



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

210049.03 – 信号与系统 – 第十周

傅里叶变换和级数的性质（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/4/27

6.6 抽样定理

抽样——对连续函数或者离散的数值序列取等间隔样本值的过程或方法，其目的是以它们的样本值来替代原来的函数或数字序列，并包含其全部信息，由此获得连续函数或数值序列的有效表示法。

抽样定理表明：在一个很宽松的条件下，连续函数和离散的数值序列均可以用其等间隔的样本值完全和充分地表示，即它们可以用其等间隔的样本值恢复或重构出来。

抽样定理包括时域抽样定理和频域抽样定理两类，又分为：

- ★ 连续时间的时域抽样定理和频域抽样定理；

- ★ 离散时间的时域抽样定理和频域抽样定理。

本节将着重讲述连续时间和离散时间的时域抽样定理。

下面将看到，傅里叶变换的时域和频域卷积性质提供了这些抽样定理的证明。这就是把抽样定理作为CFT和DTFT的性质来讲述的理由。

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理

■ 连续时间时域抽样定理

假设 $x(t)$ 是一个带限于 ω_M 的连续时间带限信号，即

$$X(\omega) = \mathbf{F} \{x(t)\} \quad \text{和} \quad X(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_M$$

并且抽样间隔 T_s 满足如下条件：

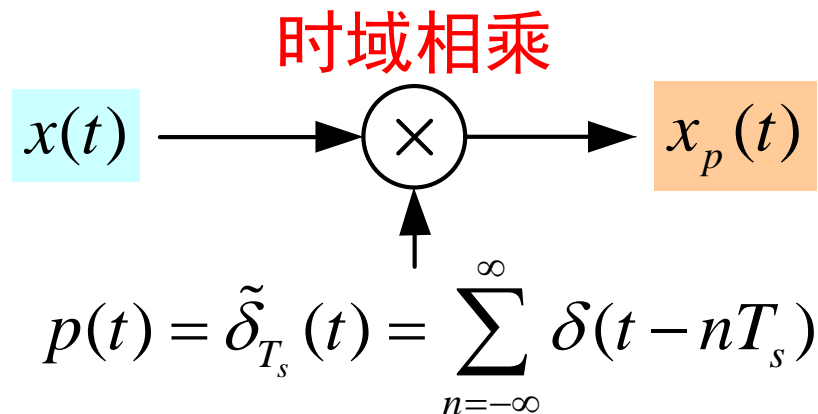
$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{或} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_M$$

则 $x(t)$ 就可以由其样本值序列 $\{x(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 唯一地确定。上式中的 ω_s 称为抽样角频率。

下面给出该抽样定理的解释和证明：

● 连续时间时域抽样

连续时间抽样是通过右图所谓“理想冲激串抽样”来实现的，图中带限信号 $x(t)$ 与周期为 T_s 的周期冲激串 $p(t)$ 相乘，得到已抽



6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

样信号 $x_p(t)$ ，即

$$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

它也是一个间隔为 T_s 的冲激串，但其中每个冲激的强度等于 $x(t)$ 以 T_s 为间隔的样本值 $x(nT_s)$ ，它只包含 $x(t)$ 的样本值信息。

下图中左列给出了连续时间冲激串抽样的时域波形，从中难以想像由 $x_p(t)$ 还能恢复或重构出 $x(t)$ 。**CFT** 的**频域卷积性质**提供了**从频域上考察抽样过程的新思路**，时域上 $x(t)$ 与 $p(t)$ 相乘，意味着频域上带限频谱 $X(\omega)$ 与 $p(t)$ 的频谱 $P(\omega)$ 卷积，得到已抽样信号 $x_p(t)$ 的频谱 $X_p(\omega)$ ，下图右列画出了这些示意频谱图形。

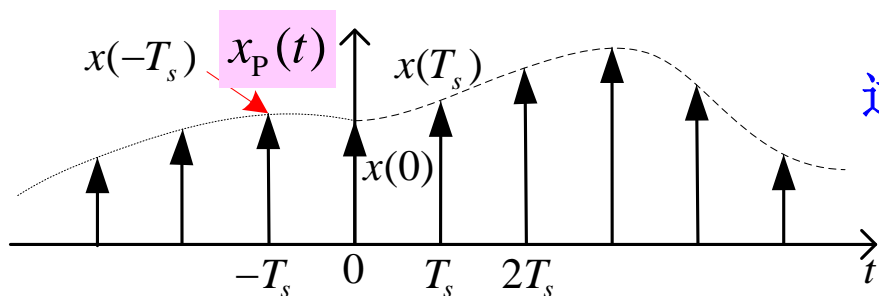
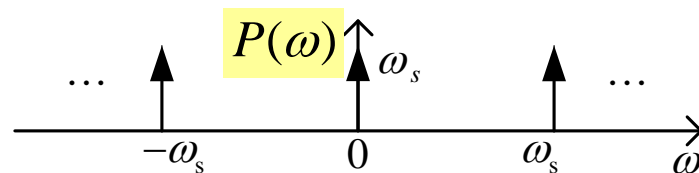
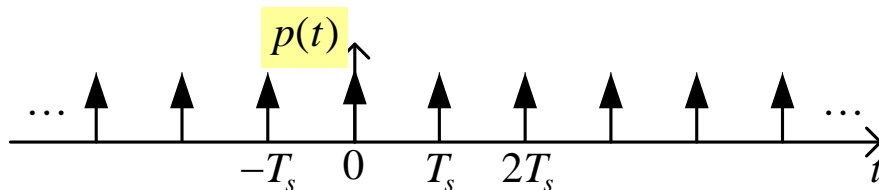
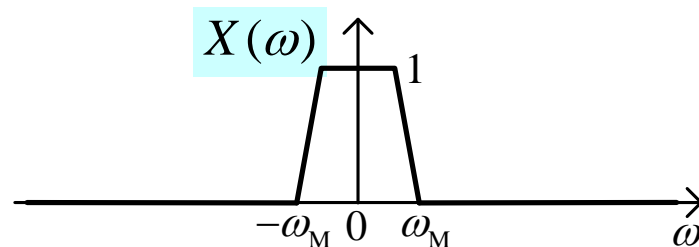
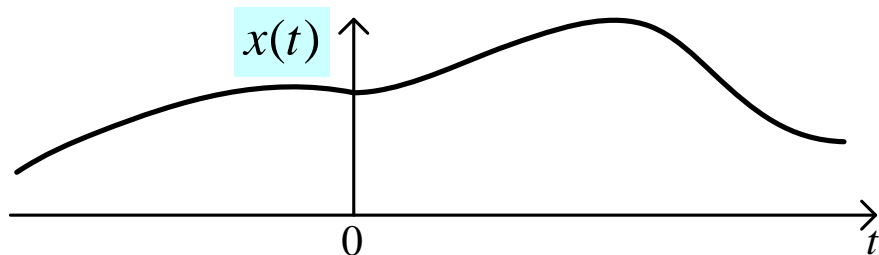
前一章**例 5.11**已求过周期冲激串的频谱，即

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_s})$$

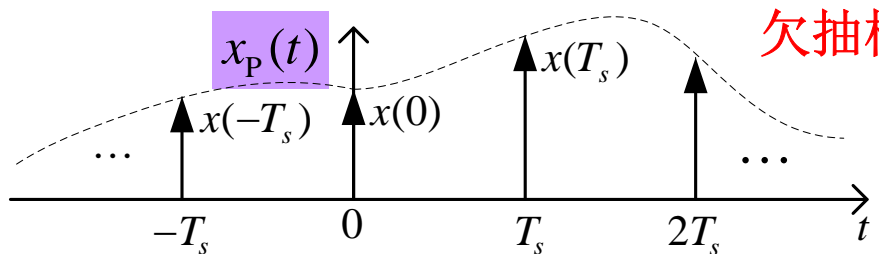
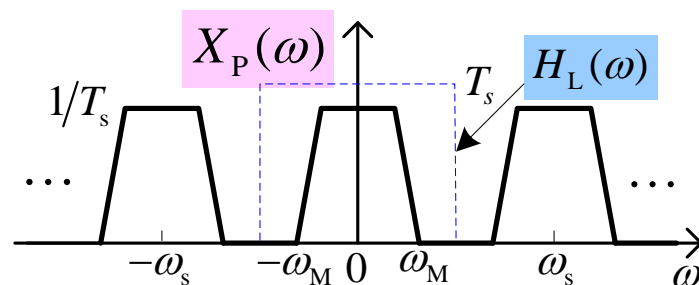
它是频域上间隔为抽样频率 ω_s 的周期冲激串。利用 **CFT** 的频域卷积性质，已抽样信号 $x_p(t)$ 的频谱 $X_p(\omega)$ 为

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

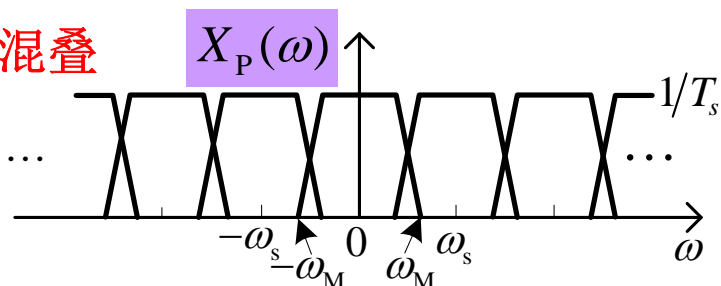
$$X_P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \left[\frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}) \right] = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k \frac{2\pi}{T_s})$$



过抽样



欠抽样, 有混叠



6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

该结果表明： $X_p(\omega)$ 是带限频谱 $X(\omega)/T_s$ 以抽样频率 ω_s 为周期的周期延拓，常把 $k \neq 0$ 的 $X(\omega - k\omega_s)$ 看作 $X(\omega)$ 的一种“像”。

上图还给出了两种不同抽样间隔 T_s 下的 $x_p(t)$ 波形及其频谱 $X_p(\omega)$ 的示意图形：

- ★ 过抽样情况：抽样间隔 $T_s < \pi/\omega_M$ 或抽样频率 $\omega_s > 2\omega_M$ ，此时的 $X_p(\omega)$ 是 $X(\omega)/T_s$ 的无重叠之周期复制；
- ★ 欠抽样情况：抽样间隔 $T_s > \pi/\omega_M$ 或抽样频率 $\omega_s < 2\omega_M$ ，此时， $X(\omega)/T_s$ 与其“像”之间相互重叠，称为“混叠”现象。

