

# 高中知识复习

Review

张昕

西南民族大学 经济学院

2023 年 3 月 5 日

# 目录

1 列表

2 排列

3 组合

4 划分

5 整数解的个数

6 集合论

# 基本计数法则与列表

## 定理 (基本计数法则)

- 假定进行过程  $I$  有  $n_1$  种方法, 而对于过程  $I$  的每一种方法, 进行过程  $II$  都有  $n_2$  种方法。那么, 依次进行过程  $I$  与  $II$  共有  $n_1 \times n_2$  种方法。
- 假定进行过程  $I$  有  $n_1$  种方法, 进行过程  $II$  都有  $n_2$  种方法。那么, 进行过程  $I$  或  $II$  共有  $n_1 + n_2$  种方法。

# 基本计数法则与列表

## 例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

# 基本计数法则与列表

## 例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$$

# 基本计数法则与列表

## 例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$$

## 例 (不可重复的列表 (List without repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，如果数字和字母均不能重复，一共有多少编排车牌号的方法。  
我们将不可重复的列表称为排列 (permutations)。

# 基本计数法则与列表

## 例 (可重复的列表 (List with repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，一共有多少编排车牌号的方法。

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$$

## 例 (不可重复的列表 (List without repetition))

7 位数的车牌，前三个必须是字母，后四个必须是数字，如果数字和字母均不能重复，一共有多少编排车牌号的方法。  
我们将不可重复的列表称为排列 (permutations)。

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78,624,000$$

# 目录

1 列表

2 排列

3 组合

4 划分

5 整数解的个数

6 集合论



# 排列

## 定义 (排列与阶乘)

- **排列 (Permutations)**: 与顺序有关的不可重复列表。
- **阶乘 (factorial)**:  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 。

# 排列

## 定义 (排列与阶乘)

- **排列 (Permutations)**: 与顺序有关的不可重复列表。
- **阶乘 (factorial)**:  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 。

## 例

一个球队有 9 名队员，先后发球，发球顺序共有多少种？

# 排列

## 定义 (排列与阶乘)

- **排列 (Permutations)**: 与顺序有关的不可重复列表。
- **阶乘 (factorial)**:  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 。

## 例

一个球队有 9 名队员，先后发球，发球顺序共有多少种？

$$9! = 362,880$$

# 排列

## 例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

- ① 一共有多少种排序方法？
- ② 若男女分开排序，一共有多少种排序方法？

# 排列

## 例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

- ① 一共有多少种排序方法？
- ② 若男女分开排序，一共有多少种排序方法？

- ①  $10! = 3,628,800$
- ②  $(6!)(4!) = 17,280$

# 排列

## 例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

- ① 一共有多少种排序方法？
- ② 若男女分开排序，一共有多少种排序方法？

- ①  $10! = 3,628,800$
- ②  $(6!)(4!) = 17,280$

## 例

十本书放在书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和一本语文书。现在要求所有相同类型书籍均紧挨着放，问一共有多少种放法？

# 排列

## 例

某班级共有 6 名男生和 4 名女生，现根据班上某次测验成绩排序，假设所有同学成绩均不相同。

- ① 一共有多少种排序方法？
- ② 若男女分开排序，一共有多少种排序方法？

- ①  $10! = 3,628,800$
- ②  $(6!)(4!) = 17,280$

## 例

十本书放在书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和一本语文书。现在要求所有相同类型书籍均紧挨着放，问一共有多少种放法？

先把四种书各自排，再把四种书排。

$$4! \times (4! \times 3! \times 2 \times 1) = 6912$$

# 目录

1 列表

2 排列

3 组合

4 划分

5 整数解的个数

6 集合论



# 组合

从 A, B, C, D 和 E 五个字母中选择三个形成组合，一共有几种选法？  
第一个字母有 5 种选法，第二个字母有 4 种选法，第三个字母有 3 种选法，但该结果是与顺序相关的。但在这个问题中，字母的顺序是无关的。  
所有选法应该有

