中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

信息科学技术学院 School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第七周

信号和系统的变换域表示法（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/4/2

5.4.3 非周期信号频谱和LTI系统的频率响应

非周期函数或序列 ($f(t)$ 或 $f[n]$) 既可以表示非周期信号或序列 (如 $x(t)$ 或 $x[n]$)，也可表示**LTI 系统单位冲激响应** $h(t)$ 或 $h[n]$。如果它们的傅里叶变换分别是 $X(\omega)$或 $\tilde{X}(\Omega)$ 和 $H(\omega)$或 $\tilde{H}(\Omega)$, 其中： $X(\omega)$或 $\tilde{X}(\Omega)$称为 $x(t)$ 或 $x[n]$ 的频谱，而 $H(\omega)$或 $\tilde{H}(\Omega)$称为 **LTI 系统的频率响应**。本小节将讨论这些概念及其物理意义。

■ 非周期信号的频谱

对于连续时间或离散时间非周期信号 $x(t)$ 或 $x[n]$，如果它们分别存在 **CFT** 或 **DTFT**，即

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega) \quad 或 \quad x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(\Omega)$$

其中： $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ 或 $\tilde{X}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$

和 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 或 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{X}(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\mathrm{d}\Omega$

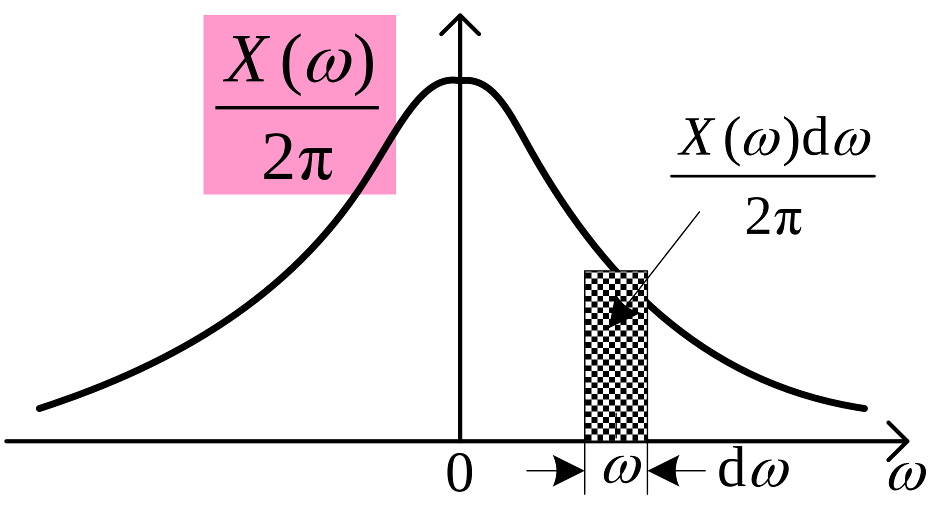
为理解其物理意义，反变换式改写成如下的连续线性组合形式：

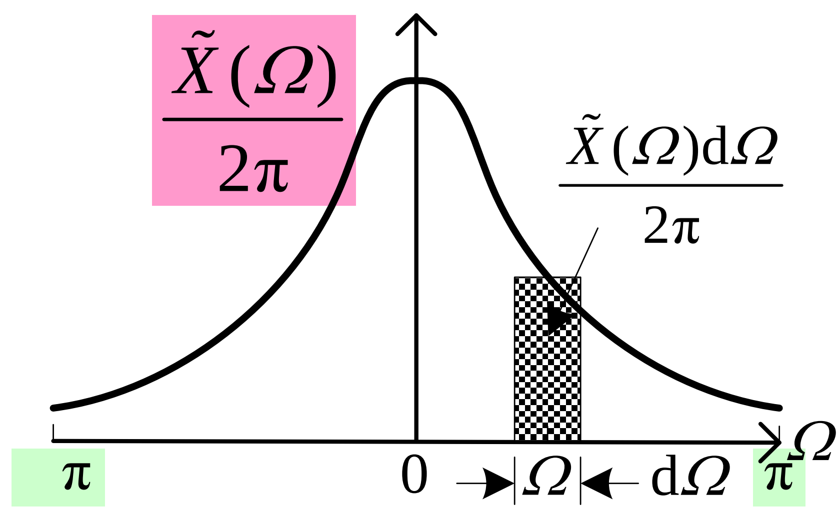
5.4.3 非周期信号频谱和 LTI 系统的频率响应(续)

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\omega)\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{或} \quad x[n]=\int_{\langle 2\pi\rangle}\frac{\tilde{X}(\Omega)\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$$

它们可以与 CFS 或 DFS 的合成公式作类比：

在 CFS 或 DFS 中，周期信号或序列是一组成谐波关系的复正弦分量的线性组合，每个谐波分量的复数幅度为 F_k 或 $\tilde{F}_k$；而非周期信号或序列则是分布在 $\omega\in\mathbf{R}$ 或 $\Omega\in\langle 2\pi\rangle$ 上所有频率的复正弦分量的一个连续的线性组合，其每个频率 ω 或 Ω 分量的复数幅度分别为 $X(\omega)\mathrm{d}\omega/2\pi$ 或 $\tilde{X}(\Omega)\mathrm{d}\Omega/2\pi$。下图是假设 $X(\omega)$ 或 $\tilde{X}(\Omega)$ 时对此作出的解释，因此，$X(\omega)$ 或 $\tilde{X}(\Omega)$ 称为信号 $x(t)$ 或 $x[n]$ 的频谱





