中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

信息科学技术学院 School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十三周

拉普拉斯变换和 Z 变换

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/5/16

第8章 信号和系统的复频域表示法：拉普拉斯变换和 Z 变换

8.1 引 言

第 5 章的引言中，在介绍和讲述整个变换域方法的概念、地位、作用和发展历史，以及相互之间的关系时，已经指出：

- 拉普拉斯变换(连续时间)和 Z 变换(离散时间)提供了信号和和系统的另一种变换域表示法——复频域表示法。
- 拉普拉斯变换和 Z 变换又分双边和单边：单边拉普拉斯变换是从微分方程的算子解法发展而来，它只适用于因果系统和所谓“有始信号”；双边拉普拉斯变换则出于连续傅里叶变换的一般化，故无此限制。单边和双边 Z 变换也完全一样。变换域理论发展到今天，双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换才称得上一般信号和系统的复频域表示；尽管单边变换在起始不松弛的因果系统分析中有不可替代的作用，但它们是有局限的复频域表示，并把它们看成双边变换的特例形式。

8.1 引 言(续)

- 数学上，变换基函数$\{e^{j\omega t}, \ \omega \in \mathbf{R}\}$和$\{e^{j\Omega n}, \ \Omega \in \mathbf{R}\}$分别是$\{e^{st}, \ s \in \mathbf{C}\}$和$\{z^n, \ z \in \mathbf{C}\}$的子集，因此，双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换可分别看作 CFT 和 DTFT 的扩展或一般化；反之，CFT 和 DTFT 也可分别看成双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换的特例形式。

说明和注意：鉴于上述事实和理由：

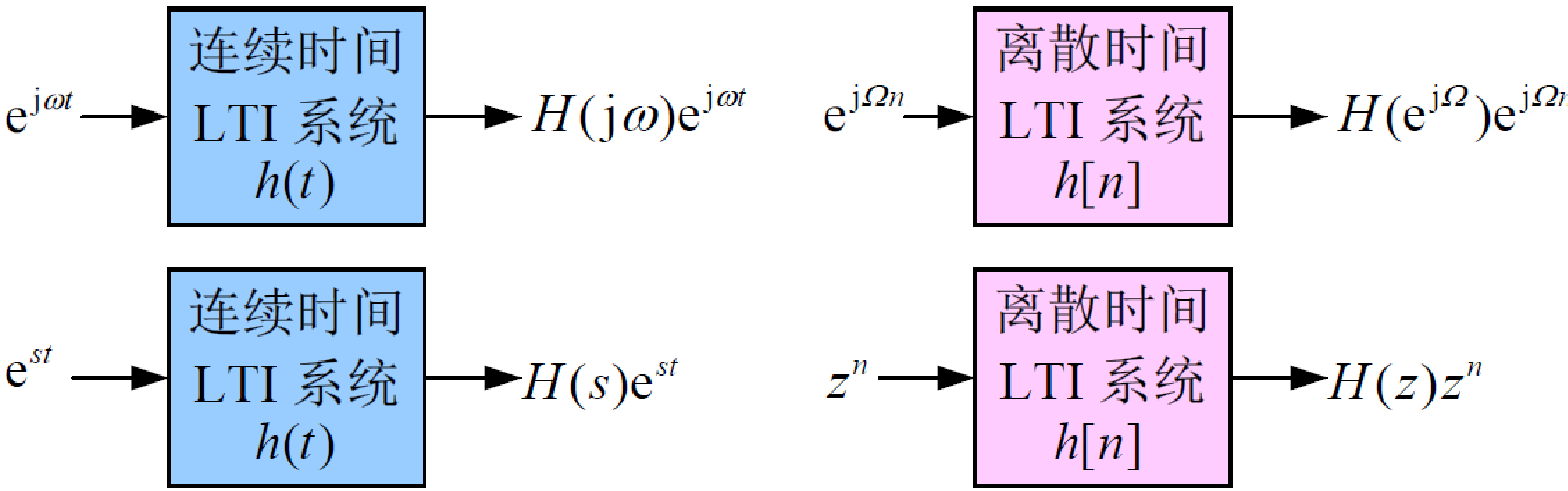
- 本章主要针对双边变换展开，最后以特例方式介绍单边变换，且把双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换分别正名为“拉普拉斯变换”和“Z 变换”，凡提到单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换都会冠以“单边”二字，以示区别；
- 充分利用 CFT 和 DTFT 的一般化的思想来讲述拉普拉斯变换和 Z 变换，并强调从频域扩展到复频域的角度来介绍和理解拉普拉斯变换和 Z 变换的各种性质。

