中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十五周

拉普拉斯变换和 Z 变换（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/6/1

8.5 拉普拉斯变换和 Z 变换的类比关系

鉴于： $f(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \{F(s),\ R_F\}$ 或 $f[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \{F(z),\ R_F\}$

拉普拉斯变换或 Z 变换各自的两方：时域是实变量 t 的连续函数或整变量 n 的序列，复频域是复变量 s 或 z 的复变函数及其收敛域。因此，它们本身和相互之间没有像傅里叶变换和级数中那样的对偶性。

然而，从前面拉普拉斯变换和 Z 变换的许多实例和变换性质中，可看到拉普拉斯变换与 Z 变换之间有相当程度的类比关系。这种可类比性主要体现在两个方面：

- ♣ 拉普拉斯变换对与 Z 变换对之间的类比关系
- ♣ 拉普拉斯变换性质与 Z 变换性质之间的类比关系

归纳和思考这两方面的类比关系 (见表6.11和表6.12)，会有助于加深理解、掌握和运用它们。当然，类比时也要注意两者还有较大不同，其不同都源自于如下两个差别：

- ★ 时域实变量 t 与整变量 n 之间的差别。
- ★ s 域是直角坐标复平面，而 z 域是极坐标表示的复平面。

8.6 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换

本节将以拉普拉斯变换和 Z 变换的特例角度，介绍和讨论单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换，主要讲述：

- ♣ 介绍和阐明单边拉普拉斯变换和 Z 变换的定义，着重讨论它们与双边变换及傅里叶变换之间的关系；
- ♣ 介绍和讨论单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换不同于双边变换的性质。

由此弄清单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换在信号与系统方法中的地位和作用。

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换

■ 定义

对于任意时间函数 $f(t)$ 和序列 $f[n]$，它们的单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换可以表示为

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L_u}} \{F_{\mathrm{u}}(s),\ R_{\mathrm{X}}\} \quad 和 \quad f[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z_u}} \{F_{\mathrm{u}}(z),\ R_{\mathrm{X}}\}$$

或

$$\mathbf{L}_{\mathrm{u}}\{f(t)\} = F_{\mathrm{u}}(s) \quad 和 \quad \mathbf{Z}_{\mathrm{u}}\{f[n]\} = F_{\mathrm{u}}(z)$$

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)

其中，下标 “u” 表示“单边” 之意，以便区分于双边变换。它们的正变换及反变换分别定义为：

$$F_u(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt,\quad s\in R_X$$ 及 $$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_u(s)e^{st}ds,\quad t\geq 0_-$$

和 $$F_u(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n},\quad z\in R_X$$ 及 $$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F_u(z)z^{n-1}dz,\quad n\geq 0$$

其中，反变换公式中的积分路径与双边反变换公式中完全相同。

说明：上述单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换定义有三点说明：

(1) 单边拉普拉斯正变换的积分下限是 “0_-”，而不是以往许多教材中常用的 “0” 或 “0^+”。其理由如下：

- 唯有积分下限为 “0_-” 时，包括在 $t=0$ 处有冲激函数或其导数的任意 $f(t)$ 才会有其一一对应的单边拉普拉斯变换像函数，而 “0” 或 “0^+” 的下限却排除了 $\delta(t)$ 或其导数。鉴于 $\delta(t)$ 及其导数在信号与系统分析中的重要性，以 “0_-” 作为积分下限既正当又合理；

8.6.1　单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)

♣ 在用于微分方程和非零起始条件表示的因果系统的 s 域分析时，积分下限为 “0_-” 的单边拉普拉斯变换才能把非零起始条件 $y^{(k)}(0_-)$ 直接融入系统的零输入响应 (见 9.3 节)。

(2) 由于正变换定义的积分和求和下限分别为 $t=0_-$ 和 $n=0$，故冠以 “单边” 的称谓。这意味着：

♣ 单边变换的像函数及其收敛域分别只代表 $f(t),\quad t\geq 0_-$ 和 $f[n],\quad n\geq 0$ 的信息；

♣ 由单边变换像函数及其收敛域通过反变换分别求得的时间函数和序列，也仅分别在 $t\geq 0_-$ 和 $n\geq 0$ 上等于原函数和原序列，这是单边变换与双边变换最大的区别。

