中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第八周

信号和系统的变换域表示法（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/4/11

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换

在系统分析和信号处理的实际问题中，经常会遇到有限长度的离散时间序列 (简称有限长序列)，例如：

▲ 有限冲激响应 (FIR) 滤波器的分析和设计；

▲ 截取的一段数字信号或随机数字信号的一个样本 (如一段数字语音和一幅数字图像等) 的谱分析或处理，等等。

长度为 N 的有限长序列 $f[n]$ 已有其频域表示，即它的 DTFT $\tilde{F}(\Omega)$，即

$$\tilde{F}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n\in\langle N\rangle} x[n]e^{-j\Omega n}$$

为什么还需要并开发出所谓“离散傅里叶变换 (DFT)” 呢？

▲ 对于任意的有限长序列，要计算其 DTFT 仍有困难，只能有限地近似表示；

▲ 有限长序列的 DTFT 有很大冗余，不是频域的有效表示法；

长度为 N 的任意序列时域上只需要 N 个复数值表示，而它的 DTFT 是周期为 2π 的周期函数，尽管只有 $\langle 2\pi\rangle$ 区间上的函数值是

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

独立的，仍需无穷多个复数值来表示。按照可逆线性变换数学表示的对等原则，长度为 N 的任意序列的频域表示也应该只需要 N 个复数值，**6.6.2** 节的“离散时间频域抽样定理”将证明这一点。

- ▲ 离散傅里叶级数 (**DFS**) 已为有限长序列的频域有效表示提供了依据。

周期为 N 的任意周期序列的**DFS**系数也是周期为 N 的周期数值序列，在频域和时域上都只有 N 个复数值是独立有用的，其余数值仅仅是它们的周期重复。实际上，作为有限长序列有效频域表示的 **DFT** 正是基于 **DFS** 推导出来的。

■ 离散傅里叶变换 (DFT)

假设长度为 M 的有限长序列 $x[n]$，$n=0,\ 1,\ 2\ \cdots\ M-1$，后面简称它为 M 点序列。如果把它以 N ($N \geq M$) 为周期进行周期延拓，生成一个周期序列 $\tilde{x}[n]$，即

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_N[n-lN]$$

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

其中，$x_N[n]$是M点序列$x[n]$之后填充$N-M$个**0**值生成的序列，

即 $$x_N[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\le n\le N-1\\ 0, & n<0,\ \ n\ge N\end{cases}=\begin{cases}x[n], & 0\le n\le M-1\\ 0, & n<0,\ \ n\ge M\end{cases}$$

它与M点序列$x[n]$无实际差别。

通常把周期区间 $0\le n\le N-1$ 称为周期序列$\tilde{x}[n]$的主值区间，对应地称$x_N[n]$为$\tilde{x}[n]$的主值序列。为了方便，还采用如下符号：

$$\tilde{x}[n]=x_N\left(\left([n]\right)\right)_N \qquad \text{和} \qquad x_N[n]=\tilde{x}[n]r_N[n]$$

其中：$\left([n]\right)_N$为取余数运算符号，它表示“对整数n的模N运算”，即取整数n除以N所得的余数；而$r_N[n]$是N点单位矩形序列，即

$$r_N[n]=u[n]-u[n-N]=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & n<0,\ \ n>N\end{cases}$$

利用上述符号及相应的关系，就可以借助$\tilde{x}[n]$的离散傅里叶级数表示法，导出有限长序列$x[n]$的离散傅里叶变换表示法。

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数表示为

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{n\in<N>}\tilde{x}[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \cdots$$

和
$$\tilde{x}[n]=\sum_{k\in<N>}\tilde{F}_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},\qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \cdots$$

注意到：$\tilde{x}[n]$和其 **DFS** 系数 $\tilde{F}_k$ 都是周期为 N 的周期数值序列，在分析和合成公式中，都分别只需要 $\tilde{x}[n]$和 $\tilde{F}_k$ 中一个周期区间的数据。若选择周期区间 $\langle N\rangle$为各自的主值区间，即 $0\le n,\ k\le N-1$，则 $\tilde{x}[n]$和 $\tilde{F}_k$ 可分别由如下两组各 N 个数值序列周期延拓来生成：

$$X_k=\tilde{F}_k r_N[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_N[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},\qquad k=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

和
$$x_N[n]=\tilde{x}[n]r_N[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},\qquad n=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

这两组 N 点数值序列 X_k 和 $x_N[n]$构成了一一对应的变换，这就是

5.6　有限长序列的离散傅里叶变换(续)

导出有限长序列的离散傅里叶变换表示法的基本依据。

目前习惯上采用的**DFT** 正、反变换的符号和公式分别为

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n}\,,\qquad k=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

$$x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n},\quad n=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

其中，**DFT{ * }** 和 **IDFT{ * }** 分别是正、反离散傅里叶变换运算符号，且把 $X[k]$ 称为 N 点序列 $x[n]$ 的 N **点 DFT** 。

