Chapter 0

高中知识复习

0.1 组合理论

■ **定理 0.1.1 (基本计数法则)**

- 假定进行过程 I 有 n_1 种方法，而对于过程 I 的每一种方法，进行过程 II 都有 n_2 种方法。那么，依次进行过程 I 与 II 共有 $n_1 \times n_2$ 种方法。
- 假定进行过程 I 有 n_1 种方法，进行过程 II 都有 n_2 种方法。那么，进行过程 I 或 II 共有 $n_1 + n_2$ 种方法。

• **例 0.1.1 (可重复的列表 (List with repetition))** *7* 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

• **例 0.1.2 (不可重复的列表 (List without repetition))** *7* 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，如果数字和字母均不能重复，一共有多少编排车牌号的方法。

我们将不可重复的列表称为排列（*permutations*）。

▶ **定义 0.1.1 (排列与阶乘)**

- 排列（***PermutationS***）：与顺序有关的不可重复列表。
- 阶乘（***factorial***）：$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$。

• **例 0.1.3** 一个球队有 *9* 名队员，先后发球，发球顺序共有多少种？

• **例 0.1.4** 某班级共有 *6* 名男生和 *4* 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

1. 一共有多少种排序方法？

2. 若男女分开排序，一共有多少种排序方法？

● **例 0.1.5** 十本书放在书架上，其中有 *4* 本数学书、*3* 本化学书、*2* 本历史书和一本语文书。现在要求所有相同类型书籍均紧挨着放，问一共有多少种放法？

从 A，B，C，D 和 E 五个字母中选择三个形成组合，一共有几种选法？第一个字母有 5 种选法，第二个字母有 4 种选法，第三个字母有 3 种选法，但该结果是与顺序相关的。但在这个问题中，字母的顺序是无关的。所有选法应该有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$$

▶ **定义 0.1.2 (组合)** 组合是元素不可重复的集合，因此与顺序无关。
对于 $r \leqslant n$，我们将 $\mathbf{C_n^r}$ 或者 $\binom{n}{r}$ 定义为

$$\mathbf{C_n^r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

我们将 $\mathbf{C_n^r}$ 或者 $\binom{n}{r}$ 读作"n 取 r（n *choose* r）"，用来代表从 n 个元素中一次性选择 r 个元素的可能组合数。

● **例 0.1.6** 从 *20* 个人总选择 *3* 个组成委员会，一共有几种选法？

● **例 0.1.7** *12* 个人中 *5* 女 *7* 男，现从中选取 *2* 女 *3* 男组成委员会，共有多少种选法？现在两位男士发生矛盾，并决定绝不一起工作，现在有多少种选法？

● **例 0.1.8** 现有一排 n 个电线，其中 m 个失效，n-m 个有效，有效电线之间没有差异，无效电线之间也没有差别。现在不能让连续两个电线均失效，共有多少种排序方法？

□ **推论 0.1.1** 一个非常有用的组合公式

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

■ **定理 0.1.2 (二项式定理（The bionomial theorem）)**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

● **例 0.1.9** 展开 $(x+y)^3$。

● **例 0.1.10** 证明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$。

● **例 0.1.11** 一个有 n 个元素的集合，一共有几个子集，其中非空子集有几个。

● **例 0.1.12** 用“*PEPPER*”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式？

考虑下面的情境，将 n 个不同的元素分配到 r 个不同的组别，每个组别包含 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 个原则，并且 $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$。第一组有 $\binom{n}{n_1}$ 种选法；对于第一组的每个选法，第二组又有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种选法，以此类推。最终选法有

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

我们将这种关系称为 partition。

■ **定理 0.1.3 (多项式定理（The multinomial theorem）)** 如果 $n_1+n_2+\cdots+n_r = n$，我们定义

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} {x_1}^{n_1} {x_2}^{n_2} \cdots {x_r}^{n_r}$$

