



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

信息科学技术学院
School of Information Science and Technology

信号与系统 – 第十三周

拉普拉斯变换和 Z 变换 (续)

赵 峰, 电四楼421
fzhao956@ustc.edu.cn
2022/5/18

8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点分布

根据复变函数的数学理论，复变函数是其收敛域上的解析函数，它的零、极点对其特性起着根本作用。后面将看到，信号和系统的许多重要时、频域特性经由其像函数零、极点体现。本小节讨论拉普拉斯变换和 Z 变换像函数之零、极点分布及其性质，

■ 像函数的零、极点分布

● 零点和极点的定义

假设 **L** $\{f(t)\} = \{F(s), R_F\}$ 和 **Z** $\{f[n]\} = \{F(z), R_F\}$

如果 S 平面或 Z 平面上有某个点 z_i ，使得

$$\lim_{s \rightarrow z_i} F(s) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{z \rightarrow z_i} F(z) = 0$$

则点 z_i 就是像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 在 S 平面或 Z 平面上的零点。

如果 S 平面或 Z 平面上有某个点 p_i ，使得

$$\lim_{s \rightarrow p_i} F(s) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{z \rightarrow p_i} F(z) = \infty$$

则点 p_i 就是像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 在 S 平面或 Z 平面上的极点。

像函数的零点和极点通常都画在 S 平面或 Z 平面上，并分别

8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

用“○”和“×”表示(例8.1&8.3)。再看下面更多零、极点的例子。

【例 8.4】 试求如下指数函数和序列线性组合的拉普拉斯变换和 Z 变换：

$$f_1(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad \text{和} \quad f_1[n] = 0.6(1/2)^n u[n] + 0.4(-1/3)^n u[n]$$

解： 利用例 8.1 中单边指数函数的拉普拉斯变换和 Z 变换，则

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \mathbf{L} \left\{ [e^{-t} + e^{-2t}]u(t) \right\} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}, \quad (\operatorname{Re}\{s\} > -1) \cap (\operatorname{Re}\{s\} > -2) \\ &= \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad R_{F_1} = (\operatorname{Re}\{s\} > -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \mathbf{Z} \left\{ \left[\frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right] u[n] \right\}, \quad (|z| > 0.5) \cap (|z| > (1/3)) \\ &= \frac{1}{[1 - (1/2)z^{-1}][1 + (1/3)z^{-1}]}, \quad R_{F_1} = (|z| > 0.5) \end{aligned}$$

其中， $(*) \cap (*)$ 表示两个集合的交集运算。

上述求得的像函数 $F_1(s)$ 和 $F_1(z)$ 都属于复变量的有理函数，

8.3.1 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

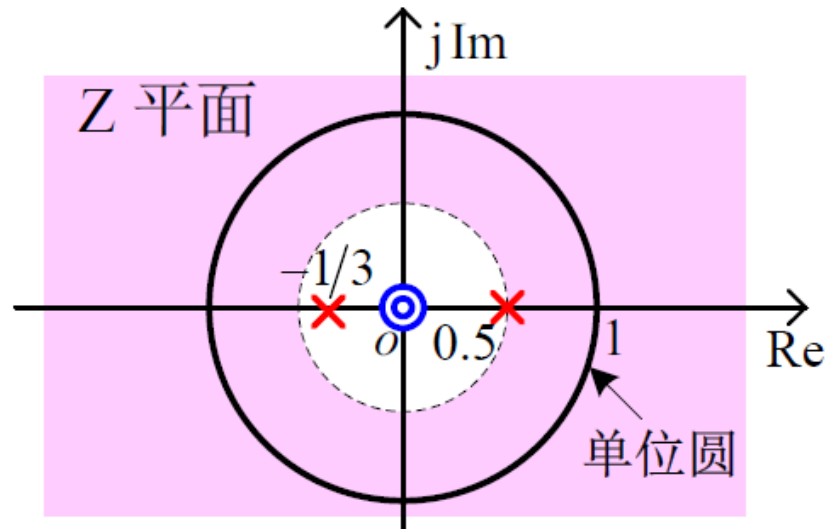
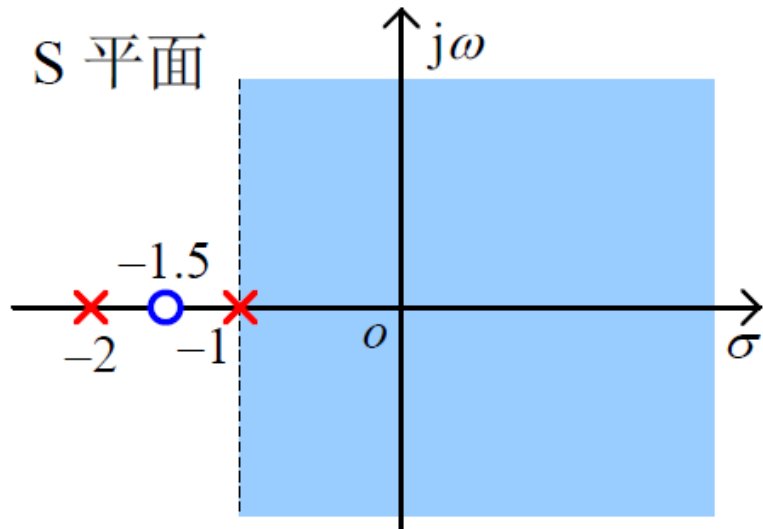
这类有理像函数的零点和极点很容易判断。