本章将建立以拉普拉斯变换和 Z 变换为数学工具的信号和系统的复频域分析方法，并获得信号和系统特性的一些新认识。

8.2 从频域扩展到复频域

8.2.1 复指数输入和 LTI 系统的系统函数

对于 **LTI** 系统，在 **5.2** 节已经证明 (如下图所示)：



图中： $H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$ 和 $H(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\Omega n}$

分别是 $h(t)$ 和 $h[n]$ 的 **CFT** 和 **DTFT**，称为**LTI** 系统的频率响应。

而 $H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt$ 和 $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$

8.2.1 复指数输入和 LTI 系统的系统函数(续)

它们分别称为 $h(t)$ 和 $h[n]$ 的双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换，且叫做 LTI 系统的“系统函数”或“传递函数”。它们是 LTI 系统特性的复频域表征，在系统分析和系统综合中起着重要的作用，后面将会对它们做进一步的介绍和讨论。

LTI 系统对一般复指数输入 $\{e^{st},\ s\in\mathbf{C}\}$ 和 $\{z^n,\ \Omega\in\mathbf{C}\}$ 的响应仍分别是相同的复指数信号这一事实，使得分析 LTI 系统的基本信号可以从复正弦扩展到整个复指数信号集。

假设任意输入 $x(t)$ 和 $x[n]$ 可表示为如下线性组合：

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t},\quad s_k\in\mathbf{C}\quad 和\quad x[n]=\sum_k a_k z_k^n,\quad z_k\in\mathbf{C}$$

又因 $$e^{s_k t}\xrightarrow{h(t)}H(s_k)e^{s_k t}\quad 和\quad z_k^n\xrightarrow{h[n]}H(z_k)z_k^n$$

按照 LTI 系统的线性性质，则它们对 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的响应分别为

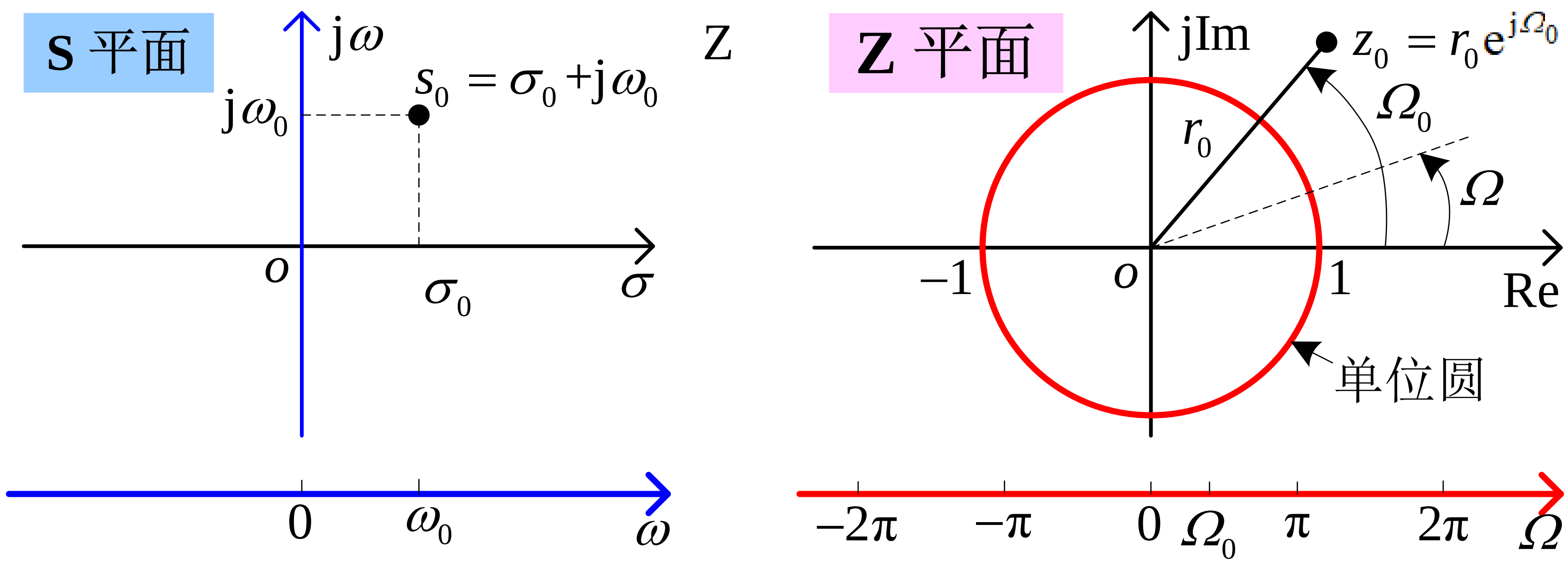
$$y(t)=\sum_k a_k H(s_k)e^{s_k t}\quad 和\quad y[n]=\sum_k a_k H(z_k)z_k^n$$

