中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

210049.03 – 信号与系统 – 第八周

傅里叶变换和级数的性质（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/4/18

6.4 时移和频移性质

各种傅里叶变换和傅里叶级数的“时移性质”和“频移性质”可以分别看作它们的时域卷积性质和频域卷积性质的一个特例。

6.4.1 时移性质

■ CFT 和 DTFT 的时移性质

假设有 $\mathbf{F}\{f(t)\}=F(\omega)=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$

和 $\mathbf{F}\{f[n]\}=\tilde{F}(\Omega)=|\tilde{F}(\Omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\phi}(\Omega)}$

则分别有 $f(t-t_0)\xleftrightarrow{\text{CFT}}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=|F(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\phi(\omega)-\omega t_0]}$

和 $f[n-n_0]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{F}(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}=|\tilde{F}(\Omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\tilde{\phi}(\Omega)-\Omega n_0]}$

时移性质表明：时间函数和序列在时域上平移，它们傅里叶变换的模函数 (即信号的幅度频谱或 LTI 系统的幅频响应) 不变，只造成其幅角函数 (即信号的相位频谱或 LTI 系统的相频特性) 分别附加一个线性相位 $-\omega t_0$ 和 $-\Omega n_0$ 。时移性质形成了信号无失真传输和处理及信号均衡等概念和方法，将在下一章详细讨论。

6.4.1 时移性质(续)

■ CFS 和 DFS 的时移性质

周期为T的周期信号 $\tilde{x}(t)$和周期为N的周期序列 $\tilde{x}[n]$，如果它们的 CFS 和 DFS 系数分别为F_k和 $\tilde{F}_k$，则分别有：

$$\tilde{x}(t-t_0) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t_0}$$

和
$$\tilde{x}[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n_0}$$

还可以用周期信号和周期序列的傅里叶变换来表示，即

$$\tilde{x}(t-t_0) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t_0}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

和
$$\tilde{x}[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n_0}\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$

此性质表明，连续时间周期信号或周期序列时移 t_0 或 n_0，将不改变各个谐波分量的幅度，只导致谐波分量的相位附加一个线性相移 $-k(2\pi/T)t_0$ 或 $-k(2\pi/N)n_0$。

6.4.1 时移性质(续)

■ **离散傅里叶变换(DFT)的时域循环移位性质**

N 点序列 $x[n]$ 循环移位 n_0 表示为 $x([n-n_0])_N = \tilde{x}[n-n_0]r_N[n]$，其中，$n_0>0$ 表示右移位，$n_0<0$ 表示左移位。它是 $x[n]$ 以周期 N 周期延拓成的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 时移 n_0 后，取其主值区间内的 N 点序列。例如，循环右移位就是 $x[n]$ 中右边的序列值依次右移出 N 点区间的同时，这些序列值又从左边依次移入。

DFT 的时域循环移位性质如下：

假设 N 点序列的 N 点 **DFT** 系数是 $X[k]$，则有

$$x([n-n_0])_N = \tilde{x}[n-n_0]r_N[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$$

其中，$r_N[n]$ 是 N 点单位值矩形序列。

这个性质表明：N 点序列的循环移位也不改变其每个 **DFT** 系数的模值，只导致其幅角附加一个线性相位 $-k(2\pi/N)n_0$ 。

利用傅里叶变换和级数的时移性质，有助于求得新的傅里叶变换和傅里叶级数。请看下面的例子。

6.4.1 时移性质(续)

