

# 图像的多尺度几何分析:回顾和展望

焦李成, 谭 山

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室和智能信息处理研究所, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 多尺度几何分析旨在构建最优逼近意义下的高维函数表示方法. 本文以二维函数的非线性逼近为主线, 分析了推动多尺度几何分析发展的深刻数学和生理学背景, 综述了图像多尺度几何分析方法的最新进展及存在的问题, 指出了进一步研究的方向.

**关键词:** 多尺度几何分析; 小波变换; Bandelet 变换; 脊波变换; 单尺度脊波变换; Curvelet 变换; Contourlet 变换

中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2003) 12A-1975-07

## Development and Prospect of Image Multiscale Geometric Analysis

JIAO Li-cheng, TAN Shan

(National Key Lab for Radar Signal Processing and Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** The aim of Multiscale Geometric Analysis is to find a kind of optimal representation of high dimension function in the sense of nonlinear approximation. Based on the nonlinear approximation of 2-D function, the mathematical and neurophysiological backgrounds of Image Multiscale Geometric Analysis are studied on this paper, and its development history, current and future challenges are reviewed in details.

**Key words:** multiscale geometric analysis; wavelet transform; bandelet transform; ridgelet transform; monoscale ridgelet transform; curvelet transform; contourlet transform

### 1 引言

十多年前, 当数学家们正担心风起云涌的小波浪潮只是昙花一现时, 小波分析却以惊人的速度完成了理论构建过程, 其应用领域也迅速从数学、信号处理拓展到物理、天文、地理、生物、化学等其他各个学科. 小波分析, 因其超越于傅立叶分析的众多优点, 多年来依然并且无疑将继续在各学科领域中发挥非常重要的作用, 其已成为继傅立叶分析之后的又一有力分析工具.

今天, 当喧嚣的小波尘埃落定, 又一次新浪潮正在悄然酝酿, 如果小波的兴起能用革命二字来比拟, 那么, 这次新的浪潮无疑又将掀起另一场革命; 而引导这场革命的, 正是那一批推动小波分析发展的先驱者, 他们是: Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat, Albert Cohen, David Donoho, Martin Vetterli, Jean-Luc Starck 等. 这场新革命同样也将深刻地影响各科学领域, 其深度、广度, 甚至将超过小波分析; 而这场革命的名字, 就是多尺度几何分析(MGA: Multiscale geometric analysis).

过去几年, 在数学分析、计算机视觉、模式识别、统计分析等不同学科中, 分别独立地发展着一种彼此极其相似的理论, 人们称之为: 多尺度几何分析. 发展 MGA 的目的是为了检测、

表示、处理某些高维空间数据, 这些空间的主要特点是: 其中数据的某些重要特征集中体现于其低维子集中(如, 曲线、面等). 比如, 对于二维图像, 主要特征可以由边缘所刻画; 而在 3-D 图像中, 其重要特征又体现为丝状物(filaments)和管状物(tubes). 目前, 人们提出的多尺度几何分析方法主要有: Emmanuel J Candès 和 David Donoho 提出的脊波变换(Ridgelet transform)<sup>[1]</sup>(1998 年)、单尺度脊波变换<sup>[2]</sup>(Monoscale ridgelet transform)(1999 年)和 Curvelet 变换<sup>[3]</sup>(1999 年), E Le Pennec 和 Stéphane Mallat 提出的 Bandelet 变换<sup>[4]</sup>(2000 年), 以及 M N Do 和 Martin Vetterli 提出的 Contourlets 变换<sup>[5]</sup>(2002 年)等等.

这些新方法的提出, 无不基于这样一个事实: 在高维情况下, 小波分析并不能充分利用数据本身特有的几何特征, 并不是最优的或者说“最稀疏”的函数表示方法. 多尺度几何发展的目的和动力正是致力于发展一种新的高维函数的最优表示方法.

我们先给出一些多尺度几何分析的重要结论: 对于含奇异曲线的二维分片光滑函数(奇异曲线的光滑指数为  $\alpha$ ,  $\alpha \geq 2$ ), 其非线性逼近误差  $\epsilon_n(M) = \|f - f_M\|^2$  的衰减速度, Curvelet 变换能达到  $O((\log M)^{1/2} M^{-2})$ , Contourlet 变换能达到  $O((\log M)^3 M^{-2})$ , Bandelet 变换能达到  $O(M^{-\alpha})$ ; 反观小波变

换和傅立叶变换,分别只能达到  $O(M^{-1})$  和  $O(M^{-1/2})$  [6,7].

自然界中的多数物体都具有平滑边缘,分片光滑二维函数实际上描述了一大类自然图像.多尺度几何分析相对于小波分析逼近性能的提高,其意义,丝毫不亚于小波分析相对于傅立叶分析逼近性能的提高.

## 2 从傅立叶分析到小波分析

傅立叶分析揭示了时域与频域之间内在的联系,反应了信号在“整个”时间范围内的“全部”频谱成分,是研究周期现象不可缺少的工具.傅立叶变换虽然有很强的频域局域化能力,但并不具有时间局域化能力,而后一点,对于很多信号处理工作而言,特别是对于涉及非平稳信号处理的任务而言,是至关重要的.

小波分析理论和方法是从 Fourier 分析演变而来的.小波变换以牺牲部分频域定位性能来取得时-频局部性的折衷,其不仅能提供较精确的时域定位,也能提供较精确的频域定位.我们所面对的真实物理信号,更多的表现出非平稳的特性,而小波变换恰恰是处理非平稳信号的有力工具.

小波理论的兴起,得益于其对信号的时、频局域分析能力及其对一维有界变差函数类的最优逼近性能,也得益于 Stéphane Mallat 和 Yves Meyer 等人引入的多分辨分析概念,以及 Mallat 提出的快速小波变换实现方法.

