中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

信息科学技术学院 School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十四周

拉普拉斯变换和 Z 变换（续）

赵 峰，电四楼421

fzhao956@ustc.edu.cn

2022/5/25

8.4 拉普拉斯变换和 Z 变换的性质

前面第 6 章已全面介绍和讨论了 CFT 和 DTFT 的各种性质，拉普拉斯变换和 Z 变换看成傅里叶变换从频域扩展到复平面。

故：♣ 拉普拉斯变换性质和 Z 变换性质分别是 CFT 和 DTFT 的性质从 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆推广到整个复平面；

♣ CFT 和 DTFT 的性质又分别是拉普拉斯变换性质和 Z 变换性质在 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆上的体现。

本节将在 CFT 和 DTFT 有关性质的基础上，充分利用上述关系，讲述和展现双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换的性质。

说明：大部分傅里叶变换性质都有其对应的拉普拉斯变换和 Z 变换性质，但有其不同解释和特征；有几个傅里叶变换性质没有对应的双边变换性质，双边变换也有个别特有性质。

注意：因 s 域和 z 域是不同坐标的复平面带来两者性质的差别。

强调：介绍和讨论拉普拉斯变换和 Z 变换性质的主要目的：

★ 弄清每个性质体现的时域与复频域间的关系。

★ 了解和掌握利用这些性质求解变换和反变换的方法。

8.4 拉普拉斯变换和 Z 变换的性质(续)

与 CFT 和 DTFT 一样，可以从拉普拉斯变换和 Z 变换定义直接得到 S 平面和 Z 平面上几个特殊点的像函数值，例如：

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t \quad 和 \quad F(1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \quad 及 \quad F(-1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f[n]$$

8.4.1 线性性质

拉普拉斯变换和 Z 变换具有如下线性性质：若分别有

$$\mathbf{L}\{f_1(t)\}=\{F_1(s),\quad R_{F1}\} \quad 及 \quad \mathbf{L}\{f_2(t)\}=\{F_2(s),\quad R_{F2}\}$$

和 $$\mathbf{Z}\{f_1[n]\}=\{F_1(z),\quad R_{F1}\} \quad 及 \quad \mathbf{Z}\{f_2[n]\}=\{F_2(z),\quad R_{F2}\}$$

则分别有：

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \{\alpha F_1(s)+\beta F_2(s),\ \mathrm{ROC}\supset(R_{F1}\cap R_{F2})\}$$

和 $$\alpha f_1[n]+\beta f_2[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \{\alpha F_1(z)+\beta F_2(z),\ \mathrm{ROC}\supset(R_{F1}\cap R_{F2})\}$$

其中，α 和 β 是任意非零复常数。

讨论：像函数的线性组合会产生新的零点，并可能消去两个像函数在某个或某些原有极点。例如：

8.4.1 线性性质(续)

$$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)=\frac{\alpha P(s)}{Q(s)}+\frac{\beta A(s)}{B(s)}=\frac{\alpha P(s)B(s)+\beta A(s)Q(s)}{Q(s)B(s)}$$

如果新的零点 (新的分子多项式的根) 等于原有极点，且阶数不低于该极点，该极点就被新零点消去。可能产生的极点改变将会影响线性组合像函数的收敛域，故线性性质中 $\mathrm{ROC}\supset(R_{F1}\cap R_{F2})$ 有如下 3 层含义：

(1) 若 $(R_{F1}\cap R_{F2})=\varnothing$，表明这样的线性组合分别不存在拉普拉斯变换和 Z 变换。如**例 8.7** 中 $\mathrm{e}^{-a|t|}$，$a<0$ 和 $a^{|n|}$，$|a|\geq 1$。

(2) 若 $(R_{F1}\cap R_{F2})\neq\varnothing$，且没有消去 R_{F_1} 或 R_{F_2} 边界上的极点，线性组合像函数的 ROC 就等于 $R_{F1}\cap R_{F2}$。

(3) 若 $(R_{F1}\cap R_{F2})\neq\varnothing$，新的零点消去的正好是 R_{F1} 或 R_{F2} 边界上的极点，ROC 可在交集基础上扩大至重新遇到极点。

为说明上述情况，请看下面的例子。

【例 8.13】 已知两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 拉普拉斯变换如下，试求 $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ 的拉普拉斯变换。

8.4.1 线性性质(续)

$$X_1(s)=\frac{1}{s+1},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1 \quad 和 \quad X_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

