



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院  
School of Information Science and Technology

# 信号与系统 – 第八周

## 傅里叶变换和级数的性质

赵 峰, 电四楼421  
fzhao956@ustc.edu.cn  
2022/4/13

# 第6章 傅里叶变换和级数的性质及其揭示的时域与频域间的关系

## 6.1 引言

上一章介绍和讨论了信号和系统的各种频域表示及其物理含义，并讲述了它们的物理意义和相互之间的关系：

- 连续时间频域表示(CFT 和 CFS)与离散时间频域表示(DTFT 和 DFS)之间的对偶关系(见本章 6.11节)，但  $F(\omega)$  或  $F_k$  是频域  $\omega$  上的非周期函数或序列，而  $\tilde{F}(\Omega)$  或  $\tilde{F}_k$  分别是频域  $\Omega$  上周期为  $2\pi$  的周期函数或周期为  $N$  的周期序列；
- 周期信号或序列的傅里叶变换分别是频域上强度为  $2\pi F_k$  或  $2\pi\tilde{F}_k$ 、间隔为  $2\pi/T$  或  $2\pi/N$  的等间隔冲激串；
- $N$  点序列  $x[n]$  的 DFT 系数  $X[k]$  就是其 DTFT  $\tilde{X}(\Omega)$  在主值区间  $[0, 2\pi)$  上等间隔的  $N$  个样本值，也等于以  $N$  为周期延拓的周期序列之主值区间上 DFS 系数的  $N$  倍。

## 6.1 引言(续)

这就是为什么把各种傅里叶变换和傅里叶级数的性质**统一讲述**的主要理由。**弄清楚这些关系和差别**，就不难从一种傅里叶表示的性质**联想并导出**另一种傅里叶表示的对应性质。

- 讲述各种傅里叶表示之性质的重点放在：

- ★ 每个性质的**物理意义**和**所揭示的频域与时域间的关系**，即信号频谱和 LTI 系统频率响应与其时域特性之间的关系。正是由这些性质获得的相应概念和方法，导致了傅里叶方法在**系统分析与综合**和**信号分析与处理**中的广泛应用。
- ★ **利用这些性质导出新的变换或反变换的方法和技巧**。

从本章的例题中将会看到：在信号与系统分析中**经常用到的变换对**，都可以由**很少几个熟知的变换对**（如  $\delta(t)$  和  $\delta[n]$  的变换对），**利用变换对性质方便求得**。

- 直接从傅里叶变换和级数表示得到的特性

- ★ **CFT** 是  $\omega$  上的**非周期函数**，**DTFT** 是  $\Omega$  上  $2\pi$  的**周期函数**
- ★ **周期信号或序列的频域表示是离散谱和等间隔冲激串**；

## 6.1 引言(续)

傅里叶变换对和级数对的**特定函数值或序列值**，例如：

直接从CFT 和 DTFT 正变换公式可以得到

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, \quad \tilde{F}(2m\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]$$

和

$$\tilde{F}((2m+1)\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f[n]$$

这表明：连续时间或离散时间信号在**零频率的谱密度**等于**信号波形下的面积或所有序列值之和**，离散时间序列在最高频率 ( $\pi$  的奇数倍) 的**谱密度**等于该序列加权  $(-1)^n$  后的所有序列值之和。此特性在傅里叶级数和 DFT 中表现的更清楚：

$$\tilde{F}_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{f}(t)dt, \quad \tilde{F}_{mN} = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \tilde{f}[n] \quad \text{和} \quad X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

即**周期信号或序列的常数分量**等于其一个周期区间内的平均值。

同理，根据反变换公式和 CFS 及 DFS 的合成公式，也有

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega, \quad f[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}(\Omega)d\Omega$$

## 6.1 引言(续)

$$\text{及 } x[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \quad \text{和} \quad \tilde{x}(mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \quad \text{及} \quad \tilde{x}[mN] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{F}_k$$

**说明：**上一章讲述时域中的时间函数和序列的傅里叶变换表示时，区分了两种傅里叶变换：严格意义的傅里叶变换 (满足模可积或模可和的 CFT 或 DTFT) 和扩展意义的傅里叶变换 (频域引入冲激及其导数，或 CFT 和 DTFT 是频域无界函数)。

**提醒：**傅里叶变换性质的适用情况，两者有所不同。

- ★ 本章讲述的所有傅里叶变换性质对严格意义的傅里叶变换都适用，可以放心运用；
- ★ 对扩展意义的傅里叶变换有些性质不适用。基本限制是：无论时域还是频域，如果傅里叶变换性质牵涉到奇异函数运算或无界函数运算没有意义的情况，就不适用该性质。例如：频域或时域同一位置冲激函数或其导数相乘运算、 $\delta(\omega)\delta(\omega)$ 、 $u(t)*u(-t)$  等，请在学习时留意。



## 6.2 线性性质

各种傅里叶变换和级数都属于数学中的**线性变换**，无论线性函数变换还是线性矢量变换，都具有**线性性质**。

### ● CFT 和 DTFT 的线性性质

若分别有： $F_1(\omega) = \mathbf{F} \{f_1(t)\}$  及  $F_2(\omega) = \mathbf{F} \{f_2(t)\}$   
和  $\tilde{F}_1(\Omega) = \mathbf{F} \{f_1[n]\}$  及  $\tilde{F}_2(\Omega) = \mathbf{F} \{f_2[n]\}$   
则分别有：