设  $B = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  是 Hilbert 空间  $H$  的一组标准正交基,则

$$\forall f \in H \text{ 可分解为: } f = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, g_m \rangle g_m \quad (1)$$

称  $f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m$  为  $f$  的非线性逼近,其中  $I_M$  为对应于最大系数幅值  $|\langle f, g_m \rangle|$  的  $M$  个向量.非线性逼近误差为:

$$\epsilon_n^B[M] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2 \quad (2)$$

逼近误差体现了用基  $B$  表示函数  $f$  时的“稀疏程度”或者分解系数的能量集中程度.

定义全变差范数  $\|f\|_V = \int_0^1 |f'(t)| dt$ , 如果  $\|f\|_V \leq +\infty$ , 我们称  $f$  是有界变差的, 记为:  $f \in BV[0,1]$ . 大多数一维信号, 如连续可导的光滑信号和具有有限不连续点的不连续信号, 都属于有界变差函数范畴.

### 非线性傅立叶逼近

傅立叶基  $\{e^{i2\pi mu}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  是  $L^2[0,1]$  的一组标准正交基,  $\forall f \in L^2[0,1]$  可分解为傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), e^{i2\pi mu} \rangle e^{i2\pi mu} \quad (3)$$

若函数  $f$  是有界变差的, 傅立叶基对函数  $f$  的非线性逼近误差为  $\epsilon_n^F[M] = O[M^{-1}]$  [8], 即  $\epsilon_n^F[M]$  有  $M^{-1}$  级的衰减速度.

### 非线性小波逼近

式  $\{\phi_{j,n}\}_{0 \leq n \leq 2^j-1}, \{\psi_{j,n}\}_{l < j \leq J, 0 \leq n \leq 2^j-1}$  定义了  $L^2[0,1]$  中逼近空间  $U_l$  的一组规范正交基 [6]. 记  $\phi_{j,n} = \psi_{j+1,n}$ , 则  $f \in L^2[0,1]$  非线性小波逼近:  $f_M^W = \sum_{(j,n) \in I_M} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ . 逼近误差:

$$\epsilon_n^W[M] = \|f - f_M^W\|^2 = \sum_{(j,n) \notin I_M} |\langle f, \psi_{j,n} \rangle|^2 \quad (4)$$

假设  $\psi_{j,n}$  小波属于  $C^q$  且有  $q$  阶消失矩, 对于一维分段光滑函数, 有如下定理:

**定理 1** [6] 设  $f$  在  $[0,1]$  上具有有限个不连续点, 且在這些不连续点之间是一致 Lipschitz  $\alpha$  ( $\alpha < q$ ) 的, 则:

$$\epsilon_n^W[M] \leq O(M^{-2\alpha}) \quad (5)$$

此时函数  $f$  的傅立叶非线性逼近误差  $\epsilon_n^F[M]$  只有  $M^{-1}$  的衰减级.  $f$  在不连续点之间的正则性越高, 小波非线性逼近相对于傅立叶非线性逼近的改进就越大.

对有界变差函数, 小波具有最优的逼近性能 [9]. 我们有:

**定理 2** [6] 存在常数  $C$  使得对所有的  $f \in BV[0,1]$ , 有:

$$\epsilon_n^W[M] \leq C \|f\|_V M^{-2} \quad (6)$$

无疑, 小波分析比傅立叶分析能更“稀疏”地表示一维分段光滑或者有界变差函数, 这是小波分析在众多学科领域中取得巨大成功的一个关键原因.

## 3 图像的多尺度几何分析

遗憾的是, 小波分析在一维时所具有的优异特性并不能简单的推广到二维或更高维. 由一维小波张成的可分离小波 (Separable wavelet) 只具有有限的方向, 不能“最优”表示含线或者面奇异的高维函数. 而事实上具有线或面奇异的函数在高维空间中非常普遍, 例如, 自然物体光滑边界使得自然图像的不连续性往往体现为光滑曲线上的奇异性, 而并不仅仅是点奇异.

考虑一个简单二维图像模型 [2]:

$$F_\Gamma(\alpha, A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(s, C)} F_\gamma(\alpha, A) \quad (7)$$

其中:  $F_\gamma(\alpha, A) = \{f \in [0,1]^2 \setminus \gamma[0,1], \|f\|_C \leq A\}$  (8)

$$\Gamma(s, C) = \{\gamma: [0,1] \rightarrow [1/10, 9/10]^2, \|\gamma\|_C \leq C\} \quad (9)$$

式 (7) 表示了一类具有曲线奇异 (包括直线) 的二维函数, 这种函数, 除了在二维平面中的曲线  $\Gamma(s, C)$  外, 都是  $C^\infty$  光滑的, 而且, 奇异曲线  $\Gamma(s, C)$  本身也  $C^\infty$  光滑. 如图 1 所示, 区域  $A, B$  是  $C^\infty$  光滑, 奇异曲线为  $\Gamma, C^\infty$  阶光滑.

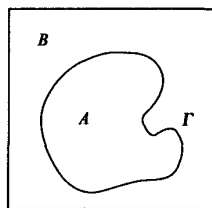


图 1 具有光滑边缘的图像模型

对于此类模型, 我们有如下定理:

**定理 3** [6] 设  $f = C1_\Omega$  是一个边界  $\partial\Omega$  具有有限长度的集合  $\Omega$  的特征函数, 则可分离周期正交小波非线性逼近误差为  $\epsilon_n^W[M] \sim \|f\|_V^2 M^{-1}$ .

其中有界变差图像的全变差  $\|f\|_V = \int_0^1 \int_0^1 |\nabla f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$ . 定理 3 可以推广到不连续的分片正则函数.

实现函数的稀疏表示是信号处理、计算机视觉等很多领域中一个非常核心的问题. 对于模型 (7), 正交基所能达到的最优逼近误差应该具有  $M^{-2}$  的衰减级 [10]. 然而, 小波变换的非线性逼近误差只能达到  $M^{-1}$  的衰减级. 其中重要原因是二维可分离小波基只具有有限的方向, 即水平、垂直、对角, 方向性的缺乏使小波变换不能充分利用图像本身的几何正则性.