由 $X_p(\omega)$ 的频谱图形可以看出，在过抽样 (包括临界抽样) 情况下，即满足 $T_s \leq \pi/\omega_M$ 或 $\omega_s \geq 2\omega_M$ ，可以让 $X_p(\omega)$ 与如下的频域矩形函数 $H_L(\omega)$ 相乘来恢复原带限信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ ，即

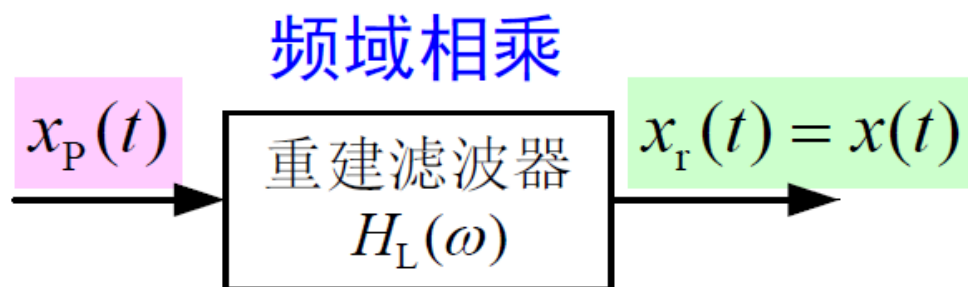
$$X(\omega) = X_p(\omega)H_L(\omega)$$

其中

$$H_L(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \quad \omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$$

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

根据 **CFT** 的**时域卷积性质**，频域上 $X_P(\omega)$ 与 $H_L(\omega)$ 相乘就是已抽样信号 $x_p(t)$ 通过频率响应为 $H_L(\omega)$ 的 **LTI** 系统(见右图)，基于傅里叶变换的唯一性，其输出信号 $x_r(t)$ 必定是原带限信号 $x(t)$ 。就此证明了连续时间时域抽样定理。



上述证明过程表明： $x(t)$ 的带限条件 $X(\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 和抽样间隔条件 $T_s \leq \pi/\omega_M$ 确保了从已抽样信号 $x_p(t)$ 恢复原信号 $x(t)$ ，故把带限于 ω_M 的连续时间信号的最大抽样间隔 $T_{\text{smax}} = \pi/\omega_M$ 和最低抽样频率 $\omega_{\text{smin}} = 2\omega_M$ 分别称为**奈奎斯特间隔**和**奈奎斯特频率**，并把以**奈奎斯特间隔**或**频率**进行的抽样称为“**临界抽样**”。

● 由已抽样信号重建原连续时间信号

同学们也许仍有疑问，在抽样时每个抽样间隔内丢弃的无穷多个函数值是怎样通过重建滤波器恢复出来的？下面给出解释：

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

重建滤波器的单位冲激响应 $h_L(t)$ 是 $H_L(\omega)$ 的傅里叶反变换, 参照第 5 章例 5.7, 它为

$$h_L(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H(\omega)\} = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

根据 CFT 的时域卷积性质, 频域上 $X_P(\omega)$ 与 $H_L(\omega)$ 相乘, 时域上相应为 $x_P(t)$ 与 $h_L(t)$ 卷积, 即有

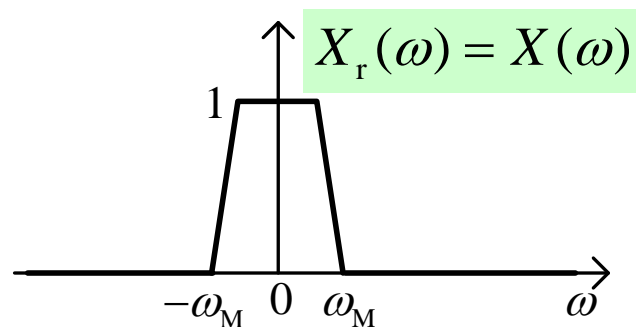
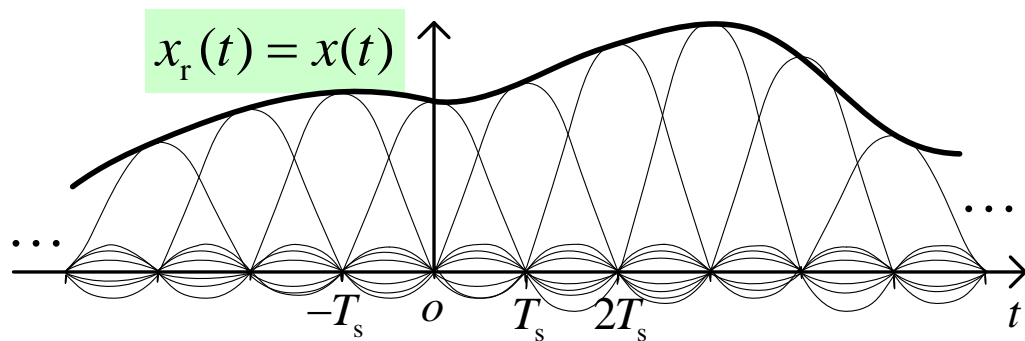
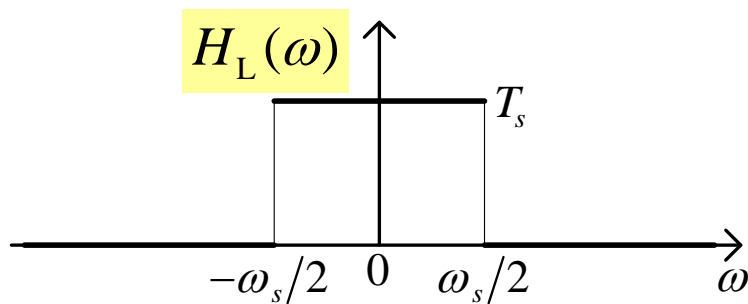
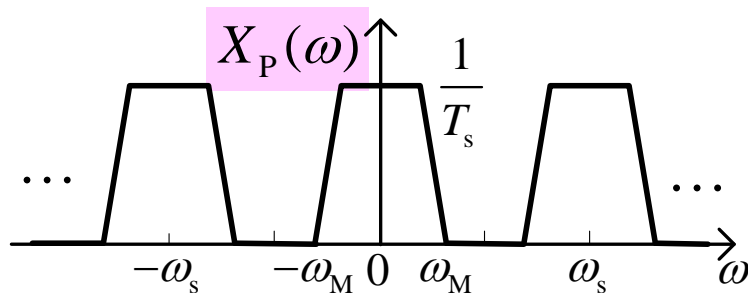
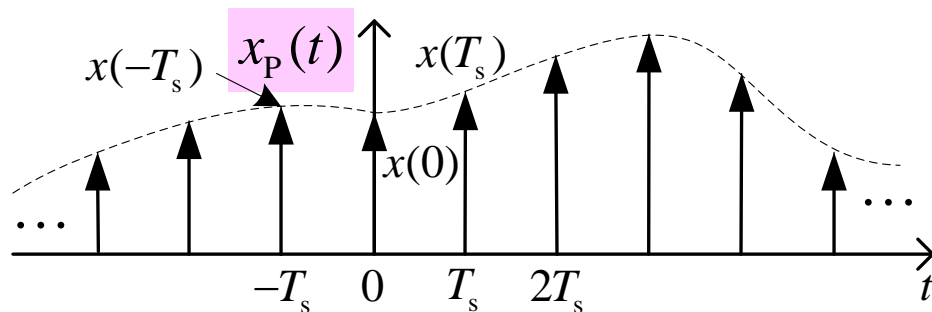
$$\begin{aligned} x(t) &= x_P(t) * h_L(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * \left[T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \right] \\ &= \frac{\omega_c T_s}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}[\omega_c (t - nT_s)] = x(t) \end{aligned}$$

在满足 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 的条件下, 像下图所示那样, $H_L(\omega)$ 的截止频率取为 $\omega_c = \omega_s/2$ 将不会影响推导结果, 则有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right]$$

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

下图给出了从已抽样信号 $x_p(t)$ 恢复或重构出原信号 $x(t)$ 的时域波形及其相应频谱图形的示意图。图中清楚地示意了 $x(t)$ 的恢



6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

复或重建过程，即那些在抽样时丢弃的函数值是由以样本值为幅度的抽样函数 $\text{Sa}[\pi(t - nT_s)/T_s]$ 叠加出来的。

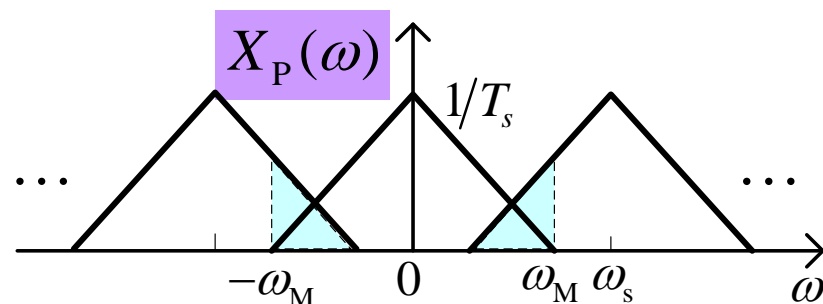
这样的恢复或重建过程数学上称为**函数内插**，重建滤波器的单位冲激响应 $h_L(t)$ 称为**内插函数**。因它具有理想低通滤波特性，故该重建滤波器称为“**理想带限内插滤波器**”。

● 欠抽样时的“混叠”现象

在 $T_s > \pi/\omega_M$ 或 $\omega_s < 2\omega_M$ 的欠抽样情况下，已抽样信号的频谱 $X_P(\omega)$ 中 $X(\omega)/T_s$ 与其“**像**”之间有重叠，即混叠现象或混叠效应。此时再也不可能用理想滤波器来恢复原信号 $x(t)$ 。

混叠将导致原信号频谱中的高频部分**反转地**叠加到它的低频部分(如右图所示)，产生所谓“**混叠失真**”。在实际应用

中，为防止欠抽样造成混叠失真，除了要确保 $\omega_s > 2\omega_M$ 外，通常



6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

在抽样前先让被抽样信号通过一个“**抗混叠滤波器**”，滤除可能混入信号中频率高于 $\omega_s/2$ 的干扰或噪声。

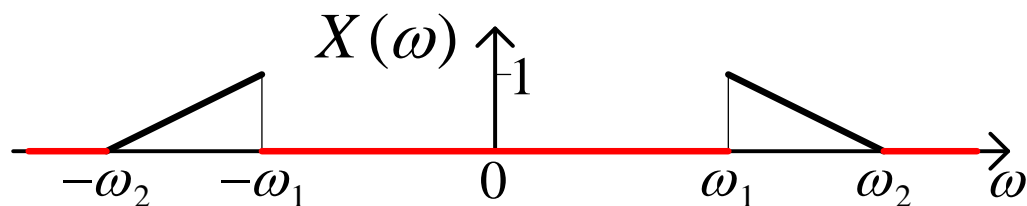
一般说来，欠抽样的混叠效应是有害的，但也有利用它的实例，“**取样示波器**”就是借助混叠效应、把欲观察又不便显示的很高频率成分混叠到低频区域显示出来的。