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$$

和 
$$\alpha f_1[n] + \beta f_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \alpha \tilde{F}_1(\Omega) + \beta \tilde{F}_2(\Omega)$$

其中， $\alpha$  和  $\beta$  是任意复常数。

### ● 离散傅里叶变换 (DFT) 的线性性质

若  $M_1$  和  $M_2$  点序列  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的  $N$  点 **DFT** 系数分别为  $X_1[k]$  和  $X_2[k]$ ，其中  $N \geq M_1$  和  $N \geq M_2$ ，对于任意复常数  $\alpha$  和  $\beta$ ，则

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \alpha X_1[k] + \beta X_2[k]$$

## 6.2 线性性质(续)

### ● CFS 和 DFS 的线性性质

若有两个相同周期  $T$  或  $N$  的周期信号或序列  $\tilde{x}_1(t)$  和  $\tilde{x}_2(t)$  或  $\tilde{x}_1[n]$  和  $\tilde{x}_2[n]$ ，它们 CFS 或 DFS 系数分别为  $F_{1k}$  和  $F_{2k}$  或  $\tilde{F}_{1k}$  和  $\tilde{F}_{2k}$ ，对于任意复常数  $\alpha$  和  $\beta$ ，则分别有

$$\alpha\tilde{x}_1(t) + \beta\tilde{x}_2(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} \alpha F_{1k} + \beta F_{2k}$$

和

$$\alpha\tilde{x}_1[n] + \beta\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \alpha\tilde{F}_{1k} + \beta\tilde{F}_{2k}$$

**讨论：**这些线性性质表明，时域中时间函数或序列的线性组合之频域表示，等于各自的傅里叶变换或傅里叶级数系数的相同线性组合。

显然，这些线性性质可以用来由已知的傅里叶变换对和级数对，求得新的傅里叶变换对和级数对，请看下面的例子。

**【例 6.1】** 试求  $\cos(\omega_0 t)$ 、 $\sin(\omega_0 t)$  和  $\cos[\Omega_0 n]$ 、 $\sin[\Omega_0 n]$  的傅里叶变换。

**解：** 利用欧拉公式，正弦信号和序列可以写成：

## 6.2 线性性质(续)

$$\cos(\omega_0 t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \quad \text{和} \quad \sin(\omega_0 t) = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j$$

根据在 5.5 节已求得的如下傅里叶变换对：

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

利用线性性质可得到

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

和

$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

用同样的方法，根据在 5.5 节已求得的如下 DTFT 变换对：

$$e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2m\pi)$$

可以求得  $\cos[\Omega_0 n]$  和  $\sin[\Omega_0 n]$  的离散时间傅里叶变换如下：

$$\cos[\Omega_0 n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)]$$

和

$$\sin[\Omega_0 n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} j\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)]$$

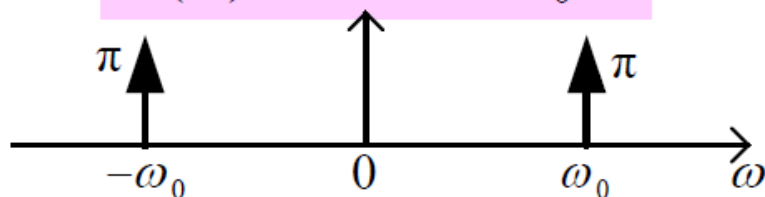


## 6.2 线性性质(续)

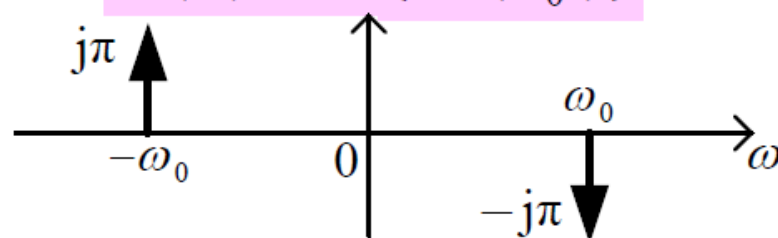
它们的函数图形如下图所示，这表明余弦和正弦信号的频谱犹如一根扁担两头各挑了一个强度为  $\pi$  或  $\pm j\pi$  的冲激，其中  $j$  表示  $90^\circ$  相移。

这是两对常用的傅里叶变换对，最好记住它们。

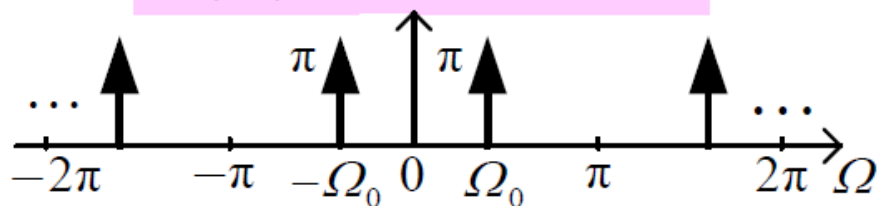
$$X(\omega) = \mathcal{F} \{ \cos(\omega_0 t) \}$$



