



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第七周

信号和系统的变换域表示法 (续)

赵 峰, 电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/4/6

5.4.5 傅里叶变换的极坐标表示和波特图

■ 傅里叶变换的极坐标表示

非周期函数或序列 ($f(t)$ 或 $f[n]$) 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 或 $\tilde{F}(\Omega)$ 通常是 ω 或 Ω 的复值函数，即使是实时间函数或序列的傅里叶变换，一般也是复值函数。复值函数必须用两个实函数表示，通常有两种表示法：

- 直角坐标表示法，即实部函数和虚部函数表示，例如：

$$F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}_R(\Omega) + j\tilde{F}_I(\Omega)$$

- 极坐标表示法，即模函数和幅角函数表示，例如：

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\angle F(\omega)} \quad \text{或} \quad \tilde{F}(\Omega) = |\tilde{F}(\Omega)|e^{j\angle \tilde{F}(\Omega)}$$

其中， $|F(\omega)| = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)}$ 和 $\angle F(\omega) = \arctan \frac{F_I(\omega)}{F_R(\omega)}$
 $|\tilde{F}(\Omega)|$ 和 $\angle \tilde{F}(\Omega)$ 也有相同的表示。

前面已指出：实际中常用极坐标表示，无论表示信号频谱，或LTI系统频率响应，其模函数和幅角函数都有明确的物理意义。

5.4.5 傅里叶变换的极坐标表示和波特图(续)

■ 波特图

傅里叶变换的模函数和幅角函数有两种图示法:

- 线性作图法, 即用线性坐标画出模函数和幅角函数的图形, 前一小节所有例子的图形都是用线性作图法画出的。
- 波特图——在工程上常用的一种采用对数坐标的作图法。在工程分析中经常要求计算傅里叶变换相乘的情况, 例如:

- ▲ 计算 LTI 系统的频域输入输出关系, 即

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{Y}(\Omega) = \tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)$$

- ▲ 计算 LTI 系统级联 (如两级放大器) 的频率响应, 即

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{H}(\Omega) = \tilde{H}_1(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)$$

在用傅里叶变换极坐标表示时, 则分别为:

$$Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\theta_Y(\omega)} = |X(\omega)||H(\omega)|e^{j[\theta_X(\omega)+\varphi(\omega)]}$$

$$\text{和} \quad \tilde{Y}(\Omega) = |\tilde{Y}(\Omega)|e^{j\tilde{\theta}_Y(\Omega)} = |\tilde{X}(\Omega)||\tilde{H}(\Omega)|e^{j[\tilde{\theta}_X(\Omega)+\tilde{\varphi}(\Omega)]}$$

所表现的是模函数 (幅度) 相乘, 而幅角函数 (相位) 相加, 即

5.4.5 傅里叶变换的极坐标表示和波特图(续)

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad \text{或} \quad |\tilde{Y}(\Omega)| = |\tilde{X}(\Omega)| |\tilde{H}(\Omega)|$$

和 $\theta_Y(\omega) = \theta_X(\omega) + \varphi(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{\theta}_Y(\Omega) = \tilde{\theta}_X(\Omega) + \tilde{\varphi}(\Omega)$

如果模函数采用对数坐标的话，也将表现为相加，例如：

$$\lg|Y(\omega)| = \lg|X(\omega)| + \lg|H(\omega)| \quad \text{或} \quad \lg|\tilde{Y}(\Omega)| = \lg|\tilde{X}(\Omega)| + \lg|\tilde{H}(\Omega)|$$

无论工程作图，还是计算，相加总比相乘简单。这就是波特图这一作图法的来由，并在工程分析中受到青睐的根本原因。

最通用的一种以分贝(dB)为单位的波特图就是：

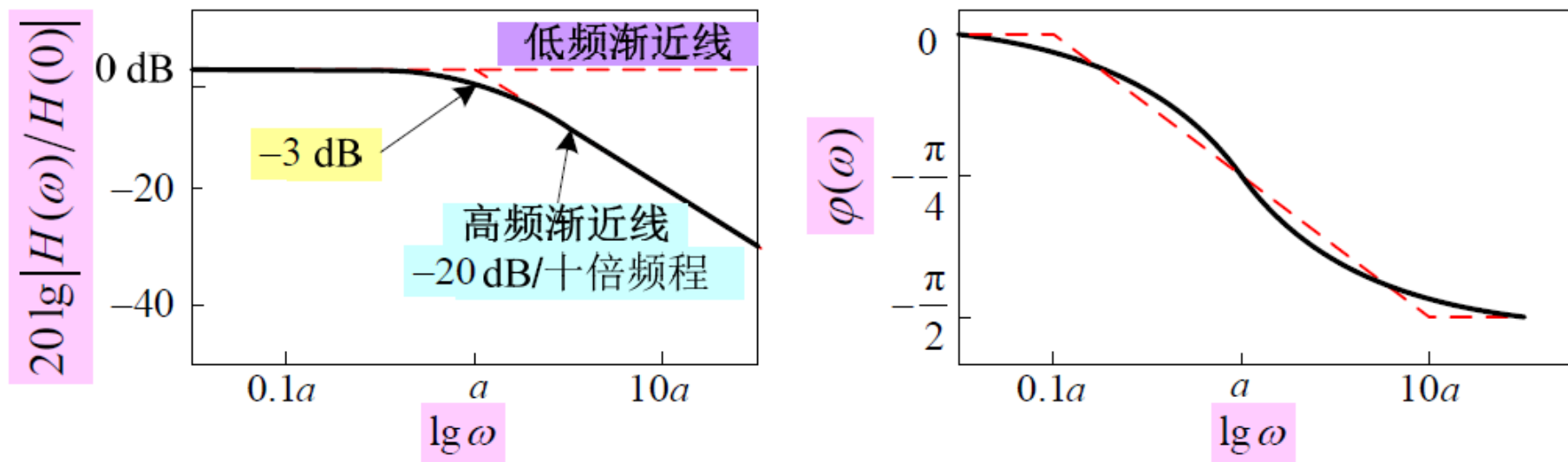
- ★ 连续时间为 $20\lg|F(\omega)|$ 对于 $\lg\omega$ 的对数模函数图形及 $\angle F(\omega)$ 对于 $\lg\omega$ 的幅角函数图形；
- ★ 离散时间为 $20\lg|\tilde{F}(\Omega)|$ 对于 Ω 的对数模函数图形及 $\angle \tilde{F}(\Omega)$ 对于 Ω 的幅角函数图形。

例如：例5.5的连续时间一阶低通的归一化幅频响应和相频响应为

$$20\lg \frac{|H(\omega)|}{|H(0)|} = 20\lg \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = -10\lg(1 + (\omega/a)^2) \quad \text{和} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5.4.5 傅里叶变换的极坐标表示和波特图(续)

其波特图如下图所示:



图中, $20\lg|H(\omega)| \approx 0, \omega \ll a$, 这是一条直线, 称为**低频渐近线**; 而 $20\lg|H(\omega)| \approx 20\lg a - 20\lg \omega, \omega \gg a$, 这是一条截距为 a 、斜率为 -20 dB/十倍频程 的直线, 称为**高频渐近线**。

说明: 连续时间波特图中频率轴也用对数坐标 $\lg \omega$ 有两个理由:

- ★ 利用对数的压扩作用, 可以表示很宽的频率范围;
- ★ 使得用微分方程表示的因果稳定LTI系统频率响应的幅度波特图的渐近线是直线(左上图是最简单的例子), 在计算机作图出现以前, 使得它们的波特图作图十分简便。