表明： ♣ $F_1(s)$ 有两个极点： $p_1 = -1$ 和 $p_2 = -2$ ，它有两个零点：
 $z_1 = -3/2$ 和**无穷远点**。

♣ $F_1(z)$ 也有两个极点 $p_1 = 0.5$ 和 $p_2 = -1/3$ ，还有一个两阶
零点 $z = 0$ 。

$F_1(s)$ 和 $F_1(z)$ 的收敛域与有限复平面上的零、极点分布图形
如下图所示，图中，“ \odot ”表示两阶零点。

由于这两个像函数的收敛域分别包含 S 平面虚轴和 Z 平面单
位圆，故本例的时间函数和序列分别存在 **CFT** 和 **DTFT**。



8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

● 零点和极点的阶数

假设 z_i 和 p_i 分别是像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 的零点和极点, 若有

$$\lim_{s \rightarrow z_i} \frac{d^m}{ds^m} F(s) = \begin{cases} 0, & m < M \\ B, & m = M \end{cases} \quad \text{或} \quad \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^m}{dz^m} F(z) = \begin{cases} 0, & m < M \\ B, & m = M \end{cases}$$

其中, B 为非零有限值。则 z_i 就是 $F(s)$ 或 $F(z)$ 的 M 阶零点。

同样, 如果有

$$\lim_{s \rightarrow p_i} F(s)(s - p_i)^m = \begin{cases} \infty, & m < M \\ B, & m = M \end{cases} \quad \text{或} \quad \lim_{z \rightarrow p_i} F(z)(z - p_i)^m = \begin{cases} \infty, & m < M \\ B, & m = M \end{cases}$$

则点 p_i 就是像函数 $F(s)$ 或 $F(z)$ 的 M 阶极点。

说明: ♣ 像函数的收敛域和零、极点分布图是时间函数和序列之拉普拉斯变换和 Z 变换的图形表示。正如前面求傅里叶变换要求画出频谱或频率响应的图形一样, 在求拉普拉斯变换和 Z 变换时, 也要求画出像函数的收敛域和零、极点分布。

♣ 在零、极点分布图中, 通常用 “○” 和 “×” 分别表示一阶零点和极点, 而 “◎” 和 “※” 则表示两阶零点和极点。

8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

【例 8.5】 试求如下矩形脉冲和序列的拉普拉斯变换和 Z 变换

$$r_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad \text{和} \quad r_{2N+1}[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

解： $r_{\tau}(t)$ 的拉普拉斯变换和 $r_{2N+1}[n]$ 的 Z 变换像函数分别为

$$R_{\tau}(s) = \mathbf{L} \{r_{\tau}(t)\} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-st} dt = \frac{e^{s\tau/2} - e^{-s\tau/2}}{s} = 2 \frac{\text{sh}(s\tau/2)}{s}$$