(3) 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换像函数收敛域相对单纯，通常只有两种可能：

★ ROC 至少分别是有限 S 平面和除原点外的有限 Z 平面，这分别代表有限时宽及左边无限的时间函数和序列；

★ ROC 至少分别是最右边极点右侧半个 S 平面和最外面极点的圆周之外部，这代表右边无限和两边无限的 $f(t)$ 和 $f[n]$。

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)

弄清了单边变换像函数收敛域的特殊性，即使不标注像函数的收敛域，也不会产生混倄。

■ 单边与双边拉普拉斯变换及 Z 变换之间的关系

对照单边与双边拉普拉斯变换及 Z 变换的定义式，不难看出单边与双边变换有如下两方面的关系：

♣ $\mathbf{L}_{u}\{f(t)\}=\mathbf{L}\{f(t)u_{-}(t)\}$ 和 $\mathbf{Z}_{u}\{f[n]\}=\mathbf{Z}\{f[n]u[n]\}$

其中，$u_{-}(t)$ 是 t 时刻的单位阶跃，即 $u_{-}(t)=\begin{cases}1 & t>0_{-}\\ 0, & t<0_{-}\end{cases}$。

表明：任何 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换就是 $f(t)u_{-}(t)$ 的双边拉普拉斯变换；任何 $f[n]$ 单边 Z 变换就是 $f[n]u[n]$ 的双边 Z 变换。

♣ 因果时间函数或序列，即 $f(t)=0,\ \ t<0$ 或 $f[n]=0,\ \ n<0$，其单边与双边拉普拉斯变换或单边与双边 Z 变换完全相同。

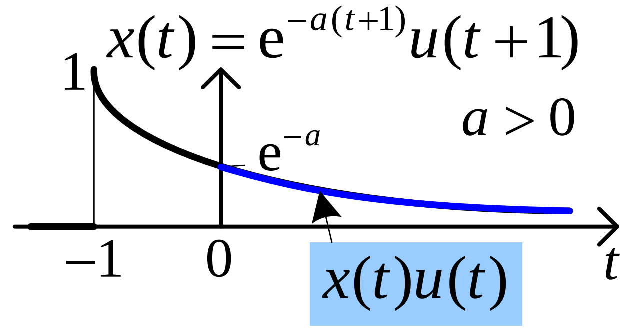
即 $\mathbf{L}_{u}\{f(t)=0,\ \ t<0\}=\mathbf{L}\{f(t)=0,\ \ t<0\}$

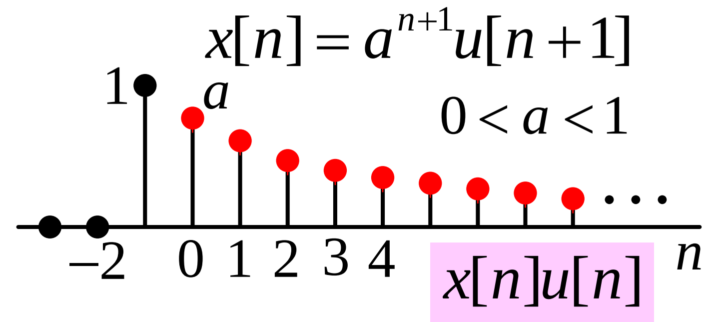
和 $\mathbf{Z}_{u}\{f[n]=0,\ \ n<0\}=\mathbf{Z}\{f[n]=0,\ \ n<0\}$

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续) $f(t)u_{\_}(t)$

【例 8.20】 试求 $x(t)=\mathrm{e}^{-a(t+1)}u(t+1)$ 和序列 $x[n]=a^{n+1}u[n+1]$ 的双边与单边拉普拉斯变换和 Z 变换

解： 右图是 $x(t)$ 和 $x[n]$ 及 $x(t)u(t)$ 和 $x[n]u[n]$ 的示意图。





根据双边变换的时移性质，可求得 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的双边变换为

$$X(s)=\frac{\mathrm{e}^{s}}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a \qquad \text{和} \qquad X(z)=\frac{z}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$$

而 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换分别为

$$X_{\mathrm{u}}(s)=\int_{0_-}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-a}\int_{0_-}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

和
$$X_{\mathrm{u}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}u[n+1]z^{-n}=a\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}=\frac{a}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$$

显然，$x(t)$ 和 $x[n]$ 之双边与单边变换的像函数不同。但由上图

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)

