高中知识复习

Review

张昕

西南民族大学 经济学院

2023 年 3 月 8 日

目录

基本计数法则与列表

定理 (基本计数法则)

- 假定进行过程 I 有 n_1 种方法，而对于过程 I 的每一种方法，进行过程 II 都有 n_2 种方法。那么，依次进行过程 I 与 II 共有 $n_1 \times n_2$ 种方法。
- 假定进行过程 I 有 n_1 种方法，进行过程 II 都有 n_2 种方法。那么，进行过程 I 或 II 共有 $n_1 + n_2$ 种方法。

基本计数法则与列表

例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

基本计数法则与列表

例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$$

基本计数法则与列表

例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$$

例 (不可重复的列表 (List without repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，如果数字和字母均不能重复，一共有多少编排车牌号的方法。
我们将不可重复的列表称为排列（permutations）。

基本计数法则与列表

例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$$

例 (不可重复的列表 (List without repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，如果数字和字母均不能重复，一共有多少编排车牌号的方法。
我们将不可重复的列表称为排列（permutations)。

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78,624,000$$

目录

排列

定义 (排列与阶乘)

- **排列（Permutations）：**与顺序有关的不可重复列表。
- **阶乘（factorial）：**$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$。

排列

定义 (排列与阶乘)

- **排列（Permutations）：**与顺序有关的不可重复列表。
- **阶乘（factorial）：** $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$。

例

一个球队有 9 名队员，先后发球，发球顺序共有多少种?

排列

定义 (排列与阶乘)

- **排列（Permutations）：** 与顺序有关的不可重复列表。
- **阶乘（factorial）：** $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$。

例

一个球队有 9 名队员，先后发球，发球顺序共有多少种?

$$9! = 362,880$$

排列

例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

1. 一共有多少种排序方法?
2. 若男女分开排序，一共有多少种排序方法?

排列

例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

1. 一共有多少种排序方法?
2. 若男女分开排序，一共有多少种排序方法?

1. $10! = 3,628,800$
2. $(6!)(4!) = 17,280$

排列

例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

1. 一共有多少种排序方法?
2. 若男女分开排序，一共有多少种排序方法?

1. $10! = 3,628,800$
2. $(6!)(4!) = 17,280$

例

十本书放在书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和一本语文书。现在要求所有相同类型书籍均紧挨着放，问一共有多少种放法?

排列

例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

1. 一共有多少种排序方法?
2. 若男女分开排序，一共有多少种排序方法?

1. $10! = 3,628,800$
2. $(6!)(4!) = 17,280$

例

十本书放在书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和一本语文书。现在要求所有相同类型书籍均紧挨着放，问一共有多少种放法?

先把四种书各自排，再把四种书排。

$$4! \times (4! \times 3! \times 2 \times 1) = 6912$$

目录

组合

从 A，B，C，D 和 E 五个字母中选择三个形成组合，一共有几种选法？第一个字母有 5 种选法，第二个字母有 4 种选法，第三个字母有 3 种选法，但该结果是与顺序相关的。但在这个问题中，字母的顺序是无关的。所有选法应该有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$$

定义 (组合)

组合 (Combinations) 是元素不可重复的集合，因此与顺序无关。对于 $r \leqslant n$，我们将 $\mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r}}$ 或者 $\binom{n}{r}$ 定义为

$$\mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r}} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

我们将 $\mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r}}$ 或者 $\binom{n}{r}$ 读作 “n 选 r（n choose r）”。

组合

例

从 20 个人选择 3 个组成委员会，一共有几种选法?

组合

例

从 20 个人选择 3 个组成委员会，一共有几种选法?

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

组合

例

从 20 个人选择 3 个组成委员会，一共有几种选法?

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

例

12 个人中 5 女 7 男，现从中选取 2 女 3 男组成委员会，共有多少种选法? 现在两位男士发生矛盾，并决定绝不一起工作，现在有多少种选法?

组合

例

从 20 个人选择 3 个组成委员会，一共有几种选法?

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

例

12 个人中 5 女 7 男，现从中选取 2 女 3 男组成委员会，共有多少种选法? 现在两位男士发生矛盾，并决定绝不一起工作，现在有多少种选法?

