中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

信息科学技术学院 School of Information Science and Technology

210049.03 – 信号与系统 – 第十一周

傅里叶变换和级数的性质（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/5/3

6.8 尺度比例变换性质

在 **2.4** 节介绍和讨论过连续时间和离散时间尺度比例变换：

★ 连续时域比例压扩 $x(t) \longrightarrow x(at)$；

★ 离散时间的抽取 $x[n] \longrightarrow x[Mn]$ 和内插零 $x[n] \longrightarrow x_{(M)}[n]$。

这些时域尺度比例变换或运算在频域中相应的尺度比例变换或运算，统称为傅里叶变换和级数的尺度比例变换性质。

本节将介绍和讨论这类尺度比例变换性质及其有关的概念与方法。

6.8.1 连续时间尺度变换性质、时间带宽乘积

■ 连续时域与其频域的尺度反比性质

● 连续傅里叶变换的时域与频域尺度反比性质

假设 $X(\omega)=\mathbf{F}\{x(t)\}$，则有

$$x(at) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \text{实数 } a \neq 0$$

6.8.1 连续时间尺度比例变换性质(续)

这表明，除了一个幅度因子$1/|a|$外，连续时域与其频域之间有单纯的尺度反比关系。具体地说：当$a>1$时，信号在时域上压缩a倍(或时域尺度增大a倍)，则在频域上其频谱将扩展a倍(或频域尺度减少到原来的$1/a$)；反之，当$0<a<1$时，信号在时域上扩展a倍(时域尺度减少到原来的$1/a$)，则在频域上其频谱将压缩a倍(频域尺度增大a倍)；若$a<0$，$x(at)=x(-|a|t)$，则表示同时体现时、频域尺度反比性质和反转性质

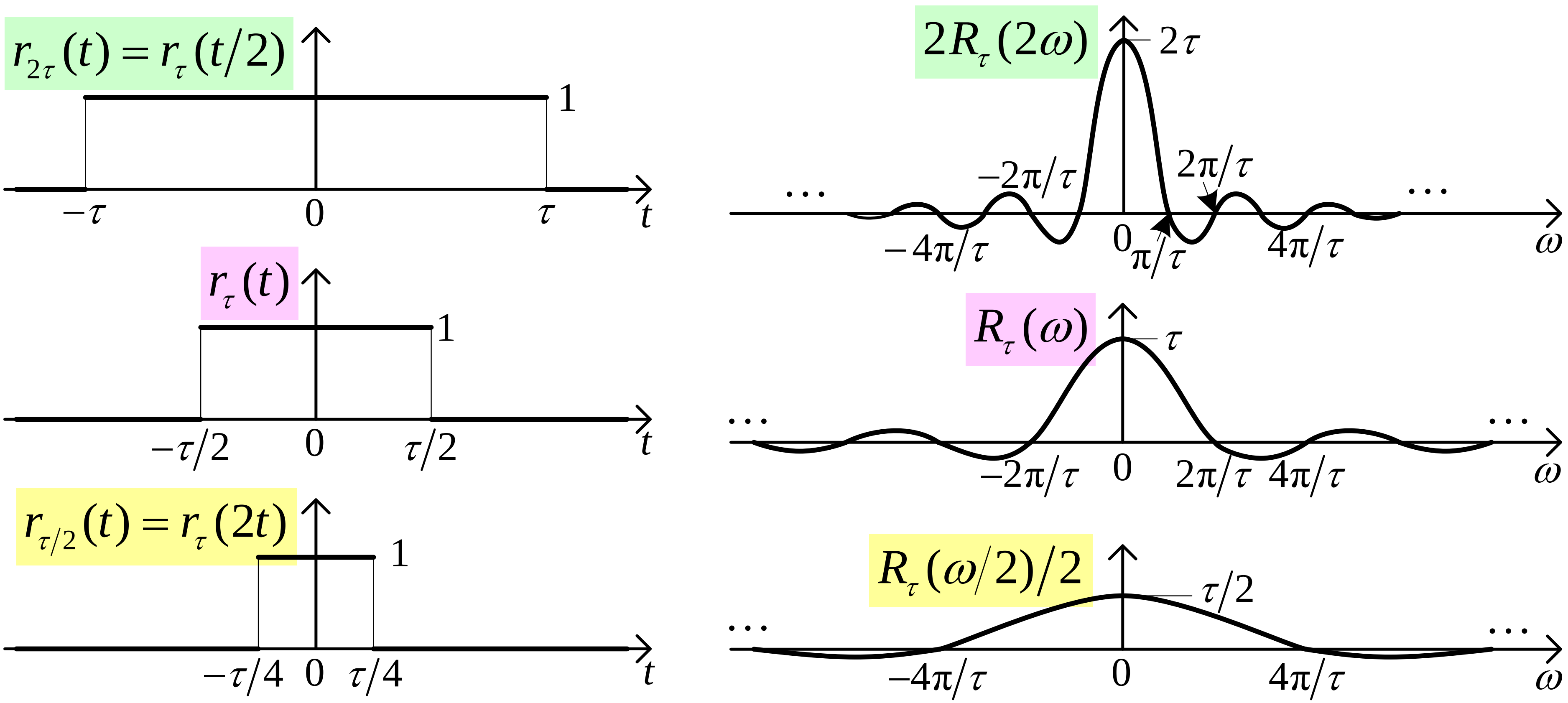
第5章例5.6求过矩形脉冲$r_\tau(t)$及其频谱$R_\tau(\omega)$，即