神经生理学家们的研究表明<sup>[11]</sup>,哺乳动物的视觉皮层的接收场具有局部、方向、带通的特性.1996年,根据 B A Olshausen 和 D J Field 的实验结果表明<sup>[12]</sup>,视觉皮层的接收场特性使得人类的视觉系统只用最少的视觉神经元就能“捕获”自然场景中的关键信息,这相当于对自然场景的最稀疏表示,或者说是“对自然场景的‘最稀疏’编码”.

据生理学家对人类视觉系统研究结果和自然图像统计模型,一种“最优”的图像表示法应该具有如下的特征<sup>[13]</sup>:(1)多分辨:能够对图像从粗分辨率到细分辨率进行连续逼近,即“带通”性;(2)局域性:在空域和频域,这种表示方法的“基”应该是“局部”的;(3)方向性:其“基”应该具有“方向”性,不仅仅局限于二维可分离小波的3个方向.

图2表示了用二维可分离小波来逼近图像中奇异曲线的过程.由一维小波张成的二维小波基具有正方形的支撑区间,不同的分辨率下,其支撑区间为不同尺寸大小的正方形.二维小波逼近奇异曲线过程,最终表现为用“点”来逼近线的过程.在尺度  $j$ ,小波支撑区间的边长近似为  $2^{-j}$ ,幅值超过  $2^{-j}$  的小波系数的个数至少为  $O(2^j)$  阶<sup>[14]</sup>,当尺度变细时,非零小波系数的数目以指数形式增长,出现了大量不可忽略的系数,最终表现为不能“稀疏”表示原函数.

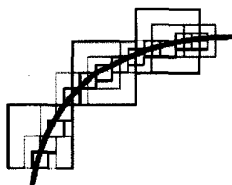


图2 用张量小波逼近奇异曲线

图3所示为某种我们所希望的变换,这种变换为了能充分利用原函数的几何正则性,其基的支撑区间应该表现为“长条形”,以达到用最少的系数来逼近奇异曲线.基的“长条形”支撑区间实际上是“方向”性的一种体现,也称这种基具有“各向异性(anisotropy)”.我们所希望的这种变换,就是“多尺度几何分析”.

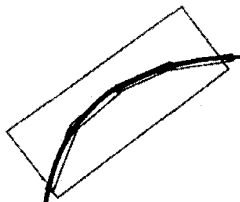


图3 所希望的变换逼近奇异曲线

图像的多尺度几何分析方法分为自适应和非自适应两类.

自适应的方法以 E Le Pennec 和 Stéphane Mallat 提出的 Bandedet representation<sup>[4]</sup>为代表.自适应方法一般先进行边缘检测,再利用边缘信息对原函数进行最优表示.

实际上,在多尺度几何分析的概念诞生以前,人们就发展了多种“自适应”方法希望对图像进行“稀疏”表示.1988年, S Carlsson 提出了一种基于边缘的图像表示方法<sup>[15]</sup>.这种方法先检测图像边缘,之后,再利用边缘信息通过计算边缘与边缘间的图像灰度值来逼近原图像.基于类似的思想,人们提出了许多其他的方法<sup>[16,17]</sup>,它们使用不同的边缘检测算法,再利用阶跃模型沿着边缘去逼近原图像.在这些模型的基础上,人们又提出了基于小波模极大值的多尺度边缘表示方法<sup>[18]</sup>和边缘自适应方法<sup>[19,20]</sup>.同时,还发展了基于非完备正交基的

表示方法,如 Foveal 小波和 Wavelet Fingerprint<sup>[21]</sup>,用来逼近图像中的主要边缘.为了使边缘检测算法稳定,文献[22~24]使用了各种全局优化边缘检测算法,然后在二叉树结构的基础上,利用动态规划来自适应对图像进行适当地二进剖分.

与自适应方法不同,非自适应的图像多尺度几何表示方法并不要先验地知道图像本身的几何特征,其代表为 Curvelet 变换和 Contourlet 变换<sup>[3,5]</sup>.

### 3.1 Bandedet 变换

2000年, E Le Pennec 和 Stéphane Mallat 在文献[4]中提出了 Bandedet 变换. Bandedet 变换是一种基于边缘的图像表示方法,能自适应地跟踪图像的几何正则方向. Pennec 和 Mallat 认为:在图像处理任务中,若是能够预先知道图像的几何正则性,并充分予以利用,无疑会提高图像变换方法的逼近性能.

Pennec 和 Mallat 首先定义了一种能表征图像局部正则方向的几何矢量线(Geometric flow of vectors);再对图像的支撑区间  $S$  进行二进剖分  $S = \bigcup_i \Omega_i$ ,当剖分足够细时,每一个剖分区间  $\Omega_i$  中最多只包含图像的一条轮廓线(边缘).在所有不包含轮廓线的局部区域  $\Omega_i$ ,图像灰度值的变化是一致正则的,因此,在这些区域内不定义几何矢量线的方向.而对于包含轮廓线的局部区域,几何正则的方向就是轮廓的切线方向.根据局部几何正则方向,在全局最优的约束下,计算区域  $\Omega_i$  上矢量场  $\tau(x_1, x_2)$  的矢量线.再沿矢量线将定义在  $\Omega_i$  上的区间小波进行 Bandedet 化(bandedetization)以生成 Bandedet 基,以能够充分利用图像本身的局部几何正则性. Bandedet 化的过程实际上是沿矢量线进行小波变换的过程,此即所谓的弯曲小波变换(Warped wavelet transform).于是,所有剖分区域  $\Omega_i$  上的 Bandedet 的集合构成了一组  $L^2(S)$  上的标准正交基<sup>[25,26]</sup>.

