



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十六周

系统的变换域分析和综合

赵 峰, 电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/6/6

第九章 系统的变换域分析和综合

9.1 引言

- ◆ LTI系统的变换域分析方法
- ◆ 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析
- ◆ 系统函数和频率响应表征的LTI系统特性
- ◆ 系统函数与LTI系统时域和频域特性的关系
- ◆ 一阶系统和二阶系统
- ◆ 全通系统和最小相移系统
- ◆ 系统的级联和并联实现结构

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◇ 时域

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad y[n] = x[n] * h[n]$$

◇ 频域

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \tilde{Y}(\Omega) = \tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)$$

◇ 复频域

$$Y(s) = X(s)H(s), R_Y \supset R_X \cap R_H \quad Y(z) = X(z)H(z), R_Y \supset R_X \cap R_H$$

已知某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和输入信号 $x(t)$ 如图 7.4 所示, 试求该系统

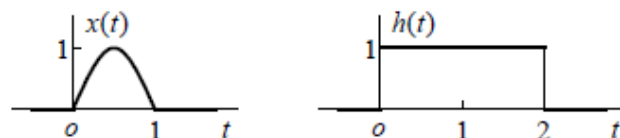


图 7.4 例 7.3 中的 $x(t)$ 和 $h(t)$

在输入 $x(t)$ 时的输出 $y(t)$ 。

解: 显然, 可以用 $x(t)$ 和 $h(t)$ 卷积直接求出输出 $y(t)$, 但这里用拉氏变换来求解。图 7.4 中的 $x(t)$ 和 $h(t)$ 可分别表示成

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

$$\text{和 } x(t) = \sin \pi(t)u(t) + \sin \pi(t-1)u(t-1)$$

对它们分别求拉氏变换, 得

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1-e^{-2s}}{s}, \quad R_h: \text{整个 } S \text{ 平面}$$

$$X(s) = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} + \frac{\pi e^{-s}}{s^2 + \pi^2} = \frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2 + \pi^2}, \quad R_x: \text{整个 } S \text{ 平面}$$

由于 $x(t)$ 和 $h(t)$ 均为有限持续期信号, 故收敛域为整个 S 平面。按照(7.1.3)式, 输出 $y(t)$ 的拉氏变换为

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{\pi}{s(s^2 + \pi^2)}(1+e^{-s})(1-e^{-2s}), \quad R_y: \text{整个 } S \text{ 平面}$$

剩下的问题是求上述 $Y(s)$ 的反拉氏变换, 令

$$Y_1(s) = \frac{\pi}{s(s^2 + \pi^2)}, \quad R_{y1} = (\operatorname{Re}\{s\} > 0)$$

且有

$$\mathcal{L}^{-1}\{1+e^{-s}\} = \delta(t) + \delta(t-1)$$

和

$$\mathcal{L}^{-1}\{1-e^{-2s}\} = \delta(t) - \delta(t-2)$$

则有

$$y(t) = y_1(t) * [\delta(t) + \delta(t-1)] * [\delta(t) - \delta(t-2)]$$

为求 $y_1(t)$ 的反拉氏变换, 把 $Y_1(s)$ 部分分式展开为

$$Y_1(s) = \frac{\pi}{s(s^2 + \pi^2)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \pi^2} \right), \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

利用基本拉氏变换对, 可直接写出 $Y_1(s)$ 的反拉氏变换,

即

$$y_1(t) = [1 - \cos \pi t] u(t) / \pi$$

最后, 该 LTI 系统对 $x(t)$ 的响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) * [\delta(t) + \delta(t-1)] * [\delta(t) - \delta(t-2)] \\ &= [y_1(t) + y_1(t-1)] * [\delta(t) - \delta(t-2)] \\ &= y_2(t) - y_2(t-2) \end{aligned}$$

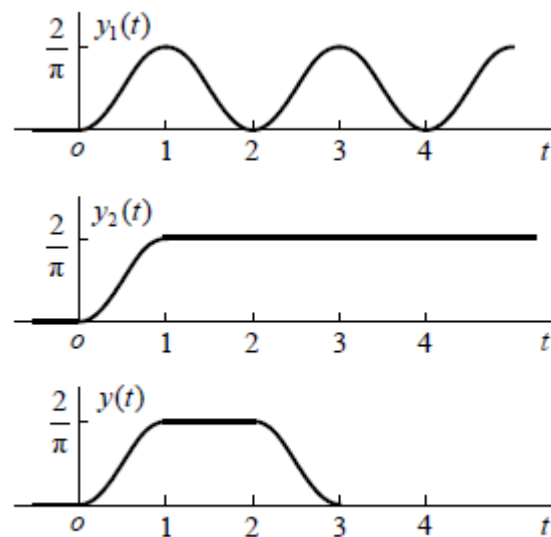
其中

$$y_2(t) = y_1(t) + y_1(t-1) = \{[1 - \cos \pi t]u(t) + [1 - \cos \pi(t-1)]u(t-1)\} / \pi$$