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3}$$

$$\binom{5}{2}\left[\binom{7}{3} - \binom{2}{2}\binom{5}{1}\right] \; or \; \binom{5}{2}\left[\binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2}\right]$$

组合

例

现有一排 n 个信号塔，其中 m 个失效，n-m 个有效，有效信号塔之间没有差异，无效信号塔之间也没有差别。现在不能让连续两个信号塔均失效，共有多少种排序方法？

有效的信号塔之间，最多放置一个失效的信号塔。有 $n-m+1$ 个位置，从中选 m 个防止失效的信号塔。所以

$$\binom{n-m+1}{m}$$

$$\wedge\, 1 \,\wedge\, 1 \,\wedge\, 1 \ldots \wedge\, 1 \,\wedge\, 1 \,\wedge$$

1 = functional

$\wedge$ = place for at most one defective

图: 失效信号塔的放置方法

组合

定理

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

这个公式的理解方法为，我将选 r 个元素分成两类：选某个特定元素和不选某个特定。如果选就是 $\binom{n-1}{r-1}$，如果不选就是 $\binom{n-1}{r}$。

组合

定理 (二项式定理（The bionomial theorem）)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

例

展开 $(x+y)^3$。

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + x^3\end{aligned}$$

组合

展开 $(x+y)^3$。

所有的三次项	选几个 x	选几个 y
x^3y^0	$\binom{3}{3}$	$\binom{0}{0}$
x^2y^1	$\binom{3}{2}$	$\binom{1}{1}$
x^1y^2	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{2}$
x^0y^3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{3}$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{3}\binom{0}{0}x^3y^0 + \binom{3}{2}\binom{3}{2}x^2y^1 + \binom{3}{1}\binom{2}{2}x^1y^2 + \binom{3}{0}\binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k}x^ky^{n-k}$$

组合

例

证明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

组合

例

证明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

Let $x=1$ and $y=1$, then

$$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

组合

例

证明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

Let $x=1$ and $y=1$, then

$$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

例

一个有 n 个元素的集合，一共有几个子集，其中非空子集有几个。

组合

例

证明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$。

Let $x=1$ and $y=1$, then

$$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

例

一个有 n 个元素的集合，一共有几个子集，其中非空子集有几个。

$$\sum_{k=0}^{n}=\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n\ and\ 2^n-1$$

组合

例

用“PEPPER”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式?

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

组合

例

用“PEPPER”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式?

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

例

9 面小旗，其中 4 红 2 白 3 蓝，不同排列方式代表不同信号，那么一共有多少种可能的信号?

组合

例

用“PEPPER”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式?

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

例

9 面小旗，其中 4 红 2 白 3 蓝，不同排列方式代表不同信号，那么一共有多少种可能的信号?

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

目录

划分

考虑下面的情境，将 n 个不同的元素分配到 r 个不同的组别，每个组别包含 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 个元素，并且 $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$。第一组有 $\binom{n}{n_1}$ 种选法；对于第一组的每个选法，第二组又有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种选法，以此类推。最终选法有

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

我们将这种关系称为**划分**（**partition**）。

划分

定理 (多项式定理（multinomial theorem）)

如果 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，我们定义

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}{x_1}^{n_1}{x_2}^{n_2}\cdots{x_r}^{n_r}$$

推广二项式定理，二项式定理就相当于分成 2 组划分，多项式定理相当于分成 r 组的划分，下式为二项式定理。

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k}x^ky^{n-k}$$

划分

例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法?

划分

例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法?

$$\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$$

划分

例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法?

$$\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$$

例

10 名小朋友分成两组，A 组 5 名去踢足球，B 组 5 名去打篮球，一共有多少种分法？有多少种胜负结果?

