中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十五周

拉普拉斯变换和 Z 变换（续）

赵 峰，电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/5/30

8.4.4 时域微分和差分与积分和累加性质、复频域微分性质

与傅立叶变换一样，拉普拉斯变换和 Z 变换也有连续时域微分与积分性质和离散时域差分与累加性质，以及复频域微分性质。

■ 时域微分和差分性质

拉普拉斯变换时域微分和 Z 变换的时域差分性质为：

若有 $\mathbf{L}\{f(t)\}=\{F(s),\quad R_F\}$ 和 $\mathbf{Z}\{f[n]\}=\{F(z),\quad R_F\}$

则有 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\{sF(s),\ \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(|s|<\infty)]\}$$

和 $$\Delta f[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\{(1-z^{-1})F(z),\ \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(|z|>0)]\}$$

ROC 的解释：由于像函数的相乘因子 s 和 $(1-z^{-1})$ 分别在 $s=0$ 和 $z=1$ 增加新的一阶零点，并在 $s\to\infty$ 和 $z=0$ 分别增加新的一阶极点，也可能出现零、极点抵消情况。

进一步，还可以推导出时域高阶微分和高阶差分性质：

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\{s^kF(s),\ \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(|s|<\infty)]\}$$

8.4.4 时域微分和差分与积分和累加性质、复频域微分性质(续)

和 $\Delta^k f[n] \xleftrightarrow{Z} \{(1-z^{-1})^k F(z),\ \mathrm{ROC} \supset [R_F \cap (|z|>0)]\}$

表明：在时域上时间函数或序列每微分或差分一次，变换到复频域上，其像函数就乘一次 s 或 $(1-z^{-1})$，ROC 变为至少包含 R_F 与有限 S 平面或有限 Z 平面之交集。

讨论：♣ $\delta(t)$ 和 $\delta[n]$ 的高阶导数和高阶差分的拉普拉斯变换和 Z 变换，由上述时域微分和差分性质，可直接得到：

$$\delta^{(k)}(t) \xleftrightarrow{L} \{s^k,\ |s|<\infty\} \quad \text{和} \quad \Delta^k \delta[n] \xleftrightarrow{Z} \{(1-z^{-1})^k,\ |z|>0\}$$

♣ 基于 $\delta^{(k)}(t)$ 和 $\Delta^k \delta[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换，上述时域微分和差分性质可以看成时域卷积性质的又一个特例。

♣ 与傅里叶变换的时域微分和差分性质一样，本性质也有助于求取一些函数和序列的拉普拉斯变换和 Z 变换。例如：

由 $[\mathrm{e}^{-at}u(t)]' = \delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 和 $\Delta\{a^n u[n]\} = \delta[n] + (a-1)a^{n-1}u[n-1]$

可分别求得 $\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 和 $a^n u[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换。

8.4.4 时域微分和差分与积分和累加性质、复频域微分性质(续)

■ 时域积分和累加性质

拉普拉斯变换时域积分和 Z 变换的时域累加性质为：

若有 **L** $\{f(t)\}=\{F(s),\ R_F\}$ 和 **Z** $\{f[n]\}=\{F(z),\ R_F\}$

则有 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \left\{\dfrac{F(s)}{s},\quad \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(\mathrm{Re}\{s\}>0)]\right\}$

和 $\sum_{m=-\infty}^{n} f[m] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \left\{\dfrac{F(z)}{1-z^{-1}},\quad \mathrm{ROC}\supset[R_F\cap(|z|>1)]\right\}$

ROC 解释：像函数分别除以 s 和 $(1-z^{-1})$，分别在 $s\to\infty$ 和 $z=0$ 增加新的一阶零点，在 $s=0$ 和 $z=1$ 增加新的一阶极点，并可能出现零、极点抵消情况。

表明：在时域上时间函数或序列每积分或累加一次，变换到复频域，其像函数就除以一次 s 或 $(1-z^{-1})$，**ROC** 变为至少包含 R_F 与虚轴右侧半个 **S** 平面或 **Z** 平面之单位圆外部的交集。

8.4.4 时域微分和差分与积分和累加性质、复频域微分性质(续)

讨论：♣ $1/s$ 和 $1/(1-z^{-1})$ 分别是 $u(t)$ 和 $u[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换，故上述时域积分和累加性质可以看成时域卷积性质的又一个特例。

♣ 进一步，还可以获得时域多次积分和多次累加性质，这留给同学自行写出。

♣ 基于 $\delta(t)$ 和 $\delta[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换，利用时域积分和累加性质，可得到如下的单边幂函数和单边组合序列的拉普拉斯变换和 Z 变换：

$$\mathrm{L}\{tu(t)\}=\left\{\frac{1}{s^2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0\right\}\text{和 } \mathrm{Z}\{(n+1)u[n]\}=\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})^2},\quad |z|>1\right\}$$

以及 $$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\left\{\frac{1}{s^k},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0\right\}$$

和 $$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})^k},\quad |z|>1\right\}$$

8.4.4 时域微分和差分与积分和累加性质、复频域微分性质(续)

■ 复频域 (s 域和 z 域) 微分性质

拉普拉斯变换 s 域微分和 Z 变换的 z 域微分性质分别为：

若有 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\{F(s),\ R_F\}$ 和 $\mathcal{Z}\{f[n]\}=\{F(z),\ R_F\}$

则分别有 $$-t\cdot f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\left\{\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s},\quad \mathrm{ROC}=R_F\right\}$$

和 $$-n\cdot f[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\left\{z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}\ \text{或}\ -z^{-1}\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}(z^{-1})},\quad \mathrm{ROC}=R_F\right\}$$

