第六讲 图（上）

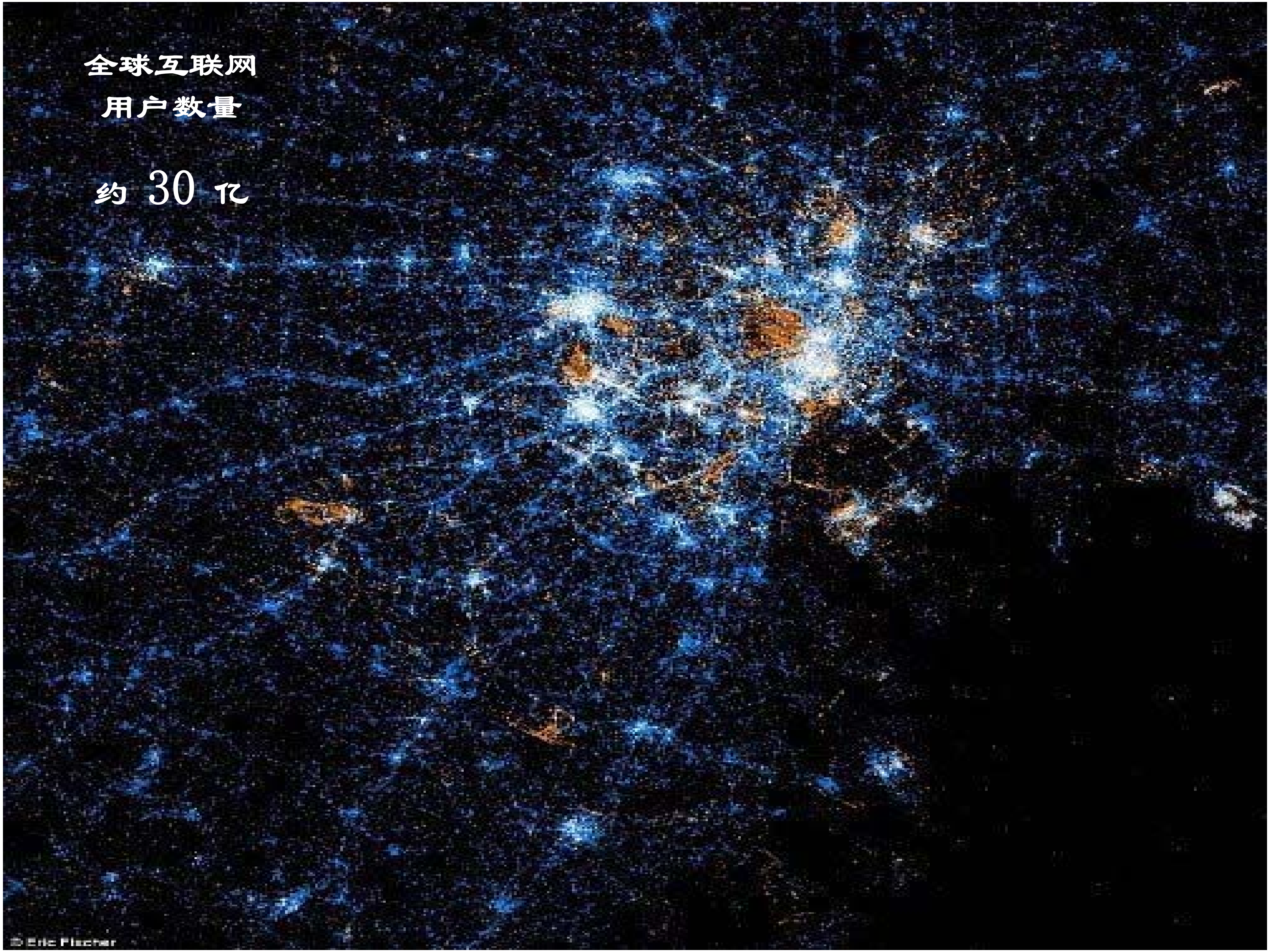
浙江大学 陈 越

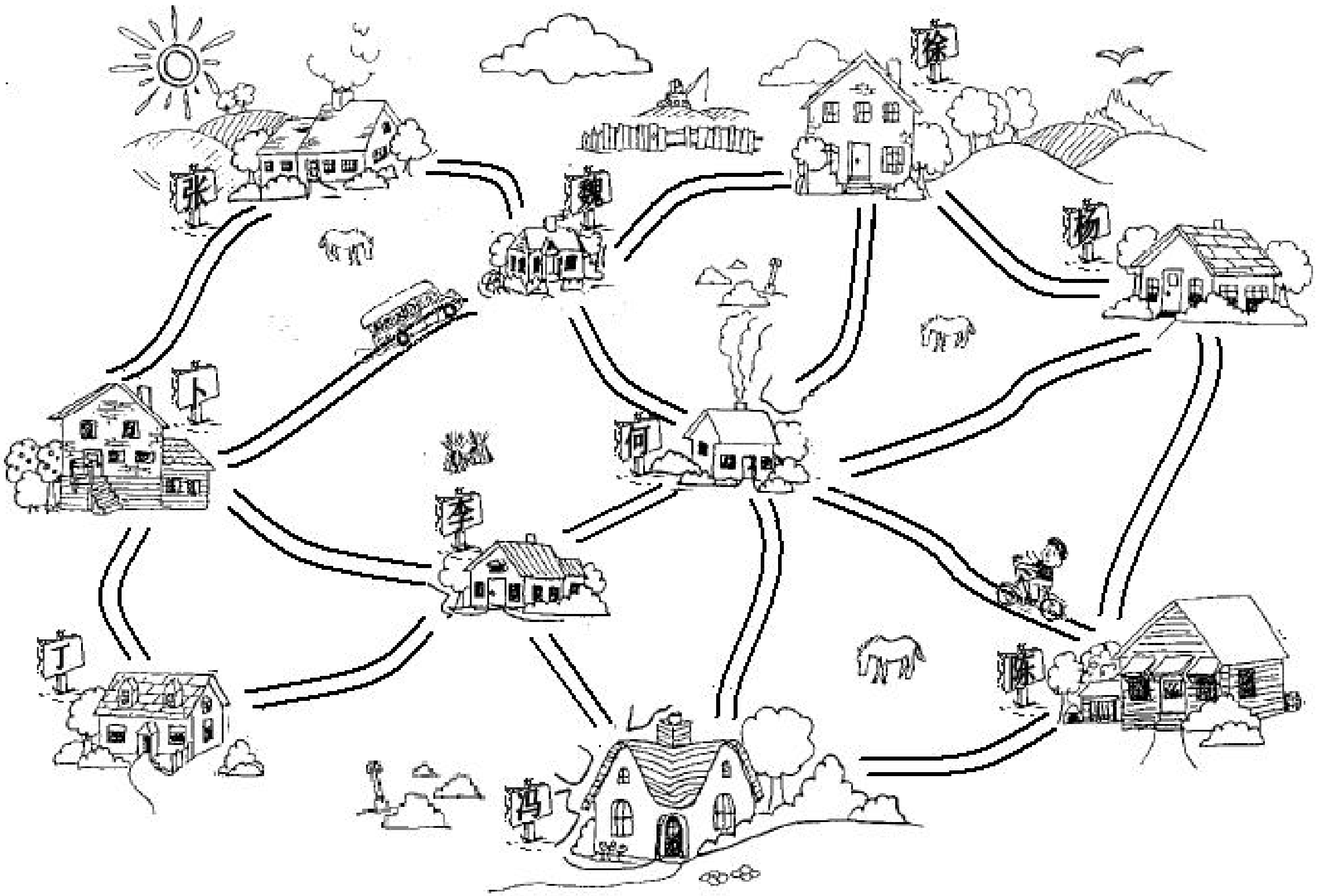
浙江大学计算机科学与技术学院

6.1 什么是图

浙江大学计算机科学与技术学院

六度空间理论（Six Degrees of Separation）


全球互联网
用户数量
约 30 亿
© Eric Fischer

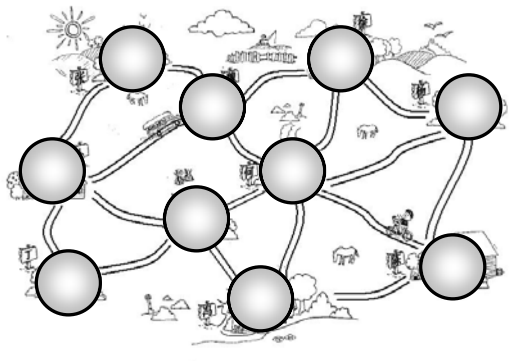


从陈家庄到张家村，怎么走最快呢？　最短路径问题
怎么修公路使得村村通的花费最少呢?最小生成树问题

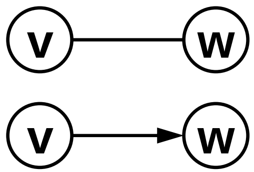
轨道交通11号线
嘉定西站
白银路站
嘉定新城站
上海汽车城站
上海赛车场站
马陆站
南翔站
桃浦新村站
武威路站
祁连山路站
李子园站
上海西站站
真如站
枫桥路站
轨道交通7号线
上大路站
场中路站
大场镇站
行知路站
大华三路站
新村路站
岚皋路站
镇坪路站
中潭路站
上海火车站
曹杨路站
金沙江路站
