

轮廓波变换原理及其构造方法

郭 蔚^{1,2}, 李 婷^{3,*}

(1. 河北工业大学理学院, 天津, 300130; 2. 北京国际数学研究中心, 北京, 100871; 3. 军械工程学院
计算机工程系指挥自动化教研室, 石家庄, 河北, 050003)

摘要: 本文主要介绍轮廓波变换的基本原理, 对轮廓波多方向性实现的关键技术——多维多采样率系统进行了阐述并详细说明了方向滤波器的构造过程, 最后总结出了构造方向滤波器组常用的两种方法——McClellan变换法和多相位表示法, 并给出了 9×9 参数化扇形滤波器组的构造实例。

关键词: 轮廓波; 多维多采样率系统; 方向滤波器组; McClellan变换

MR(2000)主题分类: 42C08 / **中图分类号:** O174.2

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2012)03-0266-10

小波分析 (wavelet analysis) 是近 20 多年来发展起来的一种新的时频分析方法, 是传统傅里叶分析发展史上的里程碑. 小波分析方法在处理含“点奇异”的图像信号时, 与传统傅里叶分析方法相比, 取得了较好的效果. 然而在处理二维或者更高维含“线奇异”的信号时, 虽然由一维小波张成的高维小波基在逼近性能上要优于三角基, 却也不能达到理想的最优逼近阶. 这主要是受到了张量积小波方向局限性的影响. 小波分析的不足, 使人们开始从不同角度出发, 试图寻找比小波更好的“稀疏”表示工具. 于是, 脊波、曲波等第二代小波陆续诞生, 逐渐形成了多尺度几何分析理论.

轮廓波 (contourlet) 是由 Do 和 Vetterli 于 2001 年构建的多尺度几何分析工具. 轮廓波变换不仅能够提供任意方向上的信息, 而且它使用了迭代滤波器, 使得计算效率高且复杂度低, 因此, 轮廓波变换得到了广泛的应用. 近年来, 在合成孔径雷达 (SAR) 图像中相干斑抑制及自然图像中高斯白噪声的消除^[1,2]、纹理图像的检索和分类^[3]、对方向性较好的纹理图像的压缩^[4]、图像融合、图像分割^[5,6]、数字水印、视频编码等方面, 基于轮廓波变换的方法都取得了很好的处理效果.

然而, 从我们查阅的文献来看, 到目前为止还没有人针对轮廓波的基本原理、构造方法和步骤进行系统的综述性阐述. 本文将详细介绍轮廓波变换及其所涉及的采样原理、方向滤波器的构造方法. 在总结二维滤波器的两种常用构造方法和步骤的同时, 给出了二维 9×9 带参数的扇形滤波器的构造实例.

1 轮廓波变换原理

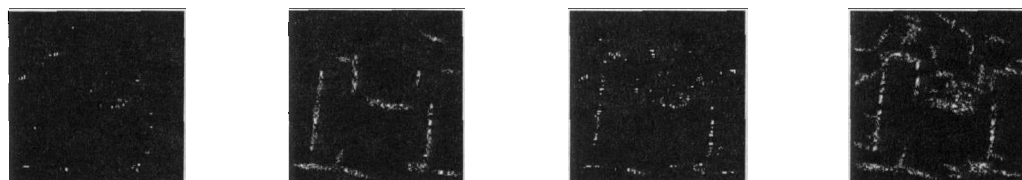
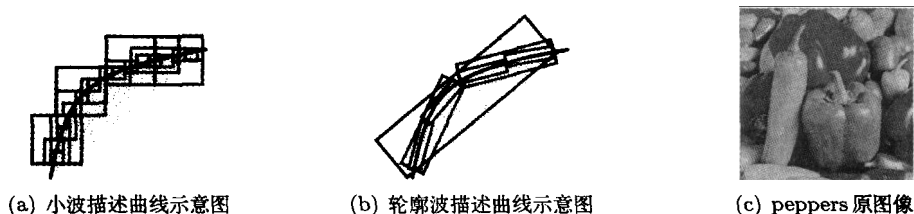
二维张量积小波的小波基只有三个方向, 且各向同性, 只能用正方形支撑区间描述轮廓, 不同大小的正方形对应小波的多分辨率结构. 当分辨率变得足够精细, 小波就变成用点来捕获轮廓. 事实上, 图像中物体的轮廓是多方向的, 而且往往是各向异性的; 因此, 张量积小波对物体

收稿日期: 2011-05-28. 修改稿收到日期: 2011-08-16.

基金项目: 河北省科学技术研究与发展计划 (民用 3G 智能监控系统研究与开发, No. 092135750).

