中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

210049.03 – 信号与系统 – 第十周

傅里叶变换和级数的性质（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/4/18

6.5 时域的微分和积分或差分和累加性质、频域的微分和积分或差分和累加性质

连续时间函数和离散时间序列的 CFT 和 DTFT 分别是频域 ω 和 Ω 上的连续函数和连续周期函数，周期信号和序列的 CFS 和 DFS 分别是频域上的非周期序列和周期序列，故本节讲述的傅里叶变换和傅里叶级数这方面的性质包括：

- CFT 的时域微分和积分性质与频域微分和积分性质；
- DTFT 的时域差分和累加性质与频域微分和积分性质；
- CFS 的时域微分和积分性质与频域差分和累加性质；
- DFS 的时域与频域的差分和累加性质；

这些性质也可以有傅里叶变换和级数的时域和频域卷积性质推导而来，故它们也可看作时域和频域卷积性质另一些特例。

离散傅里叶变换 (DFT) 所涉及的时域和频域表示限于有限长 (N 点) 数值序列，由于其特殊性，DFT 没有这方面的性质。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质

■ 时域的微分或差分性质

● CFT 和 DTFT 的时域微分或差分性质

假设有 $\mathbf{F}\{f(t)\}=F(\omega)$ 和 $\mathbf{F}\{f[n]\}=\tilde{F}(\Omega)$

则分别有 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}\mathrm{j}\omega F(\omega)$$

和 $$\Delta f[n]=f[n]-f[n-1]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})\tilde{F}(\Omega)$$

基于： $f'(t)=f(t)*\delta'(t)$ 和 $\Delta f[n]=f[n]*(\Delta\delta[n])$

并借助 $\delta'(t)$ 和 $\Delta\delta[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ 的傅里叶变换，即

$$\delta'(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}\mathrm{j}\omega \quad 和 \quad \Delta\delta[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$$

利用 CFT 和 DTFT 的时域卷积性质就可以证明上述性质。

进一步，上述性质可扩展到时域高阶微分或高阶差分性质：

$$\mathbf{F}\left\{f^{(k)}(t)\right\}=(\mathrm{j}\omega)^k F(\omega) \quad 和 \quad \mathbf{F}\left\{\Delta^k f[n]\right\}=(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^k\tilde{F}(\Omega)$$

这表明：时间函数 $f(t)$ 或序列 $f[n]$ 在时域上每微分或差分一

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

次，对应到频域是它们的傅里叶变换 $F(\omega)$或$\tilde{F}(\Omega)$ 分别乘以 $(\mathrm{j}\omega)$ 或 $(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$，根据 **5.5.2** 小节讨论的微分器和差分器的幅频特性，这意味着：在时域上对信号或序列微分或差分，都导致消除信号中的直流或常数分量，并使高频分量得到增强，且频率 ω 或 Ω 愈高，增强也愈大。

- **CFS 的时域微分和 DFS 的时域差分性质**

周期信号或周期序列进行微分或差分后仍是相同周期的周期信号或周期序列。**CFS** 或 **DFS** 的时域微分或差分性质如下：

假设周期分别是 T 或 N 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或序列 $\tilde{x}[n]$ 的 **CFS** 或 **DFS** 系数分别为 F_k 或 $\tilde{F}_k$，则分别有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} \mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}F_k \quad \text{和} \quad \Delta\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}})\tilde{F}_k$$

可借助周期信号或序列的傅里叶变换表示，利用 $\delta'(t)$和$\Delta\delta[n]$ 的傅里叶变换，证明上述 **CFS** 或 **DFS** 的时域微分或差分性质。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

■ 时域的积分或累加性质

● CFT 和 DTFT 的时域积分或累加性质

假设有 $\mathbf{F}\{f(t)\}=F(\omega)$ 和 $\mathbf{F}\{f[n]\}=\tilde{F}(\Omega)$

则分别有 $$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

和 $$\sum_{m=-\infty}^{n} f[m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}+\pi\tilde{F}(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2k\pi)$$

时间函数或序列在时域上积分或累加分别等于它们与 $u(t)$ 或 $u[n]$的卷积，借助函数 $u(t)$ 或 $u[n]$ 的傅里叶变换对，即

$$u(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

和 $$u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

利用 CFT 和 DTFT 的时域卷积性质就可证明这一性质。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

讨论：时间函数 $f(t)$ 或序列 $f[n]$ 在时域上积分或累加，除了其傅里叶变换 $F(\omega)$或 $\tilde{F}(\Omega)$分别除以 $(\mathrm{j}\omega)$ 或 $(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$ 外，还要添加代表常数分量的$\pi F(0)\delta(\omega)$ 或 $\pi\tilde{F}(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2k\pi)$ 项。

这表明：对信号或序列时域积分或累加，不仅会削弱高频分量，且频率 ω 或 Ω 愈高削减也愈大，还将产生大小分别为 $F(0)/2$ 或 $\tilde{F}(0)/2$ 的常数分量。

如果 $f(t)$ 和 $f[n]$ 没有常数成分，即 $F(0)=0$ 和 $\tilde{F}(0)=0$，或者 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t=0$ 和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]=0$ ，则时域积分或累加性质将简化为：

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega} \quad 和 \quad \sum_{m=-\infty}^{n} f[m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

如果 $f(t)$ 或 $f[n]$ 积分或累加一次后仍没有常数成分，则有

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} f(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{F(\omega)}{(\mathrm{j}\omega)^2} \quad 和 \quad \sum_{m=-\infty}^{n}\sum_{k=-\infty}^{m} f[k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^2}$$

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

- **CFS 的时域积分和 DFS 的时域累加性质**

周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或序列 $\tilde{x}[n]$ 的积分或累加一般不收敛，但是，如果它们在其周期区间 $\langle T\rangle$ 或 $\langle N\rangle$ 内的积分或累加等于 **0**，即

$$\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \qquad \text{或} \qquad \sum_{n\in\langle N\rangle}\tilde{x}[n]=0$$

则仍有 **CFS** 或 **DFS** 的时域积分或累加性质。

假设周期分别是 T 或 N 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或序列 $\tilde{x}[n]$ 的 **CFS** 或 **DFS** 系数分别为 F_k 或 $\tilde{F}_k$，则分别有

$$\int_{-\infty}^{t}\tilde{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\text{CFS}} \frac{F_k}{\mathrm{j}k(2\pi/T)}, \qquad \int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

和

$$\sum_{m=-\infty}^{n}\tilde{x}[m] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{\tilde{F}_k}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)}}, \qquad \sum_{n\in\langle N\rangle}\tilde{x}[n]=0$$

借助周期信号和序列的傅里叶变换表示，利用上面无常数成分情况的傅里叶变换之积分或累加性质，就可导出上述 **CFS** 或 **DFS** 的时域积分或累加性质。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