轨道交通3号线
长寿路站
隆德路站
江苏路站
昌平路站
汉中路站
新闸路站
南京西路站
静安寺站
人民广场站
虹桥2号航站楼站
淞虹路站
北新泾站
威宁路站
娄山关路站
虹桥国际机场
中山公园站
延安西路站
虹桥路站
交通大学站
上海图书馆站
常熟路站
陕西南路站
黄陂南路站
紫藤路站
龙柏新村站
龙溪路站
水城路站
伊犁路站
宋园路站
衡山路站
上海体育馆站
徐家汇站
肇嘉浜路站
嘉善路站
打浦桥站
鲁班路站
马当路站
新天地站
老西门站
世博园区轨道交通专用线
小南门站
陆家浜路站
西藏南路站
南浦大桥站
塘桥站
轨道交通9号线
宜山路站
泗泾站
九亭站
中春路站
七宝站
星中路站
合川路站
漕河泾开发区站
桂林路站
上海体育场站
东安路站
大木桥路站
卢浦大桥站
世博园区
漕宝路站
上海南站站
漕溪路站
龙漕路站
石龙路站
船厂路站
后滩站
世博大道站
长清路站
耀华路站
云台路站
成山路站
杨思站
黄浦江
轨道交通8号线
锦江乐园站
莲花路站
外环路站
莘庄站
上海南站
春申路站
银都路站
轨道交通5号线
凌兆新村站
芦恒路站
灵岩南
上南路
友谊西路站
宝安公路站
共富新村站