由于本题的 $h(t)$ 和 $x(t)$ 的傅里叶变换也存在, 故本题也可用频域方法来求解, 并将得出同样的结果。另

外, 直接用 $h(t)$ 和 $x(t)$ 卷积, 利用卷积性质, 也可方便地

求出 $y(t)$, 这些请读者自行练习。



$y_1(t)$, $y_2(t)$ 和 $y(t)$

已知如下离散时间 LTI 系统的 $h[n]$ ，试求对三角序列 $x[n] = n\{u[n] - u[n-11]\}$ 的响应 $y[n]$ 。

$$h[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n] + \delta[n+1]$$

解：用 Z 变换求解如下：

$$H(z) = Z\{h[n]\} = z - 2 + z^{-1} = z(1 - z^{-1})^2, \quad 0 < |z| < \infty$$

$$\begin{aligned} X(z) &= Z\{n(u[n] - u[n-11])\} \\ &= Z\{nu[n] - (n-11)u[n-11] - 11u[n-11]\} \end{aligned}$$

利用基本 Z 变换对及其时移性质，则有

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{z^{-12}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{11z^{-11}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 0$$

系统输出 $y[n]$ 的 Z 变换为

$$Y(z) = X(z)H(z) = 1 - z^{-11} - 11z^{-10}(1 - z^{-1}) = 1 - 11z^{-10} + 10z^{-11}, \quad |z| > 0$$

该 LTI 系统对给定三角序列的响应为

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\} = \delta[n] - 11\delta[n-10] + 10\delta[n-11]$$

由于本题中 $h[n]$ 和 $x[n]$ 均存在离散时间傅里叶变换，它们的 DTFT 等于用 $e^{j\omega}$ 替换其 Z 变换像函数中的 z 后获得的复值函数，用频域方法也可求得上述结果。如直接用离散时域的卷积方法也可求得，请读者自行练习。

9.2 LTI系统的变换域分析方法

- ◆ 已知LTI系统的时域表示和输入信号，求取系统的输出信号
 - ◆ 直接卷积
 - ◆ 通过拉普拉斯变换和Z变换或傅里叶变换，变换成他们的复频域或频域表示，求得输出信号的复频域或频域表示，最后通过反变换求得输出信号的时域表达式
 - ◆ 将卷积变为相乘
 - ◆ 利用变换的性质求变换和反变换

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◆ LTI系统的变换域表示比其时域表示更容易获得

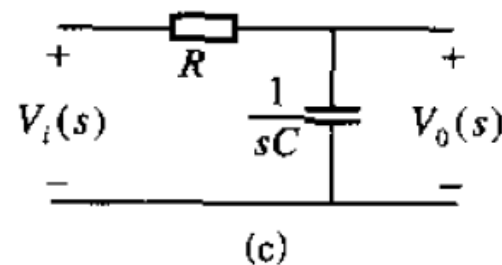
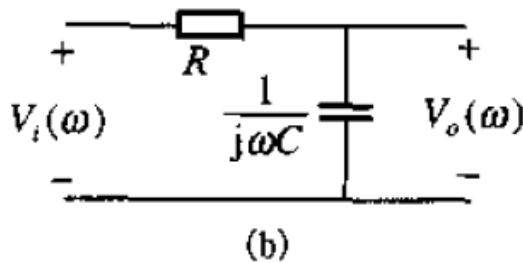
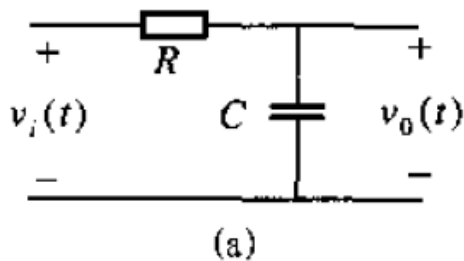
◆ 电路系统

- ◆ 在电路分析中，若在激励变为非零以前电路中所有电容上的电压及所有电感里的电流均为零，即满足“起始松弛”条件，他们就是因果LTI系统，其系统函数 $H(s)$ 和频率响应 $H(\omega)$ 比单位冲激响应 $h(t)$ 更容易获得