讨论：★ **抽样定理**需满足的**条件很宽松**：其带限条件几乎对实际的连续时间信号都成立，只是各自最高频率 ω_M 高低有别；加上目前的高速采样技术已达到纳秒量级，可以满足现有宽带信号的采样需求。

★ 上述抽样定理是**低通抽样定理**，还有“**带通抽样定理**”：对于**实的带通信号** $x(t)$ ，即其频谱 $X(\omega)=0$ ， $|\omega|<\omega_1$ ，和 $|\omega|>\omega_2$ ，其中 $\omega_2>\omega_1$ ，例如下图所示，抽样频率无需大于最高频率 ω_2 的两倍，只要满足 $\omega_s \geq (2\omega_2)/m$ ，其中， m 是不大于 $\omega_2/(\omega_2-\omega_1)$ 的最大整数，这要比

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

$\omega_s \geq 2\omega_2$ 降低 m 倍。其原因正如右图中红线部分所示的那样，不仅在



$|\omega| > \omega_2$ ，而且在 $|\omega| < \omega_1$ 的频域都是空闲的，都可以不重叠地放置因抽样产生的、由带通信号频谱周期复制出来的“像”。

上述抽样定理不仅理论上十分严密，实际中早已获得广泛应用。人们都在亲身享受基于抽样定理开发出来的技术成果：

- ★ **电影**：电影胶片是从活动场景中按每秒钟拍摄 $16 \sim 25$ 次得到瞬时画面（等间隔样本）的一串底片，当它以相同速度放映时；观众看到的是原来活动场景的重现，不是跳跃式的画面。由于人类视觉系统是一个低通重建滤波器，从而能享受连续的鲜活场景。
- ★ 当今固定电话网和移动电话网中传送的语声就是将话音信号按 8000 样本/秒的采样速率获得的**数字语声**。

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

此外，电视、数码相机和所有数字设备及测量仪器都有在时间域或空间域上抽样定理的应用。

连续时间时域抽样定理在连续时间和离散时间信号与系统之间架起了一座桥梁，并为进入“数字化”时代奠定了理论基础。至于在实际中如何实现连续时间抽样，以及连续时间信号与离散时间信号或数字信号之间转换的实际问题，将在后面第 10 章中讨论。

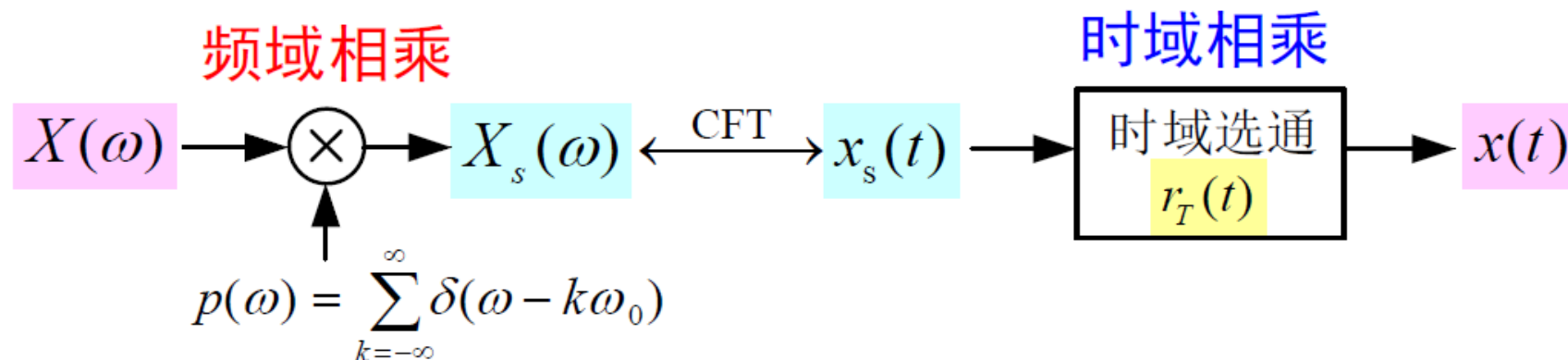
■ 连续时间频域抽样定理

在弄清连续时间时域抽样定理及其推导过程，就不难了解与其对偶的连续时间频域抽样定理。假设 $x(t)$ 是一个时限(时域占有宽度有限)的连续时间信号，即 $x(t) = 0, t \notin \langle T_M \rangle$ ，其中 T_M 是长度为 $\langle T_M \rangle$ 的任意时域区间，则 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 可以由其等间隔样本值 $\{X(k\omega_0), k \in \mathbf{Z}\}$ 唯一地确定，只要样本间隔 ω_0 满足如下条件：

$$\omega_0 \leq 2\pi/T_M \quad \text{或} \quad T_0 = (2\pi/\omega_0) \geq T_M$$

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

这里用完全类似的方法给出简要的证明和解释:



上图左边和右边分别给出了频域抽样及其恢复原信号频谱的示意框图。频域抽样是将时限信号频谱 $X(\omega)$ 与间隔为 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 的频域周期冲激串 $P(\omega)$ 相乘, 得到以其样本值 $\{X(k\omega_0), k \in \mathbf{Z}\}$ 为强度的频域等间隔冲激串 $X_s(\omega)$, 即

$$X_s(\omega) = X(\omega)P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$$

按照 CFT 的时域卷积性质, $X_s(\omega)$ 的时域波形 $x_s(t)$ 应是时限信号 $x(t)$ 与 $P(\omega)$ 之傅里叶反变换 $p(t)$ 时域卷积的结果, 其中 $p(t)$ 为

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0)$$

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

下图上半部分左、右列分别给出了上述频域抽样过程中，频域相乘和时域卷积的示意图。从图中可以看出： $x_s(t)$ 是时限信号 $x(t)/\omega_0$ 以周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的周期延拓，只要满足 $T_0 \geq T_M$ ，这样的周期延拓就不会产生波形重叠，就可以像上图右图那样，借助一个时域选通电路、用时间区间 $\langle T_M \rangle$ 上的矩形脉冲 $r_T(t)$ 选取出来，这个选通脉冲为：

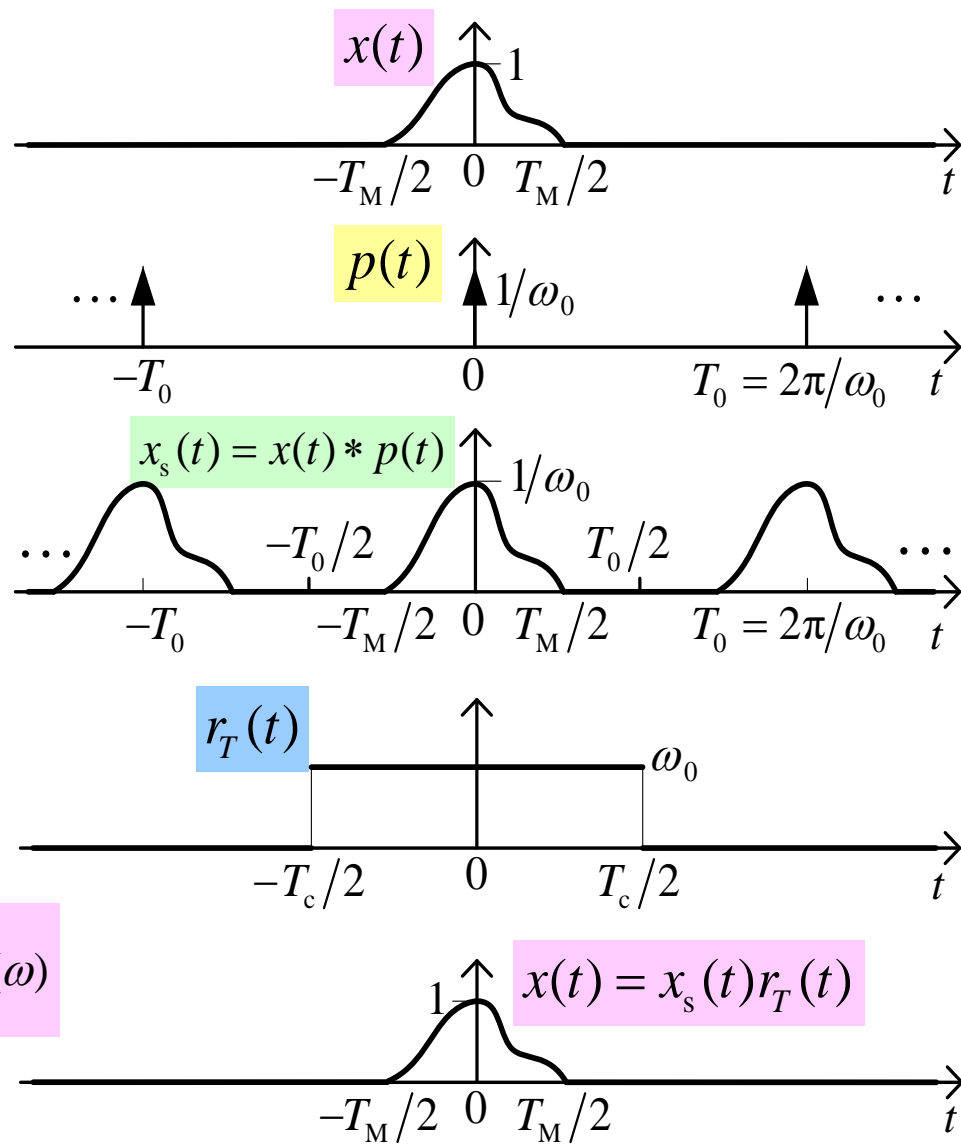
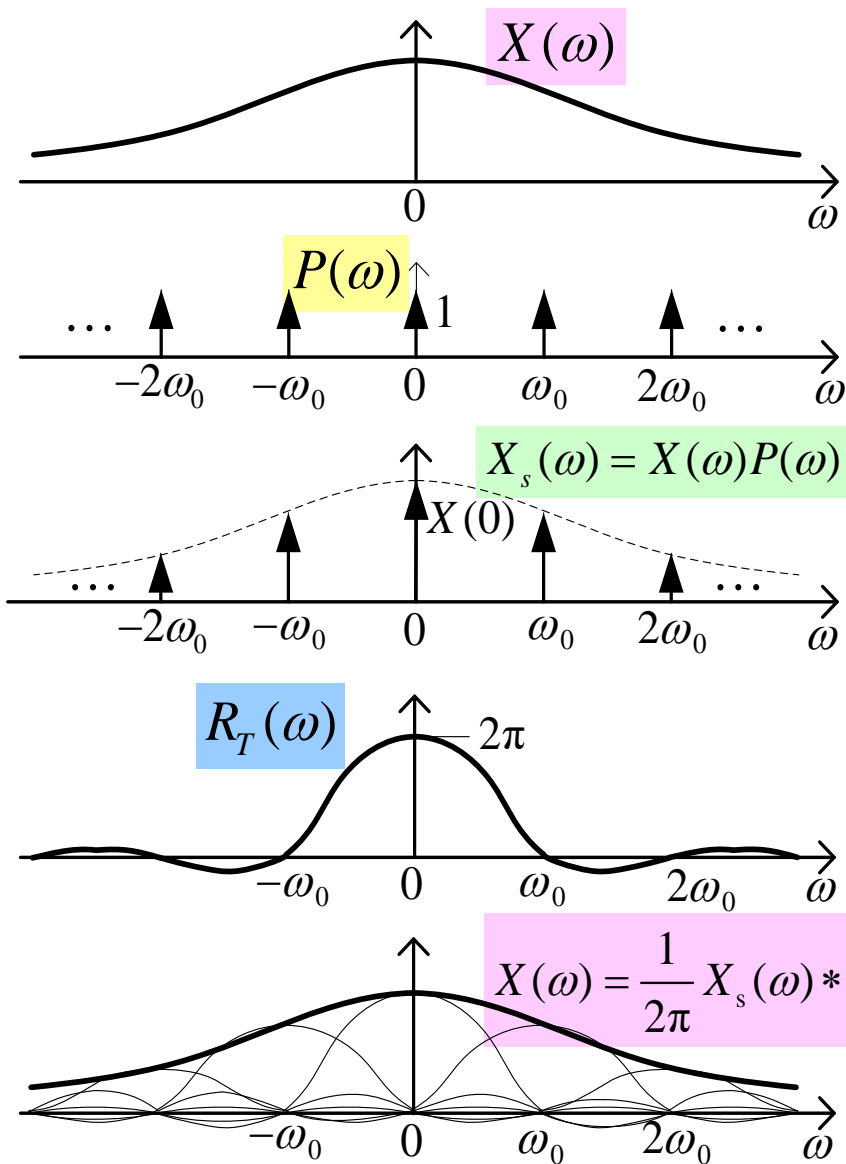
$$r_T(t) = \begin{cases} \omega_0, & t \in \langle T_c \rangle \\ 0, & t \notin \langle T_c \rangle \end{cases}, \quad \text{其中 } \langle T_c \rangle \supset \langle T_M \rangle$$