划分

例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法?

$$\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$$

例

10 名小朋友分成两组，A 组 5 名去踢足球，B 组 5 名去打篮球，一共有多少种分法？有多少种胜负结果?

$$\frac{10!}{5!5!} = 252$$

划分

例

10 名小朋友分成两组，每组 5 名，两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？有多少种胜负结果？

划分

例

10 名小朋友分成两组，每组 5 名，两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？有多少种胜负结果？

现在，这两个队伍是没有差异的，也就是与顺序无关，没有了 A 队与 B 队。

$$\frac{10!}{(5!5!)2!} = 126$$

一场比赛有两种胜负结果，所以胜负结果一共有

$$\frac{10!}{(5!5!)2!} \times 2 = 252$$

划分

例

现有 $n=2^m$ 个小朋友进行淘汰赛，即将 n 个参赛者随机分成 $n/2$ 对，两两进行淘汰赛，胜者晋级，败者淘汰。直到最后一个胜者成为冠军。(为了简单，我们就考虑仅有 8 名参赛者。)

1. 第一轮比赛中，有多少不同可能的结果？这里的结果指队小朋友每一对的胜负关系。
2. 整个淘汰赛，一共有多少种不同的结果，每一个结果展示了各论全部的淘汰信息。

划分

对于第一个问题:

1. **第一步:** 将 8 名选手分为有差别的 4 对: $\binom{8}{2,2,2,2} = \dfrac{8!}{2^4}$
2. **第二步:** 这 4 对是无差别的: $\dfrac{8!}{(2^4)4!}$
3. **第三步:** 每一对的胜负均有两种可能,也就是第一轮所有的可能: $\dfrac{(8!)2^4}{(2^4)4!} = \dfrac{8!}{4!}$
4. **另一种思维:** 选四个胜者 $\binom{8}{4}$,再为胜者匹配败者 $\binom{8}{4} \times 4! = \dfrac{8!}{4!}$

划分

对于第二个问题：

1. **第一步：** 对于第一轮的每个结果，第二轮有 $\frac{4!}{2!}$ 种结果。
2. **第二步：** 对于第二轮的每个结果，第三轮有 $\frac{2!}{1!}$ 种结果。
3. **第三步：** 综合三轮，共有 $\frac{8!}{4!}\frac{4!}{2!}\frac{2!}{1!} = 8!$ 种结果。
4. **另一种思维：**
   - 我们可以给淘汰赛的每个位置编号
   - 比如冠军编号为 1，亚军编号为 2，三四名编号为 3 和 4，以此类推。
   - 共有不同的 8 个位置，那么也就有 8! 种结果。

多项式定理

展开 $(x+y+z)^2$.

$$
\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= (x+y+z)(x+y+z) \\
&= \binom{2}{2,0,0}x^2y^0z^0 + \binom{2}{0,2,0}x^0y^2z^0 + \binom{2}{0,0,2}x^0y^0z^2 \\
&\quad + \binom{2}{1,1,0}x^1y^1z^0 + \binom{2}{1,0,1}x^1y^0z^1 + \binom{2}{0,1,1}x^0y^1z^1 \\
&= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz
\end{aligned}
$$

组合理论

	顺序 (Order)	重复 (repetition)	举例
列表 (List)	YES	YES	车牌
排列 (Permutation)	YES	NO	排名
组合 (Combination)	NO	NO	组建委员会
划分 (Partition)	嵌套，组间有差异，组内无差异		分配任务

- 划分为排列嵌套组合，组间为排列，组内为组合。
- 组合是只有两个组的划分，两个分组分别为“入选”和“落选”。

组合理论

考虑将 n 个元素放置于 r 个位置，则：

- 列表：n^r;
- 排列：
  1. $n=r, n!=n(n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1$;
  2. $n>r, P_n^r=(n)_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$;
  3. $n=r$, 但 r 个元素中有 $n_1\ n_2\ \cdots, n_r$ 个重复元素：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$;
- 排列：$C_n^r=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$;
- 划分：$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

目录

整数解的个数

- n 个**不同**的球放到 r 个**不同**的篮子：
  1. 篮子可以空置，但球必须有个归宿。
  2. n 个球是 n 个不同位置，r 个篮子是 r 个不同的元素。
  3. 答案是：r^n

整数解的个数

- n 个**不同**的球放到 r 个**不同**的篮子：
  1. 篮子可以空置，但球必须有个归宿。
  2. n 个球是 n 个不同位置，r 个篮子是 r 个不同的元素。
  3. 答案是：r^n
- n 个**相同**的球放到 r 个**不同**的篮子：
  1. 我们以 8 个球 4 个篮子为例；
  2. 000|00||000，代表四个篮子分别放 3,2,0,3 个球；
  3. 相当于 8 个“0”和 3 个“|”组成一个 11 位单词的组词的排列问题；
  4. 或者是将 11 个不同的位置，分配给“0”和“|”两个组别的划分问题；

