

文章编号:1005-3085(2005)05-0761-13

脊波理论:从脊波变换到 Curvelet 变换*

焦李成¹, 谭 山¹, 刘 芳²

(1- 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室和智能信息处理研究所, 西安 710071;

2- 西安电子科技大学计算机学院, 西安 710071)

摘 要: 本文旨较系统地评述继小波理论后, 新近发展起来的具有变革意义的脊波理论的发展沿革、研究现状、应用前景和存在的问题。在信号处理、数据压缩、模式识别、统计估值等领域, 获得对某些函数类的高的非线性逼近能力是至关重要的。由一维小波张成的二维小波虽然能有效表示含“点奇异”的二维函数, 但对于含“线奇异”的二维函数, 却不能获得最优的甚至哪怕是“近似最优”的非线性逼近阶。Candes 提出的脊波变换巧妙地将二维函数中的“直线奇异”转化为“点奇异”, 再用小波进行处理, 能获得对含“直线奇异”的二维或高维函数最优的非线性逼近阶。正交脊波, 则延续了脊波变换将“直线奇异”转化为“点奇异”进行处理的思想, 并且构成一组 $L^2(R^2)$ 上的标准正交基。单尺度脊波和 Curvelet 变换由脊波变换发展而来, 分别利用了函数局部化和频带剖分的思想, 将脊波理论发展到了一个更高的阶段, 这两种变换都能“近似最优”的表示直线和曲线奇异, 因而具有更好的应用前景。

关键词: 稀疏表示; 最优基; 脊波; Curvelet; 图像去噪; 非参数估计

分类号: AMS(2000) 94A08

中图分类号: O391.41

文献标识码: A

1 前言

寻求客观事物的“稀疏”表示方法, 一直是计算机视觉、数学、数据压缩等领域的专家学者致力于的研究目标。

小波理论兴起于上世纪80年代中期, 并迅速发展成为数学、物理、天文、生物、化学等多个学科的重要分析工具之一; 其良好的时、频局域分析能力, 对一维有界变差函数类的“最优”逼近性能, 多分辨分析概念的引入以及快速算法的存在, 是小波理论迅猛发展的重要原因。小波分析的巨大成功尤其表现在信号处理、图像压缩等应用领域。1999年, 新的静止图像压缩标准 JPEG-2000 的确立更是小波分析发展史上的一座里程碑。

对于含“点奇异”的一维信号, 小波能达到“最优”的非线性逼近阶。而在处理二维或者更高维含“线奇异”的信号时, 虽然由一维小波张成的高维小波基在逼近性能上要优于三角基, 却也不能达到理想的最优逼近阶。小波变换的不足使人们开始寻求更好的非线性逼近工具^{[1][2][3]}。脊波理论就在这样的背景下应运而生。

本文主要综述脊波理论的产生、发展历程, 并阐述目前亟待解决的问题。

收稿日期: 2005-06-04. 作者简介: 焦李成(1959年生), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 研究方向: 智能信息处理。

*基金项目: 国家自然科学基金(No.60073053); 国家“863”计划(No.2002AA135080); “十五”国防预研项目(No.413070504)。

2 脊波理论产生的背景

我们先从函数逼近论的角度来剖析脊波理论产生的背景。

对于 Sobolev 函数类, 有如下定理^[4]:

定理2.1 记定义于环 T 上的函数类 $F = \{f, \|f\|_{H^s(T)} \leq 1\}$, 设 $f \in F$, 对于任一正交基 $(\phi_i)_{i \in I}$, 令 $\mathcal{Q}_M(f)$ 表示此正交基对函数 f 的 M 项非线性逼近, 即,

$$\mathcal{Q}_M(f) = \arg \min \|f - g\|_2, \quad g = \sum_{n=1}^M \lambda_n \phi_{i_n}, \quad (1)$$

则存在下界

$$\sup_{f \in F} \|f - \mathcal{Q}_M(f)\|_2 \geq CM^{-s}. \quad (2)$$

并且

$$\#\{|\alpha_i| > 1/M \mid \alpha_i = \langle f, \phi_i \rangle\} \geq CM^{2/(2s+1)}, \quad (3)$$

其中 C 为常数, Sobolev 范数按如下定义:

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi, \quad s > 0 \quad (4)$$

三角基和小波基都是表示 Sobolev 函数类的最优基。事实上, 对于 $\forall f \in F$, 无论对三角基还是小波基, 都存在:

$$\|f - \mathcal{Q}_M(f)\|_2 \leq CM^{-s} \|f\|_{H^s(T)} \quad (5)$$

并且有:

$$\#\{|\alpha_i| > 1/M \mid \alpha_i = \langle f, \phi_i \rangle\} = O(M^{2/(2s+1)}). \quad (6)$$

真实物理世界中的信号, 所含信息更多地包含于奇异点、线、面, 能否“有效”地表征此类信号, 便成为衡量所用分析工具好坏的一个关键因素。为了避免理解上的歧异起见, 有必要解释一下众多相关文献中运用甚广的一些习惯用语。式(5)、(6)表示小波基、三角基对于 Sobolev 函数类达到了正交基能达到的最优逼近阶的下界, 所以我们可以说: 三角基、小波基是表示 Sobolev 函数类的“最优”基; 三角基、小波基能“有效”地表示 Sobolev 函数类; Sobolev 函数类傅立叶变换、小波变换的系数序列是“稀疏”的; 以上三种说法等价。

我们先讨论对包含点奇异的一维信号的非线性逼近问题。“点奇异”, 有时也称为“0 维奇异”。

假设小波 $\psi_{j,n}$ 属于 C^q 且有 q 阶消失矩, 对于一维分段光滑函数, 有如下定理^[5]:

定理2.2 设 f 在 $[0, 1]$ 上具有有限不连续点, 且在有些不连续点之间是一致 Lipschitz α ($\alpha < q$) 的, 用 $\varepsilon_n^W[M] = \|f - \mathcal{Q}_M^W(f)\|_2$ 表示小波 $\psi_{j,n}$ 对函数 f 的 M 项非线性逼近误差, 则:

$$\varepsilon_n^W[M] \leq O(M^{-\alpha}), \quad (7)$$

此时函数 f 的 M 项傅立叶非线性逼近误差 $\varepsilon_n^F[M]$ 只有 $M^{-1/2}$ 的衰减级。 f 在不连续点之间的正则度越高, 小波非线性逼近相对于傅立叶非线性逼近的改进就越大。

