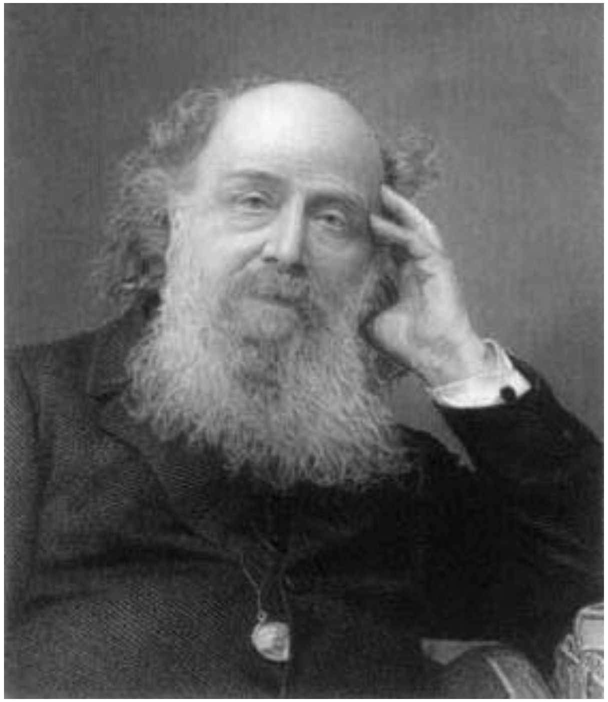
第三章　矩阵

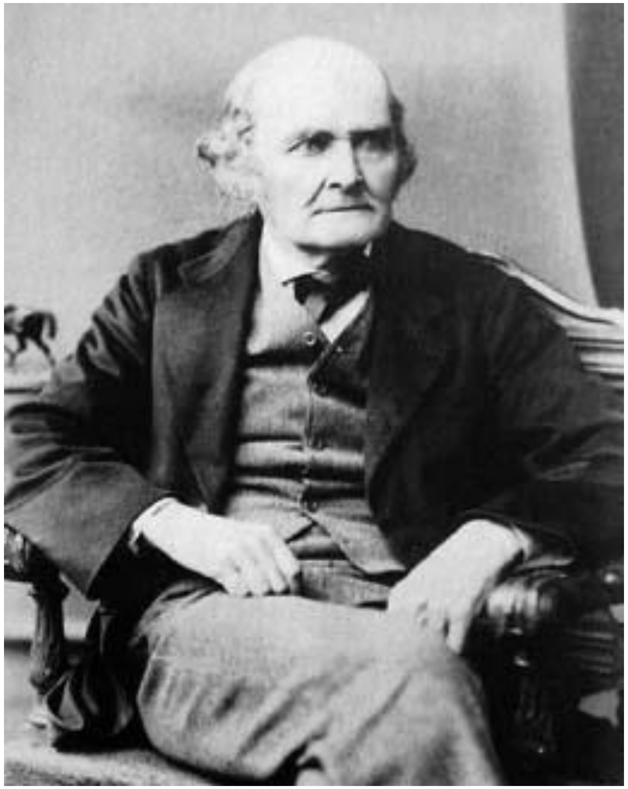
矩阵的由来

1850年，英国数学家西尔维斯特在研究方程的个数与未知变元的个数不相同的线性方程组时，为了区别于行列式 (determinant)，引入了矩阵 (matrix) 这个术语。



James Joseph Sylvester
(1814.9.3~1897.3.15)

矩阵的由来



Arthur Cayley
(1821.8.16~1895.1.26)

为了寻求对线性方程组求解的简化，英国数学家阿瑟·凯莱对于看似简单的高斯消元法进行了研究，在1858年的《矩阵理论纪要》的论文中提出了矩阵以及矩阵运算等概念，奠定了矩阵理论的基础.

第一节

矩阵的定义与运算

本节内容

1. 矩阵的相等
2. 矩阵的线性运算
3. 矩阵的乘法
4. 矩阵的转置
5. 方阵的幂
6. 方阵的行列式
7. 方阵的迹
8. 共轭矩阵

1. 矩阵的定义

设m和n都是正整数，一个$m\times n$**矩阵**是由数域中的数构成的m行n列的矩形阵列（或数表）：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij}称为这个矩阵的第 i 行第 j 列的元素（或分量），其中 i 称为这个元素的行指标，j称其列指标. $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$

通常用大写字母 A, B 等指代矩阵. 上面的矩阵可简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$. 无需指明元素时，也可以记为$A_{m\times n}$.

1. 矩阵的定义

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

① 若 $a_{ij}\in\mathbb{R}$，则称A为**实矩阵**.

若 $a_{ij}\in\mathbb{C}$，则称A为**复矩阵**.

② 若 $m=n$，则称A为$\boldsymbol{n}$阶**方阵**，记为A_n.

③ 若 $m=1, n>0$，$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 称为**行矩阵**(或**行向量**).

$$n=1, m>0, \quad B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ 称为**列矩阵**(或**列向量**).

④ 若所有的$a_{ij}=0$，则称A为**零矩阵**，记作 $O_{m\times n}$ 或 O.

1. 矩阵的定义

⑤ **对角矩阵**：主对角线元素不全为0，其余元素都为0，记作

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

⑥ **纯量矩阵**：主对角元素都相同的对角矩阵，记作

$$\mathrm{diag}(\lambda,\lambda,\cdots,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

⑦ **单位阵**：主对角元素都为1，其余元素都为0，记作

$$I \text{ 或 } E=\mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

1. 矩阵的定义

同型矩阵：两个矩阵行数和列数都分别相通.

矩阵相等：设两个矩阵 $A_{m\times n}$ 和 $B_{m\times n}$ 是同型矩阵，且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\ldots,m;\, j=1,2,\ldots,n)$
则称矩阵A和B相等，记作 $A=B$.

例如:

$$\begin{pmatrix} x & -1 & -8 \\ 0 & y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & z \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

可得 $x=3, y=2, z=-8.$

2. 矩阵的线性运算

引例：

产品	发到各商场的数量		
	A	B	C
甲	200	180	190
乙	100	120	100

第一次

产品	发到各商场的数量		
	A	B	C
甲	220	185	200
乙	105	120	110

第二次

两次累计：

产品	发到各商场的数量		
	A	B	C
甲	420	365	390
乙	205	240	210

2. 矩阵的线性运算

设有两个同型矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，那么矩阵$C_{m\times n}$称为$A$与$B$的**和**，若满足

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

A与B之间的这种运算称为**加法**，记作$C=A+B$.

2. 矩阵的线性运算

数域中的数k与矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$之间的**标量乘法或数乘运算**，记作kA，满足

$$kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意：数k和行列式相乘等于将k乘到某一行或者某一列.