5.4.3 非周期信号频谱和LTI系统的频率响应(续)

由上面的讨论可以归纳出非周期信号频谱的主要特点：

- 非周期信号的频谱是连续频谱，即 $X(\omega)$或 $\tilde{X}(\Omega)$表示构成非周期信号$x(t)$或$x[n]$的复正弦分量$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$或$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$在频率$\omega$或$\Omega$上的谱密度分布函数，$X(\omega)$或$\tilde{X}(\Omega)$在$\omega$或$\Omega$上的函数值等于该频率处、单位频带的复正弦分量之复数幅度乘以2π；
- 非周期信号$x(t)$的谱密度函数$X(\omega)$是整个频域ω上的非周期函数，而非周期序列$x[n]$的谱密度函数 $\tilde{X}(\Omega)$是 Ω上的周期为2π的周期函数，故在区间(–π, π]或[0, 2π)上的 $\tilde{X}(\Omega)$完全代表了$x[n]$的谱密度分布情况；
- 即使是实的$x(t)$或$x[n]$的频谱密度函数$X(\omega)$或$\tilde{X}(\Omega)$，一般也是ω或Ω的复值函数，它们用实部和虚部函数表示，但常用其模函数和幅角函数表示，它有清楚的物理含义，即

$$X(\omega)=\left|X(\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_X(\omega)} \quad 或 \quad \tilde{X}(\Omega)=\left|\tilde{X}(\Omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\theta}_X(\Omega)}$$

其中，模函数$\left|X(\omega)\right|$或$\left|\tilde{X}(\Omega)\right|$表示构成$x(t)$或$x[n]$的复正弦

5.4.3 非周期信号频谱和 LTI 系统的频率响应(续)

分量的振幅在 ω 或 Ω 上的密度分布，通常简称为幅度频谱；而幅角函数 $\theta_X(\omega)$ 或 $\tilde{\theta}_X(\Omega)$ 则表示构成 $x(t)$ 或 $x[n]$ 的 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 的初相位在 ω 或 Ω 上的分布，简称为非周期信号或序列的相位频谱。

■ LTI 系统的频率响应

对于连续或离散时间 **LTI 系统单位冲激响应** $h(t)$ 或 $h[n]$，如果它们分别存在 **CFT** 或 **DTFT**，即

$$h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} H(\omega) \quad \text{或} \quad h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{H}(\Omega)$$

其中：
$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{或} \quad \tilde{H}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

和
$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{或} \quad h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{H}(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

5.2节讲过：$H(\omega)$ 或 $\tilde{H}(\Omega)$ 是**LTI** 系统的频率响应，表示 **LTI** 系统对 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 输入的复数增益随频率 ω 或 Ω 的变化情况，即

$$e^{j\omega t} \xrightarrow{h(t)} H(\omega)e^{j\omega t} \quad \text{或} \quad e^{j\Omega n} \xrightarrow{h[n]} \tilde{H}(\Omega)e^{j\Omega n}$$

5.4.3 非周期信号频谱和LTI系统的频率响应(续)

这里用非周期信号$x(t)$或$x[n]$通过**LTI**系统的情况，来说明频率响应$H(\omega)$或$\tilde{H}(\Omega)$所表现的**LTI系统特性**。假设$x(t)$或$x[n]$的频谱为$X(\omega)$或$\tilde{X}(\Omega)$，并表示为$e^{j\omega t}$或$e^{j\Omega n}$的连续线性组合，即

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\omega)d\omega}{2\pi}e^{j\omega t} \quad \text{或} \quad x[n]=\int_{\langle 2\pi\rangle}\frac{\tilde{X}(\Omega)d\Omega}{2\pi}e^{j\Omega n}$$

根据**LTI**系统对复正弦输入的响应和线性性质，系统输出分别为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\omega)d\omega}{2\pi}H(\omega)e^{j\omega t} \quad \text{或} \quad y[n]=\int_{\langle 2\pi\rangle}\frac{\tilde{X}(\Omega)d\Omega}{2\pi}\tilde{H}(\Omega)e^{j\Omega n}$$

或写成

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{或} \quad y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

这是**CFT**或**DTFT**反变换，得到**LTI系统的频域输入输出关系**为

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)$$

其中，$Y(\omega)$或$\tilde{Y}(\Omega)$是输出信号$y(t)$或$y[n]$的**CFT**或**DTFT**。这表明：**LTI**系统在频域上表现的输入输出特性是，输出信号或序

5.4.3 非周期信号频谱和 LTI 系统的频率响应(续)

列的频谱等于输入信号或序列的频谱乘以 LTI 系统的频率响应。

$X(\omega) \to$ 连续时间 LTI 系统 $H(\omega)$ $\to Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$

$\tilde{X}(\Omega) \to$ 离散时间 LTI 系统 $\tilde{H}(\Omega)$ $\to \tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)$

两点进一步的认识和启发：

- **LTI 系统的幅频响应和相频响应**

  $H(\omega)$ 或 $\tilde{H}(\Omega)$ 一般也是 ω 或 Ω 的复值函数，与 $X(\omega)$ 或 $\tilde{X}(\Omega)$ 一样，通常也用其模函数和幅角函数表示，即

  $$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{或} \quad \tilde{H}(\Omega)=|\tilde{H}(\Omega)|e^{j\tilde{\varphi}(\Omega)}$$