比较式(7)与式(5), 我们可以“惊讶”地发现, 对于一维函数, “点奇异”存在与否, 并不影响小波的表征性态; 也就是说, 无论对于 Sobolev 函数类还是引入了“点奇异”的 Sobolev 函数类, 小波基对它们的非线性逼近性能是一样的, 都能达到式(2)中的“最优”

下界。而三角基则不然。小波分析比傅立叶分析能更“稀疏”地表示一维分段光滑或者有界变差函数。这就是小波分析在众多学科领域中取得巨大成功的一个关键原因。

遗憾的是, 小波分析在一维时所具有的优异特性并不能简单的推广到二维或更高维。考虑一个简单二维图像模型^[6]:

$$F_{\Gamma}(\alpha, A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(s, C)} F_{\gamma}(\alpha, A), \quad (8)$$

其中

$$F_{\gamma}(\alpha, A) = \{f \in [0, 1]^2 \setminus \gamma[0, 1], \|f\|_{C^{\alpha}} \leq A\}, \quad (9)$$

$$\Gamma(s, C) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow [1/10, 9/10], \|\gamma\|_{C^s} \leq C\}. \quad (10)$$

式(8)表示了一类含曲线奇异(包括直线)的二维函数, 这种函数, 除了在二维平面中的曲线 $\Gamma(s, C)$ 外, 都是 C^{α} 光滑的, 而且, 奇异曲线 $\Gamma(s, C)$ 本身也 C^s 光滑。如图1所示, 区域A、B是 C^s 光滑的, 奇异曲线为 Γ , C^s 阶光滑。

对于此类模型的一种特殊情形, 有如下定理^[5]:

定理2.3 设 $f = C1_{\Omega}$ 是一个边界 $\partial\Omega$ 具有有限长度的集合 Ω 的特征函数, 则可分离周期正交小波非线性逼近误差为 $\varepsilon_n^W[M] \sim \|f\|_v M^{-1/2}$ 。

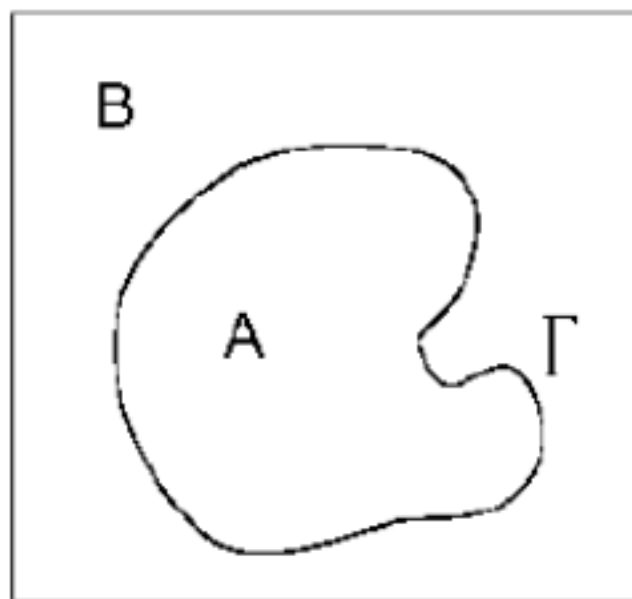


图1: 具有光滑边缘的图像模型

其中 $\|f\|_v = \int_0^1 \int_0^1 |\vec{\nabla} f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$ 表示有界变差图像的全变差范数。定理2.3可以推广到沿长度为 $L(L > 0)$ 的轮廓 $\partial\Omega$ 且幅值大于 $C(C > 0)$ 的不连续的分片正则函数。此定理表明二维时, 可分离小波对含“线奇异”的函数的逼近性能差强人意。

根据生理学家对人类视觉系统的研究结果和自然图像统计模型, 一种“最优”的图像表示方法应该具有如下特征^{[7][8]}:

- 1) 多分辨特征: 能够对图像从粗分辨率到细分辨率进行连续逼近, 即“带通”性;
- 2) 局域性: 在空域和频域, 这种表示方法的“基”应该是“局部”的;
- 3) 方向性: 其“基”应该具有多“方向”性。

由一维小波张成的二维可分离小波基只具有有限方向, 即水平、垂直和对角, 多方向的缺乏是其不能“最优”表示具有线或者面奇异的高维函数的重要原因。

事实上, 具有线或面奇异的函数在高维空间中非常普遍, 例如, 自然物体光滑边界使得自然图像的不连续性往往体现为光滑曲线上的奇异性, 而并不仅仅是点奇异。实现函数的稀疏表示是信号处理、计算机视觉等众多领域中一个非常核心的问题。小波分析的不足, 使人们开始从不同角度出发, 试图寻找比小波更好的“稀疏”表示工具。脊波理论便是其中最具有代表性、影响最深远的一种理论^{[9][10]}。

3 脊波

1998年, Candès 在其博士论文^[11,12]中给出了脊波 (Ridgelet) 变换的基本理论框架。脊波变换是一种非自适应的高维函数表示方法, 对含直线奇异的多变量函数能达到“最优”的逼近阶。

脊波变换理论的产生结合了现代调和分析、群表示理论和小波分析的一些重要成果。

考虑多变量函数 $f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ 。

定义3.1 若函数 $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 属于 Schwartz 空间 $S(\mathbf{R})$ 且满足容许条件:

$$K_\psi = \int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi''} d\xi < \infty, \quad (11)$$

则称 ψ 是容许神经激励函数。

称

$$\psi_\gamma(x) a^{\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{\langle u, x \rangle - b}{a}\right) \quad (12)$$

为脊波 (Ridgelet), 其中 γ 为三元组 (a, u, b) , $\gamma \in \Gamma$, 参数空间 $\Gamma = \{(a, u, b) : a, b \in \mathbf{R}, a > 0, u \in s \in s^{n-1}\}$, s^{n-1} 为空间 \mathbf{R}^n 中的单位球, 分别称 a 为尺度参数, b 为位置参数, u 为方向参数。

