学校代码： 10385　　　　分类号：

研究生学号：　　　　密　集：

HUAQIAO UNIVERSITY 華僑大學

硕士专业学位论文

自稳定有限元无网格混合离散分析方法及其在自锁问题中的应用

作 者 姓 名：

指 导 教 师：

合 作 教 师：

实 践 教 师：

专业学位类别： 工程硕士

专业学位领域： 土木水利

研 究 方 向： 结构体系创新与工程应用

所 在 学 院： 土木工程学院

论文提交日期：二〇二五年三月 **XX** 日

摘　要

LaTeX 是一种强大的排版系统，该系统提供了丰富的功能，包括自动编号、交叉引用、数学公式排版、参考文献管理等。它还支持多种文档类、宏包和模板，使用户能够根据自己的需求定制文档的外观和格式，广泛用于撰写学术论文、科技文档和出版物。本文主要以前期准备、图表设置、使用 Zotero 管理参考文献、LaTeX 部分所需包介绍、附录和参考格式等环节进行介绍。首先在前期准备中介绍了 Git 的相关内容以及 VS Code 的配置。此外，还介绍了文件和标签的命名规则，为编写论文的命名提供参考，并对在 LaTeX 中的图表设置以例子详细说明如何在论文中插入和设置图表，涵盖了图片的插入、标注、引用和交叉引用等方面的技巧和方法，也对如何使用 Zotero 管理参考文献进行了介绍说明。最后，在附录部分给出了参考格式的理解说明。通过阅读本文，读者将获得关于前期准备、图表设置、参考文献管理、LaTeX 必需包、附录和参考格式的全面指导，有助于顺利完成论文写作和格式规范要求。

关键词： LaTeX；模板学习

目　录

第 1 章　引言

1.1　选题背景及意义

1.2　国内外研究历史及现状

1.3　本文主要内容

第 2 章　体积自锁问题

2.1　体积不可压材料

考虑一个维度为 n_d 具有边界 Γ 的体积不可压材料弹性体 $\Omega \in \mathbb{R}^{n_d}$, 其中 Γ_t 和 Γ_g 分别表示其自然边界和本质边界，且 $\Gamma_t \cup \Gamma_g = \Gamma, \Gamma_t \cap \Gamma_g = \varnothing$。该问题相应的强形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，对于各向同性线弹性材料，其本构关系表示为：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = 3\kappa\boldsymbol{\varepsilon}^v(\boldsymbol{u}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\boldsymbol{u}) \tag{2.2}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 为应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的体积应变和偏应变部分：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{3}\nabla \cdot \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^v, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^d = 0 \tag{2.3}$$

其中，$\boldsymbol{1} = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ 是二阶恒等张量。

κ, μ 分别为体积模量和剪切模量，它们与杨氏模量 E 和泊松比 ν 之间存在如下关系式：

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.4}$$

$\boldsymbol{b}$ 为 Ω 中的体力，$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{g}$ 分别为自然边界和本质边界上的牵引力和位移。

对于体积几乎不可压缩材料，它们的泊松比 $\nu \to 0.5$, 相应的体积模量 $\kappa \to \infty$，$\kappa \gg \mu$, 使得其体积变化无限小。

采用伽辽金法进行求解时，其相对应的伽辽金弱形式为：位移 $\boldsymbol{u} \in V$ 满足

$$\int_\Omega 2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d d\Omega + \int_\Omega 3\kappa\delta\boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma + \int_\Omega \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} d\Omega, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in V \tag{2.5}$$

其中, 空间 $V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g},\ \text{on } \Gamma_g\}$。$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^v$ 和 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 分别为 $\delta\boldsymbol{u}$ 表示的体积应变和偏应变的变分。

在传统有限元法中，整个求解域 Ω 可离散为一组节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{n_u}$ 表示[?]，其中 n_u 是位移节点的数量。位移 $\boldsymbol{u}$ 及其变分 $\delta\boldsymbol{u}$ 可通过 $\boldsymbol{x}_I$ 处的节点系数和形函

数进行近似：

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{n_u}N_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_I,\quad \delta\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{n_u}N_I(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{u}_I \tag{2.6}$$

