



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第五周

信号和系统的变换域表示法

赵 峰, 电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/3/23

第5章 信号和系统的频域表示法：各种傅里叶变换和傅里叶级数

5.1 引言

■ 信号与系统的“变换域概念和方法”的重要性

通过第 2、3、4 章的介绍和讲述，已获得称为“**时域方法**”的一套有关信号与系统的概念、理论和方法，利用它们已经可以：

- 表示、运算和分析信号，并认识信号的许多特性；
- 进行系统分析和求解，特别是 LTI 系统和用线性常系数微分方程或差分方程表示的实际因果系统，并分析和认识系统的不少功能和特性；
- 了解和掌握了一些系统综合(实现)与信号处理的方法，等等

但它们**并不完整**，并有**相当局限和不足**。因为，这些概念、理论和方法，及由此产生的对信号和系统特性的认识，都只基于信号和系统的**原本形态** (时域描述) 得到的。后面各章的讲述将会

5.1 引言(续)

看到，“**变换域方法**”弥补了时域方法的局限和不足，**两者各有所长、互为补充，形成完整的**信号与系统概念、理论和方法。

人们在科学研究和认识世界的长河中领悟到，仅从**事物的原本形态或面貌**看问题都有其局限性，难以了解和认识**隐藏在其内部的许多特性**，通常的办法是从事物的另一种形态或面貌来看问题，所谓“**变换**”，就是**将事物原本形态或面貌变换成它的另一种形态或面貌**。

变换的作用或目的——是把隐藏在事物原本形态或面貌中的某些特性凸现出来，同时也会使得原本明显的特性反而被隐藏。这种从事物不同面貌来研究问题的思想和方法，不仅可以深入和丰富对事物的认识，还能获得或开发有效解决问题的不同方法。

科学问题中的“变换”一般都是**数学变换**。就信号而言，目前已有**众多函数变换方法**，例如：傅里叶变换、拉普拉斯变换和Z变换、正弦和余弦变换、沃尔什变换、哈尔变换、K-L变换和小波变换等，它们在信号分析和处理中有其不同的应用。但是，

5.1 引言(续)

同时能适用于系统分析，并成为信号与系统理论和方法中最基本和应用最广泛的变换，仍然是如下两类变换：

- **傅里叶变换**，包括连续傅里叶变换(CFT)、离散时间傅里叶变换(DTFT)和离散傅里叶变换(DFT)；
- **拉普拉斯变换** (连续时间) 和 **Z变换** (离散时间)，其中又有**双边及单边拉普拉斯变换**和**双边及单边Z变换**。

通过这些变换，把信号和系统的时域表示变换成它们的变换域表示，以及由此获得和开发的有关信号与系统的概念、理论和方法统称为信号与系统的“**变换域方法**”。其中，**基于各种傅里叶变换**的有关概念、理论和方法称为“**频域方法**”或“**傅里叶方法**”，而以**拉普拉斯变换**和**Z变换为基础**的有关概念、理论和方法，则称为“**复频域方法**”。

■ “变换域方法”的发展历史

这两类变换域方法经历了不同的发展过程。

傅里叶方法可追溯到18世纪中叶**欧拉**、**伯努利**和**拉格朗日**等

5.1 引言(续)

数学家利用三角级数对一些数学物理问题的研究，但这些大数学家先后怀疑和抛弃了这些探索。直到半个世纪后，法国数学家傅里叶的研究工作，他提出并断言：任何周期函数都可以用成谐波关系的正弦级数来表示，还把它推广到非周期函数，发表了后来以他名字命名的级数和变换的论文，奠定了傅里叶方法的基础。

此后的一百多年中，**连续傅里叶级数**和**傅里叶积分**在众多科学和工程领域获得广泛应用。特别在**19世纪末**、**20世纪初**，**电子**和**通信技术**的兴起，给傅里叶方法提供了大显身手的舞台，目前这些领域中**许多重要概念和技术都得益于傅里叶方法**，例如：