解： 直接利用线性性质，$x(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2},\quad R_X=(\mathrm{Re}\{s\}>-2)$$

因为产生的新零点正好消去原收敛域边界上的极点，导致交集向左扩大至 $s=-2$ 的极点。

【例 8.14】 试求 $x[n]=a^n(u[n]-u[n-N])$ 的 Z 变换

解： $x[n]$ 可以表示成两个序列之差，即

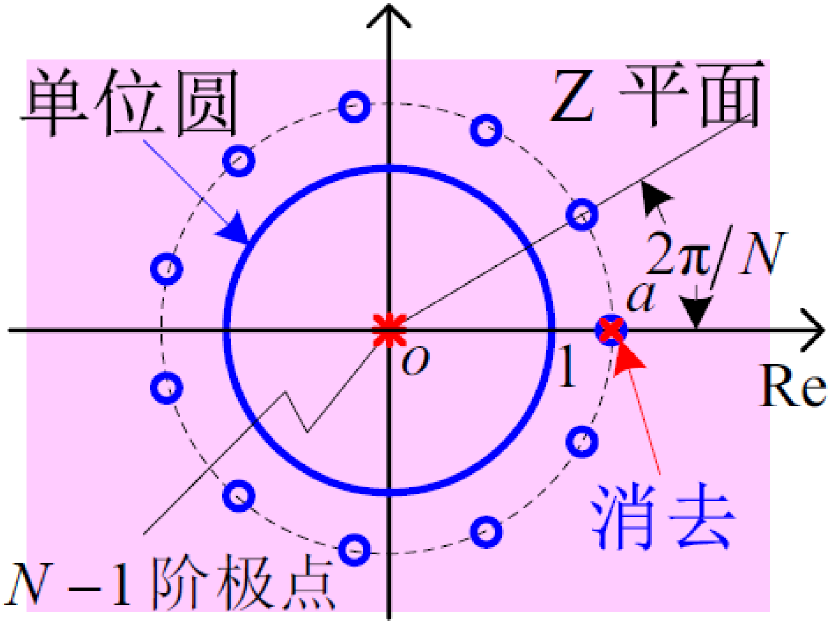
$$x[n]=a^nu[n]-a^Na^{n-N}u[n-N]$$

利用**例 8.1** 的结果 **Z** $\{a^nu[n]\}=1/(1-az^{-1})$，$|z|>|a|$和后面的 Z 变换的时移性质，可求得 $x[n]$ 的 Z 变换像函数及其收敛域为

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}-\frac{a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a},\qquad |z|>0$$

由于新产生的 N 个零点之一正好消去了原来仅有的极点 $p=a$，

8.4.1 线性性质(续)



导致收敛域域扩大成 $|z|>0$，如右图所示。

【例 8.15】 试求 $\cos(\omega_0 t)u(t)$、$\sin(\omega_0 t)u(t)$ 和 $\cos(\Omega_0 n)u[n]$、$\sin(\Omega_0 n)u[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换。

解： 先求两个单边正弦函数的拉普拉斯变换，根据欧拉公式，则有

$$\cos(\omega_0 t)u(t)=[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}u(t)+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}u(t)]/2$$

和

$$\sin(\omega_0 t)u(t)=[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}u(t)-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}u(t)]/2\mathrm{j}$$

基于**例 8.1** 的结果，并利用线性性质，则分别求得：

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\}=\frac{0.5}{s-\mathrm{j}\omega_0}+\frac{0.5}{s+\mathrm{j}\omega_0}=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\,,\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)u(t)\}=\frac{0.5}{\mathrm{j}(s-\mathrm{j}\omega_0)}-\frac{0.5}{\mathrm{j}(s+\mathrm{j}\omega_0)}=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\,,\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

用完全类似的方法，可求得两个单边正弦序列的 Z 变换为：

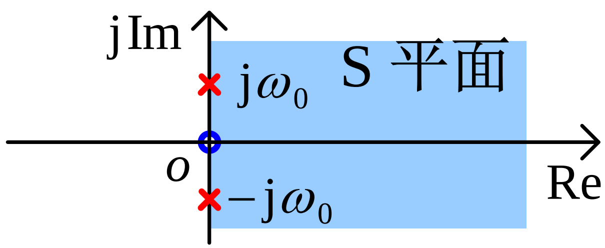
8.4.1 线性性质(续)

$$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)u[n]\}=\frac{1-(\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}},\qquad |z|>1$$