其中, $\text{sh}(\ast)$ 表示双曲正弦函数($\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$)。

$$\begin{aligned} R_{2N+1}(z) &= \mathbf{Z} \{r_{2N+1}[n]\} = \sum_{n=-N}^N z^{-n} \stackrel{m=n+N}{=} z^N \sum_{m=0}^{2N} z^{-m} \\ &= z^N \frac{1 - z^{-(2N+1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{2N+1} - 1}{z^N (z - 1)}, \quad 0 < |z| < \infty \end{aligned}$$

下面讨论上述像函数的零、极点：。

♣ $R_{2N+1}(z)$ 仍属于有理函数, 其零、极点不难判别: 其分子多项式 $(z^{2N+1} - 1)$ 的根是一阶零点, 即 $z_i = e^{j[2\pi/(2N+1)]i}$, $i = 0, \pm 1, \dots, \pm N$; 但从其分母多项式看, $z = 0$ 是 N 阶极点, $z = 1$ 是

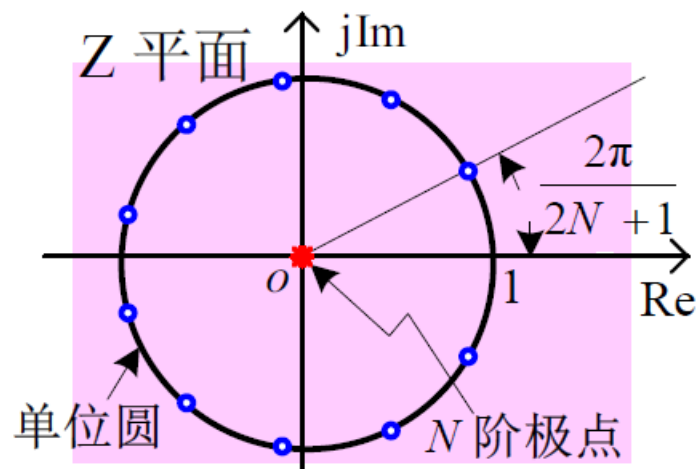
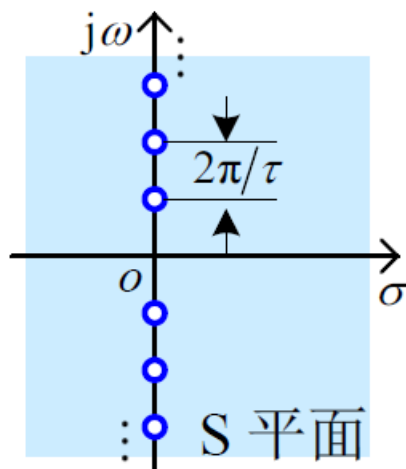
8.3.1 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

一阶极点，与一阶零点抵消，故 $z=1$ 既非零点，也非极点。因此， $R_{2N+1}(z)$ 在单位圆上有 $2N$ 个等间隔一阶零点，原点和无穷远点都是 N 阶极点，收敛域为 $0 < |z| < \infty$ 。

♣ $R_\tau(s)$ 不是有理函数，可改写成 $R_\tau(s) = \frac{e^{s\tau/2}(1-e^{-s\tau})}{s}$ ，其中，

因子 $(1-e^{-s\tau})$ 的根是零点，即 $s_k = j(2\pi/\tau)k$ ， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，是一阶零点，其中 $s=0$ 的一阶零点与分母 s 的一阶极点抵消，故它既非零点也非极点；因子 $e^{s\tau/2}$ 表示无穷远点是无穷阶极点。因此， $R_\tau(s)$ 在虚轴上除原点外分布着无穷多个等间隔一阶零点，其收敛域是有限 S 平面（除无限远点外的 S 平面）。

右图画出了这两个像函数的收敛域与零、极点分布图。



8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

注意: $R_{\tau}(s)$ 和 $R_{2N+1}(z)$ 的收敛域分别包含 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆, $r_{\tau}(t)$ 和 $r_{2N+1}[n]$ 的傅里叶变换图形 (见例 5.6) 的过零点, 正好分别与上图中 S 平面虚轴和 Z 平面单位圆上的等间隔一阶零点相吻合。

■ 有理函数形式的像函数及其零、极点分布

● 有理函数形式的像函数

在拉普拉斯变换和 Z 变换表示中有一类属于所谓“有理函数”的像函数, 即由 s 和 z (或 z^{-1}) 的多项式分式表示的像函数, 它们的一般形式为

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{和} \quad F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{或} \quad F(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