● **例 0.1.13** *9* 面小旗，其中 *4* 红 *2* 白 *3* 蓝，不同排列方式代表不同信号，那么一共有多少种可能的信号？

● **例 0.1.14** 警局有 *10* 名警察，现在需要 *5* 名巡逻，*2* 名值班，*3* 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法？

● **例 0.1.15** *10* 名小朋友分成两组，*A* 组 *5* 名去踢足球，*B* 组 *5* 名去打篮球，一共有多少种分法？

● **例 0.1.16** *10* 名小朋友分成两组，每组 *5* 名，两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？

● **例 0.1.17** 现有 $n = 2^m$ 个小朋友进行淘汰赛，即将 n 个参赛者随机分成 $n/2$ 对，两两进行淘汰赛，胜者晋级，败者淘汰。直到最后一个胜者成为冠军。(为了简单，我们就考虑仅有 *8* 名参赛者。)

1. 第一轮比赛中，有多少不同可能的结果？
2. 整个淘汰赛，一共有多少种不同的结果，每一个结果展示了各论全部的淘汰信息。

● **例 0.1.18** 展开 $(x_1+x_2+x_3)^2$

再考虑下列情境，将 n 个不同的球放进 r 个不同的篮子，则一共有 r^n 种放法。若将 n 个相同的球放进 r 个不同的篮子，会有几种放法？我们可以把 n 个相同球排成一列，将其分成 r 组，实际就是在 $n-1$ 个缝隙中选 $r-1$ 个，即 $\binom{n-1}{r-1}$。若现在不允许篮子空置，则有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 种选法。

● **例 0.1.19** $x_1+x_2=3$ 的非负整数解和正整数解的个数分别是多少。

● **例 0.1.20** 再来考虑例 *0.1.8* 中电线的故事，是否有新的解法呢？那现在要求两个失效电线之间至少有两个有效电线，有几种排法？

0.2 集合论

我们考虑 (a) 竹篚里的苹果和 (a') 竹篚了腐烂的苹果。我们可以称这个竹篚为一个样本空间 (sample space)，每一个苹果均是一个样本点 (sample point)。我们将样本空间记作 S 或者 Ω，将样本点记作 ω，那么 $\omega_1, \omega_2, \ldots$ 的一个组合称为集合 Ω 的一个子集 (subset)。我们将样本空间内样本点的数量记作 $|A|$，例如 $|\varnothing| = 0$。

▶ **定义 0.2.1 (包含与相等)**

包含 (Contain) $A \supset B$，称为 A 包含 B，或 B 包含于 A。

相等 (Indentical) $A = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \textit{ and } A \supset B.$

▶ **定义 0.2.2 (交、并、补)**

补 (Complement) $A^c \textit{ or } \bar{A} = \{\omega |\ \omega \notin A\}$

并 (Union) $A \cup B = \{\omega |\ \omega \in A \textit{ or } \omega \in B\}$

交 (Intersection) $A \cap B = \{\omega |\ \omega \in A \textit{ and } \omega \in B\}.$

● **例 0.2.1** 用韦恩图（*Venn diagram*）描述上述关系。

■ **定理 0.2.1 (集合运算律 (the laws of set operations))**

交换律 (Commutative laws) $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

结合率 (Associative laws) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

分配率 (Distributive lwas) $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$，$(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

自反率 $(A^c)^c = A, A = A \cap A = A \cup A$。

摩根律 (DeMorgan's laws) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

▶ **定义 0.2.3 (差、互斥)**

差 (Difference) $A \backslash B = A \cap B^c = \{\omega |\ \omega \in A \textit{ and } \omega \notin B\}$，$A \backslash B = A - B = A - (A \cap B)$

互斥 (Disjoint) $A \cap B = \varnothing$

▶ **定义 0.2.4 (集合的大小)**

有限 (finite) 可与自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 建立一一对应关系；

无限 (infinite) 不是有限；

可数 (countable) 可与自然数 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 建立一一对应关系；

不可数 (uncountable) 既不有限又不可数；

至多可数 (at most countable) 有限或可数。