看出，$x(t)u(t)$ 和 $x[n]u[n]$ 的双边变换的像函数及其收敛域就分别与单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换完全相同。

结论：从上面的论述和例子不难得出结论：任何在 $t \geq 0_{-}$ 和 $n \geq 0$ 上完全一样，而负时域有异的所有不同时间函数或序列，它们的单边拉普拉斯变换或单边 Z变换完全相同；但它们却有各自不同的双边拉普拉斯变换或双边 Z变换。

■ 单边变换与傅里叶变换之间的关系

♣ 由于单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换的像函数及其收敛域只代表正时域上的时间函数和序列，它们没有双边变换与傅里叶变换之间那样的关系。即对一般的 (特别是非因果的) $f(t)$ 和 $f[n]$，即使它们的单边变换像函数的收敛域分别包含 **S** 平面虚轴和 **Z** 平面单位圆，也不能用 $s = \mathrm{j}\omega$ 和 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$ 分别代入像函数 $F_{\mathrm{u}}(s)$ 和 $F_{\mathrm{u}}(z)$，来得到它们的 **CFT** 和 **DTFT** 。

♣ 鉴于因果时间函数和序列的单边变换完全等同其双边变换，当然就继承了双边变换与傅里叶变换之间的全部关系。换言

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)

之，如果 $f(t)=0,\ \ t<0$ 和 $f[n]=f[n]u[n]$，它们的单边变换像函数分别为 $F_{\mathrm{u}}(s)$ 和 $F_{\mathrm{u}}(z)$，且其收敛域分别包含 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆，则有

$$\mathbf{F}\{f(t),\ \ t>0\}=F_{\mathrm{u}}(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} \quad 和 \quad \mathbf{F}\{f[n],\ \ n\geq 0\}=F_{\mathrm{u}}(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}$$

■ 周期函数和序列的单边变换

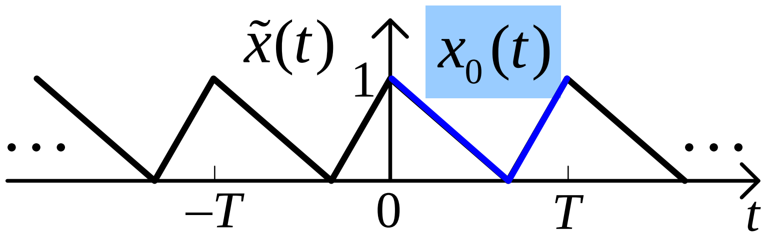
一些时间函数和序列没有双边变换，如周期函数和序列、常数函数和序列、e^{at}，$-\infty<t<\infty$ 和 a^n，$-\infty<n<\infty$ 等，但它们分别有单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换，其原因是单边变换只取它们的正时域部分。换言之，它们的单边变换乃是其正时域部分的双边变换。这里以周期函数和序列为例加以说明。

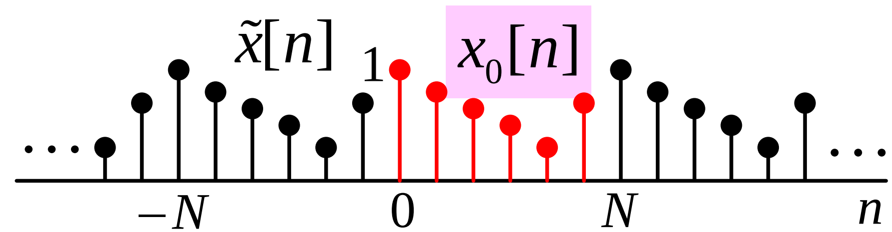
任意周期分别为 T 和 N 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 和序列 $\tilde{x}[n]$ 可写成

$$\tilde{x}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_0(t-mT) \qquad 和 \qquad \tilde{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_0[n-mN]$$

其中，$x_0(t)$ 和 $x_0[n]$ 分别是它们在周期区间 $[0_-,\ \ T_-)$ 和 $[0,\ \ N-1]$ 上截取的有限持续期信号和序列，如下图所示：

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)





$\tilde{x}(t)$的单边拉普拉斯变换为

$$\mathbf{L}_{\mathrm{u}}\{\tilde{x}(t)\}=\mathbf{L}\{\tilde{x}(t)u\_(t)\}=\mathbf{L}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}x_0(t-mT)\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}X_0(s)\mathrm{e}^{-mTs}=X_0(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}, \qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