表明：复频域上像函数的微分 (不改变其收敛域) 导致原函数和原序列分别乘以 $(-t)$ 和 $(-n)$。

进一步，还可以推导出复频域的高阶微分性质，即

$$(-t)^k f(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\left\{\frac{\mathrm{d}^k F(s)}{\mathrm{d}^k s},\quad \mathrm{ROC}=R_F\right\}$$

和 $$(-n)^k f[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\left\{\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k F(z),\quad \mathrm{ROC}=R_F\right\}$$

8.4.4 … 复频域微分性质(续)

其中，
$$\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k F(z)=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ \cdots\ \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)\right)\right]\right\}$$

利用 s 域和 z 域的微分性质，可以求得一些很有用的拉普拉斯变换对和 Z 变换对。请看下面的例子。

【例 8.18】求如下像函数及其收敛域的反拉普拉斯和反 Z 变换

$$F(s)=\frac{1}{(s+a)^2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\} \qquad 和 \qquad F(z)=\frac{1}{(1-az^{-1})^2},\quad |z|>|a|$$

解：按照微分公式 $(1/x)'=(-1/x^2)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{-1}{(s+a)^2} \qquad 和 \qquad z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{-az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

基于 $\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 和 $a^n u[n]$ 的变换对，利用复频域的微分性质，则有

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}\right\}=t\mathrm{e}^{-at}u(t)$$

和
$$\mathbf{Z}^{-1}\left\{\frac{-az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\quad |z|>|a|\right\}=-na^n u[n]$$

8.4.4 … 复频域微分性质(续)

上式再用 Z 变换的时移性质，且当 $n=-1$ 时 n+1=0, $u[n+1]\to u[n]$，

则进一步有 $\quad \mathrm{Z}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2},\quad |z|>|a|\right\}=(n+1)a^n u[n]$

本例题的引伸：

- 若将本例的像函数微分多次，则分别得到如下变换对：

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-at}u(t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\left\{\frac{1}{(s+a)^k},\quad \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}\right\}$$

和
$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}a^n u[n]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\left\{\frac{1}{(1-az^{-1})^k},\quad |z|>|a|\right\}$$

- 同理，基于**例 8.3** 中的反因果指数函数和序列的变换对，又可得到：

$$-\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-at}u(-t)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\left\{\frac{1}{(s+a)^k},\quad \mathrm{Re}\{s\}<\mathrm{Re}\{-a\}\right\}$$

和
$$-\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}a^n u[-n-1]\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\left\{\frac{1}{(1-az^{-1})^k},\quad |z|<|a|\right\}$$

8.4.4 … 复频域微分性质(续)

上述变换对在下一章系统的复频域分析方法时十分有用。

讨论：有理像函数微分不会增加新的极点，只改变原有极点的阶数。像函数每微分一次，使其所有极点都增加一阶。

复频域微分性质也有助于求非有理像函数的反变换。

【例 8.19】 求如下像函数及其收敛域的反拉普拉斯和反 Z 变换

$$F(s)=\ln\frac{s+a}{s},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0,\ a>0 \text{ 和 } \quad F(z)=\ln(1+az^{-1}),\quad |z|>|a|$$

解：按照微分公式 $(\ln x)'=1/x$，则分别有

$$\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\ln(s+a)-\ln s\right]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s}\quad,\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln(1+az^{-1})\right]=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}\quad,\quad |z|>|a|$$

利用已熟悉的变换对和复频域的微分性质，可得到反变换如下：

$$f(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{t}u(t) \quad \text{和} \quad f[n]=-\frac{(-a)^n}{n}u[n-1]$$

8.4.5 对称性质

拉普拉斯变换和 Z 变换的对称性质将揭示时域与复频域的对称分布特性之间的关系，其中，复频域的对称分布特性指的是 S 平面或 Z 平面上零、极点分布和收敛域的对称分布特征。

■ 拉普拉斯变换和 Z 变换的对称性质

拉普拉斯变换和 Z 变换的对称性质数学描述如下：

若分别有 $\mathbf{L}\{f(t)\} = \{F(s),\quad R_F = (\sigma_1 < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_2)\}$

和 $\mathbf{Z}\{f[n]\} = \{F(z),\quad R_F = (r_1 < |z| < r_2)\}$

则有 $f(-t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \{F(-s),\ -R_F = (-\sigma_2 < \mathrm{Re}\{s\} < -\sigma_1)\}$

$$f^*(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \{F^*(s^*),\ R_F = (\sigma_1 < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_2)\}$$

$$f^*(-t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \{F^*(-s^*),\ -R_F = (-\sigma_2 < \mathrm{Re}\{s\} < -\sigma_1)\}$$

和 $f[-n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \{F(1/z),\ 1/R_F = (r_2^{-1} < |z| < r_1^{-1})\}$

$$f^*[n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \{F^*(z^*),\ R_F = (r_1 < |z| < r_2)\}$$

$$f^*[-n] \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \{F^*(1/z^*),\ 1/R_F = (r_2^{-1} < |z| < r_1^{-1})\}$$

8.4.5 对称性质(续)

表明：(1) $f(t)$在时域上反转导致$F(s)$的零、极点分布和收敛域在S平面上以原点为中心旋转180°：$F(s)$的零、极点z_i和p_i变成$F(-s)$的零、极点$-z_i$和$-p_i$；收敛域以σ_1和σ_2为左右边界变成以$-\sigma_2$和$-\sigma_1$为左右边界。

