文章编号:1002-8692(2008)12-0016-03

压缩感知理论简介*

·综述·

喻玲娟[1],谢晓春[2,3]

(1.华南理工大学 电子与信息学院,广东 广州 510640; 2. 赣南师范学院 物理与电子信息学院,江西 赣州 341000;
3. 中国科学院空间科学与应用研究中心, 北京 100190)

【摘 要】压缩感知(CS)理论是在已知信号具有稀疏性或可压缩性的条件下,对信号数据进行采集、编解码的新理论。主要阐述了CS理论框架以及信号稀疏表示、CS 编解码模型,并举例说明基于压缩感知理论的编解码理论在一维信号、二维图像处理上的应用。

【关键词】压缩感知;稀疏表示;编码;解码;受限等距特性

【中图分类号】TN919.81 【文献标识码】A

Brief Introduction of Compressed Sensing Theory

YU Ling-juan[1], XIE Xiao-chun[2,3]

(1.School of Electronic and Information Engineering, South China University of Teconology, Guangzhou 510640, China;
2. School of Physics and Electronic Information, Gannan Normal University, Jiangxi Ganzhou 341000, China;
3. Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

【Abstract】Compressed Sensing(CS) theory is a novel data collection and coding theory under the condition that signal is sparse or compressible. In this paper, the CS framework, CS coding model are introduced, after which the application of CS theory in one-dimensional signal and two-dimension image are illustrated.

【Key words】compressed sensing; sparse presentation; encoding; decoding; restricted isometry property

1 引言

过去的几十年间,传感系统获取数据的能力不断地得到增强, 需要处理的数据量也不断增多, 而传统的 Nyquist 采样定理要求信号的采样率不得低于信号带宽的 2 倍, 这无疑给信号处理的能力提出了更高的要求, 也给相应的硬件设备带来了极大的挑战。寻找新的数据采集、处理方法成为一种必然。2004 年, 由 Donoho 与 Candes 等人提出的压缩感知(Compressed Sensing,CS)理论是一个充分利用信号稀疏性或可压缩性的全新信号采集、编解码理论[1-2]。该理论表明,当信号具有稀疏性或可压缩性时,通过采集少量的信号投影值就可实现信号的准确或近似重构。CS 理论的提出是建立在已有的盲源分离和稀疏分解理论基础上的。盲源分离为 CS 理论提供了在未知源信号的情况下,通过测量编码值实现信号重构的思路; 稀疏分解中的具体算法已直接被 CS 解码重构所用。

2 CS 理论框架

CS 理论是编解码思想的一个重要突破。传统的信号采集、编解码过程如图 1 所示:编码端先对信号进行采样,再对所有采样值进行变换,并将其中重要系数的幅度和位置进行编码, 最后将编码值进行存储或传输;信号的解码过程仅仅是编码的逆过程,接收的信号经解压缩、反变换后得到恢复信号。这种传统的编解码方法存在两个缺陷: 1) 由于信号的采样速率不得低于信号带宽的 2 倍,这使得硬件系统面临着很大的采样速率的压力; 2) 在压缩编码过程中,大量变换计算得到的小系数被丢弃,造成了数据计算和内存资源的浪费。

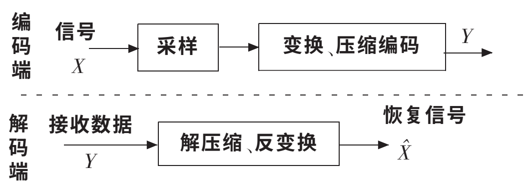


图 1 传统编解码理论的框图

CS 理论的信号编解码框架和传统的框架大不一样, 如图 2 所示。CS 理论对信号的采样、压缩编码发生在同一个步骤,利用信号的稀疏性,以远低于 Nyquist 采样率的速率对信号进行非自适应的测量编码。测量值并非信号本身,而是从高维到低维的投影值,从数学角度看,每个测量值是传统理论下的每个样本信号的组合函数,即一个测量值已经包含了所有样本信号的

