第一章 随机事件及其概率（上）

Chapter 1 Random Events and Probability I

张昕

西南民族大学 经济学院

2023 年 3 月 15 日

目录

基本概念

- **随机现象**：无法准确预知其结果的现象。
  - 以投掷硬币为例，我们无法准确预知硬币落下时哪一面朝上，因此投掷硬币哪一面朝上是一个随机现象。
- **随机试验 (Experiment)**：虽然全体可能结果可以预知，但是结果不能完全预知的试验。
  - 但是我们可以预知的是，投掷硬币哪一面朝上只有两个可能的结果，正面朝上（Head）和背面朝上（Tail），因此这是一个随机试验。
- **样本空间 (Sample space)**：随机试验的每个可能的结果称为一个样本点，样本点所组成的集合称为样本空间。
  - 正面朝上（Head）和背面朝上（Tail）是该随机试验的两个样本点，其构成的集合 S={H,T} 称为样本空间。
- **随机事件 (Event)**：样本空间的子集 E 称为随机事件。
  - E={H} 代表事件正面朝上发生了。

样本空间与事件

- 先后投掷两个硬币，写出其样本空间，写出事件“第一枚硬币正面朝上”。
  - $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$;
  - $E=\{(H,T),(H,H)\}$.

样本空间与事件

- 先后投掷两个硬币，写出其样本空间，写出事件“第一枚硬币正面朝上”。
  - $S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$;
  - $E = \{(H,T),(H,H)\}$.
- 同时投掷两个骰子，写出其样本空间，以及事件“骰子点数和为 7”
  - $S = \{(i,j)|i,j = 1,2,3,4,5,6\}$;
  - $E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

样本空间与事件

- 先后投掷两个硬币，写出其样本空间，写出事件“第一枚硬币正面朝上”。
  - $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$;
  - $E = \{(H, T), (H, H)\}$.
- 同时投掷两个骰子，写出其样本空间，以及事件“骰子点数和为 7”
  - $S = \{(i, j) | i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
  - $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.
- 一个试验要测试灯泡的寿命（单位：小时），写出其样本空间，以及事件灯泡寿命不足 7 小时。
  - $S = \{x | 0 \leqslant x < \infty\} = [0, \infty)$,
  - $E = [0, 7)$.

样本空间与事件

- 先后投掷两个硬币，用集合分别写出事件 A “第一枚硬币正面朝上”，事件 B “第二枚硬币正面朝上”，以及事件 U “至少一枚硬币正面朝上（即两枚硬币均不背面朝上）”。
  - $A = \{(H, T), (H, H)\}$;
  - $B = \{(H, H), (T, H)\}$;
  - $U = A \cup B = \{(H, T), (H, H), (T, H)\}$.

样本空间与事件

- 先后投掷两个硬币，用集合分别写出事件 A “第一枚硬币正面朝上”，事件 B “第二枚硬币正面朝上”，以及事件 U “至少一枚硬币正面朝上（即两枚硬币均不背面朝上)”。
  - $A = \{(H,T),(H,H)\}$;
  - $B = \{(H,H),(T,H)\}$;
  - $U = A \cup B = \{(H,T),(H,H),(T,H)\}$.
- 先后投掷两个硬币，用集合分别写出事件 A “至少一枚硬币正面朝上”，事件 B “至少一枚硬币背面朝上”，以及事件 I “恰好一枚硬币正面朝上，另一枚背面朝上”。
  - $A = \{(H,T),(H,H),(T,H)\}$;
  - $B = \{(H,T),(T,H),(T,T)\}$;
  - $I = A \cap B = \{(H,T),(T,H)\}$.

事件的集合运算

- **包含 (Contain)**：$E \subset F$，事件 E 必然会导致事件 F 的发生，例如事件考试成绩 90 分必然导致事件考试及格发生。
- **相等 (Equivalent)**：$E = F$，即 $E \subset F \; and \; F \subset E$。
- **和事件 (Union)**：$U = E \cup F = E + F = \{E \; or \; F\}$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

- **积事件 (Intersection)**：$I = EF = E \cap F = \{E \; and \; F\}$,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

- **互斥 (Exclusive)**：$E \cap F = \varnothing$，事件 E 和事件 F 不能同时发生。
- **逆事件或对立事件 (Complement)**：$E \cup F = S \; and \; E \cap F = \varnothing$，记为 $\bar{E} = E^c$，样本空间 S 中事件 E 之外所有的可能结果。
- **差事件 (Difference)**：$E - F = E \cap \bar{F} = E \cap F^c$。