其中 N_I 和 u_I 分别为节点 x_I 处的形函数和节点系数张量。将式(2.6)代入到弱形式(2.5)中可得下列的里兹–伽辽金问题：近似位移 $\boldsymbol{u}_h\in V_h$ 满足

$$\int_\Omega 2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon}_h^d:\boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega+\int_\Omega 3\kappa\delta\boldsymbol{\varepsilon}_h^v:\boldsymbol{\varepsilon}_h^v d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{t}d\Gamma+\int_\Omega\delta\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{b}d\Omega,\quad\forall\delta\boldsymbol{u}_h\in V_h \tag{2.7}$$

其中近似空间 $V_h\subseteq V$，$V_h=\{\boldsymbol{v}_h\in(\mathrm{span}\{N_I\}_{I=1}^{n_u})^{n_d}|\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{g},\ \mathrm{on}\ \Gamma_g\}$。根据 $\delta\boldsymbol{u}_h$ 的任意性，等式两边同时消除 $\delta\boldsymbol{u}_I$, 上述方程可以简化为以下离散控制方程：

$$(\boldsymbol{K}^d+\boldsymbol{K}^v)\boldsymbol{d}^u=\boldsymbol{f} \tag{2.8}$$

式中，体积刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^v$ 和偏应力刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^d$ 的分量分别为：

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^v=3\kappa\int_\Omega\boldsymbol{B}_I^{vT}\boldsymbol{B}_J^v d\Omega \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^d=2\mu\int_\Omega\boldsymbol{B}_I^{dT}\boldsymbol{B}_J^d d\Omega \tag{2.10}$$

力向量 $\boldsymbol{f}$ 的分量为：

$$\boldsymbol{f}_I=\int_{\Gamma_t}N_I\boldsymbol{t}d\Gamma+\int_\Omega N_I\boldsymbol{b}d\Omega \tag{2.11}$$

$\boldsymbol{d}^u$ 是包含 $\boldsymbol{u}_I$ 的系数向量。

对于体积几乎不可压缩的材料，$\kappa\to\infty$，$\boldsymbol{K}^v\gg\boldsymbol{K}^d$。因此式(2.8)中的体积刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^v$ 可视作一种强制使用的罚函数法使得体积变形为 0, 即 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$，而体积模量 κ 可视作罚因子。由于这种情况，使用传统有限元法会产生严重的体积锁定，就是所谓的体积自锁现象。

2.2 调整体积约束

2.2.1 罚函数法

传统有限元法发生体积自锁的自由度为刚度矩阵的秩 $rank(\boldsymbol{K})$, 通过减少体积刚度矩阵中的积分点数量，可以达到缓解体积自锁的目的。为了清晰起见，将数值积分代入上述刚度矩阵中：

$$\boldsymbol{K}_{IJ}\approx\bar{\boldsymbol{K}}_{IJ}=\sum_{C=1}^{n_e}\sum_{G=1}^{n_g}\boldsymbol{B}_I^T(\boldsymbol{x}_G)\boldsymbol{B}_J(\boldsymbol{x}_G)w_G \tag{2.12}$$

其中，$\boldsymbol{x}_G$ 和 w_G 分别为积分点的位置和权重。n_e 是单元的数量，n_g 是每个单元中积分点的数量，因此总的积分点数量为 $n_e \times n_g$。

以图2.1中二维四边形单元 (Quad4) 为例，传统二维四边形单元使用 2×2 高斯积分点作为全积分，对应的体积自锁自由度为：

$$rank(\boldsymbol{K}) = min(n_e \times n_g, n_d \times n_u) = min(4n_e, 2n_u) \tag{2.13}$$

