

学校代码: 10385

分类号: _____

研究生学号: _____

密 集: _____



华侨大学
HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

自稳定有限元无网格混合离散分析方法及其在自锁问题中的应用

作者姓名: _____

指导教师: _____

合作教师: _____

实践教师: _____

专业学位类别: 工程硕士

专业学位领域: 土木水利

研究方向: 结构体系创新与工程应用

所在学院: 土木工程学院

论文提交日期: 二〇二五年三月 XX 日

摘 要

\LaTeX 是一种强大的排版系统，该系统提供了丰富的功能，包括自动编号、交叉引用、数学公式排版、参考文献管理等。它还支持多种文档类、宏包和模板，使用户能够根据自己的需求定制文档的外观和格式，广泛用于撰写学术论文、科技文档和出版物。本文主要以前期准备、图表设置、使用 **Zotero** 管理参考文献、 \LaTeX 部分所需包介绍、附录和参考格式等环节进行介绍。首先在前期准备中介绍了 **Git** 的相关内容以及 **VS Code** 的配置。此外，还介绍了文件和标签的命名规则，为编写论文的命名提供参考，并对在 \LaTeX 中的图表设置以例子详细说明如何在论文中插入和设置图表，涵盖了图片的插入、标注、引用和交叉引用等方面的技巧和方法，也对如何使用 **Zotero** 管理参考文献进行了介绍说明。最后，在附录部分给出了参考格式的理解说明。通过阅读本文，读者将获得关于前期准备、图表设置、参考文献管理、 \LaTeX 必需包、附录和参考格式的全面指导，有助于顺利完成论文写作和格式规范要求。

关键词： \LaTeX ；模板学习

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 选题背景及意义	1
1.2 国内外研究历史及现状	1
1.3 本文主要内容	1
第 2 章 体积自锁问题	3
2.1 体积不可压材料	3
2.2 免体积自锁方案	6
2.2.1 罚函数法与缩减积分方案	6
2.2.2 拉格朗日乘子法与混合离散方案	7
2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性	9
2.3 免体积自锁条件	11
2.3.1 体积约束比	11
2.3.2 LBB 稳定性条件	12
2.4 小结	14
第 3 章 最优体积约束比	17
3.1 LBB 稳定系数估计	17
3.1.1 LBB 稳定性条件与特征值问题	17
3.1.2 特征值问题与体积约束比	18
3.2 多项式约束数量	19
3.3 系数估计验证	20
3.4 小结	22
第 4 章 有限元无网格混合离散方案	23
4.1 再生核近似	23
4.2 有限元无网格混合离散	25
4.3 数值算例	25
4.3.1 悬臂梁问题	25

4.3.2 带孔方板问题	26
4.3.3 Cook membrane 问题	26
4.3.4 方块受压问题	27
4.4 小结	27
第 5 章 剪切自锁问题	29
5.1 中厚板问题	29
5.2 中厚板问题混合离散方案	32

第1章 引言

- 1.1 选题背景及意义
- 1.2 国内外研究历史及现状
- 1.3 本文主要内容

第2章 体积自锁问题

本章以体积不可压材料的本构特性，说明了传统有限元分析时产生的体积自锁现象的产生机理。针对该问题，系统介绍了当前主流的两种解决方案：其一是基于罚函数法的缩减积分方案，其二是基于拉格朗日乘子法的混合离散方案，并通过等效投影验证二者的等价性。在此基础上，结合缓解体积自锁的典型单元，详细阐述并验证免体积自锁的两个关键条件，包括体积约束比和 LBB 稳定性条件。

2.1 体积不可压材料

考虑如图2.1所示维度为 n_d 且具有边界 Γ 的体积不可压材料弹性体 $\Omega \in \mathbb{R}^{n_d}$ ， Γ_t 和 Γ_g 分别表示其自然边界和本质边界，并满足 $\Gamma_t \cup \Gamma_g = \Gamma$ ， $\Gamma_t \cap \Gamma_g = \emptyset$ 。该问题相应的强形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，对于各向同性线弹性材料，其本构关系表示为：

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 3\kappa\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 为应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的体积应变和偏应变部分：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^v, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^d = 0 \quad (2.3)$$

其中， $\mathbf{1} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ 是二阶恒等张量。 κ, μ 分别为体积模量和剪切模量，其与杨氏模量 E 和泊松比 ν 之间存在如下关系式：

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

\mathbf{b} 为 Ω 中的体力， \mathbf{t}, \mathbf{g} 分别为自然边界 Γ_t 和本质边界 Γ_g 上的牵引力和位移。

对于体积不可压缩材料，其泊松比 $\nu \rightarrow 0.5$ 。在这种情况下，式(2.4)中体积模量 $\kappa \rightarrow \infty$ ，而剪切模量 μ 的变化相对较小，从而导致 $\kappa \gg \mu$ 。根据体积不可

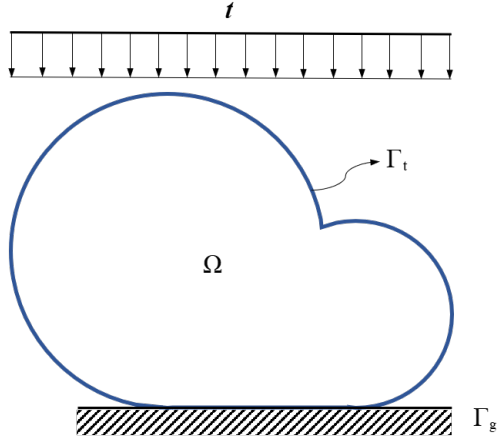


图 2.1 不可压缩材料弹性体模型

压缩材料本构关系(2.2)，当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时，体积应变 ϵ^v 被约束，导致体积的变化 $\nabla \cdot \mathbf{u} \rightarrow 0$ 。

采用伽辽金法进行求解时，其相对应的伽辽金弱形式为：Find $\mathbf{u} \in V$ ，

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \epsilon^d : \epsilon^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \delta \epsilon^v : \epsilon^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (2.5)$$

其中, 空间 $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_g\}$ 。 $\delta \epsilon^v$ 和 $\delta \epsilon^d$ 分别为 $\delta \mathbf{u}$ 表示的体积应变和偏应变的变分。

在传统有限元法中，如图2.2所示整个求解域 Ω 可离散为一组节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_u}$ 表示^[2]，其中 n_u 是位移节点的数量。位移 \mathbf{u} 及其变分 $\delta \mathbf{u}$ 可通过 \mathbf{x}_I 处的节点系数和形函数进行近似：

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I \quad (2.6)$$

其中 N_I 和 \mathbf{u}_I 分别为节点 \mathbf{x}_I 处的形函数和节点系数张量。

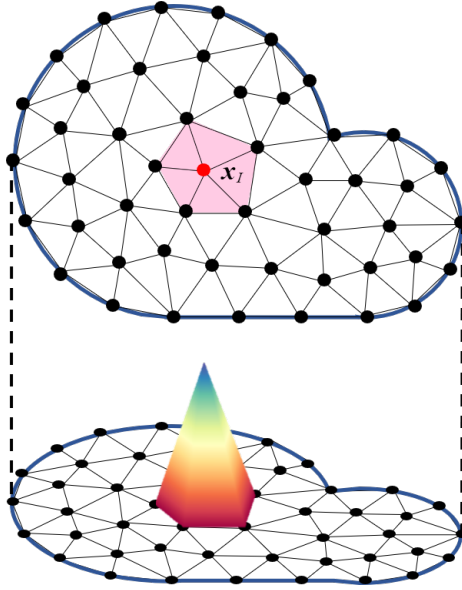


图 2.2 有限元离散示意图

将式(2.6)代入到弱形式(2.5)中可得下列的里兹-伽辽金问题：Find $\mathbf{u}_h \in V_h$,

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^v : \boldsymbol{\varepsilon}_h^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h \quad (2.7)$$

其中近似空间 $V_h \subseteq V$, $V_h = \{\mathbf{v}_h \in (\text{span}\{N_I\}_{I=1}^{n_u})^{n_d} | \mathbf{v}_h = \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_g\}$ 。根据 $\delta \mathbf{u}_h$ 的任意性，等式两边同时消除 $\delta \mathbf{u}_I$ ，上述方程可以简化为如下离散控制方程：

$$(\mathbf{K}^d + \mathbf{K}^v) \mathbf{d}^u = \mathbf{f} \quad (2.8)$$

其中， \mathbf{d}^u 是包含 \mathbf{u}_I 的系数向量， \mathbf{K}^v 为主应力刚度矩阵， \mathbf{K}^d 为偏应力刚度矩阵， \mathbf{f} 为力向量，其分量分别为：

$$\mathbf{K}_{IJ}^v = 3\kappa \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{vT} \mathbf{B}_J^v d\Omega \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^d = 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{dT} \mathbf{B}_J^d d\Omega \quad (2.10)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} N_I \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \mathbf{b} d\Omega \quad (2.11)$$