这就是产生双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换的应用背景和诱因。

8.2.2 连续时间和离散时间频域和复频域

线性函数变换的基函数从$\{e^{j\omega t},\ \omega\in\mathbf{R}\}$和$\{e^{j\Omega n},\ \Omega\in\mathbf{R}\}$分别扩展到$\{e^{st},\ s\in\mathbf{C}\}$和$\{z^{n},\ z\in\mathbf{C}\}$，CFT 和 DTFT 就分别扩展为双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换；LTI 系统的频域表征分别扩展到复频域 。

下图可以形象地说明连续时间频域 $\omega\in\mathbf{R}$ 与复频域 (S 平面) 以及离散时间频域 $\Omega\in\mathbf{R}$ 与复频域 (Z 平面) 之间的关系：



♣ 连续时间复频域是直角坐标表示的复平面，简称“ S 平面”，

8.2.2 连续时间和离散时间频域和复频域

S 平面上的每一点 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 都代表一个连续时间复指数信号 e^{st}，故 S 平面就代表整个复指数信号集 $\{\mathrm{e}^{st},\ s\in\mathbf{C}\}$，其虚轴 ($\mathbf{Re}\{s\}=0$) 上每一个点 $s=\mathrm{j}\omega$ 则代表一个复正弦信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，故连续时间频域就是 S 平面虚轴代表的实数域 $\omega\in\mathbf{R}$。

- 离散时间复频域是极坐标表示的复平面，简称 Z 平面，平面上的每一点 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$ 都代表一个离散时间复指数序列 z^n，故 Z 平面就代表整个复指数序列集 $\{z^n,\ z\in\mathbf{C}\}$。Z 平面的单位圆 ($|z|=1$) 上的每一点 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$ 则代表一个复正弦序列 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$，故离散时间频域就是 Z 平面之单位圆上幅角 $\Omega\in\mathbf{R}$ 所代表的实数域。换言之，以 Z 平面上 $z=1$ 的点为坐标原点，把单位圆拉直成的实数轴 Ω 即为离散时间频域 。

说明：离散时间频域 Ω 是 Z 平面上的单位圆，这可对在第 5 章呈现的、它与连续时间频域 ω 的不同特性作出形象的解释，在单位圆上旋转一周都是同一个点，当 Ω 每改变 2π 都是相同的频率，故离散时间频域特性都呈现 2π 的周期性。

8.3 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换

鉴于拉普拉斯变换和 Z 变换既可以用来表示信号，也可以表示系统特性，故也用一般函数 $f(t)$ 或序列 $f[n]$ 来引入它们。

■ 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换的定义

函数 $f(t)$ 和序列 $f[n]$ 的双边拉普拉斯变换和 Z 变换之定义和表示分别为

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,, \qquad s \in R_F$$

和

$$F(z) = \mathbf{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}\,, \qquad z \in R_F$$

说明：♣ $f(t)$ 和 $f[n]$ 分别称为变换的原函数和原序列，

♣ $F(s)$ 和 $F(z)$ 称为变换的像函数，R_F 是其收敛域 (**ROC**)，

♣ $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{Z}$ 分别代表拉普拉斯变换和 Z 变换的运算符号

♣ 双边 Z 变换其实是正负都无限的无限项幂级数

♣ $f(t)$ 和 $F(s)$、$f[n]$ 和 $F(z)$ 分别构成变换对，通常表示为

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \{F(s),\ R_F\} \quad 和 \quad f[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \{F(z),\ R_F\}$$

注意：像函数与其收敛域一起才是原函数的完整复频域表示。

♣ 与傅里叶变换一样，双边拉普拉斯变换和 Z 变换也都是具有唯一性的变换。

■ 与傅里叶变换的关系

● 一方面的关系

由于变换基函数 $\{e^{j\omega t}\}$ 和 $\{e^{j\Omega n}\}$ 分别是 $\{e^{st}\}$ 和 $\{z^n\}$ 在 $s=j\omega$ 和 $z=e^{j\Omega}$ 的子集，则分别有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\Big|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad 和 \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\Omega n}$$