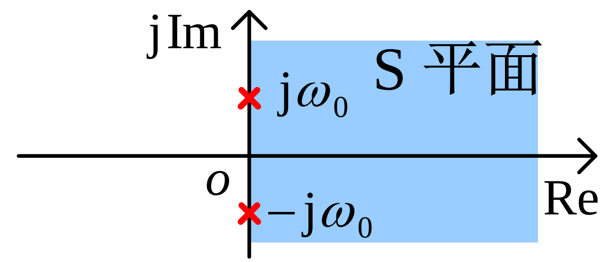
$$\mathcal{Z}\{\sin(\Omega_0 n)u[n]\}=\frac{(\sin\Omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}},\qquad |z|>1$$

它们的零、极点和收敛域图分别如下图所示。由此可看出：

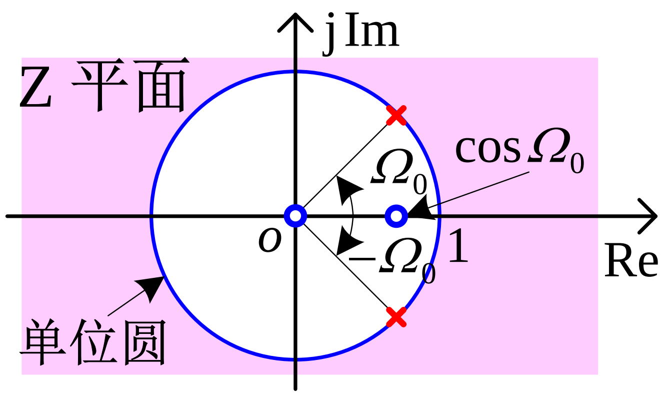
在没有零、极点相消的情况下，线性组合的像函数将会保留原来像函数的所有极点。



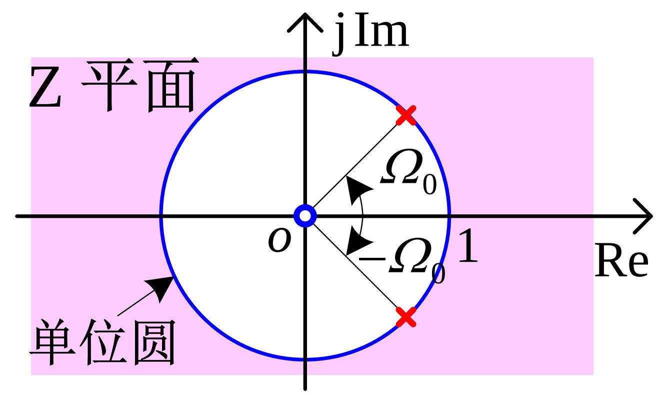
$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\}$



$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)u(t)\}$



$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)u[n]\}$



$\mathcal{Z}\{\sin(\Omega_0 n)u[n]\}$

8.4.2 卷积性质

与傅立叶变换卷积性质一样，拉普拉斯变换和 Z 变换的卷积也是最重要的性质，许多其他性质直接可以由卷积性质导出。

■ 时域卷积性质

拉普拉斯变换和 Z 变换的时域卷积性质陈述如下：若分别有

$\mathbf{L}\{x(t)\}=\{X(s),\quad R_X\}$ 及 $\mathbf{L}\{h(t)\}=\{H(s),\quad R_H\}$

和 $\mathbf{Z}\{x[n]\}=\{X(z),\quad R_X\}$ 及 $\mathbf{Z}\{h[n]\}=\{H(z),\quad R_H\}$

则有 $x(t)*h(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\{X(s)H(s),\ \mathrm{ROC}\supset(R_X\cap R_H)\}$

和 $x[n]*h[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\{X(z)H(z),\ \mathrm{ROC}\supset(R_X\cap R_H)\}$

说明：两个像函数相乘也可能出现相互零、极点抵消的情况，故 $\mathrm{ROC}\supset(R_X\cap R_H)$ 也有与线性性质中相似的含义；

表明：♣ 和傅里叶变换一样，时域上两个函数或序列的卷积，到复频域变成两个像函数相乘，高等运算化为初等运算。

♣ 如果像函数的收敛域 R_X 和 R_H 分别包含 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆，上述时域卷积性质在 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆上分别体现 CFT 和 DTFT 的时域卷积性质。

8.4.2 卷积性质(续)

■ 复频域卷积性质

拉普拉斯变换和 Z 变换的复频域卷积性质陈述如下：

若分别有 $\mathcal{L}\{x(t)\}=\{X(s),\quad R_X=(\sigma_{X1}<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_{X2})\}$