然而，$f[n]$时域反转却导致$F(z)$的零、极点分布和收敛域既按单位圆内外翻转，又以实轴上下反转：$F(z)$的零、极点z_i和p_i变成$F(1/z)$的零、极点$1/z_i$和$1/p_i$；收敛圆环以r_1和r_2为内外半径变成以$1/r_2$和$1/r_1$为内外半径。

(2) $f(t)$和$f[n]$时域共轭导致$F(s)$和$F(z)$的零、极点分布和收敛域以实轴上下反转：$F(s)$和$F(z)$的零、极点z_i和p_i变成$F^*(s^*)$和$F^*(z^*)$的零、极点z_i^*和p_i^*；收敛域不变。

(3) $f(t)$和$f[n]$时域既共轭又反转，导致其像函数的零、极点分布和收敛域分别在S平面和Z平面兼有上述两种变换。

下面通过具体的例子，来说明和弄清这3种像函数的零、极点分布和收敛域的变换情况。

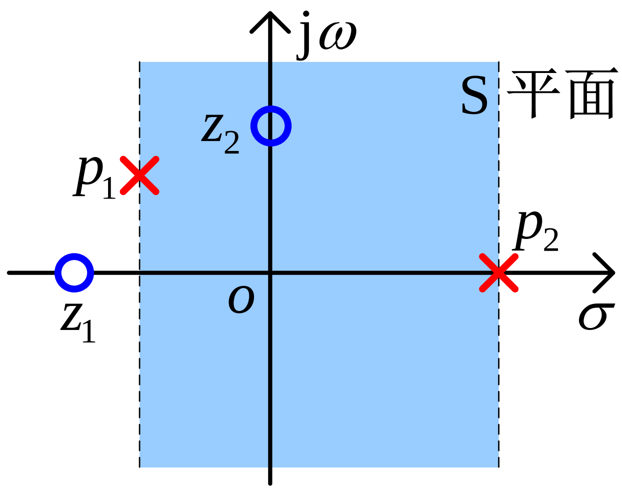
8.4.5 对称性质(续)

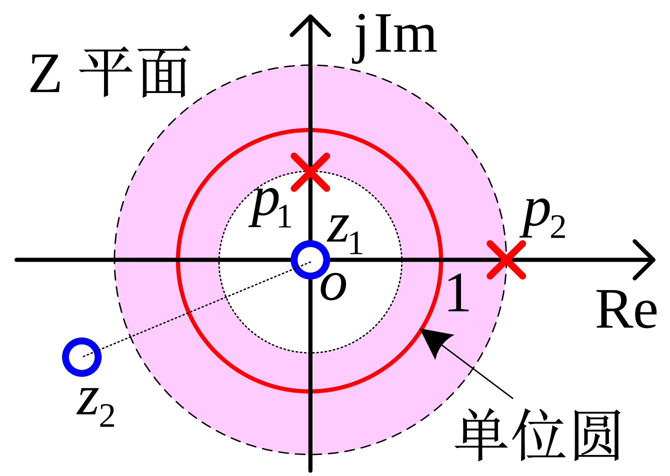
如果某个 $f(t)$ 和 $f[n]$ 的像函数 $F(s)$ 和 $F(z)$ 及其收敛域为

$$F(s)=F_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} \quad 和 \quad F(z)=F_0\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})}$$

$$\mathrm{Re}\{p_1\}<\mathrm{Re}\{s\}<\mathrm{Re}\{p_2\} \qquad |p_1|<|z|<|p_2|$$

它们的的零、极分布和收敛域如下图所示。





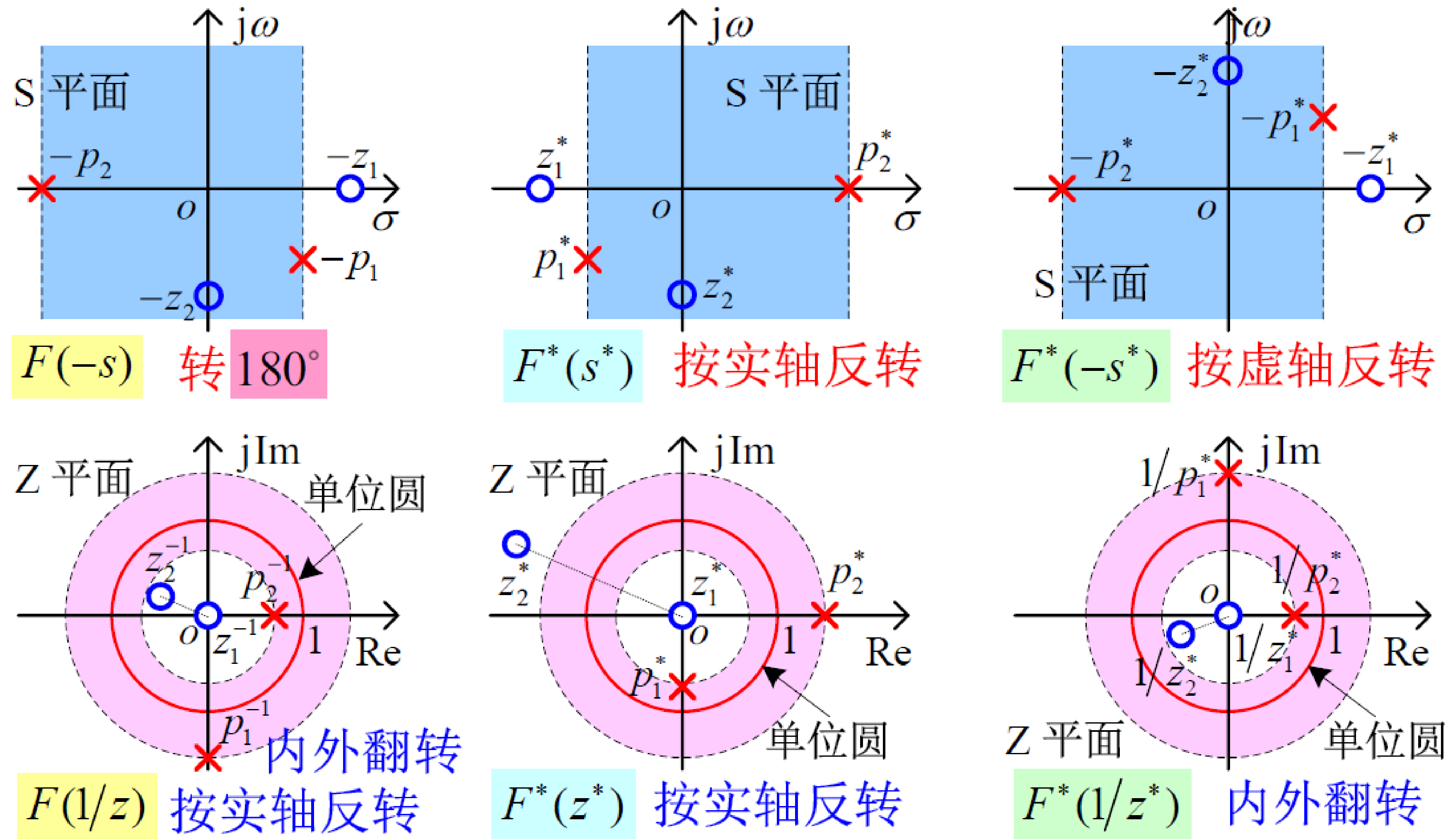
则 $$F(-s)=F_0\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad 和 \quad F(1/z)=F_0\frac{(1-z_1z)(1-z_2z)}{(1-p_1z)(1-p_2z)}$$