2. 矩阵的线性运算

负矩阵： A的负矩阵记作-A, $-A=(-1)A=(-a_{ij})_{m\times n}$

减法： $A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$

矩阵线性运算性质：

设 A, B, C 都是 $m\times n$ 矩阵，k和l 为常数，则有

(1) $A+B=B+A$

(2) $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$

(3) $A+O=O+A=A$

(4) $A+\left(-A\right)=O$

(5) $\left(kl\right)A=k\left(lA\right)$

(6) $\left(k+l\right)A=kA+lA$

(7) $k\left(A+B\right)=kA+kB$

(8) $1A=A$

3. 矩阵的乘法

行矩阵 $P_{1\times n}=(p_1\ p_2 \cdots p_n)$ 及列矩阵 $Q_{n\times1}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ 的乘法运算，

记为$P\cdot Q$ 或 PQ，乘积为S，定义为

$$S=PQ=p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n.$$

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 及矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times n}$ 的乘法运算，记为 $A\cdot B$ 或 AB，乘积为矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

3. 矩阵的乘法

即

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = C$$

3. 矩阵的乘法

① 矩阵A与B若相乘，则需要满足A的列数＝B的行数；
② AB的行数＝A的行数，AB的列数＝B的列数；
③ AB中A、B的顺序不能变.

例如：

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 10 & 2 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

AB有意义，但BA无意义.

3. 矩阵的乘法

① 矩阵A与B若相乘，则需要满足A的列数＝B的行数；
② AB的行数＝A的行数，AB的列数＝B的列数；
③ AB中A、B的顺序不能变.

例如：

$$AB=(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10)=10$$

$$BA=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

AB, BA都有意义，但具有不同阶.

3. 矩阵的乘法

① 矩阵A与B若相乘，则需要满足A的列数＝B的行数；
② AB的行数＝A的行数，AB的列数＝B的列数；
③ AB中A、B的顺序不能变.

例如：

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

AB, BA都有意义且其乘积为同阶方阵，但 $AB\neq BA$.

3. 矩阵的乘法

① 矩阵A与B若相乘，则需要满足A的列数＝B的行数；
② AB的行数＝A的行数，AB的列数＝B的列数；
③ AB中A、B的顺序不能变.

例如： 特别地，

$$\Lambda B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$$

$$B\Lambda=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$$

纯量矩阵和任何矩阵相乘都满足交换律.

3. 矩阵的乘法

在矩阵乘法中, 实数或复数乘法运算的某些性质可能不再成立.

(1) $A \neq O, B \neq O$，但有可能有$AB = O$；

(2) 由 $AB = O$ 不能得出$A = O$或$B = O$；

(3) $AB = O$ 且 $A \neq O$，也不能得出 $B = O$；

(4) $AB = AC$ 且 $A \neq O$，也不能得出 $B = C$.

3. 矩阵的乘法

矩阵乘法运算性质：

(1) $(A_{m\times s}B_{s\times n})C_{n\times l} = A_{m\times s}(B_{s\times n}C_{n\times l})$ 乘法结合律

(2) $A_{m\times s}(B_{s\times n}+C_{s\times n}) = AB+AC$

$(A_{m\times s}+B_{m\times s})C_{s\times n} = AC+BC$ 乘法分配律

(3) $k(A_{m\times s}B_{s\times n}) = (kA)B$

(4) $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}$

E_m和E_n 类似于数字乘法中的1

(5) $(\lambda E_m)A_{m\times n} = A_{m\times n}(\lambda E_n) = \lambda A_{m\times n}$

纯量矩阵λE 与矩阵相乘相当于数λ 乘这个矩阵.

3. 矩阵的乘法

例1: 设 $B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=BC$, 则 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$,

问 $A^{100}=?$

A是怎么构成的?

解:

$$CB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\times1+2\times2+3\times3=14.$$

$$\begin{aligned}A^{100}&=(BC)(BC)(BC)\ldots(BC)(BC)(BC)\\&=B(CB)(CB)C\ldots B(CB)(CB)C\\&=14^{99}BC=14^{99}A\end{aligned}$$

3. 矩阵的乘法

例2: 求 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{2021}$.

解:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.\quad 记 B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^{2021} &= (BC)(BC)(BC)\dots(BC)(BC)(BC) \\ &= B(CB)(CB)C\dots B(CB)(CB)C \\ &= B(-1)^{2020}C = BC = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. 矩阵的乘法

设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

若记系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$，

则用矩阵乘法，方程组可以简记为 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

3. 矩阵的乘法

例3：设两个线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \qquad\vdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1s}z_s \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2s}z_s \\ \qquad\vdots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{ns}z_s \end{cases}$$

求 $z_1, z_2, \ldots, z_s$ 与 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 之间的表示关系.

解：如果直接代入很麻烦，若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

3. 矩阵的乘法

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_s \end{pmatrix},$$

则这两个线性方程组可分别表示为

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{y}=B\boldsymbol{z}$$

因此

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}=A(B\boldsymbol{z})=(AB)\boldsymbol{z}$$

求出AB即可.

3. 矩阵的乘法

矩阵与向量组的联系：

若将矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sm} \end{pmatrix}$ 看作是m个列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m$$

顺序排列而成的，则该矩阵可以记作

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix} \text{ 或 } A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{\alpha}_m).$$

3. 矩阵的乘法

矩阵与向量组的联系：

同理，将矩阵 $A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sm}} \end{pmatrix}\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{matrix}$ 看作是s个行向量

$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 顺序排列而成的，则该矩阵可以记作

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix}.$$

3. 矩阵的乘法

向量组的线性组合

设线性方程组
$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1+\boxed{a_{12}}x_2+\cdots+\boxed{a_{1m}}x_m=\boxed{b_1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sm}x_m=b_s \end{cases}$$

列向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m \quad \boldsymbol{b}$

则方程组可以记为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{b}$

即方程组表示$\boldsymbol{b}$是系数矩阵A的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合，这用矩阵乘法也可记为：

$$A\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$$

3. 矩阵的乘法

设矩阵B的列向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n$ 可由矩阵A的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示：

$$\begin{cases} x_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{m1}\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{b}_1 \\ x_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{m2}\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{b}_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{mn}\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{b}_n \end{cases}$$

则这n个线性组合式可表示成：

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}}_{B}.$$

3. 矩阵的乘法

X的列向量组

若记$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$,

则这n个线性组合式可简化表示成

$$AX=A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}=B$$

即这个矩阵相乘$AX=B$表示矩阵B的列向量组可由A的列向量组线性表示.

4. 矩阵的转置

矩阵 A 的行与列互换得到的矩阵称作 A 的**转置矩阵**，记作 A^{T}. 例如，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{则} \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若A是实矩阵，且 $AA^T=O$，则$A=?$

4. 矩阵的转置

矩阵转置的运算性质：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$ (2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ (3) $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ (5) $(\lambda)_{1\times 1}^{\mathrm{T}} = (\lambda)$

(4) 证： 设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$，$B = (b_{ij})_{s\times n}$，$AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$，

$B^T A^T = D = (d_{ij})_{n\times m}$，

要证 $c_{ji} = d_{ij}$

$$c_{ji} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{js} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{si} \end{pmatrix} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{js}b_{si}$$

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{si} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{js} \end{pmatrix} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{si}a_{js}$$

$\therefore D = C^{\mathrm{T}}$ 即 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

证毕

4. 矩阵的转置

设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sm}x_m = b_s \end{cases}$

系数矩阵为A，则此方程组可表示为 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$

两边转置可得另一种表示 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ ，即

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{sm} \end{pmatrix} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_s)$$

4. 矩阵的转置

若设矩阵A的行向量组为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$, $\boldsymbol{b}=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)$
则线性组合 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{b}$
用矩阵乘法应表示成

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_s)\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix}}_{A}=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_s)$$

4. 矩阵的转置

设矩阵B的行向量组$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\ldots,\boldsymbol{d}_t$可由矩阵$A$的行向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示：

$$\begin{cases} y_{11}\boldsymbol{\beta}_1+y_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_{1s}\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{d}_1 \\ y_{21}\boldsymbol{\beta}_1+y_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_{2s}\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{d}_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ y_{t1}\boldsymbol{\beta}_1+y_{t2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_{ts}\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{d}_t \end{cases}$$

则这t个线性组合式可表示成矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{1s} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t1} & y_{t2} & \cdots & y_{ts} \end{pmatrix}\underset{A}{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_s \end{pmatrix}}=\underset{B}{\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_t \end{pmatrix}}.$$

4. 矩阵的转置

一个n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为**对称阵**，若满足$A^{\mathrm{T}}=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}\ \ (i,j=1,2,\ldots,n)$.