$$r_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases} \xleftrightarrow{\text{CFT}} R_\tau(\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

通过下图中画出的宽度分别为τ、2τ和$\tau/2$的矩形脉冲及其频谱图形，可形象地说明CFT的时、频域尺度反比性质，即$r_\tau(t)$在时域上分别压、扩一倍($a=2$和$a=1/2$)，其频谱$R_\tau(\omega)$在频域上分别扩、压一倍；且由于矩形脉冲时域压、扩一倍，使得其

6.8.1 连续时间尺度比例变换性质(续)

面积分别减少和加大一倍，这就是尺度比例变换性质中有一个幅度因子 $1/|a|$ 的解释。



- 连续傅里叶级数的时域与频域尺度反比性质

假设周期为 T 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的 CFS 系数为 F_k，其谱线的

6.8.1　连续时间尺度比例变换性质(续)

的频域间隔为 $\omega_0=2\pi/T$，则 $\tilde{x}(at)$，$a\neq 0$ 的 **CFS** 系数仍是 F_k，但谱线的频域间隔变为 $|a|\omega_0=|a|2\pi/T$。

■ "时间带宽乘积" 和 "测不准原理"

连续傅里叶变换的时、频域尺度反比性质可以引伸出信号与系统时、频分析中的一个很重要的概念，即信号或时间函数的时域占有宽度 (时宽) 与其频域占有宽度 (时宽) 成反比关系，或它们的时域分辨能力与频域分辨能力相互制约。这就是所谓 " 时间带宽乘积 " 问题和 " 测不准原理 " 。

- 如何定义信号或时间函数的时宽和带宽？
  - ★ 非零值有限的时间或频域函数的时宽或带宽很明确，例如：矩形脉冲、半波正弦脉冲、升余弦脉冲等的时宽就是其脉冲宽度；频域矩形函数或理想滤波器频率响应等的带宽通常也定义为它们的非零值宽度；
  - ★ 频域或时域函数 "主瓣" 的宽度

CFT 变换对的例子都表明：时域有限的时间函数之傅里叶变

6.8.1　连续时间尺度比例变换性质(续)

换都是频域上无限的函数，反之亦然。此时，带宽或时宽可以定义为函数峰值两边第一个零点之间的宽度 (即主瓣宽度)。例如，宽度为 τ 之矩形脉冲 $r_\tau(t)$ 的带宽为 $4\pi/\tau$ ；截止频率为 W 的理想低通滤波器之单位冲激响应的时宽可定义为 $2\pi/W$，等。

