



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十四周

拉普拉斯变换和 Z 变换 (续)

赵 峰, 电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/5/23

8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

解: $f(t)$ 和 $f[n]$ 的可分别改写成

$$f(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \quad \text{和} \quad f[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1]$$

由**例 8.1** 和**例 8.3**，可得 4 个单边函数和序列的像函数与收敛域

$$\mathbf{L} \left\{ e^{-at}u(t) \right\} = \left\{ \frac{1}{s+a}, R_1 = (\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{-a\}) \right\}$$

及
$$\mathbf{L} \left\{ e^{at}u(-t) \right\} = \left\{ \frac{-1}{s-a}, R_2 = (\operatorname{Re}\{s\} < \operatorname{Re}\{a\}) \right\}$$

和
$$\mathbf{Z} \left\{ a^n u[n] \right\} = \left\{ \frac{1}{1-az^{-1}}, R_1 = (|z| > |a|) \right\}$$

及
$$\mathbf{Z} \left\{ a^{-n} u[-n-1] \right\} = \left\{ \frac{-1}{1-a^{-1}z^{-1}}, R_2 = (|z| < |a|^{-1}) \right\}$$

如果 $f(t)$ 和 $f[n]$ 分别是双边非衰减的指数函数和序列，即分别当 $\operatorname{Re}\{a\} \leq 0$ ， $\operatorname{Re}\{a\} \leq \operatorname{Re}\{-a\}$ 和当 $|a| \geq 1$ ， $|a| > |a|^{-1}$ 时，它们各自的两个收敛域都没有交集，即 $R_1 \cap R_2 = \phi$ ，故 $f(t)$ 和 $f[n]$ 分别没有双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换；只有分别当 $\operatorname{Re}\{a\} > 0$

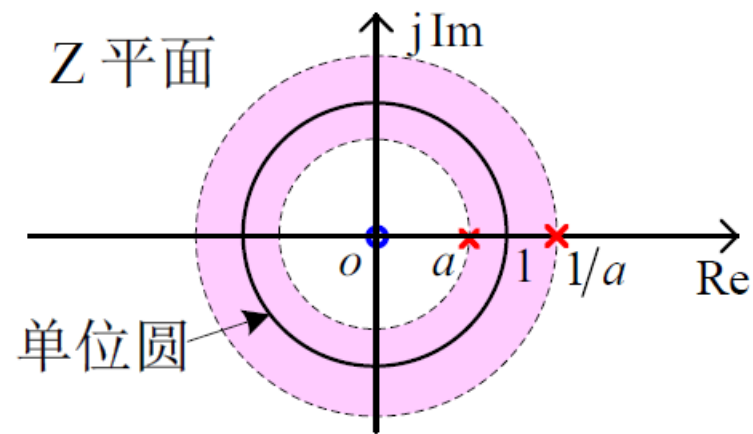
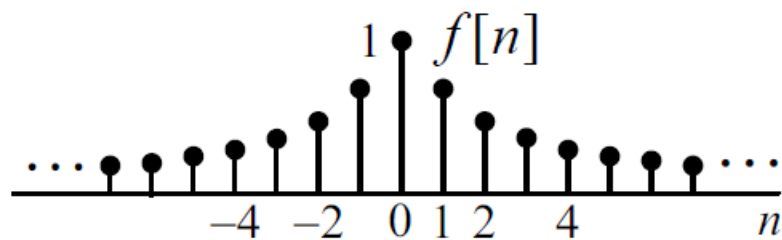
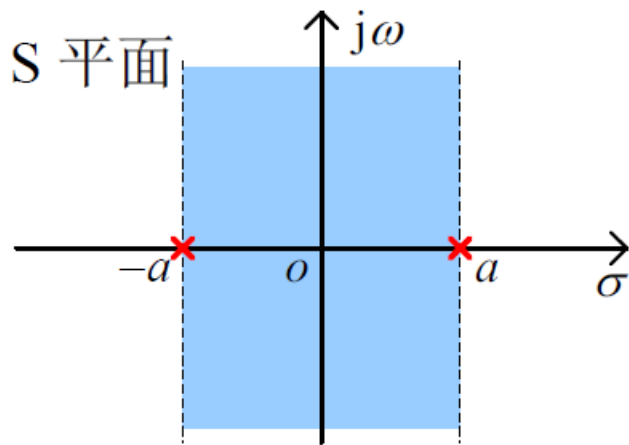
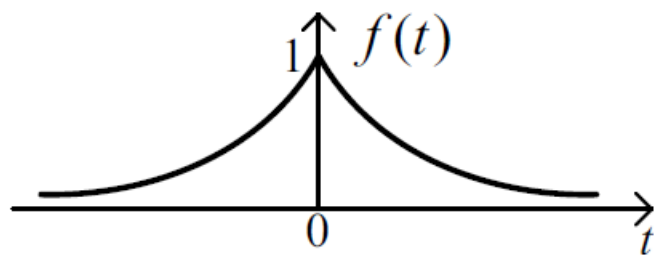
8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