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

## 定义 (组合)

**组合 (Combinations)** 是元素不可重复的集合，因此与顺序无关。  
对于  $r \leq n$ ，我们将  $C_n^r$  或者  $\binom{n}{r}$  定义为

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

我们将  $C_n^r$  或者  $\binom{n}{r}$  读作 “ $n$  选  $r$  ( $n$  choose  $r$ )”。

# 组合

例

从 20 个人总选择 3 个组成委员会，一共有几种选法？

# 组合

## 例

从 20 个人总选择 3 个组成委员会，一共有几种选法？

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

# 组合

例

从 20 个人总选择 3 个组成委员会，一共有几种选法？

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

例

12 个人中 5 女 7 男，现从中选取 2 女 3 男组成委员会，共有多少种选法？现在两位男士发生矛盾，并决定绝不一起工作，现在有多少种选法？

# 组合

## 例

从 20 个人总选择 3 个组成委员会，一共有几种选法？

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

## 例

12 个人中 5 女 7 男，现从中选取 2 女 3 男组成委员会，共有多少种选法？现在两位男士发生矛盾，并决定绝不一起工作，现在有多少种选法？

$$\binom{5}{2} \binom{7}{3} \\ \binom{5}{2} \left[ \binom{7}{3} - \binom{2}{2} \binom{5}{1} \right] \text{ or } \binom{5}{2} \left[ \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2} \right]$$

# 组合

## 例

现有一排  $n$  个信号塔，其中  $m$  个失效， $n-m$  个有效，有效信号塔之间没有差异，无效信号塔之间也没有差别。现在不能让连续两个信号塔均失效，共有多少种排序方法？

有效的信号塔之间，最多放置一个失效的信号塔。有  $n - m + 1$  个位置，从中选  $m$  个防止失效的信号塔。所以

$$\binom{n - m + 1}{m}$$

$\wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \dots \wedge 1 \wedge 1 \wedge$

$1 = \text{functional}$

$\wedge = \text{place for at most one defective}$

图：失效信号塔的放置方法

# 组合

## 例

现有一排  $n$  个信号塔，其中  $m$  个失效， $n-m$  个有效，有效信号塔之间没有差异，无效信号塔之间也没有差别。现在不能让连续两个信号塔均失效，共有多少种排序方法？

# 组合

## 例

现有一排  $n$  个信号塔，其中  $m$  个失效， $n-m$  个有效，有效信号塔之间没有差异，无效信号塔之间也没有差别。现在不能让连续两个信号塔均失效，共有多少种排序方法？

有效的信号塔之间，最多放置一个失效的信号塔。有  $n - m + 1$  个位置，从中选  $m$  个防止失效的信号塔。所以

$$\binom{n - m + 1}{m}$$

$\wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \dots \wedge 1 \wedge 1 \wedge$

$1 = \text{functional}$

$\wedge = \text{place for at most one defective}$

图：失效信号塔的放置方法



# 组合

## 定理

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

这个公式的理解方法为，我将选  $r$  个元素分成两类：选某个特定元素和不选某个特定。如果选就是  $\binom{n-1}{r-1}$ ，如果不选就是  $\binom{n-1}{r}$ 。

# 组合

## 定理 (二项式定理 (The binomial theorem) )

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

例

展开  $(x + y)^3$ 。

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3\end{aligned}$$

# 组合

例

证明  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ 。

# 组合

## 例

证明  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ 。

Let  $x = 1$  and  $y = 1$ , then

$$(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

# 组合

例

证明  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ 。

Let  $x = 1$  and  $y = 1$ , then

$$(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

例

一个有  $n$  个元素的集合，一共有几个子集，其中非空子集有几个。

# 组合

## 例

证明  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ 。

Let  $x = 1$  and  $y = 1$ , then

$$(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

## 例

一个有  $n$  个元素的集合，一共有几个子集，其中非空子集有几个。

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n \text{ and } 2^n - 1$$

# 组合

例

用“PEPPER”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式？

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

# 组合

例

用“PEPPER”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式？

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

例

9 面小旗，其中 4 红 2 白 3 蓝，不同排列方式代表不同信号，那么一共有多少种可能的信号？



# 组合

例

用“PEPPER”的六个字母排序，一共有多少种不同排序方式？

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

例

9面小旗，其中4红2白3蓝，不同排列方式代表不同信号，那么一共有多少种可能的信号？

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

# 目录

1 列表

2 排列

3 组合

4 划分

5 整数解的个数

6 集合论

# 划分

考虑下面的情境，将  $n$  个不同的元素分配到  $r$  个不同的组别，每个组别包含  $n_1, n_2, \dots, n_r$  个元素，并且  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ 。第一组有  $\binom{n}{n_1}$  种选法；对于第一组的每个选法，第二组又有  $\binom{n-n_1}{n_2}$  种选法，以此类推。最终选法有

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

我们将这种关系称为**划分 (partition)**。

# 划分

定理 (划分与多项式定理 (Partition and multinomial theorem) )