5.4.5 傅里叶变换的极坐标表示和波特图(续)

然而，由于实际的离散时间频域为 $[0, \pi]$ ，故离散时间波特图的频率轴仍采用线性坐标。

讨论：

- ▲ 分贝 (dB) 表示模值取 $20\lg$ 的一种单位，故 0 dB 对应于模值等于 1，20 dB 对应于模值是 10，-20 dB 对应于模值为 0.1，等等；此外，模值 2 对应于 6 dB， $1/\sqrt{2}$ 对应于 -3 dB，一个电子工程师应该熟悉它们。
- ▲ 傅里叶变换的波特图表示和线性作图法都有用处，分别在不同场合显示出各自的优点：
 - ★ 由于对数坐标起到小模值扩张、大模值压缩的作用，不仅能展示接近于 0 值的幅度特性的细节，还能大大扩展幅度特性的动态范围。故特别适用于许多用微分方程和差分方程表示的连续时间和离散时间实际滤波器之频率特性；
 - ★ 在定性分析中线性作图法很方便，例如，表示诸如理想滤波器的频率响应等场合。

5.5 周期信号和奇异函数及其离散时间对偶的傅里叶变换

前一节已指出：除了一些没有实际意义的病态函数外，狄里赫利条件要求时间函数模可积或序列模可和，使得信号与系统中很重要的功率受限信号没有严格意义的傅里叶变换，例如：

- ★ 周期函数和序列等 (尽管它们可以用傅里叶级数表示)；
- ★ 奇异函数及其离散时间对偶，如 $\delta(t)$ 的有限阶导数， $u(t)$ 和 $u[n]$ 等。

使得傅里叶变换在信号与系统中应用的广泛性受到一定影响。

后人对此有所突破，其**基本出发点**是：既然时域中连续函数不限于常规函数，还包括奇异函数，那么频域 ω 和 Ω 中也可以包括奇异函数。若在频域中引入 $\delta(\omega)$ 和 $\delta(\Omega)$ 及其导数，就使得上述这些时间函数或序列也有其傅里叶变换表示。为了与**满足狄里赫利条件的严格意义傅里叶变换**有所区别，可以称它们为“**广义傅里叶变换**”或扩展意义上的傅里叶变换。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换

■ 频域冲激函数的傅里叶反变换

为了讨论周期信号和序列的傅里叶变换表示，首先考察 $\delta(\omega)$ 和涉及 $\delta(\Omega)$ 的频域冲激函数的傅里叶反变换。

【例 5.9】 试求 $\delta(\omega)$ 和 $\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega)$ 的傅里叶反变换。

解： 根据 CFT 的反变换公式， $\delta(\omega)$ 的傅里叶反变换为

$$\mathbf{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}$$

这个结果表明，连续时间常数函数 $1/2\pi$ 的 CFT 就是 $\delta(\omega)$ 。

由于任何序列的 DTFT 必须是周期为 2π 的周期函数，故只有周期冲激函数 $\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega)$ 才可能成为某个序列的 DTFT。

$$\mathbf{F}^{-1}\{\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2m\pi) \right] e^{j\Omega n} d\Omega$$

若上式积分区间 $\langle 2\pi \rangle$ 选取 $(-\pi, \pi]$ ，其中只包含一个冲激 $\delta(\Omega)$ ，故上式可进一步写成

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

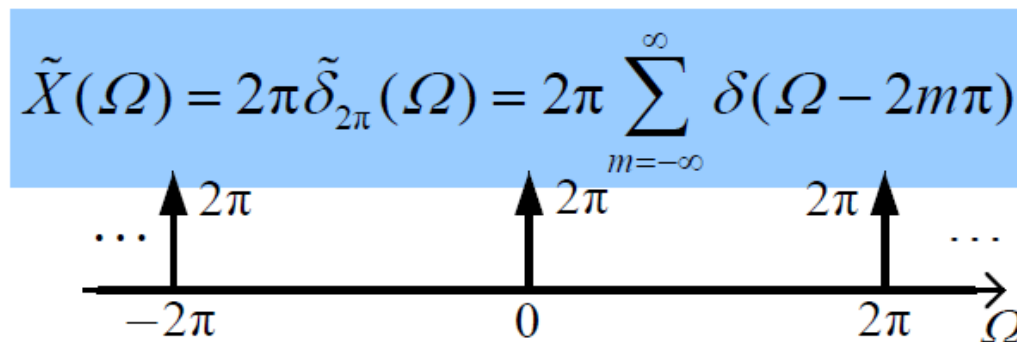
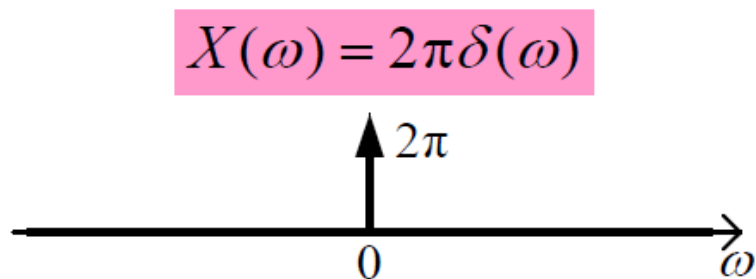
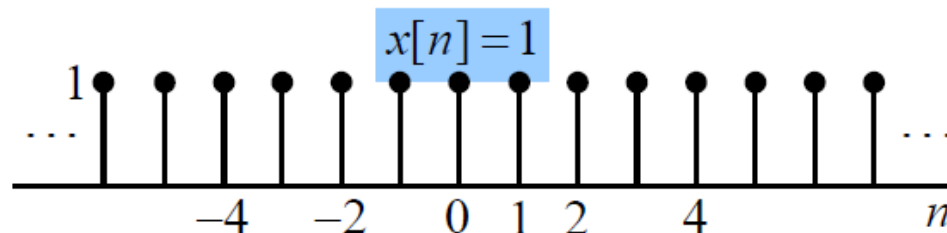
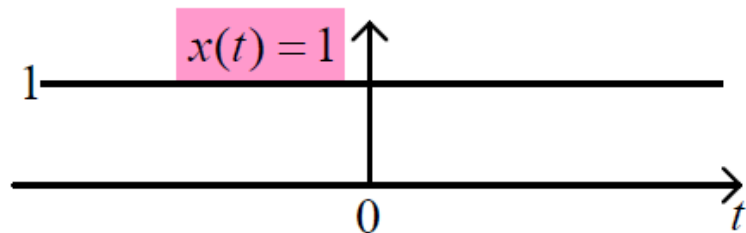
$$\mathbf{F}^{-1}\{\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\Omega n} \Big|_{\Omega=0} = \frac{1}{2\pi}$$

这个结果表明，常数序列 $1/2\pi$ 的 **DTFT** 是离散时间频域 Ω 上的周期冲激串 $\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega)$ 。

由此又得到两个十分重要的傅里叶变换对，即

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega) \quad \text{和} \quad x[n] = 1 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega)$$

它们的图形如下图所示。



5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换

进一步，用同样方法得到连续时间**频域冲激函数** $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 和离散时间频域**周期冲激函数** $2\pi\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)$ 的**傅里叶反变换**：

$$\mathbf{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega-\omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 t}$$