和 $|a| < 1$ 时, 如下图所示那样, $f(t)$ 或 $f[n]$ 是双边衰减的指数函数或序列, 它们才有双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换, 且分别为

$$F(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}\{-a\} < \operatorname{Re}\{s\} < \operatorname{Re}\{a\}$$

和 $F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} = \frac{[(a^2-1)/a]z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-a^{-1}z^{-1})}, \quad |a| < |z| < |a|^{-1}$

它们的零、极点和收敛域图形见右图。



8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

讨论:

- ♣ 只要掌握了上述双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换的 6 个收敛域性质，并能求得像函数的极点，就不难正确地确定像函数的收敛域。
- ♣ 像函数的收敛域不能包含其任一个极点；但零点却不受限制，它既可以在收敛域内，也可以在收敛域外。
- ♣ 拉普拉斯变换和 Z 变换与傅里叶表示又有相互补充的关系

上面的讲述和例题表明：一些不存在傅里叶变换表示的时间函数和序列，如单边增长的指数函数和序列，它们分别有拉普拉斯变换和 Z 变换表示；反之，一些不存在拉普拉斯变换和 Z 变换的时间函数和序列，如常数函数和序列、周期函数和序列等，却有傅里叶表示。这种相互补充的关系使得拉普拉斯变换或 Z 变换方法和傅里叶方法，在研究信号和系统问题中各有优点和侧重。拉普拉斯变换和 Z 变换可以研究不稳定系统，傅里叶方法却无能为力；而傅里叶方法则更适合于信号的分析 and 研究。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换

与傅里叶变换一样，双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换都是**可逆的线性变换**。本小节基于它们与傅里叶变换的关系，**推导出反拉普拉斯变换和反 Z 变换公式**，并介绍**求取反变换的主要方法**。

■ 反拉普拉斯变换和反 Z 变换及其方法

● 反拉普拉斯变换和反 Z 变换公式

假设 **L** $\{f(t)\} = \{F(s), R_F\}$ 和 **Z** $\{f[n]\} = \{F(z), R_F\}$ 分别在 S 平面和 Z 平面收敛域内任取一点 $s = \sigma + j\omega$ 和 $z = re^{j\Omega}$ ，根据拉普拉斯变换和 Z 变换与傅里叶变换的第 2 个关系，分别有

$$F(s) = F(\sigma + j\omega) = \mathbf{F} \{f(t)e^{-\sigma t}\}, \quad (s = \sigma + j\omega) \in R_F$$

$$F(z) = F(re^{j\Omega}) = \mathbf{F} \{f[n]r^{-n}\}, \quad (z = re^{j\Omega}) \in R_F$$