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◆ 例题

- ◆ 在如图所示的RC积分电路中，输入输出端电压 $v_i(t)$ 和 $v_o(t)$ 分别看做系统的输入输出，试求
 - ◆ 对周期为 T ，宽度为 T_1 的单位幅度周期矩形脉冲电压的稳态响应
 - ◆ 当电容 C 上的电压为0时，电路的单位阶跃响应 $s(t)$



解： 1) 电路对周期输入的稳态响应就是输入加入很长时间后电路的输出，此时，有损电路中电容上的电压(或电感里的电流)已衰减为 0，因此可以把电路或网络看作 LTI 系统，它的稳态响应就是 LTI 系统对周期输入的响应。由于周期信号可分解为一系列谐波复指数信号的线性组合，这里可以用频域分析法求解。

图 (b)画出了 RC 积分电路的复阻抗模型，它的频率响应为：

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + (1/j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1/\tau}{j\omega + (1/\tau)}$$

其中， $\tau = RC$ 为该 RC 积分电路的时间常数。周期矩形脉冲信号的频域表示为：

$$V_i(\omega) = \omega_0 T_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

其中， $\omega_0 = 2\pi/T$ 。输出电压的傅里叶变换为：

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega) = \omega_0 T_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1/\tau}{j\omega + (1/\tau)} S_a\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

由此可分别得到输出电压中直流分量 ($k=0$) 和各次谐波分量的幅度和相位。但要通过傅里叶级数合成公式，求出输出电压的时域表示和波形较困难，待下面求出 RC 积分电路的单位阶跃响应后再来讨论这个问题。

2) RC 电路的单位阶跃响应 $s(t)$ 就是 $v_i(t) = u(t)$ 时的 $v_o(t)$ ，这里用复频域求解。图 (c) 为 RC 积分电路的 s 域模型，它的系统函数 $H(s)$ 为：

$$H(s) = \frac{1/sC}{R + (1/sC)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)}, \quad \text{Re}\{s\} > -\frac{1}{\tau}$$

顺便指出，在电路和网络分析中遇到的都是因果系统，传递函数或系统函数的收敛域总是最右边极点为边界的右半个 s 平面，一般可不必说明，也不会造成求解结果的混淆。

单位阶跃输入电压的拉氏变换为：

$$V_i(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

RC 积分电路的单位阶跃响应的复频域表示为:

$$V_0(s) = V_i(s)H(s) = \frac{1/\tau}{s[s + (1/\tau)]}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

上式可部分分式展开为:

$$V_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/\tau)}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

对上式进行拉氏反变换, 求得 RC 积分电路的单位阶跃响应为:

$$s(t) = (1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

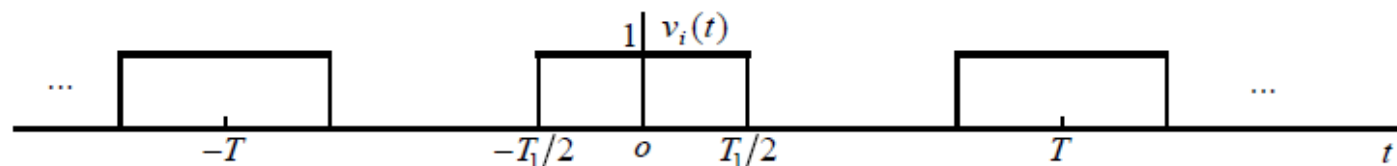
然后, 求 RC 积分电路对图 (a)所示的周期脉冲的时域响应, 该周期矩形脉冲可表示为:

$$v_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[u(t - nT + \frac{T_1}{2}) - u(t - nT - \frac{T_1}{2}) \right]$$

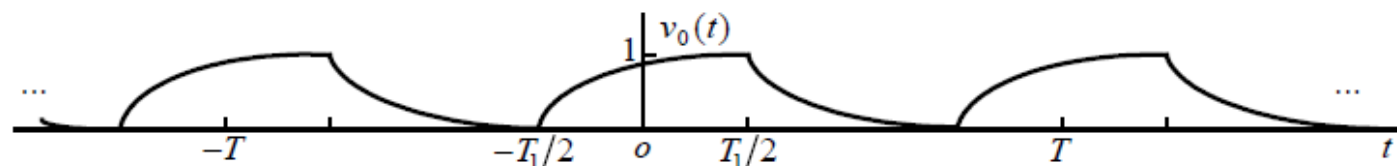
根据 LTI 系统的线性性质和时不变性质, 它对上述周期矩形脉冲输入的响应 $v_0(t)$ 为:

$$v_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[s(t - nT + \frac{T_1}{2}) - s(t - nT - \frac{T_1}{2}) \right]$$