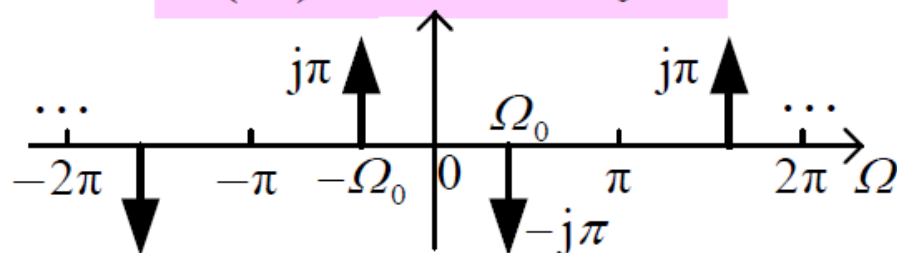
$$X(\omega) = \mathcal{F} \{ \sin(\omega_0 t) \}$$



$$\tilde{X}(\Omega) = \mathcal{F} \{ \cos[\Omega_0 n] \}$$



$$\tilde{X}(\Omega) = \mathcal{F} \{ \sin[\Omega_0 n] \}$$



## 6.3 卷积性质

傅里叶变换和级数的“卷积性质”包括时域卷积性质和频域卷积性质，它们分别指在时域和频域上两个函数或数值序列的卷积，分别对应到频域和时域上是什么运算。

在变换(包括级数)的所有性质中，最重要的性质莫过于卷积性质，这有两个理由：

- ▲ 卷积性质统帅了大部分的其他变换性质
  - ★ 可以看成卷积性质的一个特例，例如：时移和频移性质、时域微分和积分及时域差分 and 累加性质、频域微分和积分性质，傅里叶级数和 DFT 的频域差分 and 累加性质等；
  - ★ 可以由卷积性质导出的性质，例如：抽样定理、相关定理和帕什瓦尔定理、希尔伯特变换等
- ▲ 时域卷积性质和频域卷积性质都在信号与系统理论和方法中起着特别重要的作用，它们直接导致诸如滤波、调制、抽样和扩谱通信等一系列很有用的概念和方法。

## 6.3.1 时域卷积性质

### ■ CFT 和 DTFT 的时域卷积性质

若分别有： $X(\omega) = \mathbf{F} \{x(t)\}$  和  $H(\omega) = \mathbf{F} \{h(t)\}$

及  $\tilde{X}(\Omega) = \mathbf{F} \{x[n]\}$  和  $\tilde{H}(\Omega) = \mathbf{F} \{h[n]\}$

则分别有： $x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)H(\omega)$

和  $x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)$

这表明：时域中两个时间函数或序列的卷积，对应到频域中是它们的傅里叶变换相乘。此性质已在 5.4.3 小节证明并说明过。

**讨论：**如果  $x(t)$  或  $x[n]$  和  $h(t)$  或  $h[n]$  分别代表连续时间信号或序列和 LTI 系统的单位冲激响应，则  $X(\omega)$  或  $\tilde{X}(\Omega)$  和  $H(\omega)$  或  $\tilde{H}(\Omega)$  就代表信号或序列的频谱和 LTI 系统频率响应。那么，由傅里叶变换的时域卷积性质可以直接获得：

- LTI 系统的所谓“**频域稳态分析方法**”

可以通过求输入信号或序列的傅里叶变换，让它与 LTI 系统

## 6.3.1 时域卷积性质(续)

频率响应相乘，得到输出信号或序列的频谱，再经过反变换求得 LTI 系统的输出信号或序列。这个方法在第 9 章将详细讲述。

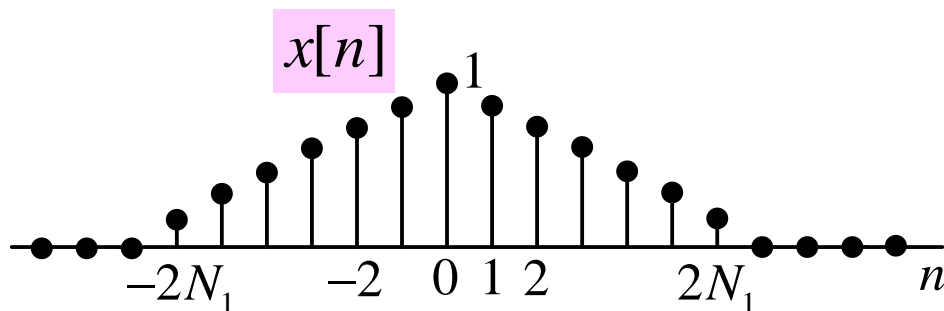
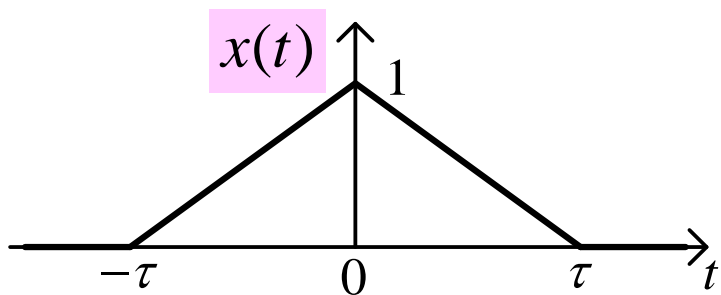
### ● 信号滤波和滤波器的概念与方法

信号或序列的频谱  $X(\omega)$  或  $\tilde{X}(\Omega)$  与一个频域函数相乘，意味着对信号频谱可以任意修剪，为此只要设计一个满足修剪需求的频域函数  $H(\omega)$  或  $\tilde{H}(\Omega)$ 。这就是信号滤波的概念和方法。