正弦电路的相量分析法、谐波失真、滤波和滤波器、调制和解调、抽样和抽样数据系统、变频和混频、多路复用、载波电话系统、均衡、谱分析，以及各种频谱有效利用技术，等等

这些无一不是傅里叶方法结出的果实。

拉普拉斯变换起源于**19世纪末**，英国工程师亥维赛用代数的**算子方法成功求解微分方程**的研究，由于缺乏严密的数学论证，

5.1 引言(续)

未获广泛承认。后来在法国数学家拉普拉斯先前的著作中找到可靠的数学依据，重新给予严密的数学定义，并取名为拉普拉斯变换，即目前的所谓“**单边拉普拉斯变换**”，并在连续时间系统分析中逐渐取代了经典的微分方程解法所占据的统治地位。

离散时间信号与系统分析方法却有自己不同的渊源：

- ▲ 17 世纪开始有关内插、微分和积分等近似计算的数值分析方法研究；

- ▲ 18 世纪开始利用一串观测值预测未来变化的时间序列分析方法研究。

它们与连续时间的研究**各自沿着不同的方向平行、独立地发展，彼此没有联系和相互影响**。当连续时间变换域方法在通信和电子系统、系统反馈和控制等领域大显身手时，离散时间信号与系统却仍集中于数值分析和时间序列方法更广泛的应用。直到：

- ▲ 20 世纪中期出现**抽样数据系统**，才建立起离散时间与连续时间之间的联系，促使人们**把连续时间许多成功有效的方法应用到离散时间中去**；

- ▲ **数字计算机**的发明和越来越多的应用，特别是20 世纪六十年代产生的“**快速傅立叶变换**”，使得离散时间变换域方法的飞速发展，并促成了通信和计算机的结合。

5.1 引言(续)

到目前为止，像前面的时域方法一样，形成了连续时间与离散时间一套完整、并互为对偶的变换域概念、理论和方法。

■ 各种变换之间的关系

从数学上看，这些变换都属于线性函数 (或序列) 变换，并且 CFT 与双边拉普拉斯变换或 DTFT 与双边 Z 变换，都有相同或一致的函数 (或序列) 变换公式，差别仅是前者的变换基函数 (或序列) 是 $\{e^{j\omega t}, \omega \in \mathbf{R}\}$ 或 $\{e^{j\Omega n}, \Omega \in \mathbf{R}\}$ ，后者的变换基函数 (或序列) 是 $\{e^{st}, s \in \mathbf{C}\}$ 或 $\{z^n, z \in \mathbf{C}\}$ ；由于 $e^{j\omega t}$ 或 $e^{j\Omega n}$ 分别是 e^{st} 或 z^n 在 $s = j\omega$ 或 $z = e^{j\Omega}$ 时的子集，即所谓连续时间频域是其复频域 (S 平面) 上的虚轴，而离散时间频域则是其复频域 (Z 平面) 上的单位圆。因此 CFT 或 DTFT 分别可以看成双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换的特例，反过来，双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换又可以看成 CFT 或 DTFT 的一般化或推广。还可以把离散傅立叶变换作为有限长序列的一种特殊傅立叶表示。其实，从

5.1 引言(续)

后面讲述将看到，不仅这些变换本身之间有特例与一般化关系，**对应变换的绝大部分性质**之间也可做出**特例与一般化**的解释。

单边与双边拉普拉斯变换或单边与双边 Z 变换之间是**另一种特例与一般化的关系**。必须指出：单边拉普拉斯变换或单边 Z 变换仅仅对所谓“**因果时间函数或序列**”才是有**唯一性**的变换，对于一般的函数或序列，只要它们存在**双边拉普拉斯变换或双边 Z 变换**，必定是**唯一的变换**；并且，在信号和 LTI 系统的复频域表示方面，双边变换完全可以替代单边变换；但是，单边拉普拉斯变换和单边 Z 变换在**起始不松弛的因果线性系统分析**中却有不可替代的作用，这是至今单边变换仍有生命力的主要理由。