定义连续脊波变换为:

$$\mathbf{R}(f)(\gamma) = \langle f, \psi_\gamma \rangle, \quad (13)$$

并且有:

定理3.2 (重构公式) 设函数满足 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 若 ψ 满足容许条件, 则有:

$$f = c_\psi \int \langle f, \psi_\gamma \rangle \mu(d\gamma), \quad (14)$$

其中 $c_\psi = \pi(2\pi)^{-n} K_\psi^{-1}$, $\mu(d\gamma) \propto \frac{da}{a^{n+1}} du db$ 为定义于参数空间 Γ 上的测度。

定理3.3 (Parseval 关系) 设 $f \in L^1 \cup L^2(\mathbf{R}^n)$ 且 ψ 满足容许条件, 则:

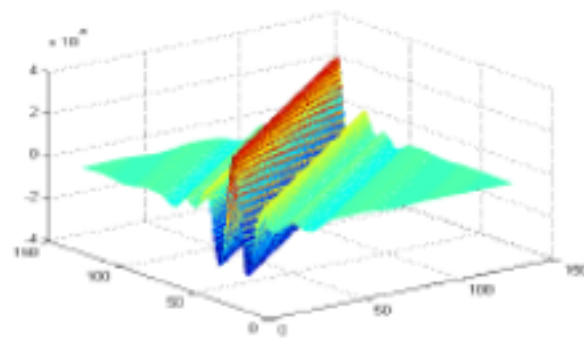
$$\|f\|_2^2 = c_\psi \cdot \int |\langle f, \psi_\gamma \rangle|^2 \mu(d\gamma). \quad (15)$$

因为 $L^1 \cup L^2(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠, 于是有:

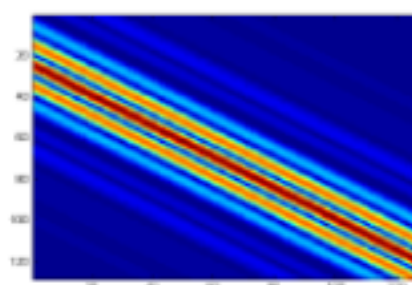
命题3.1 对于 $\forall f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$,

$$\langle f, g \rangle = c_\psi \int \mathbf{R}(f) \mathbf{R}(g)(\gamma) \mu(d\gamma). \quad (16)$$

在 \mathbf{R}^2 中, 脊波沿脊线 $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{const}$ 是常数, 垂直脊线方向是小波。如图2所示。



(a) 三维视图



(b) 俯视图

图2: 脊波 (用 Meyer 小波构造)

性质3.1 脊波变换 $\mathbf{R}: L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\Gamma, \mu(d\gamma))$ 在 L^2 范数意义下是等距映射。

性质3.2 对于 $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, 脊波变换(13)等价于对函数 f 的 Radon 变换进行一维小波变换, 即 $\mathbf{R}(f)(\gamma) = \langle P_\mu f, \psi_{a,b} \rangle$ 。其中, $\psi_{a,b} = a^{1/2} \psi(a(t-b))$ 。

事实上, 利用 Fubini 定理, 很容易验证此性质。性质3.2为脊波变换的实现提供了一种途径: 先进行 Radon 变换, 再进行一维小波变换。

下面, 考虑连续脊波变换的离散化问题。

考虑支撑区间为单位立方体 $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\|_\infty \leq 1\}$ 上的函数 f , 其中 $\|x\|_\infty = \max_i x_i$ 。Candès 按如下方式离散参数空间 Γ : 离散尺度参数 a 为 $\{a_0^j\}_{j \geq j_0}$, 其中 $a_0 > 1$, j_0 为最小尺度; 离散位置参数 b 为 $\{kb_0 a_0^{-j}\}_{k,j \geq j_0}$; 另一个需要离散参数是 μ , 即对单位球的离散, 对单位球的离散与尺度参数有关, 尺度越小, 则对单位球上的采样越细。在尺度 a_0^j , 离散单位球 s^{n-1} 为 ε_j -网 Σ_j , 其中 $\varepsilon_j = \sigma a_0^{-(j-j_0)}$, σ 为某个正常数, 并且 Σ_j 在 s^{n-1} 中均匀分布, 即满足所谓的“均匀分布特性”。于是, 离散脊波可以表示为:

$$\psi_\gamma(x) = a_0^{j/2} \psi(a_0^j \langle \mu, x \rangle - kb_0), \quad \lambda \in \Gamma_d = \{(a_0^j, \mu, kb_0 a_0^{-j}), j > j_0, \mu \in \Sigma_j, k \in Z\}. \quad (17)$$

与小波框架理论类似, 给出如下定义:

定义3.2 称函数 ψ 是可框架的, 如果 $\psi \in C^1(\mathbf{R})$ 并且满足

$$1) \quad \inf_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{j>0} |\hat{\psi}(a_0^{-j} \xi)|^2 |a_0^{-j} \xi|^{-(n-1)} > 0; \quad (18)$$

$$2) \quad |\hat{\psi}(\xi)| \leq C |\xi|^\alpha (1 + |\xi|)^{-\gamma}, \quad \text{其中 } \alpha > \frac{n-1}{2}, \gamma > 2 + \alpha. \quad (19)$$

定理3.4 (框架存在性定理) 设函数 ψ 是可框架的, 则存在 $b_0^* > 0$ 使得对于 $\forall b_0 < b_0^*$, 能找到两个依赖于 ψ, a_0, b_0 的常数 A, B 使得对于 $\forall f \in L^2(\mathcal{Q})$, 有

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_d} |\langle f, \psi_\gamma \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2. \quad (20)$$

于是, 存在对偶框架 $\tilde{\psi}_\gamma$, 使得

$$f = \sum_{\lambda \in \Gamma_d} \langle f, \psi_\lambda \rangle \tilde{\psi}_\lambda = \sum_{\lambda \in \Gamma_d} \langle f, \tilde{\psi}_\lambda \rangle \psi_\lambda. \quad (21)$$

由小波变换的特性易知, 在频域, 脊波变换的支撑区间是沿方向 μ 且 $\{\xi: a_0^j \leq |\xi| \leq a_0^{j+1}\}$ 的二进冠。如图3所示。

