

# TP1

May 4, 2022

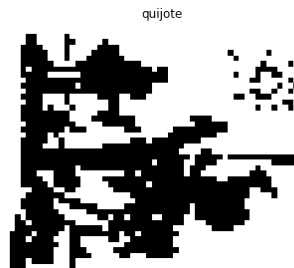
## Trabajo Práctico 1

Alumno: Juan Antonio Zuloaga Mellino

### 1. Entrene una red de Hopfield '82 con un conjunto de imágenes binarias.

Se encuentran 2 tamaños distintos en las imágenes de prueba, por lo que se las subdivide en 2 grupos:

1) De tamaño 45x60



2) De tamaño 50x50



El entrenamiento de la red de Hopfield consiste en armar una matriz de pesos sinápticos.

Para un conjunto de imágenes se calcula la matriz de pesos como:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_i^T - p \cdot \mathbf{I}$$

Donde  $p$  es la cantidad de patrones,  $\mathbf{z}_i$  es un vector columna de tamaño  $n$  con el  $i$ -ésimo patrón a aprender y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad tamaño  $n \times n$

**a) Verifique si la red aprendió las imágenes enseñadas.**

Se utiliza como entrada al algoritmo de hopfield a las mismas imágenes  $\mathbf{z}$  de entrenamiento y si la salida es idéntica se considera que la imagen fue aprendida.

Procesamiento de imágenes de 40x60:

```
[41]:          Learned
Image
paloma         True
quijote        True
torero         True
```

Procesamiento de imágenes de 50x50:

```
[42]:          Learned
Image
panda          True
perro          True
guyFawkes      True
```

Se verifica que se aprendieron ambos grupos de 3 imágenes.

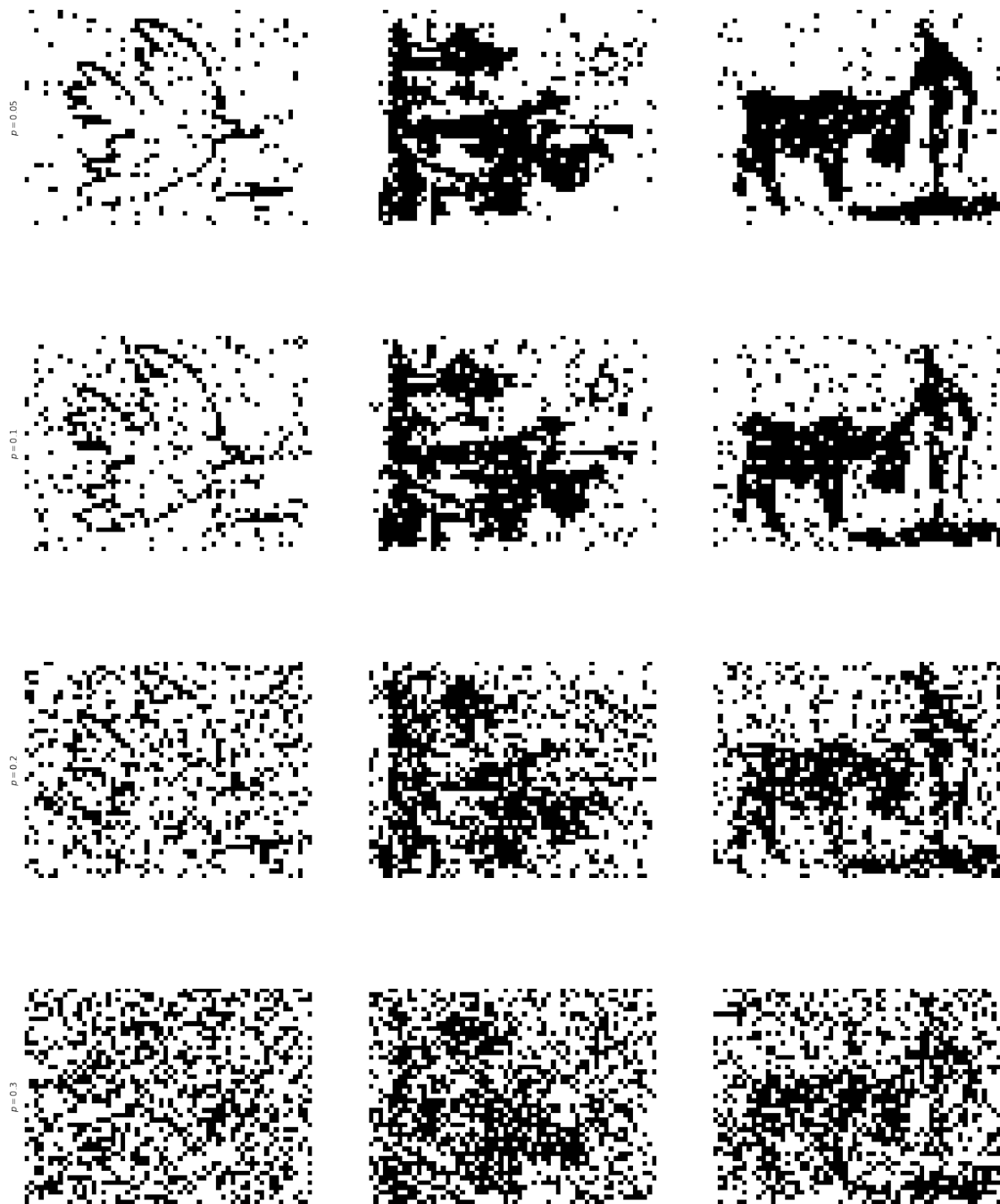
**b) Evalúe la evolución de la red al presentarle versiones alteradas de las imágenes aprendidas: agregado de ruido, elementos borrados o agregados.**