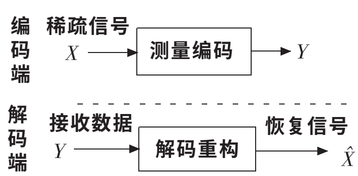


图 2 基于 CS 理论的编解码框图

* 江西省教育厅青年科学基金项目(GJJ09581)

少量信息。解码过程不是编码的简单逆过程,而是在盲源分离中的求逆思想下,利用信号稀疏分解中已有的重构方法在概率意义上实现信号的精确重构或者一定误差下的近似重构[1],解码所需测量值的数目远小于传统理论下的样本数。

3 信号的稀疏表示

由于CS理论的前提条件是信号具有稀疏性或可压缩性,为使模型简单化,只考虑长度为N的离散实值信号x,记为$x(n)$,$n\in[1,2,\cdots,N]$。由信号理论可知x能够用一组基$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}=[\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m,\cdots,\psi_M]$的线性组合表示(其中$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$代表$\boldsymbol{\Psi}$的转置),则

$$x=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\Psi}_k\alpha_k=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha} \tag{1}$$

式中:$\alpha_k=\langle x,\boldsymbol{\Psi}_k\rangle$,$\boldsymbol{\alpha}$与$x$是$N\times1$矩阵,$\boldsymbol{\Psi}$是$N\times N$矩阵。当信号$x$在某个基$\boldsymbol{\Psi}$上仅有$K\ll N$个非零系数(或远大于零的系数)$\alpha_k$时,称$\boldsymbol{\Psi}$为信号$x$的稀疏基。

信号在稀疏基上只有K个非零系数属于严格稀疏的情况,多数情况下信号无法满足严格稀疏的要求,但仍具有可压缩性,即信号的变换系数经排序后可以指数级进行衰减趋近于零时,信号也是可以近似稀疏表示的。合理地选择稀疏基$\boldsymbol{\Psi}$,使得信号的稀疏系数个数尽可能少,不仅有利于提高采集信号的速度,而且有利于减少存储、传输信号所占用的资源。常用的稀疏基有:正(余)弦基、小波基、chirplet基以及curvelet基等。

4 CS测量编码的模型

在CS编码测量模型中,并不是直接测量稀疏信号x本身,而是将信号x投影到一组测量向量$\boldsymbol{\Phi}=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m,\cdots,\varphi_M]$上,而得到测量值$y_m=\langle x,\varphi_m^{\mathrm{T}}\rangle$。写成矩阵形式为

$$y=\boldsymbol{\Phi}x \tag{2}$$

式中:x是$N\times1$矩阵,y是$M\times1$矩阵,$\boldsymbol{\Phi}$是$M\times N$的测量矩阵。将式(1)代入(2),有

$$y=\boldsymbol{\Phi}x=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\alpha} \tag{3}$$

式中:$\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$是$M\times N$矩阵。

由于测量值维数M远远小于信号维数N,求解式(2)的逆问题是一个病态问题,所以无法直接从y的M个测量值中解出信号x。而由于式(3)中$\boldsymbol{\alpha}$是K稀疏的,即仅有K个非零系数,而且$K<M\ll N$,那么利用信号稀疏分解理论中已有的稀疏分解算法,可以通过求解式(3)的逆问题得到稀疏系数$\boldsymbol{\alpha}$,再代回式(1)进一步得到信号x。Candes等人在文献[3]中指出,为了保证算法的收敛性,使得K个系数能够由M个测量值准确地恢复,式(3)中矩阵$\boldsymbol{\Theta}$必须满足受限等距特性(RIP)准则,即对于任意具有严格K稀疏(可压缩情况时,要求是$3K$)的矢量v,矩阵$\boldsymbol{\Theta}$都能保证如下不等式成立

$$1-\varepsilon\leqslant\frac{\|\boldsymbol{\Theta}v\|_2}{\|v\|_2}\leqslant1+\varepsilon \tag{4}$$