事件的集合运算

- 交换律 (Commutative laws): $E \cup F = F \cup E$, $E \cap F = F \cap E$。
- 结合率 (Associative laws): $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$, $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$。
- 分配率 (Distributive lwas): $(E \cup F) \cap G = EF \cup FG$, $(EF) \cup G = (E \cup F) \cap (F \cup G)$
- 自反率: $(E^c)^c = E$。
- 摩根律 (DeMorgan's laws): $(E \cup F)^c = F^c \cap E^c$, $(E \cap F)^c = F^c \cup E^c$。

目录

概率的频率解释

下列这些数学家和统计学家都在人生中做过一件很无聊的事情：投硬币。下表展示了他们投硬币的结果。

试验者	试验次数	正面次数	正面占比
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5059
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4932

概率的频率解释

- **频率 (Frequency)**：在相同条件下可重复实现的试验，对于其样本空间 S 中事件 A，我们定义 $n(A)$ 为 n 次重复试验中事件 A 发生的次数，则事件 A 发生的频率为 $\frac{n(A)}{n}$。
- **概率 (Probability)**：若大量重复试验中频率值呈现稳定性，则说明衡量某事件发生可能性大小的指标具有客观存在性，我们就将大量重复试验下事件 A 发生的频率稳定值称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$ 或者 $Prob(A)$。

$$P(A) = Prob(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

概率的频率解释

- **频率 (Frequency)**：在相同条件下可重复实现的试验，对于其样本空间 S 中事件 A，我们定义 $n(A)$ 为 n 次重复试验中事件 A 发生的次数，则事件 A 发生的频率为 $\frac{n(A)}{n}$。
- **概率 (Probability)**：若大量重复试验中频率值呈现稳定性，则说明衡量某事件发生可能性大小的指标具有客观存在性，我们就将大量重复试验下事件 A 发生的频率稳定值称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$ 或者 $Prob(A)$。

$$P(A) = Prob(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

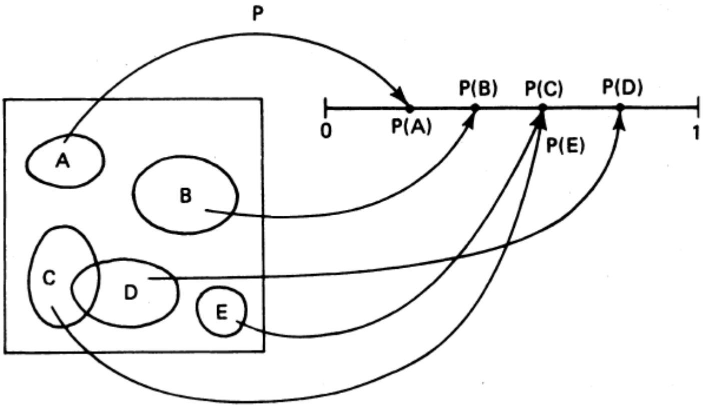
- 但这样的定义有很多问题：
  - $\frac{n(A)}{n}$ 真的会收敛吗？
  - 如何保证每次试验确实会收敛到同一个值呢？

描述概率的三个要素

1933 年，Kolmogorov 提出了概率的公理化定义，克服了之前概率定义的种种局限，成为了概率论发展史上的里程碑。首先描述一个概率需要三个要素：

- S：**样本空间**，描述了样本点和所有的基本事件；
- $\mathcal{F}$：**事件集合**，样本空间某些子集组成的集合，对可数的交并补运算封闭。描述了概率函数的定义域。
  1. $\mathcal{F}=\{\varnothing, S\}$，刻画了非随机的必然现象。$\varnothing$ 代表不可能事件，S 代表必然事件。
  2. $\mathcal{F}=\{\varnothing, A, A^c, S\}$，刻画了只有成功与失败两个可能结果的随机试验。
- $P(\cdot)$：**概率函数**，$P:\mathcal{F}\to[0,1]$，描述了值域和对映原则。
  1. 同一个随机现象，可以用不同的样本空间刻画，例如考试的结果可是 S_1={及格，不及格}，或者 $S_2=\{i|0\leqslant i\leqslant 100\}$，也就应着不同的概率函数。

概率函数



概率的公理化定义

定义

假设一个随机试验有样本空间 S 和事件集合 $\mathcal{F}$，对于样本空间 S 中任一事件 A，都存在一个实数 $P(A)$ 满足下列三个公理：

1. 非负性：$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
2. 规范性：$P(S) = 1$
3. 可列可加性：对于互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots$（即 $A_iA_j = \varnothing$ 当 $i \neq j$），则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