E-mail: * 通信作者: 李婷, jxxylliting@163.com

轮廓的逼近显然不够“稀疏”. 轮廓波变换是用类似于轮廓段 (contour segment) 的基结构来逼近图像. 基的支撑区间是具有随尺度变化长宽比的“长条形”结构, 具有方向性和各向异性, 因而, 轮廓波系数中, 表示图像边缘的系数能量更加集中, 或者说轮廓波变换对于曲线有更“稀疏”的表达^[7]. 如图 1 所示, (a), (b) 分别为小波和轮廓波描述曲线的示意图; (c) 是 peppers 原图像; (d)–(g) 是使用不同数量的小波、轮廓波高频系数描述的 peppers 边缘图像, 其中, (d) 使用了 64 个小波高频系数, (e) 使用了 64 个轮廓波高频系数, (f) 使用了 256 个小波高频系数, (g) 使用了 256 个轮廓波高频系数.



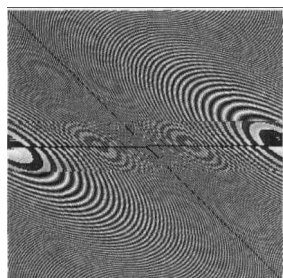
(d) 64 个小波系数描述边缘 (e) 64 个轮廓波系数描述边缘 (f) 256 个小波系数描述边缘 (g) 256 个轮廓波系数描述边缘

图 1 小波和轮廓波对边缘描述的比较图

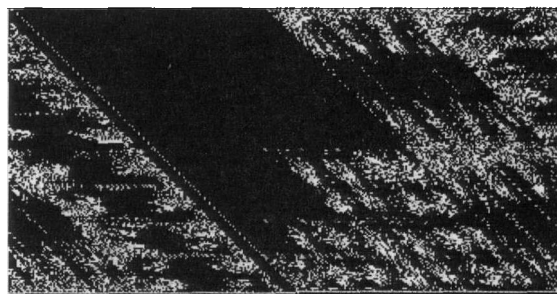
Contourlet 变换可以分为两个独立的步骤^[7, 8]:

1. 对图像进行多分辨率拉普拉斯金字塔 (Laplacian Pyramid, LP) 分解, 以捕获图像中存在的点奇异信息;
2. 用方向滤波器组对 LP 分解的高频分量进行方向滤波.

Contourlet 变换示例如图 2, (a) 为 zoneplate 原图像, (b) 是进行四层 contourlet 变换得到的各层系数.



(a) zoneplate 原图像



(b) 四层 contourlet 分解结果

图 2 Contourlet 分解

1.1 拉普拉斯金字塔分解

LP 分解是 Burt 和 Adelson 于 1983 年提出的一种图像多分辨率分析的方法^[9]. 每一次 LP 分解把对上一尺度的低频图像进行低通滤波再进行下采样的结果作为该尺度的低频图像; 对这个低频图像上采样, 然后用低通滤波器进行平滑处理, 再与上一尺度的低频图像做差, 结果视为高频图像. 分解过程如图 3(a) 所示, 其中 x_j 为第 j 尺度上的低频图像, H, G 均为低通滤波器, M 为下采样矩阵, 这里使用的是奇偶采样, 即 $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 与小波分解相比, LP 分解没有对高频图像进行划分, 这更有利于后继对高频分量的方向滤波.

重构过程为上述分解过程的逆过程, 如图 3(b) 所示.

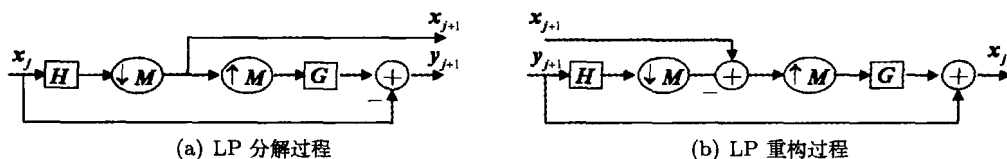


图 3 LP 分解和重构过程示意图

1.2 方向滤波

1.2.1 多维多采样率系统

方向滤波的一个核心问题是如何将方向频率划分到需要的精度, 同时保持样本数目不变, 采样恰恰能解决这个问题^[10]. 在多维多采样率系统中, 采样操作定义在网格上, 一个 d 维的网格可用一个 $d \times d$ 的非奇异整数矩阵表示, 下采样过程是由输入网格到其子网格的一个线性变换. 当 $x(n)$ 为一幅图像时, 采样矩阵 M 为 2×2 的非奇异矩阵^[11], 用 (n_1, n_2) 表示输入网格中点的坐标, 用 (u_1, u_2) 表示子网格中点的坐标, 用 M 对输入信号 x 进行下采样可以表示成 $x_d(n) = x(Mn)$, 即 $(n_1, n_2), (u_1, u_2)$ 与 M 之间满足

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

且采样率为 $\frac{1}{|M|}$; 用 M 对 $x(n)$ 进行上采样定义为:

$$x_u(n) = \begin{cases} x(M^{-1}n), & M^{-1}n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

在傅里叶变换域表示为 $X_u(\omega) = X(M^T\omega)$.