  若输出信号或序列频谱也表示成模和幅角函数形式，则有：

  $$Y(\omega)=|Y(\omega)|e^{j\theta_Y(\omega)}=|X(\omega)||H(\omega)|e^{j[\theta_X(\omega)+\varphi(\omega)]}$$

  或

  $$\tilde{Y}(\Omega)=|\tilde{Y}(\Omega)|e^{j\tilde{\theta}_Y(\Omega)}=|\tilde{X}(\Omega)||\tilde{H}(\Omega)|e^{j[\tilde{\theta}_X(\Omega)+\tilde{\varphi}(\Omega)]}$$

5.4.3 非周期信号频谱和LTI系统的频率响应(续)

上式表明，频率响应 $H(\omega)$或$\tilde{H}(\Omega)$体现LTI系统两方面的特性：

▲ 输入信号中频率是ω 或 Ω的复正弦分量获得的幅度增益为$\left|H(\omega)\right|$或$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$，故它们称为LTI系统的幅度频率响应；

▲ 输入信号中频率是ω或Ω的复正弦分量通过LTI系统还产生附加的相位移动$\varphi(\omega)$或$\tilde{\varphi}(\Omega)$，故把它们称为LTI系统的相位频率响应，当$\varphi(\omega)<0$ 或 $\tilde{\varphi}(\Omega)<0$ 是相位滞后，而当 $\varphi(\omega)>0$ 或$\tilde{\varphi}(\Omega)>0$则是相位超前。

- **LTI 系统的滤波功能**

输入信号或序列通过LTI系统，其频谱 $X(\omega)$或 $\tilde{X}(\Omega)$要加权 $H(\omega)$或$\tilde{H}(\Omega)$，如果LTI系统的幅频响应$\left|H(\omega)\right|$或$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$不是常数，则输入信号频谱中有些频率成分被增强，有些频率成分被削弱，甚至完全抑制($\left|H(\omega)\right|=0$或$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=0$)。这种现象叫做滤波，实际的LTI系统都具有滤波功能，它们是天然的滤波器。有关滤波和滤波器在第10章还将详细讨论。

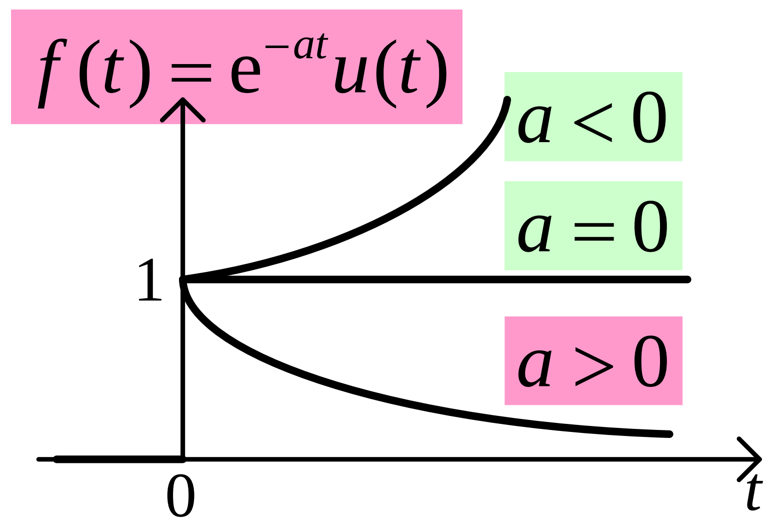
5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子

本小节通过CFT和DTFT的几个典型例子，进一步加深对信号的频谱和 LTI 系统的频率响应的理解，树立一些感性认识。

【例 5.5】 试求如下的单边实指数函数和序列的傅里叶变换：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t) \qquad 和 \qquad f[n]=a^n u[n]$$

解：不同实数 a 时，$f(t)$ 的波形见下图，只有当 $a>0$ 时的单边衰减实指数函数满足模可积，才有严格意义的 CFT；对于 $f[n]$，只有当 $0<|a|<1$ 时的单边衰减或正负交替衰减实指数序列满足模可和，才有严格意义的 DTFT。下面分别针对在 $a>0$ 时的 $f(t)$ 和在 $0<|a|<1$ 时的 $f[n]$，计算它们的 CFT 和 DTFT：



$$F(\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{a+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}, \quad a>0$$

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

和 $$\tilde{F}(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^{n}=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}\,,\quad 0<|a|<1$$

由此得到两个常用的傅里叶变换对，即

$$\mathrm{e}^{-at}u(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}\,,\qquad \mathrm{Re}\{a\}>0$$

和 $$a^{n}u[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}\,,\qquad 0<|a|<1$$