下图下半部分右、左列分别画出了从 $x_s(t)$ 选取 $x(t)$ 和由 $X_s(\omega)$ 恢复出 $X(\omega)$ 的示意图。在 $T_0 \geq T_M$ 的情况下，像图中所示那样，选通脉冲宽度 $T_c = T_0$ 将不会影响选取结果。此时， $r_T(t)$ 的傅里叶变换为

$$R_T(\omega) = \omega_0 T_c \text{Sa} \left(\frac{\pi}{\omega_0} \omega \right) = 2\pi \text{Sa} \left(\frac{\pi}{\omega_0} \omega \right)$$

由 CFT 频域卷积性质， $x_s(t)$ 与 $r_T(t)$ 相乘，则 $X_s(\omega)$ 与 $R_T(\omega)$ 卷积，

6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)



6.6.1 连续时间时域和频域抽样定理(续)

即有
$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_s(\omega) * R_T(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \text{Sa} \left[\frac{\pi}{\omega_0} (\omega - k\omega_0) \right]$$

就这样从 $X_s(\omega)$ 恢复或内插出原实现信号的频谱 $X(\omega)$ 。

当然，如果 $\omega_0 > 2\pi/T_M$ 或 $T_0 < T_M$ ， $x(t)$ 的周期延拓就会出现波形重叠，将不能从 $X_s(\omega)$ 恢复出原实现信号的频谱 $X(\omega)$ 。

讨论：在前一章 5.5.1 小节讨论 CFT 与 CFS 与之间的关系时，曾提到如下关系：对于任意周期信号 $\tilde{x}(t)$ 及其一个周期区

间 $\langle T \rangle$ 上的信号 $x_0(t)$ ，即
$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & t \in \langle T \rangle \\ 0, & t \notin \langle T \rangle \end{cases}, \text{ 且有}$$

$$x_0(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_0(\omega) \quad \text{和} \quad \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k$$

则有
$$F_k = X_0(k\omega_0)/T$$

显然，连续时间频域抽样定理证明了这一关系，或者说，它是这一关系的另一种陈述。

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理

与连续时间抽样定理相对应，也有离散时间时域和频域抽样定理，它们也是运用 DTFT 时域卷积和频域卷积性质的结果。

■ 离散时间时域抽样定理

假设 $x[n]$ 是一个带限于 Ω_M 的离散时间带限序列，即

$$\tilde{X}(\Omega) = \mathbf{F} \{x[n]\} \quad \text{和} \quad \tilde{X}(\Omega) = 0, \quad 2m\pi + \Omega_M < |\Omega| < 2\pi(m+1) - \Omega_M$$

并且抽样间隔 N_s 满足如下条件：

$$N_s \leq \pi/\Omega_M \quad \text{或} \quad \Omega_s = 2\pi/N_s \geq 2\Omega_M, \quad \text{其中 } \Omega_M \leq \pi/2$$

则 $x[n]$ 就可以由其样本值序列 $\{x[mN_s], m \in \mathbf{Z}\}$ 唯一地确定。

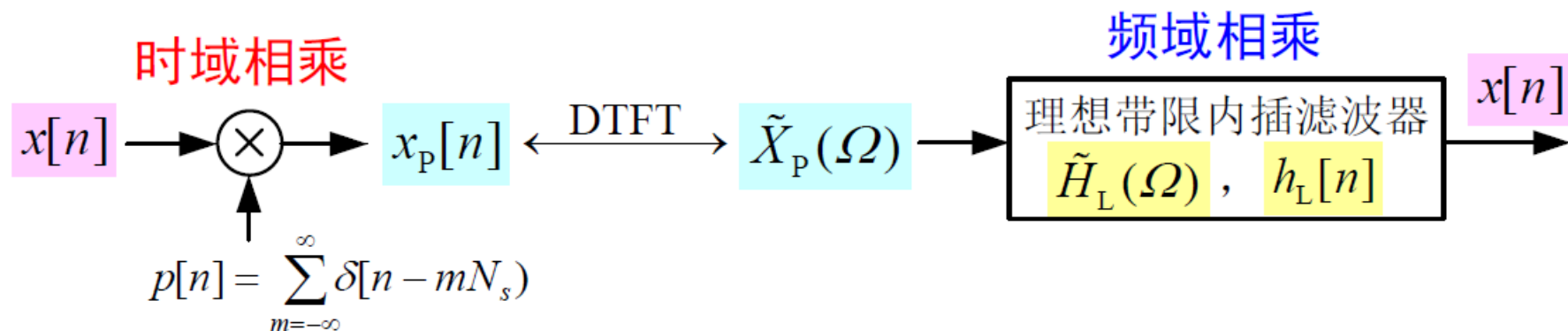
注意：与连续时间时域抽样定理的差别：

- ★ 抽样间隔 N_s 必须是整数，且 $N_s \geq 2$ 才有意义；
- ★ $\tilde{X}(\Omega)$ 是周期为 2π 的周期函数，离散时间最高频率是 π ，为确保至少 2 倍抽样，带限条件必须是 $\Omega_M \leq \pi/2$ 。

离散时间时域抽样定理的证明与连续时域抽样定理类似，下面给出简要的证明和解释。

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

下图左、右边分别给出了离散时域抽样及其恢复原带限序列 $x[n]$ 的示意框图。



离散时域抽样也是将 $x[n]$ 与离散时间周期冲激串序列 $p[n]$ 相乘实现的，得到以其样本值 $\{x(mN_s), m \in \mathbf{Z}\}$ 为序列值的已抽样序列 $x_p[n]$ ，即

$$x_p[n] = x[n]p[n] = x[n] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN_s] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mN_s] \delta[n - mN_s]$$

参照例 5.11 求过的离散时间周期冲激串 $\tilde{\delta}_N[n]$ 及其频谱，则有

$$\tilde{P}(\Omega) = \mathbf{F} \{p[n]\} = \mathbf{F} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN_s] \right\} = \frac{2\pi}{N_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

根据 DTFT 的频域**周期卷积性质**， $x[n]$ 与 $p[n]$ 时域相乘，对应于频域则是 $\tilde{X}(\Omega)$ 与 $\tilde{P}(\Omega)$ 的周期卷积，即 $x_p[n]$ 的频谱为

$$\tilde{X}_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(\Omega) \odot \tilde{P}(\Omega) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} \tilde{X}(\Omega - k\Omega_s)$$