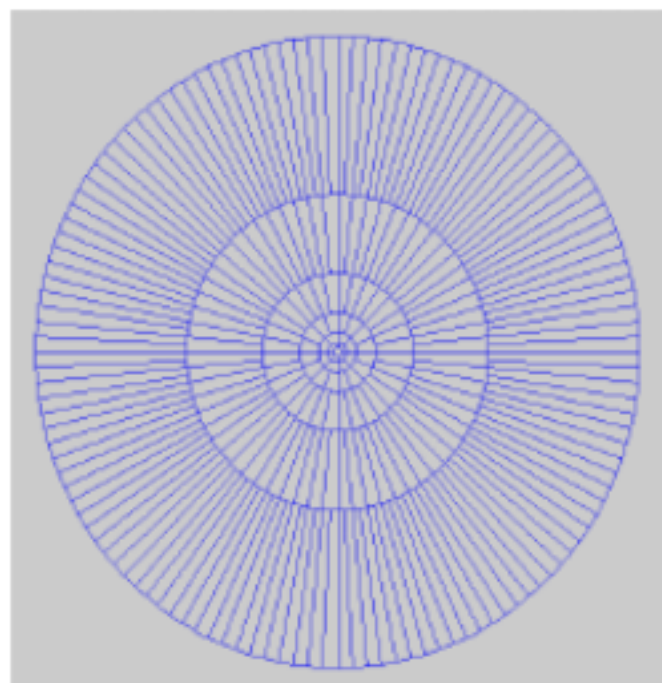


图3: 脊波变换对频域的分 $\alpha_0 = 2$

Candès 的脊波变换提供了一种对含直线奇异的分片光滑多变量函数的最优表示方法。下面考虑模型(8)只含直线奇异的特例,为此,定义函数类

$$F(\beta) := \{f, f(x) = g_0(x) + H(u \cdot x - b)g_1(x), \|g_i\|_{H^s} \leq \beta, \text{supp} g_i \subset [-1, 1]^d\}. \quad (22)$$

则有^[4]

定理3.5 设 $\|g\|_{H^s} \leq +\infty$, 令 $f(x) = K(u \cdot x - b)g(x)$, 则函数 f 的脊波系数序列 α 满足:

$$\|\alpha\|_{wlp^*} \leq C\|g\|_{H^s}, \text{ 其中 } 1/p^* = s/d + 1/2. \quad (23)$$

其中 K 表示阶跃函数 $K(t) = 1_{\{t>0\}}$, d 表示维数, $\|\alpha\|_{wlp}$ 表示弱 l^p 范数, 用来测度序列的稀疏程度。令

$$f(x) = g_0(x) + K(u \cdot x - b)g_1(x), \quad (24)$$

其中 $g_1, g_2 \in F(\beta)$

推论3.1 对于函数 $f(x) = g_0(x) + K(u \cdot x - b)g_1(x)$, 存在常数 C 使得:

$$\varepsilon_n^R[M] = \|f - Q_M^R(f)\|_2 \leq CM^{-s/d} \sup_{i=0,1} \|g_i\|_{H^s}, \quad (25)$$

其中 $Q_M^R(f)$ 表示在式(21)意义下的脊波系数对函数 f 的 M 项非线性逼近。

实际上, 对于 $\forall f \in F(\beta)$ 及任何正交基 $(\phi)_{i \in I}$, 存在 M 项非线性逼近 $Q_M(f)$ 的误差下界:

$$\sup_{f \in H^s(C)} \|f - Q_M^R(f)\|_2 \leq CM^{-s/d} \sup_{i=0,1} \|g_i\|_{H^s}. \quad (26)$$

式(26)表明不存在正交基对函数类 $F(\beta)$ 比式(25)有更好的逼近阶。

Candès 的先驱性工作, 意义深远。脊波变换至少在理论上表明存在着这样一种非线性逼近工具, 其对于如(24)所示含直线奇异的光滑函数能达到最优的非线性逼近阶。而对于这样的函数, 傅立叶分析、小波分析是不具有“最优”逼近阶的。

4 正交脊波

脊波 ψ_γ 不属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$, 这给相关的理论分析和脊波变换的数字实现带来了困难。

Donoho^[13]构造了 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的一组规范正交基, 并称之为正交脊波。与 Candès 构造的脊波不同, 正交脊波不再是“脊函数”, 不再具有如脊波 $\psi_\gamma(x) = a^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{\langle u, x \rangle - b}{a})$ 的形式。正交脊波多了局域化的优点, 在空域光滑并快速衰减, 在频域中其支撑区间为某个局部的“径向频率 \times 角度频率”区间。正交脊波可以看成在 Radon 域中反对称 (antipodally-symmetrized) 小波基的等距同构^[13]。

正交脊波在频域中定义。设

$$(\psi_{j,k}(t) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}) \quad (27)$$

是 $L^2(\mathbb{R})$ 中由 Meyer 小波构成的规范正交基:

$$(w_{i_0,l}^0(\theta), l = 0, \dots, 2^i - 1) \quad (28)$$

是 $L^2[0, 2\pi)$ 中一组规范正交基, 其中 $w_{i_0,l}^0$ 是周期化的 Lemarie 尺度函数, $w_{i,l}^1$ 是周期化的 Meyer 小波。

令 $\hat{\psi}_{j,k}(\omega)$ 表示 $\psi_{j,k}(t)$ 的傅立叶变换, 于是, 正交脊波 $\rho_\lambda(x)$, $\lambda = (j, k; i, l, \varepsilon)$ 可在频域中定义:

$$\hat{\rho}_\lambda(\xi) := |\xi|^{-\frac{1}{2}} (\hat{\psi}_{j,k}(|\xi|) w_{i,l}^\varepsilon(\theta) + \hat{\psi}_{j,k}(-|\xi|) w_{i,l}^\varepsilon(\theta + \pi)) / 2, \quad (29)$$

其中 $j, k \in \mathbb{Z}$, $l = 0, \dots, 2^{i-1} - 1$; $i \geq i_0$, $i \geq j$ 。