我们就把满足以上 3 条公理的 $P(A)$ 称为事件 A 的**概率（probablity）**。

概率的公理化定义

以下两个例子说明，概率的公理化定义和我们直觉中的概率概念十分吻合。

- 投掷一枚硬币：
  - 如果你认为硬币是公平的，那么 $P(\{H\}) = P(\{H\}) = \frac{1}{2}$
  - 如果你认为硬币正面朝上的概率是反面的两倍，那么 $P(\{H\}) = \frac{2}{3}, P(\{H\}) = \frac{1}{3}$。
- 投掷一枚骰子：
  - 如果你认为骰子六个面出现的可能性都一样，那么 $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
  - 由公理 3 的可列可加性，“偶数朝上”的概率那么 $P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$。

概率的性质

性质 (逆事件的概率)

- $P(A^c) = 1 - P(A)$。
- 特别地，$P(\varnothing) = 0$。

$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \xrightarrow{\text{公理 } 2,3} P(A) = 1 - P(A^c)$。

这个性质说明：一个事件不发生的概率，等于 1 减去它发生的概率。

概率的性质

性质 (逆事件的概率)

- $P(A^c) = 1 - P(A)$。
- 特别地，$P(\varnothing) = 0$。

$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \xrightarrow{\text{公理 2,3}} P(A) = 1 - P(A^c)$。
这个性质说明：一个事件不发生的概率，等于 1 减去它发生的概率。

性质 (有限可加性)

如果 $A_iA_j = \varnothing$ 当 $i \neq j$，那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

let $A_i = \varnothing$ if $i > n$ for Axiom3.

概率的性质

性质 (单调性)

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

$B = S \cap B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup (A^c \cap B)$ 因为，$A \cap (A^c \cap B) = \varnothing$

由公理 1 和公理 3，$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geqslant P(A)$。

概率的性质

性质 (单调性)

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

$B = S \cap B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup (A^c \cap B)$ 因为，$A \cap (A^c \cap B) = \varnothing$
由公理 1 和公理 3，$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geqslant P(A)$。

性质 (可减性)

$P(A - B) = P(A) - P(AB)$。
特别地，如果 $B \subset A$，那么 $P(A - B) = P(A) - P(B)$。

因为 $A = A - (A \cap B) + (A \cap B) = (A - B) \cup AB$，且 $(A - B) \cap (AB) = \varnothing$；所以，$P(A - B) = P(A) - P(AB)$。
如果 $B \subset A$，那么 $AB = B$，$P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(B)$。

概率的性质

性质 (加法公式)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。
  特别地，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$，如果 $AB = \varnothing$。
- $P(A \cup B \cup C) =$
  $P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$。

仅以两个事件的和为例。
因为，$A \cup B = A \cup (B - AB)$，且 $A \cap (B - AB) = \varnothing$；
所以，$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$。
这个性质揭示了，两个事件的交的概率和并的概率的关系。

概率的性质

性质 (加法公式、容斥恒等式（inclusive-exclusive identity）)

一般地，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

性质 (次可加性)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

因为，$A_iA_jA_k \subset A_iA_j$，所以 $-\sum_{i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) < 0$

概率的性质

例

(橘 P10，例 4）已知 $P(\bar{A}) = 0.5, P(\bar{A}B) = 0.2, P(B) = 0.4$，求

1. $P(AB)$;
2. $P(A - B)$;
3. $P(A \cup B)$;
4. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

概率的性质

例

(橘 P10，例 4）已知 $P(\bar{A}) = 0.5, P(\bar{A}B) = 0.2, P(B) = 0.4$，求

1. $P(AB)$;
2. $P(A - B)$;
3. $P(A \cup B)$;
4. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

1. $P(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$, therefore $P(AB) = 0.4 - 0.2 = 0.2$;
2. $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.2 = 0.3$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$;
4. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$.

概率的性质

例

已知 A，B，C 是三个随机事件。$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(C) = 0.6, P(AB) = P(AC) = P(BC) = 0.25, P(ABC) = 0.2$，求

1. 事件 E，“三个事件至少有一个发生”；
2. 事件 F，“三个事件至少有两个发生”；
3. 事件 G，“三个事件恰有一个事件发生”

概率的性质

例

已知 A，B，C 是三个随机事件。$P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(C)=0.6, P(AB)=P(AC)=P(BC)=0.25, P(ABC)=0.2$，求

1. 事件 E，“三个事件至少有一个发生”；
2. 事件 F，“三个事件至少有两个发生”；
3. 事件 G，“三个事件恰有一个事件发生”

1. $P(E)=P(A\cup B\cup C)$，直接运用加法定理，得 0.75;
2. $P(F)=P(AB\cup BC\cup AC)=P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABBC)-P(ABAC)-P(BCAC)+P(ABC)=P(AB)+P(BC)+P(AC)-2P(ABC)=0.75-0.4=0.34;$
3. $P(G)=P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