- **用时域微分/积分或差分/累加性质求傅里叶变换和级数**

从数学中知道，初等函数的微分或积分得到的仍是同类的初等函数。例如：

★ 幂函数微分和积分仍是幂函数，微分为降幂，积分则加幂；
★ 指数函数的微分和积分仍是同样的指数函数；
★ 正弦函数的微分和积分仍是正弦函数，等等。

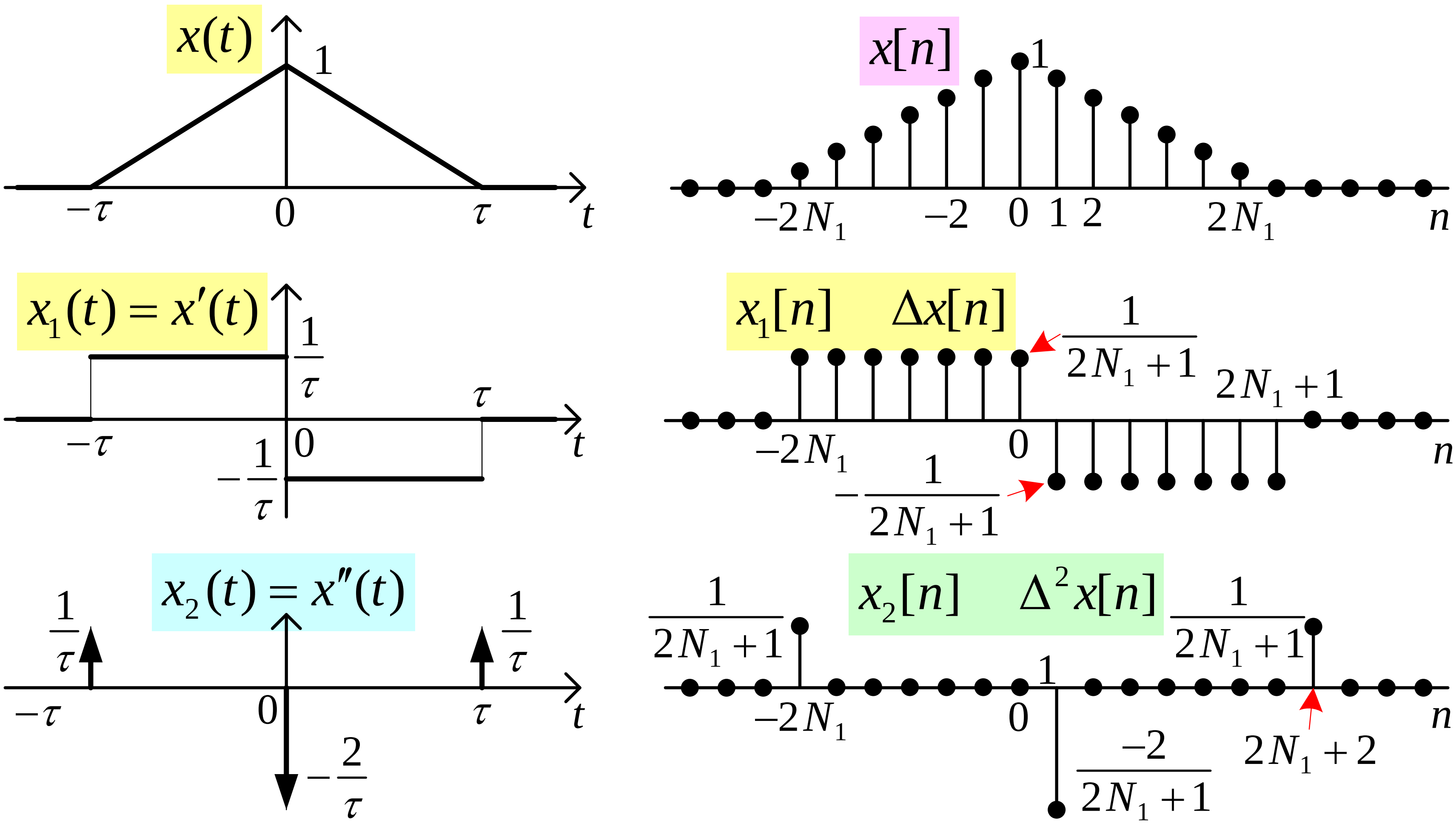
同样地，离散时间序列也有类似特性，即初等序列差分或累加后，也是同类的初等序列。

因此，利用傅里叶变换和级数的时域微分和积分或差分和累加性质，特别有助于求取由分段初等函数或序列表示之时间函数或序列的傅里叶变换和傅里叶级数系数。先看下面的例子。

【例 6.8】 试求例 6.2 中的 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的傅里叶变换。

解 三角脉冲和三角序列分别是分段的一次幂函数和一次幂序列，利用微分和差分对降幂特性，$x(t)$ 或 $x[n]$ 两次微分或差分后只剩下时移的冲激函数或冲激序列，如下图所示。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)



即有：$x_2(t)=x''(t)=(1/\tau)[\delta(t+\tau)-2\delta(t)+\delta(t-\tau)]$

和 $x_2[n]=\Delta^2 x[n]=\dfrac{1}{2N_1+1}\{\delta[n+2N_1]-2\delta[n-1]+\delta[n-(2N_1+2)]\}$

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

只要知道 $\delta(t)$ 和 $\delta[n]$ 的傅里叶变换，并利用变换对时移性质，可直接写出 $x_2(t)=x''(t)$ 和 $x_2[n]=\Delta^2 x[n]$ 的傅里叶变换如下：

$$\mathrm{F}\quad\{x_2(t)\}=X_2(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\tau}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau/2})^2}{\tau}$$

$$\mathrm{F}\ \{x_2[n]\}=\tilde{X}_2(\Omega)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2N_1\Omega}-2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2N_1+2)\Omega}}{2N_1+1}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2N_1+1}{2}\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2N_1+1}{2}\Omega})^2}{2N_1+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}$$

三角脉冲 $x(t)$ 和三角序列 $x[n]$ 与 $x_2(t)$ 和 $x_2[n]$ 的关系分别为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\tau}x_2(v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\tau \qquad \text{和} \qquad x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\sum_{m=-\infty}^{k}x_2[m]\right)$$

且 $x_2(t)$、$x_1(t)=x'(t)$ 和 $x_2[n]$、$x_1[n]=\Delta x[n]$ 都没有常数分量，可以直接利用简化的傅里叶变换之时域积分或累加性质，求得 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 和 $\tilde{X}(\Omega)$ 分别如下：

$$X(\omega)=\frac{X_2(\omega)}{(\mathrm{j}\omega)^2}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau/2})^2/\tau}{(\mathrm{j}\omega)^2}=\tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

