



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十二周

傅里叶变换和级数的性质（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/5/9

6.10 希尔伯特变换

希尔伯特 (Hilbert) 变换揭示了傅里叶变换两方面的特性:

- ★ 时域 (或频域) 因果函数和序列之频域 (或时域) 表示的实部与虚部之间的约束关系;
- ★ 傅里叶变换又一种时域和频域表示法的数据量守恒 (对等) 特性, 即时域或频域因果函数和序列与其对应表示的数据量守恒 (对等) 关系。

本节要讲述几种不同形式的希尔伯特变换, 它们都是由相应的傅里叶变换卷积性质导出, 故它们也可看成相应的傅里叶变换卷积性质的又一个特例。

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性

■ 因果时间函数之 CFT 的实部和虚部自满性

如果 $f(t)$ 是复因果时间函数, 即 $f(t) = 0, t < 0$, 且在 $t = 0$ 处没有 $\delta(t)$ 及其导数, 其傅里叶变换 $F(\omega)$ 表示成实、虚部形式,

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

即

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$$

则有

$$F_R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_I(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma \quad \text{和} \quad F_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_R(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$$

这一性质证明如下：因果时间函数可以写成 $f(t) = f(t)u(t)$ ，对它等号两边取 CFT，并利用 CFT 的频域卷积性质和 $u(t)$ 的傅里叶变换，将有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [F_R(\omega) + jF_I(\omega)] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \left[\frac{F_R(\omega)}{2} + \frac{1}{2\pi} F_I(\omega) * \frac{1}{\omega} \right] + j \left[\frac{F_I(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} F_R(\omega) * \frac{1}{\omega} \right] \end{aligned}$$

上式等号两边的实部和虚部应各自相等，由此得以证明，即有

$$F_R(\omega) = \frac{1}{\pi} F_I(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_I(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$$

和

$$F_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} F_R(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_R(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$$

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

该性质表明：因果时间函数 CFT 的实部和虚部相互不独立，其实部由其虚部唯一地确定，反之亦然，即有

$$F(\omega) = F_R(\omega) - j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_R(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma \quad \text{或} \quad F(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_I(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma + j F_I(\omega)$$

故称为实部和虚部“自满性”。数学中把上述实部与虚部的关系称为“连续希尔伯特变换”，并表示为

$$F_R(\omega) = \mathbf{H} \{F_I(\omega)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_I(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$$

和

$$F_I(\omega) = \mathbf{H}^{-1} \{F_R(\omega)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_R(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$$

其中， $\mathbf{H} \{*\}$ 和 $\mathbf{H}^{-1} \{*\}$ 分别表示连续希尔伯特变换和反变换运算符号。这表明：因果时间函数 CFT 的实部和虚部互成连续希尔伯特变换对，即：

$$F_R(\omega) \xleftrightarrow{\mathbf{H}} F_I(\omega)$$

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

■ 因果时间序列之 DTFT 的实部和虚部自满性

如果 $f[n]$ 是复因果序列，即 $f[n] = f[n]u[n]$ ，其傅里叶变换 $\tilde{F}(\Omega)$ 表示成实部和虚部，即 $\tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}_R(\Omega) + j\tilde{F}_I(\Omega)$ ，则有

$$\tilde{F}_R(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_I(\sigma) \cotan \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f_r[0]$$

和

$$\tilde{F}_I(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_R(\sigma) \cotan \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f_i[0]$$

其中， $f_r[0] = \text{Re}\{f[0]\}$ ， $f_i[0] = \text{Im}\{f[0]\}$ 。

现证明如下：首先，令：

$$f[n] = f_r[n] + jf_i[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}_R(\Omega) + j\tilde{F}_I(\Omega)$$

其中， $f_r[n]$ 和 $f_i[n]$ 都是实序列，且分别有

$$f_r[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}_R(\Omega) = \tilde{R}_r(\Omega) + j\tilde{I}_r(\Omega)$$

$$f_i[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}_I(\Omega) = \tilde{R}_i(\Omega) + j\tilde{I}_i(\Omega)$$

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

联立这三个关系得到

$$\tilde{F}(\Omega) = [\tilde{R}_r(\Omega) - \tilde{I}_i(\Omega)] + j[\tilde{R}_i(\Omega) + \tilde{I}_r(\Omega)]$$

然后，对复因果序列 $f[n] = f[n]u[n]$ 等号两边取 **DTFT**，并利用其频域周期卷积性质和借助 $u[n]$ 的 **DTFT**，则有

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ [\tilde{R}_r(\Omega) - \tilde{I}_i(\Omega)] + j[\tilde{R}_i(\Omega) + \tilde{I}_r(\Omega)] \right\} \\ &\quad \textcircled{*} \left[\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \text{ctan} \frac{\Omega}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{F}_R(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{R}_r(\Omega) d\Omega + \frac{1}{2\pi} \tilde{F}_I(\Omega) \textcircled{*} \text{ctan} \frac{\Omega}{2} \right] \\ &\quad + \frac{j}{2} \left[\tilde{F}_I(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{I}_i(\Omega) d\Omega - \frac{1}{2\pi} \tilde{F}_R(\Omega) \textcircled{*} \text{ctan} \frac{\Omega}{2} \right]\end{aligned}$$

基于得到的上述 $\tilde{F}(\Omega)$ 的两个等式，它们的实部与虚部应分别相等，由此可以得到

$$\tilde{F}_R(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{F}_I(\Omega) \textcircled{*} \text{ctan} \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{R}_r(\Omega) d\Omega - \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{I}_i(\Omega) d\Omega \right]$$

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

和
$$\tilde{F}_I(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \tilde{F}_R(\Omega) \textcircled{*} \text{ctan} \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{I}_r(\Omega) d\Omega + \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{R}_i(\Omega) d\Omega \right]$$