由于$F(\omega)$和$\tilde{F}(\Omega)$分别是ω 和 Ω 的复值函数，它们通常用其模函数和幅角函数表示，即

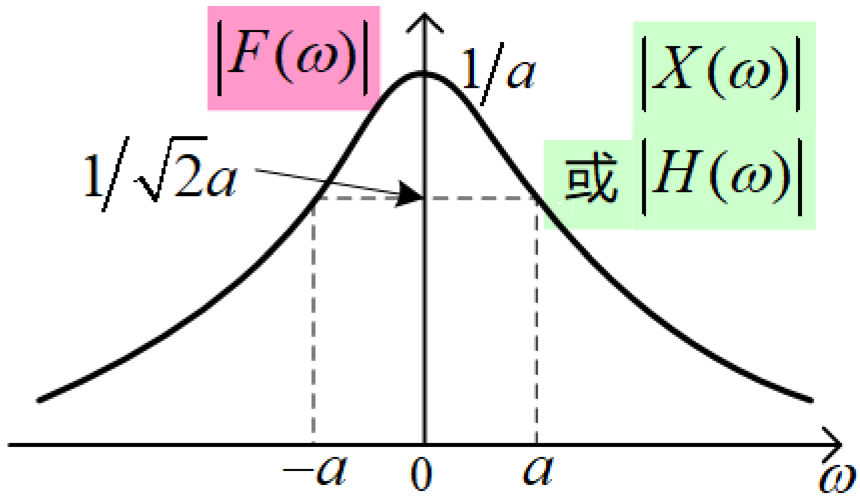
$$F(\omega)=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$$ 和 $$\tilde{F}(\Omega)=|\tilde{F}(\Omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\phi}(\Omega)}$$

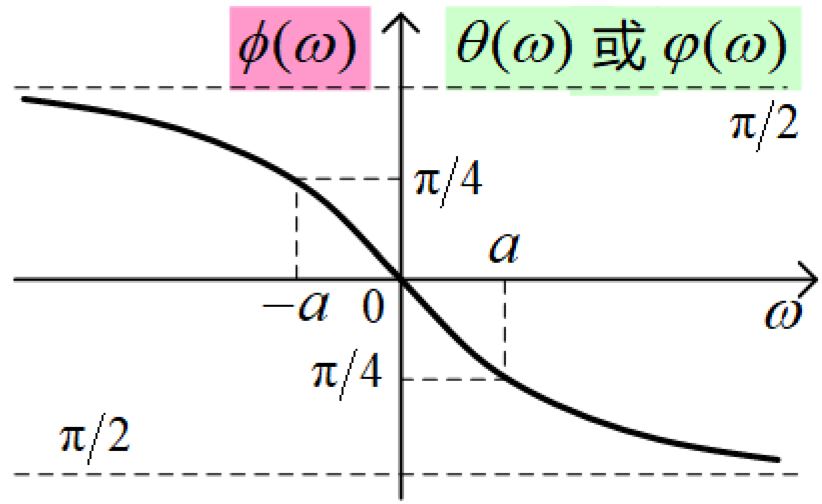
其中： $$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^{2}+\omega^{2}}}\,,\qquad \phi(\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

和 $$|\tilde{F}(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+a^{2}-2a\cos\Omega}}\,,\qquad \tilde{\phi}(\Omega)=-\arctan\frac{a\sin(\Omega)}{1-a\cos(\Omega)}$$

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

$F(\omega)$的模函数和幅角函数的图形如下：





讨论：

▲ 如果把 $e^{-at}u(t)$，$a>0$看成单边衰减实指数信号$x(t)$，其**CFT**的模函数就是它的幅度谱密度函数$|X(\omega)|$，其图形表明：该信号有较大的低频分量，频率越高的成分相对越小；

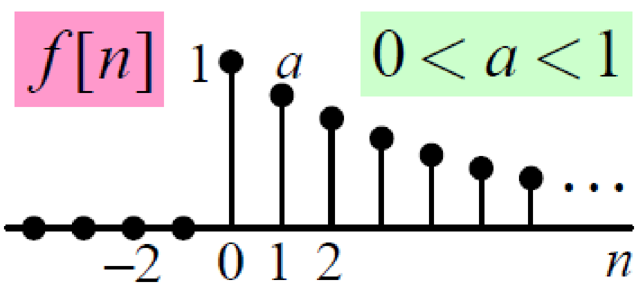
▲ 它也可以是用一阶微分方程$y'(t)+ay(t)=x(t)$表示的因果稳定**LTI**系统的单位冲激响应$h(t)$，其**CFT**的模函数$|H(\omega)|$和幅角函数$\varphi(\omega)$的图形表明：

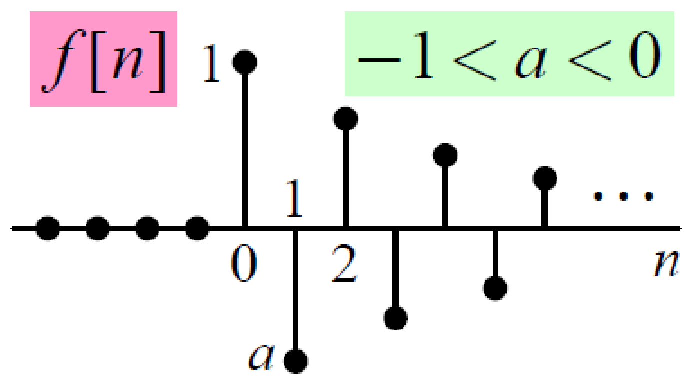
5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

★ 这种连续时间一阶系统是一个低通滤波器，其 -3 dB 低通截止频率为 $\omega_{cL}=a$，正实数 a 越大，$h(t)$ 衰减越快、波形越尖锐，其 -3 dB 带宽也越宽，反之亦然；