除了上一节提到的矩形采样外, 常用的还有梅花型采样, 其采样矩阵有两种形式:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

示意图如图 4(a), (b) 所示. 用 Q_0 对图像进行下采样, 相当于坐标轴逆时针旋转了 $\frac{\pi}{4}$, 因此, 采样结果应当使图像顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$. 用 Q_1 进行下采样的结果可类似推得. 效果图如图 4(d), (e).

当采样矩阵为幺模矩阵 (即采样矩阵行列式为 1) 时, 采样前后采样点数目不会变化, 但采样点位置发生变化, 这样的采样矩阵称为重采样矩阵. 常见的重采样矩阵有四种:

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



图4 梅花采样示意图和效果图

其对图像重采样效果如图 5(b)–(e) 所示:

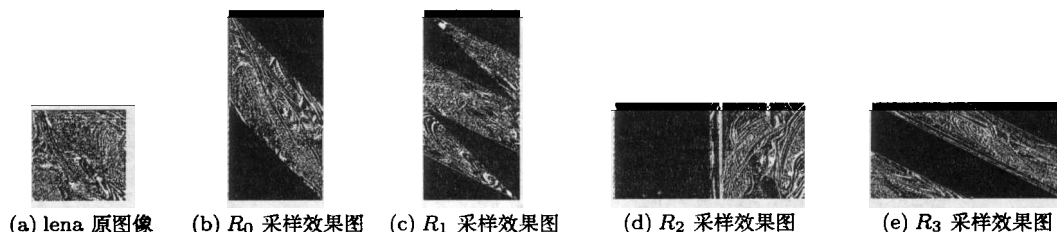


图5 各重采样矩阵采样效果图

需要注意的是, 滤波器采用的坐标系与图像坐标系不同, 因此, 同样的采样矩阵进行采样所得的结果也不同, 如图 6 所示, (b) 是对扇形滤波器 (a) 用 Q_0 进行下采样所得的结果, (d) 是对理想低通滤波器 (c) 用 R_0 进行下采样所得的结果.

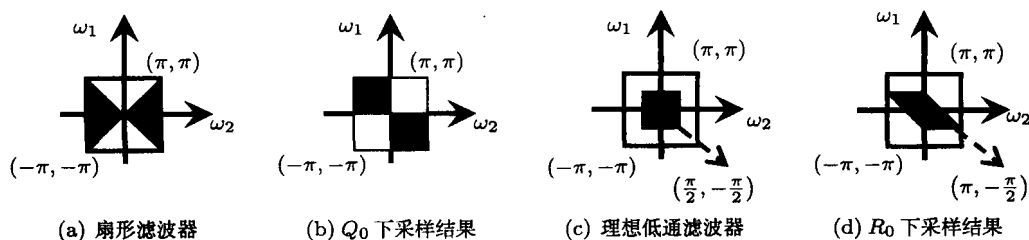


图6 采样矩阵对滤波器的作用效果图

对滤波器进行重采样, 必然会改变滤波器的形状, 其两个方向的范围可能会超出 $[-\pi, \pi]$, 因此, 为了得到与原滤波器具有相同范围的新滤波器, 需要在变换的过程中进行对称延拓. 我们以对扇形滤波器 $H_1(\omega)$ 用 R_0 进行下采样为例来详细说明新滤波器的生成过程. 如图 7 所示, 扇形滤波器 $H_1(\omega)$ 经过 R_0 下采样, 正方形各顶点分别被变换到了如下位置: $(\pi, \pi) \rightarrow (0, \pi)$, $(\pi, -\pi) \rightarrow (2\pi, -\pi)$, $(-\pi, -\pi) \rightarrow (0, -\pi)$, $(-\pi, \pi) \rightarrow (-2\pi, \pi)$. 因此, R_0 下采样后得到图 7(b) 所示的结果. 但是, 我们需要的滤波器在两个方向上的取值范围都是 $[-\pi, \pi]$, 所以需要对图 7(b) 所示的结果左右各进行一个周期的延拓, 如图 7(c) 所示, 左右两个新添加的平行四边形即为延拓的部分, 中间的虚线框为需要的部分, 去掉多余的部分就得到了图 7(d) 所示的对扇形滤波器用 R_0 进行下采样所得的最终结果.