其中, $\tilde{I}_r(\Omega)$ 、 $\tilde{I}_i(\Omega)$ 和 $\tilde{R}_r(\Omega)$ 、 $\tilde{R}_i(\Omega)$ 分别是实序列 $f_i[n]$ 和 $f_r[n]$ 的 **DTFT** 之实部和虚部, 根据实序列 **DTFT** 的频域对称性质, 它们分别是周期为 2π 的实奇函数和实偶函数, 故分别有

$$\int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{I}_r(\Omega) d\Omega = 0 \quad \text{及} \quad \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{I}_i(\Omega) d\Omega = 0$$

和
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{R}_r(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_R(\Omega) d\Omega = f_r[0]$$

及
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{R}_i(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_I(\Omega) d\Omega = f_i[0]$$

将它们代入上面导出的 $\tilde{F}_R(\Omega)$ 和 $\tilde{F}_I(\Omega)$ 等式, 就可以分别得到:

$$\tilde{F}_R(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_I(\sigma) \text{ctan} \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f_r[0]$$

和
$$\tilde{F}_I(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_R(\sigma) \text{ctan} \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f_i[0]$$

证毕

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

上述结果表明：因果序列 $f[n]$ 的 DTFT 之实部和虚部之间满足所谓“连续周期希尔伯特变换”，它们彼此间也互不独立，除了一个 $f[0]$ 值外，一个可以由另一个唯一确定。换言之，因果序列 DTFT 之实部和虚部都具有自满性，即

$$\tilde{F}_R(\Omega) = \mathbf{H} \circledast \left\{ \tilde{F}_I(\Omega) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_I(\sigma) \operatorname{ctan} \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f_r[0]$$

和
$$\tilde{F}_I(\Omega) = \mathbf{H} \circledast^{-1} \left\{ \tilde{F}_R(\Omega) \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_R(\sigma) \operatorname{ctan} \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f_i[0]$$

其中， $\mathbf{H} \circledast \{*\}$ 和 $\mathbf{H} \circledast^{-1} \{*\}$ 是连续周期希尔伯特正、反变换符号。

如果 $f[n]$ 是实因果序列，则其 DTFT 实部和虚部之自满性可以归结为

$$\tilde{F}_R(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_I(\sigma) \operatorname{ctan} \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma + f[0]$$

和
$$\tilde{F}_I(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}_R(\sigma) \operatorname{ctan} \frac{\Omega - \sigma}{2} d\sigma$$

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

讨论: ● 它揭示因果 LTI 系统的一个重要特性, 即其频率响应 $H(\omega)$ 或 $\tilde{H}(\Omega)$ 之实部与虚部存在着约束关系, 彼此构成连续希尔伯特变换或连续周期希尔伯特变换。由此可以想到, 因果 LTI 系统的幅频响应与相频响应之间也应存在某种约束关系。这种关系可以陈述为: 任何因果最小相移系统 (见后面 9.7.2 节) 的对数幅频响应与其相频响应构成连续或连续周期希尔伯特变换, 即

$$\ln |H(\omega)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma \quad \text{和} \quad \varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |H(\sigma)|}{\omega - \sigma} d\sigma$$

$$\text{或} \quad \ln |\tilde{H}(\Omega)| = \tilde{\varphi}(\Omega) \circledast \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctan} \frac{\Omega}{2} + \hat{h}[0]$$

$$\text{和} \quad \tilde{\varphi}(\Omega) = -\ln |\tilde{H}(\Omega)| \circledast \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctan} \frac{\Omega}{2}$$

其中: $|H(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 或 $|\tilde{H}(\Omega)|$ 和 $\tilde{\varphi}(\Omega)$ 分别是因果最小相移系统的幅频响应和相频响应; $\hat{h}[0]$ 是 $\ln \tilde{H}(\Omega)$ 的傅

6.10.1 时域因果性 \Leftrightarrow 频域实部和虚部自满性(续)

里叶反变换 $\hat{h}[n]$ 在 $n=0$ 时刻的值。上述的 $\ln|H(\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$ 的希尔伯特变换关系称为“波特关系式”。

因果 LTI 系统的这一特性有重要的实际意义，它提醒人们：在系统或滤波器设计和实现中，当确定所希望的幅频特性后，不能再任意选择相频特性，或者相反，否则，难以确保它成为一个可实现的因果 LTI 系统。形象地说，因果 LTI 系统频率响应的实部与虚部或幅频响应与相频响应之间有天定姻缘，切忌“乱点鸳鸯谱”或任意“拉郎配”。

- 几乎所有“信号与系统”教材或其他专著中，只提及或讨论实因果时间函数或序列傅里叶变换之实部和虚部满足希尔伯特变换，本书基于复因果时间函数或序列来证明和讨论希尔伯特变换，目的是要强调两点：
 - ★ 它所体现的时频、域表示法的又一种数据量“守恒或对等”特性。

6.10.1 时域因果性 U 频域实部和虚部自满性(续)

因果性与奇偶对称性或共轭对称性都可以看成时域的分布特性。正如实偶或实奇函数和序列代表一种时域双重对称分布一样，实的因果函数或序列体现又一种时域双重对称分布，也应有频域的双重对称分布特性与它相对应，即实因果函数或序列的 CFT 或 DTFT 之实部和虚部，不仅分别是实偶和实奇函数，而且只要其中一个就能表示整个 CFT 或 DTFT (由于离散时间序列的特殊性，还需要 $n=0$ 的序列值)。

- ★ 与此相呼应，下小节介绍的解析信号之希尔伯特变换，即如果时域上的复时间函数或序列之实部和虚部满足希尔伯特变换，则其 CFT 或 DTFT 在负频域 (或正频域) 上等于 0，那时所涉及的傅里叶变换是频域上的复值函数，并不限于实函数。