按照 CFT 和 DTFT 的反变换公式，则分别有

$$f(t)e^{-\sigma t} = \mathbf{F}^{-1}\{F(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (\text{Re}\{s\} = \sigma) \in R_F$$

$$\text{和 } f[n]r^{-n} = \mathbf{F}^{-1}\{F(re^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} F(re^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega, \quad (|z| = r) \in R_F$$

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

两式的等号两边分别乘以 $e^{\sigma t}$ 和 r^n ，并用变量代换 $\omega \rightarrow s = \sigma + j\omega$ 和 $\Omega \rightarrow z = re^{j\Omega}$ ，且有 $d\omega = ds/j$ 和 $d\Omega = (1/j)z^{-1}dz$ ，就可以得到如下的反拉普拉斯变换和反 Z 变换公式。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (\text{Re}\{s\} = \sigma) \in R_F$$

和

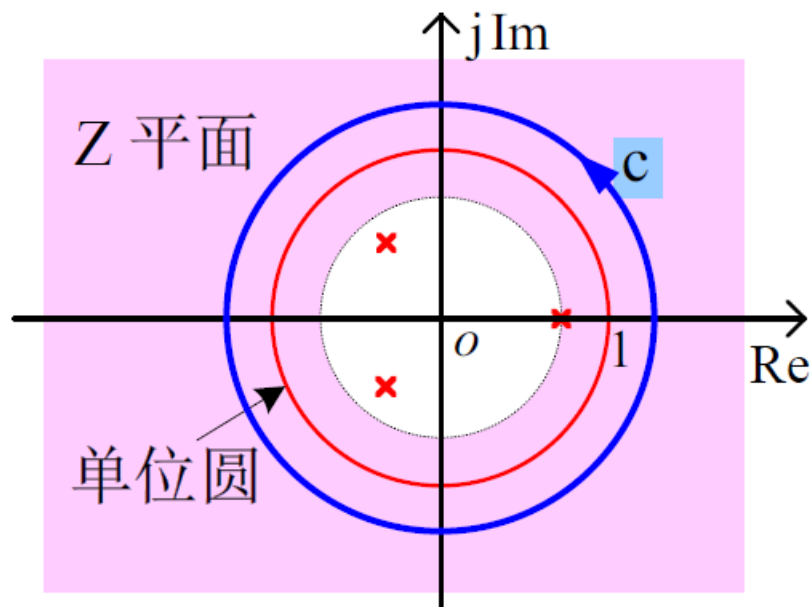
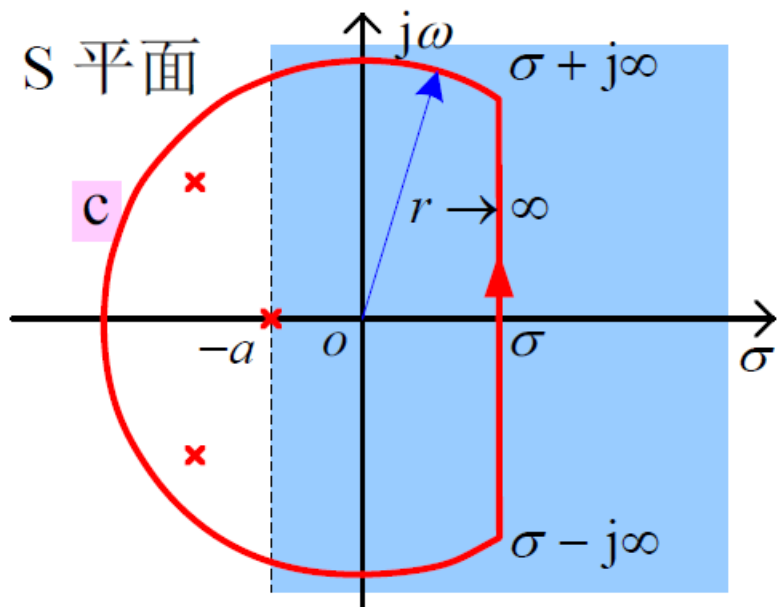
$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z)z^{n-1} dz, \quad c = (|z| = r) \in R_F$$