其中，$X_0(s)=\mathbf{L}\{x_0(t)\}$。

同理，$\tilde{x}[n]$的单边 Z 变换为

和 $$\mathbf{Z}_{\mathrm{u}}\{\tilde{x}[n]\}=\mathbf{Z}\{f[n]u[n]\}=\mathbf{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}x_0[n-mN]\right\}$$

$$=X_0(z)\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}=X_0(z)\frac{1}{1-z^{-N}}, \qquad |z|>1$$

其中，$X_0(z)=\mathbf{Z}\{x_0[n]\}$。

讨论：请同学**熟悉**上述结果中的**像函数因子** $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$ 和 $\dfrac{1}{1-z^{-N}}$，

8.6.1 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换(续)

它们分别是周期冲激串 $\tilde{\delta}_T(t)$ 和 $\tilde{\delta}_N[n]$ 的单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换的像函数，即如下的双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(t-mT) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}} \quad \text{和} \quad \sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-mN] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \frac{1}{1-z^{-N}}$$

根据时域卷积性质，如果某个拉普拉斯变换或 Z 变换像函数中有这样的因子，其反变换则是 $\sum_{m=0}^{\infty}\delta(t-mT)$ 或 $\sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-mN]$ 与像函数其余部分的反变换在时域上卷积的结果。

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换的性质

对比单边与双边正、反变换公式似乎差别不大，并认为两者有差不多相同的性质。其实不然，即使只针对因果时间函数和序列，也不能把所有双边变换性质原封不动地搬到单边变换。正是单边变换只涉及时间函数和序列的正时域部分这个根本区别，导

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

致单边与双边变换的性质有较大的不同：

♣ 单边与双边变换相同的性质

只有不牵涉正、负时域变动的性质，单、双边变换才相同。

例如：线性性质　　复频域卷积性质　　复指数加权性质

复频域微分性质　　时域共轭对称性质等

♣ 只限于因果时间函数和序列，或附加其他限制，单、双边变换才相同的性质。

例如：　时域卷积性质　　初值定理和终值定理

连续时间时移性质　　尺度变换性质　　等

♣ 单边变换根本不成立的性质，例如时域奇、偶对称性质等。

♣ 单边变换特有的性质，正是它们带来单边变换的特殊应用。

例如：时域微分和差分性质　　时域积分和累加性质

离散时间时移性质　　等

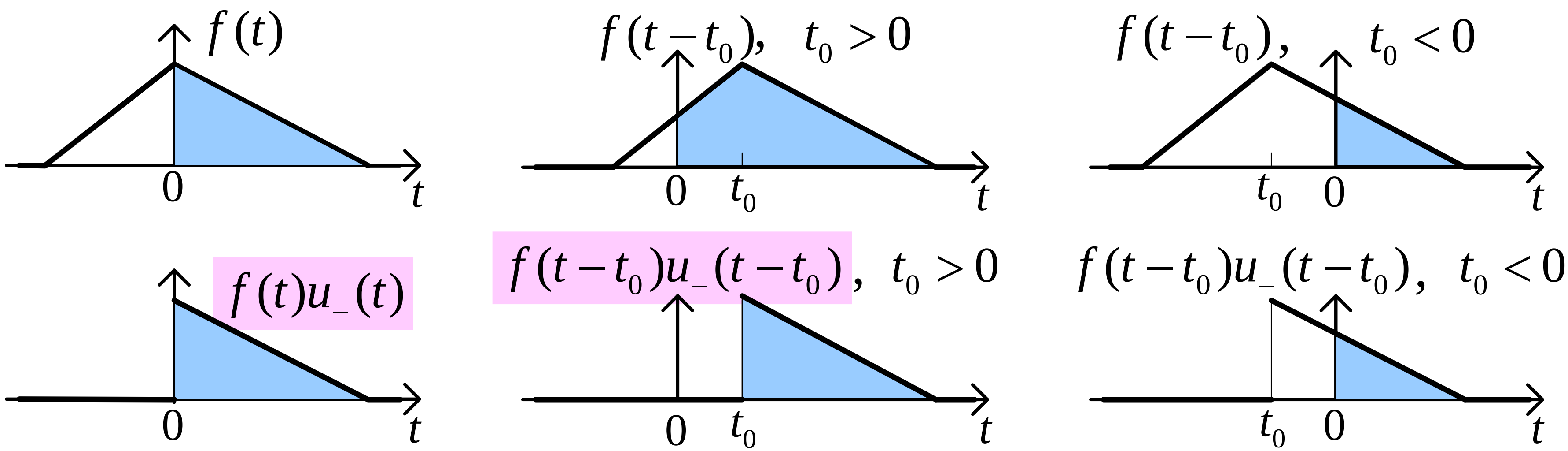
下面着重介绍和讨论单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换特有的性质，提及并简要说明有限制和要修改的性质，那些与双边变换完全相同的性质不再说明。

