5.1 堆(heap)

什么是堆

- 优先队列（**Priority Queue**）：特殊的“队列”，取出元素的顺序是依照元素的优先权（关键字）大小，而不是元素进入队列的先后顺序。

问题：如何组织优先队列?

- 一般的数组、链表?
- 有序的数组或者链表?
- 二叉搜索树？ AVL树?

若采用数组或链表实现优先队列

✍ **数组：**

插入 — 元素总是插入尾部 ~ $\Theta(1)$
删除 — 查找最大（或最小）关键字 ~ $\Theta(n)$
从数组中删去需要移动元素 ~ $O(n)$

✍ **链表:**

插入 — 元素总是插入链表的头部 ~ $\Theta(1)$
删除 — 查找最大（或最小）关键字 ~ $\Theta(n)$
删去结点 ~ $\Theta(1)$

✍ **有序数组:**

插入 — 找到合适的位置 ~ $O(n)$ 或 $O(\log_2 n)$
移动元素并插入 ~ $O(n)$
删除 — 删去最后一个元素 ~ $\Theta(1)$

✍ **有序链表:**

插入 — 找到合适的位置 ~ $O(n)$
插入元素 ~ $\Theta(1)$
删除 — 删除首元素或最后元素 ~ $\Theta(1)$

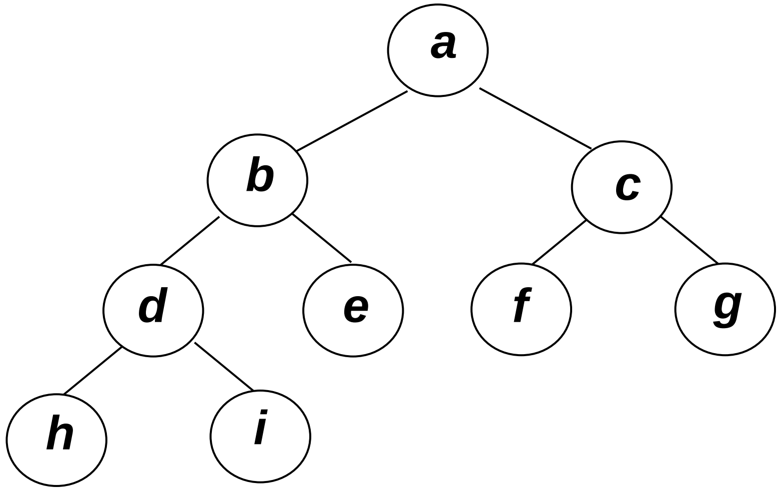
✍ 是否可以采用二叉树存储结构？

- 二叉搜索树？
- 如果采用二叉树结构，应更关注**插入**还是**删除**？
  - 树结点顺序怎么安排？
  - 树结构怎样？

重点考虑删除最大值

堆:用完全二叉树来进行存储
任何一个节点都是以它为根这个子树的最大值