6.11 傅里叶变换和级数的对偶性质

本节要讲述由各种傅里叶变换和傅里叶级数表示法本身，或者相互之间固有的一套对偶特性，包括：

- ★ CFT 本身的对偶性质
- ★ DFS 本身的对偶性质
- ★ DFT 本身的对偶性质
- ★ DTFT 与 CFS 之间的对偶性质

讨论和弄清这些对偶性质有两方面的好处：

- 从另一个视角来审视各种傅里叶变换和傅里叶级数本身或相互之间的关系，以及它们揭示的时域与频域之间的关系；
- 可以起到对本章介绍的傅里叶变换和级数的各种性质，以及常用的傅里叶变换对和傅里叶级数对进行总结和复习之作用，并把它们融会贯通。

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质

在连续傅里叶变换 $f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega)$ 中，如下两点导致了它的对偶性质：

- (1) $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 在数学上对等，它们同属实数域的连续复值函数，且都可以包括奇异函数。
- (2) 从如下 CFT 正、反变换公式可以看到，除了一常数因子 $1/2\pi$ 和指数上的负号外，两者是完全相同的积分变换。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{和} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

CFT 的对偶性质可用数学语言描述如下：

若有
$$f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} g(\omega)$$

则有
$$g(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi f(-\omega) \quad \text{或} \quad \frac{1}{2\pi} g(-t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} f(\omega)$$

其中， $f(*)$ 和 $g(*)$ 代表不同的连续函数，且可包含奇异函数。

CFT 的对偶性质证明如下：

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

在 CFT 反变换公式做 $t = -t$ 的变量代换, 得到

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega(-t)} d\omega$$

再将上式中的实数变量 t 和 ω 互换就可得到

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

证毕

CFT 的对偶性质造就了 CFT 三方面的对偶特性:

- ★ CFT 变换对的成双成对性
- ★ CFT 性质之间的对偶特性
- ★ 时域 t 和频域 ω 中的对偶概念与方法

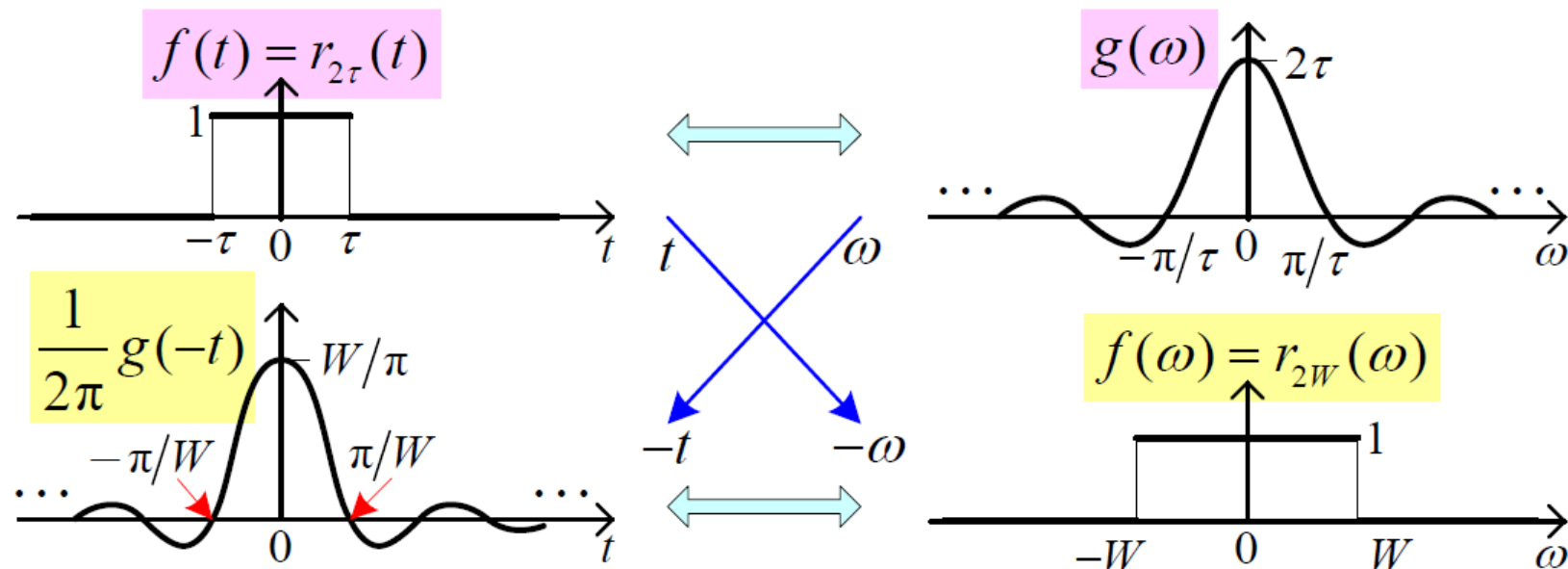
■ CFT 变换对的成双成对性

CFT 的对偶性质表明: 若有一个 CFT 变换对, 必定有是其“双胞胎”的另一个 CFT 变换对。前面已出现过几对“双胞胎”变换对, 例如: $\delta(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 1$ 与 $1 \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega)$

又如 $\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{\text{CFT}} e^{-j\omega t_0}$ 与 $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

再如，若有 $r_{2\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$



则必有 $\frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) \xleftrightarrow{\text{CFT}} r_{2W}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$

等，其他常用的 CFT “双胞胎” 变换对见书上表 6.2。

基于已知的 CFT 变换对，利用对偶性质，可以求得它的“双胞胎”变换对，请看下面的例子：

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

【例 6.14】 试求连续时间信号 $x(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ 的频谱 $X(\omega)$ 。

解： 在例 6.12 中已求得双边指数衰减信号的 CFT 变换对：

$$e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad \xleftrightarrow{\text{CFT}} \quad \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