$$F^*(s^*)=F_0^*\frac{(s-z_1^*)(s-z_2^*)}{(s-p_1^*)(s-p_2^*)} \quad 和 \quad F^*(z^*)=F_0^*\frac{(1-z_1^*/z)(1-z_2^*/z)}{(1-p_1^*/z)(1-p_2^*/z)}$$

8.4.5 对称性质(续)

$$F^*(-s^*) = F_0^* \frac{(s+z_1^*)(s+z_2^*)}{(s+p_1^*)(s+p_2^*)} \quad \text{和} \quad F^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = F_0^* \frac{(1-z_1^* z)(1-z_2^* z)}{(1-p_1^* z)(1-p_2^* z)}$$

它们的的零、极分布和收敛域分别如下图所示。



8.4.5 对称性质(续)

上述变换对在下一章系统的复频域分析方法时十分有用。

【例 8.20】 试求如下复奇函数和序列的拉普拉斯变换和 Z 变换

$$x(t)=\mathrm{e}^{-a|t|}\,\mathrm{sgn}(t),\quad \mathrm{Re}\{a\}>0 \qquad 和 \qquad x[n]=a^{|n|}\,\mathrm{sgn}[n],\quad 0<|a|<1$$

解： 它们可以分别写成

$$x(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)-\mathrm{e}^{at}u(-t) \qquad 和 \qquad x[n]=a^{n}u[n]-a^{-n}u[-n]$$

且有 $-a^{-n}u[-n]=a^{-1}(-a^{-n}u[-n-1])*\delta[n-1]$

直接利用**例 8.1** 和**例 8.3** 中得到的变换对和 Z 变换的时移性质，可以求得 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的拉普拉斯变换和 Z 变换分别为

$$X(s)=\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s-a}=\frac{2s}{s^{2}-a^{2}},\qquad \mathrm{Re}\{-a\}<\mathrm{Re}\{s\}<\mathrm{Re}\{a\}$$

和 $$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{a^{-1}z^{-1}}{1-a^{-1}z^{-1}}=\frac{1-z^{-2}}{(1-az^{-1})(1-a^{-1}z^{-1})},\qquad |a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

$X(s)$ 的两个一阶极点 $p_{1,2}=\pm a$ 及两个一阶零点 $z_1=0$ 和 $z_2\to\infty$ 与收敛域都呈现中心对称关系；而 $F(z)$ 的两个一阶极点 $p_1=a$ 和 $p_2=a^{-1}$ 及两个一阶零点 $z_{1,2}=\pm1$ 与其收敛域都关于单位圆呈现共轭镜像对称关系。

8.4.5 对称性质(续)

拉普拉斯变换和 Z 变换的对称性质，导致了时域与复频域的对称分布特性之间有一系列必然关系。

■ 时域和复频域的对称分布特性之间的关系

● 复奇、偶函数和序列的复频域奇、偶对称特性

若 $f(t)$ 和 $f[n]$ 是复偶函数和序列，或复奇函数和序列，即

$$f(t)=\pm f(-t) \quad \text{和} \quad f[n]=\pm f[-n]$$

其中，“$+$”和“$-$”分别对应时域偶对称和奇对称的情况。

则它们的像函数 $\{F(s),\ R_F\}$和 $\{F(z),\ R_F\}$分别满足

$$F(s)=\pm F(-s),\quad R_F=-R_F=(-\sigma_0<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0),\quad \sigma_0>0$$