其中, $s(t)$ 为上面已求得的 RC 积分电路的单位阶跃响应。图 (b)画出了 $v_0(t)$ 的波形。



(a) 周期矩形脉冲



(b) RC 积分电路对周期矩形脉冲的响应

周期矩形脉冲输入及其 RC 积分电路对它的响应

9.2 LTI系统的变换域分析方法

- ◇ 用微分方程和差分方程表征的LTI系统的系统函数
 - ◇ N阶线性常系数微分方程和差分方程描述的连续时间和离散时间LTI系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- ◇ 系统函数

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

9.2 LTI系统的变换域分析方法

- ◆ 用微分方程和差分方程表征的LTI系统的系统函数
 - ◆ 收敛域的确定
 - ◆ 附加信息，如LTI系统是“因果”、“稳定”或“反因果”的，或者有关系统输入和输出的其他信息

例题

用上面介绍的变换域方法求解第四章中的例 4.7 题。

解： 由因果 LTI 系统的微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

该因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad R_h = (\operatorname{Re}\{s\} > -1)$$

该系统有两个极点， $p_1 = -1$ ， $p_2 = -3$ ，由于已知该系统为因果 LTI 系统，其收敛域只能是系统最右侧极点的右半个 S 平面，即 $\operatorname{Re}\{s\} > -1$ 。最后利用部分分式展开，通过反变换求得其单位冲激响应。

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \right\} = (1/2)e^{-t}u(t) + (1/2)e^{-3t}u(t)$$

这一结果与例 4.7 中的结果完全一样。

例题 由如下差分方程表示的因果 LTI 系统，试求其单位冲激响应 $h[n]$ 。

$$y[n] - (3/4)y[n-1] + (1/8)y[n-2] = 2x[n]$$

解： 它的系统函数为

$$H(z) = \frac{2}{1 - (3/4)z^{-1} + (1/8)z^{-2}} = \frac{2}{[1 - (1/2)z^{-1}][1 - (1/4)z^{-1}]}, \quad R_h = \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$$

由于该因果系统有两个一阶极点， $p_1 = 1/2$ ， $p_2 = 1/4$ ，因果性决定了其收敛域为 $|z| > 1/2$ 。为求它的单位冲激响应，这里也用部分分式展开方法求其反 Z 变换。

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{2}{(1 - (1/2)z^{-1})(1 - (1/4)z^{-1})}, |z| > \frac{1}{2} \right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{4}{1 - (1/2)z^{-1}} - \frac{2}{1 - (1/4)z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2} \right\} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

从上面两个例子可看出，用拉氏变换或 Z 变换方法，确定用微分方程或差分方程表示的因果 LTI 系统的单位冲激响应，要比 4.6 节中介绍的时域求解方法简便些

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◇ 用微分方程和差分方程表征的稳定LTI系统的频率响应

◇ 频率响应

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

$$\tilde{H}(\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◇ 变换域求反卷积

- ◇ 只要已知LTI系统、输入信号和输出信号中的任意两个，可方便求出另一个的变换域表示，然后得到时域表示

某个连续时间因果 LTI 系统, 已知它对如下输入 $x(t)$ 的输出为 $y(t)$, 试求该 LTI 系统的 $h(t)$ 。

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & t < 0, t > 2 \end{cases} \quad \text{和} \quad y(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$$

解: $x(t)$ 和 $y(t)$ 的拉氏变换分别为

$$X(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s}, \quad R_x: \text{整个 } S \text{ 平面} \quad \text{和} \quad Y(s) = \frac{\pi(1 + e^{-s})}{s^2 + \pi^2}, \quad R_y: \text{整个 } S \text{ 平面}$$

该 LTI 系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\pi s(1 + e^{-s})}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-2s})} = \frac{\pi s}{s^2 + \pi^2} \frac{1}{1 - e^{-s}}, \quad R_h = (\operatorname{Re}\{s\} > 0)$$

为求 $\{H(s), R_h\}$ 的反拉氏变换, 考虑到在该收敛域中 $|e^{-s}| < 1$, 可利用如下泰勒级数

$$\frac{1}{1 - e^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-s})^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