令 $a=1$ ，则为 $\frac{1}{2}e^{-|t|} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{\omega^2 + 1}$ ，由此可直接运用 CFT 的对偶性质，得到其“双胞胎”变换对，即 $\frac{1}{t^2 + 1} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \pi e^{-|\omega|}$ 。

故 $x(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ 的频谱为 $X(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ 。

【例 6.15】 上一节求得的连续时间 90° 移相器的频率响应为 $H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$ ，试求其单位冲激响应 $h(t)$ 。

解： 在例 5.12 中已求得的符号函数 $\operatorname{sgn}(t)$ 的 CFT 变换对：

$$\operatorname{sgn}(t) \quad \xleftrightarrow{\text{CFT}} \quad S_{\operatorname{sgn}}(\omega) = \begin{cases} 2/j\omega, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

直接用 CFT 的对偶性质，便可求得 $H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega) = j\text{sgn}(-\omega)$ 的傅里叶反变换 $h(t)$ ，即

$$h(t) = j \frac{1}{2\pi} S_{\text{sgn}}(t) = \begin{cases} 1/\pi t, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

■ CFT 性质的对偶特性

CFT 的对偶性质直接导致了 CFT 性质“双胞胎”特性，本章正刻意按照这种“双胞胎”特性、成双成对性讲述 CFT 的性质。这里重新列出 CFT 主要的“双胞胎”性质，目的是弄清互成对偶的 CFT 性质之间仍有点差别之规律。

★ 时域卷积性质和频域卷积性质

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega)H(\omega) \quad \text{和} \quad x(t)p(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

★ 时移性质和频移性质

$$f(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad \text{和} \quad f(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega - \omega_0)$$

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

★ 时域微分性质和频域微分性质

$$\frac{d}{dt}f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} (j\omega)F(\omega) \quad \text{和} \quad (-jt)f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{d}{d\omega}F(\omega)$$

★ 时域积分性质和频域积分性质

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

和

$$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \int_{-\infty}^{\omega} F(\sigma)d\sigma$$

★ 时域抽样和频域抽样

$$x_p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

和

$$x_s(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x\left(t - l\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_s(\omega) = X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

★ 尺度比例变换性质

$$\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(a\omega) \quad \text{和} \quad f(at) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

★ 时域因果复值函数的 CFT 之实部与虚部满足连续希尔伯特变换和实信号的复解析信号表示

若 $f(t) = f(t)u(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$

则有 $F_R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_I(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$ 与 $F_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_R(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma$

和 若 $x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau$ 与 $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$

则有 $v(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} V(\omega) = 2X(\omega)u(\omega)$

此外, 有些 CFT 性质的数学描述本身就有对偶含义, 例如:

★ CFT 的对称性质: 如果 $f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega)$, 则有
 $f(-t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(-\omega)$, $f^*(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F^*(-\omega)$ 和 $f^*(-t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F^*(\omega)$

还有, 若 $f(t)$ 是实偶函数, 则其 CFT 也是实偶函数。

★ 帕什瓦尔公式 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

还有线性性质等，它们本身对时域和频域是对偶的。

进一步，基于 CFT 性质的“双胞胎”特性，还可以联想到没有讲述的 CFT 性质。例如，在讲述 CFT 的对称性质时，讨论过它所展现的一些时、频域对偶分布特性：

★ 时域实函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 之实部函数和模函数都是频域上的实偶函数，而其虚部函数和幅角函数则是实奇函数。与此对偶，也有：如果 $F(\omega)$ 是实函数，其傅里叶反变换 $f(t)$ 将是时域上的复函数，但其实部和模是实偶函数，而虚部和幅角则是实奇函数。

★ CFT 的奇偶虚实性：

时域实函数的奇、偶分解对应着频域复函数之虚、实分解。与此对偶，也有：频域实函数之奇、偶分解则对应着时域复函数的虚、实分解。

■ 时域 t 和频域 ω 中的对偶概念和方法

CFT 性质的对偶特性连续时域与其频域中一系列对偶概念、

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

对偶物理量和对偶方法，例如：

- ★ 连续时间函数之时域宽度和其傅里叶变换之频域宽度互成对偶的概念，6.8.2节介绍的等效时宽 τ_e 和等效带宽 B_e 是对偶的物理量。
- ★ 时域中信号的瞬时频率与频域中系统的群延时是一对对偶概念及物理量。

如果复信号 $x(t)$ 和连续时间LTI系统的频率响应 $H(\omega)$ 都表示成模与幅角形式，即 $x(t) = |x(t)|e^{j\phi(t)}$ 和 $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ ，其中： $|x(t)|$ 和 $\phi(t)$ 称为信号的瞬时幅度和相位， $|H(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 称为系统的幅频和相频响应。则信号的“瞬时频率” $f(t)$ (单位为Hz)与系统造成的信号“群延时” $\tau(\omega)$ 或 $\tau(f)$ (单位为秒)分别定义

$$\text{为 } f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) \quad \text{与} \quad \tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \varphi(\omega) \quad \text{或} \quad \tau(f) = -\frac{d}{df} \varphi(f)$$

两者成为对偶的概念和物理量。

6.11.1 连续傅里叶变换的对偶性质(续)

此外，CFT 的“双胞胎”变换对及 CFT 性质的对偶特性还造就了连续时域 t 与连续频域 ω 中的众多对偶的概念和方法，它们在后面第 7 章和第 11 章中将有较详细的讨论。例如：

- ★ 信号的时域截取与频域滤波 (或时域加窗与频域加窗)，包括矩形加窗产生的“吉布斯现象”，以及时域与频域中许多对偶的窗函数，如升余弦脉冲波形与升余弦滤波特性等；
- ★ 频分多路复用与时分多路复用；
- ★ 连续时间时域抽样与频域抽样，