及 $\mathcal{L}\{p(t)\}=\{P(s),\quad R_P=(\sigma_{P1}<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_{P2})\}$

和 $\mathcal{Z}\{x[n]\}=\{X(z),\quad R_X=(r_{X1}<|z|<r_{X2})\}$

及 $\mathcal{Z}\{p[n]\}=\{P(z),\quad R_P=(r_{P1}<|z|<r_{P2})\}$

则有

$$x(t)p(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(v)P(s-v)\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{ROC}=(\max\{\sigma_{X1},\sigma_{P1}\}<\mathrm{Re}\{s\}<\min\{\sigma_{X2},\sigma_{P2}\})$$

其中，积分路径为 $R_X\cap(R_X-R_P)$ 内平行于虚轴的直线。

和

$$x[n]p[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{\mathrm{c}}X(v)P\left(z/v\right)v^{-1}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{ROC}\supset(r_{X1}r_{p1}<|z|<r_{X2}r_{p2})$$

其中，c 是 $X(v)$ 和 $P(z/v)$ 的收敛域之公共部分内的一个圆周。

8.4.2 卷积性质(续)

说明： ♣ 复频域卷积性质又被称为 s 域和 z 域的“复卷积定理”，其证明类似于频域卷积性质，感兴趣可自行练习。

♣ 复频域卷积性质目前应用不多，z 域的复卷积定理仅在数字滤波器的加窗设计方法等少数应用中用到。

8.4.3 时移性质和复频移性质

■ 时移性质

拉普拉斯变换和 Z 变换的时移性质陈述如下：若分别有

$$\mathbf{L}\{f(t)\}=\{F(s),\quad R_F\} \quad 和 \quad \mathbf{Z}\{f[n]\}=\{F(z),\quad R_F\}$$

则有 $$f(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \left\{F(s)\mathrm{e}^{-st_0},\quad \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(|s|<\infty)]\right\}$$

和 $$f[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \left\{F(z)z^{-n_0},\quad \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(0<|z|<\infty)\right\}$$

说明： ♣ e^{-st_0} 和 z^{-n_0} 是时移因子，分别是$\delta(t-t_0)$和 $\delta[n-n_0]$的双边拉普拉斯变换和 Z 变换像函数；

♣ 由于z^{-n_0} 可能去掉或补上 $F(z)$ 在无穷远点和原点的极点，

8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

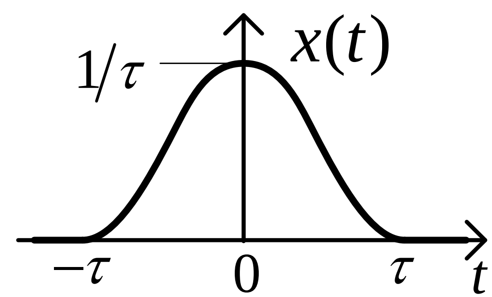
故$F(z)z^{-n_0}$的收敛域为 R_F 与除原点外的有限 Z 平面之交集。而 e^{-st_0} 可能去掉或补上 $F(s)$ 在无穷远点的极点，故$F(s)e^{-st_0}$的收敛域为 R_F 与有限 S 平面之交集。

♣ 鉴于 $f(t-t_0)=f(t)*\delta(t-t_0)$ 和 $f[n-n_0]=f[n]*\delta[n-n_0]$，故时移性质可以看成时域卷积性质的一个特例。

利用时移性质，可求得许多有限宽度或分段初等函数和序列的拉普拉斯变换和 Z 变换，若收敛域分别包含 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆，还可以得到它们的傅里叶变换。请看下面的例子。

【例 8.16】 求如下升余弦脉冲 $x(t)$ 的拉普拉斯和傅里叶变换

$$x(t)=\begin{cases}(1/2\tau)[1+\cos(\pi/\tau)t], & |t|\le\tau\\ 0\quad, & |t|>\tau\end{cases}$$



解： $x(t)$ 的波形见右图，它可改写为

$$x(t)=\frac{1}{2\tau}\left\{\left[1-\cos\frac{\pi}{\tau}(t+\tau)\right]u(t+\tau)-\left[1-\cos\frac{\pi}{\tau}(t-\tau)\right]u(t-\tau)\right\}$$