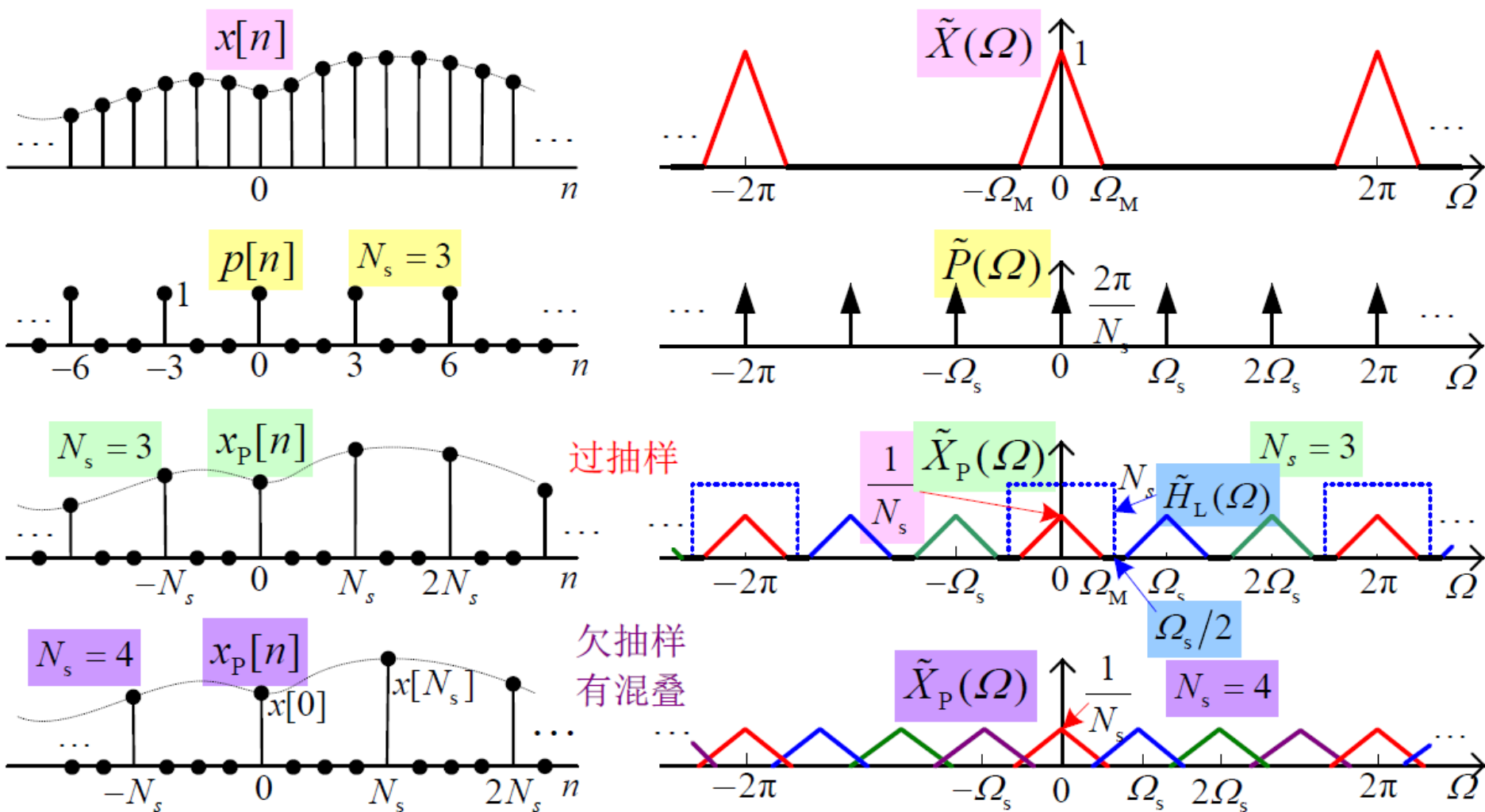
它也是带限频谱 $\tilde{X}(\Omega)/N_s$ 的周期复制。

下图右列给出了 $N_s < \pi/\Omega_M$ (过抽样) 和 $N_s > \pi/\Omega_M$ (欠抽样) 两种情况下，离散时域抽样过程的频谱示意图。**与连续时域抽样相同**，在已抽样序列的频谱 $\tilde{X}_p(\Omega)$ 中，不仅有落在原频率位置上的带限频谱 $\tilde{X}(\Omega)/N_s$ ，还有因抽样在抽样频率 $\Omega_s = 2\pi/N_s$ 整倍数处复制出来的“**像**”；**不同**在于：连续时域抽样会在频域 ω 上产生无穷多个“**像**”，而离散时域抽样在其频域 Ω 上(**2π 区间内**)只产生 **$(N_s - 1)$** 个“**像**” (图中用不同颜色画出)。

从已抽样序列频谱 $\tilde{X}_p(\Omega)$ 中清楚地看出：只要 $N_s \leq \pi/\Omega_M$ ，原带限频谱与它的“**像**”之间没有混叠，可以让 $\tilde{X}_p(\Omega)$ 与一个离散

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

时间理想递推波器频率响应 $\tilde{H}_L(\Omega)$ 频域相乘, 来恢复原序列 $x[n]$ 的频谱 $\tilde{X}(\Omega)$ 。



6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

重建理想滤波器的频率响应及其单位冲激响应 (参见第 5 章

例 5.7) 分别为
$$\tilde{H}_L(\Omega) = \begin{cases} N_s & 2\pi l - \Omega_c < |\Omega| < 2\pi l + \Omega_c \\ 0, & 2\pi l + \Omega_c < |\Omega| < 2\pi(l+1) - \Omega_c \end{cases}$$

和
$$h_L[n] = \text{Sa}(n\pi/N_s)$$

当 $\Omega_s \geq 2\Omega_M$ 时, 滤波器截止频率取 $\Omega_c = \Omega_s/2$ 不影响恢复 $x[n]$ 。

根据 DTFT 的时域卷积性质, 频域上 $\tilde{X}_p(\Omega)$ 与 $\tilde{H}_L(\Omega)$ 相乘, 时域上相应为 $x_p[n]$ 与 $h_L[n]$ 卷积, 即

$$\begin{aligned} x[n] = x_p[n] * h_L[n] &= \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mN_s] \delta[n - mN_s] \right\} * \text{Sa}\left(\frac{\pi}{N_s} n\right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mN_s] \text{Sa}\left[\frac{\pi}{N_s} (n - mN_s)\right] \end{aligned}$$

这表明, $x[n]$ 中因抽样而丢失的序列值是由理想带限内插序列 $h_L[n] = \text{Sa}(n\pi/N_s)$ 内插的结果。当然, 如果欠抽样 ($\Omega_s < 2\Omega_M$), $\tilde{X}_p(\Omega)$ 中将产生混叠, 就不可能再恢复或重建原序列 $x[n]$ 。

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

讨论： 离散时间时域抽样定理是“**抽样率转换**”等数字信号处理方法的**理论依据**。

如果被抽样序列 $x[n]$ 是连续时间信号经过时域抽样转换来的离散时间信号，它可以离散时域抽样的带限条件 $\Omega_M \leq \pi/N_s \leq \pi/2$ 意味着连续时域抽样是远远过抽样了。从保有原连续时间信号信息的角度上讲， $x[n]$ 中有过多 (两倍以上) 的冗余，可以在离散时间中进行所谓“**减抽样**”，以提高后续的离散时间信号处理或数字信号处理的效率。有关“**减抽样**”等“**抽样率转换**”问题将在后面**第 10 章10.8 节**中讲述。

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理

■ 离散时间频域抽样定理

离散时间频域抽样定理是有限长序列离散傅里叶变换 (DFT) 表示法的理论依据。该定理陈述如下：

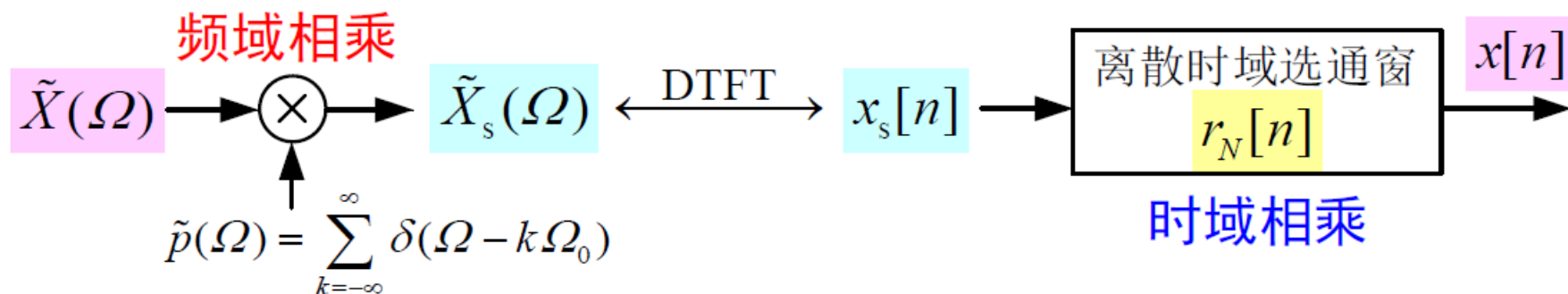
假设任意的 M 点序列 $x[n]$ 的 DTFT 为 $\tilde{X}(\Omega)$ ，即

$$x[n] = 0, \quad n < 0 \text{ 和 } n \geq M \quad \text{且} \quad \tilde{X}(\Omega) = \mathbf{F} \{x[n]\}$$

则 $\tilde{X}(\Omega)$ 可以有其等间隔的 N 个样本值 $\{\tilde{X}(2\pi k/N), k \in \langle N \rangle\}$ 唯一地确定，只要 N 或频域样本间隔 Ω_0 满足如下条件：

$$N \geq M \quad \text{或} \quad \Omega_0 = 2\pi/N \leq 2\pi/M$$

除了要考虑 $\tilde{X}(\Omega)$ 是周期为 2π 的周期函数外，离散时间频域抽样与重建过程(见下图)与连续时间频域抽样定理完全类似。



6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

包含频域样本 $\tilde{X}(2\pi k/N)$ 的频域已抽样频谱 $\tilde{X}_s(\Omega)$ 是由 $\tilde{X}(\Omega)$ 与以样本间隔 $2\pi/N$ 为周期的频域周期冲激串 $\tilde{P}(\Omega)$ 相乘得到。即

$$\tilde{X}_s(\Omega) = \tilde{X}(\Omega)\tilde{P}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k\Omega_0)\delta(\Omega - k\Omega_0), \quad \Omega_0 = 2\pi/N$$

注意：由于 $\tilde{X}(\Omega)$ 是 2π 的周期函数，在上式的无穷多个样本中，只有 2π 区间上的 N 个等间隔样本 $\{\tilde{X}(k\Omega_0), k \in \langle N \rangle\}$ 是独立的，其余都是这的 N 个样本的周期复制。这是**与连续时间频域抽样不同**的地方。

根据DTFT的**时域卷积性质**， $\tilde{X}(\Omega)$ 与 $\tilde{P}(\Omega)$ 频域相乘，相应地在时域上是 M 点序列 $x[n]$ 与 $\tilde{P}(\Omega)$ 的反变换 $p[n]$ 卷积，即