式中 \mathbf{B}_I 为形函数梯度矩阵，在二维问题中 \mathbf{B}_I 具有如下表达式：

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.2 免体积自锁方案

2.2.1 罚函数法与缩减积分方案

由式(2.8), (2.9)可知, 对于体积不可压材料, 当外力向量 \mathbf{f} 具有一定的数值时, $\kappa \rightarrow \infty$ 将导致主应力刚度矩阵 \mathbf{K}^v 中的所有模态也趋向零。此时, 主应力刚度矩阵 \mathbf{K}^v 可作为罚函数项将主应力刚度矩阵中所有模态约束住, 体积模量 κ 为其中的罚因子。使用传统有限元法进行求解时, 由于离散的有限元近似阶次较低, 导致过多的位移自由度受到体积约束的限制, 位移解将远小于实际情况, 即出现体积自锁现象。

引入数值积分实现主应力刚度矩阵(2.9), 有:

$$\mathbf{K}_{IJ}^v = 3\kappa \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G=1}^{n_g} \mathbf{B}_I^{vT}(\mathbf{x}_G) \mathbf{B}_J^v(\mathbf{x}_G) w_G \quad (2.13)$$

式中, \mathbf{x}_G 和 w_G 分别为积分点的位置和权重。 n_e 是单元的数量, n_g 是每个单元中积分点的数量。当引入数值积分后, \mathbf{K}^v 将要求体积约束在所有数值积分点处满足, $\text{rank}(\mathbf{K}^v)$ 将受限于数值积分点数量:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^v) \leq n_e \times n_g \quad (2.14)$$

由式(2.14)可知, 减少用于主应力刚度矩阵的积分点数量可以减少体积约束的位移自由度个数。以图2.3所示的经典二维四边形单元 (Quad4) 缩减积分方案为例, Quad4 单元需要采用 2×2 高斯积分点以保证数值精度, 称之为完全积分方案。为了缓解体积自锁现象, Quad4 单元在对主应力刚度矩阵 \mathbf{K}^v 进行数值积分时, 采用 1 点高斯积分作为缩减积分方案。此时, 被约束的自由度个数将被单元数 n_e 限制:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^v) \leq n_e \quad (2.15)$$

需要指出在有限元离散中, 单元数量 n_e 将远小于位移自由度个数 $2n_u$ 。例如单边单元数为 n 的正方形均布有限元离散, 此时的单元数量为 $n_e = n^2$, 而位移自由度个数为 $2n_u = 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2$, $n_e < 2n_u$, 体积自锁现象得以缓解。

相反, 为保证整体刚度矩阵的正定性, 对偏应力刚度矩阵 \mathbf{K}^d 采用完全积分方案进行数值积分。此时, \mathbf{K}^d 被约束的位移自由度个数被节点数 n_u 限制:

$$\text{rank}(\mathbf{K}^d) \leq 2n_u \quad (2.16)$$

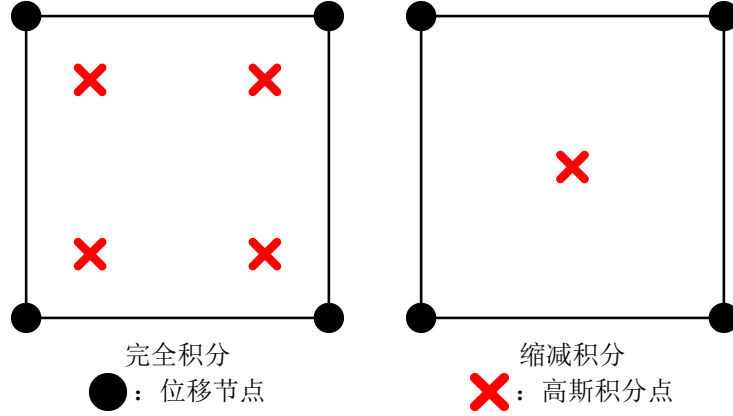


图 2.3 Quad4 单元缩减积分方案

由上述例子可知，缩减积分方案减少数值积分时用于主应力刚度矩阵高斯积分点的数量，从而减少了体积约束位移自由度的个数，缓解了体积自锁现象。

2.2.2 拉格朗日乘子法与混合离散方案

施加约束的方式除了传统罚函数法外，常用的方法还有拉格朗日乘子法。对于体积自锁问题，将压力 p 作为拉格朗日乘子独立变量，可以得到拉格朗日乘子型体积约束施加方案，相对应的强形式中增加了压力 p 与体积应变 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 之间的约束：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (2.17)$$

式中应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 采用两个变量表示：

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = p\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) \quad (2.18)$$

其中 $p \in Q$, $Q = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\}$ 。此时，能量泛函具有位移 \mathbf{u} 和压力 p 两个变量，分别对两变量进行变分，可得相对应的伽辽金弱形式为：Find $\mathbf{u} \in V$, $p \in Q$

$$\begin{aligned} a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\delta \mathbf{u}, p) &= f(\delta \mathbf{u}) & \forall \delta \mathbf{u} \in V \\ b(\mathbf{u}, \delta p) + c(\delta p, p) &= 0 & \forall \delta p \in Q \end{aligned} \quad (2.19)$$

式中, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 为双线性算子, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 为线性算子, 它们具有以下形式:

$$a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \nabla^s \mathbf{u} d\Omega \quad (2.20)$$

$$b(\delta \mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} p d\Omega \quad (2.21)$$

$$c(\delta p, p) = -\frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \delta p p d\Omega \quad (2.22)$$

$$f(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (2.23)$$

采用伽辽金法进行求解时, 位移 \mathbf{u} 和压力 p 双变量可以采用不同的离散节点进行近似, 形成混合离散框架。近似的位移 u_h 和压力 p_h 及其变分可表示为:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I \quad (2.24)$$

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) p_K, \quad \delta p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) \delta p_K \quad (2.25)$$

式中, n_p 分别为压力节点的总数, p_K 为压力节点系数, Ψ_K 为离散 p_h 的形函数。

根据 $\delta \mathbf{u}_h$ 和 δp_h 的任意性, 式(2.19)可得到如下离散控制方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{up} \\ (\mathbf{K}^{up})^T & \mathbf{K}^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^u \\ \mathbf{d}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

式中, $\mathbf{K}^{uu} = \mathbf{K}^d$, \mathbf{K}^{up} 为刚度矩阵中和位移、压力都有关的部分, \mathbf{K}^{pp} 为刚度矩阵中只和压力相关的部分, 其分量分别为:

$$\mathbf{K}_{IJ}^{up} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \Psi_J d\Omega \quad (2.27)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{pp} = -\frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \Psi_I^T \Psi_J d\Omega \quad (2.28)$$

为统计约束的自由度个数, 将离散控制方程式(2.26)进行变换。由式(2.26)可将 \mathbf{d}^p 采用 \mathbf{d}^u 表示:

$$\mathbf{d}^p = (\mathbf{K}^{pp})^{-1} (\mathbf{K}^{up})^T \mathbf{d}^u \quad (2.29)$$

将上式代入到式(2.26)的第一式中可得:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\mathbf{K}^{uu})}_{\mathbf{K}^d} + \underbrace{(\mathbf{K}^{up} (\mathbf{K}^{pp})^{-1} (\mathbf{K}^{up})^T)}_{\tilde{\mathbf{K}}^v} \mathbf{d}^u = \mathbf{f} \\ \Rightarrow & (\mathbf{K}^d + \tilde{\mathbf{K}}^v) \mathbf{d}^u = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.30)$$

控制方程(2.30)与式(2.8)具有相同的形式。为保证积分精度，混合离散方案对主应力刚度矩阵 $\tilde{\mathbf{K}}^v$ 和偏应力刚度矩阵 \mathbf{K}^d 进行数值积分时均采用完全积分，而采用不同的节点个数进行离散。因此，体积约束的自由度个数被节点数限制。以图2.4所示的常用于缓解体积自锁的 Q4P1 单元混合离散方案为例，为缓解体积自锁现象，Q4P1 单元采用 4 个位移节点离散 \mathbf{K}^d ；采用 1 个压力节点离散 $\tilde{\mathbf{K}}^v$ 。此时，被约束的自由度个数为：

$$\text{rank}(\mathbf{K}^d) \leq 2n_u \quad (2.31)$$

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{K}}^v) = \min(\text{rank}(\mathbf{K}^{up}), \text{rank}(\mathbf{K}^{pp})) \leq n_p \quad (2.32)$$

需要指出的是在上述混合离散方案中，压力自由度的个数始终小于位移自由度的个数。例如单边单元数为 n 的正方形均布 Q4P1 单元混合离散，此时压力自由度个数为 $n_p = n^2$ ，而位移自由度个数为 $2n_u = 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2$ ， $n_p < 2n_u$ ，缓解体积自锁现象。

