

学校代码: 10385

分类号: _____

研究生学号: _____

密 集: _____



华侨大学
HUAQIAO UNIVERSITY

硕士专业学位论文

自稳定有限元无网格混合离散分析方法及其在自锁问题中的应用

作 者 姓 名: _____

指 导 教 师: _____

合 作 教 师: _____

实 践 教 师: _____

专业学位类别: 工程硕士

专业学位领域: 土木水利

研 究 方 向: 结构体系创新与工程应用

所 在 学 院: 土木工程学院

论文提交日期: 二〇二五年三月 XX 日

摘 要

\LaTeX 是一种强大的排版系统，该系统提供了丰富的功能，包括自动编号、交叉引用、数学公式排版、参考文献管理等。它还支持多种文档类、宏包和模板，使用户能够根据自己的需求定制文档的外观和格式，广泛用于撰写学术论文、科技文档和出版物。本文主要以前期准备、图表设置、使用 Zotero 管理参考文献、 \LaTeX 部分所需包介绍、附录和参考格式等环节进行介绍。首先在前期准备中介绍了 Git 的相关内容以及 VS Code 的配置。此外，还介绍了文件和标签的命名规则，为编写论文的命名提供参考，并对在 \LaTeX 中的图表设置以例子详细说明如何在论文中插入和设置图表，涵盖了图片的插入、标注、引用和交叉引用等方面的技巧和方法，也对如何使用 Zotero 管理参考文献进行了介绍说明。最后，在附录部分给出了参考格式的理解说明。通过阅读本文，读者将获得关于前期准备、图表设置、参考文献管理、 \LaTeX 必需包、附录和参考格式的全面指导，有助于顺利完成论文写作和格式规范要求。

关键词： \LaTeX ；模板学习

目 录

| | |
|------------------------------------|----|
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 1.1 选题背景及意义 | 1 |
| 1.2 国内外研究历史及现状 | 1 |
| 1.3 本文主要内容 | 1 |
| 第 2 章 体积自锁问题 | 3 |
| 2.1 体积不可压材料 | 3 |
| 2.2 调整体积约束 | 4 |
| 2.2.1 罚函数法 | 4 |
| 2.2.2 拉格朗日乘子法 | 5 |
| 2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性 | 7 |
| 2.3 体积自锁程度判断方法 | 8 |
| 2.3.1 体积约束比 | 8 |
| 2.3.2 LBB 稳定性条件 | 10 |
| 2.4 小结 | 11 |
| 第 3 章 最优约束比例 | 13 |
| 3.1 LBB 稳定系数估计 | 13 |

第1章 引言

- 1.1 选题背景及意义
- 1.2 国内外研究历史及现状
- 1.3 本文主要内容

第 2 章 体积自锁问题

本章针对体积不可压材料数值分析的体积自锁问题，介绍了罚函数法和拉格朗日乘子法两种解决方法，讨论了两种方法的等价性。同时，说明了体积自锁程度的判定方法，包括体积约束比和 LBB 稳定性条件。

2.1 体积不可压材料

考虑一个维度为 n_d 具有边界 Γ 的体积不可压材料弹性体 $\Omega \in \mathbb{R}^{n_d}$ ，其中 Γ_t 和 Γ_g 分别表示其自然边界和本质边界，且 $\Gamma_t \cup \Gamma_g = \Gamma$, $\Gamma_t \cap \Gamma_g = \emptyset$ 。该问题相应的强形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，对于各向同性线弹性材料，其本构关系表示为：

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 3\kappa\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 为应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的体积应变和偏应变部分：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^v, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^d = 0 \quad (2.3)$$

其中， $\mathbf{1} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ 是二阶恒等张量。

κ, μ 分别为体积模量和剪切模量，它们与杨氏模量 E 和泊松比 ν 之间存在如下关系式：

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

\mathbf{b} 为 Ω 中的体力， \mathbf{t}, \mathbf{g} 分别为自然边界和本质边界上的牵引力和位移。

对于体积几乎不可压缩材料，它们的泊松比 $\nu \rightarrow 0.5$ ，相应的体积模量 $\kappa \rightarrow \infty$ ， $\kappa \gg \mu$ ，使得其体积变化无限小。