★ **3 dB 带宽**的定义和方法

对于许多实际信号 (如实的单边衰减指数信号) 或实际滤波器的幅频响应，通常采用 **3 dB 带宽** (即降到峰值的 $1/\sqrt{2}$ 的宽度) 作为其带宽的一种度量。

★ 等效时宽和等效带宽

对于一般的时间函数 $f(t)$ 及其傅里叶变换 $F(\omega)$，基于 CFT 正、反变换公式，即

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad \text{和} \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

及

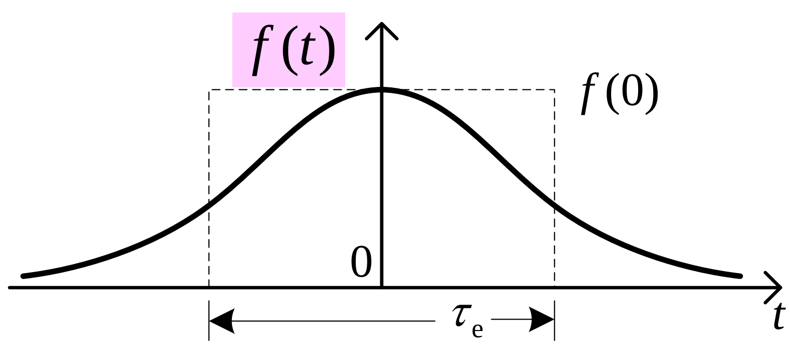
$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{和} \qquad f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega$$

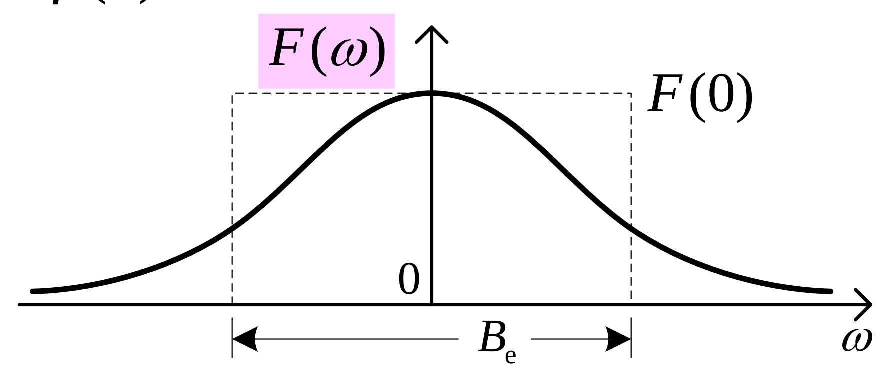
6.8.1　连续时间尺度比例变换性质(续)

也有采用时域或频域函数曲线下面积等效的矩形函数之宽度来度时宽或带宽 (如下图所示)，即

$$f(0)\tau_e = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{和} \qquad F(0)B_e = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

其中，τ_e 和 B_e 分别称为时间函数 $f(t)$ 的等效时宽和等效带宽。





● “时间带宽乘积”

无论信号或时间函数的时宽和带宽按什么定义或度量，都可以证明它们的时宽和带宽互成反比，或时间 (时宽) 带宽乘积等于常数，只是采用不同的定义或度量其常数值不同。例如：

★ 矩形脉冲 $r_\tau(t)$ 宽度 τ 与其频谱主瓣宽度 $4\pi/\tau$ 的乘积为 4π；

★ 等效时宽与等效带宽的乘积为 2π，即 $\tau_e B_e = 2\pi$。

6.8.1 连续时间尺度比例变换性质(续)

讨论：无论是测不准原理，还是时间带宽乘积为常数都表明，信号和系统的时域分辨能力与频域分辨能力相互矛盾，并互为制约，具体表现为：

★ 时间愈短的信号的频谱将占据愈宽的频带，时域响应越快(如阶跃响应的上升时间越短) 的系统就具有越宽的频带；反之，信号或系统的带宽愈窄，在时域则要求愈长的时间或系统响应愈慢。