其中， c 是 Z 平面收敛域内任一个以原点为中心的圆周。

表明：

- ★ $\{F(s), R_F\}$ 的反拉普拉斯变换，是解析函数 $F(s)e^{st}$ 从无穷远点沿其收敛域 R_F 内任意一条平行于虚轴的直线、自下而上又回到无穷远点的、半径无限大的半圆周路径积分；
 - ★ $\{F(z), R_F\}$ 的反 Z 变换，是解析函数 $F(z)z^{n-1}$ 在其收敛域 R_F 内任一以原点为中心的圆周是逆时针方向的路径积分。
- 反拉普拉斯变换和反 Z 变换的路径积分示意图如下图所示。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)



● 反拉普拉斯变换和反 Z 变换的方法

有以下几种求取反拉普拉斯变换和反 Z 变换的方法:

★ 留数法 (围线积分法)

反拉普拉斯变换和反 Z 变换公式右边分别是解析函数 $F(s)e^{st}$ 和 $F(z)z^{n-1}$ 在其收敛域内围线 c 上的围线积分, 可利用复变函数中的留数定理来求, 即分别有

$$\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_i \text{Res}\{F(s)e^{st}, p_i\}$$

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

和 $\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = \sum_i \text{Res}\{F(z)z^{n-1}, p_i\}$

其中, $\text{Res}\{G(s), p_i\}$ 表示围线 \mathbf{c} 内包含的函数 $G(s)$ 之极点 p_i 的留数值: 若 p_i 是一阶极点, 其留数值分别为

$$\text{Res}\{F(s)e^{st}, p_i\} = [(s - p_i)F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i}$$

和 $\text{Res}\{F(z)z^{n-1}, p_i\} = [(z - p_i)F(z)z^{n-1}] \Big|_{z=p_i}$

若 p_i 是 k 阶极点, 则其留数值分别为

$$\text{Res}\{F(s)e^{st}, p_i\} = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-2}} (s - p_i)^k F(s)e^{st} \right] \Big|_{s=p_i}$$

和 $\text{Res}\{F(z)z^{n-1}, p_i\} = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-2}} (z - p_i)^k F(z)z^{n-1} \right] \Big|_{z=p_i}$

表明: $\{F(s), R_F\}$ 和 $\{F(z), R_F\}$ 的反拉普拉斯变换和反 Z 变换, 分别等于函数 $F(s)e^{st}$ 和 $F(z)z^{n-1}$ 在围线 \mathbf{c} 内 (见上一页图) 包含的所有极点的留数值之和。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

说明: 留数法是对有理像函数和非有理像函数都适用的一种反变换方法。但须指出:

- ♣ 在留数法中, 函数 $F(s)e^{st}$ 或 $F(z)z^{n-1}$ 的极点并不等同于像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 的极点, 特别注意加权项 e^{st} 或 z^{n-1} 在不同的 t 或 n 时对位于原点和无穷远点的极点有不同影响, 并会得到不同的反变换;
- ♣ “围线 c 内包含的极点”是指沿逆时针方向行进所包围的极点, 像函数收敛域不同时会有不同结果。特别当收敛域 R_F 是 S 平面上有限的带状域或 Z 平面上内外半径有限的圆环域 (对应时域的两边函数或序列) 时, R_F 的左右或内外都有极点的情况。