一个n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为**反对称阵**或**斜对称阵**，若满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$，即 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\ldots,n)$.

(1) 对称阵和反对称阵都一定是方阵.

(2) 对称阵的特点：元素以主对角线为对称轴对应相等.

(3) 反对称阵的特点：主对角线元素全为0，其余元素以主对角线为对称轴对应互为相反数.

4. 矩阵的转置

例如：反对称阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ -4 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

对称阵的乘积不一定是对称阵，如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. 方阵的幂

设A为n阶方阵，则定义A的k次幂为 $A^k = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{k}$.

特别地规定：$A^0 = E,\ A^1 = A.$ 注意：只有方阵才有幂运算.

方阵的幂运算性质： $A^{k+1} = A^k \cdot A$ $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$

$(A^k)^l = A^{kl}$ k 和 l 为任意正整数

对角阵的乘积与幂

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

显然

$E^k = E$

5. 方阵的幂

当 $AB \neq BA$ 时，某些关于数字幂运算的规律对于矩阵的幂运算不一定成立.

例如：$(AB)^k \neq A^k B^k$

$$(AB)^k = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{k} = (AB \cdot AB)(AB)\cdots(AB)$$

$$\neq (A^2 B^2)(AB)\cdots(AB)$$

所以 $(AB)^k \neq A^k B^k$

另外，当 $AB \neq BA$ 时，$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^k \neq A^k + C_k^1 A^{k-1} B + \cdots + C_k^{k-1} A B^{k-1} + B^k$$

当 $AB = BA$ 时，以上幂运算的性质才成立。

5. 方阵的幂

例4: 设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 求$A^k$.

解法一： 归纳法

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

5. 方阵的幂

由此猜测

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 2)$$

用数学归纳法证明

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 $k=n$ 时成立，则 $k=n+1$ 时，

5. 方阵的幂

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n & \frac{(n+1)n}{2}\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n\\ 0 & 0 & \lambda^{n+1}\end{pmatrix},$$

结论得证.

5. 方阵的幂

例4: 设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 求$A^k$.

解法二：拆项法

$$\text{令 } A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}}_{\parallel \atop B}+\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\parallel \atop C}$$

5. 方阵的幂

又因为

$$BC=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=CB$$

所以二项式公式成立：

$$A^k=(B+C)^k=B^k+C_k^1B^{k-1}C+C_k^2B^{k-2}C^2+C_k^3B^{k-3}C^3+\cdots+C^k$$

又因为

$$B^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & & \\ & \lambda^k & \\ & & \lambda^k\end{pmatrix},\quad C^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5. 方阵的幂

$$C^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \text{因此 } C^k=O\quad (k\ge 3)$$

所以

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&&\\&\lambda^k&\\&&\lambda^k\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\lambda^{k-1}&&\\&\lambda^{k-1}&\\&&\lambda^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix}\lambda^{k-2}&&\\&\lambda^{k-2}&\\&&\lambda^{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}$$

6. 方阵的行列式

由n阶方阵A的元素按原位置所构成的行列式，叫作方阵A的行列式，记作 $\det A$ 或$|A|$.

方阵的行列式的运算性质： 设A和B是**同阶方阵**，

$$(1)\ \det(A^{\mathrm{T}}) = \det A$$

$$(2)\ \det(kA) = k^n \det A$$

$$(3)\ \boxed{\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)}$$

证明需利用分块矩阵乘法及分块行列式计算，之后再证

$$(4)\ \det A^k = (\det A)^k$$

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

6. 方阵的行列式

例5: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量，记矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $\det A=1$，则 $\det B=$ ______

解法一：直接计算

若记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$,

则

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$$

6. 方阵的行列式

$$B=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_1+2b_1+4c_1 & a_1+3b_1+9c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & a_2+2b_2+4c_2 & a_2+3b_2+9c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & a_3+2b_3+4c_3 & a_3+3b_3+9c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det B &= \det(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \det(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &\xlongequal{c_3-2c_2} \det(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= 2\det(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &\xlongequal[c_1-c_3]{c_2-3c_3} 2\det(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) \xlongequal{c_1-c_2} 2\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= 2\det A = 2\end{aligned}$$

6. 方阵的行列式

例5: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量，记矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $\det A=1$，则 $\det B=$ ________

解法二：巧妙计算

若记 $$B=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}=AP$$

则 $$\det B=\det A\det P=1\cdot\det P$$

$$=2$$

6. 方阵的行列式

例6: 设4阶方阵 $A=(2\gamma_1,3\gamma_2,4\gamma_3,\boldsymbol{\alpha})$，$B=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\boldsymbol{\beta})$， 其中 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均是4维列向量， 且 $\det A=8,\det B=1,$ 则 $\det(A-B)=$ ________

解:

$$\det(A-B)=\det(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$$

$$=\det(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\boldsymbol{\alpha})-\det(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\boldsymbol{\beta})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\det A-1\cdot 2\cdot 3\cdot\det B$$

$$=2-6=-4$$

6. 方阵的行列式

例7: 设A,B均为n阶方阵，且$AA^{\mathrm{T}}=E,\ B^{\mathrm{T}}B=E,\ \dfrac{|A|}{|B|}=-1,$ 求证：$|A+B|=0.$

证：

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= \left|AB^{\mathrm{T}}B+AA^{\mathrm{T}}B\right| \\
&= \left|A(B^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}})B\right| \\
&= |A|\left|(A+B)^{\mathrm{T}}\right||B| \\
&= -|B|^2|A+B| \\
&= -|A+B|
\end{aligned}
$$

故 $|A+B|=0.$

证毕

6. 方阵的行列式

对于n阶方阵 $A=(a_{ij})$， 由其行列式 $\det A$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下方阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为方阵A的**伴随矩阵**.

6. 方阵的行列式

伴随矩阵的重要性质： $\boxed{AA^* = A^* A = (\det A)E}$

证：

$$A^* A = AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & & & \\ & \det A & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det A \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\det A)E$$

证毕

6. 方阵的行列式（*）

- 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则

1) 若$m>n$，必有$|AB|=0$;　$\begin{vmatrix}\boxed{A} & \boxed{B}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boxed{AB}\end{vmatrix} = 0$

2) 若$m\le n$，必有　$\begin{vmatrix}\boxed{A} & \boxed{B}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boxed{AB}\end{vmatrix}$

$$|AB| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$$

Cauchy-Binet公式

如果 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$

则柯西-比内公式给出行列式：

$$\det(AB) = \begin{vmatrix}1 & 1 \\ 3 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 \\ 3 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2 \\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 \\ 0 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2 \\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 \\ 0 & 2\end{vmatrix} = -28.$$

7. 方阵的迹

设A为n阶方阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为**方阵A的迹**，记为$\mathrm{tr}(A)$.