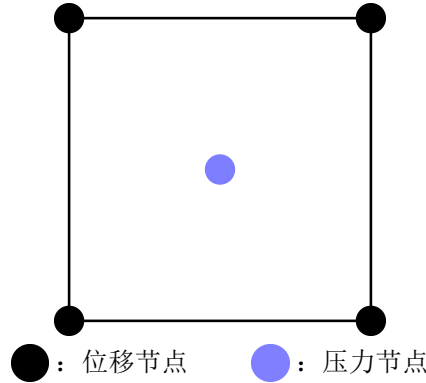


图 2.4 Q4P1 单元混合离散方案

由上述例子可知，混合离散方案对位移 \mathbf{u} 和压力 p 两个变量采用不同数量的位移节点和压力节点进行离散，使压力自由度个数少于位移自由度个数，缓解体积自锁现象。

2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性

由上述小节可知，罚函数型和拉格朗日乘子型缓解体积自锁方案均改变了体积约束自由度的个数，缓解了体积自锁现象。从 Quad4 单元和 Q4P1 单元两个例子可以看出， n_g 与 n_p 具有类似的效果。同样，也可通过数值积分法的等效投影证明两类方法的等价性。

从拉格朗日乘子法的离散方程(2.30)第二式中可以看出, 压力 p_h 的解是 $3\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}_h$ 的一个正交投影。令 \mathcal{P}_h 为正交投影算子, 满足:

$$(q_h, \mathcal{P}_h \mathbf{u}_h) = (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h), \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.33)$$

其中, (\bullet, \bullet) 为内积算子。为表示方便, 可将投影后的位移散度写作 $p_h = \mathcal{P}_h \mathbf{u}_h = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h$ 。且有 $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h \in \text{Im} \mathcal{P}_h$, $\text{Im} \mathcal{P}_h \in Q_h$ 为 \mathcal{P}_h 的相空间^[7]。此时, 式(2.33)可改写为:

$$\int_{\Omega} q_h (\nabla \cdot \mathbf{u}_h - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h) d\Omega = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.34)$$

将上式代入弱形式(2.26)中, 其主应力部分可转化为:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h p_h d\Omega &= \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h - \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h) p_h d\Omega}_0 + \int_{\Omega} \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \underbrace{p_h}_{\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

里兹-伽辽金变分方程(2.7)变为: Find $\mathbf{u}_h \in V_h$,

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h \quad (2.36)$$

与此同时对于罚函数法, 数值积分也可以被视作一种投影。设 ϱ_i 为正交多项式满足:

$$\int_{\Omega_C} \varrho_i \varrho_j d\Omega = \begin{cases} w_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.37)$$

正交插值 $\mathcal{T}^k : V_h \rightarrow W^k$, 其中 W^k 是由 k 个正交多项式构成的插值空间:

$$W^k := \text{span}\{\varrho_i\}_{i=1}^k \quad (2.38)$$

对于传统高斯积分方案, $\varrho_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, \mathbf{x}_j 是积分点的位置。体积应变可以通过正交插值法表示为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \approx \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{G=1}^{n_g} \varrho_G(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) = \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \quad (2.39)$$

而积分点被视为插值系数。积分点的总数 n_g 低于完全积分, 这意味着 $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$ 投

影到子空间。弱形式(2.7)中，主应力部分可转化为：

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} 3\kappa \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^v : \boldsymbol{\varepsilon}_h^v d\Omega &= \int_{\Omega} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\Omega \\
 &= \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G=L=1}^{n_g} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) w_G \\
 &= \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G,L=1}^{n_g} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_L) \int_{\Omega} \varrho_G \varrho_L d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} 3\kappa \bar{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

里兹-伽辽金变分方程(2.7)可改写为：Find $\mathbf{u}_h \in V_h$,

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \bar{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h \tag{2.41}$$

通过对比式(2.41)和式(2.36), 罚函数法实际上与拉格朗日乘子法等价, 两种方法都可以用投影的方式来描述, 两种方法具有等价性。

2.3 免体积自锁条件

2.3.1 体积约束比

从上文介绍的两种常用的缓解体积自锁方法可知, 压力自由度的数量在缓解体积自锁中有关键的作用。文献^[2]提出了约束比的概念。约束比是用来衡量变量间的自锁程度的重要指标。对于体积不可压问题而言, 约束比定义为位移总自由度与压力总自由度的比值。文献^[2]还通过连续控制方程确定了最优的约束比数量。由体积不可压问题连续控制方程(2.17)可知, 在第一式当中位移在全域上的约束为 n_d 个方程, 而第二式当中位移与压力的关系为 2:1。在离散形式下也应满足上述关系。

$$r = \frac{n_d \times n_u}{n_p}, \quad \begin{cases} r > n_d & \text{过少的约束} \\ r = n_d & \text{最优} \\ r < n_d & \text{过多的约束} \end{cases} \tag{2.42}$$

以图2.5所示的两个不同的二维单元混合离散方案为例, 图中阴影部分为边界条件。图2.5(a)为线性位移-常数压力三角形单元(T3P1), 有4个位移节点和2个压力节点。对应的总的位移自由度个数为 $4 \times 2 = 8$, 而3个位移节点受到边界条件约束, 因此位移自由度个数为 $8 - 3 \times 2 = 2$ 。压力自由度个数为

$2 \times 1 = 2$ 。此时，该单元的约束比为：

$$r = \frac{2}{2} = 1 \quad (2.43)$$

表明此单元压力约束自由度过多，不能缓解体积自锁现象，与实际单元的情况一致。

图2.5(b)为双线性位移-常数压力四边形单元 (Q4P1)，有 4 个位移节点和 1 个压力节点。相应的总的位移自由度个数为 8，且 3 个位移节点受到边界条件约束，位移自由度的个数为 2。压力自由度个数为 1。该单元的约束比为：

$$r = \frac{2}{1} = 2 \quad (2.44)$$

结果显示此单元满足最优约束比，能够缓解体积自锁。

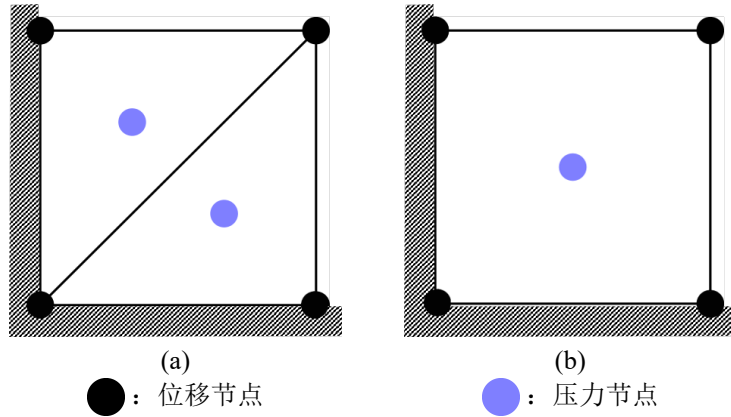


图 2.5 二维位移压力单元示例

值得注意的是，最优约束比只是一种启发式手段，并不能确保单元组合能够缓解自锁现象。它主要作为一种便捷的工具来评估单元是否有缓解自锁的潜在能力，对于具有相同数量位移和压力节点的经典单元，尽管其约束比为最优，但在实际应用中仍会出现体积自锁问题。在全面评估单元性能时，还需要综合考虑其它相关因素。

2.3.2 LBB 稳定性条件

进行免体积自锁单元性能评估时，还应考虑 Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi(LBB) 条件，也被称为 inf-sup 条件^[2-3]，是对免自锁方法更为精确的要求。这一条件基于混合离散框架构建，当满足 inf-sup 条件时，可以确保混合

方程的准确性和稳定性。

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(q_h, \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \beta > 0 \quad (2.45)$$

其中 β 为与单元尺寸 h 无关的常数。

然而，验证 LBB 稳定性条件比较困难，目前验证 LBB 稳定性条件的方法有两种。一种是数值验证，通过建立特征值问题^[2]在数值分析中验证离散方案是否满足 LBB 稳定性条件；另一种是理论分析，确定离散方案是否被包含在始终满足 LBB 稳定性条件的解析证明框架^[2]中验证其是否满足 LBB 稳定性条件。

建立特征值问题通过可以数值验证离散方案是否通过满足 inf-sup 条件。

$$\mathbf{K}^d = \lambda \mathbf{K}^v, \quad \beta = \sqrt{\lambda_p} \quad (2.46)$$

式中 λ_p 为最小非零特征值。通过改变单元尺寸 h ，验证 λ_p 是否与 h 无关来验证其是否满足 LBB 稳定性条件。

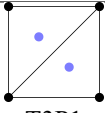
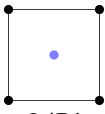
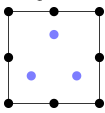
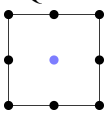
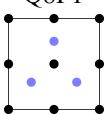
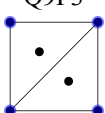
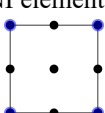
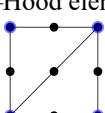
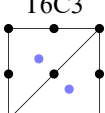
在理论分析方面，以下解析证明框架始终满足 inf-sup 条件，通过确定离散方案是否包含在该框架内，可以验证其是否满足 inf-sup 条件。