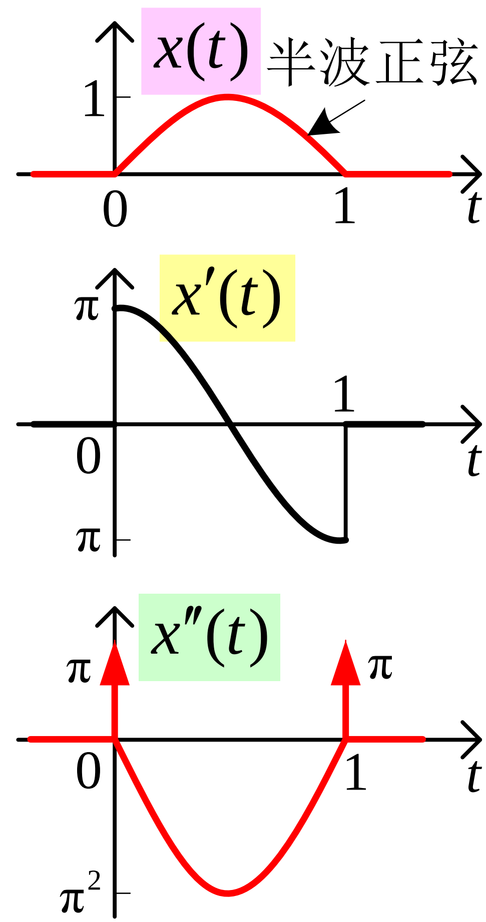
6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

$$\tilde{X}(\Omega)=\frac{\tilde{X}_2(\Omega)}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^2}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2N_1+1}{2}\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2N_1+1}{2}\Omega})^2}{(2N_1+1)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^2}$$

$$=\frac{1}{2N_1+1}\frac{\sin^2[(2N_1+1)\Omega/2]}{\sin^2(\Omega/2)}$$

所求结果与例 6.2 所得结果完全一样。

【例 6.9】 试求右图所示的半波正弦脉冲 $x(t)$ 的频谱。



解 正弦或余弦函数的二阶导数又分别回到了正弦或余弦函数，故把 $x(t)$ 做两次微分如右图所示，得到它的 2 阶导数为

$$x''(t)=-\pi^2x(t)+\pi[\delta(t)+\delta(t-1)]$$

对上式两边取傅里叶变换，并利用 CFT 的时域微分性质，则有

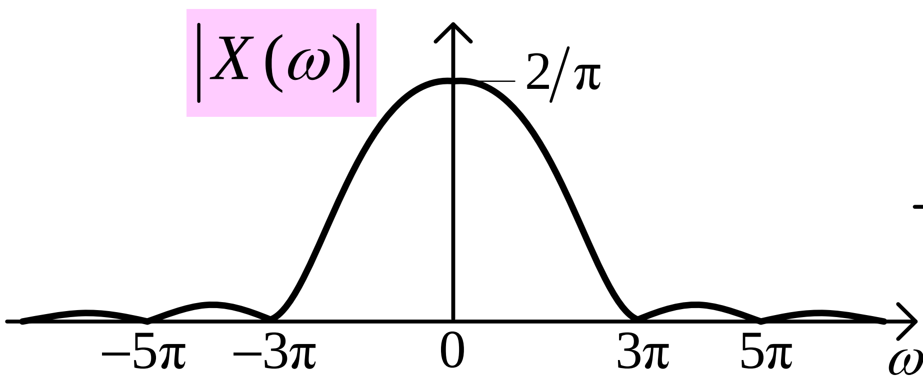
$$(\mathrm{j}\omega)^2X(\omega)=-\pi^2X(\omega)+\pi(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

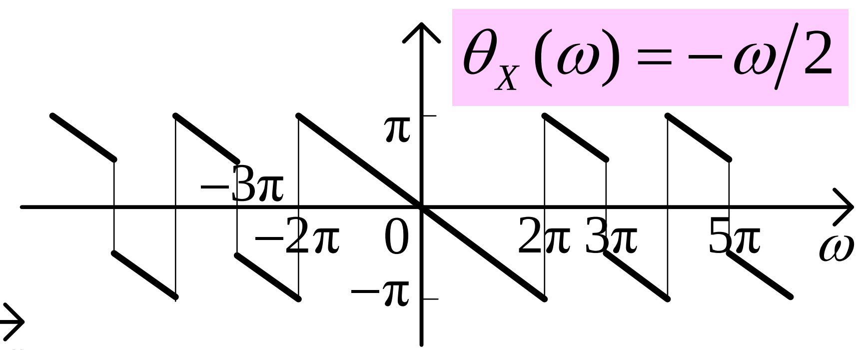
6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

上式整理后得到半波正弦脉冲 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$为

$$X(\omega)=\frac{\pi(1+e^{-j\omega})}{\pi^2-\omega^2}=\frac{2}{\pi}\frac{\cos(\omega/2)}{[1-(\omega/\pi)^2]}e^{-j\omega/2}$$

它的幅度频谱和相位频谱图形如下图所示。





讨论：从上面的例子可以获得一些很有用的认识：

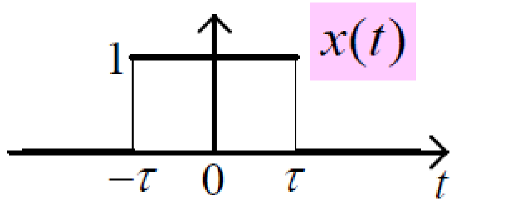
★ 以分段初等函数或初等序列表示的时间函数或序列，例如：矩形脉冲或序列、梯形脉冲或序列、正弦脉冲或序列、单边指数函数或序列等，都可用 CFT 的时域微分和积分性质或 DTFT 的差分和累加性质来求它们的傅里叶变换。因为它们经历若干次时域微分或差分后，将变成原函数或序列与时移

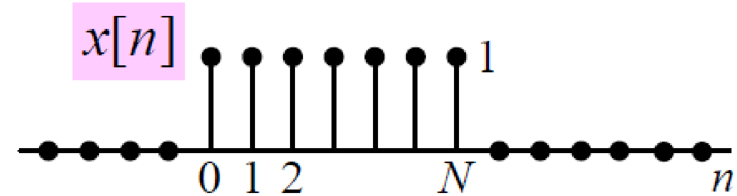
6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

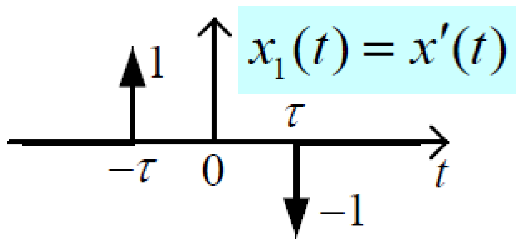
单位冲激函数或序列的线性组合。

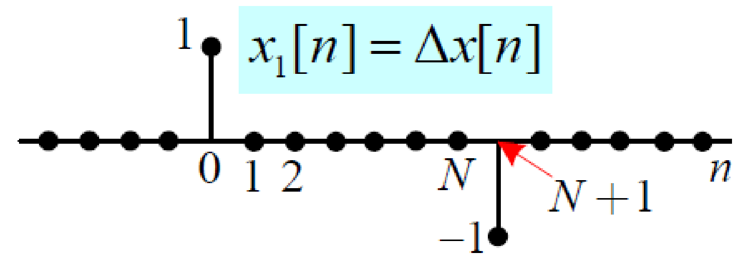
再看几个例子：

例子 1









$$x_1(t)=x'(t)=\delta(t+\tau)-\delta(t-\tau),\quad x_1[n]=\Delta x[n]=\delta[n]-\delta[n-N-1]$$

$$X_1(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}=2\mathrm{j}\sin(\omega\tau),\quad \tilde{X}_1(\Omega)=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega(N+1)}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]$$

$$X(\omega)=\frac{X_1(\omega)}{\mathrm{j}\omega}=2\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau),\quad \tilde{X}(\Omega)=\frac{\tilde{X}_1(\Omega)}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

$$=\frac{\sin\{[(N+1)\Omega]/2\}}{\sin(\Omega/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N\Omega}{2}}$$