下面的变换域部分，不再像其他信号与系统教材那样，分章介绍有关的各种变换及其性质，讲述它们在信号与系统概念和方法中的作用和应用。而是在本章**集中讲述**连续时间和离散时间的**各种傅里叶变换和级数**，引入**信号和系统的频域表示法**；然后，第 6 章**统一讲述**各种傅里叶变换的性质及其在信号与系统问题中

5.1 引言(续)

的物理意义，了解导致傅里叶变换获得如此广泛应用、产生出一系列十分成功的方法和技术之诱因；接着在第7章介绍频域方法在通信系统和技术中的主要应用，使学生较早感受变换域方法的强大威力，从而激发学习的兴趣。

第8章讲述拉普拉斯变换和 Z 变换及其性质，引入信号和系统的复频域表示法，第9章综合讲述系统的变换域分析与综合的有关概念和方法，最后两章分别介绍信号与系统的概念和方法在信号分析和处理、系统反馈和控制两方面的主要应用。

说明：鉴于CFT与拉普拉斯变换及DTFT与 Z 变换之间特例与一般化的关系，目前许多综述文献中，信号和系统的频域与复频域表示已不再刻意区分，故更倾向于以“信号和系统的变换域表示法”的章名，用统一的数学框架介绍和讲述各种变换，接着用一章综合介绍和讨论这些变换的性质及其物理含义。

5.2 LTI 系统对复指数信号的响应

- LTI 系统对复指数输入的响应是相同的复指数信号

在系统研究历史中很早就发现这样的事实：连续时间 LTI 系统对输入是复指数信号 $\{e^{st}, s \in \mathbf{C}\}$ 和复正弦信号 $\{e^{j\omega t}, \omega \in \mathbf{R}\}$ 的响应，仍分别是相同的复指数信号和相同频率的复正弦信号，只是获得一个复数增益。

例如：在由电阻、电容和电感构成的电路中，如果电路的外加激励是单一频率的正弦电压或电流，则电路中所有电压和电流均是同一频率的正弦电压或电流，只是其幅度和相位不同。由此产生了电路分析中的正弦电路相量分析法。

这里用 LTI 系统的输入输出卷积关系证明这一点。对于单位冲激响应为 $h(t)$ 的连续时间 LTI 系统，如果输入 $x(t)$ 分别为 $e^{j\omega t}$ 和 e^{st} ，则系统的输出 $y(t)$ 分别为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

和

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

5.2 LTI 系统对复指数信号的响应(续)

若分别令：

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad \text{和} \quad H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbf{C}$$

它们分别是函数 $h(t)$ 的连续傅里叶变换和双边拉普拉斯变换；则系统的输出 $y(t)$ 可以分别写成

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t} \quad \text{和} \quad y(t) = H(s)e^{st}$$

其中， $H(\omega)$ 和 $H(s)$ 分别称为该 LTI 系统的频率响应和系统函数(或传递函数)。

离散时间 LTI 系统也完全类似，它们对复指数序列 z^n 和复正弦序列 $e^{j\Omega n}$ 的响应，也分别是相同的复指数序列和复正弦序列，只是有一个复数增益。也可以证明如下：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k}$$

和

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

5.2 LTI 系统对复指数信号的响应(续)

若分别令：

$$\tilde{H}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}, \quad \Omega \in \mathbf{R} \quad \text{和} \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbf{C}$$