6.11.2 离散傅里叶级数 (DFS) 的对偶性质

DFS 的分析公式和合成公式重写如下：

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} \quad \text{和} \quad \tilde{x}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

和 CFT 一样，(1) $\tilde{x}[n]$ 与 $\tilde{F}_k = \tilde{F}[k]$ 分别都是离散时域 n 与离散频域 k 中相同周期 N 的周期复数序列；(2) 除了常数因子 $1/N$

6.11.2 离散傅里叶级数的对偶性质(续)

和一负号外，分析和合成公式是完全相同的数学运算，它们导致了DFS的对偶性质。DFS的对偶性质陈述如下：

如果 $\tilde{x}[n]$ (或 \tilde{x}_n) 与 \tilde{g}_k (或 $\tilde{g}[k]$) 是构成 **DFS 对** 的、周期同为 N 的周期序列，则有

$$\tilde{g}[n] \text{ (或 } \tilde{g}_n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{1}{N} \tilde{x}[-k] \quad \text{或} \quad N\tilde{g}[-n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{x}_k \text{ (或 } \tilde{x}[k])$$

同样地，DFS的对偶性质也揭示如下两方面的对偶特性：

■ DFS 级数对的成双成对性

DFS 的对偶性质直接导致 DFS 对的“双胞胎”特性，例如，例 5.3 求得的周期矩形序列及其 DFS 系数序列

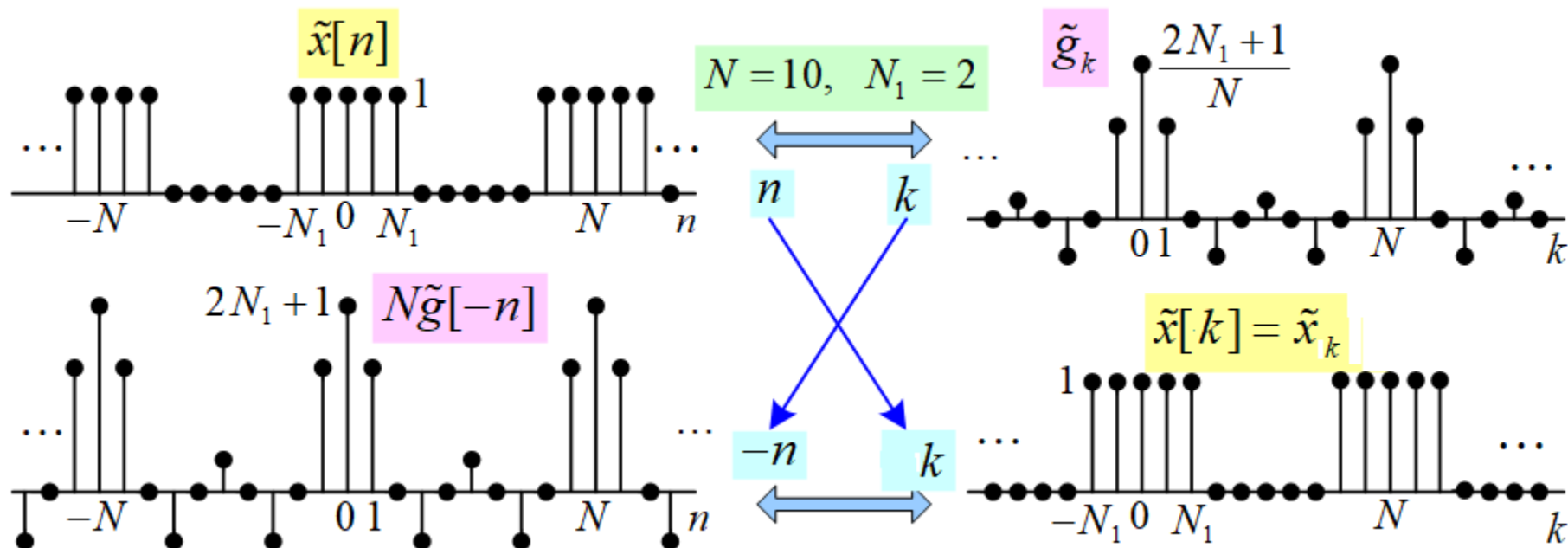
$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{2N_1+1}[n-lN], \quad N > 2N_1 + 1 \quad \xleftrightarrow{\text{DFS}} \quad \frac{1}{N} \frac{\sin[k(2N_1+1)(2\pi/N)/2]}{\sin[k(2\pi/N)/2]}$$

它的对偶 DFS 对为

$$\frac{\sin[(2N_1+1)(2\pi/N)n/2]}{\sin[(2\pi/N)n/2]} \quad \xleftrightarrow{\text{DFS}} \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{2N_1+1}[k-lN], \quad N > 2N_1 + 1$$

6.11.2 离散傅里叶级数的对偶性质(续)

这对双胞胎的图形序列如下：



书中表 6.4 还给出了几对对偶的 DFS 对。

■ DFS 性质的对偶特性

DFS 的对偶性质也导致 DFS 性质的“双胞胎”特性，例如，
★ 时域周期卷积性质和频域周期卷积性质

$$\tilde{x}[n] \circledast \tilde{g}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} N \tilde{F}_k \tilde{G}_k \quad \text{和} \quad \tilde{x}[n] \tilde{g}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k \circledast \tilde{G}_k$$

6.11.2 离散傅里叶级数的对偶性质(续)

★ 时移性质和频移性质

$$\tilde{x}[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0} \quad \text{和} \quad e^{jk_0 \frac{2\pi}{N} n} \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_{k - k_0}$$

★ 时域差分性质和频域差分性质

$$\Delta \tilde{x}[n] = \tilde{x}[n] - \tilde{x}[n - 1] \xleftrightarrow{\text{DFS}} (1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}) \tilde{F}_k$$