如果  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ , 我们定义

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

则

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

# 划分

## 例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法？

# 划分

## 例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法？

$$\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$$

# 划分

## 例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法？

$$\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$$

## 例

10 名小朋友分成两组，A 组 5 名去踢足球，B 组 5 名去打篮球，一共有多少种分法？

# 划分

## 例

警局有 10 名警察，现在需要 5 名巡逻，2 名值班，3 名待命。问将警察按照这样的工作分成三组共有多少种分法？

$$\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$$

## 例

10 名小朋友分成两组，A 组 5 名去踢足球，B 组 5 名去打篮球，一共有多少种分法？

$$\frac{10!}{5!5!} = 252$$



# 划分

## 例

10 名小朋友分成两组，每组 5 名，两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？

# 划分

## 例

10 名小朋友分成两组，每组 5 名，两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？

现在，这两个队伍是没有差异的，也就是与顺序无关，没有了 A 队与 B 队。

$$\frac{10!}{(5!5!)2!} = 126$$

# 划分

## 例

现有  $n = 2^m$  个小朋友进行淘汰赛，即将  $n$  个参赛者随机分成  $n/2$  对，两两进行淘汰赛，胜者晋级，败者淘汰。直到最后一个胜者成为冠军。（为了简单，我们就考虑仅有 8 名参赛者。）

- ① 第一轮比赛中，有多少不同可能的结果？
- ② 整个淘汰赛，一共有多少种不同的结果，每一个结果展示了各论全部的淘汰信息。

# 划分

对于第一个问题：

- ① **第一步：**将 8 名选手分为有差别的 4 对： $\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{(2^4)4!}$
- ② **第二步：**这 4 对是无差别的： $\frac{8!}{(2^4)4!}$
- ③ **第三步：**每一对的胜负均有两种可能，也就是第一轮所有的可能： $\frac{(8!)2^4}{(2^4)4!} = \frac{8!}{4!}$
- ④ **另一种思维：**选四个胜者  $\binom{8}{4}$ ，再为胜者匹配败者  $\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$

# 划分

对于第二个问题：

- ① **第一步**：对于第一轮的结果，第二轮有  $\frac{4!}{2!}$  种结果。
- ② **第二步**：对于第二轮的结果，第三轮有  $\frac{2!}{1!}$  种结果。
- ③ **第三步**：综合三轮，共有  $\frac{8!}{4!} \frac{4!}{2!} \frac{2!}{1!} = 8!$  种结果。
- ④ **另一种思维**：我们可以给淘汰赛的每个位置编号，共有不同的 8 个位置，那么也就有  $8!$  种结果。

# 多项式定理

- 展开  $(x + y + z)^2$ .

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &= (x + y + z)(x + y + z) \\&= \binom{2}{2, 0, 0} x^2 y^0 z^0 + \binom{2}{0, 2, 0} x^0 y^2 z^0 + \binom{2}{0, 0, 2} x^0 y^0 z^2 \\&\quad + \binom{2}{1, 1, 0} x^1 y^1 z^0 + \binom{2}{1, 0, 1} x^1 y^0 z^1 + \binom{2}{0, 1, 1} x^0 y^1 z^1 \\&= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\end{aligned}$$

# 组合理论

	顺序 (Order)	重复 (repetition)	举例
列表 (List)	YES	YES	车牌
排列 (Permutation)	YES	NO	排名
组合 (Combination)	NO	NO	组建委员会
划分 (Partition)	嵌套, 组间有差异, 组内无差异		分配任务

- 划分为排列嵌套组合, 组间为排列, 组内为组合。
- 组合是特殊的划分, 两个分组分别为“入选”和“落选”。

# 组合理论

考虑将  $n$  个元素放置于  $r$  个位置，则：

- 列表：  $n^r$ ;

- 排列：

- ①  $n = r, n! = n(n-1)(n-2) \cdots \times 2 \times 1$ ;

- ②  $n > r, P_n^r = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ ;

- ③  $n = r$ , 但  $r$  个元素中有  $n_1, n_2, \dots, n_r$  个重复元素：  $\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_r!}$ ;

- 排列：  $C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ ;

- 划分：  $\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_r!}$



# 目录

- 1 列表
- 2 排列
- 3 组合
- 4 划分
- 5 整数解的个数
- 6 集合论

# 整数解的个数

- $n$  个**不同的**球放到  $r$  个**不同的**篮子：

- ① 篮子可以空置，但球必须有个归宿。
- ②  $n$  个球是  $n$  个不同位置， $r$  个篮子是  $r$  个不同的元素。
- ③ 答案是： $r^n$

# 整数解的个数

- $n$  个**不同的**球放到  $r$  个**不同的**篮子：

- ① 篮子可以空置，但球必须有个归宿。
- ②  $n$  个球是  $n$  个不同位置， $r$  个篮子是  $r$  个不同的元素。
- ③ 答案是： $r^n$