概率的性质

例

已知 A，B，C 是三个随机事件。$P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(C)=0.6, P(AB)=P(AC)=P(BC)=0.25, P(ABC)=0.2$，求

1. 事件 E，“三个事件至少有一个发生”；
2. 事件 F，“三个事件至少有两个发生”；
3. 事件 G，“三个事件恰有一个事件发生”

$$
\begin{aligned}
P(A\bar{B}\bar{C}) &= P(A\cap(B\cup C)^c) = P(A-(B\cup C)) \\
&= P(A)-P(A\cap(B\cup C)) = P(A)-P(AB\cup AC) \\
&= P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC) \\
&= 0.3-0.25-0.25+0.2=0
\end{aligned}
$$

$$
P(G)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)=0+0.1+0.3=0.4
$$

目录

古典概型

定义 (古典概型)

试验的样本空间 S 为有限集，即 $S=\{1,2,\cdots,N\}$, 且每个事件的概率相等，即

$$P(\{1\})=P(\{2\})=\cdots=P(\{N\})$$

根据公理 2 与公理 3，则

$$P(\{i\})=\frac{1}{N} \qquad i=1,2,\cdots,N$$

根据公理 3，则事件 E 的古典概率为

$$P(E)=\frac{E\text{的样本点个数}}{S\text{的样本点个数}}$$

古典概型

- 古典概型的两个特点:
  1. 随机试验只有有限个可能的结果，样本空间只有有限个样本点;
  2. 每一个结果，即每一个样本点，出现的可能性相等。

古典概型

- 古典概型的两个特点:
  1. 随机试验只有有限个可能的结果，样本空间只有有限个样本点;
  2. 每一个结果，即每一个样本点，出现的可能性相等。
- 以投掷两枚硬币为例，求恰好一正一反的概率。
  1. 投掷两个硬币有 4 个等可能的结果，(H,H),(H,T),(T,H),(T,T);
  2. 符合条件的样本点有 2 个，(H,T),(T,H)，因此概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
  3. 也有人认为样本空间有三个样本点，(两个正面)、(两个反面) 和 (一个一反)，因此概率为 $\frac{1}{3}$。
  4. 请问上述哪个答案正确?

古典概型

- 古典概型的两个特点:
  1. 随机试验只有有限个可能的结果,样本空间只有有限个样本点;
  2. 每一个结果,即每一个样本点,出现的可能性相等。
- 以投掷两枚硬币为例,求恰好一正一反的概率。
  1. 投掷两个硬币有 4 个等可能的结果,(H,H),(H,T),(T,H),(T,T);
  2. 符合条件的样本点有 2 个,(H,T),(T,H),因此概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
  3. 也有人认为样本空间有三个样本点,(两个正面)、(两个反面) 和 (一个一反),因此概率为 $\frac{1}{3}$。
  4. 请问上述哪个答案正确?
- 前者是古典概型的样本空间,后者是 Bernoulli 概型的样本空间。

古典概型

- 以投掷两个骰子为例，求朝上的面数字之和为 7 的概率。

古典概型

- 以投掷两个骰子为例，求朝上的面数字之和为 7 的概率。
  1. 样本空间包括如下样本点:2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12，共 11 个。;
  2. 符合条件的样本点有 1 个，7;
  3. 因此，相应的概率为 $\frac{1}{11}$.

古典概型

- 以投掷两个骰子为例，求朝上的面数字之和为 7 的概率。
  1. 样本空间包括如下样本点:2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12，共 11 个。;
  2. 符合条件的样本点有 1 个，7;
  3. 因此，相应的概率为 $\frac{1}{11}$.
- 另一种想法认为
  1. 样本空间包括如下样本点 (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), (3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)，共 21 个;
  2. 符合条件的样本点有 3 个，(1,6),(2,5),(3,4);
  3. 因此，相应的概率为 $\frac{3}{21}$.

古典概型

- 以投掷两个骰子为例，求朝上的面数字之和为 7 的概率。
  1. 样本空间包括如下样本点:2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12，共 11 个。;
  2. 符合条件的样本点有 1 个，7;
  3. 因此，相应的概率为 $\frac{1}{11}$.
- 另一种想法认为
  1. 样本空间包括如下样本点 (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), (3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)，共 21 个;
  2. 符合条件的样本点有 3 个，(1,6),(2,5),(3,4);
  3. 因此，相应的概率为 $\frac{3}{21}$.
- 另一种想法认为
  1. 投掷两个骰子有 36 个等可能的结果;
  2. 符合条件的样本点有 6 个，(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1);
  3. 因此，相应的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