和

$$(1 - e^{j \frac{2\pi}{N} n}) \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \Delta \tilde{F}_k = \tilde{F}_k - \tilde{F}_{k-1}$$

★ 时域累加性质和频域累加性质

$$\sum_{l=-\infty}^n \tilde{x}[l], \quad \sum_{n \in \langle N \rangle} \tilde{x}[n] = 0 \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{\tilde{F}_k}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}}$$

和

$$\frac{\tilde{x}[n]}{1 - e^{j(2\pi/N)n}} \xleftrightarrow{\text{DFS}} \sum_{l=-\infty}^k \tilde{F}_l, \quad \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k = 0$$

★ 时、频域实周期序列对应的频、时域共轭对称分布性质

假设时域实周期序列 $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k = |\tilde{F}_k| e^{j\tilde{\theta}_k}$, 则有

$$|\tilde{F}_k| = |\tilde{F}_{-k}| \quad \text{及} \quad \tilde{\theta}_k = -\tilde{\theta}_{-k}$$

6.11.2 离散傅里叶级数的对偶性质(续)

和 假设 $\tilde{x}[n] = |\tilde{x}[n]|e^{j\tilde{\phi}[n]} \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k$ ，且 \tilde{F}_k 为实周期系数序列，则有 $|\tilde{x}[n]| = |\tilde{x}[-n]|$ 及 $\tilde{\phi}[n] = -\tilde{\phi}[-n]$

★ 时域和频域**实周期序列**各自的奇偶虚实性

时域**实**周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的奇偶分解对应着其 **DFS** 复系数的虚实分解；**与此对偶**，频域周期 **DFS 实**系数的奇偶分解也对应着时域复周期序列的虚实分解。

★ 时域和频域的内插零性质

若有 $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k$ (周期 N ，频域间隔 $2\pi/N$)

则有 $x_{(M)}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{\tilde{F}_k}{M}$ (周期 MN ，频域间隔 $\frac{2\pi}{MN}$)

与此对偶，由频域 \tilde{F}_k 的内插零序列 $\tilde{G}_k = \begin{cases} \tilde{F}_{k/M}, & k = lM \\ 0, & k \neq lM \end{cases}$ (周

期 MN ，频域间隔 $2\pi/MN$) 合成之周期序列仍是 $\tilde{x}[n]$ ，换言之， $\tilde{x}[n]$ 以周期 MN 计算的 **DFS** 系数就是 \tilde{F}_k 的 M 倍内插零系数序列。

6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质

在 DTFT 的正、反变换或 CFS 的分析、合成公式中，**看不到**它们各自**本身具有对偶性质**的两点成因。但若把两者联系起来，却会发现**导致 DTFT 与 CFS 之间具有对偶性质**的两点缘由。

现把它们正、反变换公式和分析、合成公式改写如下：

6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega \frac{2\pi}{2\pi} n} & \xleftrightarrow{\text{DTFT}} & f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}(\Omega) e^{j\Omega \frac{2\pi}{2\pi} n} d\Omega \\ & \text{对偶} & \\ F_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt & \xleftrightarrow{\text{CFS}} & \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \end{array}$$

可以看到:

(1) $f[n]$ 和 F_k 分别是 DTFT 和 CFS 中离散时域 n 和离散频域 k 上的非周期复数序列, 而 $\tilde{F}(\Omega)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 是各自连续频域 Ω 和连续时域 t 上周期分别为 2π 和 T 的周期函数, 在数学上这四者(两对)分别是完全相同的東西;

(2) DTFT 的正、反变换分别与 CFS 合成、分析公式是相同的数学运算, 为此有意在 DTFT 公式的指数中加入因子 $2\pi/2\pi$ 。

6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

这导致了 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质，它陈述如下：

如果离散变量的非周期序列 $f[n]$ 与以 2π 为周期的连续函数 $\tilde{g}(\Omega)$ 构成一个 **DTFT 变换对**，即 $f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{g}(\Omega)$ ，则有

$$\tilde{g}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} f_{-k} \quad \text{或} \quad \tilde{g}(2\pi t/T) \xleftrightarrow{\text{CFS}} f_{-k}$$

即周期 2π 的周期函数 $\tilde{g}(t)$ 或周期 T 的周期信号 $\tilde{g}(2\pi t/T)$ 的 CFS 系数就是 $f_{-k} = f[-k]$ ，只是 $\tilde{g}(2\pi t/T)$ 的谱线间隔为 $\omega_0 = 2\pi/T$ ，而 $\tilde{g}(t)$ 的谱线间隔是 $\omega_0 = 1$ 。

换言之，DTFT 变换对也可看成：离散时间频域 Ω 上周期为 2π 的周期函数 $\tilde{F}(\Omega)$ 展开的 CFS 系数就是 $f_{-k} = f[-k]$ 。

