第一章 随机事件及其概率（下）

Chapter 1 Random Events and Probability II

张昕

西南民族大学 经济学院

2023 年 3 月 30 日

目录

你在做选择题，不确定正确答案是哪一个，于是

答案	A	B	C	D
概率	1/4	1/4	1/4	1/4

现在你看了书后面的答案，答案说 A 是正确选项，于是

答案	A	B	C	D
概率	1	0	0	0

1. 拥有更多的信息，就更接近真相；
2. 拥有更多的信息，不符合条件的选项被排除，概率更新为 0；
3. 拥有更多的信息，概率的样本空间就发生了变化。

例

考察老师家中两个小朋友的性别，样本空间 $S=\{bb, bg, gb, gg\}$，其中 bg 代表大的孩子为男孩、小的是女孩，其他类似。求以下概率

1. 家中至少一个女孩；
2. 今天你看到老师带着男孩逛街，家中至少有一个女孩；
3. 家中有一男一女两个孩子，和上述事件有什么关系？

1. $A=\{$家中至少一个女孩$\}$，$P(A)=\dfrac{3}{4}$；
2. $B=\{$家中至少一个男孩$\}$，当 B 发生时，样本空间变成 $S_B=\{bb, bg, gb\}$，此时 $P(A)=\dfrac{2}{3}$。我们将由于 B 发生后形成的新样本空间中 A 发生的概率记作 $P(A|B)=\dfrac{2}{3}$。
3. $AB=\{$家中一男一女两个孩子$\}$，$P(AB)=\dfrac{2}{4}$。

   $$P(A|B)=\frac{2/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(B)}。$$

条件概率

定义 (条件概率 (conditional Probability))

If $P(B) > 0$,then

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

定理

条件概率 $P(\cdot|B)$ 也是概率，也满足概率三公理。

1. 非负性：$0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. 完备性：$P(S|B) = 1$
3. 可列可加性：对于互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots$（即 $A_iA_j = \varnothing$ 当 $i \neq j$），则

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

条件概率

- $P(A|B)$ 称为“已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的**条件概率**”；
- 条件概率也是概率，所以 $P(\cdot)$ 的性质对 $P(\cdot|B)$ 同样适用；
- $P(B)>0$ 在形式上保证了分母不为 0，可以理解为没必要以不会发生的 0 概率事件作为讨论的前提。

条件概率

例

我的钥匙找不到了，但是我有八成的把握我的钥匙在我外衣的衣兜里，我又确信有一半的概率在左衣兜，有另一半的概率在右衣兜。现在我去摸摸了我外衣的左衣兜却没发现钥匙，问钥匙在右衣兜的条件概率。

$$
\begin{aligned}
P(R|L^c) &= \frac{P(RL^c)}{P(L^c)} = \frac{P(R)}{1-P(L)} \\
&= \frac{0.4}{1-0.4} \\
&= 2/3
\end{aligned}
$$

“公式法”和“压缩样本空间法”的比较

例

投掷一枚硬币两次，问以下条件下两枚硬币都朝上的概率。

1. 第一次正面朝上
2. 至少一次正面朝上

1. 样本空间 S={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}，事件“两枚硬币都朝上”记作 A={(H,H)}，事件“第一枚朝上”记作 B={(H,H),(H,T)} 事件“至少一枚朝上”记作 C={(H,H),(H,T),(T,H)}。

“公式法”和“压缩样本空间法”的比较

例

投掷一枚硬币两次，问以下条件下两枚硬币都朝上的概率。

1. 第一次正面朝上
2. 至少一次正面朝上

1. 样本空间 S={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}，事件“两枚硬币都朝上”记作 A={(H,H)}，事件“第一枚朝上”记作 B={(H,H),(H,T)} 事件“至少一枚朝上”记作 C={(H,H),(H,T),(T,H)}。
2. $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(\{(H,H)\})}{P(\{(H,H),(H,T)\})}=\dfrac{1/4}{2/4}=1/2;$
3. $P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{P(\{(H,H)\})}{P(\{(H,H),(H,T),(T,H)\})}=\dfrac{1/4}{3/4}=1/3$。

条件概率

例 (橘 P20，例 2)

3 红 2 白共 5 个球，不放回抽 2 个，已知第一次抽到红球，问第二次抽到白球。

A 表示“第一次取到红球”，B 表示“第二次取到白球”，
那么 AB 就表示“第一次取到红球且第二次取到白球”。

条件概率

例 (橘 P20，例 2)

3 红 2 白共 5 个球，不放回抽 2 个，已知第一次抽到红球，问第二次抽到白球。

A 表示“第一次取到红球”，B 表示“第二次取到白球”，
那么 AB 就表示“第一次取到红球且第二次取到白球”。

$$\because P(AB) = \frac{3\times 2}{5\times 4} = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = \frac{3\times 4}{5\times 4} = \frac{6}{10}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

条件概率

例 (橘 P20，例 2)

3 红 2 白共 5 个球，不放回抽 2 个，已知第一次抽到红球，问第二次抽到白球的概率。

条件概率会将不符合条件的“错误答案”排除，在新的样本空间重新计算概率，这种思路被称为“**压缩样本空间**”。

条件概率

例 (橘 P20，例 2)

3 红 2 白共 5 个球，不放回抽 2 个，已知第一次抽到红球，问第二次抽到白球的概率。

条件概率会将不符合条件的“错误答案”排除，在新的样本空间重新计算概率，这种思路被称为“**压缩样本空间**”。

- 先计算，第一次抽到红球有几种可能。即 3×4 种。
- 再计算其中符合条件的有几种，即第一次抽到红球后第二次抽到白球，即 3×2 种。
- 根据古典概型

$$P(B|A) = \frac{\text{第一次抽到红球后第二次抽到白球}}{\text{第一次抽到红球后第二次无所谓}} = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{3 \times 2}{3 \times 4} = \frac{1}{2}$$