其中, $P(*)$ 和 $Q(*)$ 分别表示分子和分母多项式。

说明:

- ★ 有理像函数在信号和系统的复频域表示中十分重要;
- ★ 几乎所有常规序列的 Z 变换像函数都是有理函数;
- ★ 除有限持续期的时间函数外的绝大部分连续函数的拉

8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

普拉斯变换像函数，也是有理函数；

★ 特别是用线性常系数微分方程和差分方程表示的系统之系统函数都是有理函数。

● 有理像函数的零、极点位置和阶数

这种有理像函数的零、极点及其阶数很容易判别，这里介绍它们的判别方法。

假设 $P(*)$ 和 $Q(*)$ 分别是 M 和 N 次多项式，且 $P(*)$ 有 m 个 ρ_i 重根 z_i ， $Q(*)$ 有 r 个 σ_i 重根 p_i ，这种有理像函数可写成

$$F(s) = F_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)^{\rho_i}}{\prod_{i=1}^r (s - p_i)^{\sigma_i}} \quad \text{和} \quad F(z) = F_0 \frac{\prod_{i=1}^m (1 - z_i z^{-1})^{\rho_i}}{\prod_{i=1}^r (1 - p_i z^{-1})^{\sigma_i}}$$

其中， F_0 是一个复常数， z_i 和 p_i 都是模值有限的复数。

显然，确定它的分子和分母多项式的根就分别求得其零、极点位置和阶数，即它有 m 个 ρ_i 阶零点 z_i 和 r 个 σ_i 阶极点 p_i 。

8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

说明：为什么偏爱 z^{-1} 表示的 Z 变换有理像函数？

- ★ z^{-1} 是离散时间系统实现的最基本单元——单位延时 $[D]$ 的 Z 变换，故 z^{-1} 表示的系统函数直接体现系统的实现结构；而 z 是单位超前系统的 Z 变换，它没有这样的好处。
- ★ z^{-1} 表示的有理像函数的部分分式展开比较简便，更容易求出它的反变换。

当然，用 z 和 z^{-1} 表示的两种有理像函数是等同的，彼此可以相互转化。但仍希望同学们习惯和喜爱用 z^{-1} 来表示 Z 变换像函数。

● 像函数零、极点的性质

根据复变函数的数学理论，也基于上面对像函数的零、极点的分析和讨论，可归纳出像函数零、极点的如下三个性质：

- (1) 零点和极点的**孤立性**；
- (2) 零点和极点**相互平衡**；这意味着在包含无穷远点的整个复平面上，像函数所有极点的阶数之和等于所有零点的阶数之和；

8.3.2 拉普拉斯变换和 Z 变换的零、极点(续)

(3) 有理像函数的零、极点的充分性。

这意味着它的零、极点数目和总阶数是有限的，且在有限 S 平面或 Z 平面上之零点和极点 (位置和阶数) 完全确定其有理像函数的函数形式，只差一个无关紧要的复常数 F_0 。

讨论： 有理形式拉普拉斯变换和 Z 变换的另一种复频域表示

前面已提及，一般时间函数 $f(t)$ 和序列 $f[n]$ 的复频域表示是像函数及其收敛域，即

$$\{f(t)\} \xleftrightarrow{L} \{F(s), R_F\} \quad \text{和} \quad \{f[n]\} \xleftrightarrow{Z} \{F(z), R_F\}$$

鉴于有理像函数零、极点的性质 (3)，对于有理形式的拉普拉斯变换和 Z 变换，可以有另一种等价的复频域表示，即

$$\{f(t)\} \xleftrightarrow{L} \{p_i, \sigma_i, z_i, \rho_i, F_0; R_F\}$$

和
$$\{f[n]\} \xleftrightarrow{Z} \{p_i, \sigma_i, z_i, \rho_i, F_0; R_F\}$$

就实际信号和系统而言， F_0 是实常数，零、极点的位置和阶数 (z_i 、 p_i 和 ρ_i 、 σ_i) 才代表有理像函数的重要信息。

8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质

前面已指出，多个不同的时间函数或序列可能有相同的双边变换像函数，必须靠收敛域来区分。为加深这个认识，并有助于本节对双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换收敛域性质的介绍，接着前面的**例 8.4**，再看如下例子。

