紧支函数。对于弹性力学问题, 无网格基函数一般选择

二阶或者三阶多项式基函数，核函数  $\phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$  取为三次样条函数：

$$\phi(s) = \frac{1}{3!} \begin{cases} (2-2s)^3 - 4(1-2s)^3 & s \leq \frac{1}{2} \\ (2-2s)^3 & \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

$\mathbf{c}$  为待定系数向量，可以通过满足下列一致性条件确定：

$$\sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

或等效的转换形式：

$$\sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{0}) \quad (3.23)$$

将式(3.18)代入式(3.23)中即可得到待定系数向量  $\mathbf{c}$  的具体表达式：

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{0}) \quad (3.24)$$

式中  $\mathbf{A}$  为矩量矩阵：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]\text{T}}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.25)$$

将式(3.24)代入式(3.18)可得最终的再生核无网格形函数表达式：

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[n]\text{T}}(\mathbf{0}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (3.26)$$





## 第 4 章 体积不可压问题实例



## 第 5 章 剪切自锁问题

本章讨论另一个自锁问题，中厚板的剪切自锁问题。同样介绍目前常用的罚函数法和拉格朗日乘子法两种解决方法。上文提出的最优约束比同样适用于剪切自锁问题。



## 参考文献

- [1] HUGHES T J. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [2] PHILIPPE G. C. Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications[M]. Philadelphia: SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [3] BABUŠKA I, NARASIMHAN R. The Babuška-Brezzi condition and the patch test: An example[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 140: 183-199.
- [4] BATHE K J. Finite Element Procedures[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [5] CHAPELLE D, BATHE K J. The inf-sup test[J]. Computers & Structures, 1993, 47: 537-545.
- [6] ARNOLD D N, BREZZI F, FORTIN M. A stable finite element for the Stokes equations[J]. CALCOLO, 1984, 21: 337-344.
- [7] AURICCHIO F, Beirão da Veiga L, LOVADINA C, et al. A stability study of some mixed finite elements for large deformation elasticity problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 1075-1092.
- [8] HOOD P, TAYLOR C. Navier-Stokes equations using mixed interpolation[J]. Finite element methods in flow problems, 1974: 121-132.
- [9] CROUZEIX M, RAVIART P. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I[J]. Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, 1973, 7: 33-75.
- [10] MALKUS D S. Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements[J]. International Journal of Engineering Science, 1981, 19: 1299-1310.
- [11] BABUŠKA I, OSBORN J. Eigenvalue Problems[M]//Finite Element Methods (Part 1): Vol. 2 Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 1991: 641-787.
- [12] YOSIDA K. Classics in Mathematics: Functional Analysis[M]. 6th ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
- [13] QUARTERONI A, VALLI A. Springer Series in Computational Mathematics: Numerical Approximation of Partial Differential Equations[M]. Berlin: Springer, 1994.