【例 6.6】 试求连续时间和离散时间延时系统的频率响应。

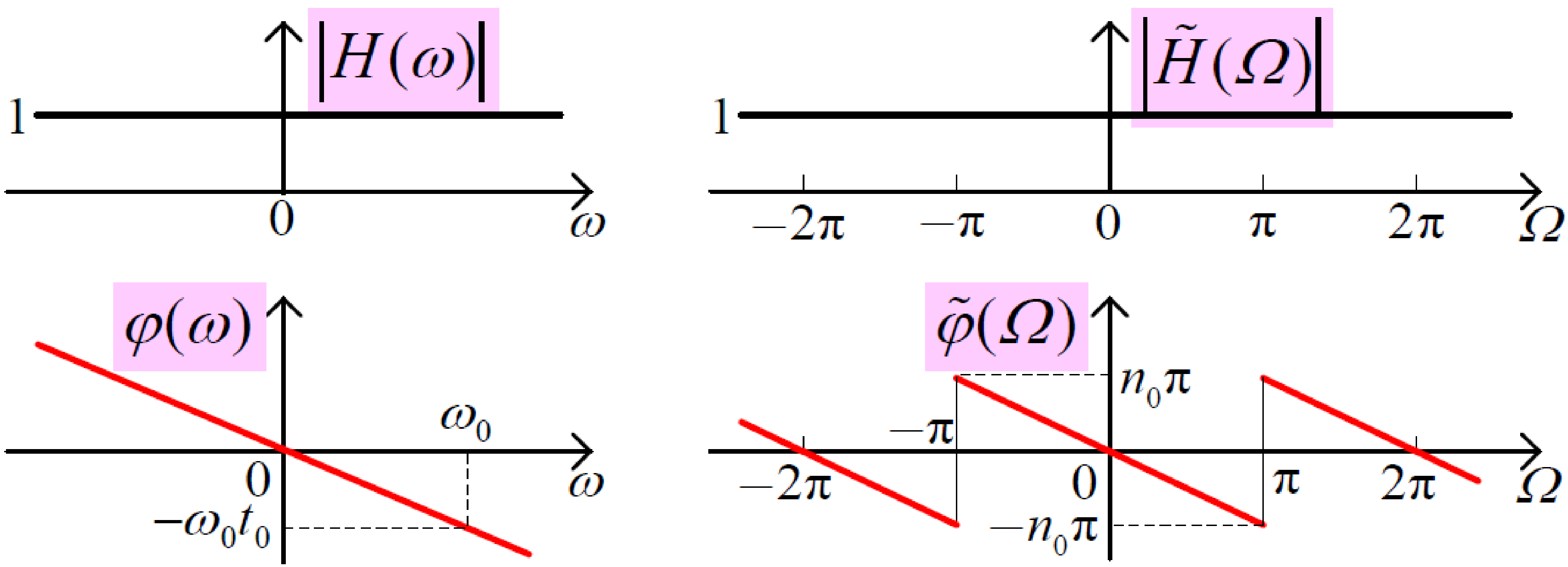
解： 延时 t_0 或 n_0 的延时系统的单位冲激响应分别为

$$h(t) = \delta(t - t_0) \qquad 或 \qquad h[n] = \delta[n - n_0]$$

基于 $\delta(t)$ 或 $\delta[n]$ 的傅里叶变换，并利用时移性质，可以求得它们的频率响应分别为

$$H(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \qquad 或 \qquad \tilde{H}(\Omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}$$

它们的幅频响应和相频响应分别如下图所示。



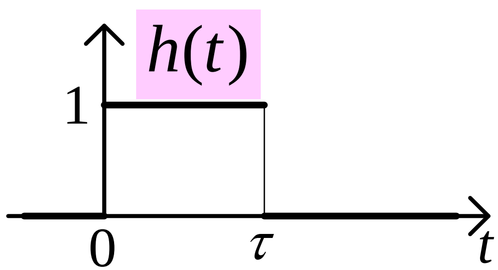
6.4.1 时移性质(续)