多维多采样率系统中, 滤波和采样可以进行等效易位^[12], 其等效易位关系如图 8 所示.

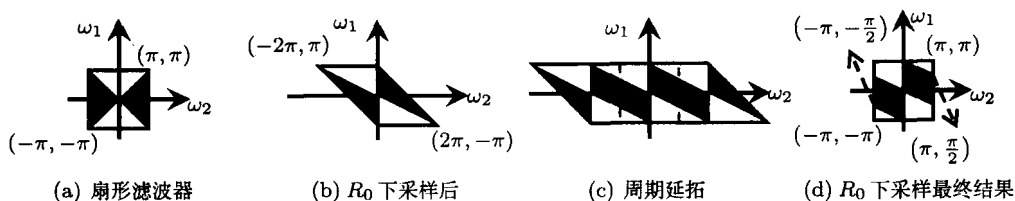


图 7 滤波器下采样结果的生成过程

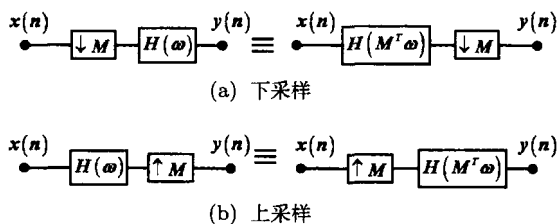


图 8 等效易位原理

1.2.2 方向滤波器组

方向滤波器组是将扇形滤波器组以适当的方式级联得到的^[13]. 具体地说是将扇形滤波器与梅花采样结合起来构成二维双通道滤波器组, 再通过重采样矩阵级联实现多尺度多方向滤波. 方向滤波器组三级分解过程如图 9(a) 所示, 其中采样矩阵 $B_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 是为了使得输出图形为矩形而进行的重采样. 图 9(b) 为使用方向滤波器组三级分解得到的频率划分, 其中标号为 i 的区域为输出 y_i 的频率范围.

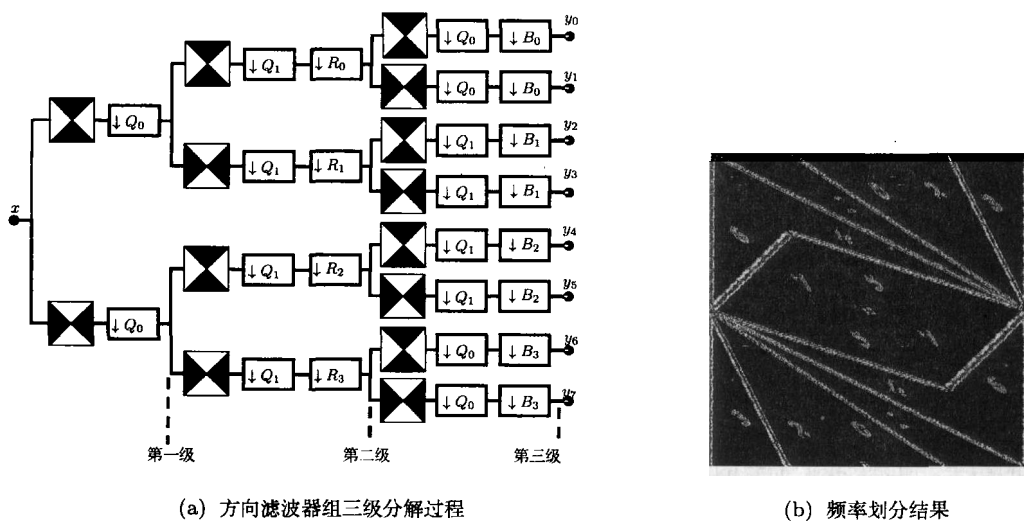


图 9 方向滤波分解

依据采样的等效易位原理, 以 y_0 为例进行滤波效果分析, 如图 10 所示, 其中, $D_0 = Q_0 Q_1 =$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D_1 = D_0 R_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 而 $D_1 Q_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, 因此, 采样率为 $\frac{1}{8}$, 为了保证输出 y_0 为矩形, S_0 应该为对角阵, 故 $S_0 = D_1 Q_0 B_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 可求得 $B_0 = Q_0^{-1} D_1^{-1} S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