它们分别称为离散时间 LTI 系统单位冲激响应 $h[n]$ 的离散时间傅里叶变换和双边 Z 变换；则系统的输出 $y[n]$ 可以分别写成

$$y[n] = \tilde{H}(\Omega)e^{j\Omega n} \quad \text{和} \quad y[n] = H(z)z^n$$

其中， $\tilde{H}(\Omega)$ 和 $H(z)$ 也分别称为该离散时间 LTI 系统的频率响应和系统函数(或传递函数)。

数学解释：按照线性函数变换理论，对某个线性变换，若有一种函数经历该变换后保持不变，仅获得一个加权系数，则称这种函数是该线性变换的特征函数，加权系数称为特征值。因此，复指数信号 e^{st} 和复指数序列 z^n ，以及各自的子集 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{j\Omega n}$ ，分别是连续时间和离散时间 LTI 系统输入输出信号变换的特征函数，而 $H(s)$ 和 $H(z)$ ， $H(\omega)$ 和 $\tilde{H}(\Omega)$ 分别是它们各自的特征值。因此可

5.2 LTI 系统对复指数信号的响应(续)

以获得这样的启示：正是这一数学理论引导前人开发出信号与系统的频域和复频域分析方法。本章先介绍信号和系统的频域表示法，到第 8 章再介绍复频域表示法。

● 用复正弦信号和序列分析LTI 系统

首先回顾 3.1 节分析 LTI 系统的基本思想，即寻找具有如下两个性质的一类基本信号：

- (1) 这类基本信号的线性组合可以构成相当广泛的信号；
- (2) LTI 系统对这类基本信号的响应结构上十分简单，可以导出它对任意输入的响应有一个简便的表达式。

$\delta(t)$ 或 $\delta[n]$ 、 $u(t)$ 或 $u[n]$ 等属于这样的基本信号，由此导出 LTI 系统的卷积分析方法。复正弦信号 $e^{j\omega t}$ 和复正弦序列 $e^{j\Omega n}$ 也具有上述第 2 个性质，因为，如果 LTI 系统的输入信号分别是如下复正弦信号或序列的一个线性组合：

$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t} \quad \text{或} \quad x[n] = \sum_k a_k e^{j\Omega_k n}$$

5.2 LTI 系统对复指数信号的响应(续)

则LTI系统对其中每个分量 $a_k e^{j\omega_k t}$ 或 $a_k e^{j\Omega_k n}$ 的响应分别为:

$$y_k(t) = a_k H(\omega_k) e^{j\omega_k t} \quad \text{或} \quad y_k[n] = a_k \tilde{H}(\Omega_k) e^{j\Omega_k n}$$

其中, 复数 $H(\omega_k)$ 或 $\tilde{H}(\Omega_k)$ 中的相位因子体现了LTI系统的**时不变性**。再利用LTI系统的线性性质, 总的输出分别为:

$$y(t) = \sum_k a_k H(\omega_k) e^{j\omega_k t} \quad \text{或} \quad y[n] = \sum_k a_k \tilde{H}(\Omega_k) e^{j\Omega_k n}$$

因此, 只要复正弦信号和序列满足上述第1个性质, 即它们的线性组合可以构成相当广泛的连续时间或离散时间信号, 就可以开发出LTI系统另一种有效的分析方法。傅里叶提出的**连续傅里叶级数**和**傅里叶积分**, 以及后人发展的**离散傅里叶级数**、**离散时间傅里叶变换**和**离散傅立叶变换**成功地解决了这个问题, 为信号与系统的**频域方法**奠定了数学基础。

鉴于数学中已学过CFS和CFT, 下面的讲述中将略去它们的严密数学推导, 并用对偶和类比的方法介绍和讲述**DFS**、**DTFT**和**DFT**, 最后讲述**DFT**的快速算法——快速傅立叶变换(FFT)。