这个结果表明，频率为 ω_0 的连续时间复正弦函数 $e^{j\omega_0 t}$ 的 **CFT** 就是在频率 ω_0 处、强度为 2π 的一个冲激函数 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 。

$$\mathbf{F}^{-1}\{2\pi\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} 2\pi \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-\Omega_0-2m\pi) \right] e^{j\Omega n} d\Omega$$

上式积分区间 $\langle 2\pi \rangle$ 内也只包含一个冲激，若选择包含处在 Ω_0 的冲激 $\delta(\Omega-\Omega_0)$ ，上式则有

$$\mathbf{F}^{-1}\{2\pi\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j\Omega n} \Big|_{\Omega=\Omega_0} = e^{j\Omega_0 n}$$

这个结果表明，频率为 Ω_0 的离散时间复正弦序列 $e^{j\Omega_0 n}$ 的 **DTFT**

就是 $2\pi\tilde{\delta}_{2\pi}(\Omega-\Omega_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0-2m\pi)$ 。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

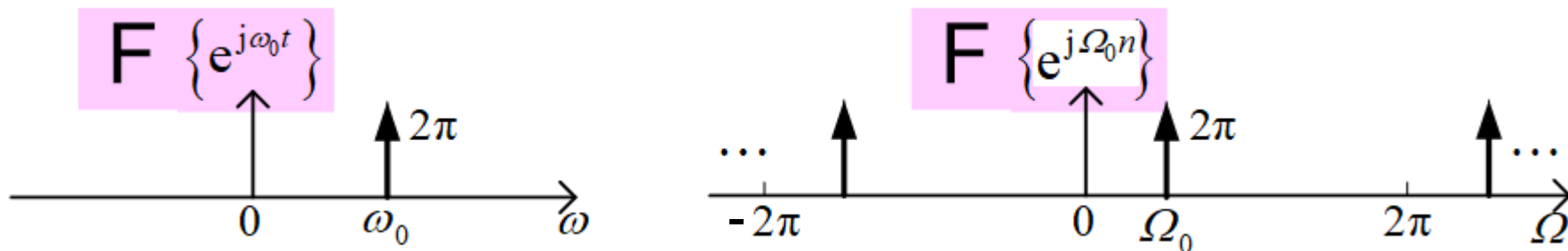
由此又得到两个十分重要的傅里叶变换对，即

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

和

$$e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2m\pi)$$

$e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\Omega_0 n}$ 的傅立叶变换之图形如下图所示。



说明:

- ▲ 在上面的例子中，时域中的**常数信号**和**复正弦信号**都是功率受限信号，**不满足模可积或模可和**，它们的傅里叶变换是**频域冲激函数**或周期为 2π 的**周期冲激函数**，也不再是有界函数，这与狄里赫利条件1不矛盾。正像 $\delta(t)$ 有CFT一样，它们有傅里叶反变换，也是**利用冲激函数的筛分性质**获得的。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

- ▲ 信号的傅里叶变换是其**频谱密度函数**，这可以给常数信号和复正弦信号的傅里叶变换是频域冲激函数作出合理解释：频域冲激的面积除以 2π 就是常数信号和复正弦信号的幅度。
- ▲ 常数信号和复正弦信号的**CFT**或**DTFT**也可以正确表示**LTI**系统对它们的响应。例如，对于频率响应为 $\tilde{H}(\Omega)$ 的离散时间**LTI**系统，它对 $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ 的**频域输入输出关系**为：

$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2m\pi) \xrightarrow{\tilde{H}(\Omega)} 2\pi \tilde{H}(\Omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2m\pi)$$

则**LTI**系统的输出 $y[n]$ 为

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \left[2\pi \tilde{H}(\Omega) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) \right] e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \tilde{H}(\Omega_0 + 2\pi l) e^{j(\Omega_0 + 2\pi l)n} = \tilde{H}(\Omega_0) e^{j\Omega_0 n} \end{aligned}$$

连续时间**LTI**系统也同样。这与5.2节的结果相一致。

总之，常数信号和复正弦信号这样的傅里叶变换表示，既有严密的数学依据，又有合理的物理含义和正确的应用。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

■ 周期信号和序列的傅里叶变换表示

基于常数和复正弦信号或序列的傅里叶变换，就可以将周期信号和序列的傅里叶级数表示转换成它们的傅里叶变换表示。

周期信号 $\tilde{x}(t)$ 和周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的 CFS 和 DFS 分别为

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad \text{和} \quad \tilde{x}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

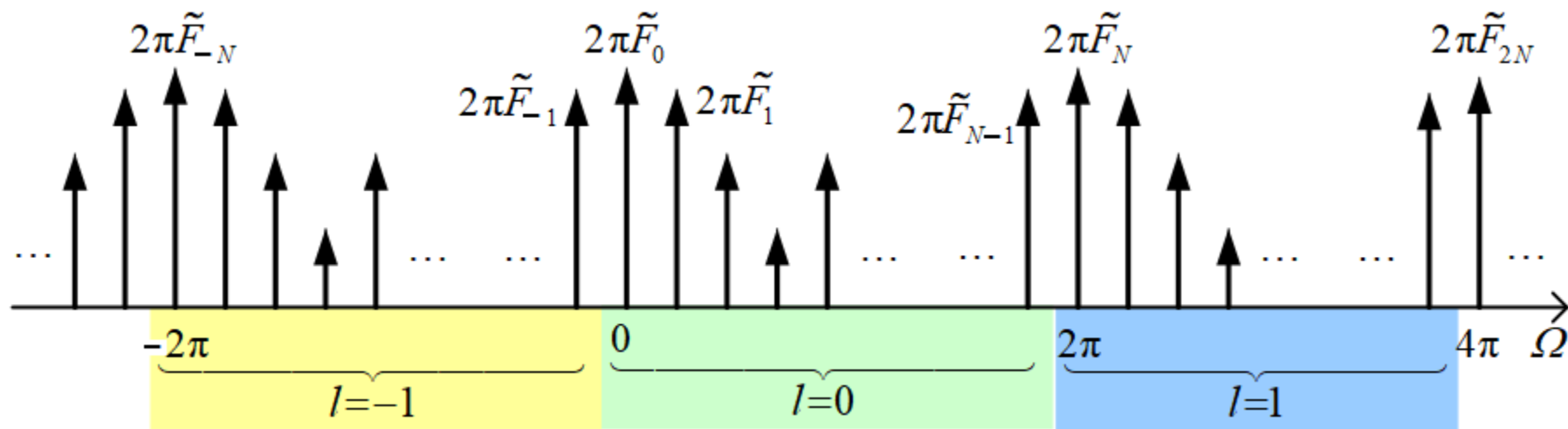
其中， F_k 和 \tilde{F}_k 分别是它们的 CFS 和 DFS 系数。对上式分别取 CFT 和 DTFT，得到 $\tilde{x}(t)$ 和 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \{ \tilde{x}(t) \} &= \mathbf{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \mathbf{F} \{ e^{jk\omega_0 t} \} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ \mathbf{F} \left\{ \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k e^{jk\Omega_0 n} \right\} &= \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k \mathbf{F} \{ e^{jk\Omega_0 n} \} = \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k \left[2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2l\pi) \right] \\ \mathbf{F} \{ \tilde{x}[n] \} &= \left. \begin{aligned} &= 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2l\pi) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

由于DFS系数的周期性质，即 $\tilde{F}_k = \tilde{F}_{k+lN}$ ，且 k 域上的 $\langle N \rangle$ 相当于 Ω 域上的 $\langle 2\pi \rangle$ ，利用下图的说明，上式可写成

$$\mathbf{F}\{\tilde{x}[n]\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$