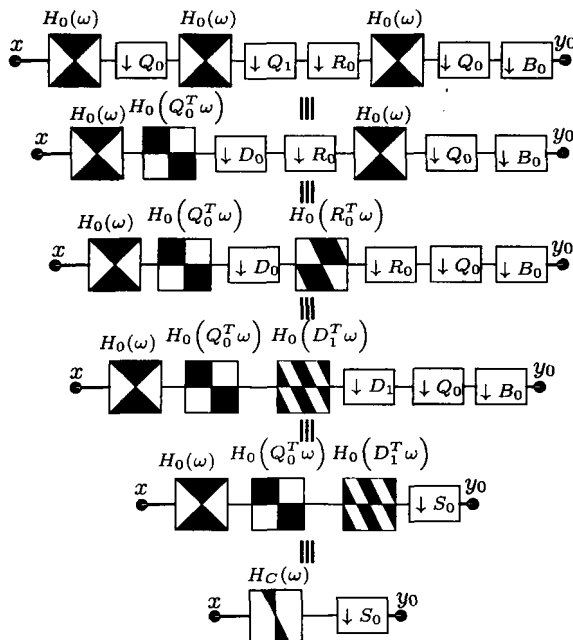


图 10 方向滤波效果分析

2 方向滤波器组的构造

有了上一节介绍的理论基础, 我们知道, 只要能够构造出一组扇形滤波器, 就能够依据上述理论构造出方向滤波器组, 进而实现轮廓波变换。

在实际操作中, 可以直接设计一个扇形滤波器组, 也可以先设计一个菱形滤波器组 (也叫钻石型滤波器组): $H_0(z_1, z_2)$, $H_1(z_1, z_2)$, 然后将菱形滤波器组第一个变量平移一个相位, 得到的 $H_0(-z_1, z_2)$, $H_1(-z_1, z_2)$ 即为一个扇形滤波器组。对于扇形滤波器组的设计, 常见的方法有两种: 基于 McClellan 变换的构造方法, 基于多相位表示的构造方法。

2.1 基于 McClellan 变换的滤波器组构造方法

McClellan 变换是构造二维滤波器的常用方法。对于一维滤波器 $H(z)$, 可以通过选取适当的二维映射函数 $M(z_1, z_2)$, 用 $M(z_1, z_2)$ 代替 $Z = \frac{z+z^{-1}}{2}$, 构造出二维滤波器 $H(z_1, z_2)$ 。为了满足完全重构条件, $M(z_1, z_2)$ 需满足 $M(-z_1, -z_2) = -M(z_1, z_2)$ 。

映射函数 $M(z_1, z_2)$ 的设计可以利用伯恩斯坦多项式来实现^[14]。当使用一阶伯恩斯坦多项式时, 可以得到映射函数

$$M(z_1, z_2) = \frac{1}{4}(z_1 + z_1^{-1} - z_2 - z_2^{-1});$$

当使用二阶伯恩斯坦多项式时, 可得

$$M(z_1, z_2) = \frac{1}{32} (z_1^{-2} z_2^{-1} + z_1^{-2} z_2 + z_1^2 z_2^{-1} + z_1^2 z_2 - z_1^{-1} z_2^{-2} - z_1^{-1} z_2^2 - z_1 z_2^{-2} - z_1 z_2^2 + 10z_1 + 10z_1^{-1} - 10z_2 - 10z_2^{-1}).$$

采用的阶数越高, 所得到的映射函数就越逼近理想频率特性, 但设计出的滤波器支集也越大.

在 Z 变换域用 $M(z_1, z_2)$ 来代替 $Z = \frac{z+z^{-1}}{2}$, 等价于在频域用 $M(\omega_1, \omega_2)$ 来代替 $\cos \omega$. 若 $M(\omega_1, \omega_2)$ 满足 $M(\omega, \omega) = 0$, $M(\pi, 0) = -1$, $M(0, \pi) = 1$, 则设计得到的滤波器组为扇形滤波器组; 若满足 $M(\omega + \pi, -\omega) = 0$, $M(\pi, \pi) = -1$, $M(0, 0) = 1$, 则设计得到的滤波器组为菱形滤波器组.

在频域中, 用 $M(\omega_1, \omega_2)$ 来代替 $\cos \omega$ 是非常容易实现的. 具体滤波器构造步骤如下:

步骤 1 确定一个对称的零相位 FIR 滤波器 $h(n)$, 并将其频域表示写成三角函数的形式.

$$H(\omega) = \sum_{n=-N}^N h(n) e^{-in\omega} = \sum_{n=0}^N a(n) \cos n\omega,$$

其中 $a(n) = \begin{cases} h(0), & n=0, \\ 2h(n), & \text{其它}. \end{cases}$ 以 $N=4$ 为例, 即

$$h(n) = \{h_4 \ h_3 \ h_2 \ h_1 \ h_0 \ h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4\},$$

则

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^4 a(n) \cos n\omega = h_0 + 2h_1 \cos \omega + 2h_2 \cos 2\omega + 2h_3 \cos 3\omega + 2h_4 \cos 4\omega.$$

步骤 2 将 $H(\omega)$ 表示成 $\cos \omega$ 的多项式, 以便于下一步进行替换.