式中$\varepsilon>0$。RIP准则的一种等价的情况是测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$和稀疏矩阵$\boldsymbol{\Psi}$满足不相关性的要求[1,3-4]。

实际测量中稀疏基$\boldsymbol{\Psi}$可能会因信号的不同而改变,因此希望找到对任意的稀疏基$\boldsymbol{\Psi}$都能满足和测量基$\boldsymbol{\Phi}$不相关。对一维信号而言,测量矩阵$\boldsymbol{\Phi}$选取服从高斯分布的基矢量能保证和任意稀疏基$\boldsymbol{\Psi}$不相关的概率很高,类似的矩阵还有Bernouli矩阵等[2]。对二维图像,有文献提出了能快速计算随机扰动的部分傅立叶变换矩阵[5]、随机扰动的Hadamard矩阵[6]等。

5 CS解码重构的模型

当式(3)中的矩阵$\boldsymbol{\Theta}$满足RIP准则时,CS理论能够通过对式(3)的逆问题先求解稀疏系数$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}x$,后代入式(1)将稀疏度为$K$的信号$x$从$M$维的测量投影值$y$中正确地恢复出来[1-2]。解码的最直接方法是通过l_0范数下求解式(3)的最优化问题

$$\min_{a}\|\boldsymbol{\alpha}\|_{l_0}\quad \text{s.t.}\quad y=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha} \tag{5}$$

从而得到稀疏系数的估计。由于(5)式的求解是个NP-hard问题,而该最优化问题与信号的稀疏分解中的十分类似,所以有学者从信号稀疏分解的相关理论中寻找更有效的求解途径。文献[7]表明,l_1最小范数下在一定条件下和l_0最小范数具有等价性,可得到相同的解。那么(5)式转化为l_1最小范数下的最优化问题

$$\min_{a}\|\boldsymbol{\alpha}\|_{l_1}\quad \text{s.t.}\quad y=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha} \tag{6}$$

l_1最小范数下最优化问题又称为基追踪(BP),其常用实现算法有:内点法和梯度投影法。内点法速度慢,但得到的结果十分准确;而梯度投影法速度快,但没有内点法得到的结果准确[8]。二维图像的重构中,为充分利用图像的梯度结构,可修正为整体部分(Total Variation,TV)最小化法。由于l_1最小范数下的算法速度慢,新的快速贪婪法被逐渐采用,如匹配追踪法(MP)[9]和正交匹配追踪法(OMP)[4]。此外,有效的算法还有迭代阈值法[10]以及各种改进算法。

6 CS理论的应用举例

6.1 一维信号情况下的实验仿真

源信号是一维离散稀疏信号,长度$N=256$,选余弦基

为稀疏基，得到稀疏个数 K=30。在基于 CS 理论的编解码框架中，编码端采用高斯测量矩阵，解码端采用 OMP 法进行恢复重构。仿真实验首先观察 CS 理论下测量值数量对信号重建效果的影响。由图 3 可知，当测量值的数量 M 增加时，信号成功恢复的概率同步增加。而且当样本数目达到 M=110 时，信号已经能够准确恢复。此时由图 4 可以看出信号得到了准确的解码重构。

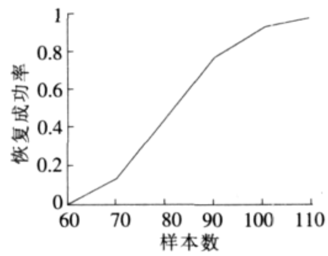
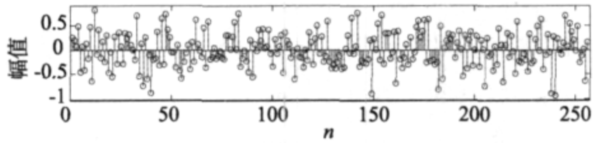
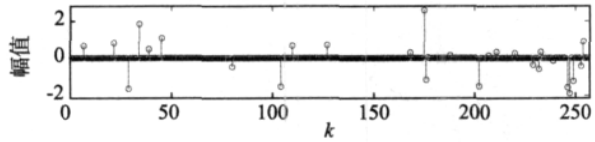