- $n$  个**相同的**球放到  $r$  个**不同的**篮子：

- ① 我们以 8 个球 4 个篮子为例；
- ② 000|00||000，代表四个篮子分别放 3,2,0,3 个球；
- ③ 相当于 8 个“0”和 3 个“|”组成一个 11 位单词的组词的排列问题；
- ④ 或者是将 11 个不同的位置，分配给“0”和“|”两个组别的划分问题；

# 整数解的个数

- $n$  个**不同的**球放到  $r$  个**不同的**篮子:

- ① 篮子可以空置，但球必须有个归宿。
- ②  $n$  个球是  $n$  个不同位置， $r$  个篮子是  $r$  个不同的元素。
- ③ 答案是:  $r^n$

- $n$  个**相同的**球放到  $r$  个**不同的**篮子:

- ① 我们以 8 个球 4 个篮子为例;
- ② 000|00||000, 代表四个篮子分别放 3,2,0,3 个球;
- ③ 相当于 8 个“0”和 3 个“|”组成一个 11 位单词的组词的排列问题;
- ④ 或者是将 11 个不同的位置, 分配给“0”和“|”两个组别的划分问题;
- ⑤ 答案是:  $\frac{11!}{8!3!} = \binom{11}{3}$
- ⑥ 所以此类问题的解法为:  $\binom{n+r-1}{r-1}$

# 整数解的个数

- $n$  个**相同**的球放到  $r$  个**不同**的篮子，且篮子不能不能空置：
  - ① 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
  - ② 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
  - ③ 答案是：  $\frac{(4+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
  - ④ 所以此类问题的解法为：  $\binom{n-1}{r-1}$

# 整数解的个数

- $n$  个**相同**的球放到  $r$  个**不同**的篮子，且篮子不能不能空置：
  - ① 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
  - ② 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
  - ③ 答案是：  $\frac{(4+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
  - ④ 所以此类问题的解法为：  $\binom{n-1}{r-1}$
- 该类问题也可以通过“插缝”的思路解答
  - ① 将 3 个 “|” 插在 8 个 “0” 的缝隙中。

# 整数解的个数

- $n$  个**相同**的球放到  $r$  个**不同**的篮子，且篮子不能不能空置：

- ① 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；
- ② 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；
- ③ 答案是： $\frac{(4+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$
- ④ 所以此类问题的解法为： $\binom{n-1}{r-1}$

- 该类问题也可以通过“插缝”的思路解答

- ① 将 3 个“|”插在 8 个“0”的缝隙中。
- ② 不许空置，每个缝隙只能选一次，即在 7 个缝隙中选 3 个， $\binom{7}{3}$ ；

# 整数解的个数

- $n$  个相同的球放到  $r$  个不同的篮子，且篮子不能不能空置：

- ① 由于球相同，可以先拿 4 个球分别放到四个篮子，保证不空置；

- ② 如果我们以 8 个球 4 个篮子为例，就剩下 4 个球放到 4 个篮子；

- ③ 答案是： $\frac{(4+3)!}{4!3!} = \binom{7}{3}$

- ④ 所以此类问题的解法为： $\binom{n-1}{r-1}$

- 该类问题也可以通过“插缝”的思路解答

- ① 将 3 个“|”插在 8 个“0”的缝隙中。

- ② 不许空置，每个缝隙只能选一次，即在 7 个缝隙中选 3 个， $\binom{7}{3}$ ；

- ③ 允许空置，可以使用“借球法”，先借 4 个球，按照不许空置计算，保证每个篮子至少有一个球，再从每个篮子拿走一个球，把借来的球还回去；

- ④ 这样就相当于在  $(8+4=)12$  个“0”的 11 个缝隙中插入 3 个“|”，即  $\binom{11}{3}$ 。



# 整数解的个数

- $x_1 + 2x_2 = 3$  的非负整数解个数。
  - ① 相当于 3 个“1”放到“ $x_1$ ”和“ $x_2$ ”这两个篮子；
  - ② 答案是： $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$  个，即  $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ .
- $x_1 + x_2 = 3$  的正整数解个数。
  - ① 相当于 3 个“1”放到“ $x_1$ ”和“ $x_2$ ”这两个篮子，且不能空置；
  - ② 答案是： $\binom{3-1}{2-1} = 2$  个，即  $(1, 2), (2, 1)$ .