利用迭代公式 $\cos(n+1)\omega = 2\cos \omega \cos n\omega - \cos(n-1)\omega$, 可以将 $\cos n\omega$ 表示成 $\cos \omega$ 的 n 阶切比雪夫多项式:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h_0 + 2h_1 \cos \omega + 2h_2 \cos 2\omega + 2h_3 \cos 3\omega + 2h_4 \cos 4\omega \\ &= (h_0 - 2h_2 + 2h_4) + (2h_1 - 6h_3) \cos \omega + (4h_2 - 16h_4) \cos^2 \omega + 8h_3 \cos^3 \omega + 16h_4 \cos^4 \omega. \end{aligned}$$

步骤 3 选取适当的映射函数 $M(\omega_1, \omega_2)$ 来替换上式中的 $\cos \omega$, 以得到二维滤波器的频域表示. 例如取 $M(\omega_1, \omega_2) = 0.5 \cos \omega_1 + 0.5 \cos \omega_2$, 则

$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= (h_0 - 2h_2 + 2h_4) + (2h_1 - 6h_3) \cos \omega + (4h_2 - 16h_4) \cos^2 \omega \\ &\quad + 8h_3 \cos^3 \omega + 16h_4 \cos^4 \omega \\ &= (h_0 - 2h_2 + 2h_4) + (h_1 - 3h_3)(\cos \omega_1 + \cos \omega_2) \\ &\quad + (h_2 - 4h_4)(\cos \omega_1 + \cos \omega_2)^2 \\ &\quad + h_3(\cos \omega_1 + \cos \omega_2)^3 + h_4(\cos \omega_1 + \cos \omega_2)^4 \\ &= (h_0 - 2h_2 + 2h_4) + (h_1 - 3h_3)(\cos \omega_1 + \cos \omega_2) \\ &\quad + (h_2 - 4h_4)(\cos^2 \omega_1 + 2\cos \omega_1 \cos \omega_2 + \cos^2 \omega_2) \\ &\quad + h_3(\cos^3 \omega_1 + 3\cos^2 \omega_1 \cos \omega_2 + 3\cos \omega_1 \cos^2 \omega_2 + \cos^3 \omega_2) \\ &\quad + h_4(\cos^4 \omega_1 + 4\cos^3 \omega_1 \cos \omega_2 + 6\cos^2 \omega_1 \cos^2 \omega_2 \\ &\quad + 4\cos \omega_1 \cos^3 \omega_2 + \cos^4 \omega_2). \end{aligned}$$

步骤 4 降幂, 将 $\cos^n \omega$ 表示成 $\cos n\omega$ 的形式, 以便于确定滤波器 $h_0(n_1, n_2)$. 用迭代公式 $\cos^n \omega = \cos \omega \cos^{n-1} \omega$ 和 $\cos \omega \cos n\omega = \frac{1}{2} \cos(n+1)\omega + \frac{1}{2} \cos(n-1)\omega$ 对上述 $H(\omega_1, \omega_2)$ 进行变形:

$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= (h_0 - h_2 + 0.25h_4) + (h_1 - 0.75h_3)(\cos \omega_1 + \cos \omega_2) \\ &\quad + 0.5h_2(\cos 2\omega_1 + \cos 2\omega_2) + (2h_2 - 2h_4)(\cos \omega_1 \cos \omega_2) \\ &\quad + 0.25h_3(\cos 3\omega_1 + 6 \cos 2\omega_1 \cos \omega_2 + 6 \cos \omega_1 \cos 2\omega_2 + \cos 3\omega_2) \\ &\quad + 0.125h_4(\cos 4\omega_1 + 8 \cos 3\omega_1 \cos \omega_2 + 12 \cos 2\omega_1 \cos 2\omega_2 \\ &\quad + 8 \cos \omega_1 \cos 3\omega_2 + \cos 4\omega_2). \end{aligned}$$