正交脊波的构造, 要用到 Meyer 小波的两个特殊“封闭性质”:

$$\psi_{j,k}(-t) = \psi_{j,1-k}(t), \quad (30)$$

$$w_{i,l}^\varepsilon(\theta + \pi) = w_{i,l+2^{i-1}}^\varepsilon. \quad (31)$$

注意到定义(29)中, l 的取值范围为 $0, \dots, 2^{i-1} - 1$, 而不是 $0, \dots, 2^i - 1$, 正是因为 Meyer 小波“封闭性质”的存在, 在构造过程中移去重复元素使然。值得指出的是, Meyer 小波的封闭特性(31)对于大多数常见的小波族并不成立, 如 Daubechies 小波族, 这样使得能用来构造正交脊波的小波非常少。正交脊波有详细构造过程^[13]。

定理4.1 $\rho_\lambda(x)$ ($\lambda \in \Lambda$) 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的完备正交系统。

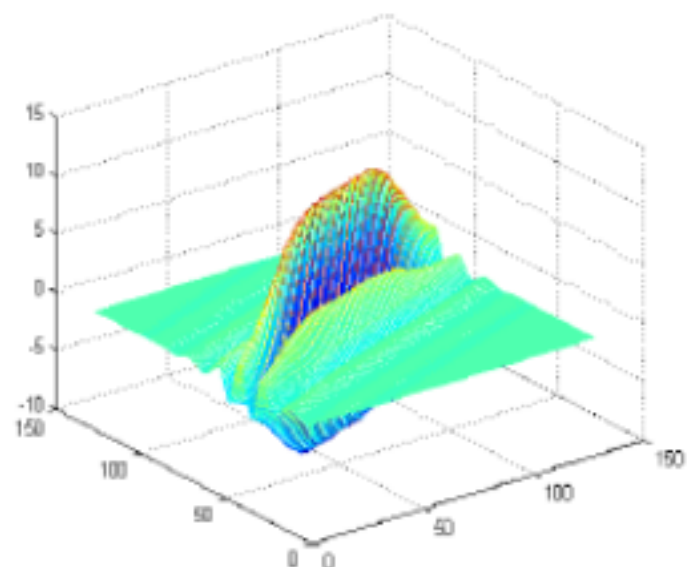
定义分数阶微分 Meyer 小波:

$$\psi_{j,k}^+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_{j,k}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (32)$$

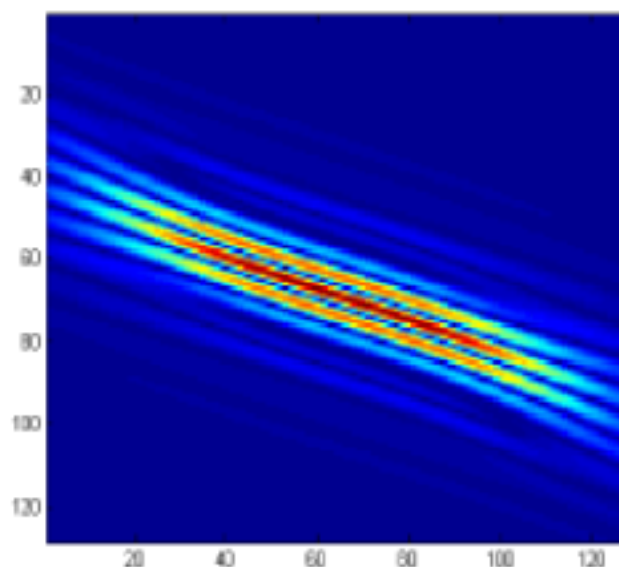
定理4.2 对于 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\rho_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{j,k}^+(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) w_{i,l}^\varepsilon(\theta) d\theta. \quad (33)$$

由式(33)可知, 正交脊波 ρ_λ 实际上是“平均”脊角 $\theta_{i,l} = 2\pi l / 2^i$ 处的脊函数 $\psi_{j,k}^+(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)$ 而得, 如图4所示:



(a) 三维视图



(b) 俯视图

图4: 正交脊波 (用 Meyer 小波构造)

定理4.3 设 $\|g\|_{H^s} \leq +\infty$, 令 $f(x) = K(u \cdot x - b)g(x)$, 则函数 f 的正交脊波系数序列 $\alpha_\lambda^{\mathbf{R}}$ 服从:

$$\|\alpha\|_{wlp} \leq C\|g\|_{H^s}, \quad \text{且有 } 1/p = s/2 + 1/2. \quad (34)$$

函数 f 的正交脊波 M 项非线性逼近 $Q_M^{OR}(f)$ 能达到误差界:

$$\|f - Q_M^{OR}(f)\|_2 \leq CM^{-s/2}\|g\|_{H^s}, \quad (35)$$

其中常数 C 不依赖于函数 f 。比较(26)式, 对于函数 f , 实际上正交脊波已经达到了正交基所能达到的最优逼近阶。定理4.3也可以表述为:

推论4.1 函数 f 的脊波系数幅值超过 $1/N$ 的数目随 N 增长的速度比任何 N 的负指数幂都要慢, 即 $\#\{\alpha_\lambda^R \mid |\alpha_\lambda^R| > 1/N\} < cN^{-s}$, 对于 $\forall s \in \mathbb{Z}^+$, 其中 c 为常数。

相反, 当函数 f 在小波基下展开时, 只有 $\#\{\alpha_\lambda^W \mid |\alpha_\lambda^W| > 1/N\} = O(N^{-1})$ 。对含直线奇异的函数, 正交脊波的非线性逼近性能要比小波有显著提高。

正交脊波有如下性质:

定理4.4 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\lambda} [\Gamma^+(Rf), W_{\lambda}] \rho_{\lambda}, \\ \|f\|_{L^2(dx)}^2 &= \sum_{\lambda} [\Gamma^+(Rf), W_{\lambda}]^2, \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\Gamma^+ = \Delta^+ \otimes I. \quad (37)$$

式(37)中, Δ^+ 为 $\frac{1}{2}$ 阶微分算子, I 为恒等算子:

$$(\Delta^+ f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \hat{f}(\omega) |\omega|^{+\frac{1}{2}} d\omega. \quad (38)$$

定理4.4表明, 函数的正交脊波分解, 可以按这样的方式进行: 先对函数进行 Radon 变换, 对 Radon 变换结果用 $\Gamma^+ = \Delta^+ \otimes I$ 进行处理后, 再进行一种特殊的 Meyer 小波变换^[15]。