$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Pi_1 w\|_V \leq c_1 \|w\|_W \\ b(\Pi_2 \nu - \nu, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ \|\Pi_2(I - \Pi_1)w\|_V \leq c \|w\|_W \end{array} \right. \quad (2.47)$$

表2.1详细列出了用于缓解体积自锁现象的经典单元，包括它们的约束比、数值验证以及解析证明结果。从表中可以看出，传统混合有限元法中使用的单元在约束比最优的情况下无法满足 LBB 稳定性条件，而满足 LBB 稳定性条件的单元通常存在压力约束自由度不足的情况。这两种情况都会对结果的准确性和稳定性产生影响。

值得注意的是，尽管体积约束比条件简单直观，但其结果不准确。相比之下，LBB 稳定性条件虽然能够精确的验证结果且具有完备的理论，但其验证过程较为复杂，且缺乏直观性。更为关键的是，体积约束比与 LBB 稳定性条件之间的内在关联尚未得到明确阐释，这也制约着体积不可压问题的有效解决。

表 2.1 inf-sup 条件验证

离散方案	体积 约束比	inf-sup 条件 数值验证	解析证明
 T3P1	1	×	×
 Q4P1	2	×	×
 Q8P3	2	×	×
 Q8P1	6	✓	✓
 Q9P3	$\frac{8}{3}$	✓	✓
 MINI element ^[2, 3]	$\frac{8}{3}$	✓	✓
 Taylor-Hood element ^[2, 3]	$\frac{8}{3}$	✓	✓
 T6C3	8	✓	
 Crouzeix-Raviart element ^[2, 3]	4	✓	

 : 位移节点  : 压力节点

2.4 小结

本章系统探讨了体积自锁问题及其解决方案。首先，从体积不可压材料的特性出发，结合离散控制方程表达式，分析了传统有限元法在处理体积不可压

问题时产生体积自锁现象的根本原因。随后，重点介绍了两种常用的体积自锁缓解方法：罚函数与缩减积分方案和拉格朗日乘子法与混合离散方案。罚函数与缩减积分方案通过减少主应力刚度矩阵数值积分点的数量来缓解体积自锁现象；拉格朗日乘子法与混合离散方案则通过引入压力作为独立变量，并采用不同数量的位移和压力节点进行离散，以减少压力节点的数量来缓解体积自锁现象。此外，通过数值积分法等效投影，证明了两种方案的等价性。最后，基于经典的混合离散方案，阐述了免体积自锁的两个关键条件——体积约束比和 LBB 稳定性条件，并详细介绍了如何通过连续控制方程确定最优体积约束比以及混合离散单元的约束比个数。同时，列举了经典混合离散方案的约束比，并结合两种 LBB 稳定性条件的验证方法，验证其是否满足 LBB 稳定性条件。

第 3 章 最优体积约束比

针对体积约束比和 LBB 稳定性条件验证方法的局限性, 本章以一种新的方法推导 LBB 稳定性条件。通过建立 LBB 稳定性条件与特征值问题以及体积约束比之间的联系, 估计 LBB 稳定系数, 构建了一套更为简易高效的 LBB 稳定性条件验证体系。基于新提出的 LBB 稳定系数估计方法, 总结出了满足稳定性条件的最优体积约束比关系式。并且通过与经典单元的数值验证与解析证明结果进行对比分析, 验证所提出方法的正确性和可靠性。

3.1 LBB 稳定系数估计

3.1.1 LBB 稳定性条件与特征值问题

基于 LBB 稳定性条件(2.45), 假设 $\mathcal{P}_h : V_h \rightarrow Q_h$ 是 \mathcal{P} 的正交投影算子, 定义为:

$$b(q_h, \mathbf{v}_h) = (q_h, \mathcal{P}\mathbf{v}_h) = (q_h, \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h), \quad \forall q_h \in Q_h \quad (3.1)$$

式中, 散度算子 $\mathcal{P} : V \rightarrow Q, \mathcal{P} = \nabla \cdot$ 。

根据 \mathcal{P}_h 的定义, 有 $\text{Im}\mathcal{P}_h \in Q_h$ 。式(2.45)可以改写为:

$$\beta \leq \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(q_h, \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \leq \inf_{q_h \in \text{Im}\mathcal{P}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \quad (3.2)$$

对于给定的 $q_h \in \text{Im}\mathcal{P}_h$, 假设空间 $V'_h \subset V_h \setminus \ker \mathcal{P}_h$ 定义为:

$$V'_h = \{\mathbf{v}_h \in V_h \mid \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h = q_h\} \quad (3.3)$$

由 $\text{Im}\mathcal{P}_h \in Q_h$, 根据柯西-施瓦茨不等式, 有

$$|(q_h, \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h)| \leq \|q_h\|_Q \|\mathcal{P}_h\mathbf{v}_h\|_Q \quad (3.4)$$

当且仅当 $q_h = \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h$ 时, 等式成立, 即

$$|(q_h, \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h)| = \|q_h\|_Q \|\mathcal{P}_h\mathbf{v}_h\|_Q, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V'_h \quad (3.5)$$

代入到式(3.2)中可得:

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P}_h\mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} = \sup_{\mathbf{v}_h \in V'_h} \frac{\|\mathcal{P}_h\mathbf{v}_h\|_Q}{\|\mathbf{v}_h\|_V} \quad (3.6)$$

结合式(3.2)、(3.6)可得 LBB 稳定系数估算式:

$$\beta \leq \inf_{V'_h \subset V_h \setminus \ker \mathcal{P}_h} \sup_{v_h \in V'_h} \frac{\|\mathcal{P}_h v_h\|_Q}{\|v_h\|_V} \quad (3.7)$$

其中 $\ker \mathcal{P}_h \subset V$ 是 \mathcal{P}_h 的核, 定义为 $\ker \mathcal{P}_h := \{v \in V \mid \mathcal{P}_h v = 0\}$.

上述方法与传统数值 inf-sup 测试一致^{[?]1}, 而根据极小-极大值原理^{[?]1}, 式(3.7)计算刚度矩阵 K^v 和 K^d 的最小非零特征值。

3.1.2 特征值问题与体积约束比

为了进一步找出最优约束自由度数量, 假设 P_{n_u} 是一个 n_u 维的多项式空间, V_{n_u} 是位移多项式空间, 且 $V_{n_u} = P_{n_u}^2$ 。由于 V_h 和 V_{n_u} 的维度相同, $\dim V_{n_u} = \dim V_h = n_d \times n_u$, 存在一个唯一的 $v \in V_{n_u}$ 满足 $v_h = \mathcal{I}_h v$ 。于是式(3.7)的右边可以改写为:

$$\inf_{V'_h \subset V_h \setminus \ker \mathcal{P}_h} \sup_{v_h \in V'_h} \frac{\|\mathcal{P}_h v_h\|_Q}{\|v_h\|_V} = \inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{v \in V'} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathcal{I}_h v\|_Q}{\|\mathcal{I}_h v\|_V} \quad (3.8)$$

压力的自由度为 $n_p = \dim(V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h)$

根据三角不等式、柯西-施瓦茨不等式和式(3.1)中的等式关系可得:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_h \mathcal{I}_h v\|_Q &= \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h v)|}{\|q_h\|_Q} = \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P} \mathcal{I}_h v)|}{\|q_h\|_Q} \\ &\leq \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|(q_h, \mathcal{P} v)| + |(q_h, \mathcal{P} v - \mathcal{P} \mathcal{I}_h v)|}{\|q_h\|_Q} \\ &= \|\mathcal{P}_h v\|_Q + \|\mathcal{P}(\mathcal{I} - \mathcal{I}_h)v\|_Q \end{aligned} \quad (3.9)$$

显然, 式(3.9)右侧的第二项和第三项是 V_h 中近似值的插值误差和正交投影误差, 可以由如下式子估计^{[?]1}:

$$\|\mathcal{P}(\mathcal{I} - \mathcal{I}_h)v\|_Q \leq Ch|v|_H \quad (3.10)$$

从闭图像定理^{[?]1}可得 $\|\mathcal{I}_h v\|_V \geq C\|v\|_V$ 。结合式(3.9)-(3.10), 式(3.8)的右边可以表示为:

$$\inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{v \in V'} \frac{\|\mathcal{P}_h \mathcal{I}_h v\|_Q}{\|\mathcal{I}_h v\|_V} \leq \inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{v \in V'} \frac{\|\mathcal{P} v\|_Q}{\|v\|_V} + Ch \quad (3.11)$$

将等式(3.8),(3.11)替换为(3.7)可以得到以下关系:

$$\beta \leq \beta_s + Ch \quad (3.12)$$

其中

$$\beta_s = \inf_{V' \subset V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h} \sup_{\mathbf{v} \in V'} \frac{\|\mathcal{P}\mathbf{v}\|_Q}{\|\mathbf{v}\|_V} \quad (3.13)$$