★ 不可能企求既用很短的时间，同时又只需很窄的频带来描述、分析或呈现出信号或系统的时域特性和频域特性。

在后面的课程内容中，将会多次反复验证这种时域与频域之间的反比关系。

“测不准原理” 和时宽与带宽乘积等于常数，既是傅里叶方法的特点，也成为它作为时、频域分析方法的一个缺憾。为了弥补这个缺憾，后人做了许多努力，上世纪末出现的小波(**Wavelet**) 分析方法一定程度上弥补了傅里叶方法的这一缺憾。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理

本节介绍和讨论各种傅里叶变换和级数的相关定理和帕什瓦尔定理，并由此引入信号的能量谱和功率谱的概念。这两个性质体现出信号的时域和频域表示之间的能量或功率守恒关系。

■ 能量信号的相关定理、帕什瓦尔定理和能量谱

● CFT、DTFT 和 DFT 的相关定理

对于连续时间或离散时间能量受限信号 $x(t)$ 和 $v(t)$ 或 $x[n]$ 和 $v[n]$，如果分别有

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad \text{和} \quad V(\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}$$

或

$$\tilde{X}(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} \quad \text{和} \quad \tilde{V}(\Omega) = \mathcal{F}\{v[n]\}$$

则有

$$R_{xv}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)V^*(\omega)$$

或

$$R_{xv}[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(\Omega)\tilde{V}^*(\Omega)$$

其中，$R_{xv}(t)$ 或 $R_{xv}[n]$ 是 $x(t)$ 与 $v(t)$ 或 $x[n]$ 与 $v[n]$ 的互相关函数或序列。这称为 **CFT** 或 **DTFT** 的相关定理。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

利用相关运算与卷积运算的关系，即

$$R_{xv}(t)=x(t)*v^*(-t) \qquad 或 \qquad R_{xv}[n]=x[n]*v^*[-n]$$

和傅里叶变换的时域卷积性质，以及对称性质，即

$$v^*(-t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} V^*(\omega) \qquad 或 \qquad V^*[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{V}^*(\Omega)$$

不难证明上述相关定理。

上述相关定理表明：两个信号或序列的互相关函数或序列的傅里叶变换，等于一个信号或序列的频谱乘以另一个信号或序列频谱的共轭。

进一步，对于能量信号 $x(t)$ 或序列 $x[n]$ 的自相关函数 $R_x(t)$ 或自相关序列 $R_x[n]$，则有

$$R_x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \left|X(\omega)\right|^2 \qquad 或 \qquad R_x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \left|\tilde{X}(\Omega)\right|^2$$

这表明：能量信号或序列的自相关函数或序列与其幅度频谱的平方成为一个傅里叶变换对。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

● **CFT、DTFT 和 DFT 的帕什瓦尔定理**

能量信号 $x(t)$ 或序列 $x[n]$ 的能量 E_x 为

$$E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \qquad \text{或} \qquad E_x = R_x[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

而基于上面自相关函数或序列的傅里叶变换对，并按照傅里叶反变换公式又有

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \qquad \text{或} \qquad R_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} |\tilde{X}(\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega$$

由此得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \qquad \text{或} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} |\tilde{X}(\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega$$

这就是 **CFT 或 DTFT 的帕什瓦尔公式**。同样也可以推导出 **DFT 的帕什瓦尔定理**：若 N 点序列 $x[n]$ 的 N 点 **DFT** 系数为 $X[k]$，

则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

这些帕什瓦尔定理都表明：能量信号或序列在时域上计算的能量等于在频域上计算的能量，它体现了各种傅里叶变换表示法之时、频域能量守恒关系。

● 连续时间和离散时间信号的能量谱

参照前面 **5.4.4** 小节有关频谱密度函数的物理解释，上述帕什瓦尔公式中的 $|X(\omega)|^2$ 或 $|\tilde{X}(\Omega)|^2$ 表示其能量在频域上的分布，即单位频带内包含的能量，故称为连续时间信号 $x(t)$ 或离散时间序列 $x[n]$ 的“能量谱密度函数”，简称“能谱密度”，通常表示为

$$\Psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad 或 \quad \tilde{\Psi}_x(\Omega) = |\tilde{X}(\Omega)|^2$$