考虑模型(7),  $f \in F_T(s, A)$  有  $C^r$  的轮廓线,除轮廓线外,函数  $f$  是  $C^r$  的,则 Bandedet 变换具有最优非线性逼近性能<sup>[25]</sup>:

$$\epsilon_n^B[M] = \|f - f_M^B\|^2 \leq CM^{-s} \quad (10)$$

构造 Bandedet 变换的中心思想是定义图像中的几何特征为矢量场,而不是看成普通的边缘的集合.矢量场表示了图像空间结构的灰度值变化的局部正则方向. Bandedet 基并不是预先确定的,而是以优化最终的应用结果来自适应的选择具体的基的组成. Pennec 和 Mallat 给出了 Bandedet 变换的最优快速寻找算法,初步实验结果表明,与普通的小波变换相比, Bandedet 在去噪和压缩方面体现出了一定的优势和潜力.

### 3.2 脊波(ridgelet)及单尺度脊波(Monoscale ridgelet)变换

脊波理论由 Emmanuel J Candès 在 1998 年提出,这是一种非自适应的高维函数表示方法. Emmanuel J Candès 在其博士论文<sup>[1]</sup>及文献[27]给出了脊波变换的基本理论框架.同年, Donoho 给出了一种正交脊波的构造方法<sup>[14]</sup>.2003年,侯彪、刘芳和焦李成给出了脊波变换的实现方法<sup>[28,29]</sup>.脊波变换对于具有直线奇异的多变量函数有良好的逼近性能<sup>[1,30]</sup>,但是,对于含曲线奇异的多变量函数,其逼近性能只相当于小波变换,不具有最优的非线性逼近误差衰减阶.1999年,在文献[2,31]中, Candès 又提出了单尺度脊波变换,并给出了其构建方法.提出单尺度脊波的目的,就是为了解决含曲线奇异的多变量函数的稀疏逼近问题.

考虑多变量函数  $f \in L^1 \cap L^2(R^n)$ . 若函数  $\psi$  满足特定容许条件, 则称  $\psi$  是容许神经激励函数, 并称  $\psi_\gamma(x) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{\langle u, x \rangle - b}{a}\right)$  为脊波(Ridgelet), 定义脊波变换为  $R(f)(\gamma) = \langle f, \psi_\gamma \rangle$ . 脊波变换能最优表示具有直线奇异的分片光滑函数, 考虑模型(7)的特例:

$$f(x_1, x_2) = H(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t_0) g(x_1, x_2) \quad (11)$$

其中  $g(x_1, x_2) \in C^s$ ,  $H$  为 Heavyside 函数, 脊波非线性逼近的误差:

$$\epsilon_n^R(M) = \|f - f_M^R\| \leq CM^{-s} \quad (12)$$

反观小波变换, 其对函数  $f$  的非线性逼近误差只能达到  $M^{-1}$  的衰减级.

单尺度脊波变换的构造是利用剖分的方法, 用直线来逼近曲线.

设函数  $f \in L^2[0, 1]^2$ , 用二进方形  $Q = [k_1 2^{-s}, (k_1 + 1) 2^{-s}] \times [k_2 2^{-s}, (k_2 + 1) 2^{-s}]$  剖分区间  $[0, 1]^2$ , 其中, 剖分尺度  $s > 0$ ,  $k_1, k_2$  为整数, 用  $\Omega_s$  表示剖分尺度为  $s$  时全体二进方形集合, 在每个剖分块  $Q$  上进行脊波变换即单尺度脊波变换.

单尺度脊波可表示为:  $\{\psi_\mu = w_Q \psi_{Q,\alpha}, Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma\}$ , 其中  $\Gamma$  为脊波变换参数空间,  $w_Q$  为适当的窗函数.

对于模型(7)中含曲线奇异的函数  $f$ , 单尺度脊波变换非线性逼近误差的衰减速度为:

$$\epsilon_n^{MR}[M] = \|f - f_M^{MR}\|^2 \leq C \max(M^{-s}, M^{-3/2}) \quad (13)$$

其中  $s$  表示函数  $f$  中奇异曲线  $s$  阶可微; 即, 当  $1 \leq s \leq 3/2$ , 其逼近误差的衰减速度为  $O(M^{-s})$  阶; 当  $3/2 \leq s \leq 2$  时, 其逼近阶为  $O(M^{-3/2})$ . 注意到此时小波变换对于函数  $f$  的非线性逼近误差只能达到  $M^{-1}$  的衰减级, 可知单尺度脊波对于具有曲线奇异的多变量函数的逼近性能无疑比小波有明显的提高.

### 3.3 Curvelet 变换

Curvelet 变换 (Curvelet transform) 由 Candès 和 Donoho 在 1999 年提出<sup>[3]</sup>, 其由脊波理论衍生而来. 单尺度脊波变换的基本尺度是固定的, 而 Curvelet 变换则不然, 其在所有可能的尺度  $s \geq 0$  上进行分解, 实际上 Curvelet 变换是由一种特殊的滤波过程和多尺度脊波变换 (Multiscale ridgelet transform) 组合而成<sup>[32,33]</sup>. 多尺度脊波字典 (Multiscale ridgelet dictionary) 是所有可能的尺度  $s \geq 0$  的单尺度脊波字典的集合:

$$\{\psi_\mu = \psi_{Q,\alpha}, s \geq 0, Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma\} \quad (14)$$

完成 Curvelet 变换需要使用一系列滤波器:  $\Phi_0, \Psi_{2^s} (s = 0, 1, 2, \dots)$ , 其中:

- (1)  $\Phi_0$  是一个低通滤波器, 并且其通带为:  $|\xi| \leq 2$ ;
- (2)  $\Psi_{2^s}$  是带通滤波器, 通带范围为:  $|\xi| \in [2^{2s-1}, 2^{2s+3}]$ ;
- (3) 所有滤波器满足:  $|\hat{\Phi}_0(\xi)|^2 + \sum_{s \geq 0} |\hat{\Psi}_{2^s}(\xi)|^2 = 1$ .