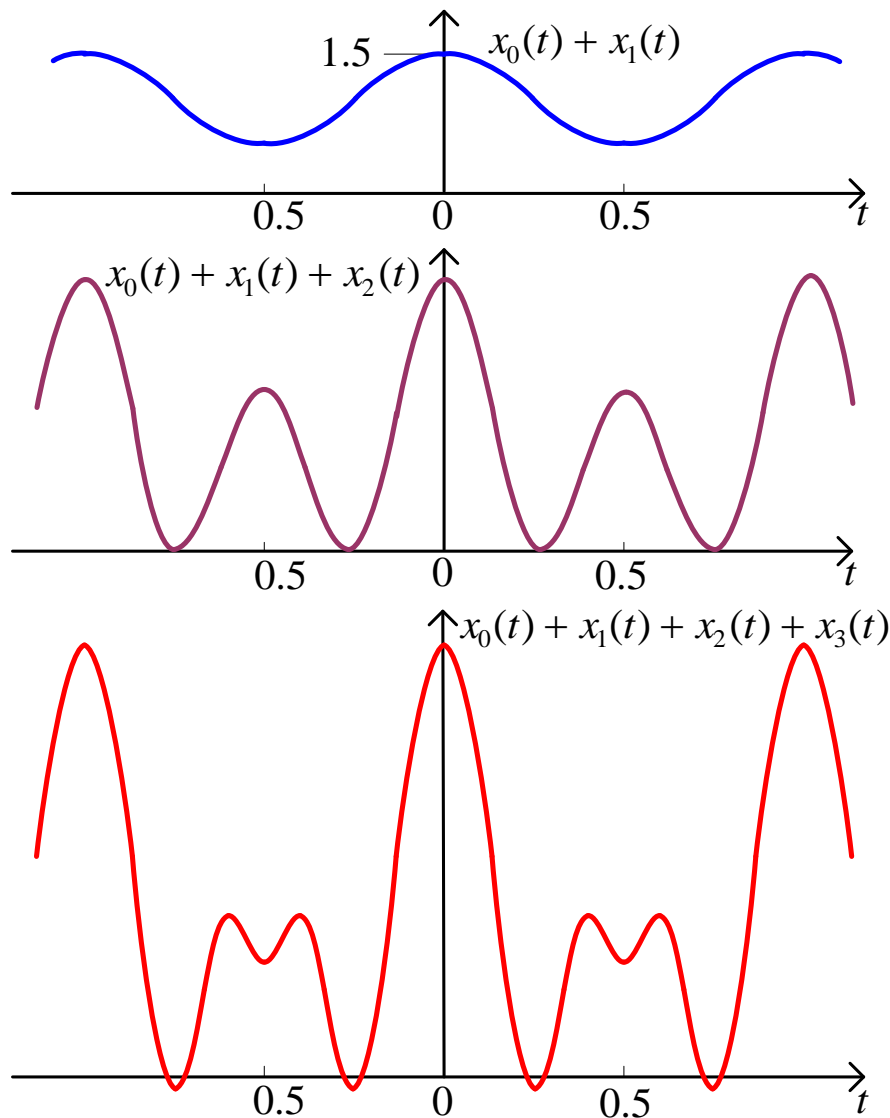
5.3 周期信号的频域表示法：CFS 和 DFS

5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数

先用一个**实例**来增强傅里叶级数的**感性认识**，例如，一个连续周期函数是如下有谐波关系之三角函数的线性组合：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) = & 1 + 0.5\cos(2\pi t) \\ & + \cos(4\pi t) \\ & + (2/3)\cos(6\pi t)\end{aligned}$$

它的周期为 1。右图分别画出了由上式中的**前 2 项**、**前 3 项**和**全部 4 项**的图形。显然，如果增加更高次的谐波项，或改变各项的系数，就可以任意改变其周期区间内的波形。



5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数(续)

■ 连续傅里叶级数(CFS)

数学中的傅里叶级数理论指出：任何周期为 T 的复值连续函数 $\tilde{x}(t)$ ，只要满足狄里赫利条件(见下节)，都可以展开为如下复正弦(或称复指数)形式的连续傅里叶级数(CFS)：

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \quad -\infty < t < \infty \quad \text{其中, } F_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} dt$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

叫做连续傅里叶级数系数， $\langle T \rangle$ 表示长度为 T 的任意区间。

这就是连续时间周期信号的傅里叶级数表示法，左式称为合成公式，右式称为分析公式。它表明：周期信号都可以表示为与重复频率 $\omega_0 = 2\pi/T$ 成谐波关系的复正弦信号 $e^{jk\omega_0 t}$ 的线性组合，加权系数就是傅里叶级数系数 F_k 。