公平的抽签游戏

例

箱子里有 1 个红球和 b 个黑球，现在有 b+1 个小朋友依次来抽球，求 $R_k = \{$第 k 个小朋友抽到红球$\}$ 的概率。

公平的抽签游戏

例

箱子里有 1 个红球和 b 个黑球，现在有 b+1 个小朋友依次来抽球，求 $R_k = \{$第 k 个小朋友抽到红球$\}$ 的概率。

- 如果你认为球有差别，相当于现将 b+1 个球排列，共有 (b+1)!。再将红球放到第 k 个位置，有 1 种放法。再将其余 b 个球排列在其他的位置上，有 b！ 种放法。
- 结果为 $\dfrac{1 \times b!}{(b+1)!} = \dfrac{1}{b+1}$.
- 如果你认为球无差异，相当于在 b+1 个位置中选择哪一个放红球，$P(R_k) = \dfrac{1}{b+1}$;

公平的抽签游戏

例

箱子里有 r 个红球和 b 个黑球，现在有 b+r 个小朋友依次来抽球，$R_k = \{$第 k 个小朋友抽到红球$\}$，则 $P(R_k) = \dfrac{r}{r+b}$。

- 认为球有差异与无差异均可，只要按照排列或组合正确计算，结果都是一样的。
- 结果与抽球顺序 k 无关，先抽后抽结果都一样，结果仅与球的构成结构有关。
- 球之间没有差异，抽签的顺序没有差异，所以这是一个“公平的抽签游戏”。

公平的抽签游戏

例

一个碗里有 6 个白球和 5 个黑球，从中随机取出 3 个球，问恰好 1 白 2 黑的概率。

公平的抽签游戏

例

一个碗里有 6 个白球和 5 个黑球，从中随机取出 3 个球，问恰好 1 白 2 黑的概率。

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{C_6^1 C_5^2}{C_{11}^3} = \frac{4}{11}$$

公平的抽签游戏

例

一个碗里有 6 个白球和 5 个黑球，从中随机取出 3 个球，问恰好 1 白 2 黑的概率。

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{C_6^1 C_5^2}{C_{11}^3} = \frac{4}{11}$$

例

从 6 男 9 女中随机选出 5 人组成委员会，问该委员会由 3 男 2 女组成的概率。

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{C_6^3 C_9^2}{C_{15}^5} = \frac{240}{1001}$$

公平的抽签游戏

例

箱子里有 n 个球，其中一个做了标记，从中取出 k 个球，问取出被标记的球的概率。

公平的抽签游戏

例

箱子里有 n 个球，其中一个做了标记，从中取出 k 个球，问取出被标记的球的概率。

- $$P(\text{选中被标记的球}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$
- 如果认为是有顺序的选球，A_i 表示被标记的球在第 i 次被取出，$i = 1, 2, 3, \cdots, k$,
- 球在每一次被抽出的可能性一样，所以 $P(A_i) = \frac{1}{n}$, 这些事件互斥
- $$P(\text{选中被标记的球}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}$$

抽样检验

例 (不放回抽样)

一个碗里有 r 红球和 b 个黑球，从中“不放回地”随机取出 n 个球，问取出的 n 个球恰好 k 红 $(n\text{-}k)$ 黑的概率。

抽样检验

例 (不放回抽样)

一个碗里有 r 红球和 b 个黑球，从中“不放回地”随机取出 n 个球，问取出的 n 个球恰好 k 红 (n-k) 黑的概率。

$$\frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$$

抽样检验

例 (有放回抽样)

一个碗里有 r 个红球和 b 个黑球，从中“有放回地”随机取出 n 个球，问取出的 n 个球恰好 k 红 $(n-k)$ 黑的概率。

抽样检验

例 (有放回抽样)

一个碗里有 r 个红球和 b 个黑球，从中“有放回地”随机取出 n 个球，问取出的 n 个球恰好 k 红 (n-k) 黑的概率。

- 样本点是一个列表 $(r+b)^n$；
- 解决这个问题分三步走：1. 在这个列表的 n 个位置中选 k 个放红球，即 $\binom{n}{k}$；2. 把 r 个红球中有重复地放到这 k 个位置，即 r^k；3. 让黑球在 (n-k) 个位置重复上述操作，即 b^{n-k}；
- $$\frac{\binom{n}{k}\times r^k\times b^{n-k}}{(r+b)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{r}{r+b}\right)^k\left(\frac{b}{r+b}\right)^{n-k}$$
- 下一章我们会了解，不放回和有放回分别对应着“超几何分布”和“二项分布”。

总结

(1) 箱子里有 1 个球有奖，抽 1 个球。

球的总数 (分母)	有奖的个数 (分子)	中奖率 (P)	不中奖率 (1-P)
10	1	1/10	9/10
10	2	2/10	8/10
10	3	3/10	7/10
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	10	10/10	0/10
n	k	$\frac{k}{n}$	$\frac{n-k}{n}$
r+b	r	$\frac{r}{r+b}$	$\frac{b}{r+b}$