滤波器组将函数  $f$  映射为:

$$P_0 f = \Phi_0 * f, \Delta_0 f = \Psi_0 * f, \dots, \Delta f = \Psi_{2^s} * f, \dots \quad (15)$$

满足:  $\|f\|_2^2 = \|P_0 f\|_2^2 + \sum_{s \geq 0} \|\Delta f\|_2^2$ . 于是, 可以定义 Curvelet 变换系数为:

$$\alpha_\mu = \langle \Delta f, \psi_{Q,\alpha} \rangle, Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma \quad (16)$$

Curvelet 变换是将任意均方可积函数  $f$  映射为系数序列  $\alpha_\mu$  的变换. 称元素  $\sigma_\mu = \Delta_s \psi_{Q,\alpha} (Q \in \Omega_s, \alpha \in \Gamma)$  为 Curvelet.

Curvelet 的集合构成  $L^2(R^2)$  上的一个紧框架:  $\|f\|_2^2 = \sum_\mu |\langle f, \sigma_\mu \rangle|^2$ , 并且有分解:

$$f = \sum_\mu \langle f, \sigma_\mu \rangle \sigma_\mu \quad (17)$$

Curvelet 变换一个核心关系是 Curvelet 基支撑区间有:

$$width \approx length^2 \quad (18)$$

我们称这个关系为: 各向异性尺度关系 (Anisotropy scaling relation). 这一关系符合图 3 中我们所希望的基所具有的支撑区间形状. 对于 Curvelet 变换, 有定理:

**定理 4** 设  $g \in W^{s,2}(R^2)$ , 且  $f(x) = g(x) 1_{x_2 \leq \Gamma(x_1)}$ , 其中曲线  $\Gamma$  2 阶可导, 则 Curvelet 变换对于函数  $f$  的非线性逼近误差为:

$$\epsilon_n^C[M] = \|f - f_M^C\|^2 \leq CM^{-2} (\log M)^{1/2} \quad (19)$$

其中  $s$  是 Sobolev 指数. 值得注意的是, 此时非线性小波逼近误差的衰减速度依然是  $M^{-1}$  阶.

### 3.4 Contourlet 变换

2002 年, 在文献[5]中, M N Do 和 Martin Vetterli 提出了一种“真正”的图像二维表示方法: Contourlet 变换, 也称塔型方向滤波器组 (PDFB, Pyramidal directional filter bank). Contourlet 变换是另一种多分辨的、局域的、方向的图像表示方法.

Contourlet 变换继承了 Curvelet 变换的各向异性尺度关系, 因此, 在一定意义上, 可以认为是 Curvelet 变换的另一种实现方式. Contourlet 基的支撑区间具有随尺度而长宽比变化的“长条形”结构. Contourlet 变换将多尺度分析和方向分析分拆进行, 首先由 LP (Laplacian pyramid)<sup>[34]</sup> 变换对图像进行多尺度分解以“捕获”点奇异, 接着由方向滤波器组 (DFB, Directional filter bank) 将分布在同方向上的奇异点合成为一个系数. Contourlet 变换的最终结果是用类似于线段 (Contour segment) 的基结构来逼近原图像, 这也是所以称之为 Contourlet 变换的原因.

Contourlet 变换首先对图像进行多尺度分解. 在文献[35]中, M N Do 用框架理论和过采样滤波器组研究了 LP 分解, 结果表明用正交滤波器组来实现的 LP 分解算法是一个框架界为 1 的紧框架. 在 Contourlet 变换中, M N Do 使用对称于前向分解算子的对偶框架算子来实现最优线性重构.

完全重构的方向滤波器组由 Bamberger 和 Smith 在文献[36]中提出. DFB 对图像进行  $l$  层的树状结构分解, 在每一层将频域分解成  $2^l$  个子带, 每个子带呈楔型 (Wedge shape). 在文献[37,38]中, M N Do 提出了一种新的方向滤波器组实现方法, 这种方法使用扇型结构的共轭镜像滤波器组以避免对输入信号的调制, 同时, 将  $l$  层树状结构的方向滤波器变换成  $2^l$  个并行通道的结构.

方向滤波器本身并不适合于处理图像的低频部分, 因此在应用方向滤波器前, 应将图像的低频部分移除.

图像的 LP 分解连续的对其带通图像进行子带分解, 当对这些带通子带应用方向滤波器组时, 便能有效的“捕获”方向信息. 这就是“塔型方向滤波器组”, 其具有双叠代滤波器结构, 将不同尺度的图像分解成方向子带.

LP 分解和 DFB 都具有完全重构特性, 显然, 由其组合而

成的 PDFB 也能实现完全重构,并且 PDFB 与 LP 分解有相同的冗余度:1.33.

多尺度和方向性的图像表示方法还包括:2-D Gabor 小波<sup>[39,40]</sup>,Cortex 变换<sup>[41]</sup>,Steerable pyramid<sup>[42]</sup>,2-D 方向小波<sup>[43]</sup>,Brushlet<sup>[44]</sup>和复值小波<sup>[45]</sup>等等.不过,这些变换都只具有有限的方向性,而不同的是,Contourlet 变换每一尺度上的方向数目是前一尺度的两倍,并且几乎是临界采样的.

Contourlet 变换一个重要特点是具有类似于 Curvelet 变换的各向异性尺度关系.事实上,在塔型结构的第  $j$  层,图像的 PDFB 分解总的效果相当于基函数具有如下的支撑区间:

$$width \approx 2^j, \quad length \approx 2^{j/2} \quad (20)$$

对于定理 4 中函数  $f(x) = g(x)1_{x_2 \in \Gamma(x_1)}$ , Contourlet 变换的非线性逼近误差为<sup>[46]</sup>:

$$\epsilon_n^{Contourlet}[M] = \|f - f_M^{Contourlet}\|^2 \leq CM^{-2}(\log M)^3 \quad (21)$$

2003 年 8 月,在文献[47]中,Y Lu 和 M N Do 又提出了一种非冗余、多尺度、多方向的图像表示方法 CRISP-Contourlet 变换(Critically sampled contourlet transform).CRISP-contourlet 变换由 Contourlet 变换发展而来,其利用非可分叠代滤波器组来完成 Contourlet 变换中多尺度分析和方向分析两个分离的过程,并有类似于 Contourlet 变换的频域剖分形式,非冗余的特点使其具有更好的应用前景.