条件概率

例 (橘 P20，例 1)

3 黑 7 白共 10 个球，不放回地抽两个球，记 A 为第一次摸到黑球，B 为第二次摸到黑球，问

1. 已知第一次摸到黑球，第二次又摸到黑球；
2. 已知第二次摸到黑球，第一次也摸到黑球；
3. 两者相等吗？为什么？

条件概率

例 (橘 P20，例 1)

3 黑 7 白共 10 个球，不放回地抽两个球，记 A 为第一次摸到黑球，B 为第二次摸到黑球，问

1. 已知第一次摸到黑球，第二次又摸到黑球；
2. 已知第二次摸到黑球，第一次也摸到黑球；
3. 两者相等吗？为什么？

$$\because P(AB)=\frac{3\times 2}{10\times 9}, P(A)=\frac{3}{10}$$

$$P(B)=\frac{3}{10}\text{(因为公平的抽签游戏和次序无关)}$$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{9};\quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{9}$$

目录

条件概率与乘法公式

例

你要选课了，选我的课得 A 的概率是 1/2，选别的老师的课则得 A 的概率是 2/3。你犹豫不决，决定投个硬币来决定选谁的课。问你选了我的课并且得了 A 的概率。

- A：“成绩得 A”，B：“选我的课”，AB：“选我的课且得 A”。
- $P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

条件概率与乘法公式

例

你要选课了，选我的课得 A 的概率是 1/2，选别的老师的课则得 A 的概率是 2/3。你犹豫不决，决定投个硬币来决定选谁的课。问你选了我的课并且得了 A 的概率。

- A：“成绩得 A”，B：“选我的课”，AB：“选我的课且得 A”。
- $P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

例

8 红 4 白共 12 个球，无放回地取出两个球。问两个球都是红球的概率。A_i 表示第 i 次取到红球。

条件概率与乘法公式

例

你要选课了，选我的课得 A 的概率是 1/2，选别的老师的课则得 A 的概率是 2/3。你犹豫不决，决定投个硬币来决定选谁的课。问你选了我的课并且得了 A 的概率。

- A：“成绩得 A”，B：“选我的课”，AB：“选我的课且得 A”。
- $P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

例

8 红 4 白共 12 个球，无放回地取出两个球。问两个球都是红球的概率。A_i 表示第 i 次取到红球。

- $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$

回答了“不放回地抽 2 个球”和“一次性抽 2 个球”是一回事的原因。

乘法公式

定理 (乘法公式 (The multiplication rule))

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1\cdots A_n)}{P(A_1\cdots A_{n-1})} = P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$$

乘法公式

例 (橘 P21，例 4；同理蓝 P17，例 4)

100 个灯泡，其中 10 个是次品。不放回取 3 个，问第三次才抽到正品。A_i 代表第 i 次抽到正品。

乘法公式

例 (橘 P21，例 4；同理蓝 P17，例 4)

100 个灯泡，其中 10 个是次品。不放回取 3 个，问第三次才抽到正品。A_i 代表第 i 次抽到正品。

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) &= P(\bar{A}_1) \times \frac{P(\bar{A}_1\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_1)} \times \frac{P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)}{P(\bar{A}_1\bar{A}_2)} \\
&= P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \times P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) \\
&= \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} \times \frac{90}{98} \\
&\approx 0.0083
\end{aligned}
$$

乘法公式

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

乘法公式

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

$$\frac{20}{20} \times \frac{18}{19} \times \frac{16}{18} \times \frac{14}{17} \times \frac{12}{16}$$

乘法公式

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

$$\frac{20}{20} \times \frac{18}{19} \times \frac{16}{18} \times \frac{14}{17} \times \frac{12}{16}$$

例

现将 15 名新生平均分到 3 个班，其中 3 名优秀生，问每班 1 名优秀生的概率。

乘法公式

例

在 10 对夫妇中随机选出 5 人，问 5 人中一对夫妇都没有的概率。

$$\frac{20}{20}\times\frac{18}{19}\times\frac{16}{18}\times\frac{14}{17}\times\frac{12}{16}$$

例

现将 15 名新生平均分到 3 个班，其中 3 名优秀生，问每班 1 名优秀生的概率。

$$1\times\frac{10}{14}\times\frac{5}{13}=\frac{25}{91}$$

乘法公式

例

把 52 张牌随机分成 4 堆，每堆 13 张，问每堆都恰好有一张 A 的概率。

A_1={♠A 放在任意一堆}
A_2={♠A 和 ♡A 在不同堆}
A_3={♠A、♡A 和 ♢A 在不同堆}
A_4={♠A、♡A、♢A 和 ♣A 在不同堆}

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2A_3A_4) &= P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\frac{P(A_1A_2A_3A_4)}{P(A_1A_2A_3)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3) \\
&= 1\times\frac{52-13}{51}\times\frac{52-26}{50}\times\frac{13}{49} \\
&\approx 0.105
\end{aligned}
$$

乘法公式

例 (罐子问题；蓝 P17，例 3)

袋子中有 r 红 t 白球，每次取一个观察颜色并放回，再放入 a 个与那只球同色的球，若连续取 4 次。求第一、二次为红球，且三、四次是白球的概率

A_i 代表第 i 次取到红球。

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) &= P(A_1) \times \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1A_2\bar{A}_3)}{P(A_1A_2)} \frac{P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)}{P(A_1A_2\bar{A}_3)} \\
&= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(\bar{A}_3|A_1A_2) \times P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3) \\
&= \frac{r}{r+t} \times \frac{r+a}{r+t+a} \times \frac{t}{r+t+2a} \times \frac{t+a}{r+t+3a}
\end{aligned}
$$