表明：如果 $f(t)$ 或 $f[n]$ 既有 **CFT** 或 **DTFT**，又有双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换，则 **S 平面虚轴上的拉普拉斯变换就是其 CFT，Z 平面单位圆上的 Z 变换就是其 DTFT**。当然，这意味着 R_F 包含 S 平面的虚轴或 Z 平面的单位圆。

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

这一结论和说明可以用如下的数学形式来表述：

$$F(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = F(\mathrm{j}\omega) = \mathbf{F}\,\{f(t)\},\quad (s=\mathrm{j}\omega)\text{或}\ (\mathrm{Re}\{s\}=0)\in R_F$$

$$F(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}} = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \mathbf{F}\,\{f[n]\},\quad (z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\text{或}\ (|z|=1)\in R_F$$

说明：由于 $F(\mathrm{j}\omega)$ 是实变量 ω 的复值函数，故通常简化地用符号 $F(\omega)$ 来表示，而 $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 是实变量 Ω 的周期复值函数，本书中通常简化表示为 $\tilde{F}(\Omega)$。

请注意：

$$F(\omega)\big|_{\omega=s} \neq F(s) \quad \text{和} \quad \tilde{F}(\Omega)\big|_{\Omega=z} \neq F(z)$$

只有

$$F(\omega)\big|_{\mathrm{j}\omega=s} = F(s) \quad \text{和} \quad \tilde{F}(\Omega)\big|_{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}=z} = F(z)$$

- **另一方面的关系**

反过来，由于一般复数 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 和 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$，则双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换表达式可分别改写为

$$F(s) = F(\sigma+\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\ ,\quad (s=\sigma+\mathrm{j}\omega)\in R_F$$

和

$$F(z) = F(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{f[n]r^{-n}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}\ ,\quad (z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\in R_F$$

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

表明：$f(t)$ 或 $f[n]$ 的双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换是其实指数 ($e^{-\sigma t}$ 和 r^{-n}) 加权的 CFT 或 DTFT，当然，要使傅里叶变换收敛，R_F 必须分别包含 S 平面上的直线 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma$ 或 Z 平面上的圆周 $|z|=r$。因此，双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换与傅里叶变换之间另一个关系可分别表示为

$$\mathbf{L}\{f(t)\}=\mathbf{F}\left\{f(t)e^{-\sigma t}\right\}, \quad (\mathrm{Re}\{s\}=\sigma)\subset R_F$$

$$\mathbf{Z}\{f[n]\}=\mathbf{F}\left\{f[n]r^{-n}\right\}, \quad (|z|=r)\subset R_F$$

上述两方面的关系完整准确地展示 CFT 和 DTFT 分别与双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换之间特例与一般化 (扩展) 的关系。

讨论： ★ **信号的复频谱**

连续时间和离散时间信号 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换称为信号的“复频谱”。借用上面关系，可以对它作出解释：

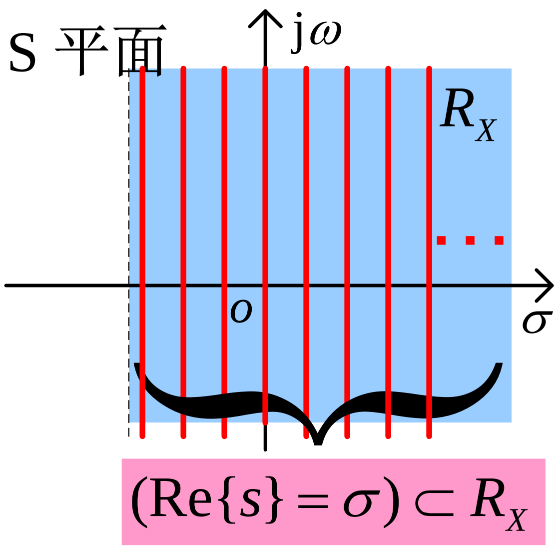
$$\mathbf{L}\{x(t)\}=\mathbf{F}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}, \quad (\mathrm{Re}\{s\}=\sigma)\subset R_X$$