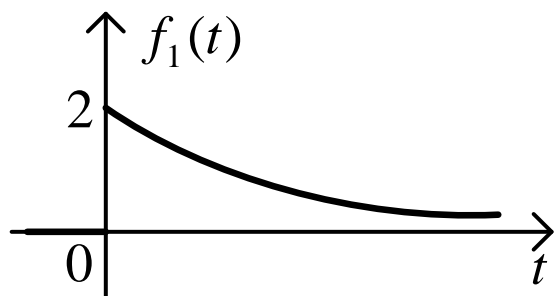
【例 8.6】 再求如下函数和序列的双边拉普拉斯变换和 Z 变换

$$f_2(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(-t) \quad \text{与} \quad f_3(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$$

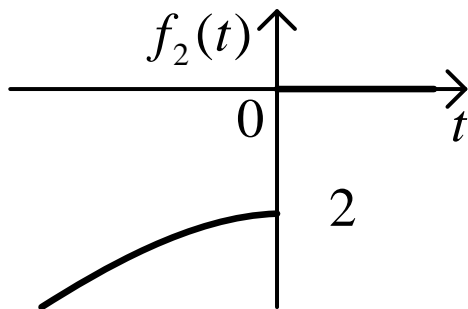
和
$$f_2[n] = -0.6(1/2)^n u[-n-1] - 0.4(-1/3)^n u[-n-1]$$

与
$$f_3[n] = 0.4(-1/3)^n u[n] - 0.6(1/2)^n u[-n-1]$$

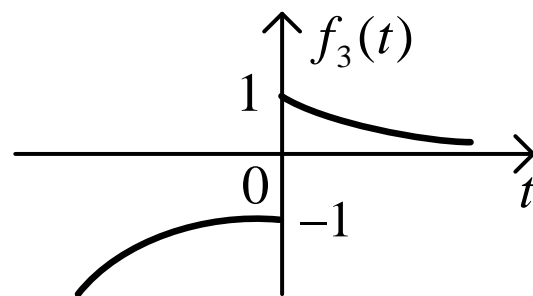
解： $f_2(t)$ 、 $f_3(t)$ 连同**例 8.4** 的 $f_1(t)$ 的函数图形如下图所示，
 $f_1[n]$ 、 $f_2[n]$ 与 $f_3[n]$ 的序列图形也是类似情况。



右边函数



左边函数



两边函数

8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

用**例 8.4** 相同方法，求得它们的拉普拉斯变换和 Z 变换为：

$$F_2(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$R_{F_2} = (\text{Re}\{s\} < -2)$$

与

$$F_3(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$R_{F_3} = (-2 < \text{Re}\{s\} < -1)$$