性质：

$$(1)\ \mathrm{tr}(A_n \pm B_n) = \mathrm{tr}(A_n) \pm \mathrm{tr}(B_n)$$

$$(2)\ \mathrm{tr}(kA_n) = k \cdot \mathrm{tr}(A_n)$$

$$(3)\ \mathrm{tr}(A_{m\times n}B_{n\times m}) = \mathrm{tr}(B_{n\times m}A_{m\times n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$

$$(4)\ \mathrm{tr}(A_{m\times n}B_{n\times s}C_{s\times m}) = \mathrm{tr}(B_{n\times s}C_{s\times m}A_{m\times n}) = \mathrm{tr}(C_{s\times m}A_{m\times n}B_{n\times s})$$

8. 共轭矩阵

设 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵，用 $\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$，称 $\overline{A}$ 为A的**共轭矩阵**.

性质： 设A, B为复矩阵，k为复数,

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$

(4) $(\overline{A})^{\mathrm{T}}=\overline{(A^{\mathrm{T}})}$　称为矩阵A的共轭转置

8. 共轭矩阵

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为n阶复方阵，满足 $(\bar{A})^{\mathrm{T}}=A$，即 $\overline{a_{ji}}=a_{ij}$ ，

则称方阵A为**埃尔米特矩阵** (Hermitian Matrix).

例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

实的埃尔米特矩阵实际上是对称阵.

* 其它有名矩阵

由1或-1为元素构成的n阶方阵H_n 若满足 $H_n H_n^{\mathrm{T}} = nE_n$

则称方阵H_n为**哈达玛矩阵** (Hadamard Matrix).

例如：

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

* 其它有名矩阵

设$p(x)$和$q(x)$是关于x的n次和m次多项式：

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m,$$

则称如下方阵为$p(x)$和$q(x)$关于x的西尔韦斯特矩阵 (Sylvester Matrix)：

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & & \cdots & a_n & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a\\a \end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b\\b\\b\\b \end{matrix}}\right\} n \end{array}\end{array}$$

* 其它有名矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

m个n元函数 $y_1,\cdots,y_m$ 的
雅可比矩阵 (Jacobian Matrix)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

n元函数 f 的
海森矩阵 (Hessian Matrix)

第三节 矩阵的秩

1. 矩阵秩的定义
2. 矩阵的初等变换
3. 矩阵秩的计算
4. 矩阵秩总结

一、矩阵的秩

1、子式

定义4.1 在 $m \times n$ 的矩阵A中，任取k行与k列（$k \le \min(m,n)$），位于这些行和列交叉处的k^2个元素,按原来的次序所组成的k阶行列式，称为A的一个**k阶子式**. 记做D_k .

一、矩阵的秩

1、子式

例如，对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

有一阶子式：**12**个

有二阶子式 $C_4^2 C_3^2 = 18$ 个

有三阶子式 $C_4^3 C_3^3 = 4$ 个

没有四阶子式

对于给定的k，$m \times n$ 阶的矩阵A不同的k阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

一、矩阵的秩

2、矩阵的秩

定义：在 $m\times n$ 阶的矩阵A中，若

(1) 有某个r阶子式 $D_r \neq 0$ ；

(2) 所有的r+1阶子式 $D_{r+1} = 0$ (如果存在的话)；

则称r为A的秩. 记做 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$， 或者 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$.

规定： 零矩阵的秩为0,即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{O} = 0$.

- 矩阵秩为r的含义

  A的所有$r+1$阶子式都为0

$\Rightarrow$ A的所有$r+2$阶子式也都为0

$\Rightarrow$ A的所有大于$r+2$阶的子式也都为0

$\Rightarrow$ 数r=rank$A$是矩阵A中子式不为0子式的最高阶数

一、矩阵的秩

2、矩阵的秩

例1 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$的秩.

解　在这个矩阵中，存在一阶子式

$$|3| = 3 \neq 0$$

一、矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

存在二阶子式 $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0$

下面计算它的三阶子式.

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -4 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 4\end{vmatrix}=0,$$

在矩阵*A*中，所有的三阶子式都为0，存在不为0的二阶子式，所以rank(*A*)=2.

一、矩阵的秩

➢ 特殊矩阵

定义： 设A是$m\times n$矩阵

(1) 若rank$A=m$ (A的行数)，则称A为**行满秩矩阵**；

(2) 若rank$A=n$ (A的列数)，则称A为**列满秩矩阵**；

设A是$n\times n$阶方阵

(1) 若rank$A=n$，则称A为**满秩矩阵**；

(2) 若rank$A\neq n$，则称A为降秩矩阵.

例如

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

A有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

所以A是行满秩矩阵

一、矩阵的秩

再如
$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\ \boxed{\begin{matrix}2&2&0\\0&3&5\\0&0&1\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

B中有一个三阶子式
$$\begin{vmatrix}2&2&0\\0&3&5\\0&0&1\end{vmatrix}=6\neq 0$$

所以B是一个列满秩矩阵.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&4&4\end{pmatrix}$$

因为C的行列式
$$\det C=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&4&4\end{vmatrix}=12\neq 0$$

所以C是一个满秩矩阵.

命题：方阵A满秩$\Leftrightarrow \det A\neq 0$

二、矩阵的初等变换

1、初等变换

定义： 对矩阵进行的如下三种变换

1. 对调两行(列)；对调 $r_i \leftrightarrow r_j$, $c_i \leftrightarrow c_j$

2. 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行(列)的所有元素；

数乘 $r_i \times k (kr_i), c_j \times k (kc_j)$

3. 某一行(列)的所有元素的k倍加到另一行(列)对应元素上；倍加 $r_i + kr_j$, $c_i + kc_j$

称为矩阵的初等行(列)变换.

初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 经过初等变换得到 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$,记做 $\boldsymbol{A}_{m\times n} \to \boldsymbol{B}_{m\times n}$.

二、矩阵的初等变换

例1

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{记做}=B$$

行阶梯型

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&-3/2&5/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1/2&1/4\\0&1&-3/2&5/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{记做}=H$$

行最简型

二、矩阵的初等变换

继续

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-\frac{1}{2}c_1 \\ c_4-\frac{1}{4}c_1 \\ c_3+\frac{3}{2}c_2 \\ c_4-\frac{5}{4}c_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}_{2\times 2} \\ \boldsymbol{O}_{1\times 2} & \boldsymbol{O}_{1\times 2} \end{pmatrix} \overset{\text{记做}}{=\!=} \boldsymbol{\Lambda}$$

等价标准型

命题：每一个初等变换都有逆变换，且其逆变换是同等类型的初等变换。

例如 我们以行变换为例.