呼兰路站
通河新村站
共康路站
彭浦新村站
汶水路站
上海马戏城站
延长路站
上海火车站
中山北路站
中兴路站
西藏北路站
虹口足球场站
宝杨路站
水产路站
淞滨路站
张华浜站
淞发路站
长江南路站
殷高西路站
江湾镇站
大柏树站
赤峰路站
虹口足球场站
曲阳路站
四平路站
东宝兴路站
邮电新村站
宝山路站
海伦路站
曲阜路站
天潼路站
四川北路站
大世界站
豫园站
南京东路站
陆家嘴站
轨道交通10号线
新江湾城站
殷高东路站
三门路站
江湾体育场站
五角场站
国权路站
同济大学站
鞍山新村站
江浦路站
黄兴路站
市光路站
嫩江路站
翔殷路站
黄兴公园站
延吉中路站
外高桥
轨道交通4号线
临平路站
大连路站
杨树浦路站
浦东大道站
东昌路站
世纪大道站
商城路站
浦电路站
浦电路站
源深体育中心站
民生路站
北洋泾路站
德平路站
云山路站
金桥路站
轨道交通6号线
杨高中路站
上海科技馆站
世纪公园站
蓝村路站
上海儿童医学中心站
临沂新村站
花木路站
龙阳路站
张江高科站
金科路站
广兰路站
高科西路站
东明路站
高青路站
华夏西路站
杨高南路站
锦绣路站
芳华路站
磁浮