和 $$F(z)=\pm F(1/z),\quad R_F=1/R_F=(r_0<|z|<1/r_0),\quad 0<r_0<1$$

表明：复偶或复奇函数和序列的像函数在复频域呈现如下对称特性：

♣ 像函数的零、极点在 S 平面上必定是中心对称分布，即 $F(s)$ 在 z_i 和 p_i 与 $-z_i$ 和 $-p_i$ 分别是成对的同阶零点与同阶极点；而 Z 平面上则是关于单位圆的共轭镜像对称分布， 即 $F(z)$ 在 z_i 和 p_i 与 $1/z_i$ 和 $1/p_i$ 分别是成对同阶零点与同阶极点。

8.4.5 对称性质(续)

♣ 像函数的收敛域必定是 S 平面上关于虚轴对称的有限或无限带域，和 Z 平面上关于单位圆反比对称的有限或无限圆环。

● **实的与纯虚函数和序列的复频域共轭对称特性**

若 $f(t)$ 和 $f[n]$ 是实函数和实序列，或纯虚函数和序列，即

$$f(t) = \pm f^*(t) \qquad 和 \qquad f[n] = \pm f^*[n]$$

“$+$” 和 “$-$” 分别对应实函数(或序列)和纯虚函数(或序列)的情况。则它们的像函数$\{F(s),\ R_F\}$ 和$\{F(z),\ R_F\}$ 分别满足

$$F(s) = \pm F^*(s^*) \qquad 和 \qquad F(z) = \pm F^*(z^*)$$

表明：♣ 实的或纯虚函数和序列的像函数的零、极点，无论在 S 平面和 Z 平面都呈现共轭对称分布，即 $F(s)$ 和 $F(z)$ 在 z_i 和 p_i 与 z_i^* 和 p_i^* 分别是同阶零点与同阶极点。

♣ 所有可能的像函数收敛域都呈现共轭对称分布。

♣ 前面所有实函数和实序列的变换例题都印证这一特性。

强调：由于实际信号和系统的时域表征都是实函数和实序列，了解和掌握这个对称特性就显得特别有用。

8.4.5 对称性质(续)

- **实偶及实奇函数和序列的复频域双重对称特性**

实偶函数和序列及实奇函数和序列，既是实函数和实序列，时域上又呈现偶及奇对称，因此，它们的双边拉普拉斯变换和双边Z变换像函数的零、极点分布及其收敛域分别在S平面和Z平面上呈现各自的双重对称分布特性。具体表现为：

♣ 像函数的收敛域必定是S平面上关于虚轴对称的有限或无限带域，和Z平面上关于单位圆反比对称的有限或无限圆环。

♣ $F(s)$ 的零、极点既按实轴、又按虚轴呈现镜像对称分布，即在 p_i、p_i^*、$-p_i$ 和 $-p_i^*$ 四地出现同阶极点，在 z_i、z_i^*、$-z_i$ 和 $-z_i^*$ 四地出现同阶零点；由于实轴和虚轴上的零、极点的镜像就是它本身，故只能是成对的同阶零、极点。

♣ $F(z)$ 的零、极点既按实轴、又按虚轴呈现镜像对称分布，即在 p_i、p_i^*、$1/p_i$ 和 $1/p_i^*$ 四地出现同阶极点，在 z_i、z_i^*、$1/z_i$ 和 $1/z_i^*$ 四地出现同阶零点；因实轴和单位圆上的零、极点的镜像就是它本身，故只能是成对的同阶零、极点。

8.4.6 尺度变换性质

与傅里叶变换的尺度变换性质揭示时域和频域的尺度反比关系类似，拉普拉斯变换和 Z 变换的尺度变换性质将揭示时域与复频域的之间的尺度反比关系。

■ 连续时域 t 和 s 域的尺度反比性质

拉普拉斯变换的尺度反比性质数学描述如下：

如果 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\{F(s),\quad R_F=(\sigma_1<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_2)\}$，则有

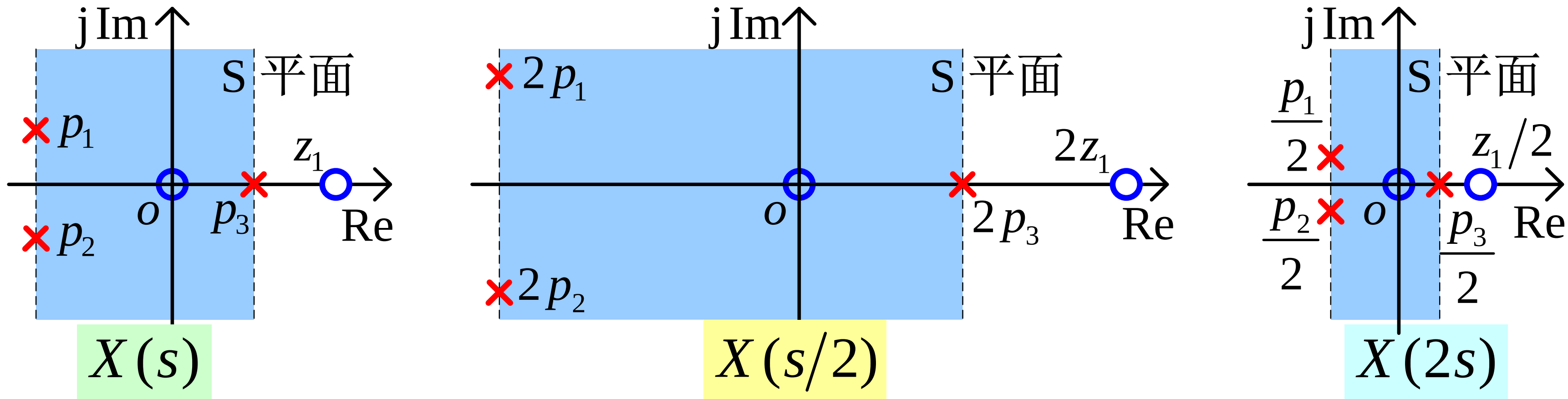
$$f(at)\xleftrightarrow{\mathrm{L}}\left\{\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right),\quad aR_F=\begin{cases}a\sigma_1<\mathrm{Re}\{s\}<a\sigma_2, & a>0\\ a\sigma_2<\mathrm{Re}\{s\}<a\sigma_1, & a<0\end{cases}\right\}$$