鉴于这两点因素, 采用留数法来求取反变换时, 考虑和计算都比较复杂, 感兴趣的同学可参见王文渊编著的“信号与系统”(清华大学出版社, 2008.9) 等著作。

★ 部分分式展开法

由于像函数 $F(s)$ 和 $F(z)$ 通常都是有理函数, 它们的反变换

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

可以避免复杂的留数法，采用简便的部分分式展开法。

★ 反 Z 变换的幂级数展开法

Z 变换实质上表示为一个幂级数，这给反 Z 变换提供了一种特有的幂级数展开方法。

★ 基于熟知的变换对、利用变换的性质的反变换方法

同前面傅里叶变换一样，这种方法是既直接，又十分有效的求取正、反变换的方法。下节介绍和讨论拉普拉斯变换和 Z 变换性质时，将有许多例题来展示这种方法。

下面着重介绍部分分式展开法和反 Z 变换的幂级数展开法。

■ 部分分式展开法

方法的来由：单纯的普通时间函数或序列（如指数函数或序列、正弦函数或序列和幂函数或序列等），它们的拉普拉斯变换或 Z 变换的像函数都是一些只有一个实极点或一对共轭复极点的有理函数，其收敛域也很单纯。正是这个事实引出了部分分式展开法这样的反变换方法。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

所谓“部分分式展开法”，就是通过把高阶次的有理像函数分解成低阶次的有理函数的线性组合的途径，简便直接地求取其反变换的方法。

鉴于到此为止已有的拉普拉斯变换和 Z 变换对的限制，这里先介绍仅有一阶极点的所谓“有理真分式”的展开方法。到下一章 9.2.5 小节再完整讲述针对各种情况的部分分式展开方法。

假设有理像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 是只有多个一阶极点的 s 或 z^{-1} 的有理真分式，即 s 或 z^{-1} 的分母多项式阶次 N 高于分子多项式。则像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 及其收敛域 R_F 可以展开为

$$\{F(s), R_F\} = \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)}, R_F \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_i}{s - p_i}, s \in R_i \right\}$$

或

$$\{F(z), R_F\} = \left\{ \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}, R_F \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{B_i}{1 - p_i z^{-1}}, z \in R_i \right\}$$

其中， p_i 为分母多项式 $Q(s)$ 和 $Q(z^{-1})$ 的 N 个单根， R_i 为 N 个一次真分式各自的收敛域， A_i 或 B_i 为待定复常数，它们分别为：

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

$$A_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i}$$

或

$$B_i = (1 - p_i z^{-1})F(z) \Big|_{z=p_i}$$

说明：上述部分分式展开不仅要确定等号右边每一项像函数，还需要敲定其收敛域 R_i 。

根据例 8.1 和例 8.3，上面展开式中的每一项 $\frac{A_i}{s - p_i}$ 和 $\frac{B_i}{1 - p_i z^{-1}}$ 分别都是因果或反因果复指数函数和序列的像函数，其收敛域 R_i 也很单纯：只能是 s 平面上穿过极点 p_i 、平行于虚轴的直线之右侧或左侧，和只能是 z 平面上穿过极点 p_i 的圆周的外部或内部。

确定这 N 个收敛域 R_i 的规则是它们的交集必须等于 R_F 。故像函数 $F(s)$ 和 $F(z)$ 及其收敛域的部分分式展开分别为

$$\{F(s), R_F\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{A_i}{s - p_i}, R_i \right\}, \quad R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_N = R_F$$

和

$$\{F(z), R_F\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{B_i}{1 - p_i z^{-1}}, R_i \right\}, \quad R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_N = R_F$$

下面通过例题来具体展示部分分式展开法的过程和要领。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

【例 8.8】 求如下像函数和收敛域的反拉普拉斯变换和反 Z 变换:

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \quad R_{F_1} = (\operatorname{Re}\{s\} > -1)$$

和
$$F(z) = \frac{1}{1-(1/6)z^{-1}-(1/6)z^{-2}}, \quad R_{F_1} = (|z| > 0.5)$$

解: 首先进行有理像函数的部分分式展开, 为此, 需把其分母多项式因式分解, 即

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \quad \text{和} \quad F(z) = \frac{1}{[1-(1/2)z^{-1}][1+(1/3)z^{-1}]}$$

它们就可以分别部分分式展开为

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} \quad \text{和} \quad F(z) = \frac{B_1}{1-(1/2)z^{-1}} + \frac{B_2}{1+(1/3)z^{-1}}$$