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

例子 2：若知道 $r_1(t)$ 的 **CFT**，即

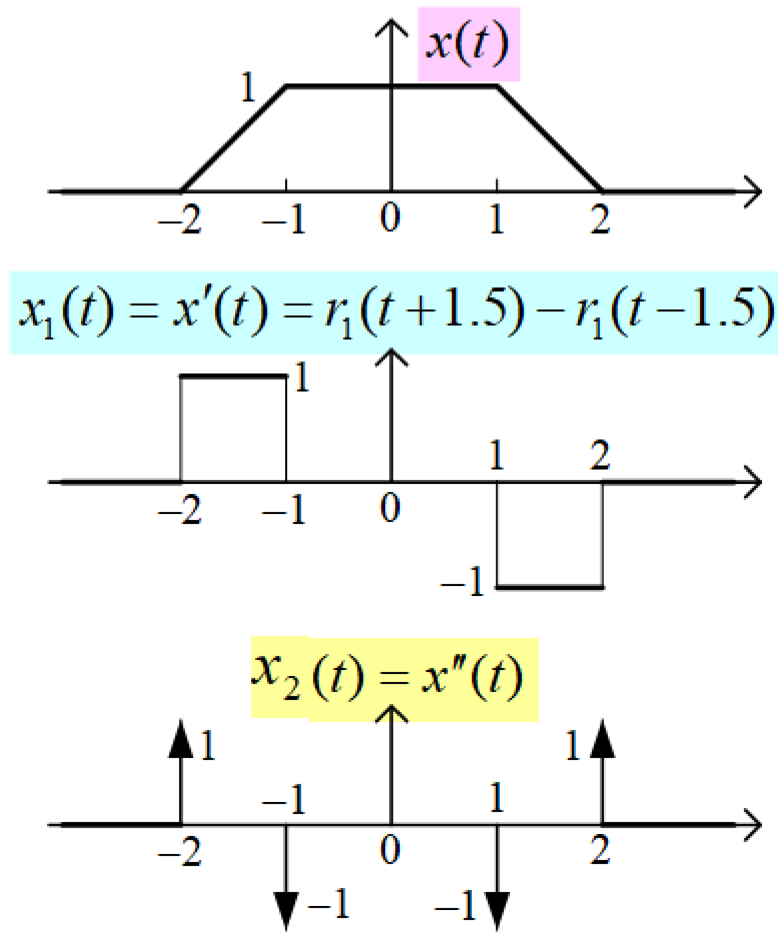
$$\mathcal{F}\{r_1(t)\} = Sa(\omega/2)$$

则 $$X_1(\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(e^{j\frac{3\omega}{2}} - e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau$$

$$X(\omega) = \frac{X_1(\omega)}{j\omega} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\left(e^{j\frac{3\omega}{2}} - e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right)}{j\omega}$$

$$= 3Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)Sa\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$



若不记得 $r_\tau(t)$ 的傅里叶变换，则可以对 $x_1(t)$ 再微分一次，就只剩下时移冲激函数的线性组合，如右下图所示。此时，只要记住单位冲激函数的傅里叶变换，利用 **CFT** 的两次积分性质，可以得到相同的结果。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

例子 3：例 6.5 中的升余弦脉冲 $x(t)$ 。它的一次和两次微分的波形如右图所示。

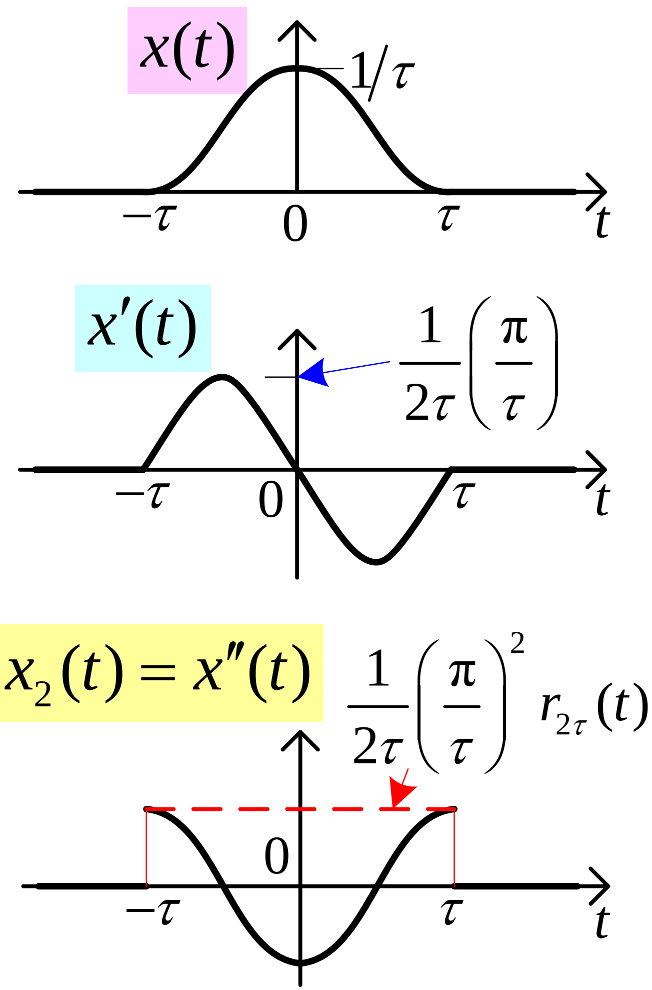
$$x_2(t)=x''(t)=\frac{1}{2\tau}\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2[r_{2\tau}(t)-2\tau x(t)]$$

上式等号两边取 CFT，利用时域微分性质，则有

$$(\mathrm{j}\omega)^2X(\omega)=\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2[\mathrm{Sa}(\omega\tau)-X(\omega)]$$