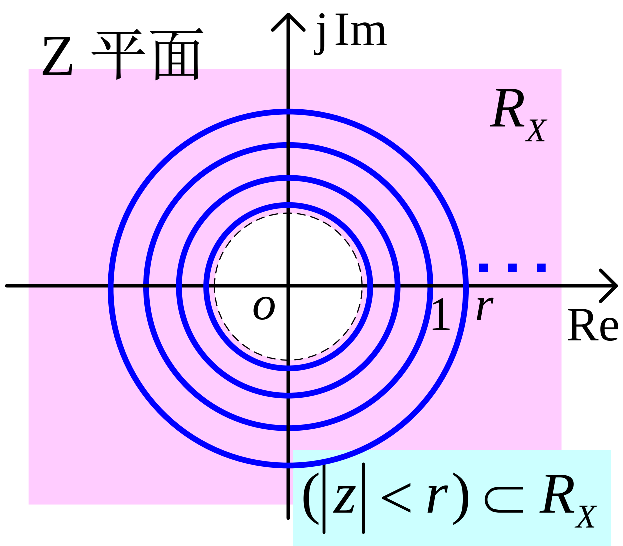
$$\mathbf{Z}\{x[n]\}=\mathbf{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}, \quad (|z|=r)\subset R_X$$

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

$x(t)$ 与 $x[n]$ 的复频谱就是它们一系列分别满足模可积与模可和的实指数加权变种 ($\{x(t)e^{-\sigma t}\}$) 与 ($\{x[n]r^{-n}\}$) 的傅里叶变换。

换言之，它们分别是 S 平面收敛域 R_X 内平行于虚轴的所有直线上的像函数和 Z 平面 R_X 内所有同心圆周上的像函数。如右图所示。





★ 由于从 CFT 和 DTFT 分别扩展到拉普拉斯变换和 Z 变换，一些因不满足模可积或模可和而不存在 CFT 或 DTFT 的时间函数或序列，例如，单位阶跃函数和序列、单边增长的指数函数和序列等，它们用衰减的实指数加权后就会满足模可积或模可和，即它们分别可以有拉普拉斯变换或 Z 变换表示。请看下面的例题。

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

【例 8.1】 单边指数函数和序列的拉普拉斯变换和 Z 变换

解： 一般的单边复指数函数 $f(t)$ 和序列 $f[n]$ 可分别表示为

$$f(t) = \mathrm{e}^{-at}u(t),\quad a \in \mathbf{C} \qquad \text{和} \qquad f[n] = a^n u[n],\quad a \in \mathbf{C}$$

它们的双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换分别为

$$F(s) = \mathbf{L}\left\{\mathrm{e}^{-at}u(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+s)t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{s+a}, \qquad R_F = (\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{-a\})$$

$$F(z) = \mathbf{Z}\left\{f[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad R_F = (|z| > |a|)$$

由此得到一对很有用的双边拉普拉斯变换对和双边 Z 变换对，即

$$\mathrm{e}^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{-a\}$$

和

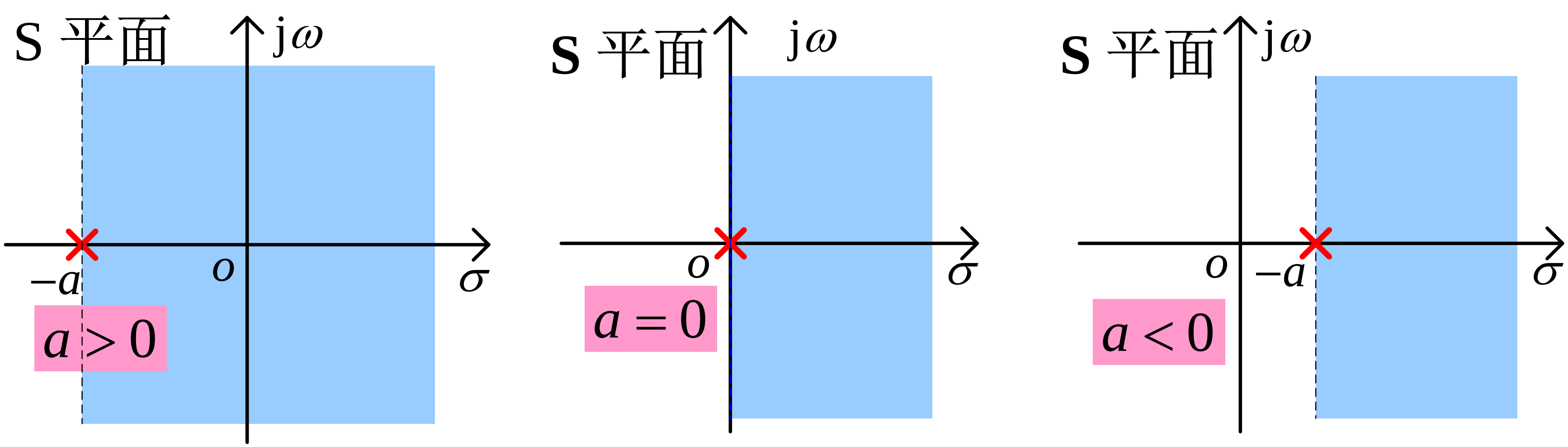
$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z| > |a|$$