进一步可得出 LTI 系统是天生的滤波器，称为线性滤波器。有关滤波和滤波器的设计问题将在第 10 章中进一步讨论。

利用时域卷积性质，还可以方便求取傅里叶变换或反变换。

**【例 6.2】** 试求下图所示三角脉冲和三角形序列的傅里叶变换



## 6.3.1 时域卷积性质(续)

**解：** 根据第3章例3.4的结果，三角脉冲  $x(t)$  和三角形序列  $x[n]$  可分别写成

$$x(t) = \frac{1}{\tau} r_{\tau}(t) * r_{\tau}(t) \quad \text{和} \quad x[n] = \frac{1}{2N_1+1} r_{2N_1+1}[n] * r_{2N_1+1}[n]$$

若知道矩形脉冲  $r_{\tau}(t)$  和矩形序列  $r_{2N_1+1}[n]$  的傅里叶变换  $R_{\tau}(\omega)$  和  $\tilde{R}_{2N_1+1}(\Omega)$  可见例5.6，即

$$R_{\tau}(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad \text{和} \quad \tilde{R}_{2N_1+1}(\Omega) = \frac{\sin((2N_1+1)\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$$

可直接利用时域卷积性质求得  $x(t)$  和  $x[n]$  的傅里叶变换，即

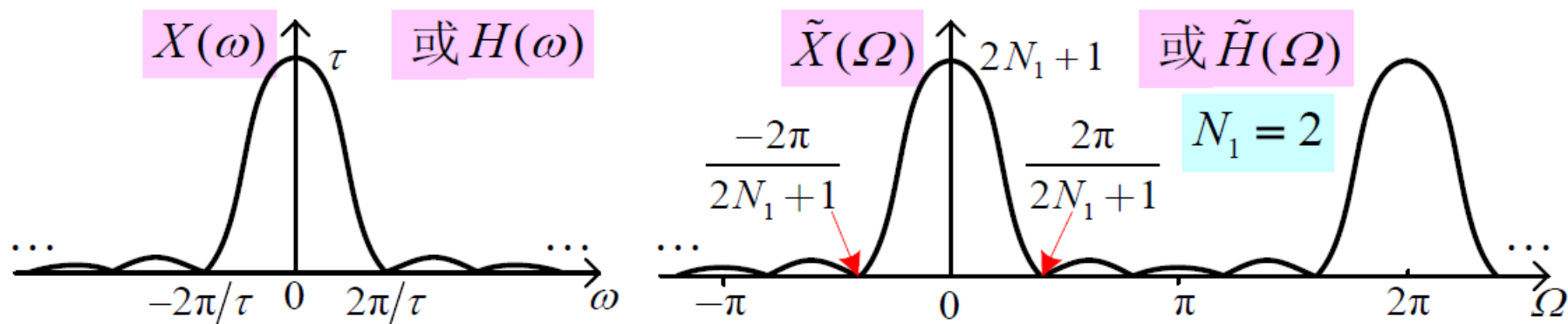
$$X(\omega) = \frac{1}{\tau} R_{\tau}^2(\omega) = \tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

和

$$\tilde{X}(\Omega) = \frac{1}{2N_1+1} \left[ \tilde{R}_{2N_1+1}(\Omega) \right]^2 = \frac{1}{2N_1+1} \frac{\sin^2((2N_1+1)\Omega/2)}{\sin^2(\Omega/2)}$$

它们的函数图形如下图所示。

## 6.3.1 时域卷积性质(续)



如果 LTI 系统的单位冲激响应  $h(t)$  或  $h[n]$  是这样的三角脉冲或三角形序列，上图的频域函数就是其频率响应  $H(\omega)$  或  $\tilde{H}(\Omega)$ 。

**讨论：** 信号的零谱密度和 LTI 系统的零频率响应

傅里叶变换函数图形的零值点的频率 (或频率范围) 表示信号的零谱密度或 LTI 系统的零频率响应，这个频域特征意味着：

- ★ 可以在信号的零谱密度的频率上 (或频率范围内) 插入别的信号，且可以用窄带滤波器把他们分离出来。模拟制载波电话系统中的导频信号就是一概念应用的典型例子。
- ★ LTI 系统的零频率响应可以完全滤除输入信号中包含的该频率 (或频率范围) 的信号分量。



## 6.3.1 时域卷积性质(续)

### ■ CFS 和 DFS 的时域周期卷积性质

周期信号或序列在时域只有周期卷积，两个相同周期的周期信号或序列周期卷积的结果，仍是同样周期的周期信号或序列。

连续傅里叶级数和离散傅里叶级数的时域周期卷积性质为：

若有两个周期同为  $T$  的周期信号  $\tilde{x}(t)$  及  $\tilde{g}(t)$ ，和周期同为  $N$  的周期序列  $\tilde{x}[n]$  及  $\tilde{g}[n]$ ，它们的 CFS 和 DFS 系数为  $F_k$  及  $G_k$  和  $\tilde{F}_k$  及  $\tilde{G}_k$ ，则分别有：

$$\int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{CFS}} T F_k G_k$$

$$\sum_{m \in \langle N \rangle} \tilde{x}[m] \tilde{g}[n - m] \xleftrightarrow{\text{DFS}} N \tilde{F}_k \tilde{G}_k$$