采用伽辽金法进行求解时，其相对应的伽辽金弱形式为：位移 $\mathbf{u} \in V$ 满足

$$\int_{\Omega} 2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa\delta\boldsymbol{\varepsilon}^v : \boldsymbol{\varepsilon}^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V \quad (2.5)$$

其中, 空间 $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_g\}$ 。 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^v$ 和 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 分别为 $\delta\mathbf{u}$ 表示的体积应变和偏应变的变分。

在传统有限元法中, 整个求解域 Ω 可离散为一组节点 $\{\mathbf{x}_I\}_{I=1}^{n_u}$ 表示^[7], 其中 n_u 是位移节点的数量。位移 \mathbf{u} 及其变分 $\delta\mathbf{u}$ 可通过 \mathbf{x}_I 处的节点系数和形函数进行近似:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I, \quad \delta\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x})\delta\mathbf{u}_I \quad (2.6)$$

其中 N_I 和 u_I 分别为节点 x_I 处的形函数和节点系数张量。将式(2.6)代入到弱形式(2.5)中可得下列的里兹-伽辽金问题: 近似位移 $\mathbf{u}_h \in V_h$ 满足

$$\int_{\Omega} 2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa\delta\boldsymbol{\varepsilon}_h^v : \boldsymbol{\varepsilon}_h^v d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \delta\mathbf{u}_h \in V_h \quad (2.7)$$

其中近似空间 $V_h \subseteq V$, $V_h = \{\mathbf{v}_h \in (\text{span}\{N_I\}_{I=1}^{n_u})^{n_d} \mid \mathbf{v}_h = \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_g\}$ 。根据 $\delta\mathbf{u}_h$ 的任意性, 等式两边同时消除 $\delta\mathbf{u}_I$, 上述方程可以简化为以下离散控制方程:

$$(\mathbf{K}^d + \mathbf{K}^v)\mathbf{d}^u = \mathbf{f} \quad (2.8)$$

式中, 体积刚度矩阵 \mathbf{K}^v 和偏应力刚度矩阵 \mathbf{K}^d 的分量分别为:

$$\mathbf{K}_{IJ}^v = 3\kappa \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{vT} \mathbf{B}_J^v d\Omega \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^d = 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{dT} \mathbf{B}_J^d d\Omega \quad (2.10)$$

力向量 \mathbf{f} 的分量为:

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} N_I \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \mathbf{b} d\Omega \quad (2.11)$$

\mathbf{d}^u 是包含 \mathbf{u}_I 的系数向量。

对于体积几乎不可压缩的材料, $\kappa \rightarrow \infty$, $\mathbf{K}^v \gg \mathbf{K}^d$ 。因此式(2.8)中的体积刚度矩阵 \mathbf{K}^v 可视作一种强制使用的罚函数法使得体积变形为 0, 即 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, 而体积模量 κ 可视作罚因子。由于这种情况, 使用传统有限元法会产生严重的体积锁定, 就是所谓的体积自锁现象。

2.2 调整体积约束

2.2.1 罚函数法

传统有限元法发生体积自锁的自由度为刚度矩阵的秩 $\text{rank}(\mathbf{K})$, 通过减少体积刚度矩阵中的积分点数量, 可以达到缓解体积自锁的目的。为了清晰起见,

将数值积分代入上述刚度矩阵中：

$$\mathbf{K}_{IJ} \approx \bar{\mathbf{K}}_{IJ} = \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G=1}^{n_g} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_G) \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_G) w_G \quad (2.12)$$

其中， \mathbf{x}_G 和 w_G 分别为积分点的位置和权重。 n_e 是单元的数量， n_g 是每个单元中积分点的数量，因此总的积分点数量为 $n_e \times n_g$ 。