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

■ 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换的时移性质

● 单边拉普拉斯变换的时移性质

$f(t)$ 及其时移变种在取单边拉普拉斯变换时的情况见下图，显然，双边拉普拉斯变换时移性质对单边拉普拉斯变换不适用。



只有 $f(t)u\_(t)$ 延时 (右移) 才能运用双边拉普拉斯变换时移性质，即　假设　$\mathbf{L}_{\mathrm{u}}\{f(t)\}=F_{\mathrm{u}}(s)$，则仅有

$$f(t-t_0)u\_(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathrm{L_u}} \mathrm{e}^{-st_0}F_{\mathrm{u}}(s), \qquad t_0\ge 0$$

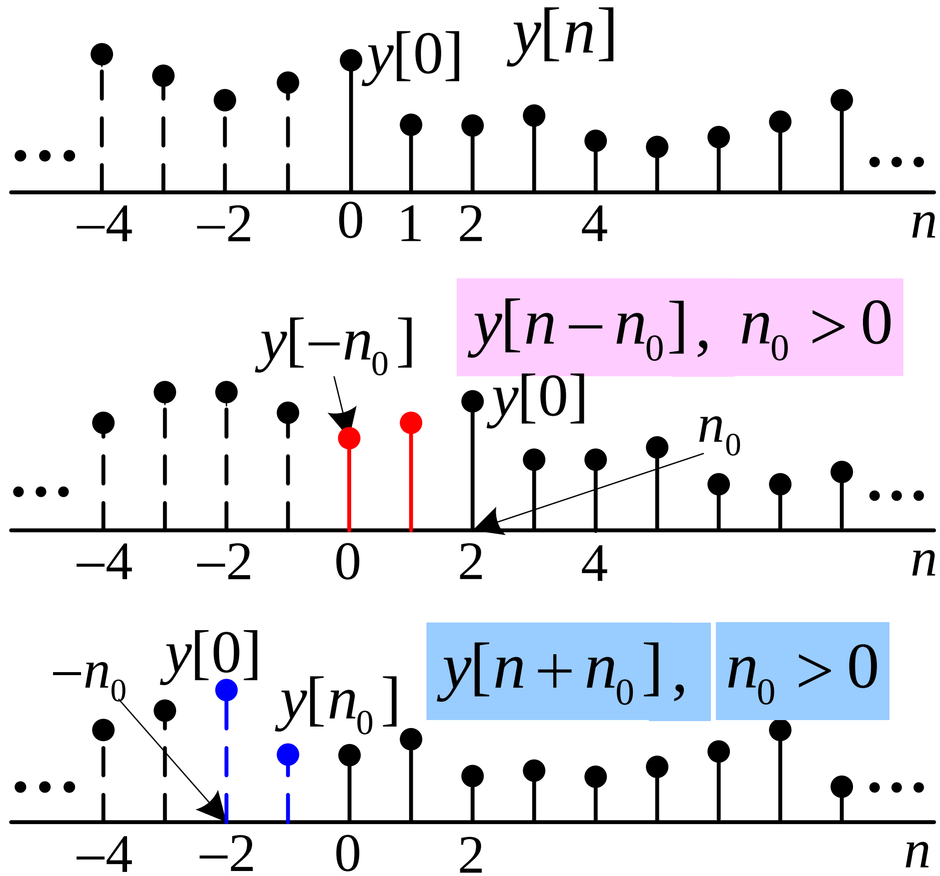
或者说，只有因果时间函数的延时 (右移) 性质才成立。

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

- **单边 Z 变换的时移性质**

离散时间序列的时移也存在移进和移出正时域的情况，故单边 Z 变换也不能照搬双边 Z 变换的时移性质。

单边 Z 变换的时移性质可以描述为：



假设 $\mathbf{Z}_{\mathrm{u}}\{y[n]\}=Y_{\mathrm{u}}(z)$，$y[n]$ 的右移 (延时) 和左移 (超前) 性质也不一样，分别表示为

$$y[n-n_0] \xleftrightarrow{Z_{\mathrm{u}}} Y_{\mathrm{u}}(z)z^{-n_0}+\sum_{k=1}^{n_0} y[-k]z^{-(n_0-k)}, \quad n_0\ge 1$$