由此表明：周期分别为 T 和 N 的**周期信号** $\tilde{x}(t)$ 和序列 $\tilde{x}[n]$ 的**傅里叶变换**，分别是频域上一串**处在谐波频率** $k\omega_0 = k(2\pi/T)$ 和 $k\Omega_0 = k(2\pi/N)$ 、**强度分别为** $2\pi F_k$ 和 $2\pi \tilde{F}_k$ 的**冲激串**。两者的区别是： $\tilde{x}(t)$ 的 CFT 为等间隔的**非周期冲激串**，而 $\tilde{x}[n]$ 的 DTFT 则是周期为 2π 的等间隔**周期冲激串**。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

下面用例子来增强周期信号的傅里叶变换表示的感性认识。

【例 5.10】 试求周期矩形脉冲 $\tilde{x}(t)$ 和序列 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换，

$$\text{其中, } \tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{\tau}(t-mT) \quad \text{和} \quad \tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{2N_1+1}[n-mN]$$

解： 例 5.2 和例 5.3 求得它们的傅里叶级数系数分别为：

$$F_k = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left[\frac{k(2\pi/T)\tau}{2}\right] \quad \text{和} \quad \tilde{F}_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[k(2\pi/N)(2N_1+1)/2]}{\sin[k(2\pi/N)/2]}$$

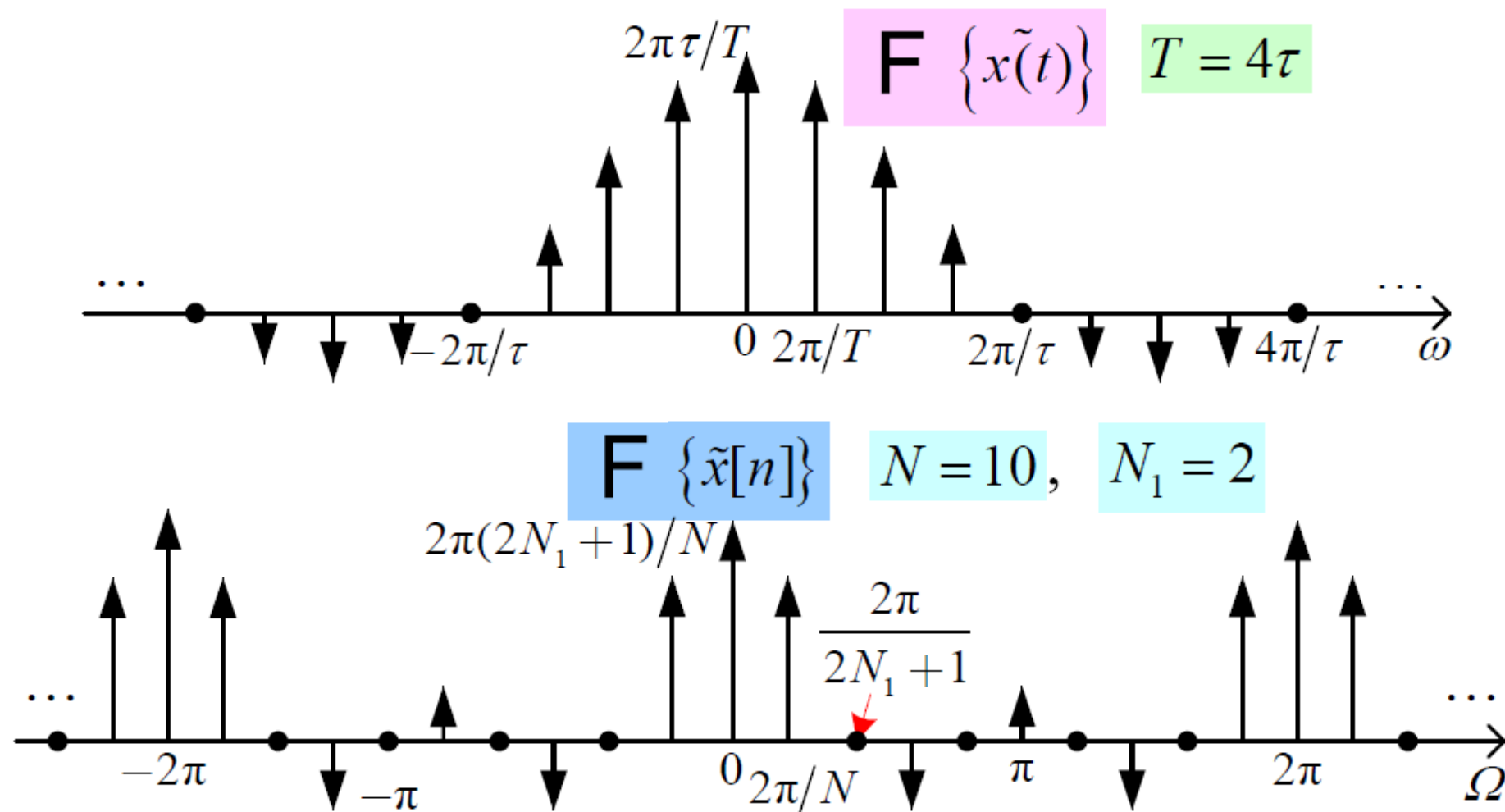
故它们的 **CFT** 和 **DTFT** 分别为：

$$\mathbf{F}\{\tilde{x}(t)\} = 2\pi \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left[\frac{k(2\pi/T)\tau}{2}\right] \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\text{和} \quad \mathbf{F}\{\tilde{x}[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[k(2\pi/N)(2N_1+1)/2]}{\sin[k(2\pi/N)/2]} \delta\left(\Omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$

它们的频谱密度函数图形如下图所示，可以看出它们完全保留了连续傅里叶级数和离散傅里叶级数的全部特性。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)



周期矩形脉冲和周期矩形序列的傅里叶变换图形

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

【例 5.11】 试求周期冲激串 $\tilde{\delta}_T(t)$ 和 $\tilde{\delta}_N[n]$ 的傅里叶变换, 其中

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{和} \quad \tilde{\delta}_N[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[n - lN]$$

解: 先求 $\tilde{\delta}_T(t)$ 和 $\tilde{\delta}_N[n]$ 的傅里叶级数系数, F_k 和 \tilde{F}_k 分别为:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{\delta}_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

和

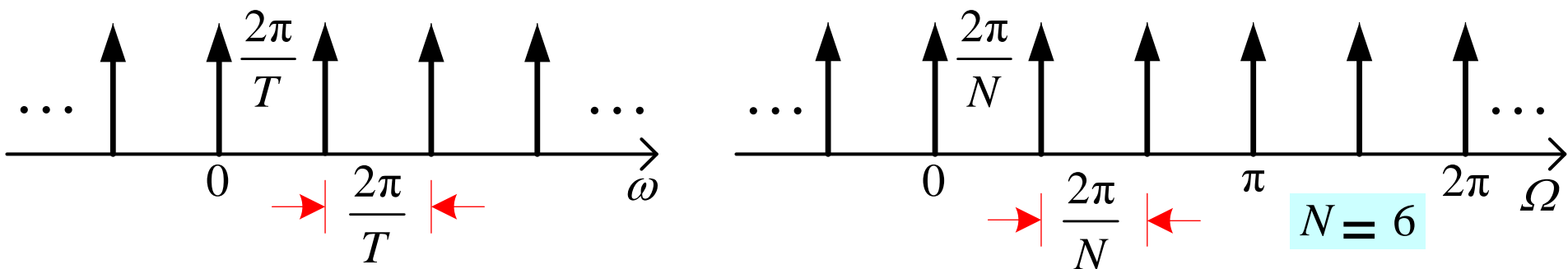
$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \tilde{\delta}_N[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[n - lN] \right) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N}$$