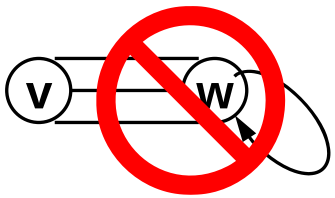
什么是“图”（Graph）

图把线性表还有树全部都包含在内了



- 表示“多对多”的关系
- 包含
  - 一组顶点：通常用 V (Vertex) 表示顶点集合
  - 一组边：通常用 E (Edge) 表示边的集合 顶点与顶点之间的某种关系
- 边是顶点对(无向边)：$(v, w) \in E$，其中 $v, w \in V$(双行线)
- 有向边 < v, w> 表示从v指向w的边（单行线）
- 不考虑重边和自回路



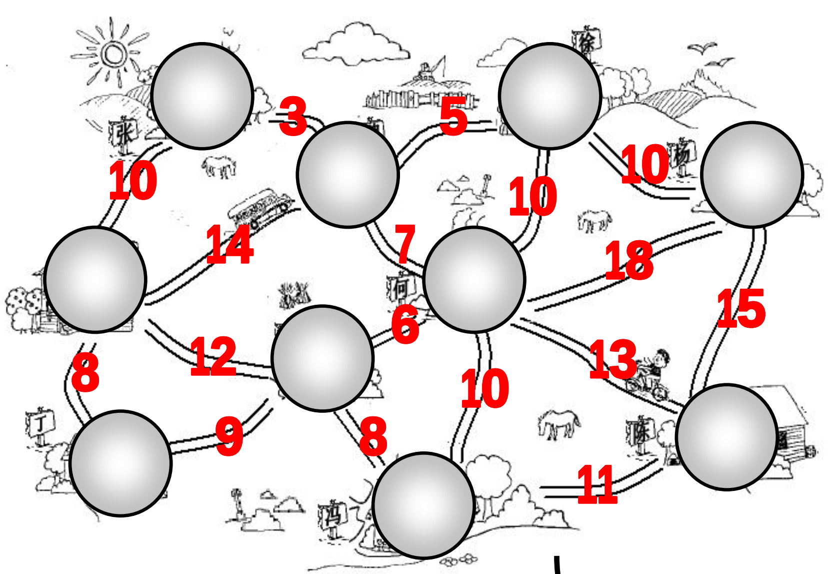


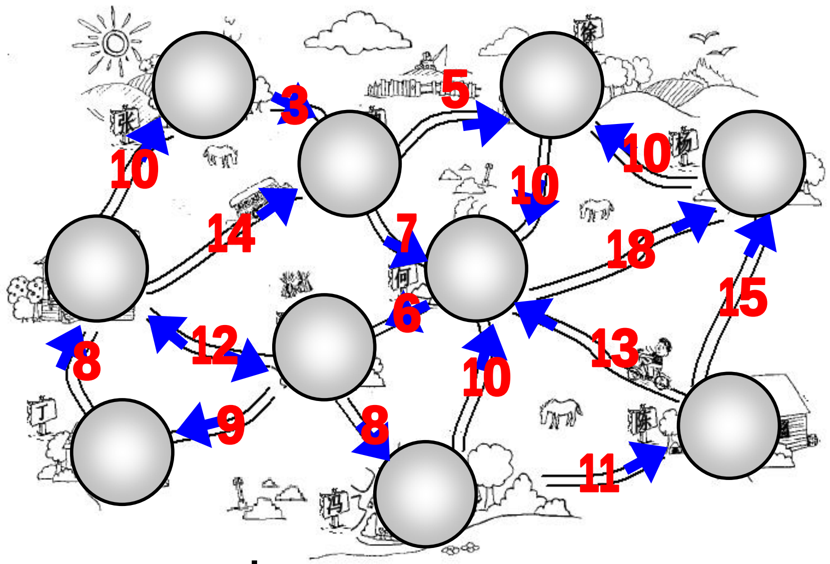
抽象数据类型定义

- 类型名称：图（**Graph**）　　必须至少有一个顶点
- 数据对象集：**G(V,E)**由一个非空的有限顶点集合**V**和一个有限边集合**E**组成。
- 操作集：对于任意图 **G ∈ Graph**，以及 **v ∈ V, e ∈ E**
  - **Graph Create()**：建立并返回空图；
  - **Graph InsertVertex(Graph G, Vertex v)**：将**v**插入**G**；
  - **Graph InsertEdge(Graph G, Edge e)**：将**e**插入**G**；
  - **void DFS(Graph G, Vertex v)**：从顶点**v**出发深度优先遍历图**G**；
  - **void BFS(Graph G, Vertex v)**：从顶点**v**出发宽度优先遍历图**G**；
  - **void ShortestPath(Graph G, Vertex v, int Dist[])**：计算图**G**中顶点**v**到任意其他顶点的最短距离；
  - **void MST(Graph G)**：计算图**G**的最小生成树；
  - ……

常见术语

边上的数字:权重





无 向 图