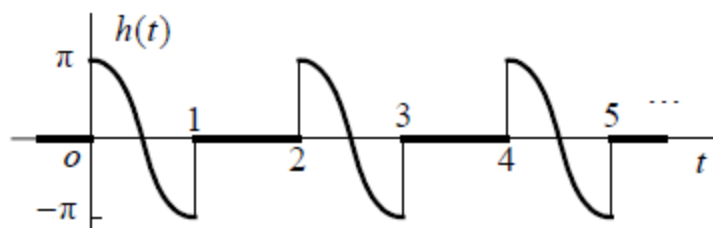
把 $H(s)$ 改写成

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi s}{s^2 + \pi^2} e^{-ns}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

利用(6.2.12)式和拉氏变换时移性质, 求得其反变换, 即该 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi \cos \pi(t-n) u(t-n)$$

上图画出了 $h(t)$ 的波形。



因果 LTI 系统的单位冲激响应

已知离散时间 LTI 系统单位冲激响应为 $h[n] = a^n u[n]$ ，在输入 $x[n]$ 时输出为 $y[n] = b^n u[n]$ ，其中实数 $b > a > 0$ ，试求这个输入 $x[n]$ 。

解：首先求 $h[n]$ 和 $y[n]$ 的双边 Z 变换，它们分别为

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a \quad \text{和} \quad Y(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$x[n]$ 的 Z 变换为 $X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$ 。根据收敛域的性质， $x[n]$ 为一个右边序列，

即
$$x[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b \right\} = Z^{-1} \left\{ 1 + \frac{(b-a)z^{-1}}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b \right\} = \delta[n] + (b-a)b^{n-1}u[n-1]$$

上面两个例子充分说明了变换域方法的好处。LTI 系统变换域分析方法的优越性，还将在用微分或差分方程表征的一类 LTI 系统，以及逆系统和反馈系统的分析中显示出来。

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◇ 有理函数反变换的部分分式展开法

$$F(s) = \begin{cases} \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, N > M \\ \sum_{m=0}^{M-N} C_m s^m + \frac{\beta_{N-1} s^{N-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, N \leq M \end{cases}, ROC = R_F$$
$$F(z) = \begin{cases} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)} + \alpha_N z^{-N}}, N > M \\ \sum_{m=0}^{M-N} C_m z^{-m} + \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)} + \alpha_N z^{-N}}, N \leq M \end{cases}, ROC = R_F$$

9.2 LTI系统的变换域分析方法

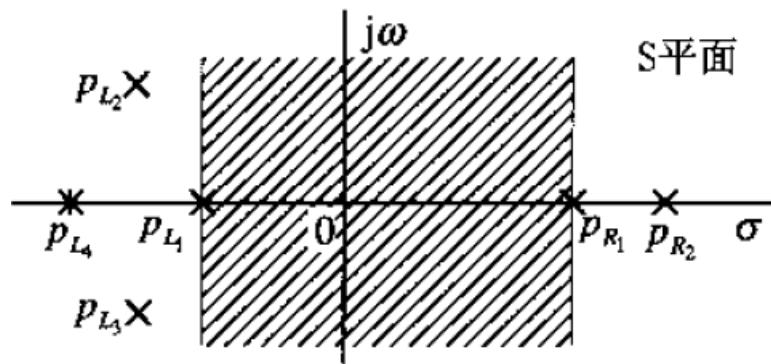
◇ 有理函数反变换的部分分式展开法

$$F(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(s-p_i)^k}, N > M \\ \sum_{m=0}^{M-N} C_m s^m + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(s-p_i)^k}, N \leq M \end{cases}, ROC = R_F$$
$$F(z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{ik}}{(1-p_i z^{-1})^k}, N > M \\ \sum_{m=0}^{M-N} C_m z^{-m} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{ik}}{(1-p_i z^{-1})^k}, N \leq M \end{cases}, ROC = R_F$$

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◇ 部分分式展开的反变换

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{m=0}^{M-N} C_m s^m, s \neq \infty\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(s-p_i)^k}, \text{ROC} = R_F\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{M-N} C_m \delta^{(m)}(t) + \sum_{i=1}^{r_L} \sum_{k=1}^{\sigma_{L_i}} \frac{A_{L_{ik}} t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_{L_i} t} u(t) - \sum_{i=1}^{r-r_L} \sum_{k=1}^{\sigma_{R_i}} \frac{A_{R_{ik}} t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_{R_i} t} u(-t) \end{aligned}$$



已知一个连续时间稳定的 LTI 系统的微分方程表示为

$$y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) - 2y(t) = 3x^{(2)}(t) + x^{(1)}(t) - 5x(t)$$

试求其单位冲激响应 $h(t)$ ，以及当输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时系统的输出 $y(t)$ 。