#### 4 存在的问题和进一步研究的方向

图像的多尺度几何分析是一个非常前沿的研究领域,理论和算法都处于发展初期.本文认为,多尺度几何分析还存在如下一些亟待解决的问题:

##### (1) 自适应与非自适应方法

近几年中,在计算调和解析领域(CHA, Computational harmonic analysis),对于模型(7)的逼近问题,人们普遍有这样一种认识:相对于非自适应方法,自适应方法应该具有更好的逼近性能.于是,人们提出了各种各样的自适应分析方法,除了前文所提到的,还有[48~52]等.

直观地看,当逼近模型(7)时,能“跟踪”奇异曲线形状的自适应方法理所当然具有更好的性能.然而 Candès 和 Donoho 的先驱性工作向人们基于直觉的理念提出了挑战,Curvelet 变换,作为一种非自适应的高维函数的表示方法,通过简单的域值处理,所获得的非线性逼近性能并不比复杂的自适应方法差.尽管还有种种不足,但是 Curvelet 变换的意义或许正在于:存在非自适应的方法,能够对图像进行最优表示.

回想一维情况,小波变换对含点奇异的分段光滑函数的表示是最优的.值得注意的是,一维小波变换并不需要先验地知道点奇异的具体位置,小波基的构建并没有自适应于函数本身,小波变换是一种非自适应的函数表示方法.

图像的多尺度几何分析将以一种什么方式发展呢?最终为人们所广泛采用的方法是自适应的还是非自适应的呢?这些问题值得我们深思.

##### (2) 自适应方法存在的问题

自适应的多尺度几何表示方法,实际上是边缘检测和图像表示方法的结合.比如,Bandelet 变换根据图像边缘自适应

地构造了一种局部弯曲小波变换,将局部区域中的曲线奇异改造成垂直或者水平方向上的直线奇异,再用普通的二维张量小波处理,而二维张量小波基恰恰能有效的处理水平、垂直方向上的奇异.于是,问题的关键归结为对图像本身的分析,即,如何提取图像本身的先验信息,怎样剖分图像,局部区域中如何“跟踪”奇异方向等等.

然而,在自然图像中,灰度值的突变并不总是对应着物体的边缘<sup>[25]</sup>,一方面,衍射效应使得图像中物体的边缘可能并不明显地表现出灰度的突变;另一方面,许多时候图像的灰度值剧烈变化,并不是由物体的边缘而是由于纹理的变化而产生的.所有基于边缘的自适应方法需要解决的一个共同的问题,是如何确定图像中灰度值剧烈变化的区域对应的是物体边缘还是纹理的变化,实际上这是一个非常困难的问题.大部分基于边缘的自适应算法在实际使用中,当图像出现较复杂的几何特征时,如 Lena 图像,在逼近误差的意义下,性能并不能超过可分离的正交小波分解<sup>[25]</sup>.

##### (3) Curvelet 变换存在的问题

脊波变换和 Curvelet 变换的提出,具有非常深远而重要的意义.作为一种新的理论和算法,Curvelet 还存在如下一些需要解决的问题,这些问题主要与 Curvelet 的数字实现有关:

Curvelet 变换提出的初衷是为了对高维空间中含奇异曲线或者曲面的函数进行“稀疏”表示.而实际上,目前 Curvelet 变换的数字实现算法冗余度高达  $16J+1$ <sup>[33,53]</sup>( $J$  是尺度分解数目),实际的算法与提出脊波变换和 Curvelet 变换时的初衷产生了背离.David Donoho 在文献[33]中也说到:“We are hardly satisfied with the performance of our existing DCVT1 scheme.... working with the raw transform is clumsy because of the factor 16 expansivity....”.Curvelet 变换的冗余性主要由以下几个方面产生:首先,Curvelet 变换是一种基于块剖分的变换,为了避免重构图像出现块边界效应,在数字实现时必须对各剖分块进行叠加(overlap)处理,这样不仅增加了运算量,而且增加了变换系数的冗余度;其次,Curvelet 变换基于脊波变换,而脊波变换中的 Radon 变换的关键步骤是笛卡尔坐标与极坐标间的转换(Cartesian-to-polar conversion),与连续域不同,在数字图像中进行这种转换非常困难,为了解决数字图像 Radon 变换中极坐标和笛卡尔坐标的转换问题,人们提出了不同的插值方法<sup>[53~55]</sup>,然而,各种解决方法却都是以计算复杂度或冗余度的增加为代价来获得变换精度的提高.

另外,Curvelet 变换在频域定义,其空域的采样特性并不显而易见.实际上,在文献[56]中,Candès 自己也说道:“Is there a spatial domain scheme for element which, at each generation doubles the spatial resolution as well as the angular resolution?”

同时,当图像中的奇异边缘是  $C^\alpha$  ( $\alpha > 2$ ) 时,Curvelet 变换非线性逼近误差衰减速率保持  $O(M^{-2})$ ,而不是最优的  $O(M^{-\alpha})$ ;而当奇异边缘是非正则的(有界变差函数),其逼近性能甚至不如小波<sup>[25]</sup>

目前,Curvelet 变换的实际应用还不多见<sup>[28,29,53,57,58]</sup>,从我们的实验结果来看,与小波变换具有近似的去相关特性不同,Radon 变换的存在使得 Curvelet 变换系数间具有“天生的

相关性.脊波变换和 Curvelet 变换所具有的局域性指的是线的局域性而不是点的局域性,也就是说,脊波域和 Curvelet 域中一个系数值的改变将引起空域中一条直线上所有值的改变.当然,是否具备去相关性并不能表征一种变换的好与不好,关键是如何去使用它以及在什么情况下使用.不过脊波和 Curvelet 变换的这一特点在图像去噪、融合等应用中会带来一些负面影响,表现为在重构图像中出现轻微的“划痕”,如何减轻甚至消除这种“划痕”是一个值得研究的课题.