优先队列的完全二叉树表示



	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- 堆的两个特性

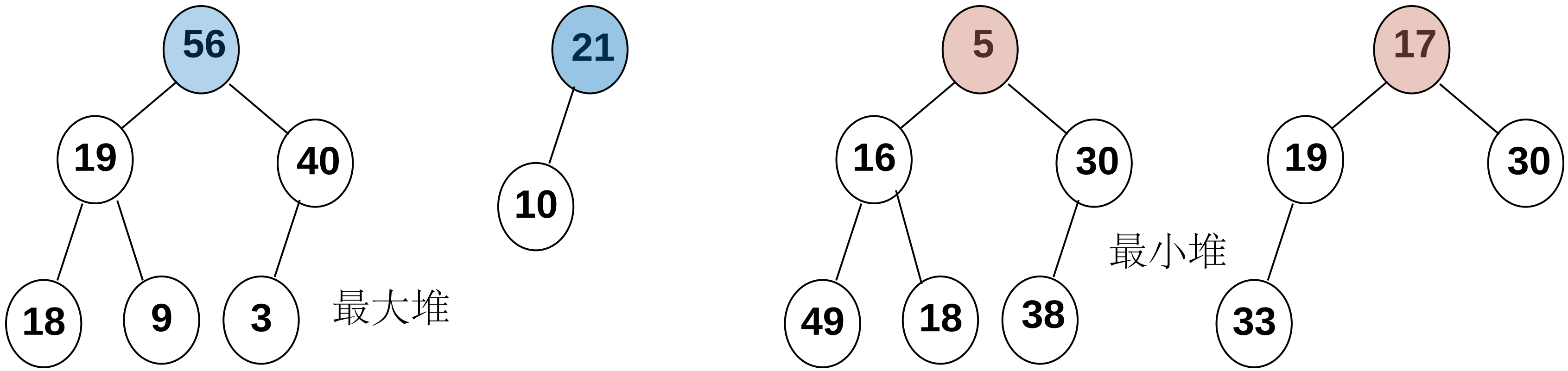
☞结构性：用数组表示的完全二叉树；

☞有序性：任一结点的关键字是其子树所有结点的最大值(或最小值)

- ❑ "**最大堆(MaxHeap)**" ,也称"大顶堆"： 最大值
- ❑ "**最小堆(MinHeap)**" ,也称"小顶堆" ： 最小值

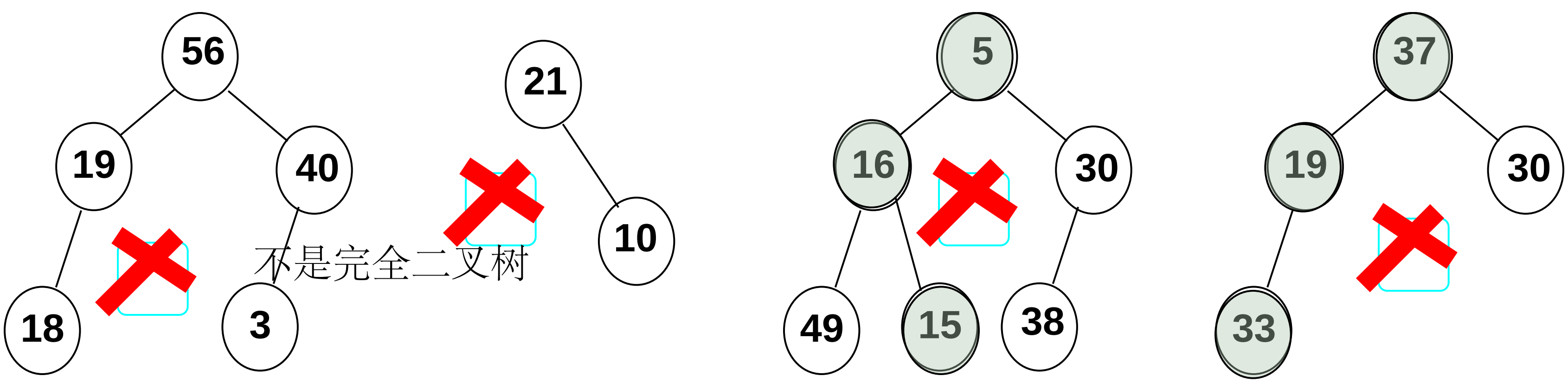
二叉搜索树（查找树）高度大于等于最小堆高度

【例】最大堆和最小堆



注意：从根结点到任意结点路径上结点序列的有序性！

【例】不是堆



堆的抽象数据类型描述

类型名称：最大堆（MaxHeap）

数据对象集：完全二叉树，每个结点的元素值不小于其子结点的元素值

操作集：最大堆H ∈ MaxHeap，元素item ∈ ElementType，主要操作有：

- MaxHeap Create(int MaxSize)：创建一个空的最大堆。
- Boolean IsFull(MaxHeap H)：判断最大堆H是否已满。
- Insert(MaxHeap H, ElementType item)：将元素item插入最大堆H。
- Boolean IsEmpty(MaxHeap H)：判断最大堆H是否为空。
- ElementType DeleteMax(MaxHeap H)：返回H中最大元素(高优先级)。

