动力学仿真笔记

许中兴
PLCT 实验室
智能软件研究中心
中国科学院软件研究所
xuzhongxing@iscas.ac.cn

1 符号

时间步长 h

广义坐标

$$q^\top = [x_1, x_2, x_3, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3] = [x, \rho]$$

广义速度

$$v^\top = [\dot{x_1}, \dot{x_2}, \dot{x_3}, \omega_1, \omega_2, \omega_3] = [\nu, \omega]$$

重力加速度

$$g^\top = [0, 0, -9.8, 0, 0, 0]$$

势能，有负号是因为重力加速度指向 z 轴的负向，这样当 z 增大时，势能才能增加。

$$V = -mg_3x_3$$

2 对四元数的步进

$$\theta = \frac{1}{2}\|\omega\|h$$

$$\delta\rho = [cos\theta, \frac{\omega}{\|\omega\|}sin\theta]$$

$$\rho_{k+1} = \delta\rho * \rho_k$$

3 无约束无旋转

这里没有方向坐标和角速度。广义坐标 $q \in R^3$, $v \in R^3$

$$Mv_{k+1} = Mv_k + hmg$$

$$q_{k+1} = q_k + hv_{k+1}$$

这里 M 和坐标 q 无关

4 无约束有旋转

角动量

$$L = I\omega$$

欧拉公式：

$$\left.\frac{dL^s}{dt}\right|_s = R\left.\frac{dL^b}{dt}\right|_b + \omega^s \times I^s\omega^s$$

其中右边的第一项表示对 body 坐标系里的坐标在 body 坐标系里求导，然后要通过 R 变换回空间坐标系。

将 L^b 表示成 $I^b\omega^b$，上面的公式变为

$$\left.\frac{dL^s}{dt}\right|_s = RI^b\dot{\omega}^b + \omega^s \times I^s\omega^s$$

这里相当于有一个由 $\omega^s \times I^s\omega^s$ 引起的角加速度，称为 gyroscopic torque.

我们忽略这个项，因为如果角速度和某个惯性张量的主方向吻合的话，gyro 项就是 0。另一方面，这个项即使不消失也非常小。

所以当引入转动之后，我们只是将 q 扩展成 7 维，将 v 扩展成 6 维。

第一个方程不用变，把 g 扩充到 6 维即可。

$$Mv_{k+1} = Mv_k + hmg$$

第二个更新 q 的方程需要注意一下。

当以 ω 角速度转动了 h 时间时，相当于沿着方向 $n = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ 转动了 $\theta = \|\omega\| h$ 弧度，对应的四元数是

$$\delta\rho = [cos\frac{\theta}{2}, nsin\frac{\theta}{2}]$$

这里都是空间坐标系，所以乘在左边。如果角速度用 body 坐标系表达，则需要乘在右边。

下面如果没有特殊说明，所有的量都是相对于空间坐标系的。

$$\rho_{k+1} = \delta\rho * \rho_k$$

线性部分的增量还是一样：

$$x_{k+1} = x_k + h\nu_{k+1}$$

5 带约束的系统

当加入约束之后，情况就复杂了不少。这里不能去作为 DAE 来解，因为 HHT 算法效率达不到实时的要求。

定义新的 Lagrange 函数为：

$$L = T - V + \lambda^\top \phi$$

Lagrange 方程变为：

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\top} + \frac{\partial V}{\partial q^\top} - G^\top \lambda = 0 \\ \phi = 0 \end{array}$$

其中 G 是 ϕ 的 Jacobian，需要用 $T(q) \in R^{7\times 6}$ 变换到 6 维。

$$G = \frac{\partial \phi}{\partial q} T(q)$$

Rubin 和 Ungar 在 1957 年有一个定理，这个定理说，当允许一定的近似的时候，Lagrange 乘子 $\lambda = \frac{1}{\epsilon}\phi, \epsilon \to 0$。这个定理的威力在于，它把一个 DAE 转化成了一个 ODE。

所以可以用下面的方程来近似标准的拉格朗日方程。

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\top} + \frac{\partial V}{\partial q^\top} - G^\top \lambda = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{\epsilon}\phi \end{array}$$

这里面如果把第二个方程代入第一个方程，则第一个方程里面没有 λ，变成一个 ODE。

为了应用对 Lagrange 函数的离散变分方法，必须将上面的方程所对应的 Lagrange 函数还原出来，这样才能在这个 Lagrange 函数上应用离散变分方法。

新的 Lagrange 函数为：

$$\bar{L} = T - V + \lambda^\top \phi + \frac{1}{2}\epsilon\lambda^\top\lambda \tag{1}$$