虽然 Curvelet 变换的数字实现不尽如人意,但是我们应该认识到,脊波变换和 Curvelet 变换目前所存在的问题丝毫也不能掩盖蕴涵于其中的先进思想,这种思想代表的是“稀疏逼近”或者“计算调和与分析”的发展方向.

Contourlet 变换是一种近似的 Curvelet 变换数字实现方式,走的却是一条与 Curvelet 变换截然相反的技术路线. Contourlet 变换首先直接在数字域中定义,再将数字域和连续域联系起来,在连续域中讨论 Contourlet 变换的逼近性能. Contourlet 变换具有比 Curvelet 变换少得多的冗余度,然而,对于 Contourlet 变换,其数学基础还有待进一步完善.

#### (4)关于图像模型

值得注意的是,式(7)只是一个自然图像的简化模型,当前的图像多尺度几何分析方法都是以此模型为分析对象的.然而,真正的自然图像远比式(7)复杂,对于更复杂的图像模型,如包含纹理的模型,我们怎么处理呢?还需建立怎样的多尺度几何表示方法呢?对这些问题的回答无疑极具意义.

## 5 结束语

本文以函数的非线性逼近为主线,对图像的多尺度几何分析做了粗线条的勾画,意在诠释推动多尺度几何分析发展的内在动力,以期引起更多研究者对这一新兴领域的关注.由于篇幅所限,加之多尺度几何分析本身尚处于起步阶段,许多问题未及深究.文中许多观点是本文作者在进行多尺度几何的研究中一己之见,难免有失偏颇,欢迎批评指正.

## 参考文献:

- [1] E J Candès. Ridgelets: Theory and Applications[D]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1998.
- [2] E J Candès. Monoscale Ridgelets for the Representation of Images with Edges[R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1999.
- [3] Candès E J, D L Donoho. Curvelets[R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1999.
- [4] E L Pennec, S Mallat. Image compression with geometrical wavelets [A]. In Proc. of ICIP' 2000 [C]. Vancouver, Canada, September, 2000. 661 - 664.
- [5] M N Do, M Vetterli. Contourlets[A]. J Stoeckler, G V Welland. Beyond Wavelets [C]. Academic Press, 2002.
- [6] Stéphane Mallat. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华,等,译. 北京:机械工业出版社, 2003.
- [7] D L Donoho, M Vetterli, R A DeVore, I Daubechies. Data compression and harmonic analysis [J]. IEEE Trans, 1998, Information Theory-44 (6):2435 - 2476.
- [8] M Vetterli. Wavelets, approximation and compression [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2001, 18(5): 59 - 73.
- [9] R A DeVore. Nonlinear approximation [A]. Acta Numerica [M]. Cambridge University Press, 1998.
- [10] D L Donoho. Sparse component analysis and optimal atomic decomposition [J]. Constructive Approximation, 1998, 17: 353 - 382.
- [11] D H Hubel, T N Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex [J]. Journal of Physiology, 1962, 160: 106 - 154.
- [12] B A Olshausen, D J Field. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images [J]. Nature, 1996, 381: 607 - 609.
- [13] David L Donoho, Ana Georgina Flesia. Can recent innovations in harmonic analysis 'explain' key findings in natural image statistics [J]. Network: Computation in Neural Systems, 2001, 12(3): 371 - 393.
- [14] D L Donoho. Orthonormal ridgelets and linear singularities [R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1998.
- [15] S Carlsson. Sketch based coding of gray level images [J]. IEEE Trans, 1988, Image Processing -15(1): 57 - 83.
- [16] J Elder. Are edges incomplete [J]. International Journal of Computer Vision, 1999, 34(2): 97 - 122.
- [17] X Xue, X Wu. Image representation based on multi-scale edge compensation [A]. IEEE Internat. Conf. on Image Processing [C]. IEEE, 1999.
- [18] S Mallat, S S Zhong. Wavelet transform maxima and multiscale edges [A]. B R, et al. Wavelets and Their Applications [M]. Boston: Jones and Bartlett, 1992.
- [19] A Cohen, B Matei. Nonlinear subdivisions schemes: Applications to image processing [A]. A Iske, E Quack, M Floater. Tutorial on Multiresolution in Geometric Modeling [M]. Springer, 2002.
- [20] A Cohen, B Matei. Compact representation of images by edge adapted multiscale transforms [A]. Proc IEEE Int Conf on Image Proc, Special Session on Image Processing and Non-Linear Approximation [C]. Thessaloniki, Greece, invited paper, Oct. 2001.
- [21] P L Dragotti, M Vetterli. Footprints and edgeprints for image denoising and compression [A]. Proc IEEE Int Conf on Image Proc [C]. Thessaloniki, Greece, Oct. 2001. 237 - 240.
- [22] D L Donoho. Wedgelets: nearly-minimax estimation of edges [J]. Ann Statist, 1999, 27: 859 - 897.
- [23] M B Wakin, J K Romberg, H Choi, R G Baraniuk. Rate-distortion optimized image compression using wedgelets [A]. Proc IEEE Int Conf on Image Proc [C]. Rochester, New York, Oct. 2002.
- [24] R Shukla, P L Dragotti, M N Do, M Vetterli. Rate-distortion optimized tree structured compression algorithms for piecewise smooth images [DB/OL]. Submitted to IEEE Trans on Image Processing, <http://www.ifp.uiuc.edu/minhdo/publications>, 2003.
- [25] E Le Pennec, S Mallat. Sparse Geometric Image Representation with Bandelets [DB/OL]. Submitted to IEEE Trans on Image Processing, <http://www.cmap.polytechnique.fr/~mallat/papiers>, 2003.
- [26] E Le Pennec, S Mallat. Non linear image approximation with bandelets [R]. CMAP Ecole Polytechnique, 2003.
- [27] E J Candès. Harmonic analysis of neural networks [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1999, 6: 197 - 218.
- [28] 侯彪, 刘芳, 焦李成. 基于脊波变换的直线特征检测 [J]. 中国科