表明：除了一个幅度因子 $1/|a|$ 外，时域 t 与其复频域有如下的尺度反比变换关系：

- ♣ 当 $a>0$ 时，$f(t)$ 时域压缩 a 倍（$a>1$），导致其像函数的零、极点分布和收敛域在 S 平面上反比地扩展 a 倍；若 $f(t)$ 时域扩展 a 倍（$0<a<1$），则导致在 S 平面上反比地压缩 a 倍。
- ♣ 当 $a<0$ 时，$f(at)=f(-|a|t)$，则既体现上述反比尺度变换，又体现拉普拉斯变换的时域反转性质。

8.4.6　尺度变换性质(续)

$a=2$ 和 $a=1/2$ 时 s 域尺度反比变换的示意图如下：



■　离散时间内插零和抽取的 z 域尺度变换

第 2 章 2.4.2 小节已说明，离散时间内插零和抽取体现有离散时域的比例扩展和压缩。下面分别讲述它们导致的 z 域尺度变换。

● M 倍内插零的复频域尺度变换特性

若　$\mathbf{Z}\{x[n]\}=\{X(z),\ \ R_X=(r_1<|z|<r_2)\}$，　则有

$$x_{(M)}[n]=\begin{cases} x[n/M], & n=lM \\ 0, & n\neq lM \end{cases} \xleftrightarrow{\ Z\ } \left\{X(z^M),\ \ R_X^{1/M}=(r_1^{1/M}<|z|<r_2^{1/M})\right\}$$

为理解内插零导致的 z 域尺度变换特性，下面考察一个例子。

8.4.6 尺度变换性质(续)

离散时间序列 $x[n]=(0.5)^n u[n]+2^{n+1}u[-n-1]$ 的 Z 变换为

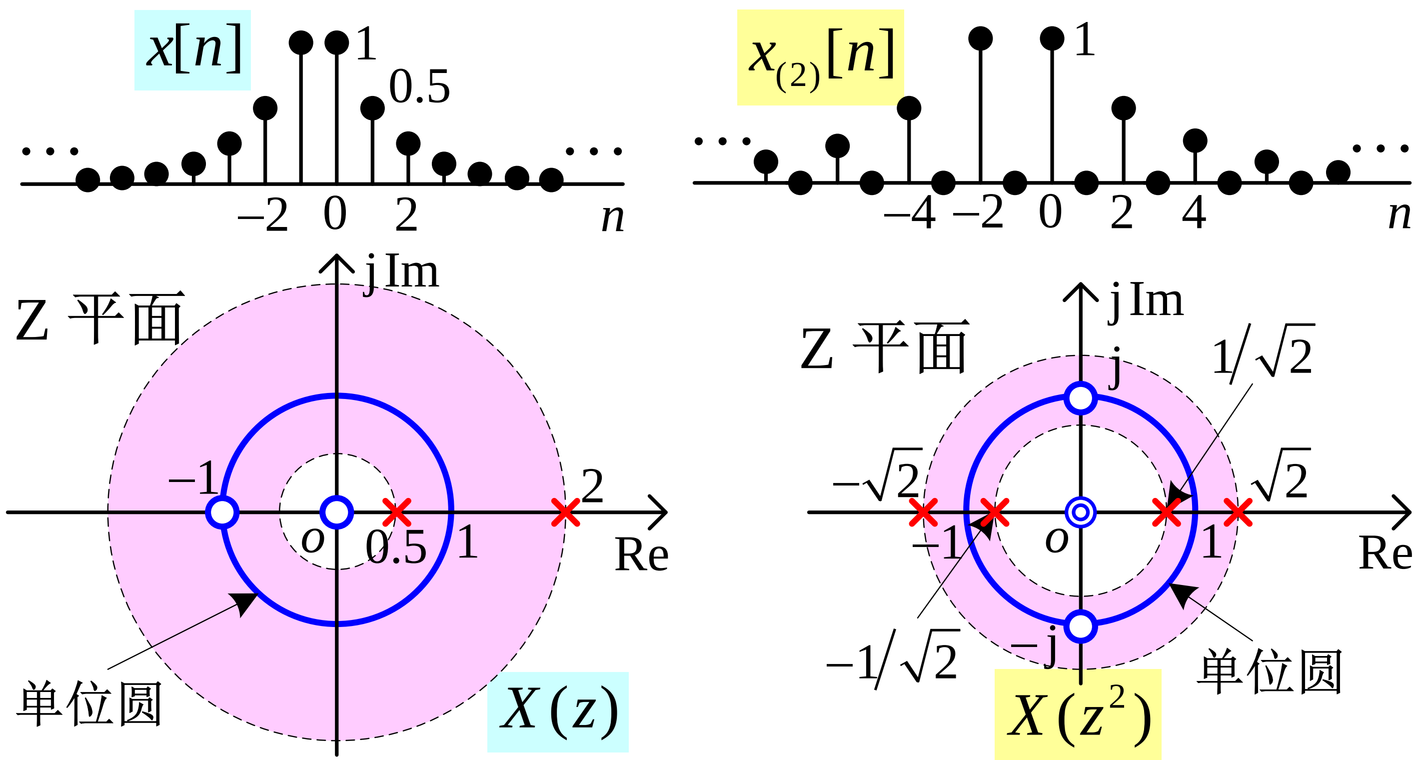
$$X(z)=\frac{-1-z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}\text{ ，}\qquad \frac{1}{2}<|z|<2$$