把 q 和 λ 都看成是需要做变分的变量，则可以得到等价的方程。

离散化的 Lagrange 函数：

$$L^d = \frac{1}{2}\frac{(q_1-q_0)^\top}{h}M\frac{(q_1-q_0)}{h} + mg\frac{(q_0+q_1)}{2} + \frac{(\lambda_0+\lambda_1)^\top}{2}\frac{(\phi_0+\phi_1)}{2} + \frac{1}{2}\epsilon\frac{(\lambda_0+\lambda_1)^\top}{2}\frac{(\lambda_0+\lambda_1)}{2}$$

这里和 [1] 的区别是对第二个约束方程中的 ϕ_k 的离散方法不同，这里是取平均值，[1] 里是取了端点的值。

离散 action:

$$S = \sum_k hL_k^d$$

对离散 action 求变分：

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_k} = 0$$

对 $\frac{\partial S}{\partial q_k} = 0$ 进行推导。

$$Mq_{k+1} - h^2 G_k^\top \bar{\lambda} = M(2q_k - q_{k-1}) + mgh^2$$

其中 $\bar{\lambda} = \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + 2\lambda_k + \lambda_{k-1})$。变换成计算中使用的速度形式：

$$Mv_{k+1} - G_k^\top h\bar{\lambda} = Mv_k + mgh$$

对 $\frac{\partial S}{\partial \lambda_k} = 0$ 进行推导。

$$G_k q_{k+1} + 4\epsilon\bar{\lambda} = -4\phi_k + G_k(2q_k - q_{k-1})$$

变成速度形式：

$$G_k v_{k+1} + \frac{4\epsilon}{h}\bar{\lambda} = -\frac{4}{h}\phi_k + G_k v_k$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} M & -G_k^\top \\ G_k & \frac{4\epsilon}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mv_k + mgh \\ G_k v_k - \frac{4}{h}\phi_k \end{bmatrix}$$

其中 $\tilde{\lambda} = h\bar{\lambda}$

6 加入稳定项

思路是把 holonomic 约束的一阶导作为一个独立的 nonholonomic 约束加进来。再通过一个定理将这个 nonholonomic 约束用一个 Rayleigh 耗散函数来近似。这个 Rayleigh 耗散函数引出一个耗散力，参与整个系统的离散化。最终的效果是在第二个方程里引入一个小于 1 的稳定化因子。

6.1 关于 Rayleigh 耗散函数

一般情况下 R 要让如下定义的力和 $\dot{q}$ 的方向相反，耗散系统的能量。

$$f = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^\top}$$

Lagrange 方程变为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\top} - \frac{\partial L}{\partial q^\top} = f$$

原始变分方程：

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) ds + \int_{t_0}^{t_1} \delta q^\top f ds = 0$$

注意 f 的符号，二个方程是一致的。因为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) ds = \int_{t_0}^{t_1} \delta q^\top (\frac{\partial L}{\partial q^\top} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\top}) ds$$

对应的离散变分方程为：

$$D_0(L) + D_1(L) + hf = 0$$

6.2 用 Rayleigh 函数来引入 nonholonomic 约束

一个重要的事实是 nonholonomic 约束无法像 holonomic 约束一样被包含进 Lagrangian 函数，然后通过变分法统一计算得到 Lagrangian 方程和约束方程 [2]。所以我们引入 Rayleigh 函数来表示 nonholonomic 约束。

一个 nonholonomic 约束可以用一个等价的 Rayleigh 函数来表示。只需要我们将 ghost 粒子的坐标 λ 和速度 $\dot{\lambda}$ 也看作广义坐标的一部分。

当将 ghost 粒子引入 Rayleigh 函数 R 之后，耗散力变为：

$$f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^\top} \\ -\frac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}^\top} \end{bmatrix}$$

变分方程为：

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) ds + \int_{t_0}^{t_1} (-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^\top} \delta q - \frac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}^\top} \delta \lambda) ds = 0$$

δq 和 $\delta\lambda$ 都是独立变分，从而对应的 Lagrangian 方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\top} - \frac{\partial L}{\partial q^\top} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^\top}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^\top} - \frac{\partial L}{\partial \lambda^\top} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}^\top}$$

离散变分方程为：

$$D_0(L) + D_1(L) - h\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^\top} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_k} - h\frac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}^\top} = 0$$

对于一个形如 $A\dot{q} = 0$ 的 nonholonomic 约束，等价的 Rayleigh 函数为

$$R = -\dot{\lambda} A \dot{q}$$

$$-\tfrac{\partial R}{\partial \dot{q}^\top} = \dot{\lambda} A$$
$$-\tfrac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}^\top} = A\dot{q}$$