# 整数解的个数

- $x_1 + 2x_2 = 3$  的非负整数解个数。
  - ① 相当于 3 个“1”放到“ $x_1$ ”和“ $x_2$ ”这两个篮子；
  - ② 答案是： $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$  个，即  $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ .
- $x_1 + x_2 = 3$  的正整数解个数。
  - ① 相当于 3 个“1”放到“ $x_1$ ”和“ $x_2$ ”这两个篮子，且不能空置；
  - ② 答案是： $\binom{3-1}{2-1} = 2$  个，即  $(1, 2), (2, 1)$ .
- 推广： $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$  的整数解个数。
  - ① 如果  $x_i > 0$ ，正整数解个数： $\binom{n-1}{r-1}$ ；
  - ② 如果  $x_i \geq 0$ ，令  $y_i = x_i + 1$ ，并求  $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n + r$ ；
  - ③ 所以，非负整数解个数： $\binom{n+r-1}{r-1}$ ；

# 整数解的个数

$n$  个电线中,  $m$  个失效,  $n-m$  个有效。

- 两个失效电线之间必须至少有一个有效电线

- ① 相当于解  $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} = n - m \quad x_i > 0$ ;
- ② “+” 相当于失效的电线,  $x_i$  相当于失效电线之间的有效电线数。
- ③ 解为  $\binom{n-m-1}{m}$

- 两个失效电线之间必须至少有两个有效电线

- ① 相当于解  $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} = n - m$   
 $x_1 > 0, x_{m+1} > 0, x_i \geq 2$ ;
- ② 如果  $1 < i < m - 1$ , 则令  $y_i = x_i - 1 \geq 1$ , 解  
 $x_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m + x_{m+1} = n - m - (m - 1) = n - 2m + 1$ ;
- ③ 解为  $\binom{n-2m}{m}$

# 目录

1 列表

2 排列

3 组合

4 划分

5 整数解的个数

6 集合论

# 集合与集合的关系

- 集合

- 集合、子集和元素

- 集合的关系

- ① 包含 (Contain):  $A \supset B$ , 称为 A 包含 B, 或 B 包含于 A.
- ② 相等 (Identical):  $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ and } A \supset B$ .
- ③ 补 (Complement):  $A^c \text{ or } \bar{A} = \{\omega | \omega \notin A\}$
- ④ 并 (Union):  $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$
- ⑤ 交 (Intersection):  $A \cap B = AB = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$ .

- 用韦恩图 (Venn diagram) 描述上述关系。

# 集合的运算

## • 集合的运算律

- ① 交换律 (Commutative laws):  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ 。
- ② 结合率 (Associative laws):  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。
- ③ 分配率 (Distributive laws):  $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$ ,  
 $(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- ④ 自反率:  $(A^c)^c = A$ ,  $A = A \cap A = A \cup A$ 。
- ⑤ 摩根律 (DeMorgan's laws):  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ,  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 。

## • 差与互斥

- ① 差 (Difference):  $A \setminus B = A - B = A \cap B^c = \{\omega \mid \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}$ ,  
 $A \setminus B = A - B = A - (A \cap B)$
- ② 互斥 (Disjoint):  $A \cap B = \emptyset$

# 数与有限

- 数 (counting): 与自然数建立一一对应关系;
- 等价 (equivalent):  $A \sim B$ ,  $A$  和  $B$  中的元素可以建立一一对应关系, 即元素一样多;
- 有限 (finite): 可与自然数  $1, 2, 3, \dots, n$  建立一一对应关系;
- 无限 (infinite): 不是有限。
- 问题:  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  与  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  哪个元素比较多?

A	1	2	3	...	n		
$\mathbb{N}$	1	2	3	...	n	n+1	...

# 可数

- 问题：奇数和偶数哪个比较多？
- 问题：自然数和偶数那个比较多？
- 问题：自然数和非负整数哪个比较多？

$n, n > 0$	1	2	3	...	$n$	...
$2n$	2	4	6	...	$2n$	...
$2n-1$	1	3	5	...	$2n-1$	...
$n-1$	0	1	2	...	$n-1$	...

- 可数 (countable): 可与自然数  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  建立一一对应关系；
- 整数 ( $\mathbb{Z}$ )、有理数 ( $\mathbb{Q}$ ) 都可数。



# 不可数

- 问题:  $[0, 1]$  和  $\mathbb{N}$  哪个元素比较多?
- 不可数 (uncountable): 既有限又不可数;
- 无理数和实数 ( $\mathbb{R}$ ) 均不可数。
- 如果变量的个数至多可数, 我们称这样的变量为**离散变量**, 求离散变量的和:
  - $\sum_{n=1}^{\infty} x_i$
- 如果变量为不可数的区间, 我们称这样的变量为**连续变量**, 求连续变量的和:
  - $\int_a^b f(x) dx$