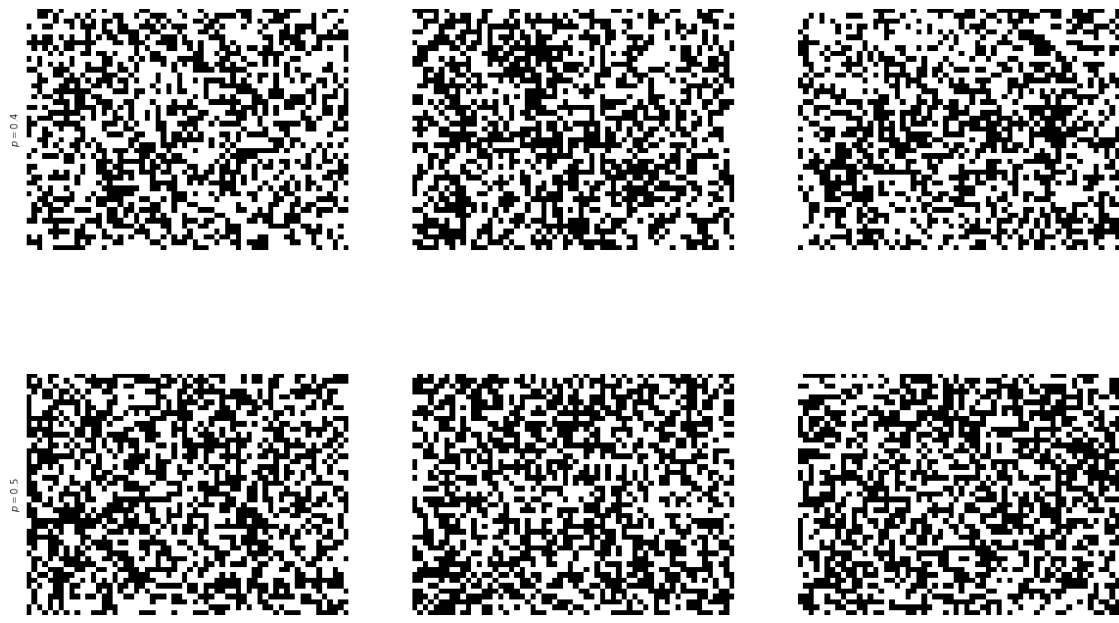
**Ruido** Se le agrega ruido digital a las imágenes. Invirtiendo cada pixel de la imagen con una probabilidad  $p$

Procesamiento de imágenes de 40x60:

```
[86]: p      0.01  0.05  0.10  0.20  0.30  0.40  0.50
Image
paloma  True  True  True  True  True  True  False
quijote True  True  True  True  True  True  False
torero  True  True  True  True  True  True  False
```