以图2.1中二维四边形单元 (Quad4) 为例，传统二维四边形单元使用 2×2 高斯积分点作为全积分，对应的体积自锁自由度为：

$$\text{rank}(\mathbf{K}) = \min(n_e \times n_g, n_d \times n_u) = \min(4n_e, 2n_u) \quad (2.13)$$

采用缩减积分单元，积分点的数量从 4 个减少到 1 个，此时的体积自由度为：

$$\text{rank}(\mathbf{K}) = \min(n_e, 2n_u) \quad (2.14)$$

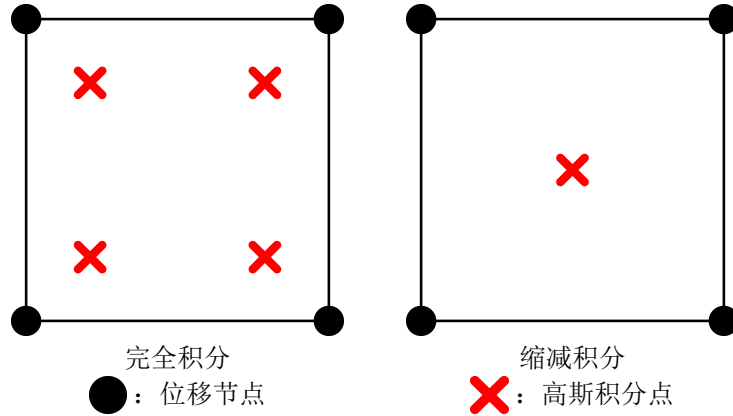


图 2.1 Quad4 单元缩减积分

通过减少对体积自由度的约束，缓解体积自锁现象，但是低阶高斯积分将伴随着数值积分精度不足，引起数值计算结果振荡和精度下降。针对低阶高斯积分精度不足的问题，可以使用选择积分法。该方法对于偏应力刚度矩阵使用全积分，对体积刚度矩阵采用缩减积分进行计算，保持了偏应力刚度矩阵的自由度个数，只减少体积刚度矩阵的自由度个数，从而提高求解精度。

2.2.2 拉格朗日乘子法

施加约束的方式除了传统罚函数法外，还有拉格朗日乘子法。拉格朗日乘子法中将压力 p 作为拉格朗日乘子独立变量，相对应的强形式中增加了压力 p

与位移之间的约束：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (2.15)$$

式中应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 采用两个变量表示：

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = p\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d(\mathbf{u}) \quad (2.16)$$

其中 $p \in Q$, $Q = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\}$ 。此时，能量泛函具有位移 \mathbf{u} 压力 p 两个变量，分别对两变量进行变分，可得相对应的伽辽金弱形式为：位移 $\mathbf{u} \in V$ ，压力 $p \in Q$ 满足

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{v}, p) &= f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中， $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ， $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ 为双线性算子， $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 为线性算子，它们具有以下形式：

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{v} : \nabla^s \mathbf{u} d\Omega \quad (2.18)$$

$$b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} p d\Omega \quad (2.19)$$

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (2.20)$$

位移 \mathbf{u} 压力 p 双变量可采用不同的离散方式进行近似，形成混合离散框架。

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I \quad (2.21)$$

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) p_K, \quad \delta p_h(\mathbf{x}) = \sum_{K=1}^{n_p} \Psi_K(\mathbf{x}) \delta p_K \quad (2.22)$$

此时，压力 p 的自由度个数则反应了体积约束个数。式中， n_p 分别为压力节点的总数， p_K 为压力节点系数， Ψ_K 为对应的形函数。

根据 u_h 和 p_h 的任意性，式(2.17)可得到如下离散控制方程：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{up} \\ (\mathbf{K}^{up})^T & \mathbf{K}^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^u \\ \mathbf{d}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