乘法公式

例 (罐子问题；蓝 P17，例 3)

袋子中有 r 红 t 白球，每次取一个观察颜色并放回，再放入 a 个与那只球同色的球，若连续取 4 次。求第一、二次为红球，且三、四次是白球的概率

- 当 $a=-1$，这种情况为**不放回抽样**，因为抽一次就少一个。
- 当 $a=0$，这种情况为**放回抽样**，因为的总数不变。我们已经知道，此时每次抽球的概率不会改变。
- 当 $a>0$, 这种情况为**传染病模型**, 增加同色球，就相当于传染了一个新的病人。

目录

全概率公式

定理 (全概率公式)

$$\because E = E \cap S = E \cap (F \cup F^c) = EF \cup EF^c$$
$$\therefore P(E) = P(EF) + P(EF^c)$$
$$= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$

- 可以理解为事件 E 在 F 发生的条件下和 F 不发生的条件下的加权平均概率。
- $P(E|F) \leqslant P(E) \leqslant P(E|F^c)$ 或 $P(E|F^c) \leqslant P(E) \leqslant P(E|F)$ 必有一个成立。

全概率公式

定理 (全概率公式 (the law of total Probability))

假设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是一组可以构成样本空间的彼此互斥的事件，也就是必定恰有一个事件会发生，这样的事件也被称为完备事件组。那么可以把事件 E 写成一组互斥事件 EF_i 的和事件

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i$$

所以我们有全概率公式

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)$$

全概率公式和贝叶斯公式

例

- (a) 保险公司把客户分成两类，一类为容易出事故者，另一类为安全者。第一类一年内出事故的概率为 0.4，而另一类为 0.2。假如全部人口中容易出事故者占 30%。现在有一新客户来购买保险，问这个人在购买保险后一年内出事故的概率为多少。
- (b) 假如一个投保人在购买保险后的一年内出了事故，问他是容易出事故者的概率。

- (a) A 表示“容易出事故者”，A_1 表示“1 年内出事故”。
$P(A_1) = P(A_1|A)P(A) + (A_1|A^c)P(A^c) = 0.4 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.26$
- (b)
$$P(A|A_1) = \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} = \frac{0.3 \times 0.4}{0.26} = \frac{6}{13}$$

贝叶斯公式

- $P(A_1)$ 是“某人第 1 年出事故”的概率，是两种极端情况的加权平均：“易出事故者出事故”的概率和“安全者者出事故”的概率。
- **贝叶斯公式**表面上看，就是这两种极端情况，占 $P(A_1)$ 的比例。如果有多重情况，就是贝叶斯公式的一般情况：

定理 (贝叶斯公式 (Bayes's formula))

两种分类：

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}$$

一般情况：

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

全概率公式和贝叶斯公式

例

我有三种电池，第一种连续使用超过 100 小时的概率达到了 0.7，另两种分别是 0.4 和 0.3。已知箱子里三种电池的占比是 2:3:5。

1. 我随机拿了一个电池，问使用时长超过 100 小时的概率。
2. 现在我随便拿的电池的使用时长已经超过 100 小时了，那么他是第 i 种电池的概率。

A 代表使用时长超过 100 小时，F_i 表示挑出第 i 种电池。

全概率公式和贝叶斯公式

例

我有三种电池，第一种连续使用超过 100 小时的概率达到了 0.7，另两种分别是 0.4 和 0.3。已知箱子里三种电池的占比是 2:3:5。

1. 我随机拿了一个电池，问使用时长超过 100 小时的概率。
2. 现在我随便拿的电池的使用时长已经超过 100 小时了，那么他是第 i 种电池的概率。

A 代表使用时长超过 100 小时，F_i 表示挑出第 i 种电池。

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) \\
&= .7 \times .2 + .4 \times .3 + .3 \times .5 = .41
\end{aligned}
$$

贝叶斯公式

例

我有三种电池，第一种连续使用超过 100 小时的概率达到了 0.7，另两种分别是 0.4 和 0.3。已知箱子里三种电池的占比是 2:3:5。

1. 我随机拿了一个电池，问使用时长超过 100 小时的概率。
2. 现在我随便拿的电池的使用时长已经超过 100 小时了，那么他是第 i 种电池的概率。

A 代表使用时长超过 100 小时，F_i 表示挑出第 i 种手电。

贝叶斯公式

例

我有三种电池，第一种连续使用超过 100 小时的概率达到了 0.7，另两种分别是 0.4 和 0.3。已知箱子里三种电池的占比是 2:3:5。

1. 我随机拿了一个电池，问使用时长超过 100 小时的概率。
2. 现在我随便拿的电池的使用时长已经超过 100 小时了，那么他是第 i 种电池的概率。

A 代表使用时长超过 100 小时，F_i 表示挑出第 i 种手电。

$$P(F_i|A) = P(AF_i)/P(A) = P(A|F_i)P(F_i)/0.41$$
$$P(F_1|A) = .7 \times .2/0.41 = 14/41$$
$$P(F_2|A) = .4 \times .3/0.41 = 12/41$$
$$P(F_3|A) = .3 \times .5/0.41 = 15/41$$

公平的抽签游戏

例

箱子里有 1 个红球和 b 个黑球，现在有 b+1 个小朋友依次来抽球，求 $R_k = \{$第 k 个小朋友抽到红球$\}$ 的概率。

现在我们又回到了最初的起点。以第二个小朋友为例，后面同理。

- 第一个小朋友中奖的概率为 $P(R_1) = \frac{1}{b+1}$
- 利用乘法公式，第二个小朋友中奖的概率为
  $P(R_2) = P(R_1^c)P(R_2|R_1^c) = \frac{b}{b+1} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b+1}$
- 利用全概率公式，第二个小朋友中奖可以分成两种情况，第一个小朋友中奖和第一个小朋友没中奖，最后的概率为两者的加权平均。

