空间中通过三点的圆

许中兴

1 问题

软件中一个功能需求是给定空间中的三个点，求通过它们的圆。求解整个问题的方法大致分成以下几类。

第一类方法只解决二维平面上的这个问题，即假设所有的坐标都是二维空间中的坐标。然后通过一个变换将三维空间中的问题转化到一个平面上解决，计算完之后再通过逆变换转化回三维空间。这个方法的问题在于首先需要选择一个合适的平面，这个平面不能垂直于给定的三角形所在的平面，要尽量平行于它。寻找这个变换是很麻烦的一件事。并且进行空间坐标转换也会引入误差。

第二类方法是直接在三维空间中用几何方法算出圆的圆心。需要通过一系列的向量计算。这种方法比上面的方法要可靠一些，但是仍然需要处理很多特殊情况，要判断计算过程中出现的各种中间向量是否共线，要判断计算过程中出现的点是否重合等等。这种方法是可行的，也是我一开始实现的方法。但是整个实现很复杂，要判断上述的各种边缘情况，很难保证实现的完备，后续维护也很难。

第三类方法就是本文要介绍的方法，基于 barycentric 坐标的方法。这种方法是代数方法，好处是 Barycentric 坐标的计算不依赖于维度，适用于二维和三维的情况。计算过程很简单，不需要考虑过程中间出现的各种特殊情况。只需要在一开始判断一下三个点是否重合以及是否共线。

2 三角形上的 barycentric 坐标

关于 barycentric 坐标的详细定义可以参见维基百科及相关文献。这里我们的重点是要证明三角形上的 barycentric 坐标是点与三条边形成的子三角形的面积的比。

给定一个三角形 $P_1P_2P_3$, 以及三角形所在平面上的一个点 P. 假设点 P 在三角形上的 barycentric 坐标为 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 满足 $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

我们要证明 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = S_{PP_2P_3} : S_{PP_3P_1} : S_{PP_1P_2}$，其中 $S_{PP_1P_2}$ 是三角形 PP_1P_2 的面积。

证明的思路是将三角形的三个顶点用仿射变换变换到 $(0,0), (1,0), (0,1)$ 这三个点上。由于仿射变换不改变点的 barycentric 坐标，并且仿射变换保持图形面积的比例不变，所以我们可以用一个仿射变换将问题变换到一种简单的情形来证明。

关于仿射变换保持图形面积比例不变的证明，参见 Methods for Euclidean Geometry 的第 12 章。从直观上，我们可以想象一个平面图形在一个网格平面上，由很多个小正方形组成。一个仿射变换将每个正方形都变换成一个平行四边形。正方形与对应的平行四边形的面积比例是固定的。平面图形在放射变换下的面积变换比例也是固定的。从而两个图形的面积比在放射变换下是不变的。

下面我们证明仿射变换保持 barycentric 坐标不变。

任何仿射变换都可以用一个满秩的矩阵 M 和一个平移向量 b 来表示: $P' = MP + b$. 我们证明 P' 的 barycentric 坐标仍然是 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. 由于 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$，所以有

$$
\begin{aligned}
P' &= MP + b \\
&= M(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) b \\
&= \lambda_1 (MP_1 + b) + \lambda_2 (MP_2 + b) + \lambda_3 (MP_3 + b) \\
&= \lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2' + \lambda_3 P_3'
\end{aligned}
$$

我们可以找到一个仿射变换将三角形 $P_1P_2P_3$ 变换到 $(0,0), (1,0), (0,1)$ 上面, 点 P_1 对应 $P_1' = (0,0)$, 点 P_2 对应 $P_2' = (1,0)$, 点 P_3 对应 $P_3' = (0,1)$。

在这个变换后的平面里，假设 P' 的欧几里得坐标为 (x, y), 那么 P' 可以表示为

$$P' = xP_2' + yP_3' + (1 - x - y)P_1'$$

$(1 - x - y, x, y)$ 即为 P' 的 barycentric 坐标。

很容易看出 $S_{P'P_2'P_3'} : S_{P'P_3'P_1'} : S_{P'P_1'P_2'} = 1 - x - y : x : y$，即点 P' 的 barycentric 坐标和点 P' 与三角形各边形成的子三角形面积的比是一致的。

再由仿射变换不改变 barycentric 坐标和图形面积的比例可知此性质对任意三角形都成立。

3 三角形外接圆圆心的 barycentric 坐标

下面我们求三角形外接圆圆心的 barycentric 坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。有了这个坐标我们就可以通过 $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ 直接求得圆心的欧几里得坐标了。

假设 P 是三角形外接圆的圆心，要求它的 barycentric 坐标，只需要求出它对应的三个子三角形的面积比。下面我们证明 P 对应的三个子三角形的面积比等于这三个三角形对应的圆心角的正弦值的比。

令 $\theta = \frac{1}{2}\angle P_1 P P_2$, R 为外接圆半径，M 为 P_1P_2 的中点。从而 $S_{PP_1P_2} = 2S_{PP_1M} = 2\frac{1}{2}Rsin\theta Rcos\theta = \frac{1}{2}R^2 sin2\theta = \frac{1}{2}R^2 sin\angle P_1PP_2$。其余两个三角形可类似计算。

设 A, B, C 分别为对应于顶点 P_1, P_2, P_3 的角度。根据等腰三角形外角和内角的关系，容易得到 $\angle P_1PP_2 = 2C$. 从而我们可以得到重要的关系：

$$S_{PP_2P_3} : S_{PP_3P_1} : S_{PP_1P_2} = sin2A : sin2B : sin2C$$

至此我们已经解出了三角形外接圆圆心的 barycentric 坐标。下面还需要把它转化成容易计算的形式。

设 P_2P_3 的长度为 a，P_3P_1 的长度为 b，P_1P_2 的长度为 c。

$$c = 2Rsin\theta = 2Rsin\frac{1}{2}\angle P_1PP_2 = 2RsinC$$

从而有

$$sinA : sinB : sinC = a : b : c$$

又有：

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

从而有

$$\begin{aligned} cosA : cosB : cosC &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= a(b^2 + c^2 - a^2) : b(c^2 + a^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned}$$

最终我们得到

$$
\begin{aligned}
S_{PP_2P_3} : S_{PP_3P_1} : S_{PP_1P_2} &= sin2A : sin2B : sin2C \\
&= sinAcosA : sinBcosB : sinCcosC \\
&= a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)
\end{aligned}
$$

将其归一化之后得到圆心的计算公式：

$$
P = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)P_1 + b^2(c^2+a^2-b^2)P_2 + c^2(a^2+b^2-c^2)P_3}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}
$$