式中 $\mathbf{K}^{uu} = \mathbf{K}^d$ 。

由式(2.23)离散控制方程中的第二个等式，系数向量 d^p 可用 d^u 表示：

$$d^p = (K^{pp})^{-1}(K^{up})^T d^u \quad (2.24)$$

将上式代入到式(2.23)的第一个等式中可得：

$$\begin{aligned} & \underbrace{(K^{uu})}_{K^d} + \underbrace{K^{up}(K^{pp})^{-1}(K^{up})^T}_{\tilde{K}^v} d^u = f \\ \Rightarrow & (K^d + \tilde{K}^v) = f \end{aligned} \quad (2.25)$$

此时，位移自由度为 $\text{rank}(K^d)$ ，压力自由度为 $\text{rank}(K^v)$ 。

$$\text{rank}(K^d) = n_d \times n_u, \quad \text{rank}(K^v) = n_p \quad (2.26)$$

2.2.3 罚函数法和拉格朗日乘子法方法的等价性

从拉格朗日乘子法的离散方程(2.25)中可以看出，压力 p_h 的解是 $3\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}_h$ 的一个正交投影。令 $P_h : V_h \rightarrow P_h(V_h)$ 使得 $P_h(V_h) \subseteq Q_h$ ，其中 $P_h(V_h) = \text{Im } P_h$ 是线性算子 P_h 的虚部^[2]。在这种情况下， $p_h = P_h(3\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}_h) = 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h$ ，式(2.17)可以改写为：

$$\int_{\Omega} q_h (\nabla \cdot \mathbf{u}_h - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h) d\Omega = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.27)$$

相应的，弱形式体积部分变为：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h p_h d\Omega &= \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h - \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h) p_h d\Omega}_0 + \int_{\Omega} \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \underbrace{p_h}_{\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega \end{aligned} \quad (2.28)$$

里兹-伽辽金变分方程变为：位移 $\mathbf{u}_h \in V_h$ 满足

$$\int_{\Omega} 2\mu \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^d : \boldsymbol{\varepsilon}_h^d d\Omega + \int_{\Omega} 3\kappa \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h \quad (2.29)$$

相比之下，对于罚函数法，缩减积分也可以被视作一种投影。设 ϱ_i 为正交多项式，

$$\int_{\Omega_C} \varrho_i \varrho_j d\Omega = \begin{cases} J_C w_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

正交插值 $T^k : V \rightarrow W^k$ ，其中 W^k 是由 k 个正交多项式构成的插值空间：

$$W^k := \text{span}\{\varrho_i\}_{i=1}^k \quad (2.31)$$

对于传统高斯积分方案, $\varrho_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, \mathbf{x}_j 是积分点的位置。体积应变可以通过正交插值法表示为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \approx \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{G=1}^{n_g} \varrho_G(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) = \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \quad (2.32)$$

而积分点被视为插值系数。虽然积分点的总数 n_g 低于完全积分, 这意味着 $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$ 投影到子空间。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 3\kappa \bar{\nabla} \cdot \delta \mathbf{u}_h \bar{\nabla} \cdot \mathbf{u}_h d\Omega &= \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G,L=1}^{n_g} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_L) \int_{\Omega} \varrho_G \varrho_L d\Omega \\ &= \sum_{C=1}^{n_e} \sum_{G=1}^{n_g} 3\kappa \nabla \cdot \delta \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_G) J_C w_G \end{aligned} \quad (2.33)$$

通过对比式(2.33)和式(2.28), 罚函数法实际上与拉格朗日乘子法等价, 两种方法都可以用投影的方式来描述。

2.3 体积自锁程度判断方法

2.3.1 体积约束比

约束比是用来衡量变量间的约束程度的重要指标。对于不可压问题而言, 约束比定义为位移总自由度与压力总自由度的比值。在理想情况下, 最优约束比应与相应的偏微分控制方程一致。例如, 在二维情况下, 不可压问题涉及两个位移控制方程和一个压力控制方程, 因此最优约束比为 2。当约束比小于 2 时会出现体积自锁的倾向。当约束比大于 2 时可能会导致压力计算出现较大误差。相关的结论 Hughes 已经做出了总结^[2]。

$$r = \frac{n_d \times n_u}{n_p}, \quad \begin{cases} r > n_d & \text{过少的约束} \\ r = n_d & \text{最优} \\ r < n_d & \text{过多的约束} \end{cases} \quad (2.34)$$

