JfM 02637393
Hellinger, E.
Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen.
J. für Math. 136, 210-271.; auch sep. Habilitationsschrift Marburg, 62 S (1909).

Die vorliegende Arbeit entwickelt die Theorie der beschränkten quadratischen Formen unendlichvieler Veränderlicher (Analogen der Hauptachsentransformation endlicher Formen) nach einer Methode, die ihrem Wesen nach unabhängig von der Anzahl und Art der unabhängigen Variablen ist, die also insbesondere den Grenzprozeß vom algebraischen Gebiet aus vermeidet, mit dem Hilbert in seiner 4. Mitt. (s. F. d. M. 37, 351, 1906, JFM 37.0351.03, JFM 37.0351.04) jene Theorie ursprünglich begründet hat. Die Invarianten der gegebenen Form $K(x)$ gegenüber orthogonalen Transformationen der unendlichvielen Variablen x_p werden genau wie in der Algebra aus der Betrachtung der mit dem Parameter λ gebildeten Formenschar

$$(1)\quad K(x)-\lambda E(x)=\sum_{p,q=1}^{\infty}k_{pq}x_px_q-\lambda\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2,$$

bezw. der zugehörigen unendlichvielen linearen Gleichungen gewonnen. Der erste Schritt (Kap. 1) ist, analog bekannten Verfahren bei stetigen Integralgleichungen, daß als "Eigenwerte" von $K(x)$ solche Werte λ definiert werden, für die die zu (1) gehörigen homogenen Gleichungen

$$(2)\quad \sum_{q=1}^{\infty}k_{pq}x_q-\lambda x_p=0\quad (p=1,2,\dots)$$

eine Lösung $x_p=l_p$ von konvergenter Quadratsumme $\sum_{p=1}^{\infty}l_p^2=1$ haben. Auf Grund der Bemerkung, daß die Differenz $K(x)-\lambda L(x)^2$ die Werte l_p nicht mehr zur "Eigenlösung" (dem Eigenwert λ) hat, findet man durch Subtraktion der Quadratsumme von abzählbar vielen solchen Quadraten eine Restform, die außer $\lambda=0$ *keinen* Eigenwert mehr besitzt. Für das vorliegende Problem charakteristisch ist nun die Ausdehnung dieses Verfahrens zur Gewinnung weiterer Invarianten im Kap. II. Das sind solche *Intervalle* der λ-Achse, für die die Gleichungen (2) Lösungen $x_p=\varphi_p(\lambda)$ mit konvergenter Quadratsumme der Integrale $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\int_0^{\lambda}\varphi_p(\lambda)d\lambda\right)^2$ besitzen; um unnötige Konvergenzschwierigkeiten zu vermeiden, werden an Stelle dieser $\varphi_p(\lambda)$ durchweg ihre unbestimmten Integrale $\varrho_p(\lambda)$ betrachtet, und es wird demnach unter Verwendung des *Stieltjes*schen Integralbegriffes nach Lösungen von

$$(3)\quad \sum_{q=1}^{\infty}k_{pq}\varrho_q(\lambda)-\int_0^{\lambda}\lambda d\varrho_p(\lambda)=0\quad (p=1,2,\dots)$$

gefragt, deren Quadratsumme $\varrho_0(\lambda)=\sum_{p=1}^{\infty}\varrho_p(\lambda)^2$ eine stetige Funktion von λ ist; als kurzer naheliegender Ausdruck dieses Sachverhaltes wird gesagt, daß die "Differentiale" $d\varrho_p(\lambda)$ formal die Gleichungen (2) befriedigen, daß sie "Differentialeigenlösungen" von $K(x)$ sind. Die Gesamtheit der Stellen, an denen es solche nicht identisch verschwindenden Differentiallösungen gibt, heißt das Streckenspektrum von $K(x)$. Nach eingehenderem Studium insbesondere der Orthogonalitätseigenschaften dieser Differentiallösungen ergibt sich nun, daß die Differenz

$$K(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,\frac{\left(d\sum_{p=1}^{\infty}\varrho_p(\lambda)x_p\right)^2}{d\varrho_0(\lambda)},$$

(wobei der in der Dissert des Verf. (s. F. d. M. 38, 153, 1907, JFM 38.0153.01) aufgestellte Integralbegriff wesentlich zur Verwendung kommt) die $d\varrho_p(\lambda)$ nicht mehr zu Differentiallösungen hat. Durch Subtraktion höchstens abzählbar vieler solcher Integrale entsteht dann eine quadratische Form ohne jedes Streckenspektrum; damit ist die kanonische Darstellung von $K(x)$ als Summe von Quadraten der Eigenformen $\lambda\cdot L(x)^2$ und von Integralen über die Bestandteile des Streckenspektrums gewonnen, wenn noch gezeigt wird, daß eine Form ohne Eigenwert (außer $\lambda=0$) und ohne Streckenspektrum – wie der zunächst verbleibende Rest – identisch verschwindet. Den Beweis dieses Fundamentalsatzes gibt Kap. III. Zunächst wird nach einer von *E. Hilb* (s. F. d. M. 39, 408, 1908, JFM 39.0408.02) angegebenen Methode die beschränkte reziproke Form $\mathrm{K}(\lambda;x)$ zu $K(x)-\lambda(x)$ gebildet, die für alle nichtreellen Werte von λ als einwertige reguläre analytische Funktion von λ existiert; nur längs der reellen Achse kann und muß sie Singularitäten besitzen, und eben diese Singularitäten stellen Punkt- und Streckenspektrum dar (die Pole sind die Eigenwerte, die Verzweigungsschnitte und singulären Linien das Streckenspektrum). Im einzelnen gestaltet sich das so, daß $\mathrm{K}(\lambda+i\mu;x)$ bei Annäherung von $\lambda+i\mu$ an die reelle Achse nicht mehr beschränkt bleibt, wohl aber das parallel der reellen Achse erstreckte Integral $\int_0^{\lambda}\{\mathrm{K}(\lambda+i\mu;x)-\mathrm{K}(\lambda-i\mu;x)\}d\lambda$, des Sprunges von K. Die so entstehende, von λ abhängige quadratische Form ist als Funktion von λ monoton; ihre Sprungstellen sind die Eigenwerte von λ (die Größe des Sprunges liefert die zugehörigen Eigenlösungen), die Intervalle stetigen Wachstums das Streckenspektrum (ihre Werte daselbst liefern die zusammengehörigen Differentiallösungen).

Toeplitz, Dr. (Göttingen)

crelle:GDZPPN002166941