即使记不住待定常数的计算公式, 也可用代数方法来确定待定常数, 即把上述展开式再合并成如下多项式分式:

$$F(s) = \frac{(A_1+A_2)s+2A_1+A_2}{(s+1)(s+2)} \quad \text{和} \quad F(z) = \frac{B_1+B_2+(B_1/3-B_2/2)z^{-1}}{[1-(1/2)z^{-1}][1+(1/3)z^{-1}]}$$

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

令它们分别与原像函数相等，可列出确定待定常数的如下方程：

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ 2A_1 + A_2 = 3 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} B_1 + B_2 = 1 \\ B_1/3 - B_2/2 = 0 \end{cases}, \quad \text{并求得} \quad \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} B_1 = 0.6 \\ B_2 = 0.4 \end{cases}$$

因此，所求的有理像函数部分分式展开分别为

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad \text{和} \quad F(z) = \frac{0.6}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{0.4}{1 + (1/3)z^{-1}}$$

然后确定每个一阶像函数各自的收敛域 R_1 和 R_2 ，方法是从每个 R_i 的两种可能收敛域中选出一个，使它们的交集正好是 R_F 。

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{s\} > -1 \\ \text{Re}\{s\} < -1 \end{array} \right\} \cap R_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{s\} > -2 \\ \text{Re}\{s\} < -2 \end{array} \right\} = (\text{Re}\{s\} > -1) = R_{F_1}$$

和

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} |z| > 0.5 \\ |z| < 0.5 \end{array} \right\} \cap R_2 \left\{ \begin{array}{l} |z| > 1/3 \\ |z| < 1/3 \end{array} \right\} = (|z| > 0.5) = R_{F_1}$$

由此，像函数 $F(s)$ 和 $F(z)$ 及其收敛域的部分分式展开分别为

$$\left\{ \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \text{Re}\{s\} > -1 \right\} = \left\{ \frac{1}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1 \right\} + \left\{ \frac{1}{s+2}, \text{Re}\{s\} > -2 \right\}$$

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

和
$$\left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{0.6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \frac{0.4}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3} \right\}$$

最后，对上述部分分式展开式中的每一项进行反变换，利用例 8.1 的结果，它们的反拉普拉斯变换和反 Z 变换分别为

$$f_1(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad \text{和} \quad f_1[n] = 0.6(1/2)^n u[n] + 0.4(-1/3)^n u[n]$$

说明： ♣ 对于本题给出的收敛域 R_F ，根据双边变换收敛域的性质，一开始就可判断出反变换结果一定是右边时间函数和序列，这个信息至少能帮助和验证你对每个 R_i 的选择。

♣ 本题给出的像函数 $F(s)$ 和 $F(z)$ 各有两个极点，它们可能的收敛域只有 3 种。若像函数仍为本题的 $F(s)$ 或 $F(z)$ ，收敛域则分别修改为

$$\begin{array}{ll} R_{F_2} = (\operatorname{Re}\{s\} < -2) & \text{及} \quad R_{F_3} = (-2 < \operatorname{Re}\{s\} < -1) \\ \text{和} \quad R_{F_2} = (|z| < 1/3) & \text{及} \quad R_{F_3} = (1/3 < |z| < 1/2) \end{array}$$

下面看看这两种收敛域时的反拉普拉斯变换和反 Z 变换。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

由于像函数未变，它们本身的部分分式展开也不变。收敛域改变只涉及 R_1 和 R_2 的不同选择。

★ 收敛域是 R_{F_2} (左边函数和序列) 的情况， R_1 和 R_2 选择为

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\operatorname{Re}\{s\} > -1} \\ \operatorname{Re}\{s\} < -1 \end{array} \right\} \cap R_2 \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\operatorname{Re}\{s\} > -2} \\ \operatorname{Re}\{s\} < -2 \end{array} \right\} = (\operatorname{Re}\{s\} < -2) = R_{F_2}$$