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

对于连续时间复指数信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换：

- 当 $a>0$ 时，$f(t)$ 呈单边衰减，其 **CFT** 存在，收敛域 R_F 包含虚轴，故有 $F(\omega)=F(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\dfrac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$
- 当 $a=0$ 时，$f(t)=u(t)$，R_F 不包含虚轴，不存在严格意义的 **CFT**，$F(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$ 也不等于其扩展意义的 **CFT**。
- 当 $a<0$ 时，$f(t)$ 呈单边增长，收敛域 R_F 不包含虚轴，故不存在 **CFT**。

这三种情况下，它们的拉普拉斯变换图形如下图所示。

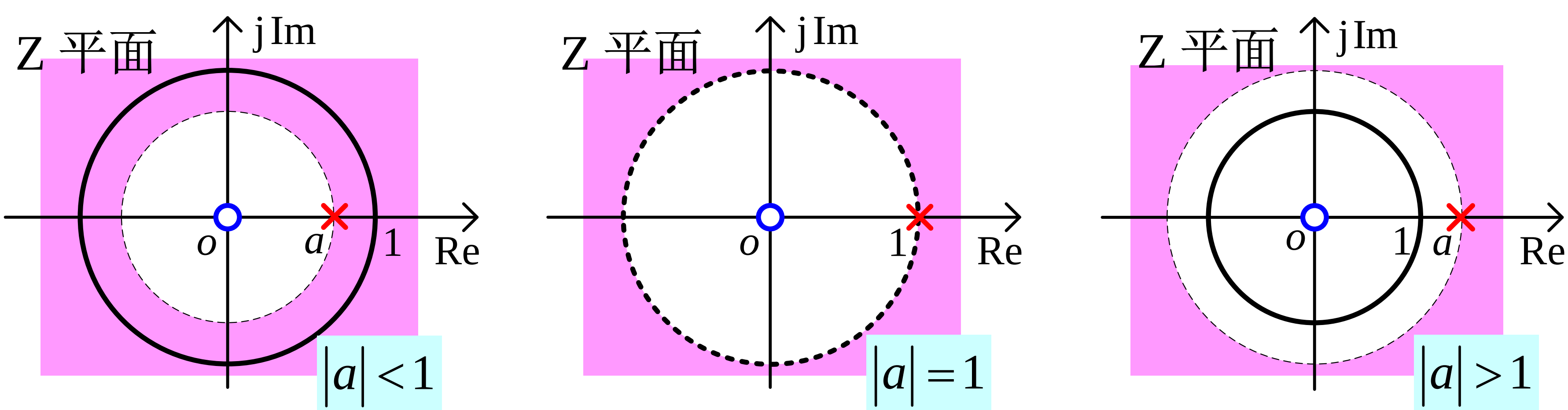


8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

对于离散时间复指数信号 $f[n]=a^n u[n]$ 的 **Z** 变换：

- 当$|a|<1$时，$f[n]$ 呈单边衰减或正负交替衰减，收敛域 R_F 包含单位圆，故有 **DTFT** 为 $\tilde{F}(\Omega)=F(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$；
- 当$|a|=1$时，$f[n]=u[n]$或$(-1)^n u[n]$，R_F 不包含单位圆，不存在严格意义的 **DTFT**，$F(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$也不等于其扩展意义的 **DTFT**。
- 当$|a|>1$时，$f[n]$ 呈单边增长或正负交替增长，收敛域 R_F 不包含单位圆，故不存在 **DTFT** 。

这三种情况下，它们的 **Z** 变换图形如下图所示。



8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

【例 8.2】 单位阶跃和单位冲激的拉普拉斯变换和 Z 变换

解： 单位阶跃函数 $u(t)$ 和序列 $u[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换可以从**例 8.1** 中直接得到，它们的变换对分别为

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \frac{1}{s},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0 \qquad 和 \qquad u[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1$$

$\delta(t)$ 和 $\delta[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换可用其筛分性质得到，

即 $$\mathbf{L}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}=1,\quad \text{ROC 为整个 S 平面}$$

和 $$\mathbf{Z}\{\delta[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=z^{-n}\Big|_{n=0}=1,\quad \text{ROC 为整个 Z 平面}$$

由此得到一对很有用的拉普拉斯变换对和 Z 变换对，即

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} 1 \qquad 和 \qquad \delta[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} 1$$