它们的**傅里叶变换**分别为:

$$\mathbf{F}\{\tilde{\delta}_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) \quad \text{和} \quad \mathbf{F}\{\tilde{\delta}_N[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$

这表明: **时域**上周期分别为 T 和 N 的周期冲激串的傅里叶变换, 分别也是**频域**上周期和强度都为 $2\pi/T$ 和 $2\pi/N$ 的周期冲激串, 它们的图形如下图所示。

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)



由此又得到两个很重要的傅里叶变换对，即

$$\tilde{\delta}_T(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \omega_0 \tilde{\delta}_{\omega_0}(\omega) \quad \text{和} \quad \tilde{\delta}_N[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \Omega_0 \tilde{\delta}_{\Omega_0}(\Omega)$$

在第 6 章 6.6 节讨论[抽样定理](#)时将用到这两个傅立叶变换对。

■ 周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换之间的关系

既然同一个周期信号或序列的两种频域表示：

- ★ 用它们的[傅里叶级数系数](#) F_k 或 \tilde{F}_k 表示；
- ★ 用它们的[傅里叶级数变换](#)表示。

那么，这两种频域表示法之间必定有确定的关系。它们之间有**两方面的关系**：

5.5.1 周期信号和序列的傅里叶变换(续)

(1) 若有 $\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k$ 和 $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k$, 则有

$$\mathbf{F} \{ \tilde{x}(t) \} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad \text{和} \quad \mathbf{F} \{ \tilde{x}[n] \} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

(2) 如果 $x_0(t)$ 或 $x_0[n]$ 分别是周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或周期序列 $\tilde{x}[n]$ 在其任意一个周期区间上的信号或序列, 即

$$x_0(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t \in \langle T \rangle \\ 0, & t \notin \langle T \rangle \end{cases} \quad \text{或} \quad x_0[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n \in \langle N \rangle \\ 0, & n \notin \langle N \rangle \end{cases}$$

且有 $x_0(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_0(\omega)$ 或 $x_0[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}_0(\Omega)$

在 5.4.1 节从傅里叶级数推导傅里叶变换的过程中出现过如下的关系, 即 $\tilde{x}(t)$ 或 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数 F_k 或 \tilde{F}_k 分别为

$$F_k = X_0(k\omega_0)/T \quad \text{或} \quad \tilde{F}_k = \tilde{X}_0(k\Omega_0)/N$$

6.6 节的连续时间和离散时间频域抽样定理将进一步证明此关系。基于上述关系, 可以从它们的一种表示转换成另一种表示。

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换

对于3.8节介绍的奇异函数 $u_k(t)$ 及其离散时间对偶 $u_k[n]$ ，除了 $\delta[n]$ 及其有限阶差分外，都不满足模可积或模可和，没有严格意义的傅里叶变换。但是鉴于：

- ▲ $\delta(t)$ 的各阶导数像 $\delta(t)$ 一样，可以利用其等效运算定义或筛分性质，获得它们的广义傅里叶变换；
- ▲ $u(t)$ 和 $u[n]$ 属于功率受限信号，可以借鉴周期信号和序列的傅里叶变换，在频域中引入冲激函数，使得 $u(t)$ 和 $u[n]$ 也有广义傅里叶变换表示。

■ $u_k(t)$ 和 $u_k[n]$ ， $0 < k < \infty$ 的傅里叶变换

$\delta[n]$ 的 k 阶差分 $u_k[n]$ 为

$$u_k[n] = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{k!}{(k-l)!l!} \delta[n-l], \quad 0 < k < \infty$$

它是 $k+1$ 点有界序列，满足模可和，有严格意义的 DTFT，即

$$\mathbf{F} \{u_k[n]\} = \mathbf{F} \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!m!} \delta[n-m] \right\} = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!m!} e^{-j\Omega m}$$

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

利用二项式的展开公式，上式可归纳为

$$\mathbf{F} \{u_k[n]\} = (1 - e^{-j\Omega})^k, \quad 0 < k < \infty$$

对于 $u_k(t)$ ，按照傅里叶正变换公式，利用其筛分性质，则有

$$\mathbf{F} \{u_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{-j\omega t} dt = (-1)^k \left. \frac{d^k (e^{-j\omega t})}{dt^k} \right|_{t=0} = (j\omega)^k, \quad 0 < k < \infty$$

显然， $\delta(t)$ 的各阶导数的 CFT 不是频域上的有界函数，它们不属于满足狄里赫利条件的傅里叶变换。

由此得到两组有用的傅里叶变换对，即

$$\delta^{(k)}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} (j\omega)^k \quad \text{和} \quad \Delta^k \delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\Omega})^k$$

例如：(一阶)微分器和(一阶)差分器的频率响应

微分器和差分器的单位冲激响应 $h(t)$ 和 $h[n]$ 分别是 $\delta'(t)$ 和 $\Delta\delta[n]$ ，它们的频率响应 $H(\omega)$ 或 $\tilde{H}(\Omega)$ 是其 CFT 或 DTFT，即

$$H(\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{和} \quad \tilde{H}(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega} = 2j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