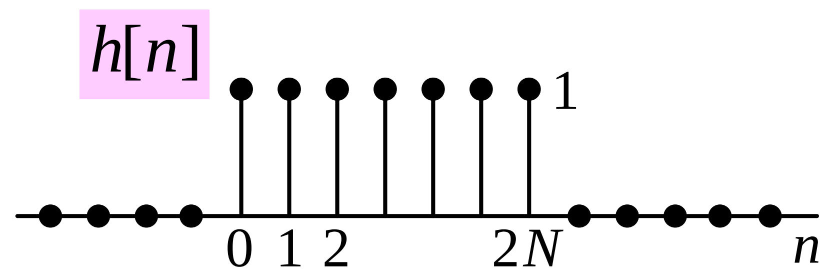
同样地，N 点单位冲激序列 $\delta_N[n]=\tilde{\delta}_N[n]r_N[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数为 $X[k]=1,\ \ k=0,1,\cdots,N-1$ 。用 **DFT** 的循环移位性质，可以求得 $\delta_N[n]$ 循环右移 n_0 的 N 点序列 $\delta_N[n-n_0]$ 的 N 点 **DFT** 系数为

$$\delta_N[n-n_0]=\tilde{\delta}_N[n-n_0]r_N[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n_0}$$

其中，$\tilde{\delta}_N[n]$ 是周期为 N 的周期单位冲激序列。

再例如，由例 **5.6** 所求的偶对称矩形脉冲和序列的傅里叶变换，可以求得单位冲激响应为下图所示 $h(t)$ 和 $h[n]$ 的连续时间和离散时间因果平滑系统的频率响应 $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\Omega)$ 。





即 $\quad H(\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}$ $\quad$ 和 $\quad \tilde{H}(\Omega)=\dfrac{\sin[\Omega(2N+1)/2]}{\sin(\Omega/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega N}$

6.4.1 时移性质(续)

讨论：上述的时移性质可以分别看成傅里叶变换和傅里叶级数、**DFT** 的时域卷积性质的特例。

★ 在 **CFT** 和 **DTFT** 时域卷积性质中，若 $h(t)$ 和 $h[n]$ 分别为 $\delta(t-t_0)$ 和 $\delta[n-n_0]$，利用例 **6.6** 求得的 $\delta(t-t_0)$ 和 $\delta[n-n_0]$ 的傅里叶变换，就可以得到 **CFT** 和 **DTFT** 的时移性质，即

$$f(t-t_0)=f(t)*\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{\text{CFT}}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

和

$$f[n-n_0]=f[n]*\delta[n-n_0]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}\tilde{F}(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}$$

进一步，基于周期信号和序列的傅里叶变换表示，也可**由时域卷积性质导出 CFS 和 DFS 的时移性质**，例如：

$$\tilde{x}(t-t_0)=\tilde{x}(t)*\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{\text{CFT}}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t_0}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

用同样方法可以导出 **DFS** 的时移性质。

6.4.1 时移性质(续)

★ 基于 **DFT** 的时域循环卷积性质，由 N 点序列 $x[n]$ 与循环移位 n_0 的 N 点单位冲激序列 $\delta_N[n-n_0]$ 进行 N 点循环卷积，利用上面求得的 $\delta_N[n-n_0]$ 之 N 点 **DFT**，可以得到 **DFT** 的时域循环移位性质，即

$$x([n-n_0])_N = x[n] \circledN \delta_N[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n_0}$$

6.4.1 频移性质

■ CFT 和 DTFT 的频移性质

假设有 $\mathbf{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ 或 $\mathbf{F}\{f[n]\} = \tilde{F}(\Omega)$

则分别有 $$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} F(\omega-\omega_0)$$

或 $$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n} f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega-\Omega_0)$$

这表明：时间函数或序列分别被复指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$ 加权，则对应于它们的傅里叶变换在频域上平移 ω_0 或 Ω_0 。

6.4.2 频移性质(续)

CFT 和 **DTFT** 的频移性质可分别看成频域卷积性质的特例。因为有如下连续时间和离散时间复指数的傅里叶变换对：

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

和

$$e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi)$$

分别利用**DTFT** 的频域周期卷积性质和 **CFT** 的频域卷积性质，就可以得到 **DTFT** 和 **CFT** 的频移性质，即

$$e^{j\Omega_0 n} f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi}\tilde{F}(\Omega) \circledast 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) = \tilde{F}(\Omega-\Omega_0)$$