解：该稳定 LTI 系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{3s^2 + s - 5}{s^2 - s - 2} = 3 + \frac{4s + 1}{s^2 - s - 2} = 3 + \frac{4s + 1}{(s + 1)(s - 2)}, \quad R_h = (-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2)$$

首先，系统有两个一阶极点： $p_1 = -1$ ， $p_2 = 2$ 。连续时间稳定 LTI 系统的收敛域包括虚轴，故系统收敛域只有一个选择，即 $R_h = (-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2)$ 。然后，对上式中的真分式进行部分分式展开，即有

$$\frac{4s + 1}{(s + 1)(s - 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s - 2}, \quad -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2$$

求得 $A_1 = 1$ ， $A_2 = 3$ ，那么， $H(s)$ 可写成

$$H(s) = 3 + \frac{1}{s + 1} + \frac{3}{s - 2}, \quad R_h = (-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2)$$

系统函数的一个极点 $p_1 = -1$ 在 R_h 的左边，另一个极点在 R_h 的右边，故上式可写成

$$H(s) = (3, \text{整个 } s \text{ 平面}) + \left(\frac{1}{s + 1}, \operatorname{Re}\{s\} > -1\right) + \left(\frac{3}{s - 2}, \operatorname{Re}\{s\} < 2\right)$$

对上式进行反拉氏变换，得到该稳定 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$

$$h(t) = 3\delta(t) + e^{-t}u(t) - 3e^{2t}u(-t)$$

显然，这是一个绝对可求和的 $h(t)$ ，与该系统的稳定性相符。

下面用拉氏变换方法求该系统对 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 的响应 $y(t)$ 。

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}, \quad R_x = (\operatorname{Re}\{s\} > -1)$$

则系统输出的复频域表示为

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{3s^2 + s - 5}{(s+1)(s-2)} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{3s^2 + s - 5}{(s+1)^2(s-2)}, \quad R_y = (-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2)$$

这是有理真分式，它有一个二阶极点， $p_1 = -1$ ，一个一阶极点， $p_2 = 2$ ，可部分分式展开为

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{s+1} + \frac{A_{12}}{(s+1)^2} + \frac{A_2}{s-2}, \quad R_y = (-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2)$$

分别求得系数为 $A_{11} = 2$ ， $A_{12} = 1$ 和 $A_2 = 1$ 。代入上式则有

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}, \quad R_y = (-1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2)$$

按收敛域把极点分成左、右两部分的方法，二阶极点 $p_1 = -1$ 在 R_y 的左面，一阶极点 $p_2 = 2$ 在 R_y 的右面，因此可把 $Y(s)$ 及其收敛域分解为

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \right) + \left(\frac{1}{s-2}, \operatorname{Re}\{s\} < 2 \right)$$

对上式进行反拉氏变换得到该系统对于 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时的输出 $y(t)$ 为

$$y(t) = 2e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t) - e^{-2t}u(-t)$$

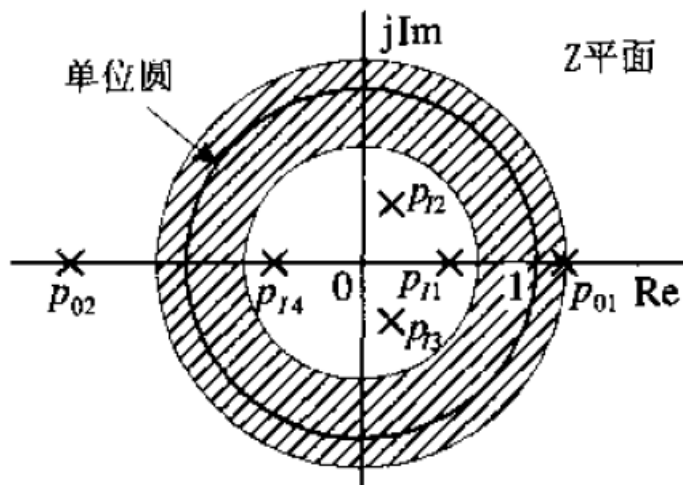
由于系统为稳定 LTI 系统， $x(t) = e^{-t}u(t)$ 也存在傅里叶变换，还可用傅里叶方法求解。对于有理函数形式的傅里叶变换，仍可用上面介绍的部分分式展开法求傅里叶反变换，只要把整个 $j\omega$ 看作复变量即可。