按照上述 z 域尺度变换，它的 2 倍内插零序列 $x_{(2)}[n]$ 的 Z 变换为

$$X(z^2)=\frac{-(1-\mathrm{j}z^{-1})(1+\mathrm{j}z^{-1})}{(1-z^{-1}/\sqrt{2})(1+z^{-1}/\sqrt{2})(1-\sqrt{2}z^{-1})(1+\sqrt{2}z^{-1})}\text{ ，}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}<|z|<\sqrt{2}$$

它们的序列图和像函数零、极点及其收敛域图形见右图。

图中可以看到收敛域和零、极点在 Z 平面



8.4.6　尺度变换性质(续)

上变化的情况：

- 收敛域由原来的 $0.5<|z|<2$ 径向收缩成 $1/\sqrt{2}<|z|<\sqrt{2}$ ；
- 原有一阶零点 -1 变成两个一阶零点 $\pm\mathrm{j}$ ，原点的一阶零点变成二阶零点；原来 **0.5** 和 **2** 的一阶极点分别变成 $\pm 1/\sqrt{2}$ 和 $\pm\sqrt{2}$ 各两个一阶极点。

表明：M 倍内插零使序列包络减慢 M 倍，导致 **Z** 平面上像函数及其收敛域既关于单位圆以 $1/M$ 次方的比率径向收缩，又在幅角维上以 $\Omega=0$ 为基准收缩 M 倍。单位圆上收缩 M 倍就表现为 **DTFT** 的频域上压缩 M 倍的性质。

讨论：**z** 域的这种两维收缩导致零、极点位置和数目都有改变，具体地说：如果 $z=|z_i|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}$ 和 $z=|p_i|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_i}$ 分别是 $X(z)$ 的零点和极点，则导致 $X(z^M)$ 就分别有如下 M 个同阶零点和同阶极点：

$$z=|z_i|^{1/M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_i+2\pi k/M)} \quad \text{和} \quad z=|p_i|^{1/M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_i+2\pi k/M)}$$

其中，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1$ 。

8.4.6 尺度变换性质(续)

- **M 倍抽取的复频域特性**

若 $\mathcal{Z}\{x[n]\}=\{X(z),\quad R_X=(r_1<|z|<r_2)\}$，则其 M 倍抽取序列的 Z 变换为

$$\mathcal{Z}\{x[Mn]\}=\left\{X_{\mathrm{D}}(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{M}}z^{\frac{1}{M}}\right),\quad R_x^M=\left(r_1^M<|z|<r_2^M\right)\right\}$$

证明：6.8.2 小节已说明，$x[n]$ 的 M 倍抽取可以看成先对 $x[n]$ M 倍抽样得到 $x_{\mathrm{P}}[n]$，再 M 倍抽取成 $x_{\mathrm{D}}[n]$，即 $x_{\mathrm{D}}[n]=x_{\mathrm{P}}[Mn]$。

故有 $$X_{\mathrm{D}}(z)=\mathcal{Z}\{x_{\mathrm{D}}[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{P}}[Mn]z^{-n}$$

$$\overset{k=Mn}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{P}}[k]z^{-k/M}=X_{\mathrm{P}}\left(z^{1/M}\right),\quad r_1^M<|z|<r_2^M$$

再利用恒等式 $\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{M}n}=\begin{cases}M, & n=lM\\ 0, & n\neq lM\end{cases}$，把 $x_{\mathrm{P}}[n]$ 改写为

$$x_{\mathrm{P}}[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{M}n},\quad -\infty<n<\infty$$

8.4.6　尺度变换性质(续)

并利用 Z 变换的复正弦加权性质可以得到

$$X_{\mathrm{P}}(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{M}}z\right),\quad \mathbf{ROC}=R_X$$

代入 $X_{\mathrm{D}}(z)$ 与 $X_{\mathrm{P}}(z)$ 的关系式，可证明 M 倍抽取的复频域特性。

表明：♣ M 倍抽取序列 $x[Mn]$ 的 Z 变换由如下 M 个分量组成：

$$\left\{X_k(z)=\frac{1}{M}X\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{M}}z^{\frac{1}{M}}\right),\ r_1^{M}<|z|<r_2^{M}\right\},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1$$

每一个 $X_k(z)$ 除了 $1/M$ 的幅度因子外，都是由 $X(z)$ 经历如下两次 z 域变换得到：

(1) 零、极点分布和收敛域按 $z^{1/M}$ 的变换，在极坐标的两维上扩展，这种扩展恰与 M 倍内插零的 z 域压缩相反；

(2) 按照 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/M}$ 的复频移因子，使零、极点分布和收敛域顺时针旋转 $2\pi k/M$ 弧度。

这说明：M 倍抽取不仅使得收敛域关于单位圆以 M 次方的比率径向扩展，也导致零、极点的位置和数目发生不可逆的改变。

8.4.6 尺度变换性质(续)