和

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \cancel{|z| > 0.5} \\ |z| < 0.5 \end{array} \right\} \cap R_2 \left\{ \begin{array}{l} \cancel{|z| > 1/3} \\ |z| < 1/3 \end{array} \right\} = (|z| < 1/3) = R_{F_2}$$

此时，反变换的结果分别为

$$f_2(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(-t)$$

和

$$f_2[n] = -0.6(1/2)^n u[-n-1] - 0.4(-1/3)^n u[-n-1]$$

★ 收敛域是 R_{F_3} (两边函数和序列) 的情况， R_1 和 R_2 选择为

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\operatorname{Re}\{s\} > -1} \\ \operatorname{Re}\{s\} < -1 \end{array} \right\} \cap R_2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{s\} > -2 \\ \cancel{\operatorname{Re}\{s\} < -2} \end{array} \right\} = (-2 < \operatorname{Re}\{s\} < -1) = R_{F_3}$$

和

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \cancel{|z| > 0.5} \\ |z| < 0.5 \end{array} \right\} \cap R_2 \left\{ \begin{array}{l} |z| > 1/3 \\ \cancel{|z| < 1/3} \end{array} \right\} = (1/3 < |z| < 0.5) = R_{F_3}$$

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

故另外两种收敛域时的反拉普拉斯变换和反 Z 变换分别为

$$f_2(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(-t) \quad \text{及} \quad f_3(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$$

和
$$f_2[n] = -0.6(1/2)^n u[-n-1] - 0.4(-1/3)^n u[-n-1]$$

及
$$f_3[n] = 0.4(-1/3)^n u[n] - 0.6(1/2)^n u[-n-1]$$

这些结果与前面例 8.4 和例 8.6 是一致的。

讨论: ♣ 部分分式展开法是应用广泛并深受喜爱的反变换方法, 其理由如下:

★ 绝大部分常见的拉普拉斯变换像函数和 Z 变换像函数都是有理像函数, 或者是包含有理函数因子的像函数;

★ 部分分式展开法无需高等数学知识, 仅用初等的代数方法就可求解。

♣ 鉴于 CFT 和 DTFT 与双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换之间的关系, 部分分式展开法还可用来求取一类复变量为 $(j\omega)$ 和 $(e^{j\Omega})$ 的有理函数的傅里叶反变换。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

■ 反 Z 变换的幂级数展开法

来由：根据 Z 变换的定义，即

$$\mathbf{Z} \{f[n]\} = F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad z \in R_F$$

它实际上是 Z 平面收敛域内一个涉及复变量 z 的**正幂项**和**负幂项**的**幂级数**。如果有一种数学方法能把像函数 $F(z)$ 在其收敛域内展开成这样的幂级数，就可方便求得它的反 Z 变换 $f[n]$ 。**复变函数的泰勒级数展开**和**多项式分式的长除法**都可做到这一点

● 泰勒级数展开法

如果像函数 $F(z)$ 在其收敛域内能展开成如下泰勒级数

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \quad |z| > r_0 \quad \text{或} \quad F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^{-n}, \quad |z| < r_0$$

就可由展开的泰勒级数系数 f_n 得到或归纳出其反 Z 变换 $f[n]$ ，具体方法和要领请见下面例题。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

【例 8.9】 试求如下两个像函数和收敛域的反 Z 变换 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$

$$F_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad \text{和} \quad F_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

解： 复变函数中有泰勒级数公式： $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1$

★ 对于 $F_1(z)$ ，可令 $w = az^{-1}$ ，利用该泰勒级数， $F_1(z)$ 可展开为

$$F_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}, \quad |az^{-1}| < 1 \quad \text{即} \quad |z| > |a|$$

对比 Z 变换定义式，可得其反 Z 变换 $f_1[n] = a^n u[n]$ 。

★ 对于 $F_2(z)$ ，它可改写为 $F_2(z) = \frac{-za^{-1}}{1 - za^{-1}}, \quad |a^{-1}z| < 1$ 。令