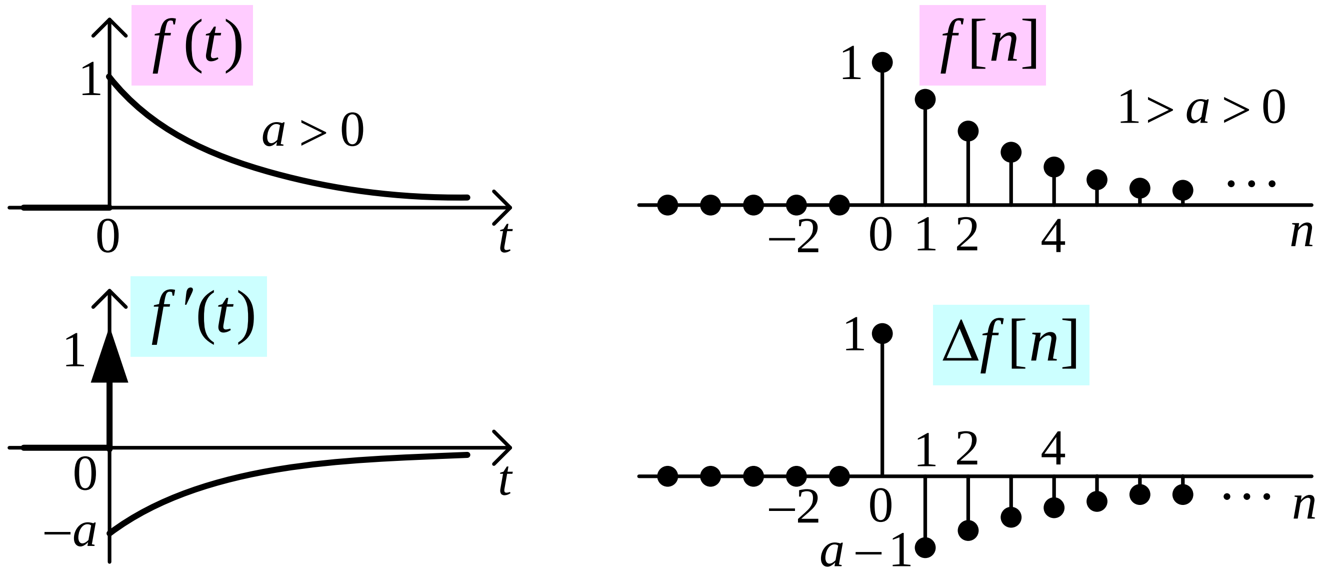
整理后得到 $$X(\omega)=\frac{\mathrm{Sa}(\omega\tau)}{1-(\omega\tau/\pi)^2}$$

这与例 6.5 所得结果相等，因为把例 6.5 中 $X(\omega)$ 的三项抽样函数合并，并利用三角恒等式，就可以化成上述结果。



6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

例子 4：



$$f'(t) = \delta(t) - a e^{-at} u(t) \qquad \Delta f[n] = a^n u[n] - a^{n-1} u[n-1]$$

$$= \delta(t) - a f(t)\ , \qquad = \delta[n] + (a-1) f[n-1]$$

对它们分别取 **CFT** 和 **DTFT**，利用时域微分和累加性质，

则有 $\mathrm{j}\omega F(\omega) = 1 - aF(\omega)$， $(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})\tilde{F}(\Omega) = 1 + (a-1)\tilde{F}(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}$

$$F(\omega) = \frac{1}{a + \mathrm{j}\omega}\ , \qquad \tilde{F}(\Omega) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

上述结果与例 5.5 所得结果完全相同。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

★ 在求取傅里叶变换时，可以无条件地运用微分或差分性质，只要函数可微或序列可差分。例如，例 6.9 及上面的例子 3；

★ 在利用时域积分或累加性质求取傅里叶变换时，是将所求时间函数或序列先微分或差分，使得其微分函数或差分序列的傅里叶变换很好求得，或者是熟知的。再经由积分或累加返回原时间函数或序列，并运用时域积分或累加性质，求得原时间函数或序列的傅里叶变换。

特别注意：经由积分或累加返回原时间函数或序列时会失去原时间函数或序列中的常数分量，即积分或累加性质中频域冲激函数代表的时域常数分量。必须判断可否可运用简化的时域积分或累加性质来求原时间函数或序列的傅里叶变换。

▲ 对于有限持续期的脉冲时间函数 $f(t)$ 或序列 $f[n]$，可以证明它们的各阶导函数 $f^{(k)}(t)$ 或差分序列 $\Delta^k f[n]$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta^k f[m] = 0 \text{，} \quad k \geq 1$$

可放心使用简化的积分或累加性质求它们的傅里叶变换。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

例 6.8 及上面的例子和 2 就是这样的例子。

▲ 如果 $f(t)$ 或 $f[n]$ 是无限持续期的非周期函数或序列，且极限 $f(-\infty)$ 和 $f(+\infty)$ 或 $f[-\infty]$ 和 $f[+\infty]$ 存在并为有限值，则可以利用如下修正的时域积分或累加性质来求它们的傅里叶变换 $F(\omega)$ 或 $\tilde{F}(\Omega)$。

$$F(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\,\mathbf{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}+\left[f(+\infty)+f(-\infty)\right]\pi\delta(\omega)$$

和

$$\tilde{F}(\Omega)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-j\Omega}}\,\mathbf{F}\left\{\Delta f[n]\right\}+\left[f[+\infty]+f[-\infty]\right]\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

运用微积分等数学知识可以证明上述公式。

例如：$u(t)$ 和 $0.5\mathbf{sgn}(t)$ 的一阶微分都是 $\delta(t)$，利用上述修正的时域积分或累加性质，它们的傅里叶变换分别为

$$\mathbf{F}\left\{u(t)\right\}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \text{和} \quad \mathbf{F}\left\{0.5\mathrm{sgn}(t)\right\}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

★ 在先把周期函数 $\tilde{f}(t)$ 或序列 $\tilde{f}[n]$ 微分或差分、再运用 **CFS** 或 **DFS** 的时域积分或累加性质来求它们的的傅里叶级数系数时，请注意：这样求得的 **CFS** 系数 F_k 或 **DFS** 系数 $\tilde{F}_k$ 中，直流或常数分量系数不一定正确，必须按它们的计算公式，