8.4.3　时移性质和复频移性质(续)

$$=\frac{\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]-\left\{\left[\cos\frac{\pi}{\tau}(t+\tau)\right]u(t+\tau)-\left[\cos\frac{\pi}{\tau}(t-\tau)\right]u(t-\tau)\right\}}{2\tau}$$

基于 $u(t)$ 和上面 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的拉普拉斯变换，直接利用时移性质，$x(t)$ 的拉普拉斯变换像函数为

$$X(s)=\frac{1}{2\tau}\left[\frac{e^{s\tau}-e^{-s\tau}}{s}-\frac{s(e^{s\tau}-e^{-s\tau})}{s^2+(\pi/\tau)^2}\right]$$

由于 $x(t)$ 是有限宽脉冲，其像函数收敛域至少是有限 S 平面，包含虚轴。根据 CFT 与拉普拉斯变换的关系，$x(t)$ 的 CFT 为

$$X(\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{2\tau}\left[\frac{e^{j\omega\tau}-e^{-j\omega\tau}}{j\omega}-\frac{j\omega(e^{j\omega\tau}-e^{-j\omega\tau})}{(j\omega)^2+(\pi/\tau)^2}\right]$$

$$=\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}-\frac{\omega\tau\sin\omega\tau}{(\omega\tau)^2-\pi^2}=\mathrm{Sa}(\omega\tau)+\frac{1}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left[\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]+\mathrm{Sa}\left[\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]\right\}$$

这个结果与第 6 章例 6.5 的结果完全相同。

讨论：本题也展示了又一种求解傅立叶变换的方法。

8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

■ 复频移性质

S 平面和 Z 平面分别是直角坐标和极坐标的复平面，拉普拉斯变换和 Z 变换的“复频移性质”有所不同，下面分开来讲述。

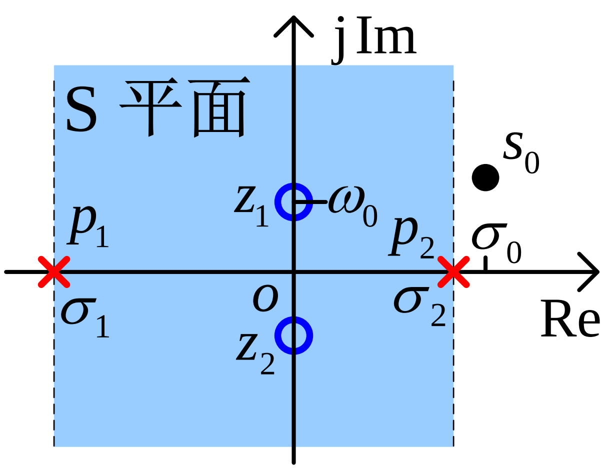
● 拉普拉斯变换的复频移性质 (s 域平移性质)

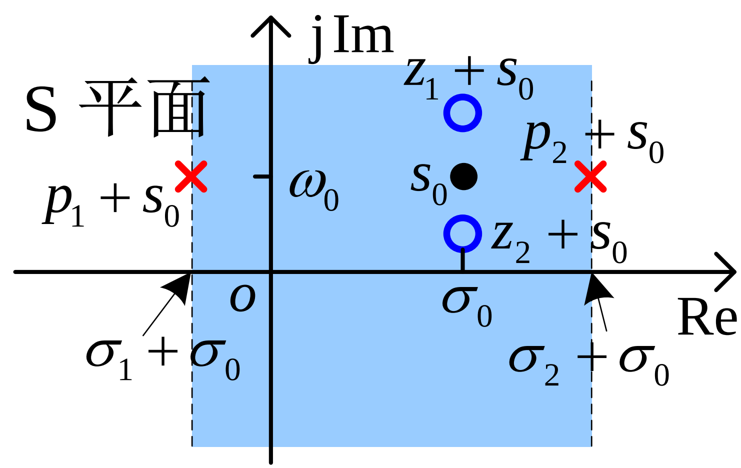
拉普拉斯变换的 s 域平移性质陈述如下：

若 $\mathbf{L}\{f(t)\}=\{F(s),\ \ R_F=(\sigma_1<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_2)\}$，且 $s_0=\sigma_0+\mathrm{j}\omega_0$

则有 $\mathrm{e}^{s_0 t}f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\{F(s-s_0),\ \ (\sigma_1+\sigma_0)<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_2+\sigma_0\}$