整数解的个数

- n 个**不同**的球放到 r 个**不同**的篮子：
  1. 篮子可以空置，但球必须有个归宿。
  2. n 个球是 n 个不同位置，r 个篮子是 r 个不同的元素。
  3. 答案是：r^n
- n 个**相同**的球放到 r 个**不同**的篮子：
  1. 我们以 8 个球 4 个篮子为例；
  2. 000|00||000，代表四个篮子分别放 3,2,0,3 个球；
  3. 相当于 8 个“0”和 3 个“|”组成一个 11 位单词的组词的排列问题；
  4. 或者是将 11 个不同的位置，分配给“0”和“|”两个组别的划分问题；
  5. 答案是：$\frac{11!}{8!3!} = \binom{11}{3}$
  6. 所以此类问题的解法为：$\binom{n+r-1}{r-1}$

整数解的个数

- n **个相同**的球放到 r **个不同**的篮子，且篮子不能不能空置：
  1. 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
  2. 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
  3. 答案是：$\dfrac{((8-4)+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
  4. 所以此类问题的解法为：$\binom{n-1}{r-1}$

整数解的个数

- n 个**相同**的球放到 r 个**不同**的篮子，且篮子不能不能空置：
  1. 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
  2. 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
  3. 答案是：$\dfrac{((8-4)+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
  4. 所以此类问题的解法为：$\binom{n-1}{r-1}$
- 该类问题也可以通过“插缝”的思路解答
  1. 将 3 个 “|” 插在 8 个”0” 的缝隙中。

整数解的个数

- n 个**相同**的球放到 r 个**不同**的篮子，且篮子不能不能空置：
  1. 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
  2. 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
  3. 答案是：$\dfrac{((8-4)+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
  4. 所以此类问题的解法为：$\binom{n-1}{r-1}$
- 该类问题也可以通过“插缝”的思路解答
  1. 将 3 个“|”插在 8 个”0” 的缝隙中。
  2. 不许空置，每个缝隙只能选一次，即在 7 个缝隙中选 3 个，$\binom{7}{3}$；

整数解的个数

- n 个**相同**的球放到 r 个**不同**的篮子，且篮子不能不能空置：
  1. 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
  2. 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
  3. 答案是：$\dfrac{((8-4)+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
  4. 所以此类问题的解法为：$\binom{n-1}{r-1}$
- 该类问题也可以通过“插缝”的思路解答
  1. 将 3 个“|”插在 8 个”0” 的缝隙中。
  2. 不许空置，每个缝隙只能选一次，即在 7 个缝隙中选 3 个，$\binom{7}{3}$；
  3. 允许空置，可以使用“借球法”，先借 4 个球，按照不许空置计算，保证每个篮子至少有一个球，再从每个篮子拿走一个球，把借来的球还回去；
  4. 这样就相当于在 (4+4=)12 个”0” 的 11 个缝隙中插入 3 个”|”，即 $\binom{11}{3}$.

整数解的个数

- $x_1+x_2=3$ 的非负整数解个数。
  1. 相当于 3 个 “1” 放到 “x_1” 和 “x_2” 这两个篮子；
  2. 答案是：$\binom{3+2-1}{2-1}=4$ 个，即 $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$.
- $x_1+x_2=3$ 的正整数解个数。
  1. 相当于 3 个 “1” 放到 “x_1” 和 “x_2” 这两个篮子，且不能空置；
  2. 答案是：$\binom{3-1}{2-1}=2$ 个，即 $(1,2),(2,1)$.

整数解的个数

- $x_1+x_2=3$ 的非负整数解个数。
  1. 相当于 3 个“1”放到“x_1”和“x_2”这两个篮子；
  2. 答案是：$\binom{3+2-1}{2-1}=4$ 个，即 $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$.
- $x_1+x_2=3$ 的正整数解个数。
  1. 相当于 3 个“1”放到“x_1”和“x_2”这两个篮子，且不能空置；
  2. 答案是：$\binom{3-1}{2-1}=2$ 个，即 $(1,2),(2,1)$.
- 推广：$x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的整数解个数。
  1. 如果 $x_i>0$, 正整数解个数：$\binom{n-1}{r-1}$;
  2. 如果 $x_i\geqslant 0$，令 $y_i=x_i+1$，并求 $y_1+y_2+\cdots+y_r=n+r$;
  3. 所以，非负整数解个数：$\binom{n+r-1}{r-1}$;