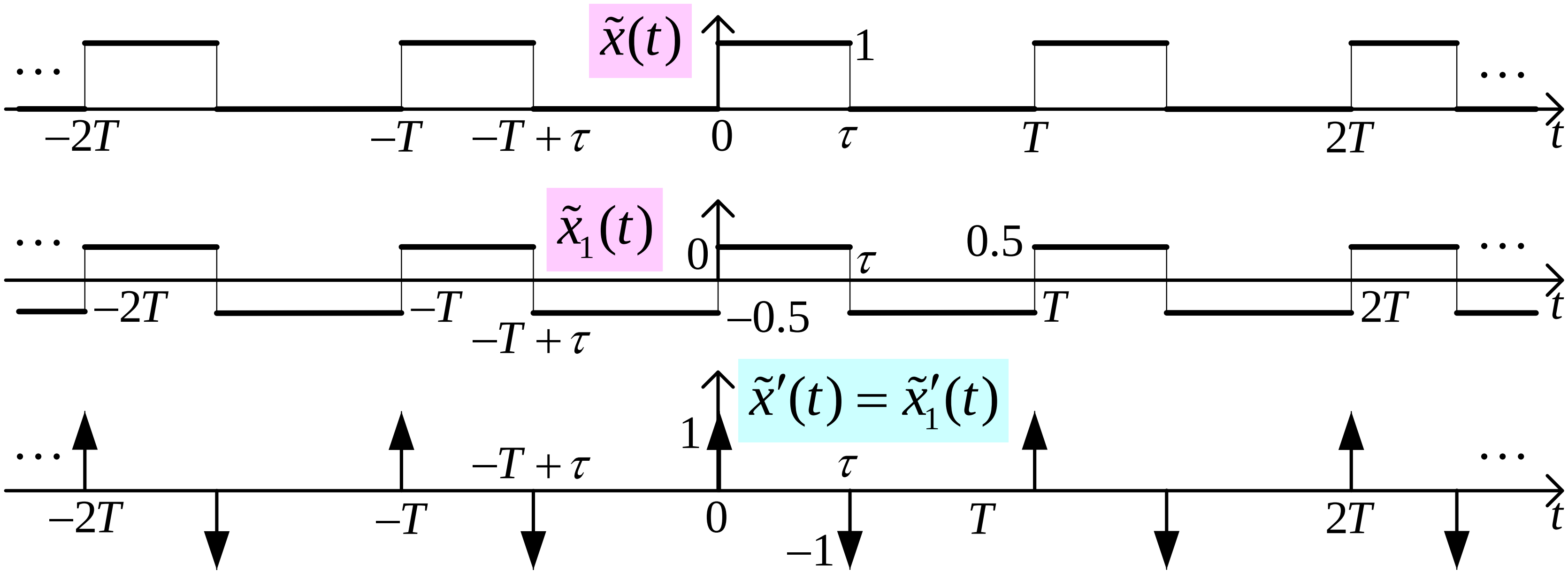
即 $$F_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \quad \text{或} \quad \tilde{F}_0 = \frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle} \tilde{f}[n]$$

进行修正。这是因为经由积分或累加返回原周期函数或序列时，产生的直流或常数分量可能与原周期函数或序列的直流或常数分量不相同所致。至于所有非直流或常数分量系数，只要计算无误，都与按照 **CFS** 或 **DFS** 公式的计算结果相同。

请看下面的例子。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

例子 5：求下图周期矩形脉冲 $\tilde{x}(t)$ 和 $\tilde{x}_1(t)$ 的 **CFS** 系数 F_k 和 F_{1k} 。



由于 $\tilde{x}_1(t)=\tilde{x}(t)-0.5$，故 $\tilde{x}(t)$ 和 $\tilde{x}_1(t)$ 的 **CFS** 系数除直流分量外均相同。且它们的一阶微分相同 (见上图)，均为：

$$\tilde{x}'(t)=\tilde{x}_1'(t)=\tilde{\delta}_T(t)-\tilde{\delta}_T(t-\tau)，\quad 其中\ \tilde{\delta}_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$\tilde{\delta}_T(t)$ 的 **CFS** 系数为 $(1/T)$ (见例 **5.11**)，并利用时移性质，很容易得到 $\tilde{x}'(t)=\tilde{x}_1'(t)$ 的 **CFS** 系数为 $X_k=(1/T)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0\tau})$。

6.5.1 时域微分和积分或差分和累加性质(续)

由于$\tilde{x}'(t)=\tilde{x}_1'(t)$在其周期区间上的积分等于**0**，可以利用**CFS**的时域积分性质来求$\tilde{x}(t)$和$\tilde{x}_1(t)$的**CFS**系数。

显然，$\tilde{x}(t)$是$\tilde{x}'(t)$的一次积分，利用**CFS**的时域积分性质，可以求得$\tilde{x}(t)$的**CFS**系数F_k为

$$F_k=\frac{X_k}{\mathrm{j}k\omega_0}=\frac{1}{T}\frac{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0\tau})}{\mathrm{j}k\omega_0}=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

其中，直流分量为$F_0=\tau/T$，它是$\tilde{x}'(t)$积分产生的常数分量。

至于$\tilde{x}_1(t)$的**CFS**系数F_{1k}，除直流分量外均与F_k相同，即

$$F_{1k}=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\omega_0\tau}{2}},\quad k\neq 0$$

其直流分量F_{10}需另外求得，它为

$$F_{10}=\frac{1}{T}\int_0^T\tilde{x}_1(t)\mathrm{d}t=\frac{\tau}{T}-0.5$$

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质

■ 频域微分或差分性质

● CFT 和 DTFT 的频域微分性质

假设有 $\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)$ 和 $\mathcal{F}\{f[n]\}=\tilde{F}(\Omega)$
则分别有

$$-\mathrm{j}tf(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}\frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \quad 和 \quad -\mathrm{j}nf[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\frac{\mathrm{d}\tilde{F}(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}$$

进一步，上述性质可扩展到频域高阶微分性质：

$$(-\mathrm{j}t)^k f(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}\frac{\mathrm{d}^k F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k} \quad 和 \quad (-\mathrm{j}n)^k f[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\frac{\mathrm{d}^k\tilde{F}(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^k}$$

傅里叶变换的频域微分性质表明：傅里叶变换$F(\omega)$或$\tilde{F}(\Omega)$在频域上每微分一次，对应于时域上是时间函数$f(t)$或序列$f[n]$分别乘以$(-\mathrm{j}t)$或$(-\mathrm{j}n)$。

依据 CFT 和 DTFT 的上述性质和频域卷积性质，可以得到：

$$t\xleftrightarrow{\text{CFT}}\mathrm{j}2\pi\frac{\mathrm{d}\delta(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \quad 和 \quad n\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\mathrm{j}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)$$

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质(续)

或反过来，基于这两个傅里叶变换对，利用 **CFT** 频域卷积性质和 **DTFT** 的频域周期卷积性质，可以推导出上述频域微分性质。即 **CFT** 和 **DTFT** 的频域微分性质可以看成 **CFT** 和 **DTFT** 的频域卷积性质的一个特例。

- **CFS 和 DFS 的频域差分性质**

假设周期分别是 T 或 N 的周期信号 $\tilde{x}(t)$或序列$\tilde{x}[n]$ 的 **CFS** 或 **DFS** 系数分别为 F_k 或 $\tilde{F}_k$，则分别有

$$(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/\mathrm{T})t})\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} \Delta F_k = F_k - F_{k-1}$$

和

$$(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)n})\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \Delta \tilde{F}_k = \tilde{F}_k - \tilde{F}_{k-1}$$

可以借助 **CFS** 或 **DFS** 的频移性质，证明 **CFS** 或 **DFS** 的这一频域差分性质。

■ 频域积分或累加性质

- **CFT 和 DTFT 的频域积分性质**

假设有 $\mathbf{F}\{f(t)\}=F(\omega)$ 和 $\mathbf{F}\{f[n]\}=\tilde{F}(\Omega)$

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质

则分别有 $\dfrac{f(t)}{-\mathrm{j}t}+\pi f(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \int_{-\infty}^{\omega} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma$