图2.2为四种不同的二维位移压力单元, 图中阴影部分为边界条件, 边界上位移、压力节点自由度均为 0。

图2.2(a) 为线性位移-常数压力三角形单元 (T3P1), 它的约束比为:

$$r = \frac{2 \times n_u}{n_p} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \quad (2.35)$$

表明此单元体积约束过多, 会产生体积自锁, 与实际情况一致。

图2.2(b) 为双线性位移–常数压力四边形单元 (Q4P1)，约束比为：

$$r = \frac{2 \times n_u}{n_p} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \quad (2.36)$$

此单元满足最优约束比，能够缓解体积自锁。

图2.2(c) 为双线性位移–连续双线性压力四边形单元 (Q4C4)，约束比为：

$$r = \frac{2 \times n_u}{n_p} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \quad (2.37)$$

结果显示满足最优约束比，然而这个单元结果并不收敛，不能缓解体积自锁。

图2.2(d) 为 8 节点位移–连续双线性压力四边形单元 (Q8C4)，约束比为：

$$r = \frac{2 \times n_u}{n_p} = \frac{2 \times 3}{1} = 6 \quad (2.38)$$

约束比很大，表示这个单元体积约束太少。实际应用中虽然能缓解体积自锁，但是存在收敛性问题。

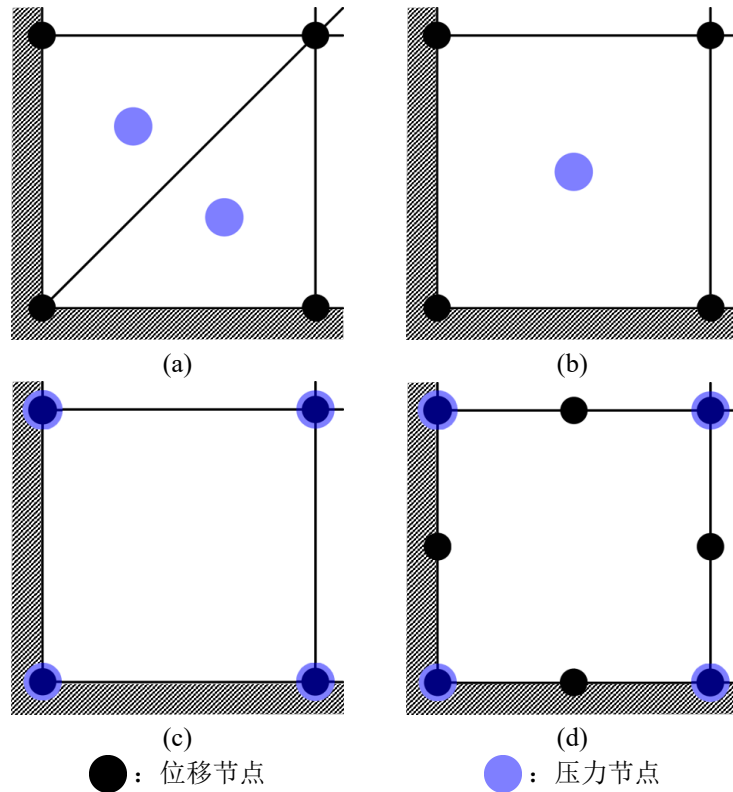


图 2.2 二维位移压力单元示例

从上述分析来看，Hughes 对约束比的总结只是一种启发式手段，并不能确保单元组合能够缓解自锁现象。它主要作为一种便捷的工具来评估单元是否有

缓解自锁的潜在能力，在全面评估单元性能时，还需要综合考虑其它相关因素。对于图2.2(c)这类具有相同数量位移和压力节点的经典单元，尽管其约束比为最优，但在实际应用中仍会出现体积自锁问题。尽管其它满足最优约束比的单元可以在一定程度上缓解体积自锁现象，但它们并不一定能满足 LBB 稳定性条件。例如图2.2(b)Q4P1 单元就不满足 LBB 稳定性条件，压力的解出现了明显的振荡现象，这种现象通常被称为伪压力模式或应力棋盘模式。