和

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{2\pi}F(\omega) * 2\pi\delta(\omega-\omega_0) = F(\omega-\omega_0)$$

- **DTFT 的频移 π 性质**

在 **DTFT** 的频移性质中，若令 $\Omega_0=\pi$，将得到它一个特有的性质，即

$$(-1)^n f[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{F}(\Omega-\pi)$$

6.4.2 频移性质(续)

讨论：离散时间频域中频移 π 表示低频与高频之间相互转换，由此可实现离散时间低通与高通滤波器之间的相互转换。

■ **CFS 和 DFS 的频移性质**

周期为 T 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 和周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$，如果它们的 **CFS** 和 **DFS** 系数分别为 F_k 和 $\tilde{F}_k$，则分别有：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(2\pi/T)t}\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{k-k_0} \quad \text{和} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(2\pi/N)n}\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_{k-k_0}$$

这表明：若周期信号或周期序列被复指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(2\pi/T)t}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(2\pi/N)n}$ 加权，相应它们的离散频谱在频域上频移 $k_0(2\pi/T)$ 和 $k_0(2\pi/N)$。

基于周期信号和序列及复指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(2\pi/T)t}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(2\pi/N)n}$ 的傅里叶变换表示，利用**CFT** 的频域卷积性质和 **DTFT** 的频域周期卷积性质，也可以导出上述 **CFS** 和 **DFS** 的频移性质。例如

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\frac{2\pi}{T}t}\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\right]*2\pi\delta\left(\omega-k_0\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{k-k_0}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

6.4.2 频移性质(续)

■ 离散傅里叶变换(DFT)的频域循环移位性质

N 点序列的 N 点 **DFT** 是频域上的 N 点系数序列，故 **DFT** 的频域循环移位性质如下：

假设 N 点序列 $x[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数是 $X[k]$，则有

$$x[n]e^{jk_0\frac{2\pi}{N}n} \xleftrightarrow{\text{DFT}} X\left([k-k_0]\right)_N = \tilde{X}[k-k_0]\cdot r_N[k]$$

其中：$\tilde{X}[k]$ 是 $X[k]$ 以周期 N 的周期延拓，$r_N[n]$ 是 N 点单位值矩形序列；$k_0>0$ 表示循环右移位，$k_0<0$ 表示循环左移位。

这个性质表明：N 点序列的循环移位也不改变其每个 **DFT** 系数的模值，只导致其幅角附加一个线性相位。

▲ N 点序列及其 N 点 **DFT** 系数之循环移位的周期特性

N 点序列 $x[n]$ 及其 N 点 **DFT** 系数 $X[k]$ 循环移位 N 的整数倍时，仍分别是 $x[n]$ 和 $X[k]$，表明它们具有循环移位周期特性。即

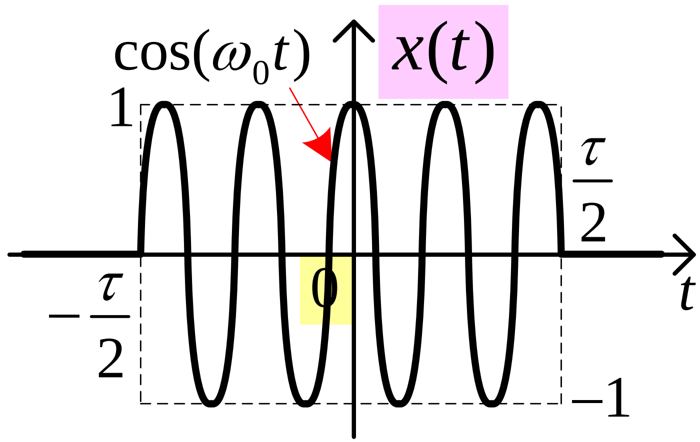
$$x\left([n-mN]\right)_N \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k] \quad 和 \quad x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X\left([k-mN]\right)_N$$