9.2 LTI系统的变换域分析方法

◇ 部分分式展开的反变换

$$f[n] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-N} C_m z^{-m}, s \neq \infty \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{ik}}{(1 - p_i z^{-1})^k}, ROC = R_F \right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-N} C_m \delta[n-m] + \sum_{i=1}^{r_I} \sum_{k=1}^{\sigma_{Ii}} B_{Lik} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} p_{Li}^n u[n] - \sum_{i=1}^{r-O} \sum_{k=1}^{\sigma_{Oi}} B_{Oik} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} p_{Oi}^n u[-n-1]$$



下面再举一个用差分方程表示的离散时间 LTI 系统的例子。

用变换域方法求解第四章例 4.8。

解：例 4.8 已知的因果 LTI 系统的差分方程表示为

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n] - 3x[n-2]$$

则该因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = -\frac{1}{2} + \frac{(3/2) - (5/2)z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}, \quad R_h = (|z| > 3)$$

收敛域不包含单位圆，系统不稳定。对上式中的有理真分式进行部分分式展开，按(7.1.2)式，

则有

$$H(z) = -\frac{1}{2} + \frac{B_1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B_2}{1 - 3z^{-1}}, \quad R_h = (|z| > 3)$$

求得两个系数为 $B_1 = -1/2$ ， $B_2 = 2$ 。它们均被围在收敛域内侧，故收敛域可分解为

$$H(z) = \left(-\frac{1}{2}, \quad 0 \leq |z| \leq \infty\right) + \left(\frac{-1/2}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2\right) + \left(\frac{2}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| > 3\right)$$

对其求反 Z 变换，就是对右边的每一项求反 Z 变换，它们可以直接写出：

$$h[n] = -(1/2)\delta[n] - (1/2)2^n u[n] + 2 \cdot 3^n u[n]$$

显然，这个是指数增长的序列，这和上述说明的系统不稳定相符合，并与例 4.8 所求结果相同。

9.3 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(0_-) \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \\ y[-k] \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

9.3 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析

- ◆ 零状态响应和零输入响应的复频域求解
 - ◆ 零状态响应用双边、单边拉普拉斯变换和Z变换或傅里叶变换均可求解
 - ◆ 零输入响应可以用单边拉普拉斯变换和Z变换求解

9.3 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析

◇ 具有非零起始条件的线性常系数微分方程的 s 域求解

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{L}\{x^{(k)}(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x^{(k)}(t)\} = s^k X_u(s)$$

$$\mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\} = s^k Y_u(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-1-l} y^{(l)}(0_-), \quad k \geq 1$$

9.3 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析

- ◆ 具有非零起始条件的线性常系数微分方程的 s 域求解

$$Y_u(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} X_u(s) + \frac{\sum_{k=1}^N a_k \sum_{m=0}^{k-1} s^{k-1-m} y^{(m)}(0_-)}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

零输入响应的单边拉普拉斯变换

零状态响应的复频域表示

试用变换域方法求如下微分方程表示的因果系统，在 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 时的输出 $y(t)$ ，已知该系统的起始条件 $y(0_-) = 1$ ， $y^{(1)}(0_-) = 1$ 。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

解： 这是一个具有非零起始条件的连续时间因果系统，需用单边拉氏变换求解。对方程两边求单边拉氏变换，并利用单边拉氏变换的微分性质，则有

$$s^2 Y_u(s) - sy(0_-) - y^{(1)}(0_-) + 4[sY_u(s) - y(0_-)] + 3Y_u(s) = sX_u(s) + 2X_u(s)$$

代入已知的起始条件，并整理得到

$$Y_u(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} X_u(s) + \frac{s+5}{s^2+4s+3}, \quad \text{其中} \quad X_u(s) = Z_u\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}$$

则输出 $y(t)$ 中的零状态响应的双边或单边拉氏变换为

$$Y_{uzs}(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3}$$

反变换得到零状态响应为

$$y_{zs}(t) = (1/2)[e^{-t}u(t) - e^{-3t}u(t)]$$

输出 $y(t)$ 中的零输入响应的单边拉氏变换为

$$Y_{uzi}(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3} = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

求单边反拉氏变换得到零输入响应为

$$y_{zi}(t) = (2e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

最后，把上面求得 $y_{zs}(t)$ 和 $y_{zi}(t)$ 相加，得到系统对输入 $e^{-2t}u(t)$ 的全响应为

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = (1/2)(5e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$$

9.3 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析

- ◆ 具有非零起始条件的线性常系数微分方程的z域求解

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z}_u\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{Z}_u\{x[n-k]\}$$

$$\mathcal{Z}_u\{x[n-k]\} = z^{-k} X_u(z)$$

$$\mathcal{Z}_u\{y[n-k]\} = z^{-k} Y_u(z) + \sum_{m=1}^k y[-m] z^{-(k-m)}, \quad k \geq 1$$