表明：时间函数时域上被复指数 $\mathrm{e}^{s_0 t}$ 加权，变换到 S 平面上变成其像函数 (包括零、极点分布) 和收敛域都平移 s_0，包括沿实轴右移 σ_0 和沿虚轴上移 ω_0 。如右图所示。





8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

- **Z 变换的复频移性质 (时域复指数加权性质)**

Z 变换的时域复指数性质陈述如下：

如果 **Z** $\{f[n]\} = \{F(z),\ R_F = (r_1 < |z| < r_2)\}$， 则有

$$z_0^n f[n] \xleftrightarrow{Z} \{F(z/z_0),\quad \mathrm{ROC} = |z_0| R_F = (|z_0| r_1 < |z| < |z_0| r_2)\}$$

由于 Z 平面是极坐标 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$ 的复平面， Z 变换的复频移性质就不那么单纯。为此，先看下面两种特殊情况：

★ z 域旋转 (复正弦加权性质)

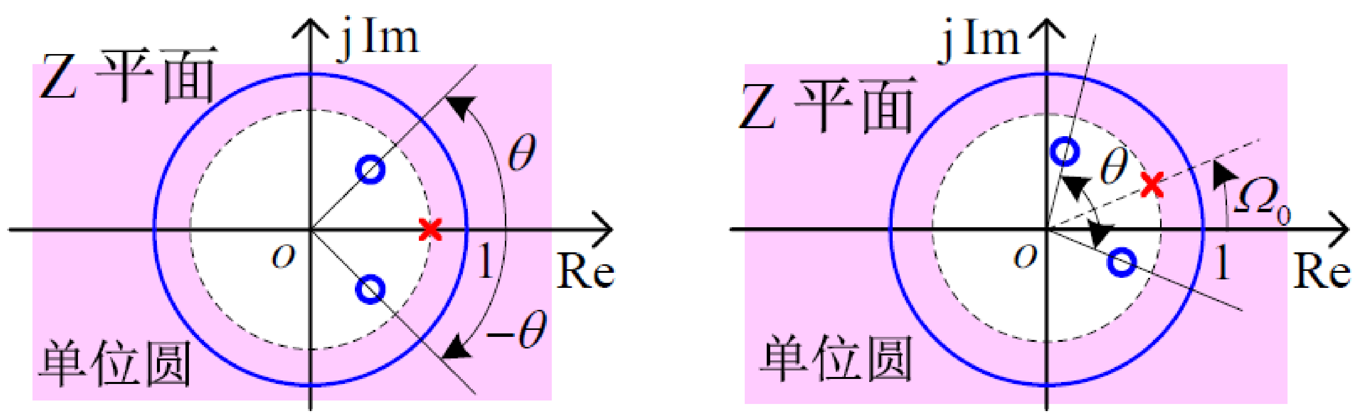
若 $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}$，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n} f[n] \xleftrightarrow{Z} \{F(z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0}),\quad \mathrm{ROC} = R_F\}$

表明：时域上序列被复正弦 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$ 加权，变换到 Z 平面上变成其像函数 (包括零、极点分布) 和收敛域都逆时针旋转 Ω_0，故收敛域 R_F 不变。