最大堆的操作

☞ 最大堆的创建

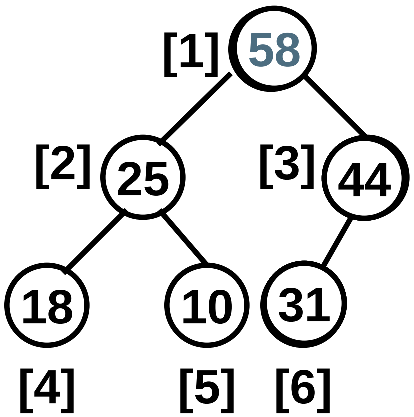
```
typedef struct HeapStruct *MaxHeap;
struct HeapStruct {
        ElementType *Elements;  /* 存储堆元素的 */
        int Size;               /* 堆的当前元素个数 */
        int Capacity;           /* 堆的最大容量 */
};
```

把MaxData换成
小于堆中所有元素的
MinData，同样适用于
创建**最小堆**。

```
MaxHeap Create( int MaxSize )
{           /* 创建容量为MaxSize的空的最大堆 */
  MaxHeap H = malloc( sizeof( struct HeapStruct ) );
  H->Elements = malloc( (MaxSize+1) * sizeof(ElementType));
  H->Size = 0;
  H->Capacity = MaxSize;
  H->Elements[0] = MaxData;
     /* 定义“哨兵”为大于堆中所有可能元素的值，便于以后更快操作 */
  return H;
}
```

申请一块数组的空间

☞ 最大堆的插入



Case 1： new_item = 20　20 < 31

Case 2： new_item = 35　35 > 31　35 < 44

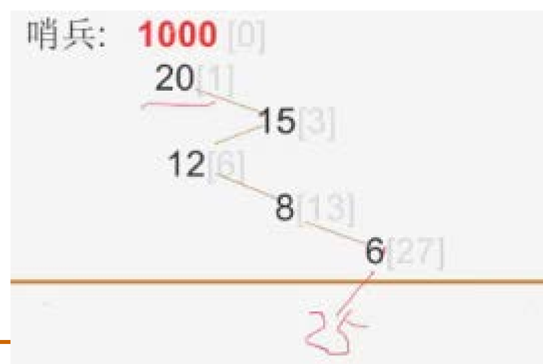
Case 3： new_item = 58　58 > 31　58 > 44　58 < MaxData

❖ 算法：将新增结点插入到从其父结点到根结点的有序序列中

```c
void Insert( MaxHeap H, ElementType item )
{ /* 将元素item 插入最大堆H，其中H->Elements[0]已经定义为哨兵 */
    int i;
    if ( IsFull(H) ) {
        printf("最大堆已满");
        return;
    }
    i = ++H->Size; /* i指向插入后堆中的最后一个元素的位置 */
    for ( ; H->Elements[i/2] < item; i/=2 )
        H->Elements[i] = H->Elements[i/2]; /* 向下过滤结点 */
    H->Elements[i] = item; /* 将item 插入 */
}
```

H->Element[0]是哨兵元素,它不小于堆中的最大元素,控制循环结束

比交换数据要快



❖ 算法：将新增结点插入到从其父结点到根结点的有序序列中

```
void Insert( MaxHeap H, ElementType item )
{ /* 将元素item 插入最大堆H，其中H->Elem...哨兵 */
    int i;
    if ( IsFull(H) ) {
        printf("最大堆已满");
        return;
    }
    i = ++H->Size; /* i指向插入后堆中的最后一个元素的位置 */
    for ( ; H->Elements[i/2] < item; i/=2 )
        H->Elements[i] = H->Elements[i/2]; /* 向下过滤结点 */
    H->Elements[i] = item; /* 将item 插入 */
}
```

H->Element[0] 是哨兵元素，
它不小于堆中的最大元素，
控制顺环结束。

$T(N) = O(\log N)$

哨兵: **1000** [0]

20[1]

15[3]

12[6]