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1)P(R_2|R_1) + P(R_1^c)P(R_2|R_1^c) \\ &= \frac{1}{b+1} \times 0 + \frac{b}{b+1} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} \end{aligned}$$

全概率公式和贝叶斯公式

例

你做选择题，你的策略是，如果会就直接答，如果不会就猜一个。现在你知道正确答案的概率是 p，猜中的概率是 $1/m$。我判卷的时候发现你把这道题做对了，我就想知道你真正会做这道题的概率。

全概率公式和贝叶斯公式

例

你做选择题，你的策略是，如果会就直接答，如果不会就猜一个。现在你知道正确答案的概率是 p，猜中的概率是 1/m。我判卷的时候发现你把这道题做对了，我就想知道你真正会做这道题的概率。

C 表示“这道题做对（Correct)”，K 表示“你会这道题（Know)”。

$$
\begin{aligned}
P(K|C) &= \frac{P(KC)}{P(C)} \\
&= \frac{P(K)P(C|K)}{P(K)P(C|K)+P(K^c)P(C|K^c)} \\
&= \frac{p}{p+(1/m)(1-p)} \\
&= \frac{mp}{1+(m-1)p}
\end{aligned}
$$

全概率公式

例

一种血液化验的新方法，有 95% 的把握能够把患有某癌症的病人筛查出来，但是该化验同样对健康人有 1% 的假阳性概率。假如目前人群中患有这种癌症的病人仅占 0.5%。现在某病人化验结果为阳性，问该病人确实罹患该癌症的概率。

D 表示“患病（Disease)”，E 表示“检验阳性（Positive)”。

全概率公式

例

一种血液化验的新方法，有 95% 的把握能够把患有某癌症的病人筛查出来，但是该化验同样对健康人有 1% 的假阳性概率。假如目前人群中患有这种癌症的病人仅占 0.5%。现在某病人化验结果为阳性，问该病人确实罹患该癌症的概率。

D 表示“患病（Disease)”，E 表示“检验阳性（Positive)”。

$$
\begin{aligned}
P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(D)P(E|D)}{P(D)P(E|D)+P(D^c)P(E|D^c)} \\
&= \frac{.95\times 0.005}{.95\times .005+.01\times .995} \\
&= \frac{95}{294}\approx .323
\end{aligned}
$$

全概率公式

例

现在我是一名医生，我的诊断策略是：如果我认为某病人罹患某病的可能性达到 80%，我会建议他手术；如果我不确定，我会建议他做进一步检查，但是该检查痛苦且昂贵。

现在老李来找我看病，我对他患该病的把握仅有 60%，于是我让老李去做检查，结果检查结果是阳性。正当我要做手术时，我发现老李隐瞒了病史，老李患有糖尿病。

这让我很不开心，虽然这并不影响我 60% 的判断，但却影响了检查的结果，因为这个检查虽然不会给健康人给出阳性报告，但是对患有糖尿病且又患有该病的患者有 30% 的概率给出阳性报告。

请问，现在我该怎么办，是直接做手术，还是让老李重新做检查呢？

全概率公式

例

现在我是一名医生，我的诊断策略是：如果我认为某病人罹患某病的可能性达到 80%，我会建议他手术；如果我不确定，我会建议他做进一步检查，但是该检查痛苦且昂贵。

现在老李来找我看病，我对他患该病的把握仅有 60%，于是我让老李去做检查，结果检查结果是阳性。正当我要做手术时，我发现老李隐瞒了病史，老李患有糖尿病。

这让我很不开心，虽然这并不影响我 60% 的判断，但却影响了检查的结果，因为这个检查虽然不会给健康人给出阳性报告，但是对患有糖尿病且又患有该病的患者有 30% 的概率给出阳性报告。

请问，现在我该怎么办，是直接做手术，还是让老李重新做检查呢？

$$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(D)P(E|D)}{P(D)P(E|D) + P(D^c)P(E|D^c)} = \frac{(.6)1}{(.6)1 + (.4)(.3)} \approx .833$$

先验概率与后验概率

在贝叶斯公式中：

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}$$

我们把

- 没有任何信息下的概率 $P(F)$，称为 **“先验概率（Prior probability）”**。
- 没有信息下的概率 $P(F|E)$，称为 **“后验概率（Posterior probability）”**。

所以，贝叶斯公式描述了一个“执果索因”，不断修改初始判断的过程。

先验概率与后验概率

例 (狼来了)

伊索寓言中有一个“狼来了”的故事。

A 表示“小朋友说谎”，B 表示“小朋友可信”。假设村民们对小孩最初的判断为 P(B)=0.8。

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)}$$

假设 $P(A|B)=0.1$，表示“可信小朋友说谎概率为 0.1”，$P(A|B^c)=0.5$。

$$P(B|A)=\frac{0.8\times 0.1}{0.8\times 0.1+0.2\times 0.5}=0.444$$

再用一次贝叶斯公式

$$P(B|AA)=\frac{0.444\times 0.1}{0.444\times 0.1+0.556\times 0.5}=0.138$$

先验概率与后验概率

例

一架飞机失踪了。现在推测该飞机会坠落在三个区域中的一个。如果对每个区域进行搜索，在该区域搜索到飞机的概率为 $1-\beta_i$。

搜索队已经完成对区域 1 的搜索，并未发现飞机。我们就可以根据这个信息去修订我们原来对三个区域搜索到飞机的推断。试问如何修订?