Donoho^[14]重点讨论了脊函数和正交脊波的关系, 指出正交脊波对于脊函数与一维正交小波对于脊函数的横切面即脊函数的“轮廓”具有相同的非线性逼近误差阶; 对于可以由“轮廓”在 Besov 空间 $\dot{B}_{p,p}^{1/p}(R)$, $0 < p < 1$ 的可数个脊函数叠加而成的目标函数, 正交脊波能达到最优的逼近阶。也就是说, 虽然不是脊函数, 正交脊波却可以扮演脊函数与脊波 ψ_{γ} 的相同角色。

5 单尺度脊波

Candes^[17]用将函数局部剖分的方法, 构造了一种局部脊波框架, 并称之为单尺度脊波 (Monoscale Ridgelet)。

单尺度脊波变换变换的构造是利用剖分的方法, 用直线来逼近曲线: 当曲率足够小时, 在图像的局部区域, 曲线可以被近似当作直线处理, 并在此局部区域内, 用脊波或者正交脊波来表示。

设曲线 f 定义在区间 $[0, 1]^2$ 上且符合模型(8), 用二进方体 $Q = [k_1/2^s, (k_1 + 1)/2^s] \times [k_2/2^s, (k_2 + 1)/2^s]$ 剖分此区间, 其中, 剖分尺度 $s \geq 0$, k_1, k_2 为整数, 如图5所示。

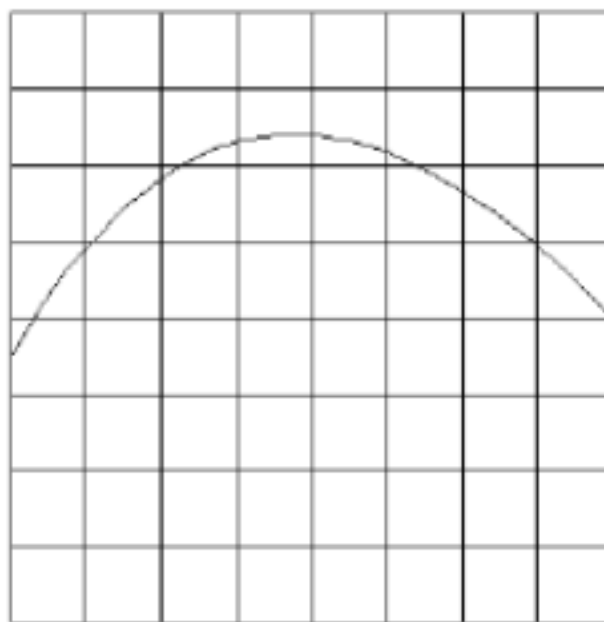


图5: 单尺度脊波的局部

用 Ω_s 表示剖分尺度为 s 时的全体二进方体集合, 在每个剖分块上选取适当的窗函数 w_Q 使满足: $\sum_{Q \in \Omega_s} w_Q^2 = 1$ 。

定义伸缩算子 (Rescale Operator): $T_Q g = 2^s g(2^s x_1 - k_1, 2^s x_2 - k_2)$, 当 s 固定时, 称集合

$$\{\psi_{Q,\lambda}(x_1, x_2) = w_Q(x_1, x_2)(T_Q \rho_\lambda)(x_1, x_2), Q \in \Omega_s, \lambda \in \Lambda\} \quad (39)$$

为尺度为 S 的单尺度脊波, 其中 $\rho_\lambda(x)$ ($\lambda \in \Lambda$) 就是第3节中描述的正交脊波 (注: Candes 的脊波系统也能够造单尺度脊波, 事实上最初的单尺度脊波是由其发展而来的)。

不难证明, 集合 $\{\psi_{Q,\lambda}, Q \in \Omega_s, \lambda \in \Lambda\}$ 构成 $L^2(R^2)$ 上的一个紧框架, 于是有

$$f = \sum_{Q \in \Omega_s} \sum_{\lambda} \langle f, \psi_{Q,\lambda} \rangle \psi_{Q,\lambda} \quad (40)$$

及 Parseval 关系,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{Q \in \Omega_s} \sum_{\lambda} |\langle f, \psi_{Q,\lambda} \rangle|^2. \quad (41)$$

定理5.1 设 $g \in W_2^s(R^2)$, 令 $f(x) = g(x)1_{\{x_2 \leq \gamma(x_1)\}}$, 其中曲线 γ 三阶可微, 则函数 f 的单尺度脊波 M 项非线性逼近 $Q_M^{OR}(f)$ 能达到误差界

$$\|f - Q_M^{MR}(f)\|_2^2 \leq C \max(M^{-s}, M^{-3/2}). \quad (42)$$

定理5.1表明, 当 $1 \leq s \leq 3/2$, 单尺度脊波 M 项非线性逼近误差的衰减速度为 $O(m^{-s})$ 阶; 当 $3/2 \leq s \leq 2$ 时, 逼近阶为 $O(m^{-3/2})$ 。注意到此时小波变换对函数 f 的非线性逼近误差只能达到 M^{-1} 的衰减级, 可知单尺度脊波对于具有曲线奇异的多变量函数的逼近性能无疑比小波有明显的提高。

单尺度脊波巧妙的将曲线奇异转化为直线奇异来处理, 当然, 其获得的好的逼近性能是以计算复杂度的增加为代价的。

单尺度脊波变换因能有效的处理边缘, 在一些实际应用中已经获得初步应用。例如在图像处理领域, 基于单尺度脊波变换的图像去噪方法能够获得信噪比非常高的去噪结果, 尤其, 对于原图像中的边缘恢复视觉效果要远远好于传统的基于小波变换的去噪方法^[18]。

6 Curvelet

Curvelet 变换 (Curvelet transform) 由 Candès 和 Donoho 在1999年提出^[20], 其实质上由脊波理论衍生而来。单尺度脊波变换的基本尺度 s 是固定的, 而 Curvelet 变换则不然, 其在所有可能的尺度 $s \geq 0$ 上进行分解。Curvelet 变换是由一种特殊的滤波过程和多尺度脊波变换 (Multiscale Ridgelet transform) 组合而成。多尺度脊波字典 (Multiscale Ridgelet dictionary) 是所有可能的尺度 $s \geq 0$ 的单尺度脊波字典的集合:

$$\{\psi_\mu := \psi_{Q,\alpha}, s \geq 0, Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma\}. \quad (43)$$