二、矩阵的初等变换

1、初等变换

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是 $r_i \leftrightarrow r_j$；

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{r_i \leftrightarrow r_j}{\overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow 第i行 \\ \\ \rightarrow 第j行 \\ \\ \end{array}$$

2. $r_i \times k$ 的逆变换是 $r_i \times \dfrac{1}{k}$；

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{r_i \times \frac{1}{k}}{\overset{r_i \times k}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

二、矩阵的初等变换

1、初等变换

3. $r_i + kr_j$ 的逆变换是 $r_i + (-k)r_j$ ；

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{r_i + (-k)r_j}{\overset{r_i + kr_j}{\rightleftarrows}} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \to \text{第}i\text{行} \\ \\ \to \text{第}j\text{行} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

二、矩阵的初等变换

2、等价（相抵）矩阵

定义 如果矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与B等价(相抵).记做$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.

在例1中，$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{H} \cong \boldsymbol{\Lambda}$

- 等价矩阵满足等价三公理

 (1) 反身性：$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$

 (2) 对称性：若$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$则$\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$；

 (3) 传递性：若$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$且$\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

定理 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Rightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$

分析 只要证明每种初等变换都不改变矩阵的秩就可以了。

二、矩阵的初等变换

证明：(1) 显然前两种情况都不改变矩阵的秩；

(2) 只证明第三种初等变换且只证明行变换.

设 $A_{m\times n} \xrightarrow{r_i + kr_j} B_{m\times n}$，仅改变第$i$行

① 当 $\operatorname{rank} A = r < \min\{m, n\}$时，即$A$中不为0子式的最高阶数为$r$。若$B$存在$r$+1阶子式，记做$D$，分三种情况：

• D中不含B的第i行，则D是A的r+1阶子式$\Rightarrow D = 0$

• D中同时含B的第i行和第j行，则D是A中对应子式在A中的第j行的k倍加到第i行后的r+1阶子式，值不变$\Rightarrow D = 0$

二、矩阵的初等变换

- D含B的第i行但不含第j行，则D的该行形如

$a_{il}+ka_{jl}\ (l=1,2,\cdots,r+1)$，则$D$有分解式 $D=\overline{D}+k\tilde{D}$ ，其中$\overline{D}$和$\tilde{D}$是A中的r+1阶子式$\Rightarrow D=0$

所以B的所有r+1阶子式都为0 $\Rightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\le r=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$

反之，对B作如下逆变换 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\xrightarrow{r_i+(-k)r_j}\boldsymbol{A}_{m\times n}$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A}\le\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

所以得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

二、矩阵的初等变换

② 当 $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n<m$ 时(即A列满秩时)，构造如下的 m阶方阵$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{O})_{m\times m}$，由①的证明知

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B & \mathbf{O}\end{pmatrix}\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & \mathbf{O}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \qquad \operatorname{rank}B\le\operatorname{rank}A$$

反之，对B作如下逆变换 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\xrightarrow{r_i+(-k)r_j}\boldsymbol{A}_{m\times n}$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A}\le\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

所以得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

③当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m<n$ 时(即A行满秩时)，构造如下的 n阶方阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{n\times n}$，同理得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

证毕

二、矩阵的初等变换

➢ 初等变换的一个重要应用——

用初等行(列)变换把矩阵化为最简型，求秩.

例1　求下列矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix}.$$

解：对 A 施行初等行变换

二、矩阵的初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\1&11&3&6&16\\1&-19&-7&-14&-34\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\0&9&3&6&15\\0&-21&-7&-14&-35\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&3&1&2&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B,\quad \text{因此,}\boldsymbol{R(A)=R(B)=2.}$$

注意：在求矩阵的秩时，初等行、列变换可以同时兼用，但一般多用初等行变换把矩阵化成阶梯形.

二、矩阵的初等变换

2、等价（相抵）矩阵

定理 秩为r的$m \times n$矩阵A，经过有限次初等变换，总可化为如下等价（相抵）标准形

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{O}_{(m-r)\times r} & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

即有

$$\boldsymbol{A} \cong \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

推论1 设A是n阶方阵，A满秩$\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}_n$

证 方阵A满秩$\Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n \Leftrightarrow$ 等价标准形为$\boldsymbol{E}_n$

三、矩阵秩的计算

例3.讨论λ值的范围, 确定矩阵的秩.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)当$\lambda \neq 3$时, 秩为3; 当$\lambda = 3$时, 秩为2;

四、矩阵秩的总结

1.秩的若干等价定义

设A是$m \times n$矩阵，则:

A的秩为k，即R(A)=k

$\Leftrightarrow$ A有一个k阶非零子式，且全部k+1阶子式均为0

$\Leftrightarrow$ 矩阵A行(列)向量组的秩为k

$\Leftrightarrow$ A与$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$等价

四、矩阵秩的总结

2.秩的性质

设A是$m\times n$矩阵，则

(1) $\mathrm{R}(A)\le\min(m,n)$

(2) $\mathrm{R}(A)=0\Leftrightarrow A=O$

(3) 初等变换不改变矩阵的秩;

(4) $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}\left(A^T\right),\ \mathrm{R}(kA)=\begin{cases}\mathrm{R}(A),k\neq 0\\ 0\qquad ,k=0\end{cases}$

（5）$\mathbf{A}$中某个$D_r\neq 0\Rightarrow \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}\geq r$;

$\mathbf{A}$中所有$D_{r+1}=0\Rightarrow \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}\leq r$;

四、矩阵秩的总结

3.矩阵秩的计算

方法一　利用定义，$R(A)$等于 A 中非零子式的最大级数.

方法二　求出A的行(列)向量组的秩.

方法三　利用初等变换.

四、矩阵秩的总结

思考:

$$\mathrm{R}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \le \mathrm{R}(\mathrm{A})+\mathrm{R}(\mathrm{B})?$$

答：成立

本节结束

第四节 逆矩阵

1. 概念的引入
2. 逆矩阵的定义与唯一性
3. 矩阵可逆的判定定理及其求法
4. 运算规律
5. 逆矩阵的应用

二、逆矩阵的定义与唯一性

定义：对于 n 阶方阵 A，如果有一个 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = E,$

则说方阵 A 是可逆的，并把方阵 B 称为 A 的逆矩阵

A 的逆矩阵记作 A^{-1}． 显然有 $E^{-1} = E$

例1　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E, \quad \therefore B$ 是 A 的一个逆矩阵．

注意：逆矩阵千万不要写作 $\dfrac{1}{A}$。

二、逆矩阵的定义与唯一性

定理： 若n阶方阵A可逆，则A的逆矩阵唯一。

证明 设方阵B、C都是A的逆矩阵，则有

$$AB = BA = E \qquad AC = CA = E$$

因此 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$

所以矩阵A的逆矩阵唯一。

➢ 逆矩阵求法———待定系数法

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵。

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 A的逆矩阵，

二、逆矩阵的定义与唯一性

则有 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又因为 AB BA

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

注意：这种求法虽然思路简单，但计算量太大，比如要求一个三阶矩阵的逆阵，就要求解一个九个未知数的方程组，所以平时不用它来求逆阵。

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

定理　矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\det \boldsymbol{A} \neq 0$　.