即时域周期卷积对应到频域是 CFS 和 DFS 系数相乘的  $T$  或  $N$  倍。

**注意：**周期信号或序列既有傅里叶级数表示，又可用傅里叶变换表示。由于它们的周期相同，CFT 或 DTFT 是间隔相同的等间隔冲激串，**不能用**傅里叶变换的时域卷积性质，因为牵涉到相同频率的冲激函数相乘，这是没有意义的。

### 6.3.1 时域卷积性质(续)

周期卷积得到的周期信号或序列也可有傅里叶变换表示, 故上述 CFS 和 DFS 的周期卷积性质也可等价表示为:

$$\int_{\langle T \rangle} \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi T \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k G_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

和 
$$\sum_{m \in \langle N \rangle} \tilde{f}[m] \tilde{g}[n - m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi N \sum \tilde{F}_k \tilde{G}_k \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N})$$

**讨论:** 第3章讲述两个周期信号或序列周期卷积时, 曾提到过有产生和不产生“时域混叠”的两种情况。这里需强调, 上述傅里叶级数的时域周期卷积性质对这两种情况都成立。但将影响到下面的 DFT 的时域卷积性质。

#### ■ 离散傅里叶变换(DFT)的时域卷积性质

DFT 的时域卷积性质有两种: 时域循环卷积性质和时域线性卷积性质。由于有限长序列的 DFT 表示法与周期序列的 DFS 表示法之间的关系, DFT 的这两种时域卷积性质分别与周期卷积产生和不产生“时域混叠”相联系。

## 6.3.1 时域卷积性质(续)

### ● DFT 的时域循环卷积性质

对于两个点数分别为  $N_1$  和  $N_2$  的有限长序列  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$ ，若选取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，且假设  $X_1[k]$  和  $X_2[k]$  分别是  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的  $N$  点 DFT 系数，则 DFT 的时域循环卷积性质可表示为

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2([n-m])_N \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] X_2[k]$$

其中， $x_2([n-m])_N$  表示  $x_2[m]$  以  $N$  为周期延拓成的  $\tilde{x}_2[m]$  反转并右移  $n$  后落在求和区间的  $N$  点序列，这叫做  $N$  点序列  $x_2[m]$  的循环反转移位。上式左边表示  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的  $N$  点循环卷积运算，即

$$\begin{aligned} y_{\odot}[n] &= x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2([n-m])_N \\ &= \left( \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \right) r_N[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

其中， $r_N[n]$  是  $N$  点单位值矩形序列。

它表示： $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  以  $N$  为周期延拓成的  $\tilde{x}_1[n]$  和  $\tilde{x}_2[n]$  进行周期

## 6.3.1 时域卷积性质(续)

卷积后，对其结果取主值区间得到的  $N$  点序列就是  $y_{\odot}[n]$ 。

为弄清  **$N$  点循环卷积运算**，可以看下面的例子。

**【例 6.3】** 试求 4 点  $x_1[n]$  和 8 点  $x_2[n]$  的 8 点循环卷积  $y_{\odot}[n]$ 。

$n$	0	1	2	3
$x_1[n]$	1	2	2	1

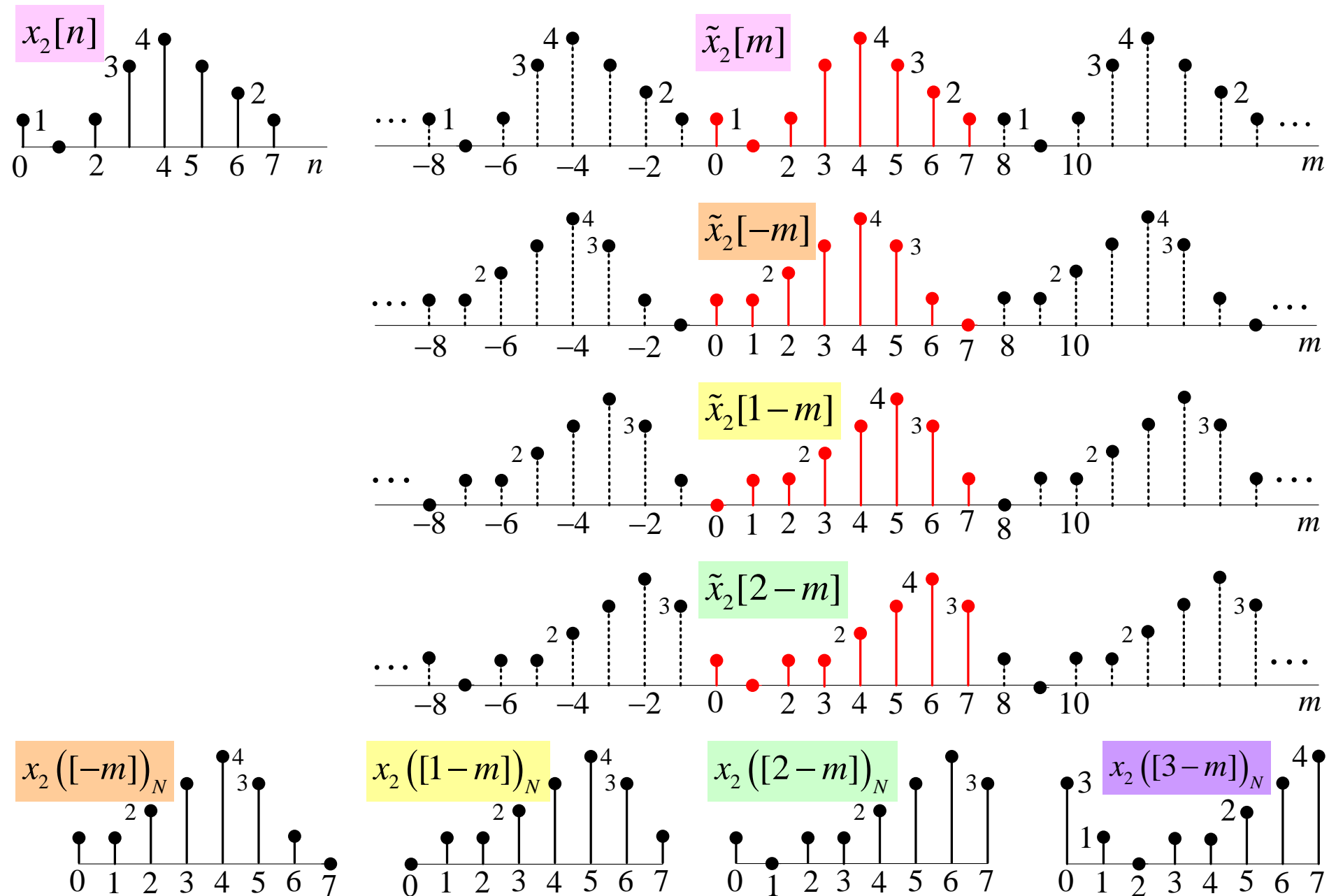
$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_2[n]$	1	0	1	3	4	3	2	1