这可以用成谐波关系的复正弦函数集 $\{e^{jk\omega_0 t}, k \in \mathbf{R}\}$ 的正交性质，即 $\int_{\langle T \rangle} e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$ 来证明。

5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数(续)

● 三角形式的连续傅里叶级数

若 $\tilde{x}(t)$ 是实周期信号, 由于 $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^*(t)$, 可证明有 $F_{-k} = F_k^*$, 利用欧拉公式, 可得到连续时间实周期信号的三角形形式CFS表示:

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

或

$$\tilde{x}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t + \theta_k\right)$$

其中, $b_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt$ 和 $a_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt$

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) dt ; \text{ 且有 } c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ 和 } \theta_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

说明; (1) 周期复信号没有三角形式的傅里叶级数展开;

(2) 实周期信号既有三角形形式傅里叶级数, 又有复正弦形式傅里叶级数, 这两种级数系数之间有如下确定的关系:

5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数(续)

$$c_0 = a_0 = F_0 ; \quad \begin{cases} a_k = 2\operatorname{Re}\{F_k\} = F_k + F_{-k} \\ b_k = -2\operatorname{Im}\{F_k\} = j(F_k - F_{-k}) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} F_k = (a_k - jb_k)/2 = c_k e^{j\theta_k} / 2 \\ F_{-k} = F_k^* = (a_k + jb_k)/2 = c_k e^{-j\theta_k} / 2 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

■ 离散傅里叶级数(DFS)

离散时间中也存在成谐波关系的复正弦序列集 $\{\phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}, k \in \langle N \rangle\}$, 其中, $\Omega_0 = 2\pi/N$, $\langle N \rangle$ 表示任意 N 个相继整数之区间。它们有如下两个性质:

- ▲ 它们都是周期序列, 其基本周期的最小公倍数为 N ;
- ▲ 它们在区间 $\langle N \rangle$ 上两两相互正交, 即

$$\sum_{n \in \langle N \rangle} \phi_k[n] \phi_l^*[n] = \sum_{n \in \langle N \rangle} e^{j(k-l)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

并在区间 $\langle N \rangle$ 上构成一个完备的正交序列集。

5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数(续)

由此可以导出或证明周期序列的离散傅立叶级数表示法，即任何周期为 N 的复值周期序列 $\tilde{x}[n]$ ，都可以展开为如下复正弦形式的离散傅里叶级数 (DFS)：

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

其中，

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

同样地，上式是合成公式，下式是分析公式， \tilde{F}_k 叫做DFS系数。

注意：尽管DFS和CFS的公式十分类似，但两者有明显区别：

- ▲ CFS是无限项级数，而周期为 N 的周期序列之DFS却是只有 N 项的有限级数，
- ▲ DFS系数 \tilde{F}_k 是周期为 N 的周期重复的系数，即

$$\tilde{F}_k = \tilde{F}_{k+mN}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

故任何顺序的 N 个 \tilde{F}_k ， $k \in \langle N \rangle$ 都足以代表DFS系数。

5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数(续)

▲ DFS 系数的矩阵算法

由DFS分析公式, N 个DFS系数可以用周期序列 $\tilde{x}[n]$ 中顺序的 N 个序列值(例如, $\tilde{x}[0], \tilde{x}[1], \dots, \tilde{x}[N-1]$), 通过列出 N 个代数方程求解来确定, 写成矩阵计算形式为

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \vdots \\ \tilde{F}_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}$$

其中, $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ 。而CFS则没有这样的系数确定法。

● 三角形式的离散傅里叶级数

如果 $\tilde{x}[n]$ 是实周期序列, 由于 $\tilde{x}[n] = \tilde{x}^*[n]$, 也有 $\tilde{F}_{-k} = \tilde{F}_k^*$, 故实周期序列也有三角形式的DFS。因为 \tilde{F}_k 在整数域 k 上既周期