结果只与球的比例解构有关。

总结

（2）箱子里有 1 个球有奖，一次性抽多个球。

球的总数	抽球个数	中奖率 (P)
10	1	1/10
10	2	$\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{10}$
10	3	$\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

总结

(3) 箱子里有 N+M 个球，N 个球有奖，抽 n+m 个球，其中 n 个有奖。

	球的总数	有奖的球	没奖的球
所有的球	N+M	N	M
抽出的球	n+m	n	m

$$\frac{\binom{N}{n}\binom{M}{m}}{\binom{N+M}{n+m}}$$

一次性抽多个球，相当于“不放回”地依次抽球。即 P255 的超几何分布。
例如，教材 P17,1、2、5、9、10

总结

（4）多次抽球 n 次，每次都能中奖，即中奖 n 次

球的总数	有奖个数	单次中奖率	抽奖次数	总中奖率
10	1	1/10	1	$\frac{1}{10}$
10	1	1/10	2	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	1	1/10	n	$\left(\frac{1}{10}\right)^n$
10	k	k/10	n	$\left(\frac{k}{10}\right)^n$
r+b	r	r/(r+b)	n	$\left(\frac{r}{r+b}\right)^n$

总结

(5) 多次抽球 n+m 次，前 n 次都能中奖，后面 m 次都没中奖。

球的总数	有奖个数	单次中奖率	抽奖次数	总中奖率
10	k	k/10	n+m	$\left(\frac{k}{10}\right)^n \times \left(\frac{10-k}{10}\right)^m$
r+b	r	r/(r+b)	n+m	$\left(\frac{r}{r+b}\right)^n \times \left(\frac{b}{r+b}\right)^m$

总结

(6) 多次抽球 n+m 次，其中任意 n 次中奖，m 次没中奖。

球的总数	单次中奖率	抽奖次数	总中奖率
r+b	r/(r+b)	n+m	$\binom{n+m}{n}\left(\frac{r}{r+b}\right)^n \times \left(\frac{b}{r+b}\right)^m$

这种抽球方法是“有放回”抽球，有放回导致每次抽球的奖池都一样，样本空间相同，每次抽球互不影响，相当于多次重复。即 P255 的二项分布。

如课后的第 5 题。

占位问题

例（（橘 P12，例 2，蓝 P26,11））

将 3 个不同的球放到 4 个不同的篮子，问篮子中球的个数最多为 1,2,3 的概率，分别用 A,B,C 代表这三个事件。

占位问题

例（（橘 P12，例 2，蓝 P26,11））

将 3 个不同的球放到 4 个不同的篮子，问篮子中球的个数最多为 1,2,3 的概率，分别用 A,B,C 代表这三个事件。

1. $P(A)=\binom{4}{3}\frac{3!}{4^3}=\frac{3}{8}$;
2. C 将所有的球放到同一个篮子，有四种放法，$P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$;
3. 因为 $A\cup B\cup C=S$，且 A,B,C 彼此互斥，所有 $P(B)=1-P(A)-P(C)=\frac{9}{16}$;
4. 如果正算，$P(B)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}3}{4^3}=\frac{9}{16}$。

占位问题

例

将 r 个不同的球放到 n 个不同的篮子，$r \leqslant n$，求以下事件的概率：

1. A: 指定 r 个篮子恰好各有一个球；
2. B: 每个篮子至多一个球；
3. C: 某指定的篮子恰有 m 个球。

占位问题

例

将 r 个不同的球放到 n 个不同的篮子，$r \leqslant n$，求以下事件的概率：

1. A: 指定 r 个篮子恰好各有一个球；
2. B: 每个篮子至多一个球；
3. C: 某指定的篮子恰有 m 个球。

1. $P(A) = \dfrac{r!}{n^r}$
2. 相较于 A，事件 B 多了一步，也就是先选出 r 个篮子，即 $P(B) = \binom{n}{r}\dfrac{r!}{n^r}$；
3. 先从 r 个球选 m 个放到篮子里，再把剩下 r-m 个球任意安置在 n-1 个篮子中，即 $P(C) = \binom{r}{m}\dfrac{(n-1)^{r-m}}{n^r}$。