★ 在该系统的 -3 dB 带宽内，其相频响应 $\varphi(\omega)$ 接近于一条负斜率的直线(近似于线性相移特性)。

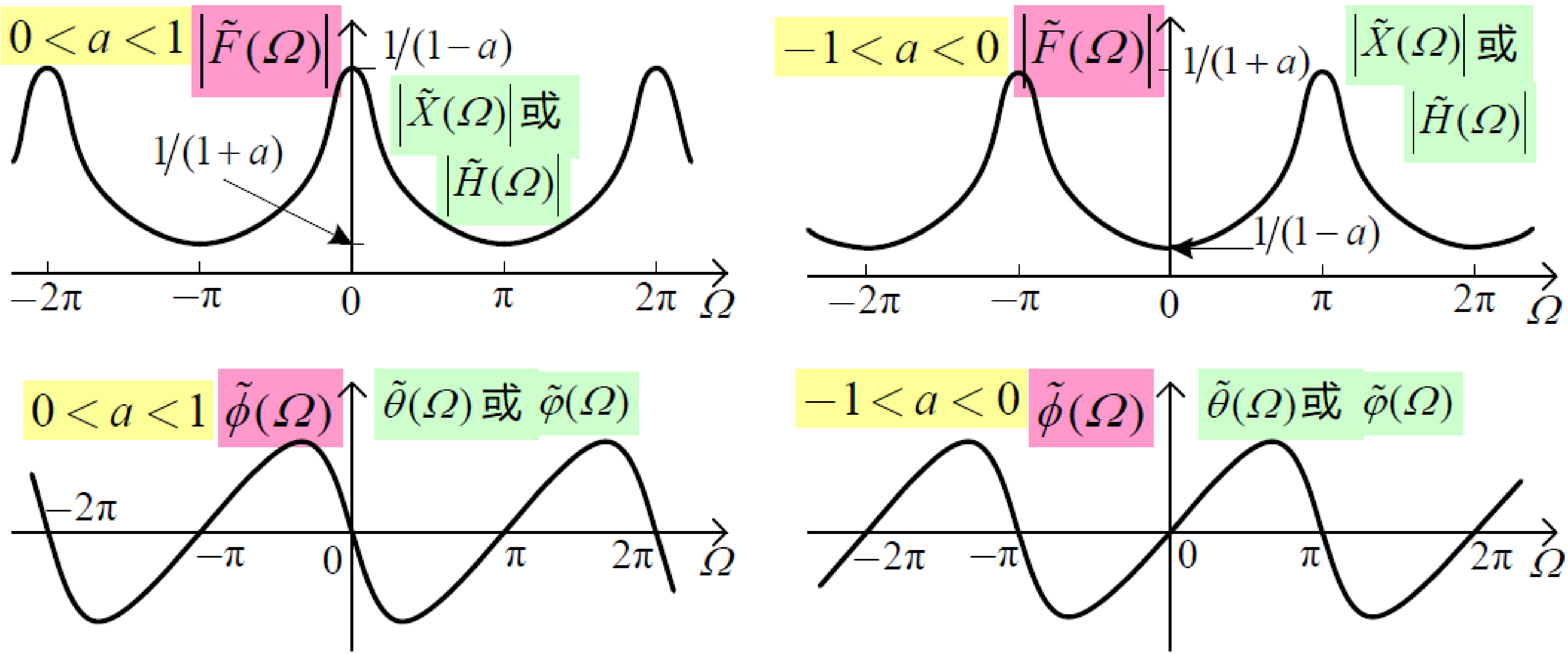
对于 $0<a<1$ 和 $-1<a<0$ 的单边衰减和的实指数序列 $f[n]$，其序列图形见下图，与连续实指数函数有些不同。





$0<a<1$ 和 $-1<a<0$ 两种情况下 $f[n]$ 的 DTFT 模函数 $\left|\tilde{F}(\Omega)\right|$ 和幅角函数 $\tilde{\phi}(\Omega)$ 的图形分别如下图所示。

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)



讨论：

▲ 其DTFT的模函数和幅角函数都是周期为2π的周期函数；

▲ 如果把 $a^n u[n]$, $0<|a|<1$ 看成离散时间信号 $x[n]$，其DTFT的幅度谱 $|\tilde{X}(\omega)|$ 和相位谱 $\tilde{\theta}(\omega)$ 图形表明：$0<a<1$ 的单边衰减实指数序列的波形和频谱 (左半图) 类似于连续时间单边衰减实

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

指数信号，即低频分量较大，频率越高的成分相对越小；而 $-1<a<0$ 的正负交替衰减实指数序列的幅度频谱 (右版图) 却是一个高频频谱，即在离散时间最高频率 (π 的奇数倍) 处谱分量最大，在最低频率 (π 的偶数倍) 处谱分量最小。

▲ 如果它是用一阶差分方程 $y[n]-ay[n-1]=x[n]$ 表示的因果稳定 LTI 系统的单位冲激响应 $h[n]$，其幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$和相频响应 $\tilde{\varphi}(\Omega)$ 的图形表明：

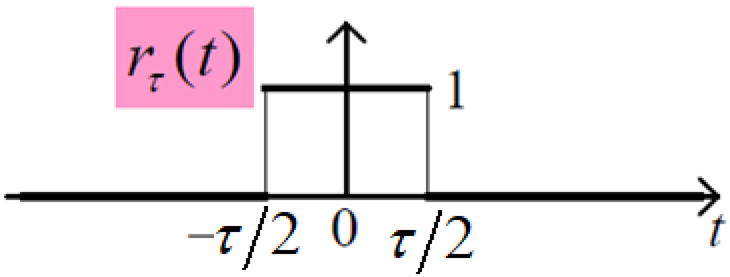
★ 当 $0<a<1$ 时，$|\tilde{H}(\Omega)|$ 表现为一个离散时间低通滤波器，而当 $-1<a<0$ 时，则表现为一个离散时间高通滤波器，且随着 $|a|$ 的增大， $h[n]$ 的衰减速度变慢，这两种滤波器的通带也变宽；