直觉告诉我们，在第一区域没搜索到飞机，那飞机坠毁在第一区域的概率会下降，坠毁在其他区域的概率会增加。验证一下你的直觉。

R_i 表示飞机坠毁在区域 i（Region i），E 表示搜索区域 i 没有发现飞机。
飞机有三个可能的坠毁地，坠毁在每个区域的概率均是 $1/3$。

先验概率与后验概率

例

一架飞机失踪了。现在推测该飞机会坠落在三个区域中的一个。如果对每个区域进行搜索，在该区域搜索到飞机的概率为 $1-\beta_i$。

搜索队已经完成对区域 1 的搜索，并未发现飞机。我们就可以根据这个信息去修订我们原来对三个区域搜索到飞机的推断。试问如何修订?

直觉告诉我们，在第一区域没搜索到飞机，那飞机坠毁在第一区域的概率会下降，坠毁在其他区域的概率会增加。验证一下你的直觉。

R_i 表示飞机坠毁在区域 i（Region i)，E 表示搜索区域 i 没有发现飞机。飞机有三个可能的坠毁地，坠毁在每个区域的概率均是 $1/3$。

$$P(R_1|E)=\frac{P(ER_1)}{P(E)}=\frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(E|R_i)P(R_i)}=\frac{\beta_1\times\frac{1}{3}}{\beta_1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{\beta_1}{\beta_1+2}$$

先验概率与后验概率

在区域 1 没搜到的条件下，飞机实际上确实坠毁在区域 1 的概率：

$$P(R_1|E) = \frac{P(ER_1)}{P(E)} = \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|R_i)P(R_i)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + 2}$$

在区域 1 没搜到的条件下，飞机实际上坠毁在区域 $j, j = 2, 3$ 的概率：

$$P(R_j|E) = \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\beta_1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\beta_1 + 2} \quad j = 2, 3$$

- 显然，$\beta_1 < 1$，(因为 β_1 是“在区域 1 没搜索到飞机”概率)。所以，$\frac{\beta_1}{\beta_1 + 2} < \frac{1}{\beta_1 + 2}$。
- 显然，$P(R_j|E) = \frac{1}{\beta_1 + 2} > \frac{1}{3} = P(R_j)$，和直觉一致。

先验概率与后验概率

例

柯南本来有六成把握某人是犯罪嫌疑人。现在新的证据表明犯案的凶手是左撇子，而被柯南怀疑的人恰好也是个左撇子。已知，人群中左撇子的占比是 20%。

1. 新的证据下，柯南对这个人犯罪的把握有几成?
2. 新的证据对柯南破案是否有帮助?

G 表示嫌疑人有罪（Guilty），C 表示嫌疑人特征（characteristic）。

先验概率与后验概率

例

柯南本来有六成把握某人是犯罪嫌疑人。现在新的证据表明犯案的凶手是左撇子，而被柯南怀疑的人恰好也是个左撇子。已知，人群中左撇子的占比是 20%。

1. 新的证据下，柯南对这个人犯罪的把握有几成?
2. 新的证据对柯南破案是否有帮助?

G 表示嫌疑人有罪（Guilty），C 表示嫌疑人特征（characteristic）。

$$P(G|C) = \frac{P(GC)}{P(C)} = \frac{P(G)P(C|G)}{P(G)P(C|G) + P(G^c)P(C|G^c)}$$

$$= \frac{(.6)1}{(.6)1 + (.4)(.2)} \approx .882 > P(G)$$

先验概率与后验概率

例

柯南本来有六成把握某人是犯罪嫌疑人。现在新的证据表明犯案的凶手是左撇子，而被柯南怀疑的人恰好也是个左撇子。已知，人群中左撇子的占比是 20%。

1. 新的证据下，柯南对这个人犯罪的把握有几成?
2. 新的证据对柯南破案是否有帮助?

G 表示嫌疑人有罪（Guilty)，C 表示嫌疑人特征（characteristic)。

$$P(G|C) = \frac{P(GC)}{P(C)} = \frac{P(G)P(C|G)}{P(G)P(C|G) + P(G^c)P(C|G^c)}$$

$$= \frac{(.6)1}{(.6)1 + (.4)(.2)} \approx .882 > P(G)$$

在概率论中一个非常重要的思想，小概率事件一般是不发生的，一旦发生了肯定是有问题的，也就是所谓的“事出反常必有妖”。

Odd ratio

定义 (Odd ration)

$$Odd\ ratio = \frac{P(A)}{P(A^c)}$$

在柯南的故事中，在没有新证据时：

$$\frac{P(G)}{P(G^c)} = \frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{2}$$

在有新证据时，odd ratio 上升了，柯南的怀疑更有力了：

$$\frac{P(G|C)}{P(G^c|C)} = \frac{P(GC)/P(C)}{P(G^cC)/P(C)} = \frac{P(G)}{P(G^c)}\frac{P(C|G)}{P(C|G^c)} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{0.2} = \frac{15}{2}$$

其中，$\dfrac{P(C|G)}{P(C|G^c)}$ 就反映了这个证据的强度。

Odd ratio

例

硬币 A 有 1/4 的概率正面朝上，硬币 B 有 3/4 的概率正面朝上。现在箱子里有 A 和 B 硬币各一枚，我随机摸了一枚，抛了一次，结果正面朝上，问你应该猜这枚硬币是哪一枚硬币呢?

Odd ratio

例

硬币 A 有 1/4 的概率正面朝上，硬币 B 有 3/4 的概率正面朝上。现在箱子里有 A 和 B 硬币各一枚，我随机摸了一枚，抛了一次，结果正面朝上，问你应该猜这枚硬币是哪一枚硬币呢?

A 表示抛掷了 A 硬币，B 表示抛掷了 B 硬币，显然 $B = A^c$。

$$P(A|H) = \frac{P(A)P(H|A)}{P(H)} = 1/4$$

$$P(B|H) = \frac{P(B)P(H|B)}{P(H)} = 3/4$$

$$Odd\ ratio = 1/3$$

一个趣味问题

例

我有三张形状相同的牌，第一张两面全是红色，第二张两面全是黑色，第三张一面红一面黑。现在随机拿出一张，向上的一面为红色，问你应该赌另一面是黑色呢还是红色呢?