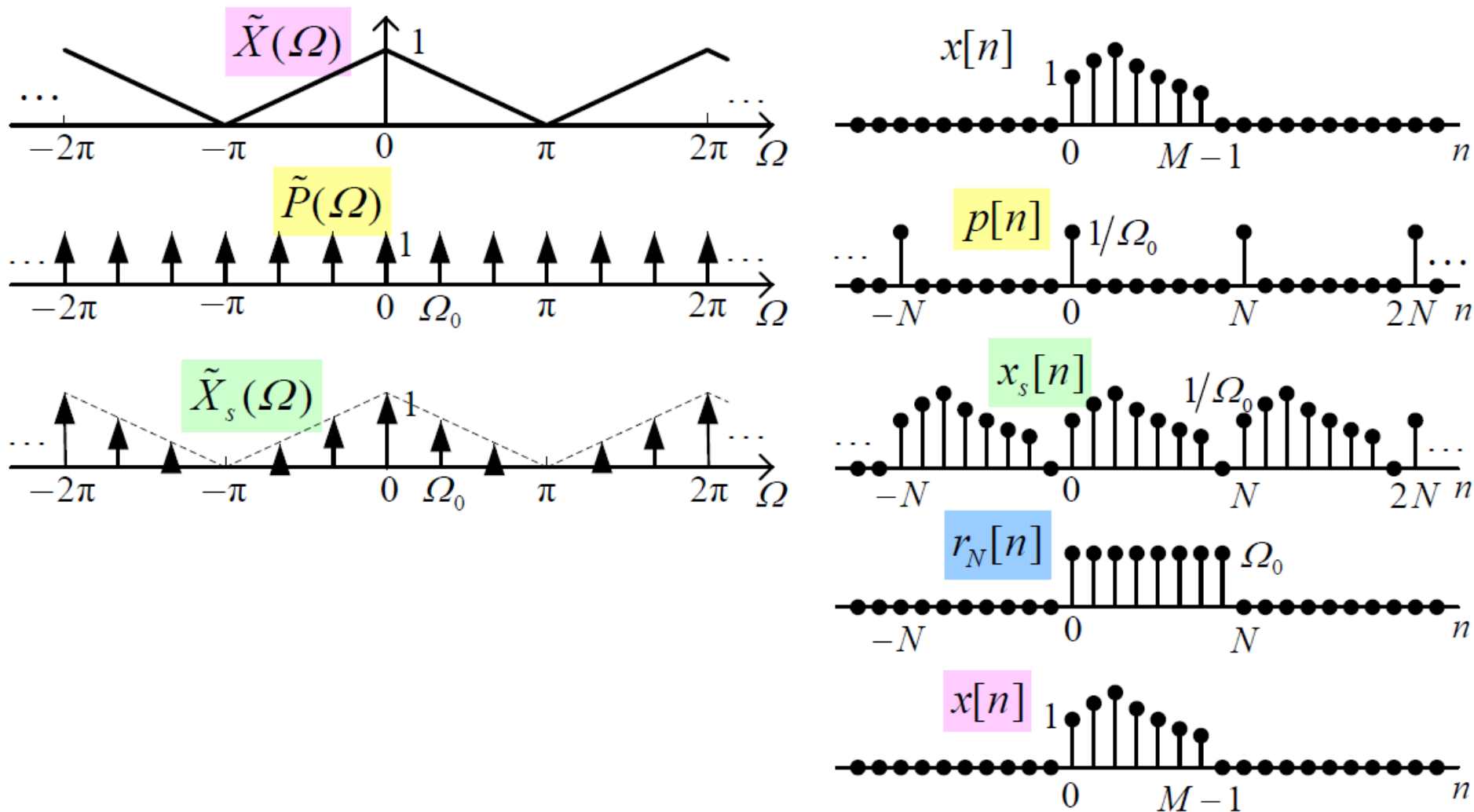
$$x_s[n] = \mathbf{F}^{-1}\{\tilde{X}_s(\Omega)\} = x[n] * p[n] = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN]$$

其中， $p[n] = \mathbf{F}^{-1}\{\tilde{P}(\Omega)\} = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left[n - m \frac{2\pi}{\Omega_0}\right]$ (参照**例 5.11**)。

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

这表明： $x_s[n]$ 是 M 点序列 $(x[n]/\Omega_0)$ 以 N 为周期的周期延拓。

下图给出了上述频域抽样的频谱及其相应的时域序列示意图。



6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

从上图右列的时域图形可以看出：只要 $N \geq M$ ， M 点序列的周期延拓就不发生时域混叠，就可以用一个矩形窗把原 M 点序列 $x[n]$ 选取并恢复出来。即

$$x[n] = x_s[n] r_N[n], \quad \text{其中} \quad r_N[n] = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases}$$

根据 **DTFT** 的频域**周期卷积性质**， $x_s[n]$ 与 $r_N[n]$ 时域相乘，在频域则是 $\tilde{X}_s(\Omega)$ 与 $r_N[n]$ 的傅里叶变换 $\tilde{R}_N(\Omega)$ 进行周期卷积，并由此内插或恢复原 M 点序列的 **DTFT** (即 $\tilde{X}(\Omega)$)，即有

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \tilde{X}_s(\Omega) \odot \tilde{R}_N(\Omega) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{X}(k\Omega_0)}{N} \frac{\sin[N(\Omega - k\Omega_0)/2]}{\sin[(\Omega - k\Omega_0)/2]} e^{-j\frac{N-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)} \end{aligned}$$

其中， $\tilde{R}_N(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \frac{\sin[N\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)} e^{-j(N-1)\Omega/2}$ (例 5.6 结果用时移性质)。

当然，如果 $N < M$ ， $x_s[n]$ 会产生时域混叠，将不能恢复 $x[n]$ 。

6.6.2 离散时间时域和频域抽样定理(续)

讨论：★ 离散时间频域抽样定理的重大作用是给有限长序列的 **DFT 表示法** 提供了严密的理论依据。

按照 **DFT** 的定义， M 点序列 $x[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数 $X[k]$ 是其 **DTFT** $\tilde{X}(\Omega)$ 在 $[0, 2\pi)$ 区间上的 N 个等间隔样本 $\tilde{X}(2\pi k/N)$ 。即

$$X[k] = \tilde{X}(2\pi k/N), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

根据上述频域抽样定理，只要 $N \geq M$ ， $X[k]$ 就完全充分地代表了 $\tilde{X}(\Omega)$ ，且可以如下式那样内插出 $\tilde{X}(\Omega)$ ：

$$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{\sin[N(\Omega - k\Omega_0)/2]}{\sin[(\Omega - k\Omega_0)/2]} e^{-j\frac{N-1}{2}(\Omega - k\Omega_0)}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

★ 与连续时间频域抽样定理一样，离散时间频域抽样定理也说明了 **DTFT 与 DFS** 之间的如下关系：

周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 与其任一周期区间 $\langle N \rangle$ 上的 N 点序列 $x_0[n]$ ，假设它们的 **DFS** 系数和 **DTFT** 分别为 \tilde{F}_k 和 $\tilde{X}_0(\Omega)$ ，则有

$$\tilde{F}_k = \tilde{X}_0(k\Omega_0)/N, \quad \Omega_0 = 2\pi/N$$

6.7 对称性质

本节介绍的对称性质将展现各种傅里叶变换和级数体现的**时域对称分布特性**与**频域对称分布特性**之间的关系，包括：

- ★ 时域**奇偶对称分布**和频域**奇偶对称分布**之间的关系；
- ★ 时域**共轭对称分布**和频域**共轭对称分布**之间的关系。

傅里叶变换和傅里叶级数的这些对称性质揭示了**时域和频域的数学表示法之间**一系列**数据量守恒 (或对等)** 特性。

属于时域和频域分布特性、并同样反映时域和频域数学表示之间数据量守恒 (或对等) 特性的，还有后面 **6.10** 节讲述的几种**希尔伯特变换**所展现的，时域或频域**因果函数**和**因果序列**与其对应表示之间的数据量守恒 (或对等) 关系。

6.7.1 傅里叶变换和级数的对称性质

■ 傅里叶变换 (CFT 和 DTFT) 的对称性质

若有 $F(\omega) = \mathbf{F} \{f(t)\}$ 或 $\tilde{F}(\Omega) = \mathbf{F} \{f[n]\}$

6.7.1 傅里叶变换和级数的对称性质(续)

则有：★ **F** $\{f(-t)\} = F(-\omega)$ 或 **F** $\{f[-n]\} = \tilde{F}(-\Omega)$

这表明：时域反转，频域也反转。

★ **F** $\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)$ 或 **F** $\{f^*[n]\} = \tilde{F}^*(-\Omega)$

这表明：时域共轭，频域则共轭又反转。

★ **F** $\{f^*(-t)\} = F^*(\omega)$ 或 **F** $\{f^*[-n]\} = \tilde{F}^*(\Omega)$

这表明：时域共轭又反转，频域仅共轭。

■ 傅里叶级数 (CFS 和 DFS) 的对称性质

基于傅里叶级数与傅里叶变换之间的关系，CFS 和 DFS 也存在完全类似的对称性质，即

$$\begin{array}{llll} \text{若有} & \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k & \text{或} & \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k \\ \text{则有:} & \tilde{x}(-t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{-k} & \text{或} & \tilde{x}[-n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_{-k} \\ & \tilde{x}^*(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_{-k}^* & \text{或} & \tilde{x}^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_{-k}^* \\ & \tilde{x}^*(-t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k^* & \text{或} & \tilde{x}^*[-n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k^* \end{array}$$

6.7.1 傅里叶变换和级数的对称性质(续)

■ 离散傅里叶变换 (DFT) 的对称性质

由于 N 点序列 $x[n]$ 及其 DFT 系数 $X[k]$ 中的 n 和 k 只限于主值区间 $[0 \ N-1]$ ，故 DFT 的对称性质有其特殊性，它们为：

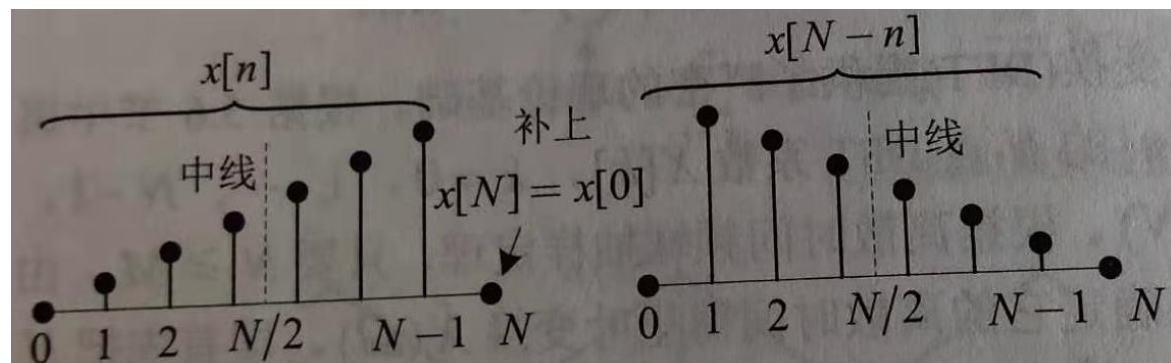
$$x[N-n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[N-k]$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*[N-k]$$

$$x^*[N-n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*[k]$$

其中， $x[N-n]$ 和 $X[N-k]$ 分别是 $x[n]$ 和 $X[k]$ 反转再右移 N 的结果，而 $x^*[N-n]$ 和 $X^*[N-k]$ 分别是 $x[n]$ 和 $X[k]$ 共轭反转再右移 N 域的结果。