9.3 用微分方程和差分方程描述的因果系统的复频域分析

- ◆ 具有非零起始条件的线性常系数微分方程的z域求解

$$Y_u(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X_u(z) + \frac{-\sum_{k=1}^N a_k \sum_{m=1}^k y[-m] z^{-(k-m)}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

零输入响应的单边
Z变换

零状态响应的Z变换

试用变换域方法求由如下差分方程表示的因果系统，对输入 $x[n] = (1/2)^n u[n]$ 的零状态响应和零输入响应及全响应，已知系统的附加条件为 $y[0] = 1$ ， $y[-1] = -6$ 。

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$$

解：对方程的两边分别取单边 Z 变换，并用单边 Z 变换的时移性质，则有

$$Y_u(z) + \frac{3}{4}(Y_u(z)z^{-1} + y[-1]) + \frac{1}{8}(Y_u(z)z^{-2} + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = X_u(z) + 3X_u(z)z^{-1}$$

整理后得到

$$Y_u(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}X_u(z) - \frac{\frac{3}{4}y[-1]+\frac{1}{8}y[-2]+\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

上式的第二项需知道 $y[-2]$ ，而本题已知的是 $y[0]$ 和 $y[-1]$ ，为求得 $y[-2]$ ，可以用 4.3.3 节介绍的前推方程求得，它为

$$y[-2] = 8(x[0] + 3x[-1] - y[0] - (3/4)y[-1]) = 36$$

现在用 $y[-1] = -6$ ， $y[-2] = 36$ ，以及 $X_u(z) = Z_u\{x[n]\} = 1/(1-(1/2)z^{-1})$ 代入上式，得到零状态响应和零输入响应的单边 Z 变换为

$$Y_{uzs}(s) = \frac{1+3z^{-1}}{1+(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}} \cdot \frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} = \frac{1+3z^{-1}}{[1+(1/2)z^{-1}][1+(1/4)z^{-1}][1-(1/2)z^{-1}]}$$

和
$$Y_{uzi}(s) = \frac{-[(3/4)(-6) + (1/8) \cdot 36] + (1/8)(-6)z^{-1}}{1+(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}} = \frac{(3/4)z^{-1}}{[1+(1/2)z^{-1}][1+(1/4)z^{-1}]}$$

分别对它们部分分式展开，得到

$$Y_{uzs}(s) = \frac{7/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{11/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \quad \text{和} \quad Y_{uzi}(s) = \frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

分别求单边拉氏反变换, 得到零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$ 如下:

$$y_{zs}[n] = \frac{7}{3}(\frac{1}{2})^n u[n] - 5(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{11}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n] \quad \text{和} \quad y_{zi}[n] = 3(-\frac{1}{4})^n - 3(-\frac{1}{2})^n, \quad n \geq 0$$

该系统对 $x[n] = (1/2)^n u[n]$ 的全响应为

$$y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] = \frac{7}{3}(\frac{1}{2})^n + \frac{20}{3}(-\frac{1}{4})^n - 8(-\frac{1}{2})^n, \quad n \geq 0$$

由于零状态响应是因果 LTI 系统对因果输入的响应, 差分方程表示的因果 LTI 系统, 与如下差分方程表示的因果 LTI 系统是同一个 LTI 系统。

$$y[n+1] + \frac{3}{4}y[n] + \frac{1}{8}y[n-1] = x[n+1] + 3x[n]$$

它们对 $x[n] = (1/2)^n u[n]$ 的响应应相同, 也正是本题要求的零状态响应。

此时的解法如下: 对方程两边取单边 Z 变换, 并用其时移性质, 将有

$$zY_u(z) - y[0]z + \frac{3}{4}Y_u(z) + \frac{1}{8}(z^{-2}Y_u(z) + y[-1])z^{-1} = zX_u(z) - x[0]z + 3X_u(z)$$

上式需要的正是本题给定的附加条件 $y[0] = 1$, $y[-1] = -6$, 直接代入上式, 并整理得到

$$Y_u(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} X_u(z) + \frac{(3/4)z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

这个结果与前面已求的 $y_u(z)$ 完全相同, 第一项为零状态响应的单边 Z 变换, 第二项为零输入响应的单边 Z 变换。当然, 对它们取反变换, 将会获得和前面相同的零状态响应、零输入响应和全响应。

作业

- 8.4
- 8.7
- 8.8
- 8.21