采用缩减积分单元，积分点的数量从 4 个减少到 1 个，此时的体积自由度为：

$$rank(\boldsymbol{K}) = min(n_e, 2n_u) \tag{2.14}$$

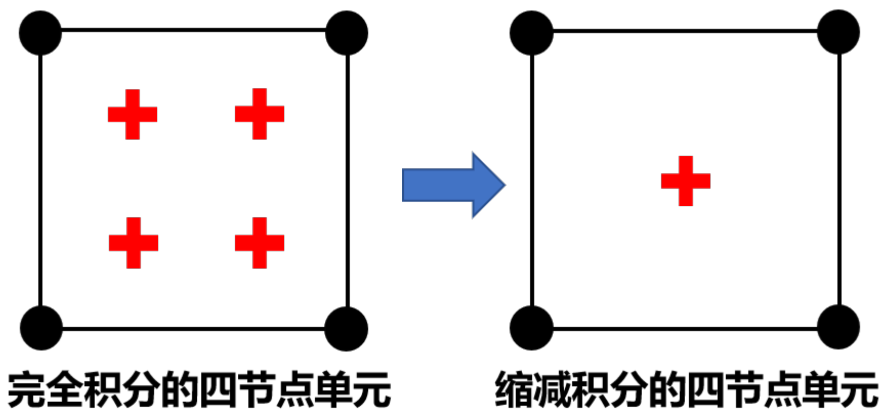

图 2.1　Quad4 单元缩减积分

通过减少对体积自由度的约束，缓解体积自锁现象，但是低阶高斯积分将伴随着数值积分精度不足，引起数值计算结果振荡和精度下降。针对低阶高斯积分精度不足的问题，可以使用选择积分法。该方法对于偏应力刚度矩阵使用全积分，对体积刚度矩阵采用缩减积分进行计算，保持了偏应力刚度矩阵的自由度个数，只减少体积刚度矩阵的自由度个数，从而提高求解精度。

2.2.2　拉格朗日乘子法

施加约束的方式除了传统罚函数法外，还有拉格朗日乘子法。拉格朗日乘子法中将压力 p 作为拉格朗日乘子独立变量，相对应的强形式中增加了压力 p

与位移之间的约束：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} & \text{in }\Omega \\ \frac{p}{\kappa}+\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 & \text{in }\Omega \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t} & \text{on }\Gamma_t \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{g} & \text{on }\Gamma_g \end{cases} \tag{2.15}$$

式中应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 采用两个变量表示：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p)=p\boldsymbol{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\boldsymbol{u}) \tag{2.16}$$

其中 $p\in Q$，$Q=\{q\in L^2(\Omega)|\int_\Omega qd\Omega=0\}$。此时，能量泛函具有位移 $\boldsymbol{u}$ 压力 p 两个变量，分别对两变量进行变分，可得相对应的伽辽金弱形式为：位移 $\boldsymbol{u}\in V$，压力 $p\in Q$ 满足

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})+b(\boldsymbol{v},p)=f(\boldsymbol{v}) \qquad & \forall\boldsymbol{v}\in V \\ b(\boldsymbol{u},q)=\boldsymbol{0} \qquad & \forall q\in Q \end{aligned} \tag{2.17}$$

式中，$a:V\times V\to\mathbb{R}$，$b:V\times Q\to\mathbb{R}$ 为双线性算子，$f:V\to\mathbb{R}$ 为线性算子，它们具有以下形式：

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=\int_\Omega\nabla^s\boldsymbol{v}:\nabla^s\boldsymbol{u}d\Omega \tag{2.18}$$

$$b(\boldsymbol{v},p)=\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{v}pd\Omega \tag{2.19}$$

$$f(\boldsymbol{v})=\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}d\Gamma+\int_\Omega\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}d\Omega \tag{2.20}$$

位移 $\boldsymbol{u}$ 压力 p 双变量可采用不同的离散方式进行近似，形成混合离散框架。

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{n_u}N_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_I,\quad \delta\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{n_u}N_I(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{u}_I \tag{2.21}$$

$$p_h(\boldsymbol{x})=\sum_{K=1}^{n_p}\Psi_K(\boldsymbol{x})p_K,\quad \delta p_h(\boldsymbol{x})=\sum_{K=1}^{n_p}\Psi_K(\boldsymbol{x})\delta p_K \tag{2.22}$$

此时，压力 p 的自由度个数则反应了体积约束个数。式中，n_p 分别为压力节点的总数，p_K 为压力节点系数，Ψ_K 为对应的形函数。

根据 u_h 和 p_h 的任意性，式(2.17)可得到如下离散控制方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{uu} & \boldsymbol{K}^{up} \\ (\boldsymbol{K}^{up})^T & \boldsymbol{K}^{pp} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}^u \\ \boldsymbol{d}^p \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

式中 $\boldsymbol{K}^{uu}=\boldsymbol{K}^d$.