如右图所示。

进一步，若 $\Omega_0 = (2k+1)\pi$

即 $z_0 = -1$，



8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

就变成特殊的 z 域旋转 π 的奇数倍性质，即

$$(-1)^n f[n] \xleftrightarrow{\text{Z}} \{F(-z),\quad \text{ROC}=R_F\}$$

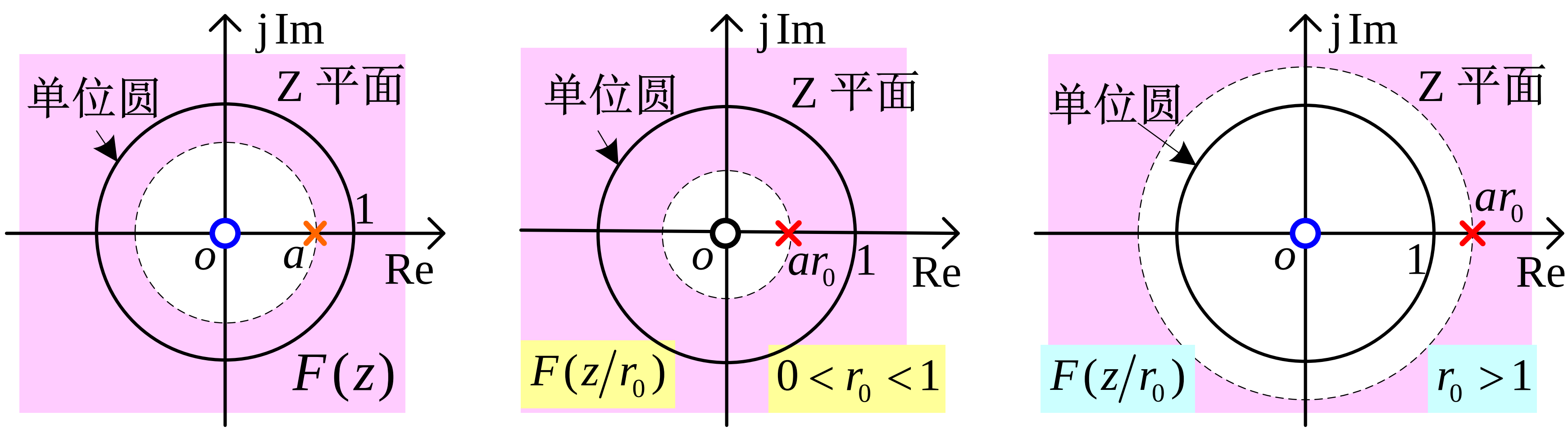
若 R_F 包含单位圆，z 域旋转就归结为 **DTFT** 的频移性质，即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n} f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega-\Omega_0)$$

★ **z 域径向反比变换 (实指数加权性质)**

若 $z_0 = r_0 > 0$，则 $r_0^n f[n] \xleftrightarrow{\text{Z}} \{F(z/r_0),\quad r_0 R_F = (r_0 r_1 < |z| < r_0 r_2)\}$

表明：时域上序列被实指数 r_0^n 加权或调制，导致其像函数 (包括零、极点分布) 和收敛域在 Z 平面上、以单位圆为基圆的径向反比收缩 ($0<r_0<1$) 或拉伸 ($r_0>1$)，如下图所示。



8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

在两个特例的基础上，时域复指数加权性质可解释如下：

对于任意复数 $z_0 = r_0 e^{j\Omega_0}$，时域上序列被复指数 z_0^n 加权，导致其像函数(包括零、极点分布)和收敛域在 Z 平面上，既逆时针旋转 Ω_0，又有以单位圆为基圆的径向反比 ($1/r_0$) 收缩或拉伸。

利用上述复频移性质 (时域复指数加权性质)，有助于求解一些新的拉普拉斯变换和 Z 变换。请看下面的例子。

【例 8.17】 试求如下实指数调制的单边正弦函数和序列的拉普拉斯和Z 变换，其中 $a > 0$，$0 < r < 1$

$$x_1(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \quad 及 \quad x_2(t) = e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$$

和 $$x_1[n] = r^n\cos(\Omega_0 n)u[n] \quad 及 \quad x_2[n] = r^n\sin(\Omega_0 n)u[n]$$

解：基于例 8.15 的结果，即

$$\mathbf{L}\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \mathrm{Re}\{s\}>0 \text{及} \mathbf{L}\{\sin(\omega_0 t)u(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \mathrm{Re}\{s\}>0$$

和 $$\mathbf{Z}\{\cos(\Omega_0 n)u[n]\} = \frac{1-(\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, \quad |z|>1$$

8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

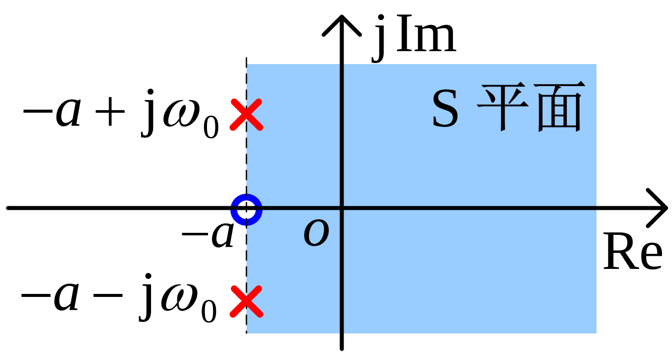
及 $$\mathcal{Z}\left\{\sin(\Omega_0 n)u[n]\right\} = \frac{(\sin\Omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}},\qquad |z|>1$$