2.3.2 LBB 稳定性条件

Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi(LBB) 条件，也被称为 inf-sup 条件^[2, 3]，是对免自锁方法更为精确的要求。这一条件基于混合离散框架构建，当满足 inf-sup 条件时，可以确保混合方程的准确性和稳定性。

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(q_h, \mathbf{v}_h)|}{\|q_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \beta > 0 \quad (2.39)$$

其中 β 为与单元尺寸 h 无关的常数。

建立特征值问题^[2]可以数值验证离散方案是否通过满足 inf-sup 条件。

$$\mathbf{K}^d = \lambda \mathbf{K}^v, \quad \beta = \sqrt{\lambda_p} \quad (2.40)$$

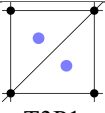
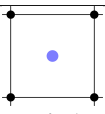
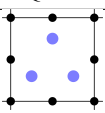
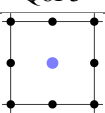
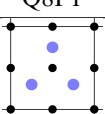
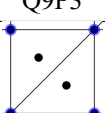
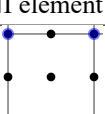
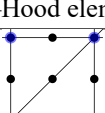
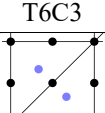
式中 λ_p 为最小非零特征值。

在理论分析方面，以下解析证明框架^[2]始终满足 inf-sup 条件，通过确定离散方案是否包含在该框架内，可以验证其是否满足 inf-sup 条件。

$$\begin{cases} \|\Pi_1 w\|_V \leq c_1 \|w\|_W \\ b(\Pi_2 \nu - \nu, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ \|\Pi_2(I - \Pi_1)w\|_V \leq c \|w\|_W \end{cases} \quad (2.41)$$

表2.1详细列出了用于体积锁定的经典单元，包括它们的约束比、数值验证以及解析证明结果。显然，传统混合有限元法中使用的单元在约束比最优的情况下无法满足 inf-sup 条件。相反，满足 inf-sup 条件的单元通常存在体积约束不足的情况。无论是不满足 inf-sup 条件还是体积约束不足，都会对结果的准确性和稳定性产生影响。同时，对 inf-sup 条件的数值验证和解析证明都相当复杂，约束比与 inf-sup 条件之间的关系也并不明确。

表 2.1 inf-sup 条件验证

| 离散方案 | 约束比 | inf-sup 条件 | |
|---|---------------|------------|------|
| | | 数值验证 | 解析证明 |
|  T3P1 | 1 | × | × |
|  Q4P1 | 2 | × | × |
|  Q8P3 | 2 | × | × |
|  Q8P1 | 6 | ✓ | ✓ |
|  Q9P3 | $\frac{8}{3}$ | ✓ | ✓ |
|  MINI element ^[2, 2] | $\frac{8}{3}$ | ✓ | ✓ |
|  Taylor-Hood element ^[2, 1] | $\frac{8}{3}$ | ✓ | ✓ |
|  T6C3 | 8 | ✓ | |
|  Crouzeix-Raviart element ^[2, 1] | 4 | ✓ | |

2.4 小结

本章讨论了体积自锁问题及其目前的解决方法。首先介绍了体积不可压材料的性质，随后详细讨论了通过罚函数法和拉格朗日乘子法调整体积约束解决体积不可压问题的方法，两种方法在数学上等价。同时，本章还介绍了体积分

束比和 LBB 稳定性条件作为判断自锁程度的依据，并指出传统混合离散法无法同时满足最优约束比和 LBB 稳定性条件。

第 3 章 最优约束比例

本章用一种新的方式推导了 LBB 稳定性条件，建立了 LBB 稳定性条件与特征值问题和压力自由度之间的关系，提出了更精确的最优约束比。

3.1 LBB 稳定系数估计

(2.39)