整数解的个数

n 个电线中，m 个失效，n-m 个有效。

- 两个失效电线之间必须至少有一个有效电线
  1. 相当于解 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{m+1}=n-m \quad x_i>0$;
  2. "+" 相当于失效的电线，x_i 相当于失效电线之间的有效电线数。
  3. 解为 $\binom{n-m-1}{m}$
- (选讲) 两个失效电线之间必须至少有两个有效电线
  1. 相当于解 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{m+1}=n-m$
     $x_1>0, x_{m+1}>0, x_i\geqslant 2$;
  2. 如果 $1<i<m-1$，则令 $y_i=x_i-1\geqslant 1$，解
     $x_1+y_2+y_3+\cdots+y_m+x_{m+1}=n-m-(m-1)=n-2m+1$;
  3. 解为 $\binom{n-2m}{m}$

目录

集合与集合的关系

- 集合
    - 集合、子集和元素
- 集合的关系
    1. 包含 (Contain)：$A \supset B$，称为 A 包含 B，或 B 包含于 A。
    2. 相等 (Indentical)：$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ and $A \supset B$.
    3. 补 (Complement)：A^c *or* $\bar{A} = \{\omega | \ \omega \notin A\}$
    4. 并 (Union)：$A \cup B = \{\omega | \ \omega \in A \ or \ \omega \in B\}$
    5. 交 (Intersection)：$A \cap B = AB = \{\omega | \ \omega \in A \ and \ \omega \in B\}$.
- 用韦恩图 (Venn diagram) 描述上述关系。

注释：不同的书籍可能分别用 $\supset$ 和 $\supseteq$ 表示包含，两者的含义相同。一般用 $A \supsetneqq B$ 表示 B 是 A 的真子集。

集合的运算

- 集合的运算律
  1. 交换律 (Commutative laws)：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。
  2. 结合率 (Associative laws)：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。
  3. 分配率 (Distributive lwas)：$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$，$(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  4. 自反率：$(A^c)^c = A$，$A = A \cap A = A \cup A$。
  5. 摩根律 (DeMorgan's laws)：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。
- 差与互斥
  1. 差 (Difference): $A/B = A - B = A \cap B^c = \{\omega | \, \omega \in A \; and \, \omega \notin B\}$，$A/B = A - B = A - (A \cap B)$
  2. 互斥 (Disjoint): $A \cap B = \varnothing$

数与有限

- 数 (counting)：与自然数建立一一对应关系；
- 等价 (equivalent):$A \sim B$，A 和 B 中的元素可以建立一一对应关系，即元素一样多；
- 有限 (finite)：可与自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 建立一一对应关系；
- 无限 (infinite)：不是有限。
- 问题：$A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 与 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 哪个元素比较多？

A	1	2	3	$\cdots$	n		
$\mathbb{N}$	1	2	3	$\cdots$	n	n+1	$\cdots$

可数

- 问题：奇数和偶数哪个比较多？
- 问题：自然数和偶数那个比较多？
- 问题：自然数和非负整数哪个比较多？

n,n>0	1	2	3	⋯	n	⋯
2n	2	4	6	⋯	2n	⋯
2n-1	1	3	5	⋯	2n-1	⋯
n-1	0	1	2	⋯	n-1	⋯

- 可数 (countable): 可与自然数 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 建立一一对应关系；
- 整数 ($\mathbb{Z}$)、有理数 ($\mathbb{Q}$) 都可数。

不可数

- 问题：$[0,1]$ 和 $\mathbb{N}$ 哪个元素比较多?
- 不可数 (uncountable)：既不有限又不可数;
- 无理数和实数 ($\mathbb{R}$) 均不可数。
- 如果变量的个数至多可数，我们称这样的变量为**离散变量**，求离散变量的和：
  - $\sum_{n=1}^{\infty} x_i$
- 如果变量为不可数的区间，我们称这样的变量为**连续变量**，求连续变量的和：
  - $\int_a^b f(x)\, dx$

谢谢！