或 $\dfrac{f(t)}{-\mathrm{j}t} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \int_{-\infty}^{\omega} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma=0$ 或 $f(0)=0$

和 $\dfrac{f[n]}{-\mathrm{j}n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \int_{-\infty}^{\Omega} \tilde{F}(\sigma)\mathrm{d}\sigma$, $\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{F}(\sigma)\mathrm{d}\sigma=0$ 或 $f[0]=0$

CFT 的频域积分性质表明：时间函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 在频域 ω 上每积分一次，在时域上，除了 $f(t)$ 除以 $(-\mathrm{j}t)$ 外，还需添加代表频域积分可能产生常数项之傅里叶反变换的时域冲激项 $\pi f(0)\delta(t)$；如果 $f(0)=0$，即 $\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma=0$，就得到简化的 **CFT** 之频域积分性质。

因 $\tilde{F}(\Omega)$ 是频域上的周期函数，只有 $\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{F}(\sigma)\mathrm{d}\sigma=0$ 或 $f[0]=0$ 时其积分才有意义，故 **DTFT** 的频域积分性质必需以此为条件，且 $\tilde{F}(\Omega)$ 在频域 Ω 上每积分一次，时域上序列 $f[n]$ 则除以 $(-\mathrm{j}n)$。

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质(续)

- **CFS 和 DFS 的频域累加性质**

假设周期分别是 T 或 N 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或序列 $\tilde{x}[n]$ 的 **CFS** 或 **DFS** 系数分别为 F_k 或 $\tilde{F}_k$，则分别有

$$\frac{\tilde{x}(t)}{1-e^{j(2\pi/T)t}}+\frac{F_0 T}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT) \xleftrightarrow{\text{CFS}} \sum_{l=-\infty}^{k} F_l$$

和

$$\frac{\tilde{x}[n]}{1-e^{j(2\pi/N)n}} \xleftrightarrow{\text{DFS}} \sum_{l=-\infty}^{k}\tilde{F}_l\text{，}\qquad \sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k=0$$

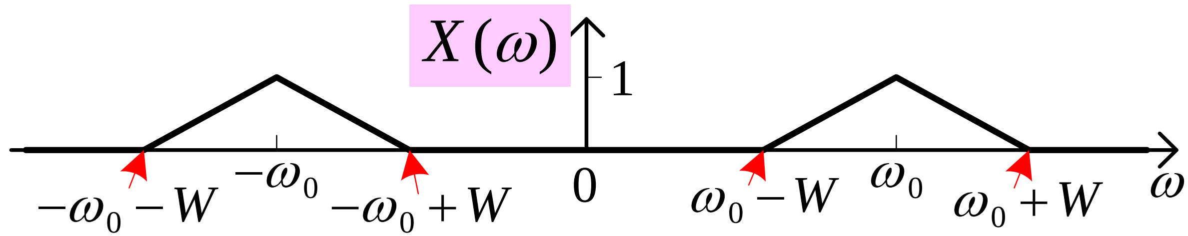
由于**DFS** 系数是周期为N 的周期序列，**DFS** 的频域累加性质必须以$\tilde{F}_k$ 其周期区间上的求和等于 **0**，或者 $\tilde{F}_0=0$，作为条件。

- **利用频域微分和积分性质求傅里叶反变换**

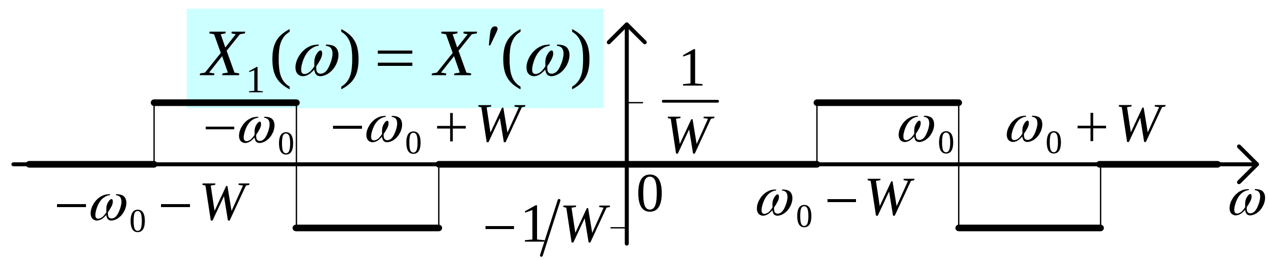
由于时间函数 $f(t)$ 或序列 $f[n]$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$或$\tilde{F}(\Omega)$ 分别是ω 和 Ω的复值函数，因此，与利用**CFT** 的时域微分和积分性质有助于求取时间函数的傅里叶变换一样，**CFT** 和 **DTFT** 的频域微分和积分性质也可以用来求取由分段初等函数表示的 $F(\omega)$ 或 $\tilde{F}(\Omega)$ 之傅里叶反变换。请看下面的例子。

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质(续)

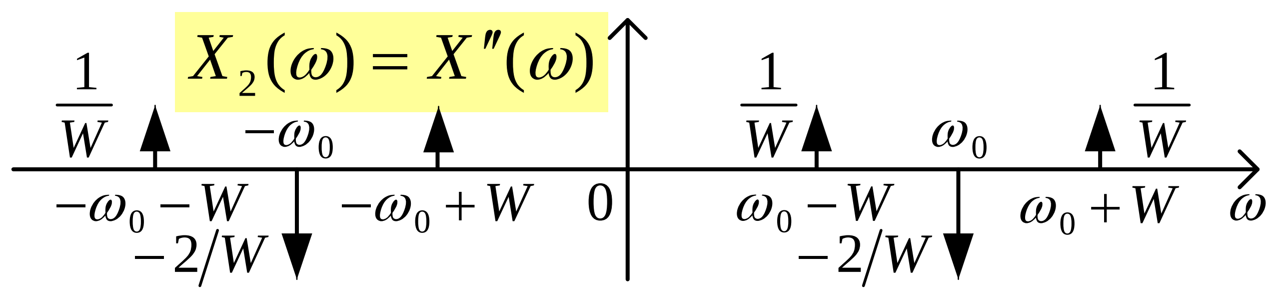
【例 6.11】 试求下图所示三角带通频谱 $X(\omega)$的傅里叶反变换。



解 $X(\omega)$经过两次微分只剩下频域冲激函数 (见下图)，



即有



$$X_2(\omega)=X''(\omega)$$

$$=\frac{1}{W}\{[\delta(\omega+\omega_0+W)+\delta(\omega-\omega_0-W)]-2[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$+[\delta(\omega+\omega_0-W)+\delta(\omega-\omega_0+W)]\}$$

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质(续)