当 $\beta_s > 0$ 时,

$$\dim(V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}_h \mathcal{I}_h) < \dim(V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}) \quad (3.14)$$

所以压力自由度 n_p 要满足:

$$n_p < n_s = \dim(V_{n_u} \setminus \ker \mathcal{P}) \quad (3.15)$$

此时的体积约束比要满足:

$$\frac{n_d \times n_u}{n_p} > r_{opt} = \frac{n_d \times n_u}{n_s} \quad (3.16)$$

其中 r_{opt} 为最优体积约束比。

3.2 多项式约束数量

根据上述内容, n_s 为最优约束比处的压力自由度数量, 确定 n_s 的方法如下。例如, 在二维弹性体积不可压缩问题中, 对于维数为 3 的线性多项式空间 P_3 , 对应的位移空间 V_3 由下式给出:

$$V_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right\} \quad (3.17)$$

或者按照如下式子重新排列:

$$V_3 = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}}_{\ker \mathcal{P}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{V_3 \setminus \ker \mathcal{P}} \right\} \quad (3.18)$$

从式(3.18)可以看出, $n_u = 3$, $n_s = 1$ 。根据这个方法, 具有二次多项式基的位移空间 V_6 可以表述为:

$$V_6 = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix}}_{\ker \mathcal{P}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 \end{pmatrix}}_{V_6 \setminus \ker \mathcal{P}} \right\} \quad (3.19)$$

在这种情况下, $n_u = 6$, $n_s = 3$ 。表3.1中列出了随着多项式空间阶数的增加, 各阶空间的约束自由度数量, 并总结了 n_u 与 n_s 之间的关系。

表 3.1 体积约束自由度

n_u	$2n_u$	n	n_s
3	6	1	1
6	12	2	3
10	20	3	6
15	30	4	10
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n_u	$2n_u$	$\lfloor \frac{\sqrt{1+8n_u}-3}{2} \rfloor$	$\frac{n(n+1)}{2}$

3.3 系数估计验证

同样以图3.1所示的两个二维 8 位移节点单元混合离散方案为例, 从上一章中可知图3.1(a)Q8P3 单元位移自由度个数 $2n_u = 6$, 根据表3.1可得 $n = 1$, 进而 $n_s = 1$ 。因此, 满足 LBB 稳定性条件的最优压力约束自由度的数量为 1。因此 Q8P3 单元不满足 LBB 稳定性条件, 而 Q8P1 单元满足 LBB 稳定性条件。

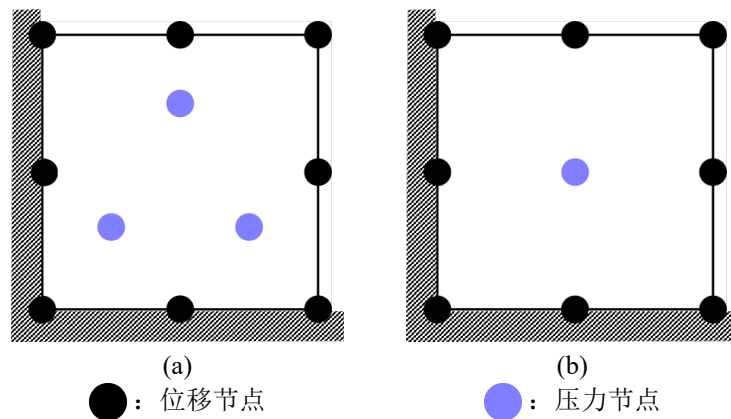
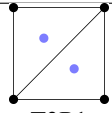
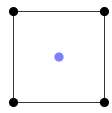
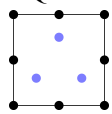
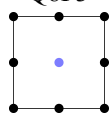
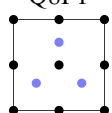
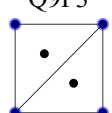
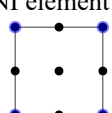
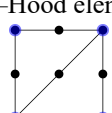
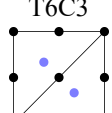


图 3.1 二维位移压力单元示例

表3.2为其他经典单元的验证结果, 通过对比分析可以看出, 本文所提的验证 LBB 稳定性条件的新方法, 其验证结果与数值验证方法和解析证明方法完全

一致。这一结果表明，新方法在使用简易的同时，能够有效的验证混合离散方案的 LBB 稳定性条件。

表 3.2 inf-sup 条件验证

离散方案	体积 约束比	inf-sup 条件		
		数值验证	解析证明	系数估计
 T3P1	1	×	×	×
 Q4P1	2	×	×	×
 Q8P3	2	×	×	×
 Q8P1	6	✓	✓	✓
 Q9P3	$\frac{8}{3}$	✓	✓	✓
 MINI element ^[2, 3]	$\frac{8}{3}$	✓	✓	✓
 Taylor-Hood element ^[2]	$\frac{8}{3}$	✓	✓	✓
 T6C3	8	✓		✓
 Crouzeix-Raviart element ^[2]	4	✓		✓
● : 位移节点 ● : 压力节点				

值得注意的是，从上述 T3P1 单元与 Q4P1 单元例子可以观察到，即使将两个单元中的压力节点数设置为最小值 1，其仍然无法满足 LBB 稳定性条件。这

一现象主要源于传统有限元离散方案中节点布置方式的固有局限性：在传统有限元混合离散方案中，压力节点必须依附于单元进行布置，且每个单元至少需要布置一个压力节点，这种限制导致节点数量无法根据位移节点与压力节点的最优比例需求进行灵活调整。因此，在传统有限元混合离散方案框架下，无论是三角形 3 位移节点单元还是四边形 4 位移节点单元，均不能满足 LBB 稳定性条件。

3.4 小结

本章对 LBB 稳定性条件进行了深入研究，通过结合特征值问题与体积约束比，推导出新的 LBB 稳定系数估算式，并确定了满足 LBB 稳定系数的最优体积约束比范围。首先，引入正交投影算子，推导出考虑刚度矩阵的最小非零特征值的 LBB 稳定系数估算式。随后，通过引入多项式空间，进一步推导出同时考虑特征值问题和体积约束自由度数量的 LBB 稳定系数估算式。在此基础上确定了满足 LBB 稳定性条件的最优体积约束比取值范围。并且，讨论了多项式空间中位移自由度和压力自由度的关系，并通过举例阐明了最优约束比下压力自由度数量的确定方法。通过规律总结了不同多项式空间阶数下的约束自由度数量，并建立了位移自由度与压力自由度数量之间的关系式，并举例说明了如何根据新方法确定混合离散单元是否满足 LBB 稳定性条件。为验证所提方法的有效性，采用系数估计法对多个经典单元进行了 LBB 稳定性条件验证，并将结果与数值验证结果、解析证明结果进行对比，充分证实了本文所提方法的正确性和可靠性。本章所提方法为验证 LBB 稳定性条件提供了更为简便直观的方法支持，对避免体积自锁问题具有重要的意义。

第4章 有限元无网格混合离散方案

第二章介绍的混合离散方案压力节点要依附单元上，无法任意布置。为了使压力自由度达到最优，在所提出的混合公式中，使用传统有限元法来近似位移，采用再生核无网格法来近似压力。

4.1 再生核近似

如图4.1所示，再生核无网格近似将求解域 Ω 及其边界 Γ 由 n_p 个无网格节点离散 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_p}$ 。每个无网格节点 \mathbf{x}_I 对应的形函数为 $\Psi_I(\mathbf{x})$ ，形函数影响域为 $\text{supp}(\mathbf{x}_I)$ ，并要求影响域的覆盖域需包含求解域 Ω ，即 $\Omega \subseteq \bigcup_{I=1}^{n_p} \text{supp}(\mathbf{x}_I)$ 。考虑求解域 Ω 内的一个变量 $u(\mathbf{x})$ ，其对应的无网格近似函数 $u_h(\mathbf{x})$ 可表示为：