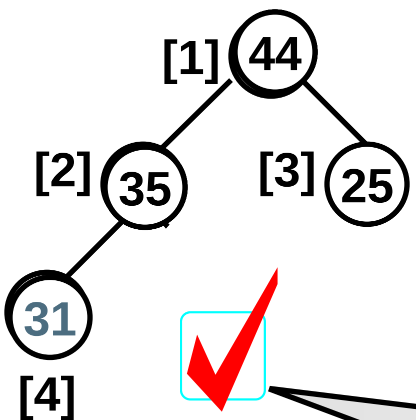
8[13]

6[27]

☞ 最大堆的删除

用最后一个元素替补根这个位置

- 取出根结点（最大值）元素，同时删除堆的一个结点。



① 把 31 移至根

② 找出31的较大的孩子

44 > 25

31 < 35

为了保持完全二叉树的结构特性，
移去的是该结点。

$T(N) = O(\log N)$

```
ElementType DeleteMax( MaxHeap H )
{   /* 从最大堆H中取出键值为最大的元素，并删除一个结点 */
    int Parent, Child;
    ElementType MaxItem, temp;
    if ( IsEmpty(H) ) {
        printf("最大堆已为空");
        return;
    }                                         要删除的元素就在树根
    MaxItem = H->Elements[1]; /* 取出根结点最大值 */
    /* 用最大堆中最后一个元素从根结点开始向上过滤下层结点 */
    temp = H->Elements[H->Size--];最后一个元素拿出来
    for( Parent=1; Parent*2<=H->Size; Parent=Child ) {
        Child = Parent * 2;判断有没有左儿子   Parent指示将来要换的位置
        if( (Child!= H->Size) &&   判别有没有右儿子
            (H->Elements[Child] < H->Elements[Child+1]) )
           Child++;  /* Child指向左右子结点的较大者 */
        if( temp >= H->Elements[Child] ) break;
        else  /* 移动temp元素到下一层 */
           H->Elements[Parent] = H->Elements[Child];
    }
    H->Elements[Parent] = temp;
    return MaxItem;
}
```

☞ 最大堆的建立

堆的一个应用:堆排序

建立最大堆：将已经存在的*N*个元素按最大堆的要求存放在一个一维数组中

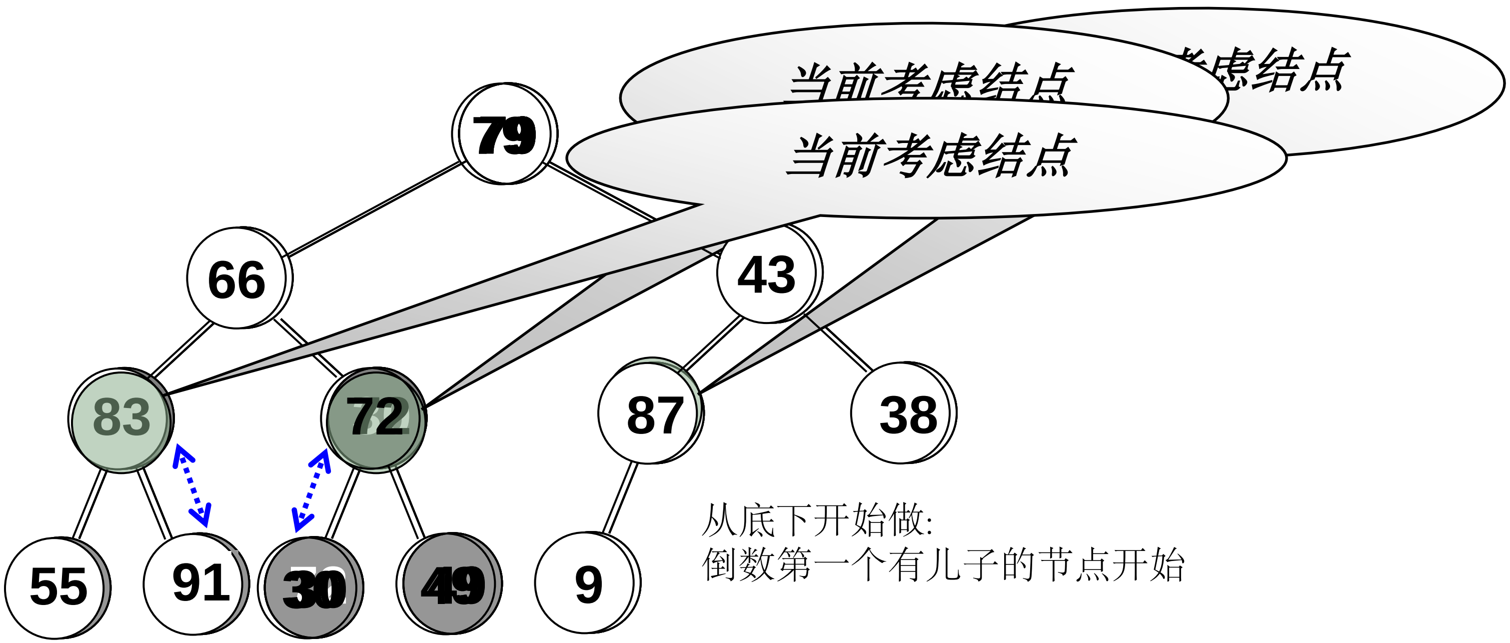
方法1：通过插入操作，将*N*个元素一个个相继插入到一个初始为空的堆中去，其时间代价最大为*O(N logN)*。