5.3.1 连续傅里叶级数和离散傅立叶级数(续)

重复，又共轭偶对称，故三角形式的DFS在 N 是奇数和偶数是有稍微不同的展开式：

N 是奇数
$$\tilde{x}[n] = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[\tilde{a}_k \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) + \tilde{b}_k \sin\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) \right]$$

或
$$\tilde{x}[n] = \tilde{c}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \tilde{c}_k \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n + \tilde{\theta}_k\right)$$

N 是偶数
$$\tilde{x}[n] = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_{N/2}(-1)^n + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \left[\tilde{a}_k \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) + \tilde{b}_k \sin\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) \right]$$

或
$$\tilde{x}[n] = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_{N/2}(-1)^n + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \tilde{c}_k \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n + \tilde{\theta}_k\right)$$

其中，除了 $\tilde{c}_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n](-1)^n$ 外，其余系数分别为：

$$\tilde{a}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cos\left(k \frac{2\pi}{N} n\right) \quad \text{和} \quad \tilde{b}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \sin\left(k \frac{2\pi}{N} n\right)$$

及
$$\tilde{a}_0 = \tilde{c}_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \quad \text{和} \quad \tilde{c}_k = \sqrt{\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \text{ 或 } \frac{N}{2} - 1$$

5.3.2 傅里叶级数的收敛问题

本小节讨论傅里叶级数级数表示法的广泛性和有效性。

离散傅立叶级数是有限项级数，没有收敛问题，只要 $\tilde{x}[n]$ 是有界序列 $|\tilde{x}[n]| < \infty$ 或在一个周期内的能量有限 $\sum_{n \in \langle N \rangle} |\tilde{x}[n]|^2 < \infty$ ，都可以展开成它的DFS（一定收敛）且其DFS系数也是有限值。

■ CFS 的狄里赫利条件

CFS 能否表示任意的连续周期函数，历史上曾有激烈争论，直到狄里赫利给出了严密的条件(后来称为狄里赫利条件)，在这些条件下，连续时间周期信号才有它的CFS表示。其条件为：

条件 1：周期信号 $\tilde{x}(t)$ 在其周期区间 $\langle T \rangle$ 内必须模可积，即 $\int_{\langle T \rangle} |\tilde{x}(t)| dt < \infty$ ，这个条件确保了 $|F_k| < \infty$ 。

条件 2：周期信号 $\tilde{x}(t)$ 在其周期区间 $\langle T \rangle$ 内只允许有限个极大值和极小值。

条件 3：周期信号 $\tilde{x}(t)$ 在其周期区间 $\langle T \rangle$ 内只允许有限个不连续点，且在這些不连续点上，函数是有限值。

5.3.2 傅里叶级数的收敛问题(续)

说明: 书上给出了分别不满足 3 个条件的例子, 不符合狄里赫利条件的信号属于反常信号, 实际中一般不存在。因此, 狄里赫利条件不影响 CFS 的广泛性, 对于实际的周期信号, 可以放心地使用其傅里叶级数表示。

■ 周期信号用截短的傅里叶级数近似

如果周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或 $\tilde{x}[n]$ 用其截短的傅里叶级数来近似, 即

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{x}_M(t) = \sum_{k=-M}^M F_k e^{jk\omega_0 t}$$

或
$$\tilde{x}[n] \approx \tilde{x}_M[n] = \sum_{k=-M}^M \tilde{F}_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad 2M+1 < N$$

按照正交函数空间理论 (即广义傅里叶级数理论), 这种近似是能量和功率意义上的最佳逼近。随着 M 的增加, 近似表示的误差功率不断减少, 当 $M \rightarrow \infty$ 或 $(2M+1) = N$ 时, 误差功率将等于 0。

这种最佳逼近显示了傅里叶级数的有效性。

作业

- 5.4 2) 4)
- 5.7 3) 5)