$$F_2(z) = \frac{1}{[1-(1/2)z^{-1}][1+(1/3)z^{-1}]}$$

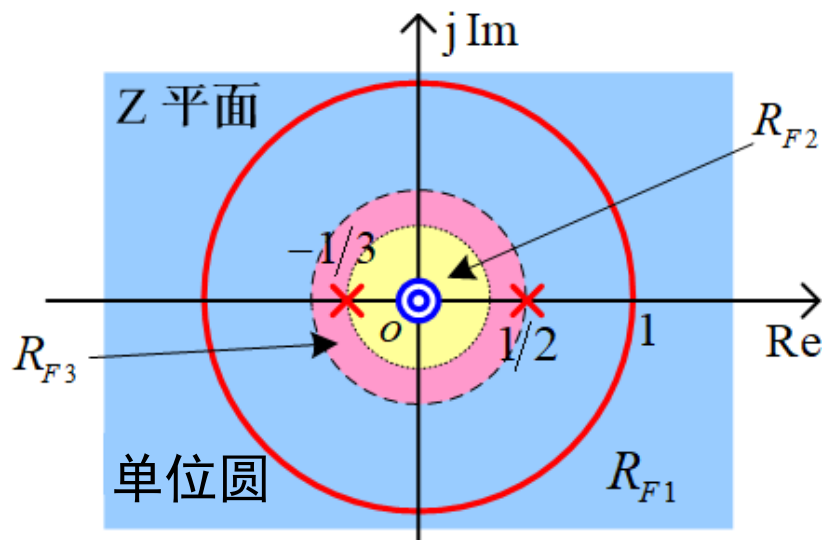
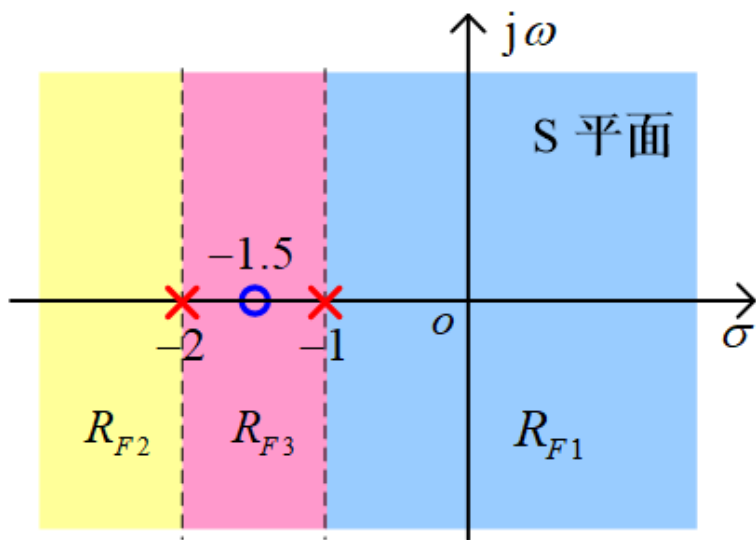
$$R_{F_2} = [|z| < (1/3)]$$

与

$$F_3(z) = \frac{1}{[1-(1/2)z^{-1}][1+(1/3)z^{-1}]}$$

$$R_{F_3} = [(1/3) < |z| < 0.5]$$

它们及**例 8.4**的 $F_1(s)$ 和 $F_1(z)$ 之零、极点和收敛域图如下图所示。



8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

表明: ♣ 双边变换的收敛域与时间函数或序列的时域分布有关;
♣ 双边变换的收敛域以像函数的极点为边界, 不同实部或不同模的极点越多, 收敛域就有更多可能的选择。

基于复变函数理论和前面各个例题呈现的像函数不同收敛域情况, 可以归纳出双边变换像函数之收敛域的如下性质或约束:

性质 1: 像函数收敛域的形状

像函数收敛域是复平面上的单连通域, 其形状分别为: S 平面上平行于虚轴的带状域和 Z 平面上以原点为中心的圆环域, 即

$$F(s) \text{ 的 ROC} = (\sigma_1 < \operatorname{Re}\{s\} < \sigma_2), \quad -\infty \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq \infty$$

和 $F(z) \text{ 的 ROC} = (r_1 < |z| < r_2), \quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$

其中, σ_1 、 σ_2 和 r_1 、 r_2 都是实数; 且表明: 带状域的左、右边界可以到无穷远点, 甚至包括无穷远点; 圆环域的内、外边界可扩展到 (甚至包括) 无穷远点和收缩到 (甚至包括) 原点。

说明: ROC 分别是带状域和圆环域的理由: 按照像函数收敛的定义

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

和
$$|F(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]r^{-n}e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]r^{-n}| < \infty$$

收敛域分别只与 $\text{Re}\{s\}$ 和 $|z|$ 有关，与 ω 和 Ω 无关。若 S 平面上某点 s 或 Z 平面上某点 z 收敛，则穿过该点的平行于虚轴的直线或穿过该点的以原点为中心的圆周都在收敛域内。

性质 2：收敛域不应包含像函数的任何极点

尽管是孤立极点，按照与上述同样的理由，若 S 平面上穿过极点的平行于虚轴的直线和 Z 平面上穿过极点的以原点为中心的圆周都不属于收敛域，且可能是收敛域的边界。

性质 3：有限持续期的有界函数或序列的像函数收敛域，分别至少是不包括无穷远点的有限 S 平面 ($|s| < \infty$) 或除无穷远点和原点外的有限 Z 平面 ($0 < |z| < \infty$)。