有 向 图

网　络

网 络 : 带 权 重 的 图

还有好多，用到再说……

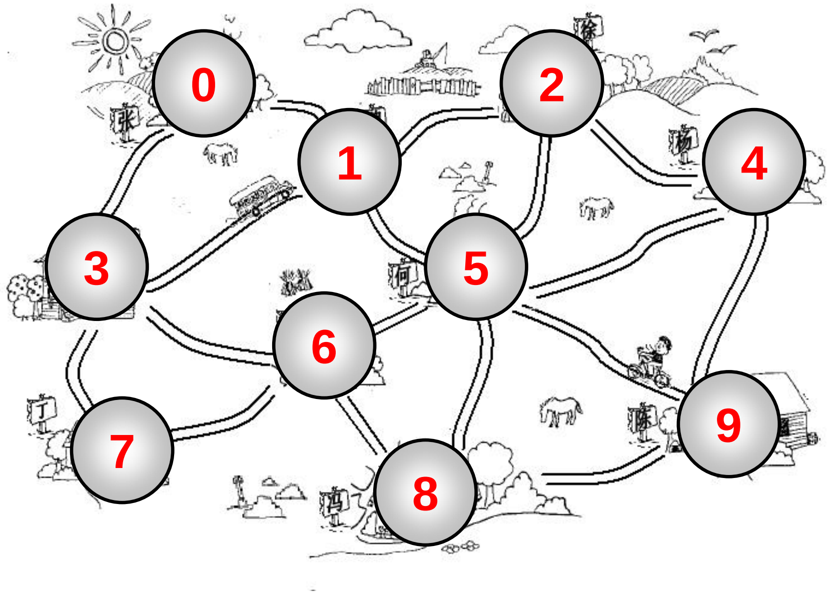
怎么在程序中表示一个图

用一个二维数组来表示图

- 邻接矩阵G[N][N]——N个顶点从0到N-1编号

1.因为不允许有自回路的编码,所以对角阵全是0
2.这个矩阵是对称的

$$G[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{若} \langle v_i, v_j \rangle \text{是G中的边} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \end{array}$$

怎么在程序中表示一个图

用一个一维数组去存下三角矩阵的元素，存法是按照行来的

从上到下，从左到右一行一行存储

- 邻接矩阵
  - 问题：对于无向图的存储，怎样可以省一半空间？

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

用一个长度为N(N+1)/2的1维数组A存储 $\{G_{00}, G_{10}, G_{11}, \ldots\ldots, G_{n-1\ 0}, \ldots, G_{n-1\ n-1}\}$，则 G_{ij} 在A中对应的下标是：

$$(i*(i+1)/2 + j)$$

对于网络，只要把G[i][j]的值定义为边 $<v_i, v_j>$ 的权重即可。

问题：v_i 和 v_j 之间若没有边该怎么表示？

怎么在程序中表示一个图

- 邻接矩阵 —— 有什么好处?
  - ☑ 直观、简单、好理解
  - ☑ 方便检查任意一对顶点间是否存在边
  - ☑ 方便找任一顶点的所有“邻接点”（有边直接相连的顶点）
  - ☑ 方便计算任一顶点的“度”（从该点发出的边数为“出度”，指向该点的边数为“入度”）
    - 无向图：对应行（或列）非0元素的个数
    - 有向图：对应行非0元素的个数是“出度”；对应列非0元素的个数是“入度”