证明 (必要性) 已知A可逆，则有矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

两边取行列式，有

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{E} = 1$$

所以　$\det \boldsymbol{A} \neq 0$

(充分性)　当$\det \boldsymbol{A} \neq 0$时，由式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$$

得

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}\right) = \left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

所以矩阵A可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}$

证毕

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

- 逆矩阵求法二——伴随矩阵法

由上述定理的证明知$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}$

其中$\boldsymbol{A}^*$为A的伴随矩阵。

特别地，对于二阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

当 $\det \boldsymbol{A}=ad-bc\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&8\\3&4&6\end{pmatrix}$，判断A是否可逆.若可逆，求其逆阵。

解 因为 $\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&8\\3&4&6\end{vmatrix}=1\neq 0$

所以矩阵A可逆.又因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&8\\4&6\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&8\\3&6\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&5\\3&4\end{vmatrix}=1 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=0$$

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

$$\boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-3 \qquad \boldsymbol{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2$$

$$\boldsymbol{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{vmatrix}=1 \qquad \boldsymbol{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 8\end{vmatrix}=4$$

$$\boldsymbol{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

注意验证

注：用伴随矩阵法求逆阵非常容易出错，一般不提倡。

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

推论1 方阵$\boldsymbol{A}$不可逆$\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A}=0$

➤ 奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$\det \boldsymbol{A}=0$ 时，称A为奇异矩阵；

当 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ 时，称A为非奇异矩阵；

所以矩阵A可逆的充要条件是A为非奇异矩阵;

矩阵A不可逆的充要条件是A为奇异矩阵.

推论2 设A,B为同阶方阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则方阵$A,B$都可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$

证明 因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，所以

$$(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})=\det \boldsymbol{E}=1$$

三、矩阵可逆的判别定理及其求法

所以$\det A \neq 0$，所以A可逆，记其逆阵为A^{-1}，则有

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$$

同理可证 $$B^{-1} = A$$

注意：以后判断B是否为A的逆矩阵，只需验证$AB = E$ 和$BA = E$中的一式即可。

四、运算规律

1. A可逆$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$

证　取$B=A$，则有

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

2. A可逆,$k\neq 0\Rightarrow k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$

证　对$k\boldsymbol{A}$，取$\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}}{k}$，则有

$$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{A})(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{E}$$

四、运算规律

3. 同阶方阵A_n, B_n均可逆$\Rightarrow$ AB可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证 对AB，取$C = B^{-1}A^{-1}$，则有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

四、运算规律

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

4. A可逆$\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}$可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

证 A可逆$\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^{\mathrm{T}}) \neq 0 \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}$可逆

对A^{T}，取$B = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$，则有

$$A^{\mathrm{T}} B = A^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1} A)^{\mathrm{T}} = E$$

$$\therefore \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

5. A可逆$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

证 因为A可逆，所以有

$$AA^{-1} = E$$

四、运算规律

两边取行列式，有 $(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{E} = 1$

$$\therefore \quad \det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}$$

注意：A可逆，且$k \neq 0 \Rightarrow \det(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\det \boldsymbol{A}^{-1}$ （×）

A可逆，且$k \neq 0 \Rightarrow \det(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-n}\det \boldsymbol{A}^{-1}$ （√）

6. A可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^*$可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$

证 “$\Rightarrow$” 设A可逆，则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 由恒等式

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$ 得 $\left(\dfrac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{E}$

所以$\boldsymbol{A}^*$也可逆，且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$

四、运算规律

"$\Leftarrow$"（反证法）已知A^*可逆，假设A不可逆，则

$$\det A = 0$$

因此

$$AA^* = (\det A)E = O$$

因为A^*可逆，所以上式两端同时右乘$(A^*)^{-1}$得

$$A = A(A^*)^{-1} = 0$$

所以$A^* = O$，与A^*可逆矛盾，所以A可逆。

7. A可逆$\Rightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

证 在恒等式$AA^* = (\det A)E$中，把A用A^{-1}代替，有

$$(A^{-1})(A^{-1})^* = (\det A^{-1})E$$

所以

$$(A^{-1})^* = \frac{A}{\det A}$$

四、运算规律

再由性质6的证明知，

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$$

所以有 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$

8. 无论A是否可逆，恒有 $\det \boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}$

证 当A可逆时，对恒等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$ 两边取行列式,有

$$(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{A}^*) = (\det \boldsymbol{A})^n$$

因为A可逆，所以$\det \boldsymbol{A} \neq 0$，所以有

$$(\det \boldsymbol{A}^*) = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}$$

四、运算规律

当A不可逆时，由性质6的证明知$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，所以

$$\det \boldsymbol{A}^* = \det \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$$

所以有$\det \boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}$

9. A可逆$\Rightarrow (\boldsymbol{A}^*)^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-2}\boldsymbol{A}\ (n \geq 2)$

证 在恒等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$中,把$A$用$\boldsymbol{A}^*$代替,有

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^* = (\det \boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{E} = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{E}$$

两端左乘 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，得

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\det \boldsymbol{A})^{n-2}\boldsymbol{A}$$

10. 同阶方阵 $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{B}_n$均可逆 $\Rightarrow (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

证 由 $\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$得

四、运算规律

$$(\boldsymbol{AB})^* = [\det(\boldsymbol{AB})](\boldsymbol{AB})^{-1} = [(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})](\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$= [(\det \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}][(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}]$$

$$= \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$$

11. 负幂：A可逆，定义

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A}^{-k} = (\boldsymbol{A}^{-1})^k \quad (k = 1,2,\cdots)$$

则关于方阵的幂的结论，可以扩展到

$$\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}$$

$$(\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl} \qquad (k, l \in \boldsymbol{Z})$$

四、运算规律

例4设方阵A满足 $A^3-A^2+2A-E=O$，证明A及$E-A$均可逆，并求A^{-1}和$(E-A)^{-1}$。

证明 由 $A^3-A^2+2A-E=O$ 得

$$A(A^2-A+2E)=E$$

因此A可逆，且

$$A^{-1}=A^2-A+2E$$

同理 由 $A^3-A^2+2A-E=O$ 得

$$(E-A)(A^2+2E)=E$$

所以$E-A$可逆，且

$$(E-A)^{-1}=A^2+2E$$

五、逆矩阵的应用

1.n阶线性方程组的求解

对于n个方程n个未知数的线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，

若$\det \boldsymbol{A} \neq 0$，则有$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$

其中 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

分析
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

所以 $x_j = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n\right)$

五、逆矩阵的应用

$$x_j = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{D^{(j)}}{D}$$

$$D^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克拉默法则

五、逆矩阵的应用

例6　利用逆矩阵求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

解　令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

所以有$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，又因为 $\det \boldsymbol{A} = -8 \neq 0$，所以

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

五、逆矩阵的应用

可求得 $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\3 & 5 & 7\\1 & 7 & 5\end{pmatrix}$

所以

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\3 & 5 & 7\\1 & 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

本节结束

第五节 初等方阵

1. 初等方阵与初等变换
2. 矩阵的初等变换与初等方阵
3. n阶方阵可逆的充要条件
4. 逆矩阵的计算
5. 两同型矩阵可逆的充要条件
6. 练习

一、初等方阵与初等变换

1、定义

定义 单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等方阵.