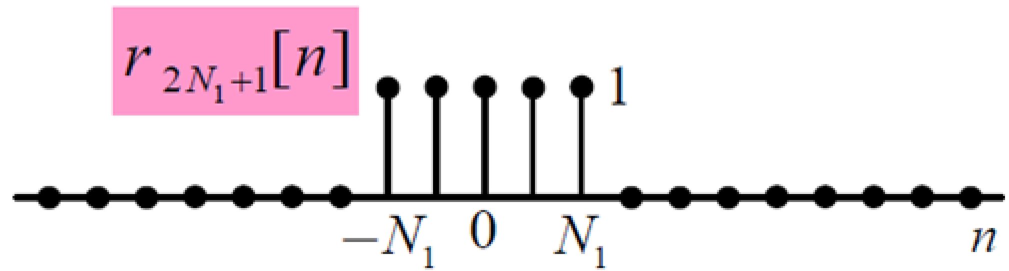
★ 相频响应 $\tilde{\varphi}(\Omega)$在低通或高通滤波器的通带内也近似于线性相频特性。

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

【例 5.6】 试求如下矩形时间函数和序列的傅里叶变换。

$$r_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases} \quad 和 \quad r_{2N_1+1}[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$





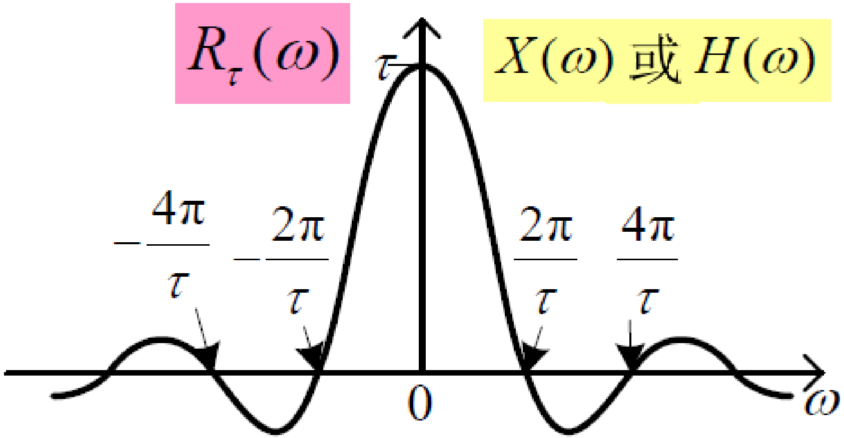
解 由于 $r_\tau(t)$ 或 $r_{2N_1+1}[n]$ 满足模可积或模可和，按照正变换公式，它们的傅里叶变换分别为

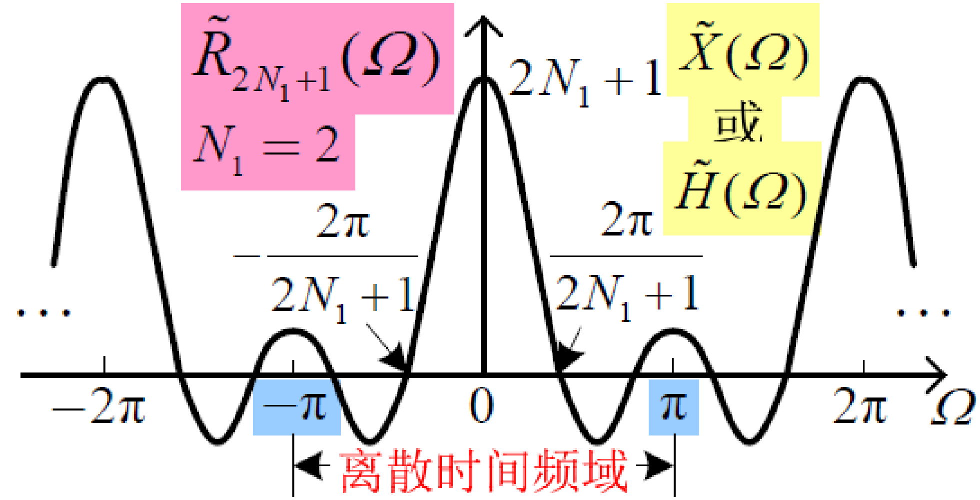
$$R_\tau(\omega)=\mathbf{F}\left\{r_\tau(t)\right\}=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\tilde{R}_{2N_1+1}(\Omega)=\mathbf{F}\left\{r_{2N_1+1}[n]\right\}=\sum_{n=-N_1}^{N_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}=\begin{cases}\dfrac{\sin[\Omega(2N_1+1)/2]}{\sin(\Omega/2)}, & \Omega\neq 2\pi l\\ 2N_1+1\quad, & \Omega=2\pi l\end{cases}$$

它们是实函数，其函数图形分别如下图所示。

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)