一个趣味问题

例

我有三张形状相同的牌，第一张两面全是红色，第二张两面全是黑色，第三张一面红一面黑。现在随机拿出一张，向上的一面为红色，问你应该赌另一面是黑色呢还是红色呢?

RR,RB,BB 分别代表抽出的牌是“两面红”，“一面红一面黑”，“两面黑”三个事件。

$$
\begin{aligned}
P(RB|R) &= \frac{P(RB\cap R)}{P(R)} \\
&= \frac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR)+P(R|RB)P(RB)+P(R|BB)P(B)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

一个复杂问题

例

天冷了，你想喝热咖啡。喝咖啡时，你不断往杯子里添热水。假设热水和咖啡充分混合，问你最后一口喝的是咖啡呢还是热水呢?

箱子 1 里有 n 个红球（咖啡），箱子 2 里有 n 个蓝球（热水)。现在，从箱子 1 里随机拿走一个球，再从箱子 2 里拿一个球放到箱子 1 里。

直到两个箱子的球都被取走，即箱子 1 取了 2n 次，箱子 2 拿取了 n 次。问箱子 1 里取走的最后一个球是红球的概率。

- 先将注意力放到某个特定的红球上，F 表示某“该特定的红球是最后被取走的”。
- 那么，当箱子 1 里面取走 n 个球的时候，箱子 2 已经空了，所有的 n 个蓝球都被移到了箱子 1 里面。此时，我们关注的特定红球还留在箱子 1 里面。
- N_i 表示该特定的球不是第 i 次被取走的球。

一个复杂问题

- F 表示某“该特定的红球是最后被取走的”，N_i 表示该特定的球不是第 i 次被取走的球。
- 前 n 次都没取走该红球：

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(N_1)P(N_2|N_1)\cdots P(N_n|N_1\cdots N_{n-1})\cdots P(F|N_1\cdots N_n)\\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

- 其中，$P(F|N_1\cdots N_n)$ 表示，最后剩下 n 个球，最后把该红球取出来，这一个公平的抽签游戏，所有概率的是 $\frac{1}{n}$。

一个复杂问题

- 我们有 n 个红球，每一个都可能最后一个被取走，且彼此互斥。R_j 表示“红球 j 最后一个被取走”。

$$P(R_j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

$$P(R) = P(\sum_{j=1}^{n} R_j) = \sum_{j=1}^{n} P(R_j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx e^{-1}$$

目录

独立

定义 (独立 (Independent))

独立，指一个事件的发生不影响另一个事件的发生，即：

$$P(A|B) = P(A)$$

所以，根据乘法公式：

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

满足上述条件，称为事件 A 和 B 相互独立（**independent**），否则成为**不独立或相依（dependent）**。

- 互斥和独立是两个不同的概念。
  - 如果 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 时，互斥和独立不能同时发生。
  - 若 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$，A 与 B 才可能既独立又互斥。
  - 未来，我们还会学到另一个概念“相关”。

独立的例子

例

投掷两个硬币，第一个正面为上的概率是 1/2，第二个正面的概率是 1/2，两者是独立的，则两个都是正面的概率是 1/4。

例

一副 52 张的扑克牌中任取一张，A 表示“抽到 K”，B 表示“抽到黑色”。问两者独立吗?

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \\
P(B) &= \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \\
P(AB) &= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}
\end{aligned}
$$

独立

例

投掷两个骰子，E_1 表示“骰子之和是 6”，F 表示“第一个骰子数字是 4”，问两者独立吗？现在 E_2 为“两个骰子数字和是 7”，问它和 F 独立吗？

独立

例

投掷两个骰子，E_1 表示“骰子之和是 6”，F 表示“第一个骰子数字是 4”，问两者独立吗？现在 E_2 为“两个骰子数字和是 7”，问它和 F 独立吗？

$$
\begin{aligned}
P(E_1F) &= P(\{4,2\}) = 1/36 \\
P(E_1)P(F) &= 5/36 \times 1/6 = 5/216 \\
P(E_2F) &= P(\{4,2\}) = 1/36 \\
P(E_2)P(F) &= 6/36 \times 1/6 = 1/36
\end{aligned}
$$

独立

例

投掷两个骰子，E_1 表示“骰子之和是 6”，F 表示“第一个骰子数字是 4”，问两者独立吗？现在 E_2 为“两个骰子数字和是 7”，问它和 F 独立吗？

$$
\begin{aligned}
P(E_1F) &= P(\{4,2\}) = 1/36 \\
P(E_1)P(F) &= 5/36 \times 1/6 = 5/216 \\
P(E_2F) &= P(\{4,2\}) = 1/36 \\
P(E_2)P(F) &= 6/36 \times 1/6 = 1/36
\end{aligned}
$$

直觉解释：如果第一次投出 4，第二次还有可能投出和为 6，但是如果第一次投出 6，就不能了。但和为 7 不会出现这种情况。

独立的性质

定理

- 如果 A 和 B 独立，那么
  - A 和 B^c 独立；
  - A^c 和 B 独立；
  - A^c 和 B^c 独立

我们以第一个结论为例：

- $A = AB \cup AB^c$
- 因为 AB 和 AB^c 互斥，
  $P(A) = P(AB) + P(AB^c) = P(A)P(B) + P(AB^c)$
- 移项得，$P(AB^c) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$

这说明，如果 A 和 B 独立，无论我们是否得知事件 B 发生的消息，事件 A 的发生概率都是不变的。

多个事件独立

例

如果 A 和 B 独立，A 也和 C 独立，那么 A 和 BC 独立吗?
我们再来投掷两个骰子，A 表示“骰子之和是 7”，B 表示“第一个骰子为 4”，C 表示“第二个骰子为 3”。已知 A 和 B 独立，同理 A 和 C 也独立。但是很明显 A 和 BC 不独立，因为 $P(A|BC) = 1$。