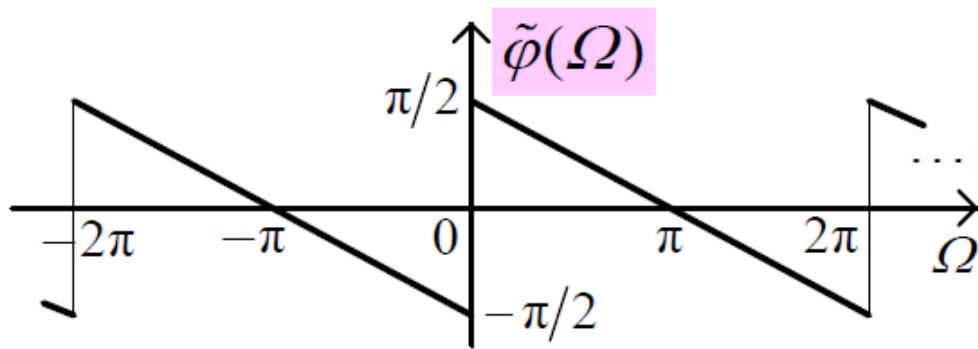
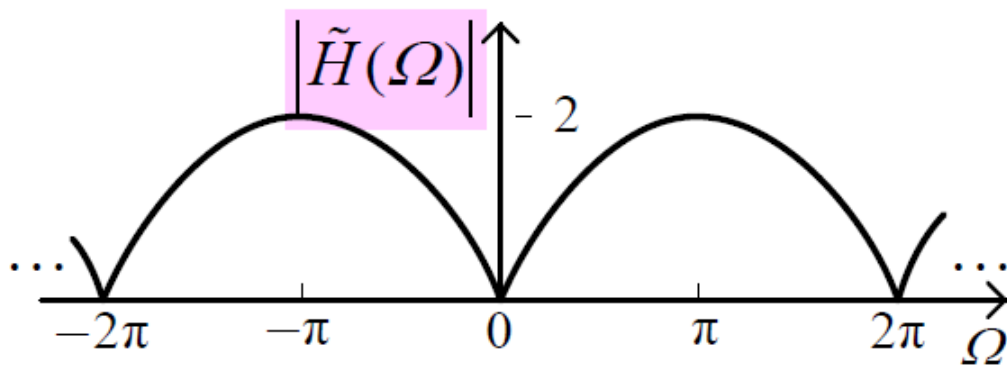
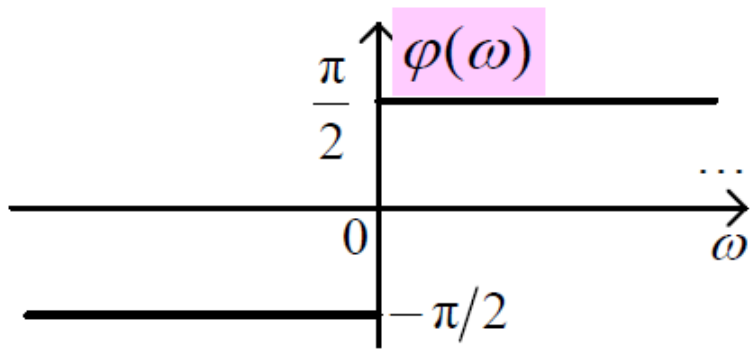
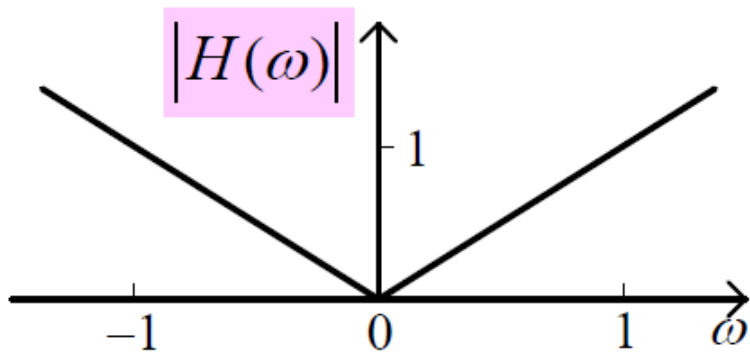
5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

它们的幅频响应和相频响应分别为：

$$|H(\omega)| = |\omega| \quad \text{和} \quad \varphi(\omega) = (\pi/2) \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$|\tilde{H}(\Omega)| = 2 \left| \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right| \quad \text{和} \quad \tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} -(\Omega/2) + (\pi/2), & 0 < \Omega < \pi \\ -(\Omega/2) - (\pi/2), & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$$

微分器和差分器的幅频特性和相频特性分别如下图所示。



5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

讨论: 由上图微分器和差分器的幅频特性和相频特性可以看出:

- ▲ 微分器的幅频响应与频率 ω 成正比, 如果输入信号中包含无穷大的频率分量, 微分器对它的增益也无穷大, 这给它的不稳定性质疑新的解释; 微分器对所有正弦分量都产生 $\pi/2$ 的相位超前。
- ▲ 差分器也是频率 Ω 愈大, 幅度增益也愈大, 且 $|\tilde{H}(0)| = 0$, 在 Ω 较小时, 增益有近似的正比关系, 但 $|\tilde{H}(\pm\pi)| = 2$, 故差分器是稳定的; 相频响应还具有线性相位特性。

■ $u(t)$ 和 $u[n]$ 的傅里叶变换

求 $u(t)$ 和 $u[n]$ 的傅里叶变换有多种数学方法, 这里采用将它们奇偶分解, 并对其奇、偶分量分别求取傅里叶变换的方法, 即

$$u(t) = 0.5 + 0.5 \operatorname{sgn}(t) \quad \text{和} \quad u[n] = 0.5(1 + \delta[n]) + 0.5 \operatorname{sgn}[n]$$

其中, 偶分量分别有广义的 **CFT** 和 **DTFT**, 即

$$\mathbf{F} \{0.5\} = \pi \delta(\omega) \quad \text{和} \quad \mathbf{F} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta[n] \right\} = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) + \frac{1}{2}$$

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

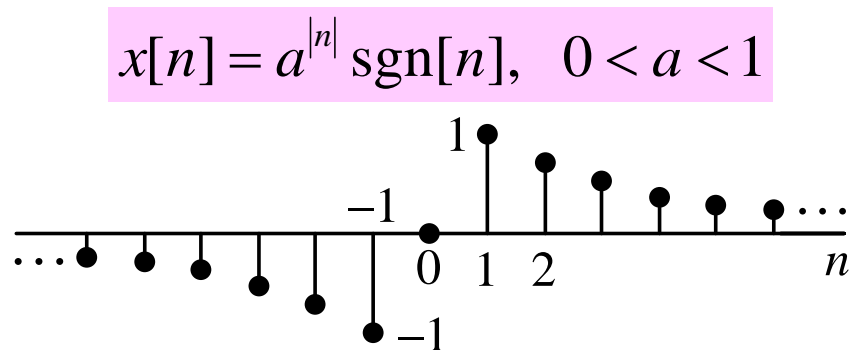
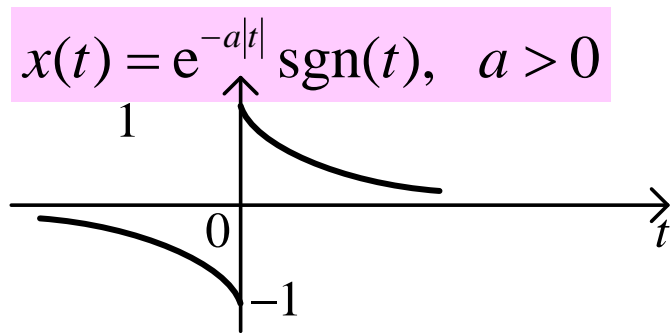
还需求得符号函数和序列的傅里叶变换。鉴于有：

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)] \quad \text{和} \quad \operatorname{sgn}[n] = \lim_{a \rightarrow 1} (a^{|n|} \operatorname{sgn}[n])$$

为此，首先求取 $e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)$ 和 $a^{|n|} \operatorname{sgn}[n]$ 的傅立叶变换。

【例 5.12】 求 $x(t) = e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)$ 和 $x[n] = a^{|n|} \operatorname{sgn}[n]$ 的傅里叶变换。

解： $e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)$, $a > 0$ 和 $a^{|n|} \operatorname{sgn}[n]$, $0 < a < 1$ 的波形见下图。