➢ 初等方阵的分类：与初等变换对应分为三类

(1) 两行(列)互换

$$
E = \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j) =
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

一、初等方阵与初等变换

例 $$E_3(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xleftarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

(2) 第i行(列)乘以非零数k

$$E=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&1&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_i\times k]{r_i\times k}E(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

例 $$E_3(2(2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xleftarrow{r_2\times 2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

（3）第*j*行的*k*倍加到第*i*行或者第*i*列的*k*倍加到第*j*列

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow[c_j + kc_i]{r_i + kr_j}
\boldsymbol{E}(i, j(k)) =
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & k & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

一、初等方阵与初等变换

2、初等方阵的性质

例

$$E_3(1,3)\,E_3(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3(2(k))\,E_3(2(\frac{1}{k}))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/k&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3(1,3(k))\,E_3(1,3(-k))=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

一、初等方阵与初等变换

2、初等方阵的性质

(1) 行列式

$$\det \boldsymbol{E}(i,j) = -1 \qquad \det \boldsymbol{E}(i(k)) = k \neq 0$$

$$\det \boldsymbol{E}(i,j(k)) = 1$$

(2) 关于逆矩阵：初等方阵都可逆，且

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j) \qquad \boldsymbol{E}(i(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$$

$$\boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j(-k))$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{初等变换}} & \longrightarrow & \boxed{\text{初等方阵}} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \boxed{\text{初等逆变换}} & \longrightarrow & \boxed{\text{初等逆矩阵}} \end{array}$$

二、矩阵的初等变换与初等方阵

定理：　对 $A_{m\times n}$

(1) 施行一次初等行变换，等于A左乘相应的m阶初等方阵；

(2) 施行一次初等列变换，等于A右乘相应的n阶初等方阵；

例

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

二、矩阵的初等变换与初等方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \\ a_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{22} \end{pmatrix}$$

练习：

设A是3阶方阵，将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C, 则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为 D

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

三、n阶方阵可逆的充要条件

定理： n阶方阵A可逆

$\Leftrightarrow$ A能表示为若干个初等方阵的乘积.

证明“$\Rightarrow$”设A可逆，则A是满秩矩阵，则有

$$A \cong E_n$$

即A可经过有限次初等行变换(设s次)和有限次初等列变换(设t次)变为E，即存在n阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ (行变换)和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ (列变换)，使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E_n$$

$$\therefore \quad A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} Q_{t-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1}$$

又因为 $P_i^{-1}, Q_j^{-1} (i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,t)$ 都是初等方阵，所以结论成立.

三、n阶方阵可逆的充要条件

"$\Leftarrow$" 设有初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_m$$

两边取行列式

$$\det A = (\det P_1)(\det P_2)\cdots(\det P_m) \neq 0$$

所以A可逆.

➢ 用初等行变换求方阵A的逆阵.

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s E$$

$$\Rightarrow \quad P_s^{-1} P_{s-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E \text{ 及 } P_s^{-1} P_{s-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$$

两式合之，有

$$P_s^{-1} P_{s-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} \left(A \;\vdots\; E \right) = \left(E \;\vdots\; A^{-1} \right)$$

$$P_s^{-1}P_{s-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A \vdots E)=(E \vdots A^{-1})$$

意即，对矩阵 $(A \vdots E)$，同时对 A, E 依次作相同的初等变换

$P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_s^{-1}$，设法把$A$化为$E$时，E同时化为$A^{-1}$.

$$\text{即}(A \vdots E) \xrightarrow{\text{若干次初等行变换}} (E \vdots B) \Rightarrow B = A^{-1}.$$

[说明]: (1) 当A可变为E时，则A可逆，且得 $A^{-1} = B$.

(2) 当A只能变为不满秩的行最 简形时，则A不可逆.

即，用这种方法求逆阵时，不用事先判断是否可逆.

四、 逆矩阵的计算

方法一：根据逆矩阵的惟一性，利用待定系数法；

方法二：伴随矩阵法；

方法三：利用初等变换。

四、逆矩阵的计算

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解

$$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

四、 逆矩阵的计算

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

四、 逆矩阵的计算

注意：1.必须始终是初等行变换，不能夹杂列变换；

2.若出现全行为0，则矩阵不可逆；

3.用初等行变换求逆矩阵的方法，可用于求 $A^{-1}B$

$$\because \quad A^{-1}(A \,\vdots\, B) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

即

$$(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \,\vdots\, \boxed{A^{-1}B})$$

四、 逆矩阵的计算

例2　求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

四、 逆矩阵的计算

解法一　由例1知A可逆，直接求$A^{-1}B$.

解法二

$$(A \vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)$$

四、 逆矩阵的计算

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right),$$

$$\therefore \qquad X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

四、逆矩阵的计算

如果要求$Y=CA^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换,

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \boxed{CA^{-1}} \end{pmatrix},\quad \text{即可得 } Y=CA^{-1}.$$

也可改为对(A^T, C^T)作初等行变换,

$$(A^T, C^T) \xrightarrow{\text{列变换}} (E, \boxed{(A^T)^{-1}C^T}),$$

即可得$Y^T=(A^{-1})^T C^T=(A^T)^{-1}C^T$,

即可求得Y.

四、两同型矩阵等价的充要条件

$$A_{m\times n} \cong B_{m\times n} \Leftrightarrow rankA = rankB$$

进一步讨论A与B的互相表示

定理 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ 存在*m*阶可逆方阵*P*和*n*阶可逆方阵*Q*，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$.

证 "$\Rightarrow$" 设$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$，则有$m$阶初等方阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 和n阶初等方阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$，使

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{B}$$

令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t$，$\therefore \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 均可逆,且 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$

"$\Leftarrow$" 设 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$为可逆方阵

四、两同型矩阵等价的充要条件

所以存在m阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和n阶初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ ，使得

$$P = P_s \cdots P_2 P_1 \qquad Q = Q_t \cdots Q_2 Q_1$$

$$\therefore P_1 P_2 \cdots P_s A Q_t \cdots Q_2 Q_1 = B \iff A \cong B$$

本节结束

第六节 分块矩阵

1. 定义
2. 分块矩阵的运算
3. 分块矩阵的应用

一、定义

▪分块矩阵—用一些横线和纵线(穿过矩阵)将矩阵分成为若干个矩形的子块(子矩阵),以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

$$\text{如 } A = \left[\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 8 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } A_{11} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

一、定义

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hdashline a_{41} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \end{pmatrix}.$$

二、分块矩阵的运算

分块矩阵运算把握2点，第一，子块当元素看可运算，第二，子块当矩阵看也可运算。如：

设矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$与 $\boldsymbol{B}_{ij}$为同型矩阵，那么

(1) $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

二、分块矩阵的运算准则

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

二、分块矩阵的运算

(3) 设 A 为 $m \times l$ 矩阵，B 为 $l \times n$ 矩阵，分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数，那末

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r).$

二、分块矩阵的运算准则

例1 已知
$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$
求AB.

分析 若直接进行矩阵乘法运算，需进行乘法32次加法24次，比较复杂。

解 将A,B分块,得
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}_{21} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算

又因为

$$A_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A_{22}B_{21}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\\ -5 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

注：此解法需乘法运算12次，加法运算8次。

二、分块矩阵的运算

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

记法： "大转" ＋ "小转"

(5) 设A为n阶方阵,若A的分块矩阵只有在主对 角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵.即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

二、分块矩阵的运算

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵，那末称 A 为分块对角矩阵．

分块对角矩阵具有下述性质：

性质1 $\det A=(\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_s)$

性质2 A 可逆 $\Leftrightarrow A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可逆

二、分块矩阵的运算

性质3

$$A_i\text{可逆} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

附　若

$$A = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$$

$$A_i\text{可逆} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算

特别地　当每一个子块都是数的时候，有

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \lambda_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ \lambda_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算

性质4

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

推广：

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^k \end{pmatrix}$$

例2

设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$

求 $A+B$, ABA.

