HEC MONTRÉAL

Mémoire

Edith Viau

Samedi 1er août 2015

1 INTRODUCTION

2 REVUE DE LITTÉRATURE

3 INTERPOLATION SPECTRALE

3.1 MODÈLE

Nous allons maintenant décrire de façon explicite un modèle d'interpolation spectrale utilisant les noeuds de Chebyshev ainsi que les polynômes de Chebyshev. (avantages de ce modèle)

3.1.1 NOEUDS DE CHEBYSHEV

Les noeuds de Chebysev sur l'intervalle $[a_i, a_p]$ sont donnés par:

$$a_i = \frac{(a_1 + a_p)}{2} - \frac{(a_p - a_1)}{2} \cos\left(\frac{i-1}{p-1}\pi\right), i = 1, \ldots, p.$$

3.1.2 POLYNÔMES DE CHEBYSHEV

Les polynômes de Chebysev sont définis récursivement de la façon suivante:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= x \\ f_j(x) &= 2x f_{j-1}(x) - f_{j-2}(x) \end{aligned}$$

3.1.3 EXEMPLE - UNE DIMENSION

Supposons que nous souhaitons interpoler une fonction g donnée. Nous allons calculer les valeurs que prend g sur les noeuds de Chebyshev pour un intervalle donné $[a_1, a_p]$. Notons g_{nodes} ces valeurs. Nous voulons maintenant ré-écrire ces valeurs en utilisant les polynômes de Chebyshev. Il nous faut trouver les bons coefficients, c'est-à-dire l'ensemble de c_j, $j = 1, ..., p-1$ tel que:

$$g(a_i) = \sum_{j=1}^{p-1} c_j f_j(a_i), i = 1, ..., p$$

En d'autres mots, nous voulons obtenir des coefficients créant un polynôme ayant les mêmes valeurs que g_{nodes} sur les noeuds de Chebyshev évalués précédemment. En utilisant tous les a_i sur l'intervalle désiré, nous pouvons ré-écrire ces équations comme un système d'équations linéaires $\mathbf{g} = \mathbf{fc}$:

$$\begin{pmatrix} g(a_1) \\ g(a_2) \\ ... \\ g(a_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & ... & f_p(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & ... & f_p(a_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_p) & f_2(a_p) & ... & f_p(a_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_p \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système d'équations (c'est-à-dire, en inversant $\mathbf{f}$ et en exécutant $\mathbf{f}^{-1}\mathbf{g}$), nous obtenons l'ensemble de coefficients $\mathbf{c}$ nous permettant de construire un polynôme égalant g lorsque les deux sont évalués sur les noeuds de Chebyshev.

Maintenant que nous avons nos coefficients, nous pouvons construire un polynôme interpolant g pour tout $x \in [a_1, ..., a_p]$:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p-1} c_j f_j(x), x \in [a_1, ..., a_p].$$

3.1.4 EXEMPLE - DEUX DIMENSIONS

L'obtention d'une solution analytique est possible en deux dimensions. Il s'agit de trouver les coefficients pour l'une des deux dimensions, puis d'interpoler sur la seconde dimension. La fonction finale s'écrit:

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} coeff_{kl} T_l(x) T_k(y).$$

Notons que nous devons avoir $n = m$. Sans perte de généralité, nous pouvons commençer par interpoler en fixant x, afin d'obtenir les $c_k(x)$, où :

$$c_k(x) = \sum_{l=0}^{n} coeff_{kl} T_l(x).$$

En effet, chaque c_k peut être obtenu en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} g(a_k,a_1) \\ g(a_k,a_2) \\ ... \\ g(a_k,a_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & ... & f_m(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & ... & f_m(a_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_m) & f_2(a_m) & ... & f_m(a_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k1} \\ c_{k2} \\ ... \\ c_{km} \end{pmatrix}.$$

Par la suite, nous interpolons sur la seconde dimension, en résolvant :

$$\begin{pmatrix} c_{1l} \\ c_{2l} \\ ... \\ c_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & ... & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & ... & f_n(a_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_m) & f_2(a_m) & ... & f_n(a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} coeff_{1l} \\ coeff_{2l} \\ ... \\ coeff_{nl} \end{pmatrix}.$$

3.1.5 Exemple - trois dimensions

Nous pouvons par la suite généraliser à trois dimensions. Le principe reste le même : obtenir une matrice de coefficients en fixant les deux premières dimensions, puis obtenir une seconde matrice de coefficients en fixant la deuxième, et finalement, ajuster pour la troisième dimension.
L'équation finale sera la suivante :

$$v(x,y,z) = \sum_{l=0}^{n_3} \sum_{k=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} coeff_{jkl} T_j(x) T_k(y) T_l(z).$$

Résolvons le tout.
Premièrement, nous cherchons les c^j pour k,l donnés :

$$v(x,y,z) = \sum_{l=0}^{n_3} c^j(x,y) T_l(z).$$

Ceci nous donne les $n_2 * n_3$ systèmes d'équations linéaires suivants (un par combinaison de (k,l)):

$$\begin{pmatrix} g(a_1,a_k,a_l) \\ g(a_2,a_k,a_l) \\ ... \\ g(a_j,a_k,a_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & ... & f_j(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & ... & f_j(a_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_j) & f_2(a_j) & ... & f_j(a_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^j_{1kl} \\ c^j_{2kl} \\ ... \\ c^j_{jkl} \end{pmatrix}.$$

Nous avons ici n_3 systèmes à deux dimensions. Nous résolvons sur la deuxième dimension, pour chaque l :

$$\begin{pmatrix} c^j_{j1l} \\ c^j_{j2l} \\ ... \\ c^j_{jkl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & ... & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & ... & f_k(a_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & ... & f_k(a_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{jk}_{j1l} \\ c^{jk}_{j2l} \\ ... \\ c^{jk}_{jkl} \end{pmatrix}.$$

Nous avons maintenant l'équation suivante :

$$v(x,y,z) = \sum_{l=0}^{n_3} \sum_{k=0}^{n_2} c^{jk} T_k(y) T_l(z).$$

Il ne nous reste qu'à ajuster sur la troisième dimension en résolvant le système suivant pour chaque paire j,k afin d'obtenir l'équation analytique finale :

$$\begin{pmatrix} c_{jk1}^{jk} \\ c_{jk2}^{jk} \\ \dots \\ c_{jkl}^{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \dots & f_l(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \dots & f_l(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(a_l) & f_2(a_l) & \dots & f_l(a_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} coeff_{jk1} \\ coeff_{jk2} \\ \dots \\ coeff_{jkl} \end{pmatrix}.$$

4 Application

5 Analyse