多个事件独立

例

如果 A 和 B 独立，A 也和 C 独立，那么 A 和 BC 独立吗？
我们再来投掷两个骰子，A 表示“骰子之和是 7”，B 表示“第一个骰子为 4”，C 表示“第二个骰子为 3”。已知 A 和 B 独立，同理 A 和 C 也独立。但是很明显 A 和 BC 不独立，因为 $P(A|BC) = 1$。

定义 (三个事件独立)

三个事件 A、B 和 C **相互独立**，等价于

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(AC) &= P(A)P(C) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \\
P(ABC) &= P(A)P(B)P(C)
\end{aligned}
$$

多个事件独立

定义 (多个事件相互独立)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意 k 个事件满足下式，则称为以上事件**相互独立**。

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

问上式共有多少项?

定义 (多个事件两两独立)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件相互独立，称为以上事件**两两独立**。

- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则其中任意 k 个事件也相互独立。
- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则其中任意 k 个换成对立事件也成立。

多个事件独立

例

如果 A，B 和 C 相互独立，A 和 $B\cup C$独立吗?

多个事件独立

例

如果 A，B 和 C 相互独立，A 和 $B\cup C$ 独立吗?

$$\begin{aligned}
P(A(B\cup C)) = P(AB\cup AC) &= P(AB)+P(AC)-P(ABC)\\
&= P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(BC)\\
&= P(A)[P(B)+P(C)-P(BC)]\\
&= P(A)P(B\cup C)
\end{aligned}$$

定理

综上所述，如果事件 A、B 和 C 相互独立，那么任意取交并补仍独立。

多次独立重复试验

定义 (重复试验和伯努利试验)

一个大的试验由多个相互独立的子试验构成，且每个子试验都有相同的子样本空间及相同的概率结果。那么这种试验就被称为**重复试验 (Trials)**。
假如重复试验的每个子试验的只有发生或不发生两种互斥的结果，那么这样的重复试验称为**伯努利试验（Bernoulli Trials）**，重复 n 次则称为 **n 重伯努利试验**。

伯努利试验

例

一个重复 n 次的伯努利试验，成功的概率为 p，不成功的概率为 $1-p$，

1. 至少成功一次的概率
2. 任意成功 k 次的概率
3. 全部成功的概率
4. 如果将伯努利试验重复无限次，那么全部成功的概率。

伯努利试验

例

一个重复 n 次的伯努利试验，成功的概率为 p，不成功的概率为 1-p，

1. 至少成功一次的概率
2. 任意成功 k 次的概率
3. 全部成功的概率
4. 如果将伯努利试验重复无限次，那么全部成功的概率。

1. $1-(1-p)^n$;
2. $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$;
3. $\binom{n}{n}p^n(1-p)^0=p^n$;
4. 如果 p=1，则为 1,；如果 p<1，则为 0。

n 重伯努利试验也称为伯努利概型，服从二项分布。

伯努利试验

例

一个由 n 个元件组成的系统，如果至少一个元件正常工作，那么整个系统就是正常工作，这个系统就成为并联（parallel）。如果元件 i 正常工作的概率为 p_i，$i = 1, 2, \cdots, n$，且各元件的工作状态独立，那么整个系统正常工作的概率。

伯努利试验

例

一个由 n 个元件组成的系统，如果至少一个元件正常工作，那么整个系统就是正常工作，这个系统就成为并联（parallel)。如果元件 i 正常工作的概率为 p_i，$i=1,2,\cdots,n$，且各元件的工作状态独立，那么整个系统正常工作的概率。

A_i 表示“元件 i 正常工作”

$$\begin{aligned} P(\text{系统正常工作}) &= 1-P(\text{系统工作不正常}) \\ &= 1-P(\text{所有元件工作不正常}) \\ &= 1-P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) \end{aligned}$$

一个有趣的问题

例

进行独立重复试验，每次试验投掷两个骰子，并记录数字和。问“和为 5”出现在“和为 7”之前的概率。

第一种想法：

E_n 表示，前 n-1 次均没有出现 5 和 7，第 n 次才出现 5。

P({和为 5})=$\frac{4}{36}$，P({和为 7})=$\frac{6}{36}$。

前 n-1 次都不是 5 或者 7，直到第 n 次出现 5：

$$P(E_n) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{13}{18})^{n-1} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{1-13/18} = \frac{2}{5}$$

一个有趣的问题

例

进行独立重复试验，每次试验投掷两个骰子，并记录数字和。问“和为 5”出现在“和为 7”之前的概率。

第二种想法：

E 表示“和为 5 出现在和为 7 之前；A 表示“第一次投掷和为 5”；
B 表示“第一次投掷和为 7；C 表示“第一次投掷和既不是 5 也不是 7”。

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C)$$

其中，P(E|A)=1，P(E|B)=0。而 P(E|C)=P(E)，相当于重新开始，又因为独立性，前面对后面的投掷没有影响。

$$P(E) = \frac{1}{9} + \frac{13}{18}P(E)$$

所以，P(E)=2/5

一个有趣的问题

例

进行独立重复试验，每次试验投掷两个骰子，并记录数字和。问“和为5”出现在“和为7”之前的概率。

第三种想法：

- 和为5的概率是 $\frac{4}{36}$；
- 和为7的概率是 $\frac{6}{36}$；
- 所以“和为5”出现在“和为7”之前的比例应该是4/6；
- 所以“和为5”出现在“和为7”之前的概率是 $\frac{4}{10}$；
- 若A和B是一次独立重复试验中两个互斥事件，那么事件A出现在事件B之前的概率是

$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

多次独立重复试验

例 (蓝 P23 例 4)

甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 p，$p \geqslant \dfrac{1}{2}$。问对甲而言，是采用三局两胜好，还是五局三胜好?