右图给出一个 N 点实序列 $x[n]$ 及其反转右移 N 的 $x[N-n]$ 之图例说明。从图中



可以看出， $x[N-n]$ 和 $X[N-k]$ 就分别是 $x[n]$ 和 $X[k]$ **以主值区间**

6.7.1 傅里叶变换和级数的对称性质(续)

中线的反转。

在定义所谓“以主值区间中线的反转”后，DFT 的对称性质就与 CFT、DTFT、CFS 和 DFS 的对称性质统一起来了。

进一步，还可以定义 N 点序列 $x[n]$ 及其 DFT 系数 $X[k]$ 在其主值区间上如下的奇、偶对称分布特性：

★ N 点奇序列 $x[n] = -x[N-n]$, $X[k] = -X[N-k]$

★ N 点偶序列 $x[n] = x[N-n]$, $X[k] = X[N-k]$

如果 N 点实序列 $x[n]$ 又满足上述主值区间上的奇、偶对称特性，则可以分别称为 N 点实奇序列和实偶序列， N 点 DFT 系数也有同样的称谓。

讨论：由于反转运算和共轭运算不再是 LTI 运算，上述这些对称性质不能看作相应卷积性质的特例。它们可以直接由傅里叶变换和傅里叶级数各自的定义来证明。

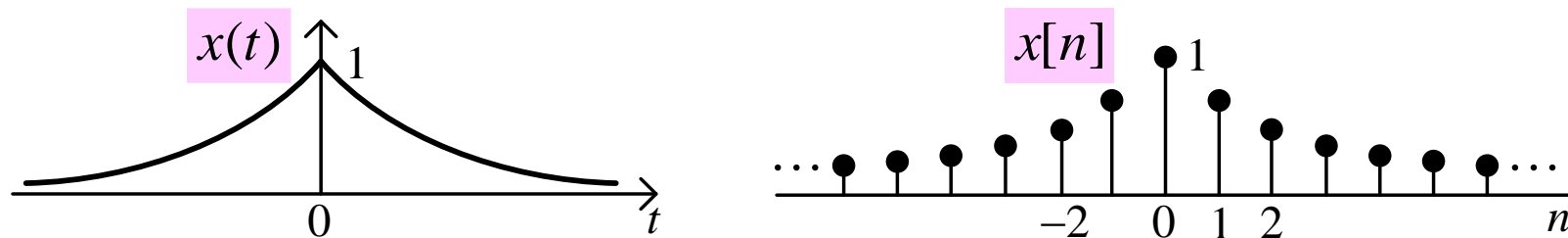
上述对称性质也有助于从已知的变换对求出新的变换对。

6.7.1 傅里叶变换和级数的对称性质(续)

【例 6.12】 试求如下双边衰减指数信号和序列的频谱。

$$x(t) = e^{-a|t|}, \operatorname{Re}\{a\} > 0 \quad \text{和} \quad x[n] = a^{|n|}, \quad 0 < |a| < 1$$

解： a 为实数时的 $x(t)$ 和 $x[n]$ 波形如下图所示。



如果熟知单边指数信号和序列的傅里叶变换(见例 5.5), 即

$$\mathbf{F} \{f(t)\} = \mathbf{F} \{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega} \quad \text{和} \quad \mathbf{F} \{f[n]\} = \mathbf{F} \{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

且 $x(t)$ 和 $x[n]$ 可以分别写成

$$x(t) = f(t) + f(-t) \quad \text{和} \quad x[n] = f[n] + f[-n] - \delta[n]$$

则利用傅里叶变换的对称性质, 不难求得 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的频谱为

$$X(\omega) = F(\omega) + F(-\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

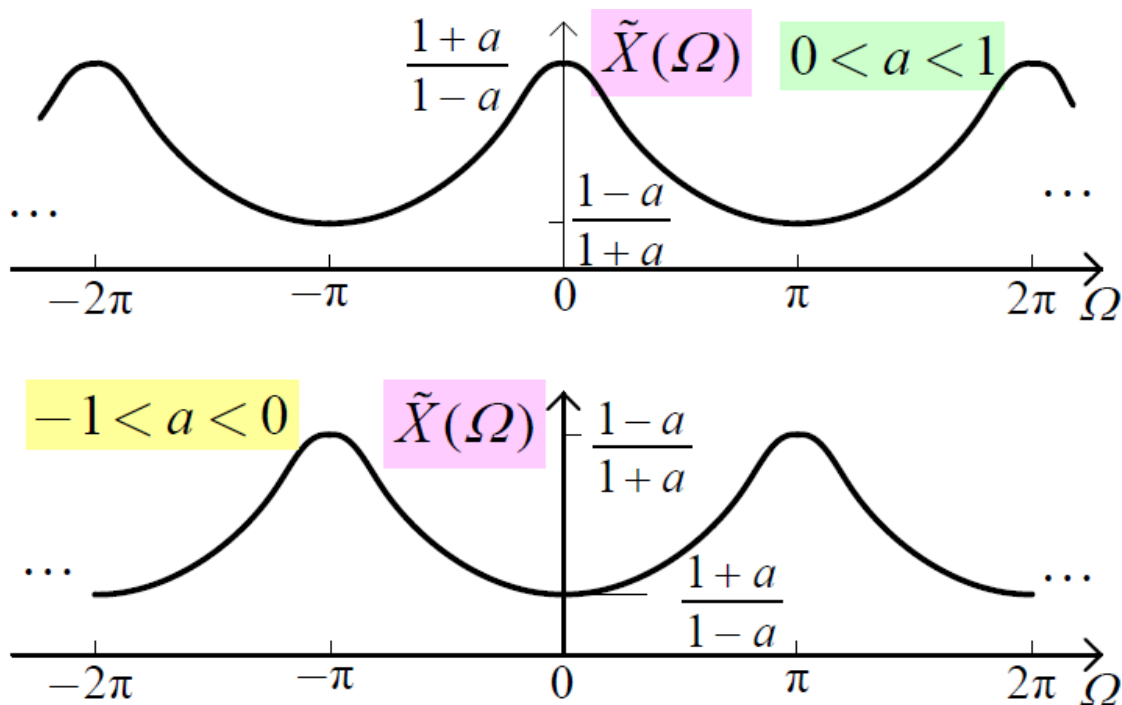
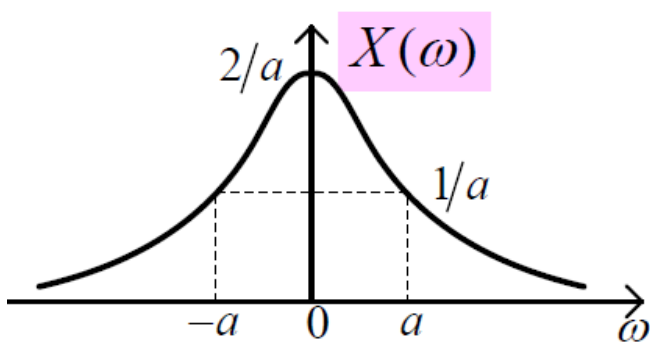
6.7.1 傅里叶变换和级数的对称性质(续)

和

$$\tilde{X}(\Omega) = \tilde{X}_1(\Omega) + \tilde{X}_1(-\Omega) - 1 = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} - 1$$

$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$$

下图画出了 $x(t)$ 和 $0 < a < 1$ 与 $-1 < a < 0$ 两种情况下 $x[n]$ 的频谱图形。



6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系

对称性质的重要意义：体现时间函数或序列的一系列时域对称分布特性与其频域表示的对称分布特性之间的关系，并揭示时域和频域两种数学表征的数据量“守恒或对等”性质。

■ 复奇、偶函数和序列之频域复奇、偶对称分布特性

● 复奇、偶函数和序列的傅里叶变换也是复奇、偶函数

如果 $f(t)$ 和 $f[n]$ 分别是时域上的复偶函数和序列，或者复奇函数和序列，即

$$f(t) = \pm f(-t) \quad \text{和} \quad f[n] = \pm f[-n]$$

根据傅里叶变换之对称性质，则有

$$F(\omega) = \pm F(-\omega) \quad \text{和} \quad \tilde{F}(\Omega) = \pm \tilde{F}(-\Omega)$$

这表明，复奇和复偶函数或序列的傅里叶变换也分别是频域上的复奇和复偶函数或周期复奇和复偶函数。

例如：
$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{2a}{\omega^2 + a^2}, \quad \text{其中 } a \text{ 为复数，且 } \operatorname{Re}\{a\} > 0$$

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

和 $x[n] = a^{|n|} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$, a 为复数, 且 $0 < |a| < 1$

● N 点复奇、偶序列的 DFT 也是 N 点复奇、偶系数序列

如果 N 点序列 $x[n]$ 是主值区间 $[0 \ N-1]$ 上的复偶序列或复奇序列, 即 $x[n] = x[N-n]$ 或 $x[n] = -x[N-n]$, 则其 N 点 DFT 系数 $X[k]$ 也是主值区间上的复偶系数序列或复奇系数序列, 即

$$X[k] = X[N-k] \quad \text{或} \quad X[k] = -X[N-k]$$

N 点奇、偶序列意为按主值区间中线奇、偶对称的 N 点序列

● 周期复奇、偶信号的 CFS 和 DFS 也是复奇、偶系数序列

如果 $\tilde{x}(t)$ 和 $\tilde{x}[n]$ 分别是周期复奇或复偶信号和序列, 即

$$\tilde{x}(t) = \pm \tilde{x}(-t) \quad \text{和} \quad \tilde{x}[n] = \pm \tilde{x}[-n]$$

则它们的傅里叶级数系数 F_k 和 \tilde{F}_k 也分别是频域上的复奇或复偶的系数序列, 即

$$F_k = \pm F_{-k} \quad \text{和} \quad \tilde{F}_k = \pm \tilde{F}_{-k}$$

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

讨论：就数学表示而言，奇、偶函数或序列只有半数的函数值或序列值是独立的，另一半可按其奇、偶对称关系确定；另一方面，周期函数或序列只有其一个周期区间上的函数值或序列值是独立的，其余周期区间上的函数值或序列值是其周期复制。因此，上述时域和频域上数学表征的复奇、偶对称分布特性表明了如下的数据量“守恒或对等”性质：