同样地，上述的对偶性质也揭示如下两方面的对偶特性：

■ DTFT 变换对与 CFS 级数对的对偶特性

若有一个 DTFT 变换对，必有一个 CFS 对是其“双胞胎”。

例如，例 5.2 求得的周期矩形脉冲及其 CFS 系数与例 5.7 求得的

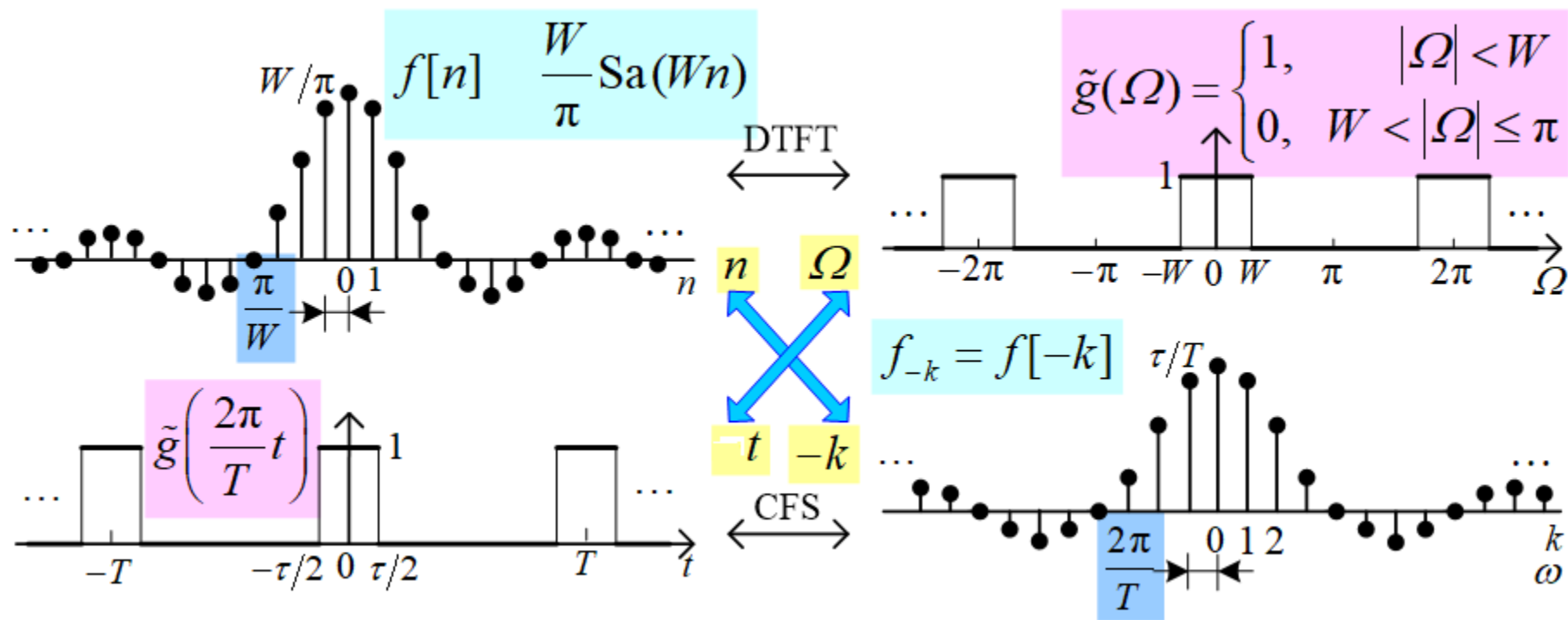
6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

频域周期矩形函数及其反 DTFT 就构成这样的“双胞胎”：

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{\tau}(t-lT), \text{ 其中 } r_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{CFS}} \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left[\frac{k(2\pi/T)\tau}{2}\right]$$

和 $\frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wn) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{2W}(\Omega - 2\pi l), \text{ 其中 } r_{2W}(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$

这对“双胞胎”的图形如下：



6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

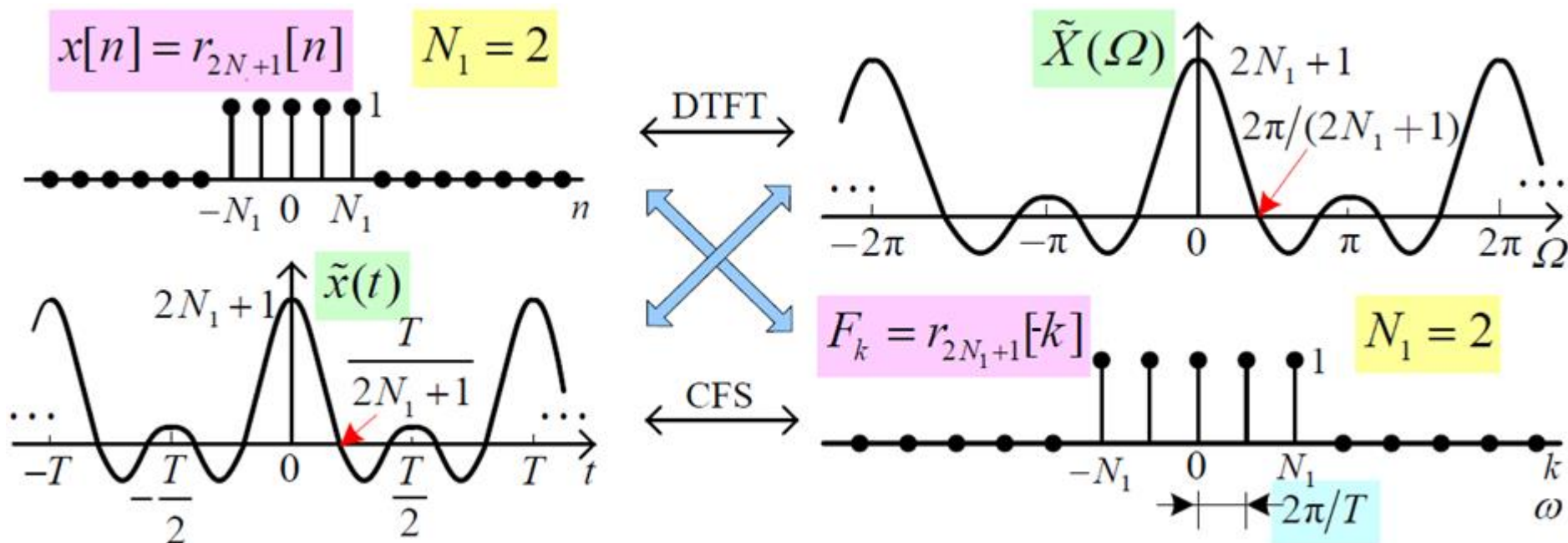
又如：例 5.6 求得的矩形窗序列 $r_{2N_1+1}[n]$ 的 DTFT 变换对，即

$$x[n] = r_{2N_1+1}[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(\Omega) = \frac{\sin[(2N_1+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)}$$