步骤 5 求低通滤波器 $h_0(n_1, n_2)$. 根据

$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{n_2=-N}^N \sum_{n_1=-N}^N h(n_1, n_2) e^{-in_1\omega_1 - in_2\omega_2} \\ &= \sum_{n_2=-N}^N \sum_{n_1=-N}^N h(n_1, n_2) \cos(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \\ &= \sum_{n_2=-N}^N \sum_{n_1=-N}^N h(n_1, n_2) \cos n_1\omega_1 \cos n_2\omega_2 \\ &= h(0, 0) + 2 \sum_{n_2=1}^N h(0, n_2) \cos n_2\omega_2 + 2 \sum_{n_1=1}^N h(n_1, 0) \cos n_1\omega_1 \\ &\quad + 4 \sum_{n_2=1}^N \sum_{n_1=1}^N h(n_1, n_2) \cos n_1\omega_1 \cos n_2\omega_2, \end{aligned}$$

求得滤波器 $h_0(n_1, n_2)$ 的右下角部分为:

$$0.25 \begin{pmatrix} 4h_0 - 4h_2 + h_4 & 2h_1 - 1.5h_3 & h_2 & 0.5h_3 & 0.25h_4 \\ 2h_1 - 1.5h_3 & 2h_2 - 2h_4 & 1.5h_3 & h_4 & 0 \\ h_2 & 1.5h_3 & 1.5h_4 & 0 & 0 \\ 0.5h_3 & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

步骤 6 根据 $h_1(n_1, n_2) = (-1)^{n_1+n_2} h_0(-n_1, -n_2)$, 求得高通滤波器 $h_1(n_1, n_2)$ 的右下角部分.

步骤 7 根据对称性求得完整的滤波器 $h_0(n_1, n_2)$ 和 $h_1(n_1, n_2)$.

若选取一维分数阶样条正交滤波器为原型滤波器, 映射函数 $M(z_1, z_2)$ 在频域的响应函数取 $P(\omega_1, \omega_2) = 0.5 \cos \omega_1 - 0.5 \cos \omega_2$, 可以得到一组以 λ 为参数的扇形滤波器组:

$$\begin{cases} H_0(\omega_1, \omega_2) = \frac{(2 - 2P(\omega_1, \omega_2))^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{(2 + 2P(\omega_1, \omega_2))^{\lambda} + (2 - 2P(\omega_1, \omega_2))^{\lambda}}}, \\ H_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{(2 + 2P(\omega_1, \omega_2))^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{(2 + 2P(\omega_1, \omega_2))^{\lambda} + (2 - 2P(\omega_1, \omega_2))^{\lambda}}}. \end{cases}$$

2.2 基于多相位表示的滤波器组构造方法

众所周知, 小波分解滤波器组 $E(z)$ 和重构滤波器组 $R(z)$ 均可用多相位矩阵来表示:

$$E(z) = \begin{pmatrix} E_{00} & E_{01} \\ E_{10} & E_{11} \end{pmatrix}, \quad R(z) = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} \\ R_{10} & R_{11} \end{pmatrix},$$

其中, E_{00} 和 R_{00} 表示低通滤波器的偶数项, E_{01} 和 R_{01} 表示低通滤波器的奇数项, E_{10} 和 R_{10} 表示高通滤波器的偶数项, E_{11} 和 R_{11} 表示高通滤波器的奇数项.

根据完全重构条件以及我们对滤波器的要求, 构造多相位矩阵 $E(z)$ 和 $R(z)$ ^[15], 例如,

$$E(z) = \begin{pmatrix} 0.5z^{-N} & 0.5\beta(z) \\ -0.5z^{-N}\beta(z) & -0.5\beta^2(z) + z^{-2N+1} \end{pmatrix}, \quad R(z) = \begin{pmatrix} -0.5\beta^2(z) + z^{-2N+1} & -0.5\beta(z) \\ 0.5z^{-N}\beta(z) & 0.5z^{-N} \end{pmatrix}$$

时, 若 $\beta(z)$ 具有如下频率特性^[15]:

$$|\beta(\omega)| = 1, \quad \forall \omega,$$

$$\angle\beta(\omega) = \begin{cases} (-2N+1)\omega, & 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, \\ (-2N+1)\omega \pm \pi, & \frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \pi, \end{cases}$$

则 $H_0(z) = E_{00}(z^2) + z^{-1}E_{01}(z^2)$, $G_0(z) = R_{00}(z^2) + z^{-1}R_{01}(z^2)$ 为理想低通滤波器, $H_1(z) = E_{10}(z^2) + z^{-1}E_{11}(z^2)$, $G_1(z) = R_{10}(z^2) + z^{-1}R_{11}(z^2)$ 为理想高通滤波器. 设计满足理想频率特性的 $\beta(z)$ 是十分困难的, 一般只能设计 $\beta(z)$, 使它逼近理想频率特性, 例如令 $\beta(z)$ 具有第二类线性相位 FIR 时, 通过 Remez 优化设计, 得到

$$\begin{aligned} \beta(z) = & 0.630(z^{-5} + z^{-6}) - 0.193(z^{-4} + z^{-7}) + 0.0972(z^{-3} + z^{-8}) \\ & - 0.0526(z^{-2} + z^{-9}) + 0.0272(z^{-1} + z^{-10}) - 0.0144(1 + z^{-11}). \end{aligned}$$