说明： ♣ 尽管冲激函数及其导数 $\delta^{(k)}(t)$ ， $k \geq 0$ 不是有界函数，但这个性质也适合于它们的像函数收敛域；

♣ “至少是有限 S 平面或除原点外的有限 Z 平面”，意味某

8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

些有限持续期的函数 (或序列) 的像函数收敛域可能包括无穷远点 (或原点或/和无穷远点)，见例 8.2。

- ♣ 有限长序列的起、止时刻可以确定其 Z 变换收敛域是否包括原点或/和无穷远点。

假设有有限长序列 $f[n]$ 的起、止时刻分别为 N_1 和 N_2 ，则其 Z 变换是一个有限项幂级数 $F(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} f[n]z^{-n}$ 。原点和无穷远点是否收敛要看如下三种情况：

- ★ 若 $N_1 < 0$ 和 $N_2 > 0$ ， $F(z)$ 是正负幂项均有的有限项幂级数，原点和无穷远点都是极点，故 **ROC** = $(0 < |z| < \infty)$ ；
- ★ 若 $N_1 > 0$ ， $F(z)$ 只有负幂项，原点是极点，故收敛域包括无穷远点，即 **ROC** = $(0 < |z| \leq \infty)$ ；
- ★ 若 $N_2 < 0$ ， $F(z)$ 只有正幂项，无穷远点是极点，故收敛域包括原点，即 **ROC** = $(0 \leq |z| < \infty)$ 。

当然，若 $N_1 = N_2 = 0$ ，如 $\delta[n]$ ，收敛域为整个 Z 平面。

8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

拉普拉斯变换也有些类似，请学生自行分析和比较。

性质 4： 右边时间函数和序列的像函数收敛域

- ★ 右边无限的时间函数 $f(t)$ 的像函数收敛域：至少是 S 平面上穿过 $F(s)$ 最右边极点的平行于虚轴之直线右侧的半个 S 平面，若 $f(t)$ 因果和模可积，ROC 还包括无穷远点。
- ★ 右边无限的序列 $f[n]$ 的像函数收敛域：至少是 Z 平面上穿过 $F(z)$ 最外边极点的圆周外侧的外半径无限之圆环域。若 $f[n]$ 是因果的，ROC 还包括无穷远点。

性质 5： 左边时间函数和序列的像函数收敛域

- ★ 左边无限的时间函数 $f(t)$ 的像函数收敛域：至少是 S 平面上穿过 $F(s)$ 最左边极点的平行于虚轴之直线左侧的半个 S 平面。若 $f(t)$ 反因果和模可积，ROC 还包括无穷远点。
- ★ 左边无限的序列 $f[n]$ 的像函数收敛域：至少是 Z 平面上穿过 $F(z)$ 最里边极点的圆周内侧除原点外的圆环域。若 $f[n]$ 是反因果的，ROC 还包括原点。