它们满足模可积或模可和，其严格意义的傅里叶变换分别为：

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

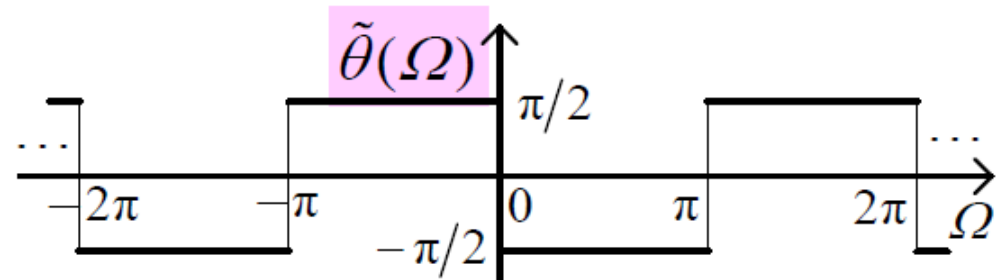
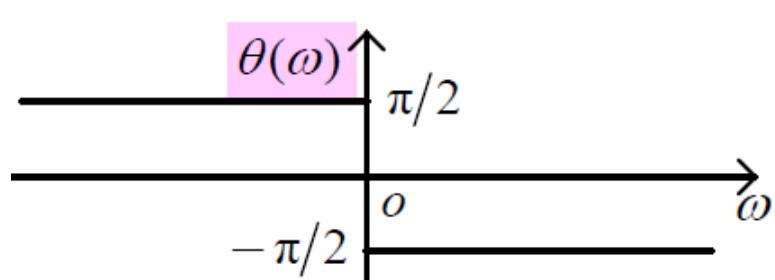
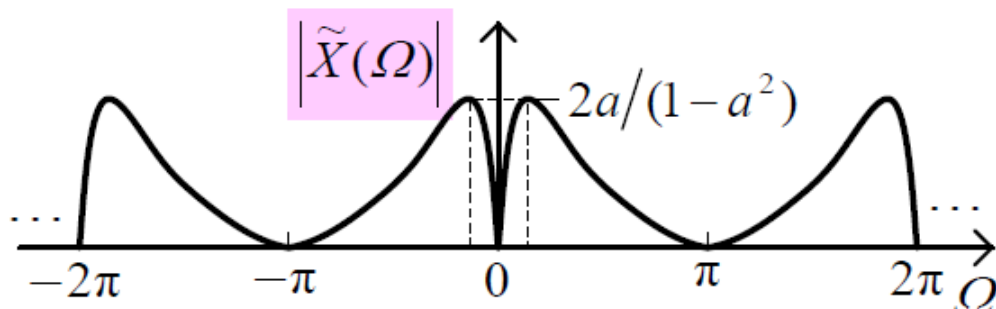
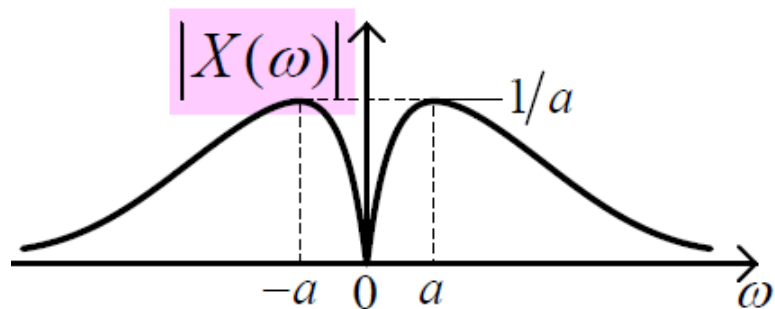
$$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\Omega n} - \sum_{n=-\infty}^0 a^{-n} e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} = \frac{-2ja \sin \Omega}{1 + a^2 - 2a \cos \Omega}$$

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

它们的模函数和幅角函数分别为

$$|X(\omega)| = \frac{2|\omega|}{(a^2 + \omega^2)} \quad \text{和} \quad |\tilde{X}(\Omega)| = \frac{2a|\sin \Omega|}{1 + a^2 - 2a \cos \Omega}$$
$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \tilde{\theta}(\Omega) = \begin{cases} -\pi/2, & 0 < \Omega < \pi \\ \pi/2, & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$$

它们各自的函数图形如下图所示。显然，它们都是频域的有界函数。



5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

符号函数和序列的傅里叶变换可以由 $e^{-a|t|} \text{sgn}(t)$ 和 $a^{|n|} \text{sgn}[n]$ 的傅立叶变换、分别取 $a \rightarrow 0$ 和 $a \rightarrow 1$ 时的极限求得，即

$$\text{F} \quad \{\text{sgn}(t)\} = S_{\text{sgn}}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 2/j\omega, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{F} \quad \{\text{sgn}[n]\} = \tilde{S}_{\text{sgn}}(\Omega) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-j2a \sin \Omega}{1 + a^2 - 2a \cos \Omega} = \begin{cases} -j \cot(\Omega/2), & \Omega \neq 2\pi l \\ 0, & \Omega = 2\pi l \end{cases}$$

它们的模函数和幅角函数分别为

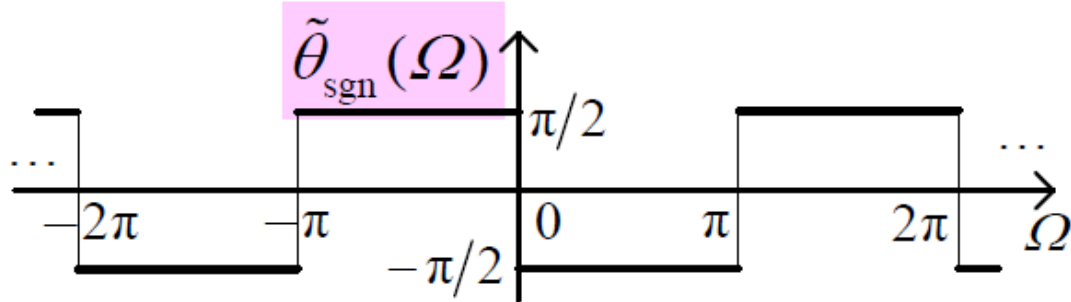
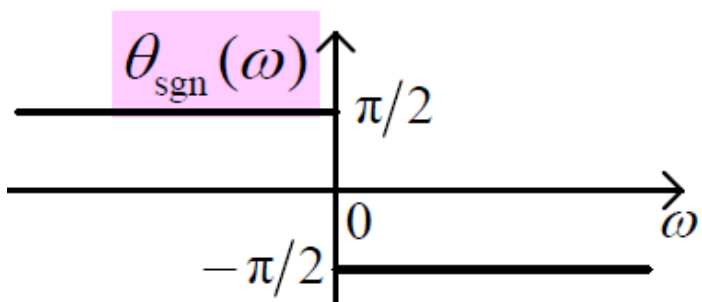
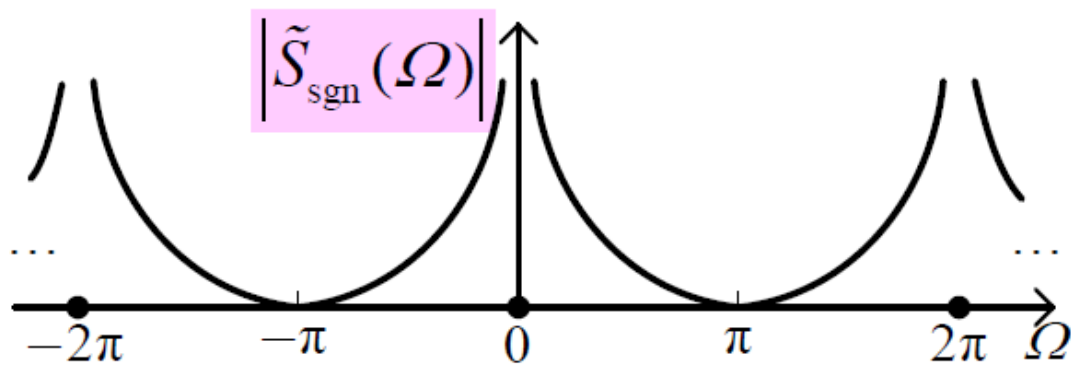
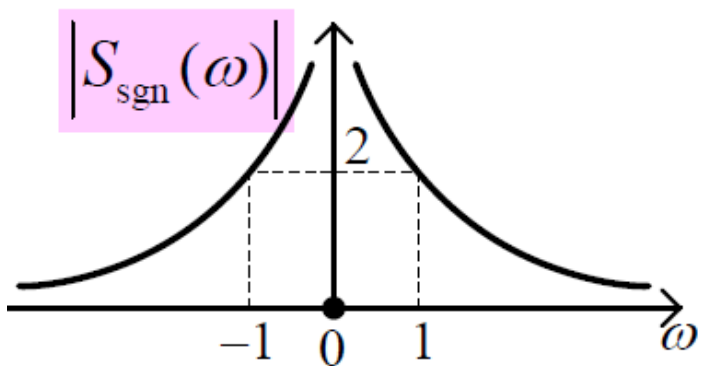
$$|S_{\text{sgn}}(\omega)| = \begin{cases} 2/|\omega|, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \theta_{\text{sgn}}(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$|\tilde{S}_{\text{sgn}}(\Omega)| = \begin{cases} \left| \cot\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right|, & \Omega \neq 2\pi l \\ 0, & \Omega = 2\pi l \end{cases} \quad \text{和} \quad \tilde{\theta}_{\text{sgn}}(\Omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & 0 < \Omega < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$$