为了构造二维滤波器组, 将多相位矩阵中的 $\beta(z)$ 用 $\beta(z_1)\beta(z_2)$ 来代替, 一维延迟 z^{-1} 用二维延迟 $z_1^{-1}z_2^{-1}$ 来代替, 就得到了菱形滤波器组的多相位矩阵, 从而可以求得一组菱形滤波器组, 再将滤波器组的第一个变量平移一个相位, 就可以得到一组扇形滤波器组了.

3 总结与展望

本文主要阐述了轮廓波变换的基本理论以及目前常见的构造方法, 并构造了一组参数化的滤波器. 随着轮廓波变换应用领域的不断扩大, 人们对轮廓波的理论体系提出了更高的要求, 如轮廓波分解方向子带数目的自适应确定, 抗频率混叠的轮廓波变换算法理论的研究, 方向滤波器组的新型构造方法以及快速算法, 轮廓波变换的硬件实现等内容. 这些都需要我们去进一步地研究和探讨.

参考文献

- [1] Zhou Z.F., Cao J.Z. and Liu W.H., Contourlet-based image denoising algorithm using adaptive windows, *IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, 2009: 3654-3657.
- [2] Wang X.K. and Gao J.H., Image denoising method based on nonsubsampled contourlet transform and bandelet transform, *2009 First International Conference on Information Science and Engineering*, 2009: 1278-1281.

- [3] Chen X.W., Yu G.L. and Gong J.B., Contourlet-1.3 texture image retrieval system, *2010 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition*, 2010: 49-54.
- [4] Yang J.Y., Hou C.P. and Xu W.L., Image coding via sparse contourlet representation, *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2010: 3048-3051.
- [5] 钟桦, 焦李成, 侯鹏, 基于非下采样 Contourlet 变换的视网膜分割, *计算机学报*, 2011, 34(3): 574-582.
- [6] 刘国英, 秦前清, 王雷光, 梅天灿, 张飞燕, 一种基于 Contourlet 变换的多尺度纹理分割的新算法, *红外与毫米波学报*, 2009, 28(6): 450-455.
- [7] Do, M.N. and Vetterli, M., The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation, *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [8] Do, M.N. and Vetterli, M., Contourlets: a new directional multiresolution image representation, *Conference Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2002, 1: 497-501.
- [9] Burt, P.J. and Adelson, E.H., The Laplacian pyramid as a compact image code, *IEEE Transactions on Communications*, 1983, 31(4): 532-540.
- [10] Kovacevic, J. and Vetterli, M., Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for \mathbb{R}^n , *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, 38(2): 533-555.
- [11] Karlsson, G. and Vetterli, M., Theory of two-dimensional multirate filter banks, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990, 38(6): 925-937.
- [12] Evans, B.L., Bamberger, R.H. and McClellan, J.H., Rules for multidimensional multirate structures, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(4): 762-771.
- [13] Bamberger, R.H., Smith, M.J.T., A filter bank for the directional decomposition of images: theory and design, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(4): 882-893.
- [14] 练秋生, 基于视觉特性的多方向小波构造及其应用研究, 博士学位论文, 秦皇岛: 燕山大学, 2006: 38-41.
- [15] Phoong, S.M., Kim, C.W., Vaidyanathan, P.P. and Ansari, R., A new class of two-channel biorthogonal filter banks and wavelet bases, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(3): 649-665.

The Contourlet Transform: Theory and Design

GUO Wei^{1,2}, LI Ting³

(1. College of Science, Hebei University of Technology, Tianjin, 300130, P. R. China; 2. Beijing International Center for Mathematical Research, Beijing, 100871, P. R. China; 3. Department of Computer Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang, Hebei, 050003, P. R. China)

Abstract: In this paper, we summarize the theory and designing methods of contourlet transform. First, we explain the multidimensional multirate system, which is the key technique to achieve the multidirectional filter by contourlets, and give detail steps how to get directional filter banks from fan filters. Then we further introduce two main designing methods of fan filters based on McClellan transform and polyphase matrix. Finally, we construct a group of parameterized fan filter banks with size 9 by 9.

Key words: contourlet; multidimensional multirate system; directional filter banks; McClellan transform