方法2：在线性时间复杂度下建立最大堆。 O(n)

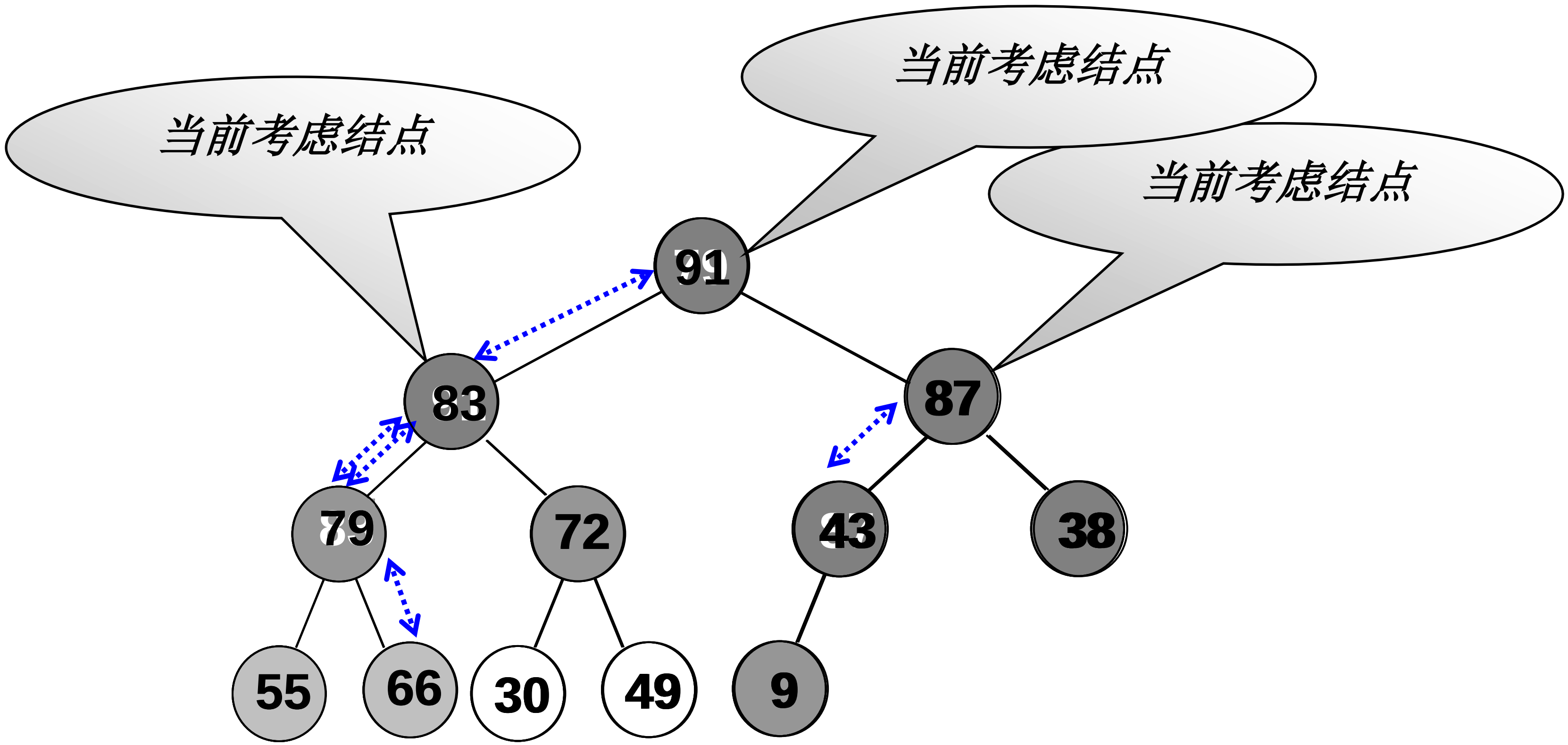
（1）将*N*个元素按输入顺序存入，先满足完全二叉树的结构特性

（2）调整各结点位置，以满足最大堆的有序特性。

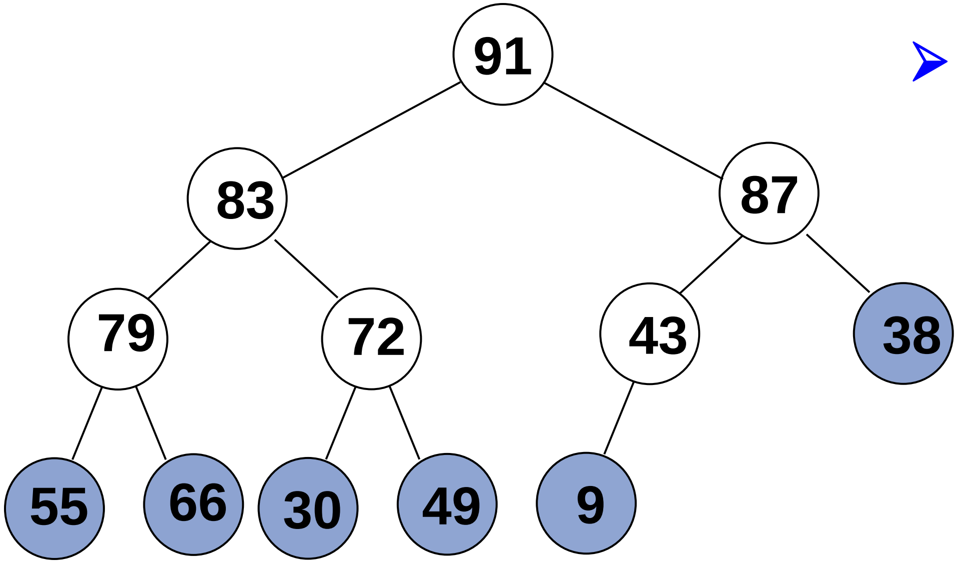
建堆时，最坏情况下需要挪动元素次数是等于树中各结点的高度和。



从底下开始做:
倒数第一个有儿子的节点开始



浙江大学计算机科学与技术学院



- 线性时间复杂度T(n)=O(n)

树中各结点的高度和

结点数	最多交换次数
n/4	1
n/8	2
n/16	3
……	
$n/2^k=1$	$\log_2 n-1$ (k-1)

$$T(n)=\frac{n}{4}+\frac{n}{8}\times 2+\frac{n}{16}\times 3+\ldots+\frac{n}{2^k}\times(k-1)$$

$$2T(n)=\frac{n}{2}+\frac{n}{4}\times 2+\frac{n}{8}\times 3+\ldots+\frac{n}{2^{k-1}}\times(k-1)$$

$$2T(n)-T(n)=\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\ldots+\frac{n}{2^{k-1}}-\frac{n}{2^k}\times(k-1)\le n-(\log_2 n-1)\le n$$