通常还引入因子 $W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)}$ 表示 N 点 **DFT** 的正、反变换：

$$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}\,,\qquad k=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

$$x[n]=\mathrm{IDFT}\{X[k]\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}\,,\qquad n=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

- **离散傅里叶变换的矩阵运算**

如果把 N 点序列 $x[n]$ 和其 N 点 **DFT** 系数 $X[k]$ 分别表示为如如下的 N 维列矢量：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x[0] & x[1] & x[2] & \cdots & x[N-1]\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

和
$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X[0] & X[1] & X[2] & \cdots & X[N-1]\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

上述 N 点 **DFT** 正、反变换公式可以改写成如下的矩阵运算公式：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x} \qquad \text{和} \qquad \boldsymbol{x}=\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^{*}\boldsymbol{X}$$

其中，$\boldsymbol{W}_N$ 和 $\boldsymbol{W}_N^{*}$ 称为 **DFT** 正、反变换矩阵。上式可分别展开为

$$\begin{bmatrix}X[0]\\ X[1]\\ X[2]\\ \vdots\\ X[N-1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & W_N^{1\times1} & W_N^{2\times1} & \cdots & W_N^{(N-1)\times1}\\ 1 & W_N^{1\times2} & W_N^{2\times2} & \cdots & W_N^{(N-1)\times2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & W_N^{1\times(N-1)} & W_N^{2\times(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[0]\\ x[1]\\ x[1]\\ \vdots\\ x[N-1]\end{bmatrix}$$

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1\times 1} & W_N^{-2\times 1} & \cdots & W_N^{-(N-1)\times 1} \\ 1 & W_N^{-1\times 2} & W_N^{-2\times 2} & \cdots & W_N^{-(N-1)\times 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-1\times(N-1)} & W_N^{-2\times(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{W}_N^*$ 表示 $\boldsymbol{W}_N$ 的共轭矩阵，因为矩阵元素有 $W_N^{-nk}=(W_N^{nk})^*$ 这样的关系，故它们均是 $N\times N$ 阶对称矩阵，即

$$\boldsymbol{W}_N=[\boldsymbol{W}_N]^{\mathrm{T}} \qquad \text{和} \qquad \boldsymbol{W}_N^*=[\boldsymbol{W}_N^*]^{\mathrm{T}}$$

■ 离散傅里叶变换 (DFT) 与 DTFT 及 DFS 的关系

● N 点序列的 DFT 与其 DTFT 之间的关系

N 点序列 $x[n]$ 有两种频域表示：**DTFT** 表示 $\tilde{X}(\Omega)$ 和 **DFT** 系数 $X[k]$，它们分别为

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

$$\tilde{X}(\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \quad 和 \quad X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},\ k=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

显然，它们之间有如下关系：

$$X[k]=\tilde{X}\left(k(2\pi/N)\right),\quad k=0,\ 1\ \cdots\ N-1$$

这表明：$x[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数 $X[k]$是 $\tilde{X}(\Omega)$ 在其区间 [**0**，2π) 上间隔为 $2\pi/N$ 的 N 个等间隔样本值。

它们之间另一方面的关系要用到后面 **6.6.2** 小节“离散时间频域抽样定理”中的重构公式，即 $\tilde{X}(\Omega)$可以由 $x[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数$X[k]$完全精确地重构出来。这就是为什么确认离散傅里叶变换表示法既是有限长序列的一种最有效、又是它完全充分的频域表示法的基本理由。

- **DFT 与 DFS 之间的关系**

从上面由 **DFS** 导出 **DFT** 的数学过程表明，两者之间有如下两方面的关系：

5.6 有限长序列的离散傅里叶变换(续)

(1) 对长度为 N 的任意序列 $x[n]$(包括后面添加 0 值的 $x_N[n]$)，若以 N 为周期把它周期延拓成周期序列 $\tilde{x}[n]$，即

$$\tilde{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-mN] \quad \text{或} \quad \tilde{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_N[n-mN]$$

则 $x[n]$或 $x_N[n]$的 N 点 **DFT** 系数 $X[k]$与 $\tilde{x}[n]$的 **DFS** 系数 $\tilde{F}_k$ 之间有如下关系：

$$X[k]=N\tilde{F}_k r_N[k] \quad \text{和} \quad \tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X[k-mN]$$

其中，$r_N[n]$是 N 点单位矩形序列。

(2) 对于周期为 N 的任意周期序列 $\tilde{x}[n]$，以及在其主值区间上截取的 N 点序列 $x[n]$，则 $\tilde{x}[n]$ 的 **DFS** 系数 $\tilde{F}_k$ 与$x[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数 $X[k]$ 之间，也有完全一样的关系。

说明：基于离散傅里叶变换与离散傅里叶级数之间上述的关系，尽管两者针对的对象不同，数学表示也稍有差别，仍可以认为，它们彼此之间是各自的另一种表示。

作业

- 5.26 注意：题中“前面5.7题”应为5.8题