和

$$y[n+n_0] \xleftrightarrow{Z_{\mathrm{u}}} Y_{\mathrm{u}}(z)z^{n_0}-\sum_{k=0}^{n_0-1} y[k]z^{(n_0-k)}, \quad n_0\ge 1$$

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

单边 Z 变换的右移性质证明如下：

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{u}}\{y[n-n_0]\}=\sum_{n=0}^{\infty}y[n-n_0]z^{-n}=z^{-n_0}\sum_{n=0}^{\infty}y[n-n_0]z^{-(n-n_0)}$$

$$\stackrel{k=n-n_0}{=}z^{-n_0}\sum_{k=-n_0}^{\infty}y[k]z^{-k}=z^{-n_0}\left[\sum_{k=-n_0}^{-1}y[k]z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}y[k]z^{-k}\right]$$

$$=Y_{\mathrm{u}}(z)z^{-n_0}+\sum_{k=1}^{n_0}y[-k]z^{-(n_0-k)},\qquad n_0\geq 1$$

左移性质可以同理地证明。

说明：上图表明，$y[n-n_0]$ 的单边 Z 变换包含两部分：$Y_{\mathrm{u}}(z)z^{-n_0}$ 是 $y[n-n_0]u[n-n_0]$ 的 Z 变换，另一部分正是右移进正时域的 n_0 点序列的单边 Z 变换。左移性质也可做同样解释。

讨论：♣ 对于因果序列 $x[n]=x[n]u[n]$，单边 Z 变换也只有右移性质与双边 Z 变换相同，左移性质仍与上面一样。

♣ 下面 9.3 节将看到，正是因为这个时移性质，单边 Z 变换才能用于以差分方程和非零起始条件描述的因果系统的 z 域分

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

析，并把非零起始条件直接融入系统零输入响应的单边 Z 变换。那时，如下几个时移性质的实例将会经常用到：

$$\mathcal{Z}_u\{y[n-1]\}=Y_u(z)z^{-1}+y[-1]$$

$$\mathcal{Z}_u\{y[n-2]\}=Y_u(z)z^{-2}+y[-1]z^{-1}+y[-2]$$

$$\mathcal{Z}_u\{y[n-3]\}=Y_u(z)z^{-3}+y[-1]z^{-2}+y[-2]z^{-1}+y[-3]$$

■ 单边变换的时域微分和差分性质

● 单边拉普拉斯变换的时域微分性质

假设 $\mathcal{L}_u\{y(t)\}=Y_u(s)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}y(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}_u}s^kY_u(s)-\sum_{m=0}^{k-1}s^{k-1-m}y^{(m)}(0_-)$$

例如：

$$\mathcal{L}_u\{y'(t)\}=sY_u(s)-y(0_-)$$

$$\mathcal{L}_u\{y''(t)\}=s^2Y_u(s)-y(0_-)s-y'(0_-)$$

$$\mathcal{L}_u\{y'''(t)\}=s^3Y_u(s)-y(0_-)s^2-y'(0_-)s-y''(0_-)$$

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

单边拉普拉斯变换的一阶微分性质证明如下：

$$\mathbf{L}_{\mathrm{u}}\{y'(t)\}=\int_{0_-}^{\infty}y'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=y(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}-\int_{0_-}^{\infty}y(t)(\mathrm{e}^{-st})'\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{t\to\infty}y(t)\mathrm{e}^{-st}-y(0_-)+s\int_{0_-}^{\infty}y(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=sY_{\mathrm{u}}(s)-y(0_-)$$

其中，运用了部分积分法，以及单边拉普拉斯正变换收敛必须的 $\lim_{t\to\infty}y(t)\mathrm{e}^{-st}=0$ 之条件。

重复此过程可归纳出 $y^{(k)}(t)$ 的单边拉普拉斯变换之微分性质。

讨论：♣ 对于因果时间函数 $x(t)=0,\ \ t<0$ ，单边拉普拉斯变换的时域微分性质才与双边变换相同，即

$$x^{(k)}(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{u}}}s^kX_{\mathrm{u}}(s)\,,\qquad x(t)=0,\ \ t<0$$