讨论：$r_\tau(t)$与 $r_{2N_1+1}[n]$可以是：

★ 连续时间或离散时间矩形脉冲信号$x(t)$ 或 $x[n]$；

★ 时域矩形窗函数或矩形窗序列；

★ 连续或离散时间平滑系统单位冲激响应$h(t)$或 $h[n]$。

它们不仅在时域上对偶，其傅里叶变换在频域上也十分对偶：

▲ 它们都等间隔地过零，且不断衰减，其间隔分别为 $2\pi/\tau$ 或 $2\pi/(2N_1+1)$，且通常作为信号或系统带宽的一种度量；

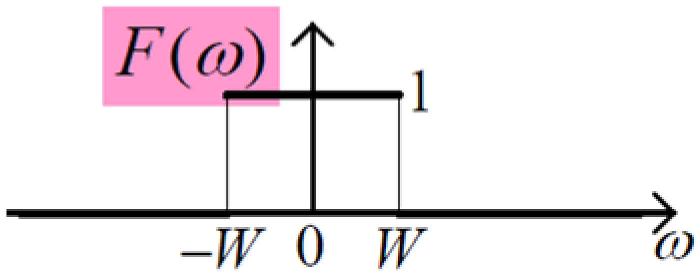
▲ 在零频率的函数值等于矩形函数的面积或序列值之和，即

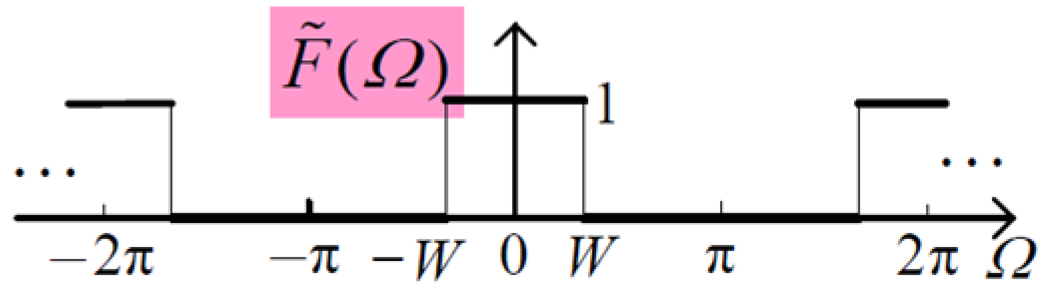
$$R_\tau(0)=\tau \qquad \text{和} \qquad \tilde{R}_{2N_1+1}(0)=2N_1+1$$

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

【例 5.7】 试求如下频域上矩形函数$F(\omega)$和周期矩形函数$\tilde{F}(\Omega)$反傅里叶变换 $f(t)$ 或 $f[n]$。

$$F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W \\ 0, & |\omega|>W\end{cases} \quad 和 \quad \tilde{F}(\Omega)=\begin{cases}1, & 2\pi l-W<\Omega<2\pi l+W \\ 0, & 2\pi l+W<\Omega<2(l+1)\pi-W\end{cases}$$





解 由于$F(\omega)$或$\tilde{F}(\Omega)$都有界，故其反傅里叶变换 $f(t)$ 或 $f[n]$ 必定模可积或模可和。按照公式， $f(t)$ 或 $f[n]$ 分别为

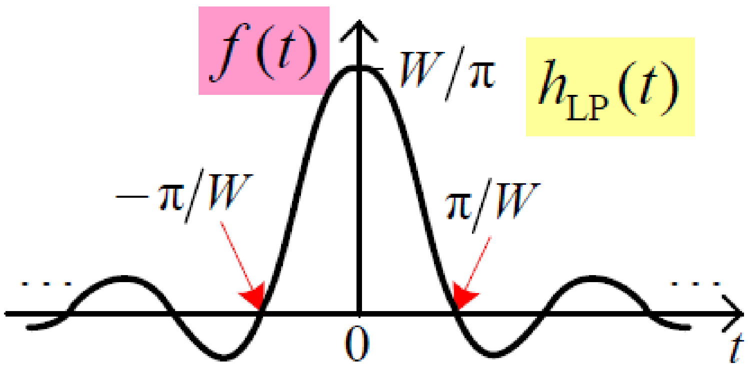
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}=\frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}(Wt)$$

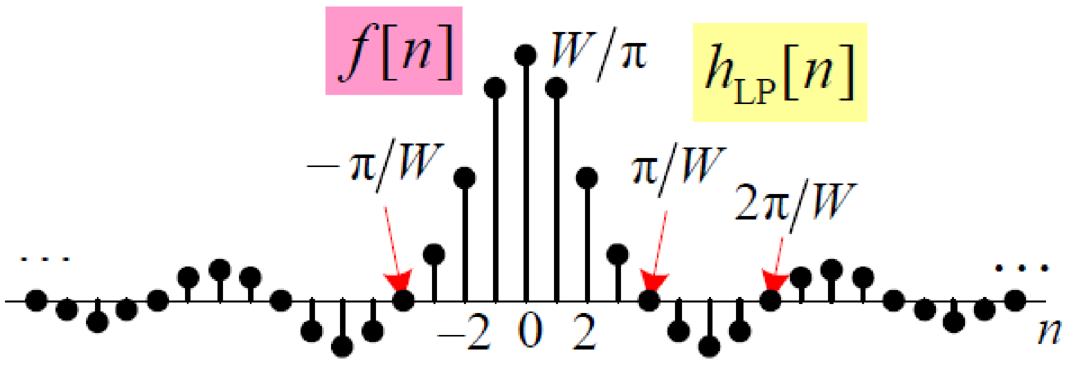
和

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}\mathrm{e}^{j\Omega n}\mathrm{d}\Omega=\frac{\sin(Wn)}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}(Wn)$$