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) d_I \quad (4.1)$$

其中 d_I 为与无网格节点 \mathbf{x}_I 对应的节点系数。

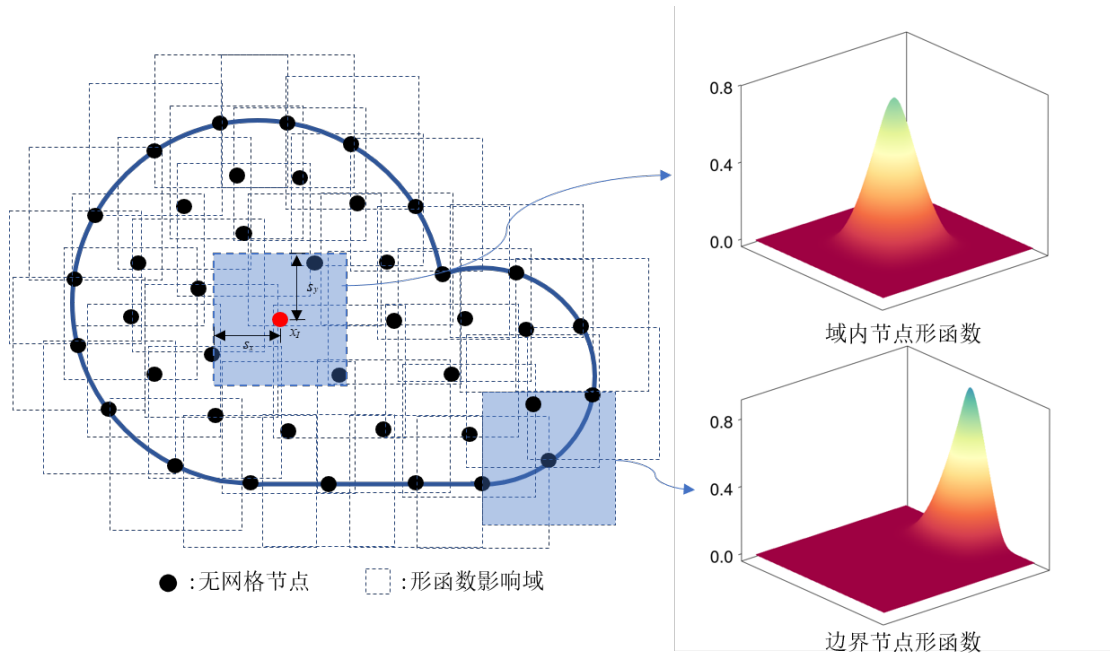


图 4.1 无网格离散示意图

根据再生核近似理论^[7]，无网格形函数可以假设为如下形式：

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (4.2)$$

其中 \mathbf{p} 为 n 阶基函数向量，其表达式为：

$$\mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, y^n\}^T \quad (4.3)$$

而 ϕ 为核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s 决定，核函数及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。在二维情况下，核函数的影响域通常为圆形或者矩形。本文的影响域形状为矩形，矩形影响域的核函数可由下列公式计算得到：

$$\phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \phi(r_x) \phi(r_y), \quad r_x = \frac{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}|}{s_x}, r_y = \frac{|\mathbf{y}_I - \mathbf{y}|}{s_y} \quad (4.4)$$

其中, s_x 和 s_y 分别为 x 和 y 方向上的影响域尺寸，若节点均匀布置，一般使两个方向上的影响域大小相等，即 $s_x = s_y = s$ 。为保证形函数的紧支性和光滑性， ϕ 通常取为阶次大于 n 的紧支函数。对于弹性力学问题，无网格基函数一般选择二阶或者三阶多项式基函数，核函数 $\phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$ 取为三次样条函数：

$$\phi(s) = \frac{1}{3!} \begin{cases} (2 - 2s)^3 - 4(1 - 2s)^3 & s \leq \frac{1}{2} \\ (2 - 2s)^3 & \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

\mathbf{c} 为待定系数向量，可以通过满足下列一致性条件确定：

$$\sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

或等效的转换形式：

$$\sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{0}) \quad (4.7)$$

将式(4.2)代入式(4.7)中即可得到待定系数向量 \mathbf{c} 的具体表达式：

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{0}) \quad (4.8)$$

式中 \mathbf{A} 为矩阵：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]T}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (4.9)$$

将式(4.8)代入式(4.2)可得最终的再生核无网格形函数表达式：

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{[n]T}(\mathbf{0}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{p}^{[n]}(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \quad (4.10)$$

4.2 有限元无网格混合离散

从图4.1中可以看出，无网格形函数全域高阶连续光滑使得伽辽金无网格法可以不受单元的限制布置节点，能在保证计算精度的情况下，调整体积约束比，达到最优体积约束比。

采用有限元无网格混合离散方案，伽辽金弱形式(2.19)中的位移 \mathbf{u} 和压力 p 采用不同的离散方式进行近似。位移 \mathbf{u} 仍采用有限元形函数(2.24)进行近似，而压力 p 通过无网格形函数(4.10)进行近似，近似的压力 p_h 可表示为：

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) p_K \quad (4.11)$$

其中 p_K 为与无网格节点 x_K 对应的节点系数。

4.3 数值算例

4.3.1 悬臂梁问题

首先考虑经典弹性力学二维悬臂梁问题，如图4.2所示，悬臂梁的长和宽分别为 $L = 48$ ， $D = 12$ ，同时悬臂梁的左端为固定支座，右端沿着 y 轴正方向施加外部荷载 $P = 1000$ 。悬臂梁的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.5 - 10^{-8}$ 。

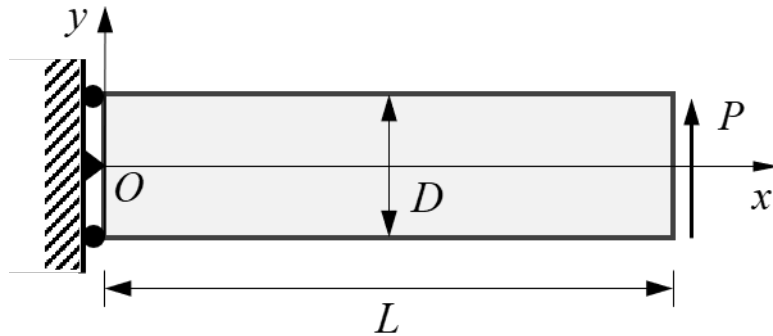


图 4.2 悬臂梁问题模型

根据圣维南原理和平面应力假设，悬臂梁问题的解析解为：

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{Py}{6EI}[(6L-3x)x + (2+\nu)(y^2 - \frac{D^2}{4})] \\ u_2 &= \frac{P}{6EI}[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu)\frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2] \end{aligned} \quad (4.12)$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= \frac{P}{2I}(\frac{D^2}{4} - y^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3.2 带孔方板问题

考虑经典的带孔方板问题，如图4.3所示，板的中心存在一半径为 $a = 1$ 的圆形小孔，同时平板的无穷远处沿 x 轴方向施加均布荷载 $T = 1000$ 。板的材料系数为杨氏模量 $E = 3 \times 10^6$ 、泊松比 $\nu = 0.49999$ 。根据 Michell 解可以得到该带孔无限大平板问题的解析解为：

$$\begin{aligned} u_x(r, \theta) &= \frac{Ta}{8\mu}(\frac{r}{a}(k+1)\cos\theta - \frac{2a^3}{r^3}\cos 3\theta + \frac{2a}{r}((1+k)\cos\theta + \cos 3\theta)) \\ u_y(r, \theta) &= \frac{Ta}{8\mu}(\frac{r}{a}(k-3)\sin\theta - \frac{2a^3}{r^3}\sin 3\theta + \frac{2a}{r}((1-k)\sin\theta + \sin 3\theta)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中， k 和 μ 分别为：

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.15)$$

与之相对应的应力分量为：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= T(1 - \frac{a^2}{r^2}(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta) + \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta) \\ \sigma_{yy} &= -T(\frac{a^2}{r^2}(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta) \\ \sigma_{xy} &= -T(\frac{a^2}{r^2}(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta) - \frac{3a^4}{2r^4}\sin 4\theta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3.3 Cook membrane 问题

考虑经典的 Cook membrane 问题，膜的尺寸如图4.4所示，右端沿着 y 轴正方向施加外部荷载 $P = 6.25$ ，膜的材料系数为杨氏模量 $E = 70$ 、泊松比 $\nu = 0.5 - 10^{-8}$ 。在这种情况下， A 点的位移参考解为： $u = 28$ 。