- ♣ 如果收敛域 R_X 包含单位圆，M 倍抽取的复频域尺度变换特性在单位圆上体现为 DTFT 的M 倍抽取的频域特性。

- ● **拉普拉斯变换和 Z 变换之尺度变换特性的比较和讨论**

- ♣ 拉普拉斯变换的尺度变换性质是 t 域与 s 域之间单纯的尺度反比特性，它不导致像函数零、极点分布结构的改变，在时域和复频域都表现为可逆的尺度变换。

- ♣ M 倍内插零和 M 倍抽取的 z 域尺度变换特性却不同：

  ★ M 倍内插零和 M 倍抽取分别导致像函数收敛域关于单位圆以 $1/M$ 次方和 M 次方比率的径向收缩和扩展。

  ★ M 倍内插零和 M 倍抽取都导致像函数零、极点分布结构的改变，从复频域解释了 $x_{(M)}[n]$ 和 $x[Mn]$ 所包含的信息已与 $x[n]$ 不同。M 倍内插零的改变还是可逆的变换，M 倍抽取的改变却是不可逆的。这也从复频域上表明：M 倍内插零系统可逆，可由 M 倍抽取系统恢复原来序列；但 M 倍抽取系统一般说来是不可逆系统。

8.4.7 因果函数和序列的初值和终值定理

拉普拉斯变换及 Z 变换的初值定理和终值定理是指：因果时间函数及序列的初值 ($t=0$ 与 $n=0$ 的值) 和终值 ($t\to\infty$ 与 $n\to\infty$ 的值)，可由其拉普拉斯变换及 Z 变换像函数确定的两个性质。

■ 初值定理

如果 $f(t)=0,\ \ t<0$ ，且 $f(t)$ 在 $t=0$ 处没有冲激及其导数，以及 $f[n]=0,\ \ n<0$ ，并假设

L $\{f(t)\}=\{F(s),\ \ R_F\}$ 和 **Z** $\{f[n]\}=\{F(z),\ \ R_F\}$

则有 $\lim\limits_{t\to0^+} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ 和 $f[0]=\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$

表明：因果时间函数和序列的初值分别等于 $sF(s)$ 在 $s\to\infty$ 时的极限和 $F(z)$ 在 $z\to\infty$ 时的极限。

进一步，因果函数的初值定理还包括其有限阶导数的初值：

若 $\lim\limits_{t\to0^+} f^{(k)}(t)=0,\ \ k<m$ 则有 $\lim\limits_{t\to0^+} f^{(m)}(t)=\lim\limits_{s\to\infty} s^{m+1}F(s)$

表明：只要因果时间函数 $f(t)$ 的低于 m 阶导数在 $t=0$ 处连续，其 m 阶导数的初值等于 $s^{m+1}F(s)$ 在 $s\to\infty$ 时的极限。

8.4.7 因果函数和序列的初值和终值定理(续)

拉普拉斯变换的初值定理可以由拉普拉斯变换的微分性质来证明，Z 变换的初值定理可以由 Z 变换的定义直接证明。

■ 终值定理

如果 $f(t)=0,\ \ t<0$，且 $f(t)$ 在 $t=0$ 没有冲激及其导数，以及 $f[n]=0$，$n<0$，并且 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 和 $\lim_{n\to\infty} f[n]$ 存在，并为有限值；假设：

$$\mathbf{L}\{f(t)\}=\{F(s),\quad R_F\} \quad 和 \quad \mathbf{Z}\{f[n]\}=\{F(z),\quad R_F\}$$

则有

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} f[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

表明：因果时间函数和序列的终值分别等于 $sF(s)$ 在 $s\to 0$ 时的极限和 $(z-1)F(z)$ 在 $z\to 1$ 时的极限。

讨论：极限 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 和 $\lim_{n\to\infty} f[n]$ 是否存在，可由其像函数的收敛域和零、极点分布来判断：如果像函数收敛域分别包含虚轴和单位圆，或者分别以虚轴和单位圆为边界，但虚轴和单位圆上仅有 $s=0$ 和 $z=1$ 的一阶极点，则极限一定存在，并为有限；否则，极限就不存在 (如因果的单边正弦或复正弦函数和序列)，或者极限为无限值。

8.4.7 因果函数和序列的初值和终值定理(续)

拉普拉斯变换的终值定理也可以由变换的微分性质来证明，Z 变换的终值定理证明如下：

根据时移性质，$(z-1)F(z)$ 是 $f[n+1]-f[n]$ 的 Z 变换，即

$$(z-1)F(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}\left(f[n+1]-f[n]\right)z^{-n}=f[0]z+\sum_{n=0}^{\infty}\left(f[n+1]-f[n]\right)z^{-n}$$

则有
$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)=\lim_{Z\to 1}\left\{f[0]z+\sum_{n=0}^{\infty}\left(f[n+1]-f[n]\right)z^{-n}\right\}$$

$$=f[0]+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-f[n]+f[n+1]\right)=\lim_{n\to\infty}f[n]$$

应用：拉普拉斯变换或 Z 变换的初值定理和终值定理表明：如果只知道因果时间函数或序列的像函数及其收敛域，无需通过反变换求得该时间函数或序列，直接由像函数就可计算或判断该因果时间函数或序列的初值和终值。因此，初值定理和终值定理在复杂系统的复频域分析和反馈系统的稳定性分析及判断中很有用。

作业

- 6.1 7) 8) 9) 10) 11) (只需求拉普拉斯变换和Z变换)
- 6.3 3) 10) 14) 16)
- 6.7 5) 8) 9) 10) (其中10)的ROC改为Re{s}>0)
- 6.39 2) 4) 6) 8)