♣ 下面 9.3 节将看到，正是因为这个微分性质，单边拉普拉斯变换才能用于以微分方程和非零起始条件表示的因果系统的 s 域分析，并把非零起始条件直接融入系统零输入响应的单边拉普拉斯变换。

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

- **单边 Z 变换的时域差分性质**

单边 Z 变换的时域差分性质直接由其右移性质得到，例如：

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{u}}\{\Delta x[n]=x[n]-x[n-1]\}=(1-z^{-1})X_{\mathrm{u}}(z)-x[-1]$$

$$\mathbf{Z}_{u}\{\Delta^{2}x[n]\}=(1-z^{-1})^{2}X_{\mathrm{u}}(z)-(1-z^{-1})x[-1]-(x[-1]-x[-2])$$

■ 单边变换的时域积分和累加性质

- **单边拉普拉斯变换的时域积分性质**

假设 $\mathbf{L}_{\mathrm{u}}\{x(t)\}=X_{\mathrm{u}}(s)$，则有

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathrm{L_u}} \frac{X_{\mathrm{u}}(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0_-}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- **单边 Z 变换的时域累加性质**

假设 $\mathbf{Z}_{\mathrm{u}}\{x[n]\}=X_{\mathrm{u}}(z)$，则有

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \xleftrightarrow{\mathrm{Z_u}} \frac{1}{1-z^{-1}}\left[X_{\mathrm{u}}(z)+\sum_{k=-\infty}^{-1}x[k]\right]$$

若 $x(t)$ 和 $x(t)$ 是因果函数和序列，上述两式右边就没有第 2 项，这两个性质就与双边变换相同。

8.6.2 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换性质(续)

■ 与双边变换不同的其他性质

基于单边变换的定义，即使是因果时间函数和序列的单边变换，所有涉及时域反转的双边变换性质都不成立，例如：

- **单边变换的对称性质**

单边变换中只有共轭对称性质成立，即

$$\mathbf{L}_{\mathrm{u}}\left\{f^{*}(t)\right\}=\left\{F_{\mathrm{u}}^{*}(s^{*}),\ \ R_{F}\right\} \quad \text{和} \quad \mathbf{Z}_{u}\left\{f^{*}[n]\right\}=\left\{F_{\mathrm{u}}^{*}(z^{*}),\ \ R_{F}\right\}$$

却没有时域反转性质和时域共轭反转性质。

- **单边拉普拉斯变换的尺度变换性质**需修改为

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{u}}} \frac{1}{a}F_{\mathrm{u}}\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{实数} \ \ a>0$$

- **单边 Z 变换的内插零和抽取的复频域特性**需分别修改为

$$x_{(M)}[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}_{\mathrm{u}}} \left\{X_{\mathrm{u}}(z^{M}),\ \ |z|>r^{1/M}\right\}, \quad \text{整数} \ \ M>0$$

和 $$x[Mn] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}_{\mathrm{u}}} \left\{\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X_{\mathrm{u}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/M}z^{1/M}\right),\ \ |z|>r^{M}\right\}, \quad \text{整数} \ M>0$$

8.7 单边变换的地位和作用

基于前两节的介绍和讨论，可对单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换在信号与系统理论和方法中目前的地位和作用做如下结论：

- ♣ 单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换都非“一一对应”的数学变换，故作为信号和系统的复频域表征存在着根本的缺陷。
- ♣ 单边拉普拉斯变换在连续时间信号与系统理论和方法发展过程中所起的作用，以及单边 Z 变换在离散时间信号与系统中的作用，除了个别应用 (见下一点) 外，双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换几乎都可以替代。
- ♣ 只有在微分方程和差分方程及非零起始条件表示的一类因果系统的复频域分析 (见下一章 9.3 节) 中，单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换才有不可替代的地位和作用。

因此，无论从数学角度，还是就变换在信号与系统理论和方法中的作用而言，唯有双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换才适合作为一般信号和系统的复频域表征，并作为信号与系统复频域方法的主要数学工具。

作业

- 8.1 1)中的c)， 2)中的b) d) （注：只用拉普拉斯和Z变换方法）

  2)中d)提示：书上141页: 若$x[n]=z^n$, 则$y[n]=H(z)z^n$