但是上面还是有 2 个方程。下一节的方法可以消去第二个方程，合并成一个方程。

6.3 用 Rayleigh 函数来稳定 holonomic 约束

如果系统中有一个 nonholonomic 约束 $a = G\dot{q} = 0$，可以用一个和它相关的 Rayleigh 函数来近似这个约束的效果。形成的约束力的形式是 $-\frac{1}{\epsilon} G^\top a, \epsilon \to 0$

我们定义 Rayleigh 函数

$$R = -(\frac{\epsilon}{2}\dot{\lambda}^\top \dot{\lambda} + \dot{\lambda}^\top G \dot{q})$$

这个 Rayleigh 函数的构造很关键，它需要在和 Lagrange 函数一起做变分之后符合定理描述的约束力的形式。这里我们推导带 Rayleigh 函数的拉格朗日系统等价性的时候用的 Lagrange 函数是标准的 $L = T - V$，不是前面的带 holonomic 约束 regularization 扩展的 Lagrange 函数1。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\top} - \frac{\partial L}{\partial q^\top} = f = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \dot{\lambda}^\top G$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^\top} - \frac{\partial L}{\partial \lambda^\top} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}} = \epsilon\dot{\lambda} + G\dot{q}$$

第二个方程中，因为 L 不包含 λ，所以等于 0。可以解出 $\dot{\lambda}$ 代入第一个方程，这 2 个方程等价于一个方程。由 Rayleigh 函数导出的力变为

$$f = -\frac{1}{\epsilon}G^\top G\dot{q}$$

f 的方向一定和 $\dot{q}$ 相反，所以它是耗散力。

新的离散方程变为

$$\begin{array}{c} \frac{\partial S}{\partial q_k} + h(-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \lambda_k} + h(-\frac{\partial R}{\partial \dot{\lambda}}) = 0 \end{array}$$

我们在实际定义 R 时增加一个参数 τ, 用来调节耗散速率。

$$R = -\tau(\frac{\epsilon}{2}\dot{\lambda}^\top\dot{\lambda} + \dot{\lambda}^\top G\dot{q})$$

离散方程需要一些修正。第一个方程里多了 $\tau G^\top\dot{\lambda}$, 重新定义 $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4}(\lambda_{k+1} + 2\lambda_k + \lambda_{k-1}) + \tau\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{h}$$

第一个方程形式不变：

$$Mq_{k+1} - h^2G_k^\top\bar{\lambda} = M(2q_k - q_{k-1}) + mgh^2$$

速度形式：

$$Mv_{k+1} - G_k^\top h\bar{\lambda} = Mv_k + mgh$$

第二个方程复杂一些，多出来的项是 $\tau(\epsilon\dot{\lambda} + G_k\dot{q})$

$$\frac{1}{4}(\phi_{k-1} + 2\phi_k + \phi_{k+1}) + \frac{\epsilon}{4}(\lambda_{k-1} + 2\lambda_k + \lambda_{k+1}) + \tau(\epsilon\dot{\lambda} + G\dot{q}) = 0$$

$$4\phi_k + G(q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}) + 4\epsilon\bar{\lambda} + \frac{4\tau}{h}G(q_{k+1} - q_k) = 0$$

定义稳定化因子

$$\Upsilon = 1 + \frac{4\tau}{h}$$

$$\Upsilon G_k q_{k+1} + 4\epsilon\bar{\lambda} = (1 + \Upsilon)G_k q_k - G_k q_{k-1} - 4\phi_k$$

$$G_k q_{k+1} + \frac{4\epsilon}{\Upsilon}\bar{\lambda} = -4\frac{1}{\Upsilon}\phi_k + (1 + \frac{1}{\Upsilon})G_k q_k - \frac{1}{\Upsilon}G_k q_{k-1}$$

变成速度形式：

$$G_k v_{k+1} + \frac{4\epsilon}{h^2\Upsilon}h\bar{\lambda} = -\frac{4}{h\Upsilon}\phi_k + \frac{1}{\Upsilon}G_k v_k$$

写成矩阵形式：

$$\boxed{\begin{bmatrix} M & -G_k^\top \\ G_k & \frac{1}{\Upsilon}\frac{4\epsilon}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mv_k + mgh \\ \frac{1}{\Upsilon}(G_k v_k - \frac{4}{h}\phi_k) \end{bmatrix}}$$

其中 $\tilde{\lambda} = h\bar{\lambda}$

对比没有稳定化的矩阵形式，多出来一个小于 1 的因子。

$$\begin{bmatrix} M & -G_k^\top \\ G_k & \frac{4\epsilon}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mv_k + mgh \\ G_k v_k - \frac{4}{h}\phi_k \end{bmatrix}$$