度:跟这个顶点相关的所有边的个数
对于有向图来说有入度和出度

怎么在程序中表示一个图

- 邻接矩阵 —— 有什么不好？
  - ☑ 浪费空间 —— 存稀疏图（点很多而边很少的图）有大量无效元素
    - 对稠密图（特别是完全图:任意两个顶点之间都有边）还是很合算的
  - ☑ 浪费时间 —— 统计稀疏图中一共有多少条边(不得不把所有元素都扫描一遍)

怎么在程序中表示一个图

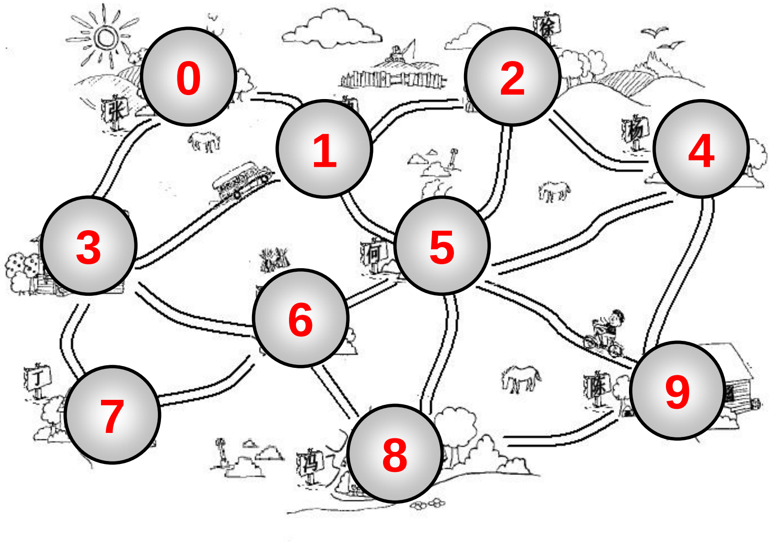
邻接表是链表的集合

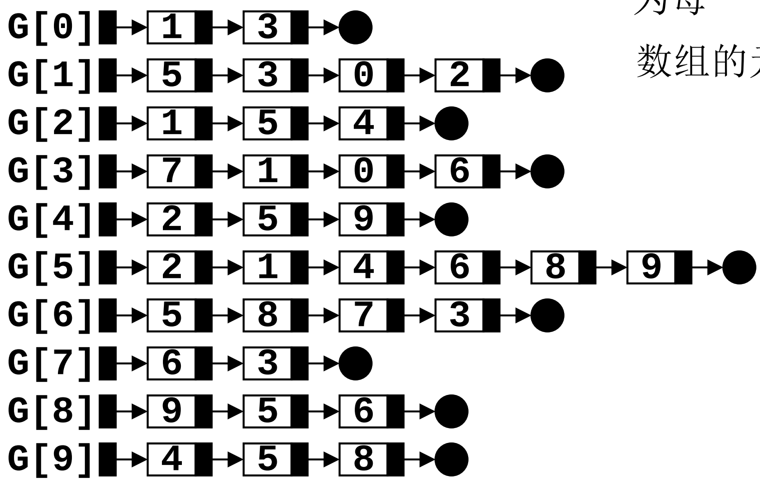
- 邻接表：G[N]为指针数组，对应矩阵每行一个链表，只存非0元素

对于网络，结构中要增加权重的域。

为每一个节点开一个指针

数组的元素是一个头指针





邻接表的表示法是不唯一的
一条边必定是存了两遍

一定要够稀疏才合算啊~~~~~

怎么在程序中表示一个图

- 邻接表
  - ☑ 方便找任一顶点的所有“邻接点”
  - ☑ 节约稀疏图的空间
    - 需要**N**个头指针 **+ 2E**个结点（每个结点至少**2**个域）
  - ☑ 方便计算任一顶点的“度”？　　　E小于N(N-1)/4是合算的
    - 对无向图：是的
    - 对有向图：只能计算“出度”；需要构造“逆邻接表”（存指向自己的边）来方便计算“入度”
  - ☑ 方便检查任意一对顶点间是否存在边?

    ☹ **No**