由式(2.23)离散控制方程中的第二个等式，系数向量 d^p 可用 d^u 表示：

$$\boldsymbol{d}^p = (\boldsymbol{K}^{pp})^{-1}(\boldsymbol{K}^{up})^T\boldsymbol{d}^u \tag{2.24}$$

将上式代入到式(2.23)的第一个等式中可得：

$$\begin{aligned}&(\underbrace{\boldsymbol{K}^{uu}}_{\boldsymbol{K}^d}+\underbrace{\boldsymbol{K}^{up}(\boldsymbol{K}^{pp})^{-1}(\boldsymbol{K}^{up})^T}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^v})\boldsymbol{d}^u = \boldsymbol{f}\\ &\Rightarrow (\boldsymbol{K}^d+\tilde{\boldsymbol{K}}^v) = \boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{2.25}$$

此时, 位移自由度为 $rank(\boldsymbol{K}^d)$, 压力自由度为 $rank(\boldsymbol{K}^v)$。

$$rank(\boldsymbol{K}^d) = n_d \times n_u, \quad rank(\boldsymbol{K}^v) = n_p \tag{2.26}$$

2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性

从拉格朗日乘子法的离散方程(2.25)中可以看出，压力 p_h 的解是 $3\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h$ 的一个正交投影。令 $P_h : V_h \to P_h(V_h)$ 使得 $P_h(V_h) \subseteq Q_h$, 其中 $P_h(V_h) = \mathrm{Im}\, P_h$ 是线性算子 P_h 的虚部[?]. 在这种情况下, $p_h = P_h(3\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h) = 3\kappa\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h$, 式(2.17)可以改写为：

$$\int_\Omega q_h(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h - \tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h)d\Omega = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \tag{2.27}$$

相应的，弱形式体积部分变为：

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\cdot\delta\boldsymbol{u}_h p_h d\Omega &= \underbrace{\int_\Omega(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h - \tilde{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{u}_h)p_h d\Omega}_{0} + \int_\Omega \tilde{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{u}_h \underbrace{p_h}_{\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h} d\Omega\\ &= \int_\Omega 3\kappa\tilde{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{u}_h\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h d\Omega\end{aligned} \tag{2.28}$$

里兹–伽辽金变分方程变为：位移 $\boldsymbol{u}_h \in V_h$ 满足

$$\int_\Omega 2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_\Omega 3\kappa\tilde{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{u}_h\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h d\Omega = \int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{t}d\Gamma + \int_\Omega\delta\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{b}d\Omega, \quad \forall\boldsymbol{u}_h \in V_h \tag{2.29}$$

相比之下，对于罚函数法，缩减积分也可以被视作一种投影。设 ϱ_i 为正交多项式，

$$\int_{\Omega_C}\varrho_i\varrho_j d\Omega = \begin{cases} J_C w_i & i = j\\ 0 & i \neq j\end{cases} \tag{2.30}$$

正交插值 $T^k : V \to W^k$，其中 W^k 是由 k 个正交多项式构成的插值空间：

$$W^k := \mathrm{span}\{\varrho_i\}_{i=1}^k \tag{2.31}$$

对于传统高斯积分方案，$\varrho_i(\boldsymbol{x}_j)=\delta_{ij},\boldsymbol{x}_j$ 是积分点的位置。体积应变可以通过正交插值法表示为：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})\approx\bar{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})=\sum_{G=1}^{n_g}\varrho_G(\boldsymbol{x})\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_G),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_G)=\bar{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_G) \tag{2.32}$$

而积分点被视为插值系数。虽然积分点的总数 n_g 低于完全积分，这意味着 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h$ 投影到子空间。

$$\begin{aligned}\int_\Omega 3\kappa\bar{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{u}_h\bar{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_h d\Omega&=\sum_{C=1}^{n_e}\sum_{G,L=1}^{n_g}3\kappa\nabla\cdot\delta\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_G)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_L)\int_\Omega\varrho_G\varrho_L d\Omega\\&=\sum_{C=1}^{n_e}\sum_{G=1}^{n_g}3\kappa\nabla\cdot\delta\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_G)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_G)J_C w_G\end{aligned} \tag{2.33}$$