实验结果表明：当使用没有稳定化的矩阵形式时，如果偏离了约束，整个系统就发散了。当使用带有稳定化的矩阵形式时，偏离约束之后系统能迅速收敛到约束上。

7 能量的耗散

我们对 nonholonomic 约束生成的项会缓慢的耗散系统的能量，因为它等价于给系统引入一个和速度方向相反的力。

8 参数的物理含义

算法中有 2 个可调整的参数。

ϵ，用于表示对约束的 regularization，这个值越大，系统在运行过程中偏离约束就越多。

$\frac{\tau}{h}$，这个参数会影响被违反的约束的回归时间，越大则约束回归的时间越长（即步数越多）。τ 相当于控制和速度方向相反的力的大小，这个力越大，相当于约束力被抵消的越多，则回归约束越慢。如果 $\tau = 0$，则相当于对于约束力没有抵消，则约束力会来回拉物体，因为约束力很大，会引起系统振荡。

9 四元数导数和角速度的关系

下面的符号都表示世界坐标系中的量。

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega * q$$

公式的推导见 [3].

$$\dot{\rho} = \Gamma\omega$$

其中

$$\Gamma = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\rho_1 & -\rho_2 & -\rho_3 \\ \rho_0 & \rho_3 & -\rho_2 \\ -\rho_3 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_2 & -\rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix}$$

10 约束 Jacobian

Lagrange 方程里的 Lagrange 乘子对应的约束力需要和速度方向垂直。所以我们需要找到一个约束梯度的表达，让它和角速度的内积是 0.

对约束关于时间求导：

$$0 = \frac{d}{dt}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\dot{\rho} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\Gamma\omega$$

所以我们用 $\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\Gamma$ 作为约束力的方向。

11 有势力的表示

与前一节类似的一个推导是通过势能 U 推导它引起的力。有势力的特点是它的方向与等势面垂直，是势能的梯度。

假设 $q(t)$ 在等势面上运动，从而力应该与速度 $\dot{q}$ 垂直，对 $U(q)$ 关于时间求导得:

$$0 = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial U}{\partial q}\Gamma v$$

所以 $f = \frac{\partial U}{\partial q}\Gamma$ 与速度 v 垂直，是有势力的表达式。

12 对线性方程的求解

$$K = \begin{bmatrix} M & -G^\top \\ G & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ GM^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \\ & GM^{-1}G^\top + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -M^{-1}G^\top \\ & I \end{bmatrix}$$

令 $S = GM^{-1}G^\top + C$

$$K^{-1} = L^\top D^{-1} L^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} - M^{-1}G^\top S^{-1} G M^{-1} & M^{-1}G^\top S^{-1} \\ -S^{-1}GM^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$g_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \rho}\Gamma$$

g_i 是一个 n 维行向量，$n = 6 \times bodyNumber$。g_i 只有该约束包含的 body 对应的块上才有值。

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

13 稀疏矩阵求解步骤

1. 用 approximated minimum degree 或 nested dissection 方法确定 pivot 的顺序
2. 构建 elimination tree

3. 用 multifrontal 方法顺序求解或者并行求解

先实现顺序的 multifrontal 算法。

14 multifrontal 算法的具体实现

我们在实现 multifrontal 算法的时候以 K 矩阵的天然分块为单位进行操作。假设有 n 个 body, m 组约束。每个 body 对应一个质量矩阵 M_i，每组约束 ϕ_i 对应一个 C_i。C_i 是对角矩阵，对角元素为 $\frac{1}{1+\frac{4\tau}{h}}\frac{4\epsilon}{h^2}$。一组约束一般涉及 1 个或者 2 个 body，包含若干个相关的约束。K 矩阵的天然分块形式为

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & & & \\ & \ddots & & & G_{ji}^\top & \\ & & M_n & & & \\ & & & C_1 & & \\ & G_{ij} & & & \ddots & \\ & & & & & C_m \end{bmatrix}$$

其中 G_{ij} 是第 i 组约束关于第 j 个 body 的偏导数，i, j 是在左下角 G 矩阵中的位置。

我们在构建 elimination tree 和对矩阵进行操作的时候都以 M_i, C_i, G_{ij} 这些块为单位。所以消去树中有 $n+m$ 个节点，对应于 M_i, C_i。

参考文献

[1] Martin Servin and Claude Lacoursière. Rigid body cable for virtual environments. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(4):783–796, 2008.

[2] M. R. Flannery. The enigma of nonholonomic constraints. 2005.

[3] Claude Lacoursiere. *Ghosts and Machines: Regularized Variational Methods for Interactive Simulations of Multibodies with Dry Frictional Contacts.* PhD thesis, 2007.