$w = a^{-1}z$ ，利用该泰勒级数， $F_2(z)$ 可展开为

$$F_2(z) = -w \sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} z^{n+1} \stackrel{m=-(n+1)}{=} -\sum_{m=-1}^{\infty} a^m z^{-m}, \quad |z| < |a|$$

对比 Z 变换定义式，可得其反 Z 变换 $f_2[n] = -a^n u[-n-1]$ 。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

【例 8.10】 试求 $F(z) = \ln(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$ 的反 Z 变换。

解: 利用泰勒级数公式: $\ln(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n}$, $|w| < 1$

令 $w = az^{-1}$, 则 $F(z)$ 可展开成如下幂级数

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (az^{-1})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}, \quad |az^{-1}| < 1 \text{ 即 } |z| > |a|$$

对比 Z 变换定义式, 可得它反 Z 变换为

$$f[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} a^n / n, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad f[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

● 多项式长除法

对于有理像函数, 即 z 或 z^{-1} 的多项式分式, 可先根据收敛域判断其反 Z 变换是右边序列还是左边序列, 然后采用多项式长除法, 把像函数展开成是 z 的负幂或正幂的幂级数, 再对比 Z 变换定义, 确定各个序列值, 或进一步归纳出序列表达式。

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

【例 8.11】 试求如下两个像函数及其收敛域的反 Z 变换

$$F_1(z) = \frac{1}{z^{-1} - az^{-2}}, \quad |z| > |a| \quad \text{和} \quad F_2(z) = \frac{z^{-2}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

解： 首先由收敛域判断出 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 的反 Z 变换 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 分别是右边序列和左边序列，用长除法必须把它们分别展开成 z 的负幂无限的幂级数和 z 的正幂无限的幂级数，即

降幂排列

$z^{-1} - az^{-2} \overline{) 1}$

$z + a + a^2 z^{-1} + \dots$

z 的负幂无限

和

升幂排列

$-az^{-1} + 1 \overline{) z^{-2}}$

$-a^{-1} z^{-1} - a^{-2} + a^{-3} z + \dots$

z 的正幂无限

因此， $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 可分别在其收敛域内展开成如下幂级数：

$$F_1(z) = z + a + a^2 z^{-1} + a^3 z^{-2} + \dots \quad \text{和} \quad F_2(z) = -a^{-1} z^{-1} - a^{-2} - a^{-3} z - \dots$$

8.3.4 反拉普拉斯变换和反 Z 变换(续)

对比 Z 变换定义式, 可得它们的反 Z 变换 $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 分别为:

$$f_1[n]=0, n < -1; f_1[-1]=1, f_1[0]=a, f_1[1]=a^2, f_1[2]=a^3, \dots$$

和 $f_2[n]=0, n > 1; f_2[1]=-a^{-1}, f_2[0]=-a^{-2}, f_2[-1]=-a^{-3}, \dots$

对此, 还可以归纳出它们的序列表达式, 即

$$f_1[n] = a^{n+1}u[n+1] \quad \text{和} \quad f_2[n] = -a^{n-2}u[-n+1]$$

讨论: ♣ 泰勒级数展开法和长除法的比较

- ★ 泰勒级数展开法既适用于有理像函数, 也适用于非有理像函数, 但并非所有 Z 变换像函数都能容易地在其收敛域内找到可展开的泰勒级数;
- ★ 长除法无需高等数学知识, 但只适用于有理像函数, 且收敛域还局限于 Z 平面上某个圆周的外部或内部。此外, 有时要进一步归纳出序列表达式也非易事。
- ♣ 上面的例题都表明, 根据收敛域判明反 Z 变换属于那种序列的重要性。此外, 如能做到各种反变换方法的联合应用, 很可能有意想不到的效果。

作业

- 5.40 2) 4)
- 5.41
- 5.42 2) 4) 5)
- 5.44 2) 3)