完成 Curvelet 变换需要使用一系列滤波器: $\Phi_0, \Psi_{2s} (s = 0, 1, 2, \dots)$, 这些滤波器满足:

- 1) Φ_0 是一个低通滤波器, 并且其通带为: $|\xi| \leq 1$;
- 2) Ψ_{2s} 是带通滤波器, 通带范围为: $|\xi| \in [2^{2s}, 2^{2s+2}]$;
- 3) 所有滤波器满足: $|\hat{\Phi}_0(\xi)|^2 + \sum_{s \geq 0} |\hat{\Psi}_{2s}(\xi)|^2 = 1$ 。

滤波器组将函数 f 映射为:

$$f \mapsto (P_0 f = \Phi_0 * f, \Delta_0 f = \Psi_0 *, \dots, \Delta_s f = \Psi_{2s} * f, \dots) \quad (44)$$

满足: $\|f\|_2^2 = \|P_0 f\|_2^2 + \sum_{s \geq 0} \|\Delta_s * f\|_2^2$ 。于是, 可以定义 Curvelet 变换系数为:

$$\alpha_\mu = \langle \Delta_s f, \psi_{Q,\alpha} \rangle, \quad Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma. \quad (45)$$

定义6.1 Curvelet 变换是将任意均方可积函数 f 映射为系数序列 $\alpha_\mu (\mu \in M)$ 的变换。其中 M 表示 α_μ 的参数集, 称元素 $\sigma_\mu = \Delta_s \psi_{Q,\alpha}, Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma$ 为 Curvelet。

Curvelet 的集合构成 $L_2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个紧框架: $\|f\|_2^2 = \sum_{\mu \in M} |\langle f, \sigma_\mu \rangle|^2$, 并且有分解:

$$f = \sum_{\mu \in M} \langle f, \sigma_\mu \rangle \sigma_\mu. \quad (46)$$

对于 Curvelet 变换, 我们有定理:

定理6.1 设 $g \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$, 令 $f(x) = g(x)1_{\{x_2 \leq \gamma(x_1)\}}$, 其中曲线 γ 二阶可导, 则函数 f 的 Curvelet 变换的 M 项非线性逼近 $Q_M^C(f)$ 能达到误差界

$$\|f - Q_M^C(f)\|_2^2 \leq CM^{-2}(\log M)^{1/2}. \quad (47)$$

比较式(5)可知, Curvelet 变换对于二阶可导函数已经达到了一种“几乎最优”逼近阶 (最优逼近阶应该是 $O(M^{-2})$, 式(47)中 $(\log M)^{1/2}$ 项的出现是称为“几乎最优”的缘故)。

值得注意的是, 此时, 非线性小波变换逼近误差的衰减速度依然是 M^{-1} 阶的。

Curvelet 变换的一个最核心的关系是 Curvelet 基的支撑区间有:

$$width \propto \sim length^2. \quad (48)$$

我们称这个关系为各向异性尺度关系 (Anisotropy Scaling Relation), 这一关系表明 Curvelet 是一种具有方向性的基原子。事实上, Curvelet 变换是一种多分辨、带通、方向的函数分析方法, 符合生理学研究所指出的“最优”的图像表示方法应该具有的三种特征。这也是 Curvelet 变换之所以具有好的非线性逼近能力的一个根本原因。

7 存在的问题和进一步研究的方向

在理论上,脊波理论对某些特殊的光滑函数类有比小波更高的逼近阶,然后作为一套新的理论体系,其依然存在某些需要改进之处。

1) 关于 Meyer 小波的封闭性质

脊波分析,包括 Candès 提出的脊波变换和 Donoho 提出的正交脊波,一个核心思想是先将直线奇异经过 Radon 变换转化为“点奇异”,再在 Radon 域中用小波处理。对于含直线奇异的二维函数,之所以脊波分析能达到最优的逼近阶,实际上是由于小波能有效的处理点奇异这一性质使然。Candès 的脊波与 Donoho 的正交脊波,二者区别在于后者构成 $L^2(R^2)$ 的正交基,而前者则不然: Candès 的脊波贯穿整个平面,其局部性仅体现为脊波垂直方向上的局部性。正交脊波的构造需要利用到两种特殊的“封闭性质”(见(36)和(37)),而这两种性质对于大多数常见的小波族并不成立,如 Daubechies 小波族等,因此构造正交脊波的条件实际上近乎苛刻。正交脊波能有效处理“线奇异”,这一点对于实际工程应用具有非常重要的意义;同时,为了能够充分利用现有的各种小波族,在文献[16][23]中我们构造了一种脊波框架。脊波框架的构造不需利用上述“封闭性质”,几乎各种小波基都能被用来构造此框架,于是脊波框架的构造条件非常宽松。脊波框架将正交脊波纳入其构架而又具更广外延。冗余性的存在,在某些实际工程应用中使得框架往往比正交基具有更好的性能,这也是我们提出脊波框架的出发点之一。

2) 关于 Randon 变换的数字实现问题

实际的二维函数(如图1)中的“线奇异”不仅包含“直线奇异”,也包含“曲线奇异”。脊波、正交脊波虽然能有效处理“直线奇异”,而对“曲线奇异”的处理效果却不能令人满意,甚至不如小波。单尺度脊波(Monoscale Ridgelet)和 Curvelet 变换通过局部化脊波并使用一种特殊的滤波方法,不仅能有效处理“直线奇异”,也能有效处理“曲线奇异”。但是,值得指出的是,单尺度脊波和 Curvelet 变换都要用到脊波变换,而脊波变换中的 Radon 变换的关键步骤是笛卡儿坐标与极坐标间的转换(Cartesian-to-polar conversion),与连续域不同,在数字图像中进行这种转换非常困难,为了解决数字图像 Radon 变换中极坐标和笛卡儿坐标的转换问题,人们提出了不同的插值方法,然而,各种解决方法却都是以计算复杂度或冗余度的增加为代价来获得变换精度的提高。Radon 变换难以精确数字实现,实际上一直是阻碍脊波理论走向应用的一个重要因素。