通过对比式(2.33)和式(2.28), 罚函数法实际上与拉格朗日乘子法等价，两种方法都可以用投影的方式来描述。

2.3　体积自锁程度判断方法

2.3.1　体积约束比

约束比是用来衡量变量间的约束程度。对于不可压问题约束比为位移的总自由度比上压力的总自由度。理想情况下，最优约束比应与其偏微分控制方程一致。例如，在二维情况下，不可压问题有两个位移控制方程，一个压力控制方程，所以最优约束比为 2. 当约束比小于 2 时会出现体积自锁的倾向。当约束比大于 2 时会导致压力出现很大的误差。相关的结论 Hughes 已经做出了总结[?]。

$$r=\frac{n_d\times n_u}{n_p},\qquad\begin{cases}r>n_d & \text{过少的约束}\\ r=n_d & \text{最优}\\ r<n_d & \text{过多的约束}\end{cases} \tag{2.34}$$

图**??**为四种不同的二维位移压力单元。图 (a) 为

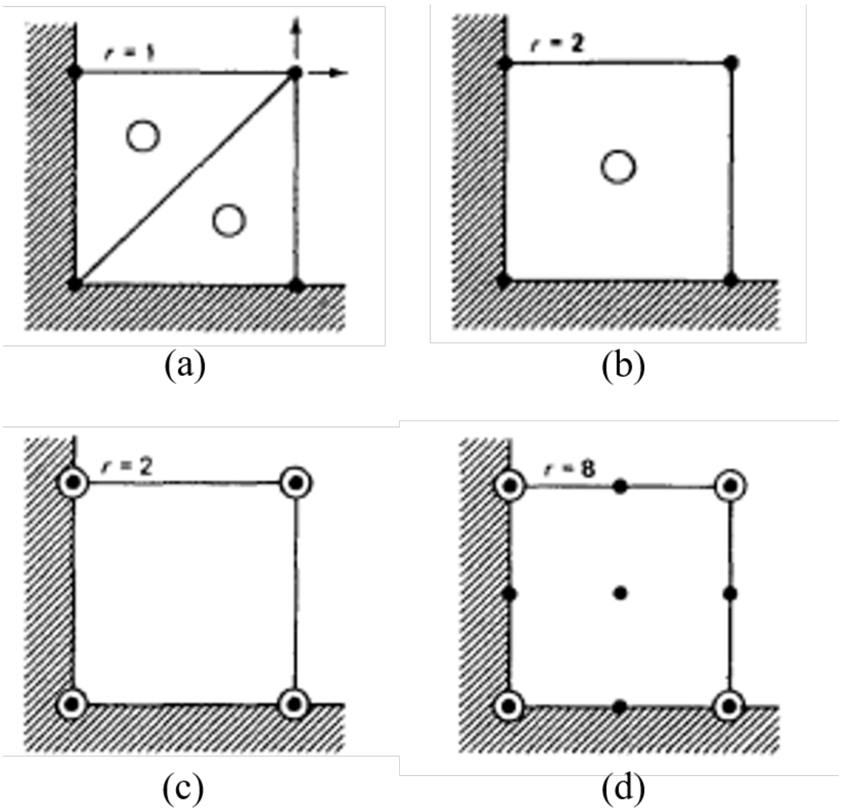

图 2.2　二维位移应力单元示例

从上述结果可以看出，该方法只是一种启发式方法，并不可以精确确定单元组合能否够缓解自锁，只是一种便捷的工具来评估单元是否有缓解自锁的可能，在整体评估单元性能时，还需要考虑其它问题。尽管满足约束比的单元缓解了体积自锁且数值解也比较精确，但它们并非都能满足 LBB 稳定性条件。例如 Q4P1 单元就不满足 LBB 稳定性条件且压力的解出现了明显的振荡，被称为伪压力模式或应力棋盘模式；

2.3.2　LBB 稳定性条件

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\boldsymbol{v}_h \in V_h} \frac{|b(q_h, \boldsymbol{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\boldsymbol{v}_h\|_V} \geq \beta > 0 \tag{2.35}$$