它在 CFS 中的“双胞胎”级数对为

$$\tilde{x}(t) = \frac{\sin[(2N_1+1)\pi t/T]}{\sin(\pi t/T)} \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k = r_{2N_1+1}[-k] = \begin{cases} 1, & |k| \leq N_1 \\ 0, & |k| > N_1 \end{cases}$$

这对“双胞胎”的图形如下：



6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

表 6.8 列出了DTFT 与 CFS 之间其他双胞胎变换(或级数)对。

■ DTFT 与 CFS 性质的对偶特性

DTFT 与 CFS 之间的对偶性质导致了它们性质的“双胞胎”特性，即 DTFT 的每个性质必定存在一个 CFS 性质与之对偶，反之亦然。例如：

★ DTFT 与 CFS 的线性性质

★ DTFT 时域卷积性质与 CFS 频域卷积性质

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &\xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(\Omega) \tilde{H}(\Omega) \\ \tilde{x}(t) \tilde{g}(t) &\xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k * G_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l G_{k-l} \end{aligned}$$

与

★ DTFT 频域周期卷积性质与 CFS 时域周期卷积性质

$$x[n] p[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{X}(\sigma) \tilde{P}(\Omega - \sigma) d\sigma$$

与 $T \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k G_k$

6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

★ DTFT 的时移性质与 CFS 的频移性质

$$f[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\Omega n_0} \tilde{F}(\Omega) \quad \text{与} \quad e^{jk_0(2\pi/T)t} \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{k-k_0}$$

★ DTFT 的频移性质与 CFS 的时移性质

$$e^{j\Omega_0 n} f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega - \Omega_0) \quad \text{和} \quad (-1)^n f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega - \pi)$$
$$\text{与} \quad \tilde{x}(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{CFS}} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t_0} F_k \quad \text{和} \quad \tilde{x}(t - 0.5T) \xleftrightarrow{\text{CFS}} (-1)^k F_k$$

★ DTFT 时域差分性质与 CFS 频域差分性质

$$\Delta f[n] = f[n] - f[n-1] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\Omega}) \tilde{F}(\Omega)$$
$$\text{与} \quad (1 - e^{j(2\pi/T)t}) \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} \Delta F_k = F_k - F_{k-1}$$

★ DTFT 频域微分性质与 CFS 时域微分性质

$$-jnf[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{d}{d\Omega} \tilde{F}(\Omega) \quad \text{与} \quad \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} jk \frac{2\pi}{T} F_k$$

★ DTFT 时域累加性质与 CFS 频域累加性质

$$\sum_{m=-\infty}^n f[m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \pi \tilde{F}(0) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l) + \frac{\tilde{F}(\Omega)}{(1 - e^{-j\Omega})}$$

6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

与

$$\frac{F_0 T}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) + \frac{\tilde{x}(t)}{1 - e^{j(2\pi/T)t}} \xleftrightarrow{\text{CFS}} \sum_{l=-\infty}^k F_l$$

★ DTFT 频域积分性质与 CFS 时域积分性质

$$\frac{f[n]}{-jn} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \int_{-\infty}^{\Omega} \tilde{F}(\sigma) d\sigma, \quad \text{当} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}(\Omega) d\Omega = 0$$

与

$$\int_{-\infty}^t \tilde{x}(\tau) d\tau, \quad \text{当} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) dt = 0 \xleftrightarrow{\text{CFS}} \frac{F_k}{jk(2\pi/T)}$$

★ DTFT 与 CFS 的对称性质

若	$f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega)$	与	若	$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k$
则有:	$f[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(-\Omega)$		则有:	$\tilde{x}(-t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{-k}$
	$f^*[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}^*(-\Omega)$			$\tilde{x}^*(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{-k}^*$
	$f^*[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}^*(\Omega)$			$\tilde{x}^*(-t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k^*$

★ 时、频域实序列对应的连续频、时域共轭对称分布

若 $f[n]$ 是实序列

与

若 $\tilde{x}(t)$ 是实周期函数

则有: $\tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}^*(-\Omega)$

则有: $F_k = F_{-k}^*$

6.11.4 DTFT 与 CFS 之间的对偶性质(续)

★ DTFT 的时域抽取与 CFS 系数的频域抽取

若有 $x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(\Omega)$

则有 $x[Mn] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{X}\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{M}\right)$

与

若有 $\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k$

则有 $\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{x}\left(\frac{t - nT}{M}\right) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{Mk}$

★ DTFT 与 CFS 的帕什瓦尔公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |\tilde{F}(\Omega)|^2 d\Omega \quad \text{与} \quad \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

后话

作为本书的主要特色之一，本章用较大的篇幅、浓墨重彩地统一讲述和讨论了各种傅里叶变换和傅里叶级数的所有性质，特别针对它们具有的四种对偶性质，在总结和复习已介绍性质的基础上，挖掘一些本章前面未提及和其它教材没有介绍的性质。这并非为了追求理论和数学上的完美，而有两方面的用意：

- 傅里叶方法在众多领域获得广泛应用的实例，以及从开发出来的一系列概念、方法和技术中，都体现出这些性质的指导作用，从后面各章的内容中将看到这一点。而且我深信：傅里叶方法的应用还没有穷尽，随着整个科学和技术的不断进步，还会有新的需求和应用出现，这些傅里叶变换和级数的性质，甚至一些很少或从未用过的性质，都可能成为应用创新、技术创新和方法创新的灵感和源泉。
- 希望有助于同学在学习知识的同时学会思考，特别是学会怎样进行并善于深层次的思考。

作业

- 6.15 9) 10)
- 6.16 10)
- 6.32 1) 3) 其中 $\text{Od}\{x[n]\} = \{x[n] - x[-n]\} / 2$
- 6.37 1) 2) 3)