生日问题（一种占位问题）

例

房间里面有 n 个人，问所有人生日均不是同一天的概率。n 多大时，此概率小于 $\frac{1}{2}$。假设一年仅有 365 天。

生日问题（一种占位问题）

例

房间里面有 n 个人，问所有人生日均不是同一天的概率。n 多大时，此概率小于 $\frac{1}{2}$。假设一年仅有 365 天。

- n 个人生日共有 365^n 种可能。
- 每个人生日均不同，相同于将 365 个元素放到 n 个位置的排列，有 $(365)(364)(363)\cdots(365-n+1)$ 种可能。
- 实际上，一旦 $n \geqslant 23$，则 $\dfrac{(365)(364)(363)\cdots(365-n+1)}{365^n} < \dfrac{1}{2}$；
- 一旦人数达到 50，这一概率大概为 97%。

分房问题

例 (蓝 P14，例 7)

现将 15 名新生平均分到 3 个班，其中 3 名优秀生，问

1. 每班 1 名优秀生;
2. 3 名优秀生在同一班。

分房问题

例 (蓝 P14，例 7)

现将 15 名新生平均分到 3 个班，其中 3 名优秀生，问

1. 每班 1 名优秀生;
2. 3 名优秀生在同一班。

- 将 15 个人划分到有差异的 3 个不同的班，有 $\binom{15}{5,5,5} = \frac{15!}{(5!)^3}$ 种分法;
- 三个班各 1 名优秀生有 3! 种分法，再将其余 12 人分到三个班。即，$3! \times \binom{12}{4,4,4}$
- 3 名优秀生在同一班有 3 种分法，再将其余 12 人分到三个班。即，$3 \times \binom{12}{2,5,5}$
- 带入公式得 25/91 与 6/91。

分房问题

例

现为 20 男 20 女安排住宿，两人一间，问男女不混住的概率。

分房问题

例

现为 20 男 20 女安排住宿，两人一间，问男女不混住的概率。

- 将 40 个人划分到有差异的 20 个房间，有 $\binom{40}{2,2,\cdots,2}=\dfrac{40!}{(2!)^{20}}$ 种分法;
- 实际上房间是无差异，谁住在哪个房间都没有分别。20 个房间有 20! 排序，也就是重复计算了 20! 次，即 $\dfrac{40!}{(2!)^{20}(20!)}$;
- 男女不混住，先把 20 个男的划分到 10 个房间，再把 20 个女的划分到 10 个房间，结果为:
- $$\left(\frac{20!}{(2!)^{10}(10!)}\right)^2 \Big/ \frac{40!}{(2!)^{20}(20!)}$$

配对问题

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

配对问题

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

- 从 20 个人中选择 5 个人组成委员会，为 $\binom{20}{5}$；
- 从 10 对夫妇中选 5 对，为 $\binom{10}{5}$，每一对再选出夫妇一个，因此合计为 $\binom{10}{5} \times 2^5$；
- 结果为 $\dfrac{\binom{10}{5} \times 2^5}{\binom{20}{5}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 2^5/5!}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16/5!}$.

配对问题

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

- 从 20 个人中选择 5 个人组成委员会，为 $\binom{20}{5}$；
- 从 10 对夫妇中选 5 对，为 $\binom{10}{5}$，每一对再选出夫妇一个，因此合计为 $\binom{10}{5}\times 2^5$；
- 结果为 $\dfrac{\binom{10}{5}\times 2^5}{\binom{20}{5}} = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 2^5/5!}{20\times 19\times 18\times 17\times 16/5!}$.
- 我们也可以按照顺序选择的思维。共有 $20\times 19\times 18\times 17\times 16$ 个结果。符合条件的有 $20\times 18\times 16\times 14\times 12$ 个结果。
- 结果为 $\dfrac{20\times 18\times 16\times 14\times 12/5!}{20\times 19\times 18\times 17\times 16/5!} = \dfrac{20\times 18\times 16\times 14\times 12}{20\times 19\times 18\times 17\times 16}$

配对问题

例

房间里 N 个人参加舞会，所有人把帽子都抛向空中，并混在一起落地，然后所有人再随机拿一顶帽子，问所有人都没有拿到自己原有帽子的概率。

配对问题

例

房间里 N 个人参加舞会，所有人把帽子都抛向空中，并混在一起落地，然后所有人再随机拿一顶帽子，问所有人都没有拿到自己原有帽子的概率。

- E_i 表示第 i 个人拿到自己的帽子；
- 给帽子编号，第 i 个人的帽子为 i 号帽子。向量 $(1, 2, 3, \cdots, N)$ 表示每个人都拿到自己的帽子，第 i 个分量表示第 i 个人拿到的帽子编号。
- 假设有 n 个人 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 拿到自己的帽子，剩下 N-n 个人有 $(N-n)!$ 种选法。
- 从 N 个人中选出这 n 个拿到自己帽子的的人，有 $\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$。
- 所以 $\sum P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \frac{N!}{(N-n)!n!} \times \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{n!}$.