3) 关于函数的多特征问题

二维函数例如自然图像中特征区域多种多样,即有“点奇异”,也有“线奇异”;既有平滑区域,也有非平滑区域;既有光滑的轮廓线,也有非光滑的轮廓线;既有非纹理区域,也有纹理区域;等等。脊波理论在当前阶段还只能够有效处理分片光滑函数类,对于其它更为复杂的函数类型,还是无能为力。这一事实给我们的挑战是:对于真实的含有多种特征的高维函数,如何建立更合适的基以达到更好的非线性逼近阶?脊波理论获得了能有效处理“线奇异”的基函数,那么我们还需要建立其它的什么样的函数模型,并建立能够有效处理这种函数模型的基函数类型,以能够处理高维函数所具有的其它特征区域呢?这都是一些值得深思的问题。

8 总结及展望

本文介绍了脊波理论产生的背景及脊波、正交脊波、单尺度脊波和 Curvelet 的构造方法,并总结了它们的部分性质、实现方式、存在的问题和进一步的研究方向。

脊波理论, 虽理论和算法远未成熟, 然已引起了人们的广泛关注。在我们看来, 脊波理论一方面为函数分析和高维数据处理等应用提供了一种新而有效的工具, 其更重要的意义也许在于: 它的出现标志着一场高维数据表示的“新革命”的序幕的开启^[10]。

参考文献:

- [1] Do M N, Vetterli M. Contourlet: a computational framework for directional multiresolution image representation[R]. Submitted to IEEE Trans. on Image Processing, 2003, <http://www.ifp.uiuc.edu/min-hdo/publications>
- [2] Donoho D L. Wedgelets: nearly-minimax estimation of edges[J]. Ann. Statist., 1999;27:859-897
- [3] Pennec E L, Mallat S. Image compression with geometrical wavelets[A]. In Proc. of ICIP'2000[C], Vancouver, Canada, September 2000;661-664
- [4] Candès E J. Ridgelets and the Representation of Mutilated Sobolev Functions[J]. SIAM J. Math. Anal., 1999;33:2495-2509
- [5] Stéphane Mallat. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华等译. 北京: 机械工业出版社, 2003
- [6] Candès E J. Monoscale Ridgelets for the Representation of Images with Edges[R]. Tech. Report, Department of Statistics, Stanford University, 1999
- [7] Olshausen B A, Field D J. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images[J]. Nature, 1996;381:607-609
- [8] David L. Donoho, Ana Georgina Flesia. Can Recent Innovations in Harmonic Analysis 'Explain' Key Findings in Natural Image Statistics? [J]. Network: Computation in Neural Systems, 2001;12(3):371-393
- [9] 侯彪, 刘芳, 焦李成. 基于脊波变换的直线特征检测[J]. 中国科学E, 2003;33(1):65-73
- [10] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望[J]. 电子学报, 2003;31(12A):1975-1981
- [11] Candès E J. Ridgelets: Theory and Applications[A]. Ph.D. Thesis, Department of Statistics, Stanford University, 1998
- [12] Candès E J. Harmonic analysis of neural networks[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1999;6:197-218
- [13] Donoho D L. Orthonormal ridgelets and linear singularities[R]. Tech. Report, Department of Statistics, Stanford University, 1998
- [14] Donoho D L. Ridgelet Function and orthonormal ridgelets[J]. Journal of Approximation Theory, 2001;111:143-179
- [15] Flesia A G, Hel-Or H, Averbuch A, Candes E J, Coifman R R, Donoho D L. Digital Implementation of Ridgelet Packets[R]. Stanford Univ., Stanford, CA, Tech. Rep., 2002
- [16] Tan Shan, Jiao L C, Feng X C, Ridgelet Frame. In Proc. Int. Conf. Image Analysis and Recognition[J]. Porto, Campilho, Aurélio; Kamel, Mohamed (Eds.). Springer Lecture Notes in Computer Science (LNCS) series[H]. 2004;479-486
- [17] Candes E J. Monoscale Ridgelet for the representation of images with edges[R]. Dept. Statist., Stanford Univ., Stanford, CA, Tech. Rep., 1999
- [18] Starck J L, Candes E J, Donoho D L. The Curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Trans. Image Processing, 2002;11:670-684
- [19] Starck J L, Murtagh F, Candes E J, Donoho D L. Gray and Color Image Contrast Enhancement by the Curvelet Transform[J]. IEEE Trans. Image Processing, 2003;12:706-716
- [20] Candes E J, Donoho D L. Curvelet-A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges[A]. in Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 1999[C], A. Cohen, C. Rabut, and L. L. Schumaker, Eds. Nashville, TN: Van-derbilt Univ. Press, 1999
- [21] Donoho D, Johnstone I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[M]. Biometrika, 1994;81:425-455
- [22] Johnstone I M. Wavelets and the theory of non-parametric function estimation, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1999;357:2475-2493
- [23] Tan Shan, Zhang X R, Jiao L C. Dual Ridgelet Frame Constructed Using Biorthonormal Wavelet Basis[A]. In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C], Philadelphia, PA, USA, March 2005

Ridgelet Theory: from Ridgelet Transform to Curvelet

JIAO Li-cheng¹, TAN Shan¹, LIU Fang²

(1- National Key Lab for Radar Signal Processing and Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an 710071;

2- The School of Computer Science and Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract: This paper aims to review the newly-developed ridgelet theory with focus on its development history, application potential and existent problems. It is of extreme importance to obtain as high as possible nonlinear approximation ability for certain function classes in application fields such as signal processing, data compression, pattern recognition and statistic estimation. The commonly used 2-D wavelet is the tensor products of 1-D wavelet. It can effectively represent functions smooth away from "Point Singularity" but fails to deal with those smooth away from "Linear Singularity". Ridgelet transform proposed by Candes can obtain the optimal nonlinear approximation rate for functions smooth away from "Linear Singularity" by first converting "Linear Singularity" into "Point Singularity" and then dealing the resulting "Point Singularity" with wavelet systems. Orthonormal ridgelet inherits such key idea of ridgelet transform, and furthermore constitutes a normalized orthonormal system. Based on a localization principle and subband decomposition, monoscale ridgelet and curvelet were proposed, both of which were derived from ridgelet transform and can efficiently deal with smooth images with smooth edges including straight and curve singularity. They, hence, are of better application potention.

Keywords: sparse representation; optimal basis; ridgelet; curvelet; image denoising; non-parametric estimation