**解：** 按照上面的循环卷积运算公式，它们的 8 点循环卷积为

$$\begin{aligned} y_{\odot}[n] &= x_1[n] \textcircled{8} x_2[n] = \sum_{m=0}^7 x_1[m] x_2([n-m])_8 \\ &= r_8[n] \left( \sum_{m=0}^7 \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \right), \quad 0 \leq n \leq 7 \end{aligned}$$

下图画出了 8 点序列  $x_2[n]$  及其周期延拓成的  $\tilde{x}_2[m]$ 、 $\tilde{x}_2[-m]$ 、 $\tilde{x}_2[1-m]$  和  $\tilde{x}_2[2-m]$  的序列图形，并以**红色序列值**表示它们落在主值区间上的序列值，图中最下一行画出了  $n=0, 1, 2, 3$  时刻的 4 个 8 点序列  $x_2([n-m])_N$  的序列图形。

## 6.3.1 时域卷积性质(续)



## 6.3.1 时域卷积性质(续)

基于上图的说明，此 8 点循环卷积可以写成如下矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} y_{\odot}[0] \\ y_{\odot}[1] \\ y_{\odot}[2] \\ y_{\odot}[3] \\ y_{\odot}[4] \\ y_{\odot}[5] \\ y_{\odot}[6] \\ y_{\odot}[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 19 \\ 15 \end{bmatrix}$$

其中， $8 \times 8$  矩阵可称为“**循环卷积矩阵**”，它自上至下的各行元素分别为  $x_2([-m])_8$ 、 $x_2([1-m])_8$ 、 $x_2([2-m])_8$ 、 $\cdots$ 、 $x_2([7-m])_8$ ，即**第 1 行元素**是  $x_2[n]$  的反转并循环右移 1 位的 8 点序列值，**以下各行**分别是上一行元素循环右移 1 位。本题所求的  $y_{\odot}[n]$  为

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_{\odot}[n]$	10	6	4	6	12	18	19	15



## 6.3.1 时域卷积性质(续)

**讨论：**由该例子可以归纳出，两个  $N$  点序列  $x_1[n]$  与  $x_2[n]$  的  $N$  点循环卷积的矩阵运算表示为

$$\begin{bmatrix} y_{\odot}[0] \\ y_{\odot}[1] \\ \vdots \\ y_{\odot}[N-2] \\ y_{\odot}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & \cdots & x_2[2] & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[3] & x_2[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2[N-2] & x_2[N-3] & \cdots & x_2[0] & x_2[N-1] \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[1] & x_2[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-2] \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}$$

其中， $N \times N$  阶循环卷积矩阵的特点为：对角线元素均是  $x_2[0]$ ，最后一行元素正好是  $N$  点序列  $x_2[n]$  反序排列的  $N$  个序列值，以上各行元素分别是下一行元素循环左移 1 位。

实际上，两个  $N$  点序列的  $N$  点循环卷积与两个周期为  $N$  的周期序列的周期卷积本质上是一致的。像周期卷积会出现时域混叠一样，当  $N_1 + N_2 \geq N$  时， $N$  点循环卷积就会产生时域混叠。本例就是这种情况， $y_{\odot}[n]$  不同于  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的线性卷积结果。

## 6.3.1 时域卷积性质(续)

### ● DFT 的时域线性卷积性质

由于  $N_1$  点序列  $x_1[n]$  与  $N_2$  点序列  $x_2[n]$  线性卷积所得序列的点数等于  $N_1 + N_2 - 1$ ，若选择 DFT 的点数  $N \geq N_1 + N_2 - 1$ ，时域卷积就不产生混叠，时域循环卷积相当于线性卷积，即

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

上述的  $N$  点时域循环卷积性质就转化成如下  $N$  点线性卷积性质：

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[n-k] \xleftrightarrow[N \geq N_1+N_2-1]{\text{DFT}} X_1[k]X_2[k], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

其中， $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  是添补了零值的  $N$  点序列， $X_1[k]$  和  $X_2[k]$  分别它们的  $N$  点 DFT 系数。