配对问题

例

房间里 N 个人参加舞会，所有人把帽子都抛向空中，并混在一起落地，然后所有人再随机拿一顶帽子，问所有人都没有拿到自己原有帽子的概率。

- 根据加法定理

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

- 结果为

$$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{N}\frac{1}{N!}$$

- 当 N 足够大，结果约为 $e^{-1} \approx 0.3678$

配对问题

例

十对夫妇坐一圈，没有一对夫妇坐一起的概率。

- 将 20 个人安排到 20 个位置，有 20! 种选法，但是每种选法在旋转后没有差别，可以旋转 20 次，即共有 19! 种选法。
- 依旧选特定 n 对夫妇坐一起，即将每对夫妇绑定，剩下 20-n 个对象排座次，有 (20-n-1)! 种排法。
- 夫妇内部又有男左女右和男右女左问题，即共有 $2^n(19-n)!$ 种选法。
- 随后如上例根据加法定理计算。结果约为 0.3395。

扑克游戏

B 站-诈欺游戏-17 张扑克

扑克游戏

例

某人手里有五张扑克牌，这 5 张牌数字是连续的，但又不全是同一花色，我们就称之为“顺子 (Straight)”。问这个人从一副 52 张的扑克牌中恰好摸到一手顺子的概率。

- 从 52 张牌中选 5 张，共有 $\binom{52}{5}$ 种选法。
- 以“A,2,3,4,5”为例，每一个张牌均有 4 种花色，共 4^5 种可能，其中 4 种可能花色完全相同，即 4^5-4 种可能；
- 从“A,2,3,4,5”到“10,J,Q,K,A”共有 10 种不同的顺子，各有 4^5-4 种可能，结果为
- $$\frac{10\times(4^5-4)}{\binom{52}{5}}\approx .0039$$

扑克游戏

例

某人手里有五张扑克牌，其中 3 张点数一样，另 2 张点数也一样，我们就称之为“葫芦 (full house)”，即“三张加一对”。问这个人恰好摸到一手福尔豪斯的概率。

- 从 52 张牌中选 5 张，共有 $\binom{52}{5}$ 种选法。
- 先选一种花色构成“三张”，有 13 种选法，再选一个花色构成“一对”，有 12 种选法；
- 每种花色有四张牌，其中“三张”和“一对”要分别从中选 3 张和 2 张，即 $\binom{4}{3}\binom{4}{2}$，结果为
- $$\frac{13\times 12\times \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0.0014$$

扑克游戏

例

我们继续打扑克。现在四个人打比赛，将 52 张牌分给 4 位选手，

1. 问其中一个人拿到 13 张黑桃 (spades) 的概率;
2. 再问每人各都拿到一张 A(ace) 的概率。

扑克游戏

例

我们继续打扑克。现在四个人打比赛，将 52 张牌分给 4 位选手，

1. 问其中一个人拿到 13 张黑桃 (spades) 的概率;
2. 再问每人各都拿到一张 A(ace) 的概率。

- 某个人拿到所有的黑桃的概率为 $1/C_{53}^{13}$;
- 四个人各自拿到所有黑桃，这四个事件彼此互斥，所以答案为 $4/C_{53}^{13} = 6.3 \times 10^{-12}$.

扑克游戏

例

我们继续打扑克。现在四个人打比赛，将 52 张牌分给 4 位选手，

1. 问其中一个人拿到 13 张黑桃 (spades) 的概率;
2. 再问每人各都拿到一张 A(ace) 的概率。

- 某个人拿到所有的黑桃的概率为 $1/C_{53}^{13}$;
- 四个人各自拿到所有黑桃，这四个事件彼此互斥，所以答案为 $4/C_{53}^{13} = 6.3 \times 10^{-12}$.
- 4 个“A”各不相同，四个人也各不相同，有 4! 种分法;
- 再分剩下 48 张，分法为 $\binom{48}{12,12,12,12} = \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$ 种;
- $\dfrac{4! \times \binom{48}{12,12,12,12}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 0.1055$

扑克游戏

例

将扣在桌子上的 52 张牌依次翻开，直到出现一张 A 为止，比较接下来翻开的牌是黑桃 A 和梅花 2 的概率。

扑克游戏

例

将扣在桌子上的 52 张牌依次翻开，直到出现一张 A 为止，比较接下来翻开的牌是黑桃 A 和梅花 2 的概率。

- 将 52 张牌排好，有 52! 种排法。
- 将黑桃 A 之外的 51 张排好，有 51！种排法。再把黑桃 A 放到每种结果第一张 A 的后面，只有 1 种放法。结果为
- $$\frac{51!}{52!}=\frac{1}{52}$$
- 同理，对于梅花 2 的概率也是 $1/52$。

谢谢！