多次独立重复试验

例 (蓝 P23 例 4)

甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 p，$p \geqslant \frac{1}{2}$。问对甲而言，是采用三局两胜好，还是五局三胜好?

三局两胜：最后一局甲要赢，前面甲赢一局。只有三种：“甲甲”、“乙甲甲”、“甲乙甲”

$$p^2 + 2p^2(1-p)$$

五局三胜：最后一局甲要赢，前面甲赢两局。

$$\binom{2}{2}p^3 + \binom{3}{2}p^3(1-p) + \binom{4}{2}p^3(1-p)^2$$

多次独立重复试验

例 (蓝 P23 例 4)

甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 p，$p \geqslant \frac{1}{2}$。问对甲而言，是采用三局两胜好，还是五局三胜好?

“五局三胜”与“三局两胜”的差为

$$3p^2(p-1)^2(2p-1)$$

- 当 $p > \frac{1}{2}$，上式大于 0;
- 当 $p = \frac{1}{2}$，上式等于 0。

直观解释:

- 如果我有优势，比赛越多越能展现出我的优势;
- 相反，我没有优势，才期待在较少的比赛中侥幸获胜。

概率论的诞生

1654 年，法国的赌徒 *deMéré* 爵士向数学家 Pascal 提出了下面这个问题：

- 两个赌徒按照某种规则赌了起来，并约定赢者通吃，但是赌局在未分胜负时中途停止，问应该如何分配赌资呢?

Pascal 认为赌徒分配赌资的依据应该是赌局进行下去时他们各自获胜的概率。
Pascal 解决了一些特例，而后通过与 Fermat 的通讯，两者不仅完全解决了这个问题，还搭建了类似问题的数学框架。因此，有些人把 Pascal 和 Fermat 建立通信的那一天作为概率论的诞生日。

- 上述“三局两胜和五局三胜哪个好”的问题就是这类问题的一种变型，这种问题统称为**点数问题 (Problem of points)**。

概率论的诞生

例 (点数问题 (Problem of points))

多次独立重复试验，每次成功的概率为 p，失败概率是 1-p。在第 m 次失败前已经成功 n 次的概率。
换成赌徒的语境。A 和 B 两人进行赌博，规则是每次试验成功 A 得一分，失败则 B 的一分。如果 A 先得到 n 分 A 就获胜，如果 B 先得到 m 分 B 就获胜。问 A 获胜的概率有多大?

我们来看看 Fermat 的解法。
要使得 n 次成功出现在 m 次失败之前，那么前 $n+m-1$ 次试验至少要成功 n 次，至多失败 $m-1$ 次。正如之前的例子中，$n+m-1$ 次试验恰好成功 k 次的概率为

$$\binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

概率论的诞生

例 (点数问题 (Problem of points))

多次独立重复试验，每次成功的概率为 p，失败概率是 1-p。在第 m 次失败前已经成功 n 次的概率。
换成赌徒的语境。A 和 B 两人进行赌博，规则是每次试验成功 A 得一分，失败则 B 的一分。如果 A 先得到 n 分 A 就获胜，如果 B 先得到 m 分 B 就获胜。问 A 获胜的概率有多大?

$n+m-1$ 次试验恰好成功 k 次的概率为

$$\binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

n 次成功出现在 m 次失败之前的概率

$$P_{n,m} = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

一个有趣的问题

例

游戏有 r 个玩家，每个玩家 i 手里有 n_i 单位的赌资。赌局的每个阶段随机选两个人对局，胜者从败者处拿走 1 单位赌资。如果某玩家输光所有赌资就出局，直到仅剩一人时游戏结束，他就是最终获胜者。
假设每场对局都是独立的，且玩家实力势均力敌，即每场对局两个玩家均有等概率击败对方。问玩家 i 获胜的概率。

直观解释：谁钱多谁就能笑到最后。

- 假如有 n 个人，每个人都有 1 单位的赌资，那么每个人的胜率都是 $\dfrac{1}{n}$；
- 假如把这 n 个人分成 r 组，组别 i 有 n_i 个人，每个组就有 n_i 单位的赌资，把赌博看成团体赛。那么每个组的胜率是 $\dfrac{n_i}{n}$。

例

保险公司把客户分成两类，一类为容易出事故者，另一类为安全者。第一类任意一年内出事故的概率为 0.4，而另一类为 0.2。假如全部人口中容易出事故者占 30%。现在某客户在第一年已经出了一次事故，问他在第二年再出事故的概率。

A 表示“该客户是易出事故的人”，A_i 表示“他在第 i 年出了一次事故”。

$$P(A_2|A_1) = P(A|A_1)P(A_2|AA_1) + P(A^c|A_1)P(A_2|A^cA_1)$$

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1A)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1)} = \frac{0.4 \times 0.3}{0.26} = \frac{6}{13}$$

$$P(A^c|A_1) = 1 - P(A|A_1) = \frac{7}{13}$$

因为 $P(A_2|AA_1) = 0.4$，$P(A_2|A^cA_1) = 0.2$，

$$P(A_2|A_1) = 0.4 \times \frac{6}{13} + 0.2 \times \frac{7}{13} \approx 0.29$$

条件独立

定义 (条件独立)

如果在 B 已经发生的条件下，A_1 发生的概率不因 A_2 是否发生而改变，即在给定 B 发生的条件下 A_1 和 A_2 独立，我们就称给定 B 发生条件下 A_1 和 A_2 条件独立（conditionally independent)。

$$P(A_1|A_2B) = P(A_1|B) \; or, \; equivalently \; P(A_1A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|B)$$

谢谢！