进一步，上面自相关函数或序列的傅里叶变换对可写成：

$$R_x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \Psi_x(\omega) \quad 或 \quad R_x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{\Psi}_x(\Omega)$$

这表明：能量信号或序列的自相关函数或序列与其能量谱密度函数构成一个傅里叶变换对。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

讨论： ★ 信号或序列的能量谱是其幅度频谱的平方，与相位频谱无关。换言之，凡是具有相同幅度谱但相位谱不同的信号或序列都有同样的能量谱。例如，信号或序列与其时移变种就具有完全相同等能量谱。

★ 出于相同的解释，通常也把上面两个信号 $x(t)$ 和 $v(t)$ 或两个序列 $x[n]$ 和 $v[n]$ 的互相关函数或序列的傅里叶变换称为它们的“互谱密度函数”，并表示为

$$\Psi_{xv}(\omega)=X(\omega)V^*(\omega) \quad \text{或} \quad \tilde{\Psi}_{xv}(\Omega)=\tilde{X}(\Omega)\tilde{V}^*(\Omega)$$

且它们的互相关函数或序列与互谱密度函数构成一个傅里叶变换对，即

$$R_{xv}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \Psi_{xv}(\omega) \quad \text{或} \quad R_{xv}[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{\Psi}_{xv}(\Omega)$$

注意：能量信号或序列的能谱密度函数是频域上的实函数，而两个信号或序列的互谱密度函数却是频域上的复值函数。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

■ 功率信号的相关定理、帕什瓦尔定理和功率谱

功率受限信号或序列不满足模可积或模可和，没有严格意义上的傅里叶变换。请注意：即使像周期信号或序列和常数信号或序列这样一些有扩展意义的傅里叶变换之功率受限信号或序列，也不能套用上面能量信号或序列的相关定理和帕什瓦尔公式，但与此呼应，功率信号也有如下的相关定理和帕什瓦尔定理：

对于连续时间或离散时间功率受限信号 $x(t)$ 和 $v(t)$ 或 $x[n]$ 和 $v[n]$，则分别有

$$R_{xv}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}X_{2T}(\omega)V_{2T}^{*}(\omega)$$

或

$$R_{xv}[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\tilde{X}_{2N+1}(\Omega)\tilde{V}_{2N+1}^{*}(\Omega)$$

其中：$R_{xv}(t)$ 或 $R_{xv}[n]$ 是 $x(t)$ 与 $v(t)$ 或 $x[n]$ 与 $v[n]$ 的互相关函数或序列 **(见2.7.2 节)**；而 $X_{2T}(\omega)$ 和 $V_{2T}(\omega)$ 或 $\tilde{X}_{2N+1}(\Omega)$和 $\tilde{V}_{2N+1}(\Omega)$ 分别是 $x(t)$ 和 $v(t)$ 或 $x[n]$ 和 $v[n]$ 截短形式的 **CFT** 或 **DTFT**，

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

例如 $$x_{2T}(t)=x(t)r_{2T}(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_{2T}(\omega)$$

或 $$x_{2N+1}[n]=x[n]r_{2N+1}[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}_{2N+1}(\Omega)$$

由于功率信号的相关函数或序列是一个极限，它们的傅里叶变换也表示成一个极限。这就是功率信号或序列所表示的相关定理。

基于这样的表示，有关功率信号或序列之相关定理和帕什瓦尔定理的其他结论和表示，就与上面能量信号或序列完全类似。

对于功率信号或序列 $x(t)$ 或 $x[n]$ 的自相关函数或序列 $R_x(t)$ 或 $R_x[n]$，则有

$$R_x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \Phi_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_{2T}(\omega)\right|^2$$