- 学 E, 2003, 33(1): 65 - 73.
- [29] 侯彪. 脊波和方向信息检测方法及应用 [D]. 陕西西安: 西安电子科技大学, 2003, 4.
- [30] 焦李成, 侯彪, 刘芳. 脊函数网络逼近: 进展与展望 [J]. 工程数学学报, 2002, 19(1): 21 - 36.
- [31] E J Candès. On the representation of mutilated sobolev functions [J]. SIAM J. Math. Anal, 1999, 33: 2495 - 2509.
- [32] E J Candès, D L Donoho. Curvelets: a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges [A]. L L S, et al. Curves and Surfaces [M]. Nashville: Vanderbilt University Press, 1999.
- [33] D L Donoho, M R Duncan. Digital curvelet transform: strategy, implementation and experiments [A]. Proc. Aerosense 2000, Wavelet Applications VII [C]. SPIE, 2000. 4056. 12 - 29.
- [34] P J Burt, E H Adelson. The Laplacian pyramid as a compact image code [J]. IEEE Trans, Communication-31 (4): 532 - 540.
- [35] M N Do, M Vetterli. Framing pyramids [J]. IEEE Trans, 2003, Signal Proc-51(9): 2329 - 2342.
- [36] R H Bamberg, M J T Smith. A filter bank for the directional decomposition of images: Theory and design [J]. IEEE Trans, 1992, Signal Proc-40(4): 882 - 893.
- [37] M N Do. Directional Multiresolution Image Representations [D]. Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, December 2001.
- [38] M N Do, M Vetterli. Pyramidal directional filter banks and curvelets [A]. Proc IEEE Int Conf on Image Proc [C]. Thessaloniki, Greece, Oct. 2001.
- [39] J Daugman. Two-dimensional spectral analysis of cortical receptive field profile [J]. Vision Research, 1980, 20: 847 - 856.
- [40] M Porat, Y Y Zeevi. The generalized Gabor scheme of image representation in biological and machine vision [J]. IEEE Trans, 1988, Patt. Recog. and Mach. Intell. -10(4): 452 - 468.
- [41] A B Watson. The cortex transform: Rapid computation of simulated neural images [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1987, 39(3): 311 - 327.
- [42] E P Simoncelli, W T Freeman, E H Adelson, D J Heeger. Shiftable multiscale transforms [J]. IEEE Trans, 1992, Information Theory-38 (2): 587 - 607.
- [43] J P Antoine, P Carrette, R Murenzi, B Piette. Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform [J]. Signal Processing, 1993, 31: 241 - 272.
- [44] F G Meyer, R R Coifman. Brushlets: a tool for directional image analysis and image compression [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1997, 5: 147 - 187.
- [45] N Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2001, 10 (3): 234 - 253.
- [46] M N Do, M Vetterli. Contourlet: a computational framework for directional multiresolution image representation [DB/OL]. Submitted to IEEE Trans on Image Processing, <http://www.ifp.uiuc.edu/~minhdo/publications>, 2003.
- [47] Y Lu, M N Do. CRISP-Contourlet: A critically sampled directional multiresolution image representation [A]. Proc SPIE Conf on Wavelets X [C]. San Diego, Aug. 2003.
- [48] Coifman R R, M V Wickerhauser. Entropy-based algorithms for best basis selection [J]. IEEE Trans, 1992, Information Theory-38: 1713 - 1716.
- [49] Donoho D L, I M Johnstone. Empirical Atomic Decomposition [Z]. Manuscript, <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/reports.html>, 1995.
- [50] Donoho D L. Wedgelets: nearly minimax estimation of edges [J]. Ann. Statist, 1999, 27: 859 - 897.
- [51] Deng B, B Jawerth, G Peters, W Sweldens. Wavelet probing for compression-based segmentation [A]. Proc SPIE Symp Math Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing [C]. San Diego, 1993.
- [52] Donoho D L. Minimum entropy segmentation [A]. C K Chui, L Montefusco, L Puccio. Wavelets: Theory, Algorithms and Applications [M]. San Diego: Academic Press, 1994. 233 - 270.
- [53] J L Starck, E J Candès, D L Donoho. The curvelet transform for image denoising [J]. IEEE Trans, 2002, Image Processing-11(6): 670 - 684.
- [54] A Averbuch, R R Coifman, D L Donoho, M Israeli, J Walden. Fast slant stack: A notion of Radon transform for data in a Cartesian grid which is rapidly computable, algebraically exact, geometrically faithful and invertible [R/OL]. <http://www.math.tau.ac.il/~amir1/>, 2001.
- [55] E J Candès, D L Donoho. Recovering edges in ill-posed inverse problems: Optimality of curvelet frames [R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 2000.
- [56] E J Candès, D L Donoho. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with smooth singularities [R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 2002.
- [57] J L Starck, E Candès, D L Donoho. Astronomical image representation by the curvelet transform [J]. Astronomy and Astrophysics, 2003, 398: 785 - 800.
- [58] J L Starck, F Murtagh, E Candès, D L Donoho. Gray and color image contrast enhancement by the curvelet transform [J]. IEEE Trans, 2003, Image Processing-12(6): 706 - 717.

#### 作者简介:



**焦李成** 男, 1959 年生于陕西白水, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为智能信息处理。



**谭山** 男, 1973 年出生于湖南娄底, 2002 年 6 月于武汉大学获工学硕士学位, 现为西安电子科技大学博士生, 主要研究方向为图像的多尺度几何分析、小波分析及其在图像处理中的应用。