二、分块矩阵的运算

解　将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

二、分块矩阵的运算

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & 0 \\ 0 & A_2+B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

二、分块矩阵的运算

$$ABA=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1A_1 & 0\\ 0 & A_2B_2A_2\end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0\\ a^2 & a^3+a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1\\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix}.$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1\\ a^2 & a^3+a\end{pmatrix},\quad A_2B_2A_2=\begin{pmatrix}b^3+2b & 2b^2+1\\ 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix},$$

二、分块矩阵的运算

例3　设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解　$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$,　　$A_1^{-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)$;　　$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$,

二、分块矩阵的运算准则

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix};\qquad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix};$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

三、分块矩阵的应用

1.分块运算使得矩阵结构简单，利于诠释一些问题和概念

如 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 记 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

按分块矩阵的记法

$$B = (A \mid b), \text{ 或 } B = (A, b) = (a_1, a_2, \cdots, a_n, b),$$

将B按列分块

利用矩阵乘法，此方程组可记作

$$Ax = b.$$

三、分块矩阵的应用

1.分块运算使得矩阵结构简单，利于诠释一些问题和概念

若将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 块，则线性方程组可记作

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix},$$

这就相当于把每个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_2 = b_i$$

记作

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$

若将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分成 n 块，则线性方程组可记作

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

即

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

三、分块矩阵的应用

2.应用于矩阵的一些运算

例1设 A、B为 n阶矩阵，A^*, B^*分别为 A、B对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则 C的伴随矩阵 $C^*=$（　　）

$(A)\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$;　　$(B)\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$　　$(D)\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

分析：根据伴随矩阵公式 $\boldsymbol{CC}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{E};\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}$,由已知分别求 $|\boldsymbol{C}|$ 与 $\boldsymbol{C}^{-1}$即可

三、分块矩阵的应用

2.应用于矩阵的一些运算

解：$C^* = |C|C^{-1}, |C| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|; C^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix};$

$$\therefore C^* = |C|C^{-1} = |A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A||B|A^{-1} & 0 \\ 0 & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$$

故答案为D

2.应用于矩阵的一些运算

例题1：设A、B均为二阶矩阵，A^*, B^*分别为A、B的伴随矩阵，若$|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵为___

$(A)\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$; $(B)\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$; $(C)\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$; $(D)\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$.

三、分块矩阵的应用

2.应用于矩阵的一些运算

分析：$\because \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)}|A||B| = 6 \neq 0, \therefore \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$可逆

由公式 $AA^* = |A|E; A^* = |A|A^{-1}$,

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6\times\dfrac{B^*}{3} \\ 6\times\dfrac{A^*}{2} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}; \therefore \text{选} B$$

三、分块矩阵的应用

3.矩阵秩的不等式证明

(1) $\mathrm{R}(AB) \geqslant \mathrm{R}(A) + \mathrm{R}(B) - k$

设R(*A*)=*u*，R(*B*)=*v*

存在*m*阶可逆矩阵*P*, *n*阶可逆矩阵*Q*，*s.t.* $PAQ = \begin{pmatrix} I_u & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$$\text{且 } \mathrm{R}(AB) = \mathrm{R}(PAB) = \mathrm{R}\left((PAQ)(Q^{-1}B)\right)$$

设 $Q^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，$B_1$是$u \times n$矩阵，$B_2$是$(k-u) \times n$矩阵, 则

$$\mathrm{R}(AB) = \mathrm{R}\left((PAQ)(Q^{-1}B)\right) = \mathrm{R}\left(\begin{pmatrix} I_u & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{R}\left(\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}\right) = \mathrm{R}(B_1)$$

三、分块矩阵的应用

3.矩阵秩的不等式证明

另一方面，$\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}\left(Q^{-1}B\right)=\mathrm{R}\left(\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\right)$

由秩的不等式性质：

$$\mathrm{R}(AB)=\mathrm{R}(B_1)\geqslant \mathrm{R}(B)-\mathrm{R}(B_2)$$

$$\geqslant v-(k-u) \qquad \left(\text{因为}\mathrm{R}(B_2)\leqslant k-u\right)$$

故 $\mathrm{R}(AB)\geqslant v-(k-u)$

三、分块矩阵的应用

3.矩阵秩的不等式证明

(2) 设A、B、C、D为n 阶方阵，$AC=CA$，$AD=CB$，且$|A|\neq0$，若 $G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，求证：$n\leqslant \mathrm{R}(G)<2n$。

证 由 $G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$故\ \det G=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\left|D-CA^{-1}B\right|$$

$$=\left|AD-ACA^{-1}B\right|=\left|AD-CAA^{-1}B\right|=\left|AD-CB\right|=0$$

$\Rightarrow \mathrm{R}(G)<2n$

由$|A|\neq0$ $\Rightarrow \mathrm{R}(G)\geq n$ 综上 $n\leq \mathrm{R}(G)<2n.$

三、分块矩阵的应用

4.求逆矩阵

例　设A,C分别为n阶和m阶可逆方阵，试证明：

矩阵$X=\begin{bmatrix}0 & A\\ C & 0\end{bmatrix}$也可逆,且$X^{-1}=\begin{bmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}$

解：设$X^{-1}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}$, $XX^{-1}=\begin{bmatrix}AB_3 & AB_4\\ CB_1 & CB_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1 & 0\\ 0 & I_2\end{bmatrix}$

其中I_1是与A同阶的单位阵,I_2为与C同阶的单位阵,

则 $\mathrm{AB}_3=I_1\Rightarrow B_3=A^{-1}$,　　$\mathrm{AB}_4=0\Rightarrow B_4=0$,

$\mathrm{CB}_1=0\Rightarrow B_1=0$,　　$\mathrm{CB}_2=I_2\Rightarrow B_2=C^{-1}$,

所以　$X^{-1}=\begin{bmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}$

三、分块矩阵的应用

4.求逆矩阵

例　设A,B分别为n阶和m阶可逆方阵，试证明：

矩阵$D=\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$也可逆,并求D的逆阵$D^{-1}$

解：

设 $D^{-1}=\begin{bmatrix} X & Z \\ W & Y \end{bmatrix}$,则$D^{-1}D=\begin{bmatrix} XA & XC+ZB \\ WA & WC+YB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$

三、分块矩阵的应用

4.求逆矩阵

其中I_1是与A同阶的单位阵,I_2为与B同阶的单位阵,

则 $XA = I_1 \Rightarrow X = A^{-1}$, $WA = 0 \Rightarrow W = 0$, $XC+ZB = 0$,

将$X = A^{-1}$代入,有$ZB = -A^{-1}C$, $\Rightarrow Z = -A^{-1}CB^{-1}$,

$WC+YB = I_2$,将$W = 0$代入$\Rightarrow Y = B^{-1}$,

所以 $$D^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

本节结束