现用例子来说明时域线性卷积性质与循环卷积性质的区别。

**【例 6.4】** 对于例 6.3 中的 4 点  $x_1[n]$  和 8 点  $x_2[n]$ ，选择  $N=11$  计算它们的 11 点循环卷积  $y_{\circlearrowleft}[n]$ 。

**解：** 按照循环卷积矩阵运算公式，11 点循环卷积的矩阵运算为

## 6.3.1 时域卷积性质(续)

$$\begin{bmatrix} y_{\odot}[0] \\ y_{\odot}[1] \\ y_{\odot}[2] \\ y_{\odot}[3] \\ y_{\odot}[4] \\ y_{\odot}[5] \\ y_{\odot}[6] \\ y_{\odot}[7] \\ y_{\odot}[8] \\ y_{\odot}[9] \\ y_{\odot}[10] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 19 \\ 15 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此得到  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的 11 点循环卷积 (即两者的线性卷积) 结果  $y[n]$  如下;

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y[n]$	1	2	3	6	12	18	19	15	9	4	1

## 6.3.1 时域卷积性质(续)

由于列矢量  $x_1$  中后 7 个序列值是添补的零值，循环卷积矩阵右上角**橙色三角形**中的非零元素与零值无异，这就与3.3.2 小节中介绍的线性卷积矩阵运算中  $H$  矩阵的结构完全一样，故  $x_1[n]$  与  $x_2[n]$  的 11 点循环卷积结果就是两者进行线性卷积的结果  $y[n]$ 。

**讨论：**如果将本例的  $x_1[n]$  与  $x_2[n]$  的 **11 点循环卷积** 结果  $y[n]$  与例 6.3 中它们的 **8 点循环卷积** 结果  $y_{\odot}[n]$  比较如下：

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y[n]$	1	2	3	6	12	18	19	15	9	4	1

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_{\odot}[n]$	10	6	4	6	12	18	19	15

可以看出： $y_{\odot}[n]$  的**后 5 个序列值**与  $y[n]$  的**第 4 个至第 8 个序列值**完全相同；而  $y_{\odot}[n]$  的**前 3 个序列值**正是  $y[n]$  的**前 3 和后 3 个序列值**混叠的结果。

## 6.3.2 频域卷积性质

### ■ CFT 频域卷积性质和 DTFT 频域周期卷积性质

假设  $X(\omega) = \mathbf{F} \{x(t)\}$  和  $P(\omega) = \mathbf{F} \{p(t)\}$   
及  $\tilde{X}(\Omega) = \mathbf{F} \{x[n]\}$  和  $\tilde{P}(\Omega) = \mathbf{F} \{p[n]\}$   
则分别有：
$$x(t)p(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$
  
和 
$$x[n]p[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(\Omega) \odot \tilde{P}(\Omega)$$

这表明：两个时间函数或序列在时域上相乘，对应到频域是它们傅里叶变换卷积的  $1/2\pi$ ，由于序列的 **DTFT** 是频域  $\Omega$  上的周期函数，故离散时间频域  $\Omega$  上的卷积应该是周期卷积。

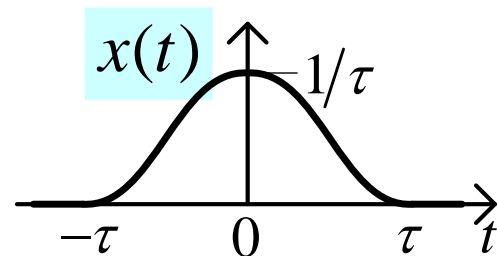
**讨论：**上述频域卷积性质最典型的应用是**载波幅度调制**，即用一个信号去控制另一个称为载波信号的幅度，因此频域卷积性质又叫做傅里叶变换的**调制性质**。后面几节和下一章将介绍频域卷积性质的许多重要应用。

## 6.3.2 频域卷积性质(续)

利用频域卷积性质，还可以方便求取傅里叶变换或反变换。

**【例 6.5】** 试求升余弦脉冲信号  $x(t)$  的频谱

$$x(t) = \begin{cases} (1/2\tau)\{1 + \cos[(\pi/\tau)t]\}, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$



**解：**  $x(t)$  可以写成两个函数的相乘形式：

$$x(t) = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \right] \right\} r_{2\tau}(t)$$

其中， $r_{2\tau}(t)$  是宽度为  $2\tau$  的偶对称矩形脉冲，按照前一章例 5.6 的结果，它的傅里叶变换对为

$$r_{2\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$$

并根据例 6.1 中正弦信号的 CFT，有如下傅里叶变换对：

$$1 + \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \xleftrightarrow{\text{CFT}} 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)$$