或 $$R_x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{\Phi}_x(\Omega)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left|\tilde{X}_{2N+1}(\Omega)\right|^2$$

其中，$\Phi_x(\omega)$ 或 $\tilde{\Phi}_x(\Omega)$ 称为 $x(t)$ 或 $x[n]$ 的“功率谱密度函数”，它表示单位频带内功率信号或序列的平均功率。

这表明：功率信号或序列的自相关函数或序列与其功率谱密

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

度函数构成一个傅里叶变换对。顺便指出，这一概念和关系在随机过程理论中称为“维纳—欣钦公式”，它成为随机信号谱分析中的一个重要方法。

功率受限信号或序列的帕什瓦尔公式为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_{2T}(\omega)|^2}{2T}\mathrm{d}\omega$$

或

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\lim_{N\to\infty}\frac{|X_{2N+1}(\Omega)|^2}{2N+1}\mathrm{d}\Omega$$

表明：等号左边是时域计算的平均功率，右边是频域计算的平均功率，两者相等。

- **CFS 和 DFS 的帕什瓦尔定理，周期信号的功率谱**

周期信号或序列是典型的功率受限信号，它们的傅里叶变换是频域上的等间隔冲激串，不能直接用傅里叶变换之模的平方来表示它们的功率谱密度，必须借助傅里叶级数表示。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

假设周期信号$\tilde{x}(t)$或周期序列$\tilde{x}[n]$的周期为T或N，它们的**CFS**或**DFS**系数为X_k或$\tilde{X}_k$。根据周期信号之周期卷积与相关运算的关系(见**3.5.2**节)，$\tilde{x}(t)$或$\tilde{x}[n]$的自相关函数或序列为

$$\tilde{R}_x(t)=\frac{1}{T}\tilde{x}(t) \circledast \tilde{x}^*(-t) \quad 或 \quad \tilde{R}_x[n]=\frac{1}{N}\tilde{x}[n] \circledast \tilde{x}^*[-n]$$

利用**CFS**或**DFS**的时域周期卷积性质和对称性质，可以得到

$$\tilde{R}_x(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} |X_k|^2 \quad 或 \quad \tilde{R}_x[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} |\tilde{X}_k|^2$$

这表明：周期信号或序列之自相关函数或序列的傅里叶级数系数与其自身的傅里叶级数系数模的平方构成**CFS**或**DFS**对。

再用前面导出傅里叶变换帕什瓦尔公式相同的方法得到

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|\tilde{x}(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2 \quad 或 \quad \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>}|\tilde{x}[n]|^2=\sum_{k\in<N>}|\tilde{X}_k|^2$$

这就是**CFS**或**DFS**的帕什瓦尔公式。它表明周期信号或序列的平均功率等于其傅里叶级数系数模的平方和。

6.9 相关定理和帕什瓦尔定理(续)

由于$\tilde{R}_x(t)$或 $\tilde{R}_x[n]$也是周期为 T 或 N 的周期函数或序列，它们既可以用其 **CFS** 或 **DFS** 系数$|X_k|^2$或$|\tilde{X}_k|^2$来表示，也有扩展意义的傅里叶变换表示。根据周期信号或序列的傅里叶变换与其傅里叶级数系数之间的关系，则有

$$\tilde{R}_x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

或

$$\tilde{R}_x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\tilde{X}_k|^2\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$

两式的右边就是周期信号 $\tilde{x}(t)$ 或周期序列 $\tilde{x}[n]$的“功率谱密度函数” $\Phi_x(\omega)$ 或 $\tilde{\Phi}_x(\Omega)$，即

$$\Phi_x(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right) \text{ 或 } \tilde{\Phi}_x(\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\tilde{X}_k|^2\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$

表明：周期信号或序列功率谱是分布在离散频率 $2k\pi/T$ 或 $2k\pi/N$ 上、强度为各自 **CFS** 或 **DFS** 系数之模乘以2π 的冲激串。

作业

- 6.8 2) 9)
- 6.16 4) 注：此题开头处的图P6.15应为P6.16
- 6.33 1)