它们各自的函数图形如下图所示。由于符号函数和序列不满足模

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

可积或模可和，故它们的傅里叶变换也不再是有界函数，但分别有 $S_{\text{sgn}}(0) = 0$ 和 $\tilde{S}_{\text{sgn}}(2\pi l) = 0$



基于符号函数和序列的傅里叶变换，可以求得 $u(t)$ 和 $u[n]$ 的傅里叶变换 $U(\omega)$ 和 $\tilde{U}(\Omega)$ 分别为

$$U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad \text{和} \quad \tilde{U}(\Omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\cot\frac{\Omega}{2}$$

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

由此又获得两个很重要的傅里叶变换对，即

$$u(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

和

$$u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

其中，利用了三角恒等式和欧拉公式对 $\tilde{U}(\Omega)$ 做了改写。

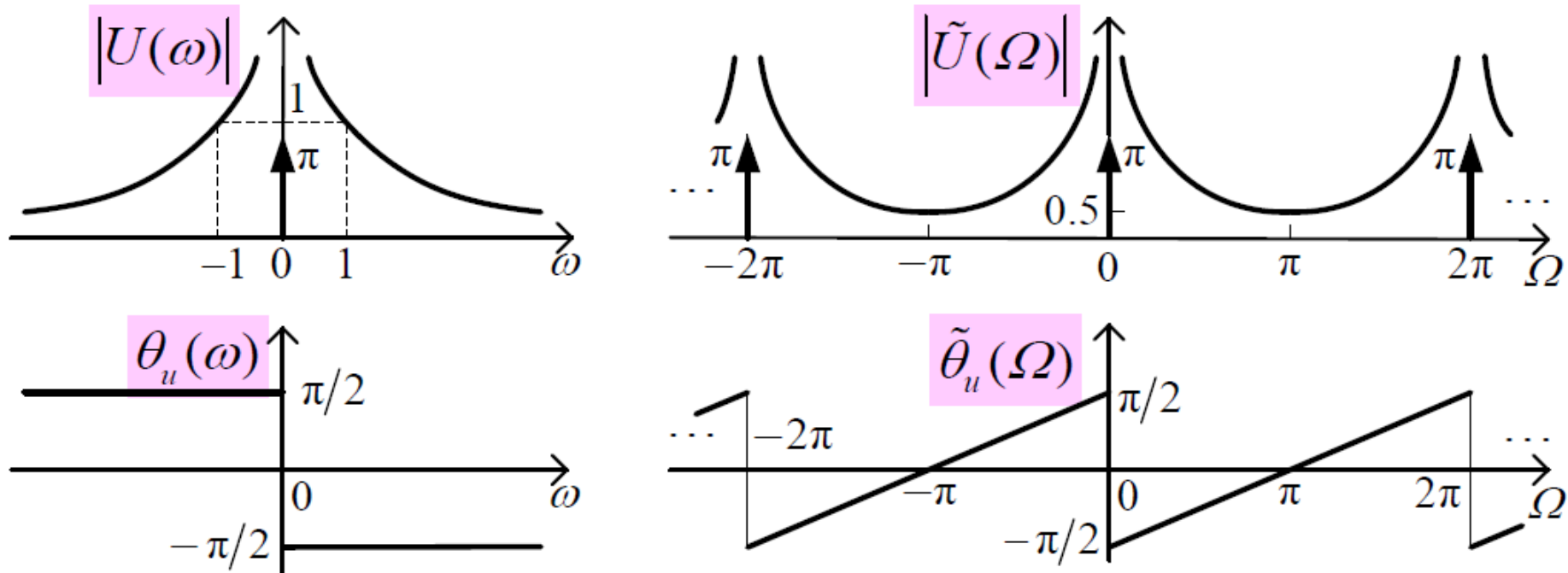
$U(\omega)$ 及 $\tilde{U}(\Omega)$ 的模函数和幅角函数分别为

$$|U(\omega)| = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{|\omega|} \quad \text{及} \quad |\tilde{U}(\Omega)| = \frac{1}{2|\sin(\Omega/2)|} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

$$\text{和 } \theta_u(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases} \quad \text{及} \quad \tilde{\theta}_u(\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{2}, & 0 < \Omega < \pi \\ \frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{2}, & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$$

它们各自的函数图形如下图所示。

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)



图中在 $\omega = 0$ 和 $\Omega = 2\pi l$ 处的强度为 π 的冲激分别代表 $u(t)$ 和 $u[n]$ 中的常数分量的 CFT 和 DTFT。

讨论: $u(t)$ 或 $u[n]$ 既可以是连续时间或离散时间信号, 也可以是积分器或累加器的单位冲激响应, 它们的傅里叶变换 $U(\omega)$ 或 $\tilde{U}(\Omega)$ 既表示 $u(t)$ 或 $u[n]$ 的频谱, 又代表积分器或累加器的频率响应。它们表明:

5.5.2 奇异函数及离散时间对偶的傅里叶变换(续)

- ▲ 阶跃信号或序列的频谱中，不仅包含直流分量，还有非常高的低频分量，并随着 ω 或 Ω 的升高，谱分量快速减小；
- ▲ 积分器或累加器对常数输入具有无穷大的幅度增益，低频的幅度增益也非常大，但随着 ω 或 Ω 的升高，幅度增益快速衰减。它们与微分器或差分器不仅幅频特性几乎相反，相频响应也正好相反。

说明：★ 尽管也有 $u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \{e^{-at} u(t)\}$ 和 $u[n] = \lim_{a \rightarrow 1} \{a^n u[n]\}$ ，但不能用其傅里叶变换取极限来求 $u(t)$ 或 $u[n]$ 的傅里叶变换。

- ★ $\delta(t)$ 或 $\delta[n]$ 的多次积分或多次累加 (如 $tu(t)$ 或 $(n+1)u[n]$) 已不是功率受限信号，但基于 $u(t)$ 或 $u[n]$ 的傅里叶变换，并利用后面 6.5.2 节讲述的傅里叶变换之频域微分性质，也可以求得它们的傅里叶变换。
- ★ 一些时间函数和序列 (如单边增长的指数函数或序列等) 仍没有广义的傅里叶变换，后面介绍的拉普拉斯变换和 Z 变换将弥补傅里叶变换的这点不足。