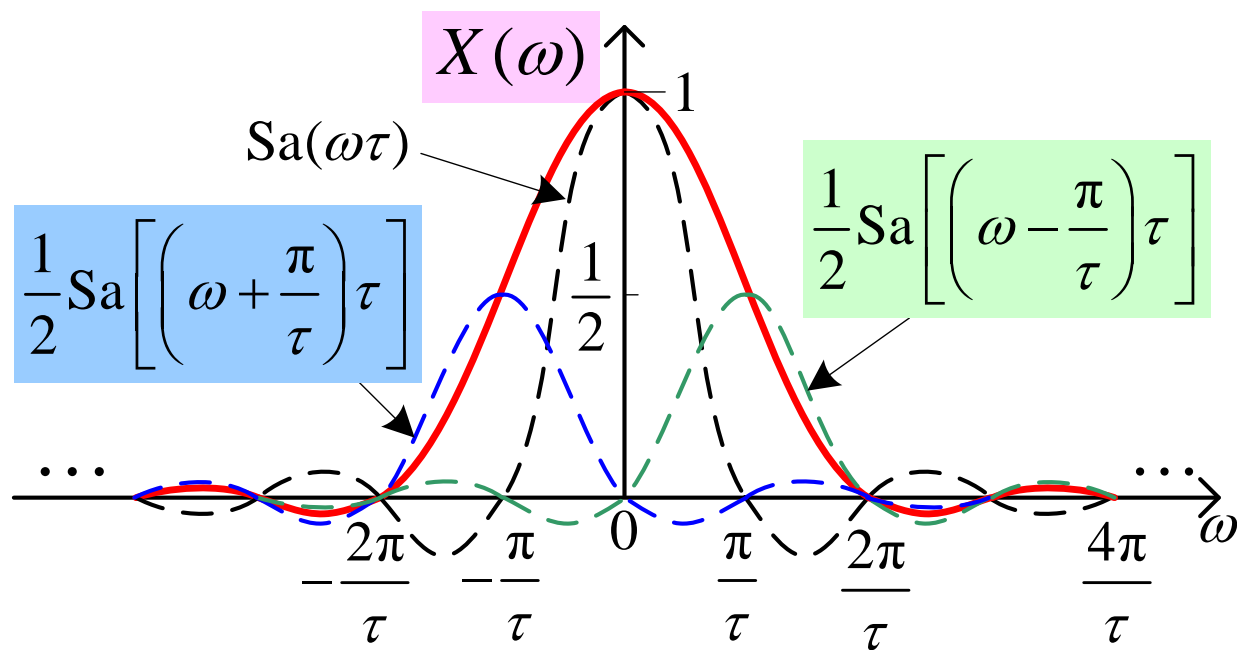
## 6.3.2 频域卷积性质(续)

根据 CFT 频域卷积性质，升余弦脉冲的傅里叶变换  $X(\omega)$  为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\tau} \left\{ 2\tau \text{Sa}(\omega\tau) * 2\pi \left[ \delta(\omega) + \frac{1}{2} \left[ \delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \right] \right] \right\} \\ &= \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{1}{2} \left\{ \text{Sa} \left[ \left( \omega + \frac{\pi}{\tau} \right) \tau \right] + \text{Sa} \left[ \left( \omega - \frac{\pi}{\tau} \right) \tau \right] \right\} \end{aligned}$$

依照熟悉的抽样函数图形，很容易画出它的频谱图形 (见下图)。

图中看出，由于  $X(\omega)$  中 3 项抽样函数分量旁瓣相互抵消的结果，使得升余弦脉冲频谱的旁瓣远低于矩形脉冲频谱的旁瓣。



## 6.3.2 频域卷积性质(续)

### ■ CFS 和 DFS 的频域卷积性质

连续时间周期信号的 CFS 系数是频域上的非周期序列，而离散时间序列的 DFS 系数则是频域上的周期序列，因此，**CFS 的频域卷积性质**和 **DFS 的频域周期卷积性质**为：

若有两个**周期同为 $T$** 的周期信号 $\tilde{x}(t)$ 及 $\tilde{g}(t)$ ，和**周期同为 $N$** 的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 及 $\tilde{g}[n]$ ，它们的 CFS 和 DFS 系数为 $F_k$ 及 $G_k$ 和 $\tilde{F}_k$ 及 $\tilde{G}_k$ ，则分别有：

$$\tilde{x}(t)\tilde{g}(t) \xleftrightarrow{\text{CFS}} F_k * G_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l G_{k-l}$$

和

$$\tilde{x}[n]\tilde{g}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{F}_k \odot \tilde{G}_k = \sum_{l \in \langle N \rangle} \tilde{F}_l \tilde{G}_{k-l}$$

这表明：两个相同周期的周期信号或序列时域相乘，对应到频域上则分别是两个 CFS 系数的**线性(非周期)**卷积或两个 DFS 系数的**周期卷积**。

## 6.3.2 频域卷积性质(续)

### ■ 离散傅里叶变换(DFT)的频域循环卷积性质

$N$  点序列的 DFT 是频域上的  $N$  点系数序列，与其时域上的循环卷积性质一样，在频域上也有完全类似的循环卷积性质。

假设两个  $N$  点序列  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的 DFT 系数分别为  $X_1[k]$  和  $X_2[k]$ ，则有

$$\begin{aligned} x_1[n]x_2[n] &\xleftrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{N} X_1[k] \circledast X_2[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1[m]X_2([k-m])_N \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_1[m]\tilde{X}_2[k-m] \right) r_N[k] \end{aligned}$$

其中， $\tilde{X}_1[k]$  和  $\tilde{X}_2[k]$  分别是  $X_1[k]$  和  $X_2[k]$  以  $N$  为周期进行周期延拓生成的周期系数序列， $r_N[k]$  是  $N$  点单位值矩形序列。

**DFT 的频域循环性质表明：**两个  $N$  点序列时域相乘得到新  $N$  点序列的 DFT 系数序列，等于两个  $N$  点 DFT 系数的  $N$  点循环卷积所得数值序列的  $1/N$ 。

# 作业

- 6.1 1) 6) 14) 15)