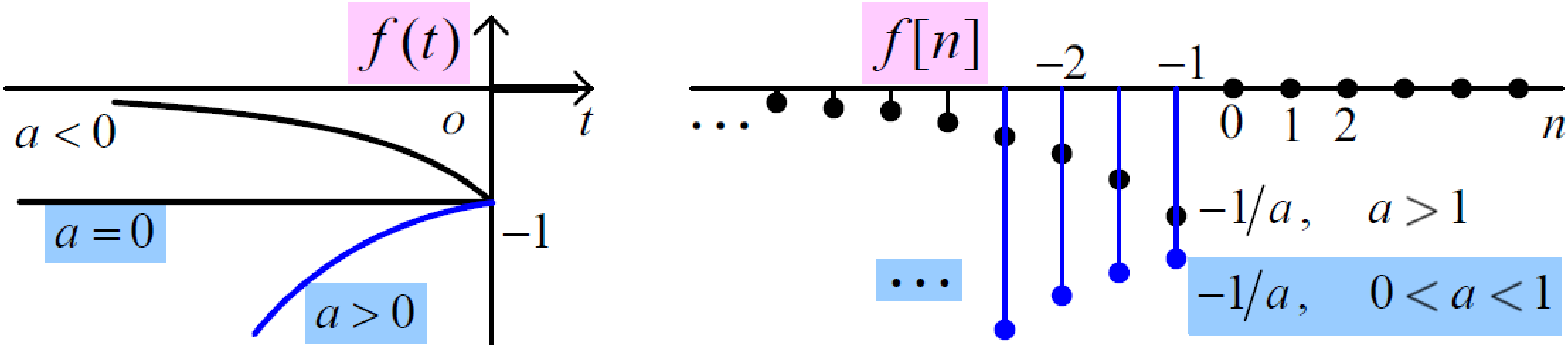
【例 8.3】 对于如下的反因果复指数函数和序列

$$f(t)=-\mathrm{e}^{-at}u(-t),\quad a\in\mathbf{C} \qquad 和 \qquad f[n]=-a^{n}u[-n-1],\quad a\in\mathbf{C}$$

试求它们的拉普拉斯变换和 Z 变换

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

解： 反因果实指数函数 $f(t)$ 和序列 $f[n]$ 的图例如下



它们的双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换分别为

$$F(s)=\mathbf{L}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}[-e^{-at}u(-t)]e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-(a+s)t}dt$$

$$=-\int_{0}^{\infty}e^{(a+s)\tau}d\tau=\frac{1}{s+a}\ ,\qquad R_F=(\mathrm{Re}\{s\}<\mathrm{Re}\{-a\})$$

$$F(z)=\mathbf{Z}\{f[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^n u[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(az^{-1})^n=-\sum_{m=1}^{\infty}(a^{-1}z)^m$$

$$=1-\sum_{m=0}^{\infty}(a^{-1}z)^m=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}\ ,\qquad R_F=(|z|<|a|)$$

故又得到一对很有用的双边拉普拉斯变换对和双边 Z 变换对，即

8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{-a\}$$

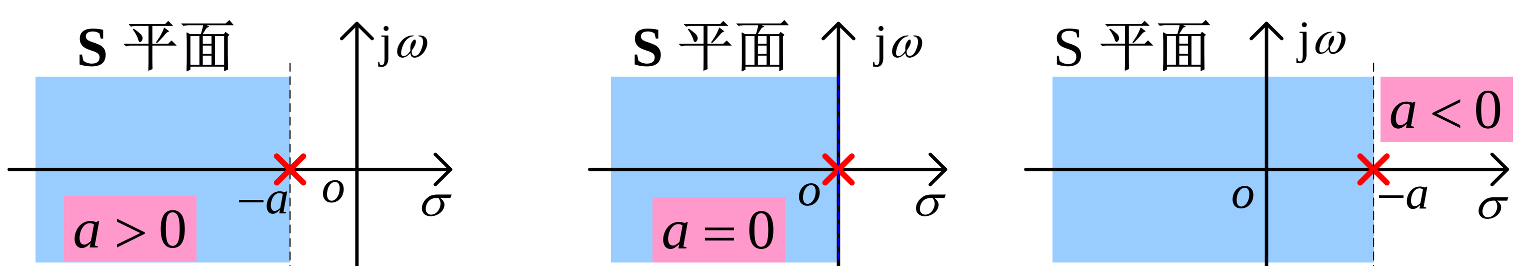
和

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

对于反因果复指数函数 $f(t) = -e^{-at}u(-t)$ 的拉普拉斯变换：

- 当 $a>0$ 时，$f(t)$ 呈反向增长，收敛域 R_F 不包含虚轴，故没有 **CFT**；
- 当 $a=0$ 时，$f(t) = -u(-t)$，R_F 不包含虚轴，不存在严格意义的 **CFT**, $F(s)|_{s=j\omega}$ 也不等于其扩展意义的 **CFT**；
- 当 $a<0$ 时，$f(t)$ 呈反向衰减，收敛域 R_F 包含虚轴，故它存在 **CFT**，且有 $F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega} = \dfrac{1}{a+j\omega}$