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

$f(t)$ 或 $f[n]$ 的函数或序列图形如下图所示。





讨论：频域上的矩形函数 $F(\omega)$ 或周期矩形函数 $\tilde{F}(\Omega)$ 的典型代表是截止频率为 W 的连续时间或离散时间理想低通滤波器的频率响应 $H_{LP}(\omega)$ 或 $\tilde{H}_{LP}(\Omega)$，它们的傅里叶反变换就是理想低通滤波器的单位冲激响应 $h_{LP}(t)$ 或 $h_{LP}[n]$，即时域上的抽样函数或序列，其波形或序列参数也很对偶：

▲ 它们都等间隔地过零，其间隔均为 π/W；

▲ 它们在零时刻的函数值或序列值均为 W/π，即

$$h_{LP}(0)=\frac{W}{\pi} \qquad \text{和} \qquad h_{LP}[0]=\frac{W}{\pi}$$

5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

【例 5.4】 试求单位冲激函数 $\delta(t)$ 和单位冲激序列 $\delta[n]$ 的傅里叶变换。

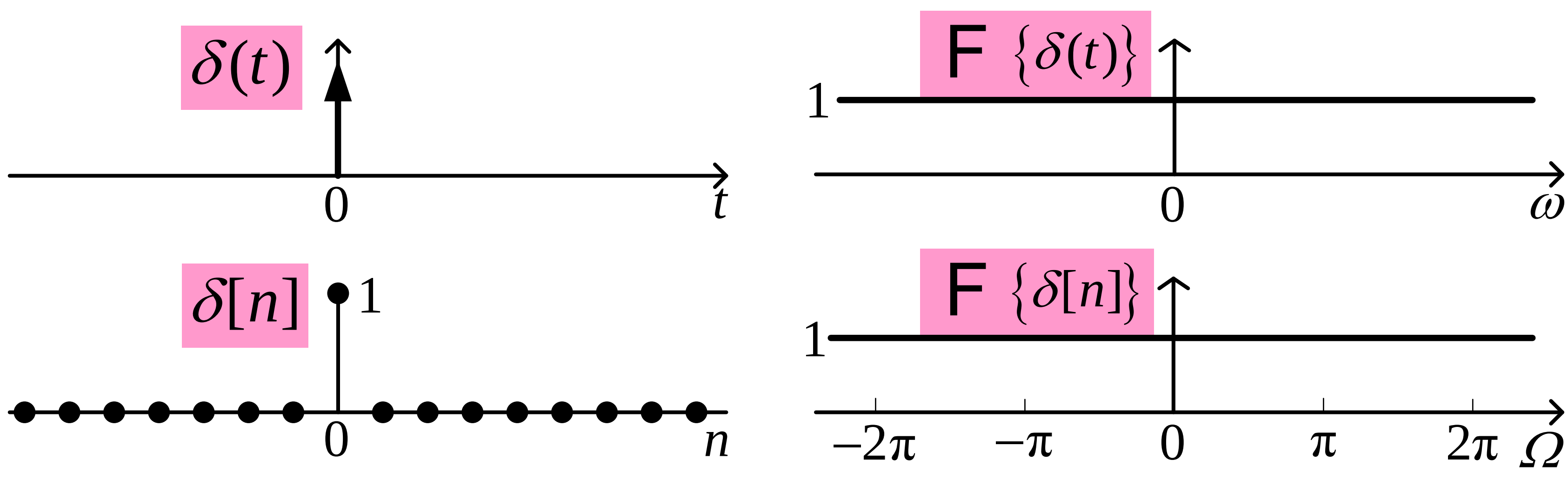
解 $\delta[n]$ 满足模可和，它存在 DTFT， $\delta(t)$ 属于奇异函数，但利用其抽样性质，也有CFT。它们的傅里叶变换分别为：

$$\mathbf{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

和

$$\mathbf{F}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

它们的波形和傅里叶变换的函数图形如下图所示。



5.4.4 CFT 和 DTFT 的典型例子(续)

由此得到两个十分重要的傅里叶变换对，即

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 1 \qquad \text{和} \qquad \delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 1$$

讨论：在信号与系统中，$\delta(t)$或$\delta[n]$可以看作连续时间或离散时间冲激信号，也可以代表连续时间或离散时间恒等系统的 $h(t)$ 或 $h[n]$，本例的结果表明：

▲ 连续时间或离散时间冲激信号具有所谓“白色谱”，即在整个频域上具有平坦的幅度谱密度，且其相位谱等于零，其典型例子就是所谓“高斯白噪声”，因为它的自相关函数是冲激函数。

▲ 连续时间或离散时间恒等系统是输出信号等于输入信号的 **LTI** 系统，它必须在所有频率上都具有单位幅度增益和零相移。故在实际中，不可能实现严格的恒等系统，但可以设计和实现所谓“带限”的恒等系统，在后面7.2节讨论信号的无失真传输和处理时，还将涉及这个问题。

作业

- 5.15 2)
- 5.16 1)
- 5.17 4)
- 5.18 3)
- 5.21 1)部分a)中的(2)，
  2)部分的d)