如果熟悉正余弦函数的傅里叶变换对 (见例 6.1)，即

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

很容易写出 $X_2(\omega)=X''(\omega)$ 的傅里叶反变换 $x_2(t)$，即

$$x_2(t)=\frac{1}{\pi W}\left[\cos(\omega_0+W)t+\cos(\omega_0-W)t-2\cos\omega_0 t\right]$$

$$=\frac{-4}{\pi W}\sin^2\left(\frac{Wt}{2}\right)\cos\omega_0 t$$

$X(\omega)$ 是 $X_2(\omega)$ 的两次积分，且 $\int_{-\infty}^{\infty}X_2(\omega)\mathrm{d}\omega=0$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}X_1(\omega)\mathrm{d}\omega=0$,

故可以两次直接运用**简化的 CFT 的频域积分性质**，得到 $X(\omega)$ 的傅里叶反变换 $x(t)$，即

$$x(t)=\frac{x_2(t)}{(-\mathrm{j}t)^2}=\frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{Wt}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$$

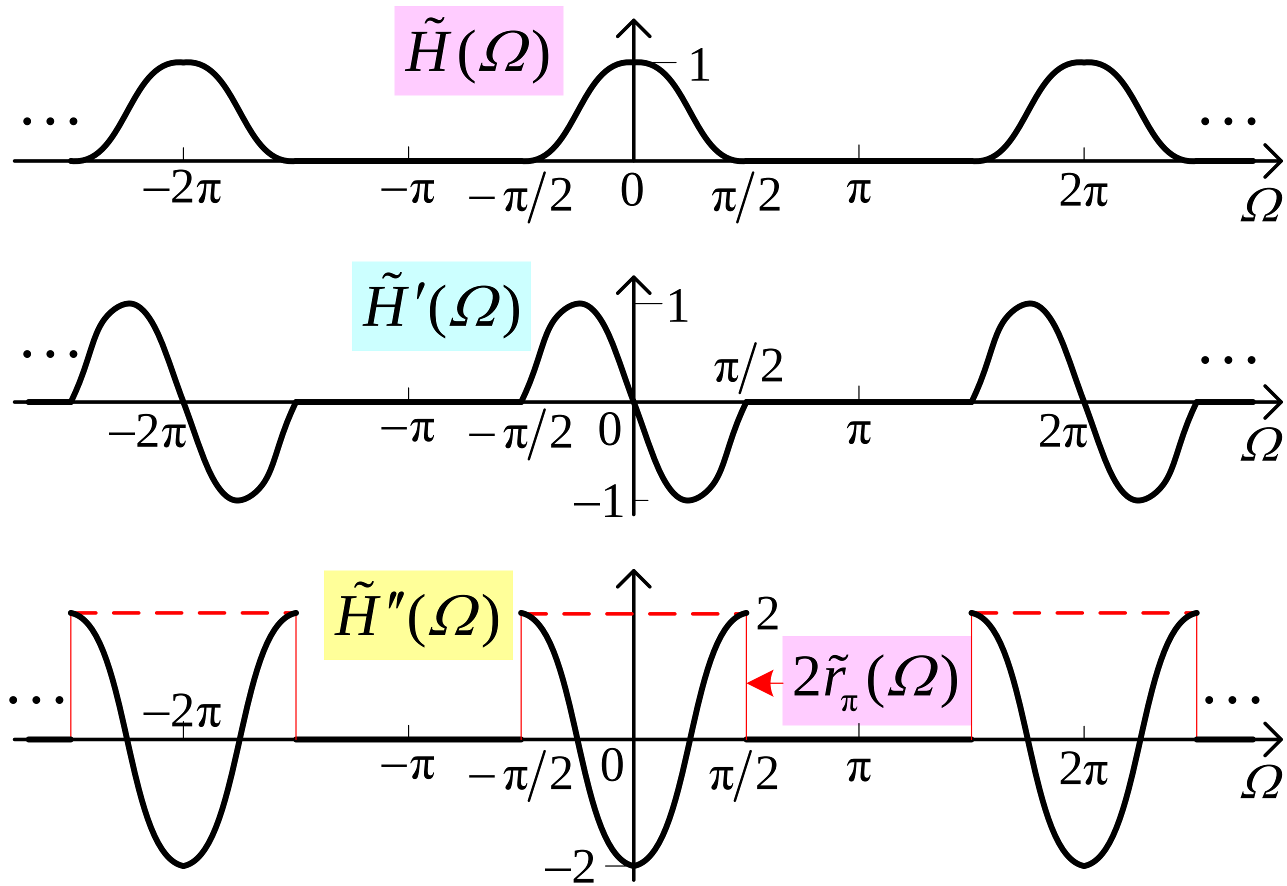
它是一个余弦载波被抽样函数调制的幅度调制波形。

再看一个利用 DTFT 频域微分和积分性质求反变换的例子。

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质(续)

例子 6： 求升余弦滤波特性 $\tilde{H}(\Omega)=\begin{cases}0.5[1+\cos(2\Omega)], & 0\le\Omega\le\pi/2\\ 0, & \pi/2<\Omega\le\pi\end{cases}$ 之数字滤波器的单位冲激响应 $h[n]$。

$\tilde{H}(\Omega)$ 如右图所示，在频域 Ω 上对它进行两次微分，可得到 $\tilde{H}'(\Omega)$ 和 $\tilde{H}''(\Omega)$，的函数图形，如右图所示。



按照 $\tilde{H}''(\Omega)$ 的图形，显然有

$$\tilde{H}''(\Omega)=2\tilde{r}_{\pi}(\Omega)-4\tilde{H}(\Omega)\text{，其中，}\quad \tilde{r}_{\pi}(\Omega)=\begin{cases}1, & 0\le\Omega\le\pi/2\\ 0, & \pi/2<\Omega\le\pi\end{cases}$$

6.5.2 频域微分和积分或差分和累加性质(续)

对上式两边取傅里叶变换，并运用 **DTFT** 的频域微分性质和离散时间频域周期矩形函数 (见例 **5.7**) 的傅里叶反变换，则有

$$(-\mathrm{j}n)^2 h[n] = 2\mathrm{Sa}(\pi n/2) - 4h[n]$$

整理后可以得到

$$h[n] = \frac{2\mathrm{Sa}(\pi n/2)}{4-n^2}$$

讨论：由于连续傅里叶变换 $F(\omega)$ 和离散时间傅里叶变换 $\tilde{F}(\Omega)$ 分别是 ω 的非周期函数和 Ω 的周期函数，也鉴于 **CFT** 本身的对偶性质(见**6.11.1**小节)和 **DTFT** 与 **CFS** 之间的对偶性质 (见 **6.11.3** 小节)，因此，在利用 **CFT** 或 **DTFT** 的频域微分和积分性质来求取傅里叶反变换时，上一小节有关利用 **CFT** 或 **CFS** 的时域微分和积分性质来求取时间函数的 **CFT** 或周期函数的 **CFS** 系数的方法和注意事项，均完全适用。

作业

- 6.8 6) 12) 14) 16) 18) 20)
- 6.9 3) 10) 11) 注：此题中的第二个3) F(w)sin(wT)
- 6.15 2) 4) 6) 8)
- 6.16 1) 3) 6) 注：此题开头处的图P6.15应为P6.16