- ★ 复奇、偶时间函数及其 CFT 都只要半个实数时域和半个实数频域上的复函数值来表示，数量上“守恒或对等”；
- ★ 复奇、偶时间序列只要半个整数时域上的复序列值表示，其 DTFT 只要频域上 2π 实数区间内的复函数值表示，尽管两者都是无穷多个，但数量上“守恒或对等”；
- ★ 复周期奇、偶函数只要一个周期区间 $\langle T \rangle$ 上的复函数值表示，其 CFS 只要半个整数频域上的复系数表示，两者在数量上也“守恒或对等”；

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

★ 这种时域和频域上数学表示的“守恒或对等”性质在 DFT 和 DFS 中表现更为明显：

☆ N 点复奇、偶序列及其 N 点 DFT 都只要半数个复序列值或复系数值表示。

☆ 周期为 N 的复奇、偶周期序列及其 DFS 都只要半数个复序列值或复系数表示。

严格地说，上述的“半数个”应是：当 N 为偶数时，只要 $N/2$ 个复值表示；当 N 为奇数时，只要 $(N+1)/2$ 个复值表示。

■ 实函数和实序列的频域共轭对称分布特性

● 实函数和实序列的傅里叶变换是频域上的共轭偶函数
如果 $f(t)$ 和 $f[n]$ 分别是时域上的实函数和实序列，即

$$f(t) = f^*(t) \quad \text{和} \quad f[n] = f^*[n]$$

根据傅里叶变换之对称性质，则有

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

$$F(\omega) = F^*(-\omega) \quad \text{和} \quad \tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}^*(-\Omega)$$

这表明, $F(\omega)$ 和 $\tilde{F}(\Omega)$ 分别是 ω 的**共轭偶函数**和 Ω 的**周期共轭偶函数**。进一步表明: 尽管它们仍是复值函数, 但其**实部函数**和**虚部函数**, 或者其**模函数**和**幅角函数**分别是**实偶函数**和**实奇函数**, 当然, $\tilde{F}(\Omega)$ 还应是周期为 2π 的周期函数。即

$$\operatorname{Re}\{F(\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\} \quad \text{和} \quad \operatorname{Re}\{\tilde{F}(\Omega)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{F}(-\Omega)\}$$

及 $\operatorname{Im}\{F(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{F(-\omega)\} \quad \text{和} \quad \operatorname{Im}\{\tilde{F}(\Omega)\} = -\operatorname{Im}\{\tilde{F}(-\Omega)\}$

或 $|F(\omega)| = |F(-\omega)| \quad \text{和} \quad |\tilde{F}(\Omega)| = |\tilde{F}(-\Omega)|$

及 $\angle\{F(\omega)\} = -\angle\{F(-\omega)\} \quad \text{和} \quad \angle\{\tilde{F}(\Omega)\} = -\angle\{\tilde{F}(-\Omega)\}$

前面很多实函数或实序列的傅里叶变换例子印证了此性质。

例如:
$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{a + j\omega}, \quad \text{其中, 实数 } a > 0。$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, \quad \text{其中, 实数 } 0 < |a| < 1。$$

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

讨论： 上述的时域实函数或实序列之频域表示具有复共轭偶对称分布特性，体现了时、频域表示法之间另一种数据量“守恒或对等”性质。众所周知，一个复数要用两个实数表示，整个实数域上的实函数相当于半个实数域上的复函数，整个整数域上的实序列也相当于半个整数域上的复序列。它们频域表示的复共轭偶对称分布表明，也只需要一半数量的复数表示，或者，表示成模和幅角或实部和虚部时，只需要两个一半数量的实数表示。

实际问题中的信号或系统通常都是实信号或实系统，即它们的时域表征（如 LTI 系统的 $h(t)$ 和 $h[n]$ 等）都是实的时间函数或序列。按照上述对称性质，它们的频域表示（频谱或频率响应）都具有复共轭偶对称分布。这就是为什么通常可以用（或只画出）其正频域（ $\omega \geq 0$ 和 $0 \leq \Omega \leq \pi$ ）部分的幅度频谱和相位频谱或幅频响应和相频响应的依据，也体现出它们与整个时域上的实函数或实序列之波形表示间的守恒或对等。

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

此外，与时域上的实函数或实序列相对应的是纯虚函数或序列，傅里叶变换和级数的对称性质也表明：时域上的**纯虚函数**和**纯虚序列**的**频域表示**呈现出**复共轭奇对称分布**特性。例如

- ★ 若 $f(t) = -f^*(t)$ ，则有 $F(\omega) = -F^*(-\omega)$ ；
- ★ 若 $f[n] = -f^*[n]$ ，则有 $\tilde{F}(\Omega) = -\tilde{F}^*(-\Omega)$ ；
- ★ 若 N 点序列 $x[n] = -x^*[n]$ ，则有 $X[k] = -X^*[N-k]$ ；等等。
这里就不再一一讨论。

■ 实奇、偶函数和序列之频域表示的双重对称分布

实偶时间函数或序列和实奇时间函数或序列在时域上表示出双重对称分布特性，根据时、频域表征的“**守恒或对等**”性质，它们的频域表征也应具有双重对称分布特性。具体表现为：

- 时域**实偶**函数或序列 $\xleftrightarrow{\text{FT}}$ 频域**实偶函数**
- 时域**实奇**函数或序列 $\xleftrightarrow{\text{FT}}$ 频域**虚奇函数**

如果 $f(t)$ 和 $f[n]$ 分别是时域上的**实偶**函数或序列和**实奇**函数

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

或序列，即若分别有：

$$f(t) = f^*(t) = f(-t) \quad \text{或} \quad f[n] = f^*[n] = f[-n] \quad (\text{实偶})$$

和 $f(t) = f^*(t) = -f(-t) \quad \text{或} \quad f[n] = f^*[n] = -f[-n] \quad (\text{实奇})$

则它们的傅里叶变换分别是频域上的**实偶函数**和**虚奇函数**，当然DTFT还应同时是周期为 2π 的周期函数，即分别为

$$F(\omega) = F^*(\omega) = F(-\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}^*(\Omega) = \tilde{F}(-\Omega) \quad (\text{实偶})$$

和 $F(\omega) = -F^*(\omega) = -F(-\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{F}(\Omega) = -\tilde{F}^*(\Omega) = -\tilde{F}(-\Omega) \quad (\text{虚奇})$

进一步，若它们表示成实部和虚部，以及模和幅角，即

$$F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

或 $\tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}_R(\Omega) + j\tilde{F}_I(\Omega) = |\tilde{F}(\Omega)|e^{j\tilde{\varphi}(\Omega)}$

则分别有：

$$F_R(\omega) = F_R(-\omega), \quad F_I(\omega) = 0 \quad \text{或} \quad \tilde{F}_R(\Omega) = \tilde{F}_R(-\Omega), \quad \tilde{F}_I(\Omega) = 0$$

和 $F_R(\omega) = 0, \quad F_I(\omega) = -F_I(-\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{F}_R(\Omega) = 0, \quad \tilde{F}_I(\Omega) = -\tilde{F}_I(-\Omega)$

以及 $|F(\omega)| = |F(-\omega)| \quad \text{或} \quad |\tilde{F}(\Omega)| = |\tilde{F}(-\Omega)|$

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) = \begin{cases} 0, & F(\omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & F(\omega) < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \tilde{\varphi}(\Omega) = -\tilde{\varphi}(-\Omega) = \begin{cases} 0, & \tilde{F}(\Omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & \tilde{F}(\Omega) < 0 \end{cases}$$

表明:

★ **实偶**时间函数或序列的傅里叶变换之实部和模函数为**实偶函数**，而**虚部**为**0**，**相位函数**为**奇函数**且只取值**0**和 **$\pm\pi$** 。

例如: $\delta(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 1$ 或 $\delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 1$

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

或 $\cos(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \quad \text{或} \quad a^{|n|} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$$

$$r_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

或 $r_{2N_1+1}[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin[(2N_1+1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)}, \text{ 等等。}$

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

★ 时域上**实奇**函数或序列的傅里叶变换之**实部**为**0**，虚部为奇函数；其模函数仍为偶函数，相位函数仍为偶函数，但只取值 $\pm\pi/2$ 。

例如：

$$\delta'(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} j\omega$$

$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

或

$$\sin(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} j\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{CFT}} \begin{cases} 2/j\omega, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}[n] = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \begin{cases} -j\cot(\Omega/2), & \Omega \neq 2\pi l \\ 0, & \Omega = 2\pi l \end{cases}$$

$$e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{-2j\omega}{\omega^2 + a^2}, \quad \text{实数 } a > 0$$

$$a^{|n|} \text{sgn}[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{-j2a \sin \Omega}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}, \quad \text{实数 } |a| < 1, \text{ 等。}$$

6.7.2 时域与频域对称分布特性之间的关系(续)

■ 实时间函数和序列傅里叶变换的奇偶虚实性质

基于上述傅里叶变换和级数的时、频域对称分布特性，或可以归纳出如下有意思的性质：时域上实函数或实序列的奇、偶分解对应着频域上的虚、实分解，即

假设实函数 $f(t)$ 或实序列 $f[n]$ 分别奇、偶分解为

$$f(t) = f_o(t) + f_e(t) \quad \text{或} \quad f[n] = f_o[n] + f_e[n]$$

且它们的傅里叶变换 $F(\omega)$ 或 $\tilde{F}(\Omega)$ 表示实部和虚部形式，即

$$F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}_R(\Omega) + j\tilde{F}_I(\Omega)$$

则分别有： **F** $\{f_o(t)\} = jF_I(\omega)$ 和 **F** $\{f_e(t)\} = F_R(\omega)$

或 **F** $\{f_o[n]\} = j\tilde{F}_I(\Omega)$ 和 **F** $\{f_e[n]\} = \tilde{F}_R(\Omega)$

且 $F_R(\omega) = 2 \int_0^\infty f_e(t) \cos(\omega t) dt$ 和 $F_I(\omega) = -2 \int_0^\infty f_o(t) \sin(\omega t) dt$

或 $\tilde{F}_R(\Omega) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} f_e[n] \cos[\Omega n] - f[0]$ 和 $\tilde{F}_I(\Omega) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} f_o[n] \sin \Omega n$

作业

- 6.9 6) 8)
- 6.18 1)
- 6.19 1)
- 6.22 1)
- 6.24 1)