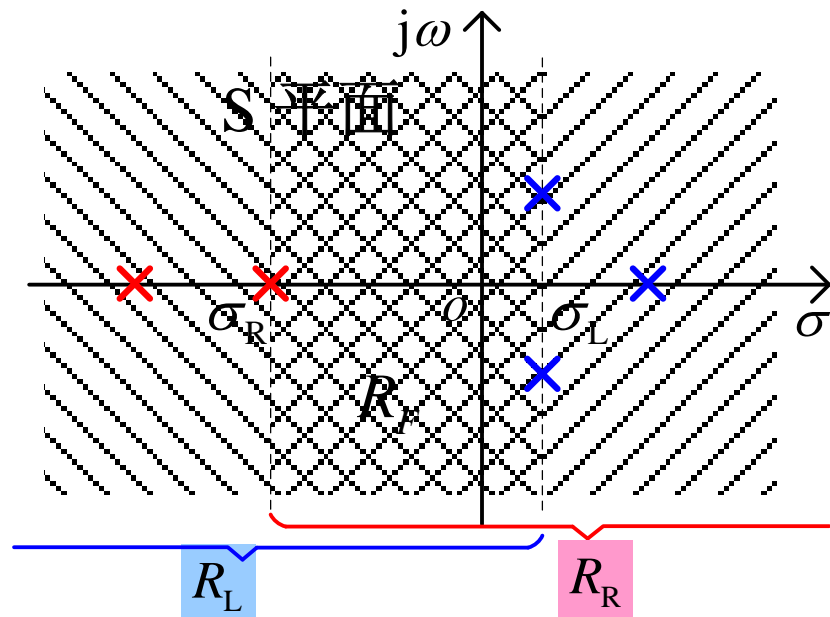
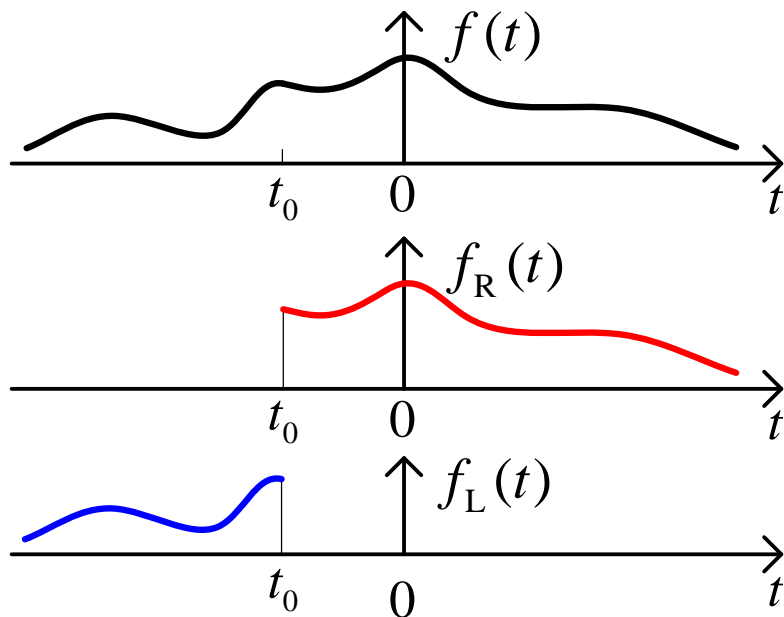
8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

性质 6： 两边时间函数或序列的像函数收敛域

如果两边无限的时间函数和序列分别存在双边拉普拉斯变换和双边 Z 变换的话，则其像函数收敛域分别为：

- ★ 两边时间函数 $f(t)$ 的像函数收敛域：必定是 S 平面上一个左右边界分别穿过左右相邻极点的、宽度有限的带状域。
- ★ 两边序列 $f[n]$ 的像函数收敛域必定是 Z 平面上一个内外圆周分别穿过内外相邻极点的、内外半径非零有限的圆环域。

说明和讨论： 以连续时间函数为例 (见下图)。



8.3.3 拉普拉斯变换和 Z 变换的收敛域性质(续)

图中, $f(t) = f_R(t) + f_L(t)$

其中, $f_R(t)$ 是右边函数, $f_L(t)$ 是左边函数。假设:

$$f_R(t) \xleftrightarrow{L} \{F_R(s), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_R\} \text{ 和 } f_L(t) \xleftrightarrow{L} \{F_L(s), \operatorname{Re}\{s\} < \sigma_L\}$$

则 $F(s) = F_R(s) + F_L(s)$, $R_F = (\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_R) \cap (\operatorname{Re}\{s\} < \sigma_L)$

★ 若 $\sigma_R < \sigma_L$, 像上图所示那样, R_R 和 R_L 的交集不是空集, 则 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换存在, 它为

$$F(s) = F_R(s) + F_L(s), \quad R_F = (\sigma_R < \operatorname{Re}\{s\} < \sigma_L)$$

★ 若 $\sigma_R \geq \sigma_L$, R_R 和 R_L 就没有交集, 即在 S 平面上找不到一个点能使 $F_R(s) + F_L(s)$ 收敛。这表示 $f(t)$ 不存在双边拉普拉斯变换。

同理, 可对两边序列做同样的证明, 得到类似的结果。

前面例 8.6 已佐证了本性质, 请再看一个例题。

【例 8.7】 试求双边指数函数和序列的拉普拉斯变换和 Z 变换

$$f(t) = e^{-a|t|} \text{ 和 } f[n] = a^{|n|}, \quad \text{其中, } a \text{ 为复数}$$

作业

- 5.34 2) 4) 6)
- 5.35 1) 4) 5) 注： 1)中的 lN 应为 kN
- 5.36 2)
- 5.37 1)