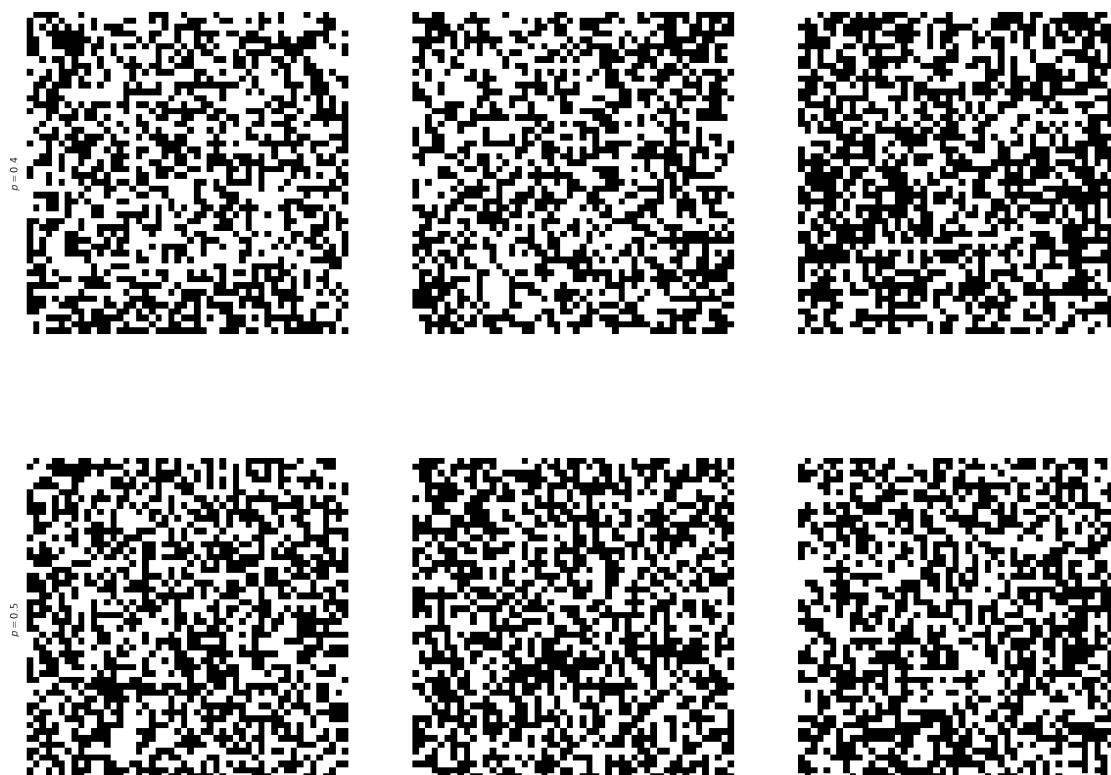


Procesamiento de imágenes de 50x50:

```
[87]: p      0.01  0.05  0.10  0.20  0.30  0.40  0.50
Image
panda      True   True   True   True   True   True   False
perro      True   True   True   True   True   True   False
guyFawkes  True   True   True   True   True   True   False
```







Repetidos ensayos mostraron que para 3 imágenes el algoritmo es robusto a ruido digital hasta  $p = 0.4$ . Con  $p = 0.5$  el algoritmo converge a la imagen equivocada más frecuentemente de lo que acierta. Para  $p > 0.5$  el atractor cambia a la imagen inversa.

**Máscaras** Se ensayaron máscaras rectangulares que cubren distintos porcentajes de las imágenes de prueba, y se las usó como entrada en el algoritmo de Hopfield.

Procesamiento de imágenes de 40x60:

```
[91]: mask %    0.2    0.4    0.6    0.8
Image
paloma    True  True  True  True
quijote   True  True False False
torero    True  True  True False
```





Procesamiento de imágenes de 50x50:

```
[92]: mask %      0.2   0.4   0.6   0.8
Image
panda      True  True  True  True
perro      True  True  True  True
guyFawkes  True  True  True  False
```

mask=0.2



mask=0.4



mask=0.6



mask=0.8





Se observa que el algoritmo tolera máscaras que cubren hasta el 60% de la imagen, pero cuando cubre el 80% algunas imágenes comienzan a fallar.

c) Evalúe la existencia de estados espurios en la red: patrones inversos y combinaciones de un número impar de patrones. (*Ver Spurious States, en la sección 2.2, Hertz, Krogh & Palmer, pág. 24*).

Validación de los patrones negativos:

Procesamiento de imágenes de 45x60:

[263] :            Learned

Image	
paloma	True
quijote	True
torero	True



Procesamiento de imágenes de 50x50

[264] :            Learned

Image	
panda	True
perro	True
guyFawkes	True



Los patrones negativos fueron aprendidos correctamente. Validado esto, se arma un conjunto de patrones expandido con los patrones positivos y negativos y se evaluan todas las combianaciones suma de 3 elementos de este conjunto.

Esto volverá a evaluar los patrones positivos y negativos, ya que si se suman 3 patrones  $A + B + C$ , donde  $A = -B$ , A y B se cancelan y queda el patrón C.