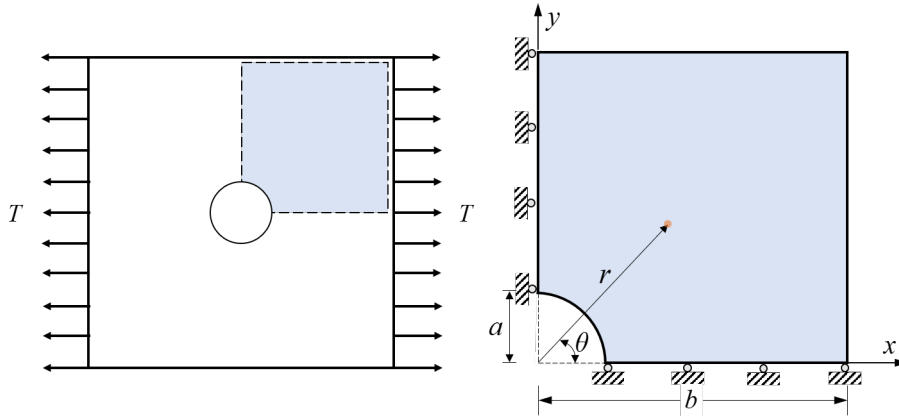


图 4.3 带孔方板问题模型

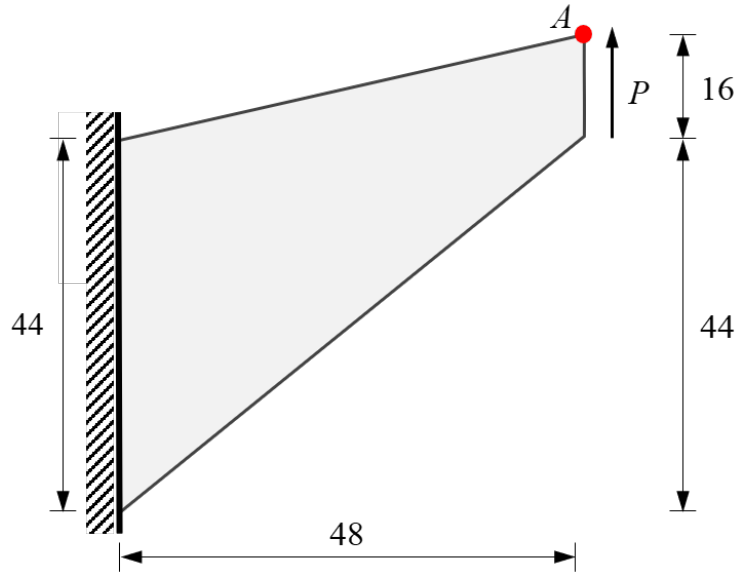


图 4.4 Cook membrane 问题模型

4.3.4 方块受压问题

考虑经典的方块受压问题，方块的尺寸如图4.5所示，方块顶面上施加外部均布荷载 $P = 80$ ，方块的材料系数为杨氏模量 $E = 240.56839$ 、泊松比 $\nu = 0.5 - 10^{-8}$ 。

4.4 小结

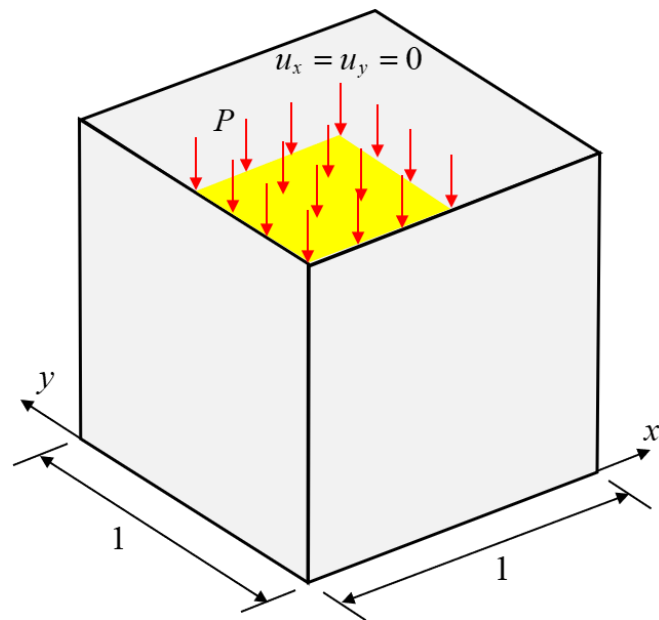


图 4.5 方块受压问题模型

第 5 章 剪切自锁问题

本章讨论另一个自锁问题，中厚板的剪切自锁问题。同样介绍目前常用的罚函数法和拉格朗日乘子法两种解决方法。上文提出的最优约束比同样适用于剪切自锁问题。

5.1 中厚板问题

考虑如图5.1所示中厚板，板厚为 h ， Ω 为板中面。在 Mindlin 假设下，中厚板考虑横向剪切变形，相应的控制方程由下式给出：

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 & \text{in } \Omega \\ Q_{\alpha,\alpha} + \bar{q} = 0 & \text{in } \Omega \\ Q_\alpha n_\alpha = \bar{Q} & \text{on } \Gamma_Q \\ M_{\alpha\beta} n_\beta = \bar{M}_\alpha & \text{on } \Gamma_M \\ \varphi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha & \text{on } \Gamma_\varphi \\ w = \bar{w} & \text{on } \Gamma_w \end{cases} \quad (5.1)$$

式中， $M_{\alpha\beta}$ 可表示弯矩张量 \mathbf{M} 的弯曲或扭转部分的分量， Q_α 为剪力张量 \mathbf{Q} 的分量， \bar{q} 为垂直于板中面的分布荷载； Γ_w 和 Γ_φ 为本质边界条件， \bar{w} 和 $\bar{\varphi}_\alpha$ 分别为本质边界条件上给定的挠度和转角； Γ_Q 和 Γ_M 为自然边界条件， \bar{Q} 和 \bar{M}_α 为自然边界上的等效剪力和法向弯矩； n_α 为边界上外法线方向 \mathbf{n} 的分量。

在平面应力假设下，对于各同向性线弹性材料，其本构关系表示为：

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{h^3}{12} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \kappa_{\gamma\eta} = \frac{h^3}{12} D_{\alpha\beta\gamma\eta} \varphi_{\gamma,\eta} \quad (5.2)$$

$$Q_\alpha = k \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_\alpha = kGh(-\varphi_{\alpha,\beta} + w_{,\beta}) \quad (5.3)$$

其中， k 为剪切修正系数， $\kappa_{\alpha\beta}$ 为曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的分量， γ_α 为剪切应变矢量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的分量，表达式为：

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\varphi_{\alpha,\beta} \quad \gamma_\alpha = -\varphi_{\alpha,\beta} + w_{,\beta} \quad (5.4)$$

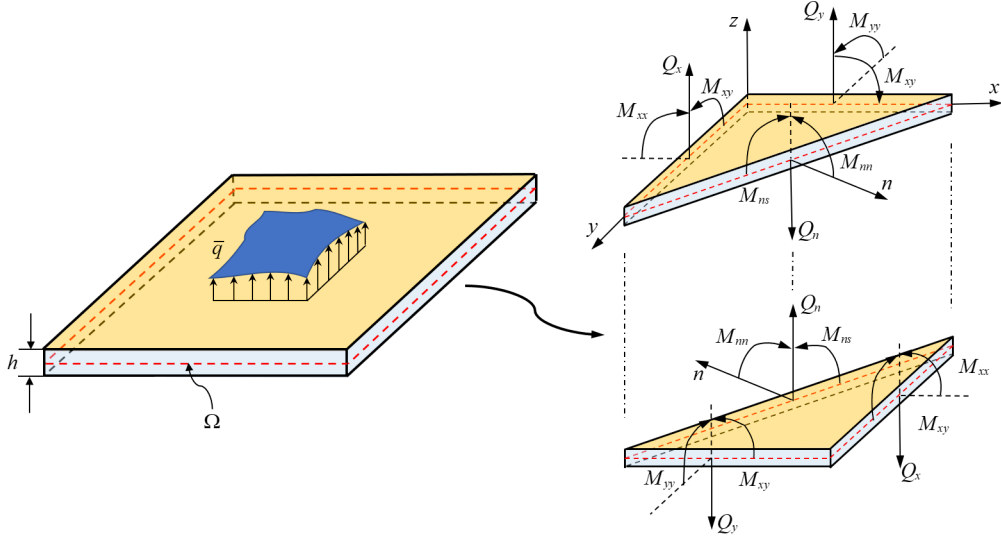


图 5.1 中厚板运动学及边界条件

式中 $D_{\alpha\beta\gamma\eta}$ 为在平面应力假设下四阶弹性张量的分量，表达式为：

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + \frac{1}{2}(1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma})) \quad (5.5)$$

根据最小势能原理，强形式(5.1)所对应的势能泛函表达式为：

$$\begin{aligned} \Pi(w, \varphi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_M} \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma_Q} w \bar{Q} d\Gamma - \int_{\Omega} w \bar{q} d\Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

对式(5.6)进行变分可得伽辽金弱形式：Find $(w, \varphi_{\alpha}) \in V$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega = \\ & - \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_Q} \delta w \bar{Q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega, \quad \forall (\delta w, \delta \varphi_{\alpha}) \in V \end{aligned} \quad (5.7)$$

对于考虑横向剪切变形的中厚板，根据中厚板的本构关系(5.2)，(5.3)，当其厚度减小 $h \rightarrow 0$ ， $h \gg h^3$ 将导致弯矩 $M_{\alpha\beta}$ 减小的速度远大于剪力 Q_{α} ，使得 $Q_{\alpha} \gg M_{\alpha\beta}$ 。从式(5.7)中可以看出当 $Q_{\alpha} \gg M_{\alpha\beta}$ ，剪切应变 γ 被约束，导致板的剪切位移为 0。

在传统有限元法中，如图5.2所示整个板中面 Ω 由一组具有节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_u}$ 的构造网格离散，其中 n_u 是节点的数量。挠度 w 及其变分 δw ，转角 φ_{α} 及其变分 $\delta \varphi_{\alpha}$ 可通过 x_I 处的节点系数和形函数进行近似：