直接利用拉普拉斯变换的 s 域平移性质，可求得实指数调制的单边正弦函数的拉普拉斯变换如下：

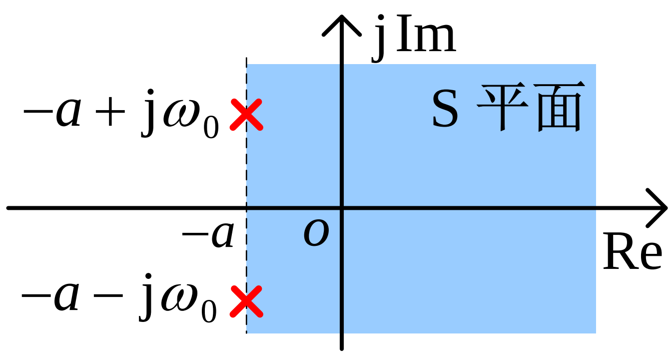
$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)\right\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

及 $$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)\right\} = \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

在 S 平面上这两个像函数的零、极点和收敛域如下图所示，与例 **8.15** 的图比较，清楚体现出 s 域的平移特性。



$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t),\quad a>0$



$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t),\quad a>0$

8.4.3 时移性质和复频移性质(续)

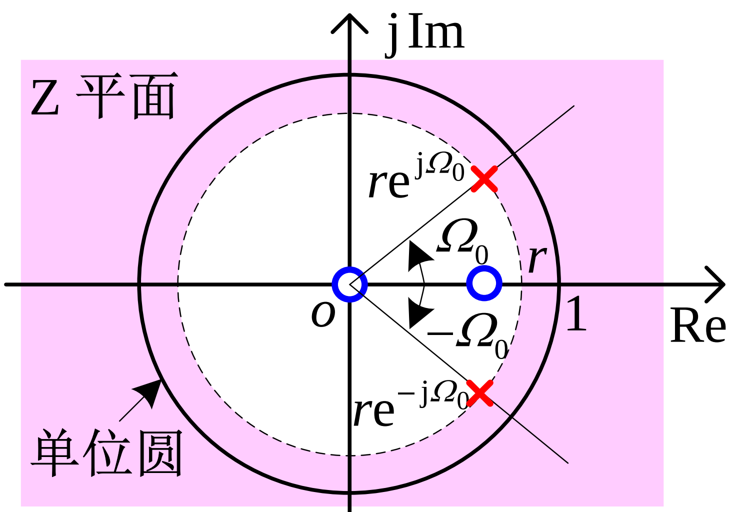
同样地，直接利用 Z 变换的时域复指数加权性质，可求得实指数调制的单边正弦序列的 Z 变换如下：

$$\mathbf{Z}\ \left\{r^n\cos(\Omega_0 n)u[n]\right\}=\frac{1-(r\cos\Omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}\,,\qquad |z|>r$$

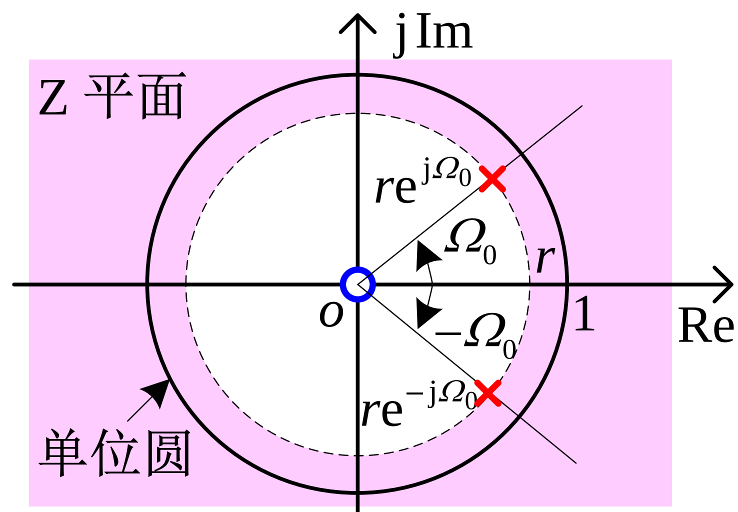
及

$$\mathbf{Z}\ \left\{r^n\sin(\Omega_0 n)u[n]\right\}=\frac{r(\sin\Omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}\,,\qquad |z|>r$$

在 Z 平面上这两个像函数的零、极点和收敛域如下图所示，与例 8.15 的图比较，清楚体现出 z 域的径向反比变换特性。



$r^n\cos(\Omega_0 n)u[n],\quad 0<r<1$



$r^n\sin(\Omega_0 n)u[n],\quad 0<r<1$

作业

- 6.3 1) 2) 5) 6)