它们的拉普拉斯变换图形见右图。



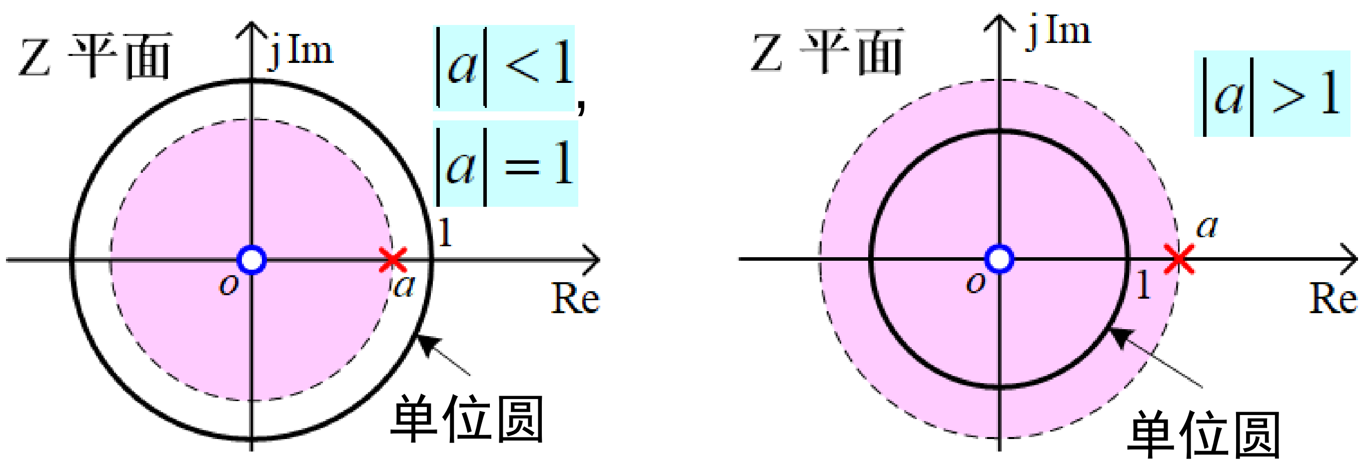
8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

对于反因果的复指数序列 $f[n]=-a^n u[-n-1]$ 的 Z 变换：

- 当 $|a|<1$ 时，$f[n]$ 呈反向增长或正负交替增长，以及当 $|a|=1$ 时，$f[n]=-(\pm 1)^n u[n]$，其 Z 变换收敛域 R_F 不包含单位圆，故它们没有（严格意义的）**DTFT**；
- 当 $|a|>1$ 时，$f[n]$ 呈反向衰减或正负交替衰减，其 Z 变换收敛域 R_F 包含单位圆，故它们严格意义的 **DTFT** 为

$$\tilde{F}(\Omega)=F(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

这两种情况下，它们的 Z 变换图形如下图所示。



8.3.1 双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换(续)

讨论： ♣ **像函数和收敛域**

对照上面例 8.1 和例 8.3 的结果可以看出：尽管 $\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 与 $-\mathrm{e}^{-at}u(-t)$ 或 $a^n u[n]$ 与 $-a^n u[-n-1]$ 分别是不同的函数或序列， 但它们的双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换像函数完全相同，只是收敛域不同，一个是 S 平面上某条平行于虚轴之直线的右侧，另一个是其左侧，或一个是 Z 平面上某个圆周的外部，另一个是其内部。后面还有例子表明：多个各不相同的时间函数或序列却有完全相同的双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换像函数，区别也在于各有不同的收敛域。这些都充分说明：光靠像函数并不能代表时间函数或序列的复频域表示，只有像函数和收敛域一起才是其完整的复频域表示。

♣ 傅里叶变换是实变量 ω 或 Ω 的复值函数，拉普拉斯变换和 Z 变换像函数是复变量 s 或 z 的复变函数 (及其收敛域)。它们不仅有不同的数学性质 (接着的两小节讨论)，后面几章还将看到，它们的应用也各有所侧重。