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) w_I, \quad \delta w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta w_I \quad (5.8)$$

$$\varphi_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \varphi_{\alpha I}, \quad \delta \varphi_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta \varphi_{\alpha I} \quad (5.9)$$

其中, N_I 为节点 x_I 处的形函数, w_I 和 $\varphi_{\alpha I}$ 节点系数张量。

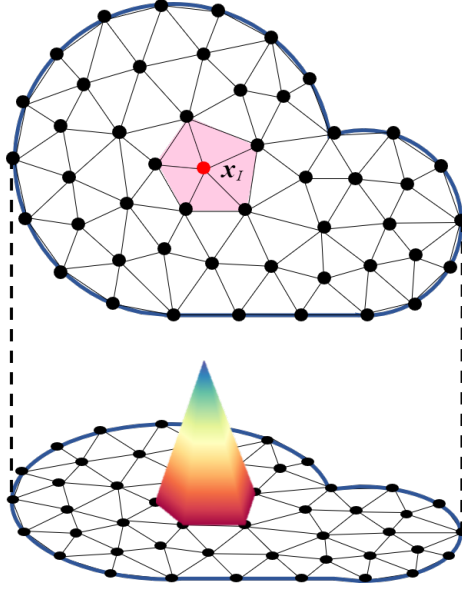


图 5.2 有限元离散示意图

结合式(5.4), (5.8)和(5.9), 相应的近似曲率 $\boldsymbol{\kappa}^h$ 和近似剪切应变 $\boldsymbol{\gamma}^h$ 可表示为:

$$\boldsymbol{\kappa}^h = \begin{Bmatrix} \kappa_{11}^h \\ \kappa_{22}^h \\ 2\kappa_{12}^h \end{Bmatrix} = - \sum_{I=1}^{n_u} \begin{bmatrix} 0 & N_{I,1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,2} \\ 0 & N_{I,2} & N_{I,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_I \\ \varphi_{1I} \\ \varphi_{2I} \end{Bmatrix} = - \sum_{I=1}^{n_u} \mathbf{B}_I^b \mathbf{d}_I \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^h = \begin{Bmatrix} \gamma_1^h \\ \gamma_2^h \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_u} \begin{bmatrix} N_{I,1} & N_I & 0 \\ N_{I,2} & 0 & N_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_I \\ \varphi_{1I} \\ \varphi_{2I} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_u} \mathbf{B}_I^s \mathbf{d}_I \quad (5.11)$$

$$\delta \boldsymbol{\kappa}^h = - \sum_{I=1}^{n_u} \mathbf{B}_I^b \delta \mathbf{d}_I, \quad \delta \boldsymbol{\gamma}^h = \sum_{I=1}^{n_u} \mathbf{B}_I^s \delta \mathbf{d}_I \quad (5.12)$$

将式(5.12)代入到弱形式(5.7)可得下列里兹-伽辽金问题: Find $(w^h, \varphi_{\alpha}^h) \in V_h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \kappa_{\alpha\beta}^h M_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha}^h Q_{\alpha} d\Omega = \\ & - \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha}^h \bar{M}_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_Q} \delta w^h \bar{Q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta w^h \bar{q} d\Omega, \quad \forall (\delta w^h, \delta \varphi_{\alpha}^h) \in V_h \end{aligned} \quad (5.13)$$

根据 $\delta \boldsymbol{\kappa}^h$ 和 $\delta \boldsymbol{\gamma}^h$ 的任意性, 上述方程可简化为如下离散控制方程:

$$(\mathbf{K}^b + \mathbf{K}^s) \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (5.14)$$

其中, \mathbf{K}^b 为弯曲刚度矩阵, \mathbf{K}^s 为剪切刚度矩阵, \mathbf{f} 为力向量, 其分量具有以下形式:

$$\mathbf{K}_{IJ}^b = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{bT} \mathbf{D} \mathbf{B}_J^b d\Omega \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^s = h \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{sT} k G \mathbf{B}_J^s d\Omega \quad (5.16)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_Q} N_I \bar{\mathbf{Q}} d\Gamma - \int_{\Gamma_M} N_I \bar{\mathbf{M}} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \bar{\mathbf{q}} d\Omega \quad (5.17)$$

式中, \mathbf{D} 为平面应力弹性矩阵, 等效剪力 $\bar{\mathbf{Q}}$, 法向弯矩 $\bar{\mathbf{M}}$, 分布荷载 $\bar{\mathbf{q}}$ 的分量分别为:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \bar{Q} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \bar{\mathbf{M}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}, \bar{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

5.2 中厚板问题混合离散方案

同样, 由式(5.14), (5.15)和(5.16)可知, 对于中厚板, 当外力向量具有一定的数值时, 厚度 h 减小 $h \rightarrow 0$ 将导致剪切刚度矩阵 \mathbf{K}^s 中的所有模态也趋向零。此时, 剪切刚度矩阵 \mathbf{K}^s 可作为罚函数项将剪切刚度中所有模态约束住, 厚度 h 为其中的罚因子。用传统有限元法进行求解时, 由于离散的有限元近似阶次较低, 导致过多的位移自由度受到剪切约束的限制, 位移解将远小于实际情况, 即出现剪切自锁现象。

常用的缓解剪切自锁的方法与第二章介绍的体积自锁问题一样有罚函数法与缩减积分方案和拉格朗日乘子法与混合离散方案。对于剪切自锁问题, 缩减积分方案与第二章中的相同, 而对于拉格朗日乘子法与混合离散方案, 引入剪切应力 \mathbf{Q} 作为拉格朗日乘子独立变量, 可以得到拉格朗日乘子型剪切约束施加方案。此时能量泛函具有挠度 w 、转角 φ 和剪切应力 \mathbf{Q} 三个变量, 势能泛函的表达式可更改为:

$$\begin{aligned} \Pi(w, \varphi, \mathbf{Q}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q_{\alpha} (\gamma_{\alpha} - \frac{Q_{\alpha}}{kGh}) d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i t_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_i b_i d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha} Q_{\alpha}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Q_{\alpha} (\gamma_{\alpha} - \frac{Q_{\alpha}}{kGh}) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_M} \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma_Q} w \bar{Q} d\Gamma - \int_{\Omega} w \bar{q} d\Omega \end{aligned} \quad (5.19)$$

对式(5.19)进行变分可得伽辽金弱形式:

$$\begin{aligned}
 & \delta \Pi(w, \varphi, Q) \\
 &= \int_{\Omega} \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma_{\alpha} \delta Q_{\alpha} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma_{\alpha} \delta Q_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\delta Q_{\alpha} Q_{\alpha}}{kGh} d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma_Q} \delta w \bar{Q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_{\alpha} \delta Q_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\delta Q_{\alpha} Q_{\alpha}}{kGh} d\Omega + \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma \\
 &- \int_{\Gamma_Q} \delta w \bar{Q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

上述伽辽金弱形式可以改写为: Find $\mathbf{u} = (w, \varphi) \in V, \mathbf{p} \in Q$,

$$\begin{aligned}
 a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\delta \mathbf{u}, \mathbf{p}) &= f(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \\
 b(\mathbf{u}, \delta \mathbf{p}) + c(\delta \mathbf{p}, \mathbf{p}) &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{p} \in Q
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

具体表达式为:

$$\int_{\Omega} \delta \kappa_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma_{\alpha} Q_{\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma_Q} \delta w \bar{Q} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w \bar{q} d\Omega - \int_{\Gamma_M} \delta \varphi_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\Gamma \tag{5.22}$$

$$\int_{\Omega} \gamma_{\alpha} \delta Q_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\delta Q_{\alpha} Q_{\alpha}}{kGh} d\Omega = 0 \tag{5.23}$$

采用伽辽金法进行求解时, 挠度 w 、转角 φ 和剪切应力 Q 可以采用不同的离散节点进行近似, 形成混合离散框架。近似的剪切应力 Q^h 及其变分可表示为:

$$Q_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_q} \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{q}_K, \quad \delta Q_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_q} \psi_K(\mathbf{x}) \delta \mathbf{q}_K \tag{5.24}$$

其中, \mathbf{q}_K 是节点系数, ψ_K 是对应的形函数。

根据 κ^h 、 γ^h 和 Q^h 的任意性, 式(5.21)可简化为如下离散控制方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^b & \mathbf{K}^{sq} \\ \mathbf{K}^{sqT} & \mathbf{K}^{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

式中, \mathbf{K}^{sq} 为刚度矩阵中和位移、剪切应力都有关的部分, \mathbf{K}^{qq} 为刚度矩阵中只和剪切应力相关的部分, 其分量分别为:

$$\mathbf{K}_{IK}^{sq} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{sT} \psi_K d\Omega \tag{5.26}$$

$$\mathbf{K}_{KL}^{qq} = -\frac{1}{kGh} \int_{\Omega} \psi_K \psi_L \mathbf{1} d\Omega \tag{5.27}$$

5.3 最优剪切约束比