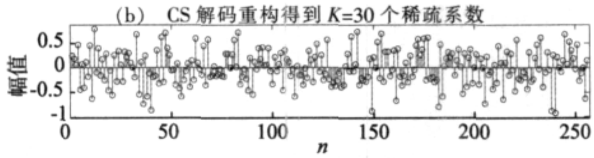
图 3　一维稀疏信号恢复成功概率



(a)　源信号，长度 N=256



(b)　CS 解码重构得到 K=30 个稀疏系数



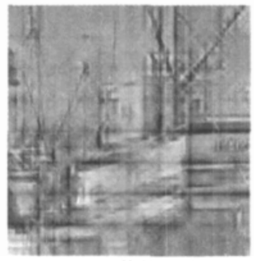
(c)　CS 解码重构后信号，长度 N=256

图 4　源信号、解码重构稀疏系数、解码重构信号图

6.2　二维图像情况下的实验仿真

源图像为 256×256 的 boat 图，选小波基为稀疏基。基于 CS 理论的编解码框架中，测量编码端采用分块（块大小为 32×32）Hadamard 测量矩阵，解码端基于 TV 最小化的梯度投影法进行恢复重构。图像的测量样本数 M=25 000，其重构结果如图 5a 所示。在传统的编解码理论下，对图像小波变换后保留其中的 25 000 个大系数进行编码，后进行解码、反变换重建，其结果如图 5b 所示。仿真结果表明，在编码端的测量值个数相同的情况下，CS 理论下的恢复图像 $PSNR$ 达到 27.9 dB，远远高于传统编解码的 15.49 dB。

(a)　CS 方式



(b)　传统方式

图 5　CS 与传统编解码 boat 图恢复效果比较

7　小结

笔者主要阐述了 CS 理论框架，以及基于 CS 理论的编解码模型。通过对一维信号、二维图像进行编解码的仿真实验说明了 CS 理论是一种能够使用少量测量值实现信号准确恢复的数据采集、编解码理论。由于 CS 理论对处理大规模稀疏或可压缩数据具有十分重要的意义，所以该理论提出后在许多研究领域得到了关注。目前，国外研究人员已开始将 CS 理论用于压缩成像、医学图像、模数转换、雷达成像、天文学、通信等领域。作为国外刚出现的新理论，CS 理论的研究方兴未艾，将有着更广泛的应用前景。

参考文献

[1] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

[2] CANDES E. Compressive sampling[C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid, Spain: [s.n.], 2006:1433-1452.

[3] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2006, 52(4): 489-509.

[4] TROPP J, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans. Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.

[5] ZOU J, GILBERT A C, STRAUSS M J, et al. Theoretical and experimental analysis of a randomized algorithm for sparse Fourier transform analysis[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 211(2): 572-595.

[6] GAN Lu. Block compressed sensing of natural images[C]//Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing. [S.l.]: IEEE Press, 2007:403-406.

[7] DONOHO D, TSAIG Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.

[8] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE J-STSP,2007,1(4): 586-598.

[9] TROP J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2004, 50(10):2231-2242.

[10] FORNASIER M, RAUHUT H. Iterative thresholding algorithms[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(2):187-208.

作者简介：

喻玲娟（1982-），硕士生，研究方向为视频图像处理；

谢晓春（1975-），副教授，从事信号与信息处理方面的研究。

责任编辑：哈宏疆　　收稿日期：2008-11-11