6.4.2 频移性质(续)

讨论：与信号和序列的时移不产生波形失真一样，傅里叶变换的频移也不造成其函数形状的改变，仅是频谱或频率特性在频率轴上的搬移。所谓“频谱搬移技术”就是由此而来。

利用频移性质可方便求取一些新的傅里叶变换对和级数对。

【例 6.7】 试求右图所示的矩形射频脉冲 $x(t)$ 的频谱。



解 $x(t)$ 可以看作 $\cos(\omega_0 t)$ 被宽度为 τ 的偶对称单位幅度的的矩形脉冲 $r_\tau(t)$ 幅度调制的结果，即有

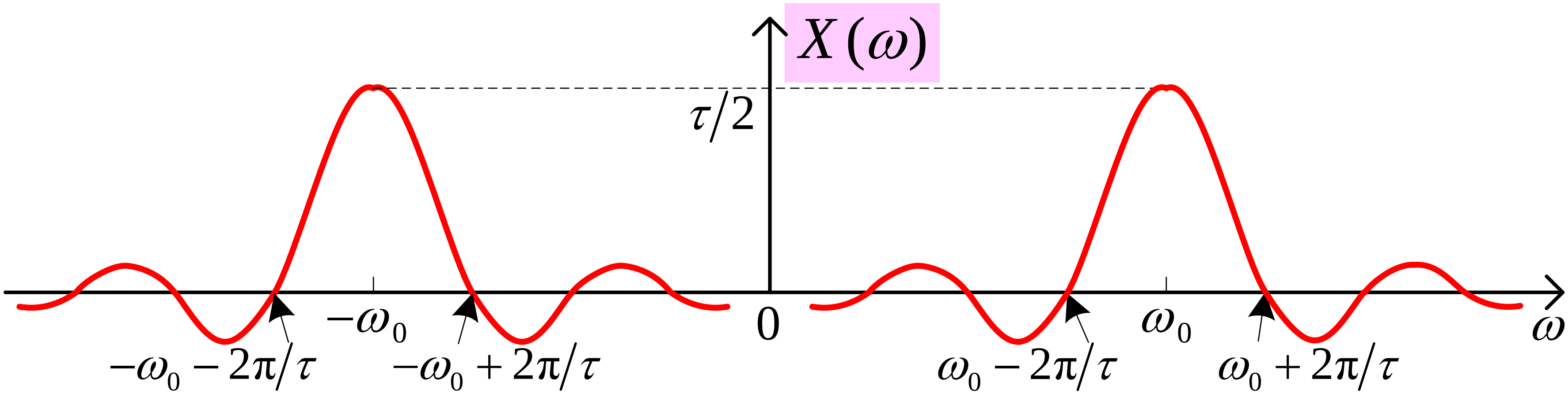
$$x(t) = r_\tau(t)\cos\omega_0 t = 0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} r_\tau(t) + 0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} r_\tau(t)$$

基于例 5.6 求得的 $r_\tau(t)$ 之傅里叶变换，利用 CFT 的频移性质，可以求得矩形射频脉冲的频谱为

6.4.2 频移性质(续)

$$X(\omega)=\frac{\tau}{2}\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right)+\mathrm{Sa}\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right)\right]$$

由例 5.6 中$R_\tau(\omega)$ 的函数图形，可画出 $X(\omega)$ 的图形如下图所示。



这表明：矩形射频脉冲的频谱由矩形脉冲 $r_\tau(t)$ 的频谱之半分别频率搬移到$\pm\omega_0$ 处的两部分组成。这充分体现了幅度调制起到频谱搬移的作用。

作业

- 6.1 23)
- 6.4 1) 4) 7) 12)
- 6.6 1); 2) (b) (e)