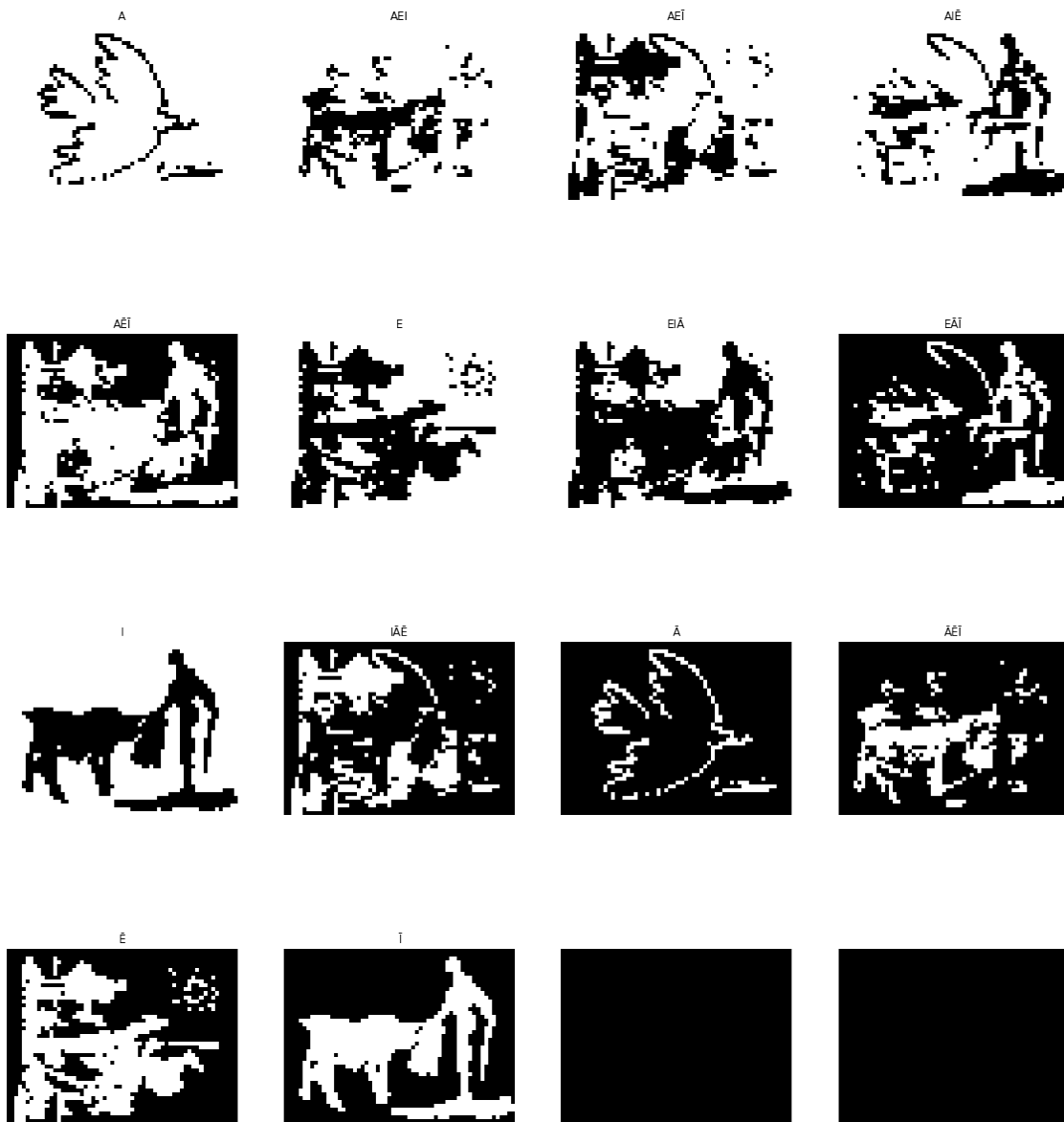
Procesamiento de imágenes de 45x60:

[446]: Comb        A    AEI    AE $\bar{I}$     AI $\bar{E}$     A $\bar{E}\bar{I}$     E    EI $\bar{A}$     E $\bar{A}\bar{I}$     I    I $\bar{A}\bar{E}$      $\bar{A}$  \

Learned   True   True   True   True   True   True   True   True   True   True   True

Comb         $\bar{A}\bar{E}\bar{I}$      $\bar{E}$      $\bar{I}$

Learned   True   True   True



Procesamiento de imágenes de 50x50

[447]: Comb      A    AEI    AE $\bar{I}$     AI $\bar{E}$     A $\bar{E}\bar{I}$     E    EI $\bar{A}$     E $\bar{A}\bar{I}$     I    I $\bar{A}\bar{E}$      $\bar{A}$    \

Learned   True   True   True   True   True   True   True   True   True   True   True   True

Comb       $\bar{A}\bar{E}\bar{I}$        $\bar{E}$        $\bar{I}$

Learned   True   True   True





Todos los patrones generados como suma de 3 patrones resultan en un patrón aprendido por la red para ambos conjuntos de imágenes.

d) Realice un entrenamiento con todas las imágenes disponibles. ¿Es capaz la red de aprender todas las imágenes? Explique.

Para poder cargar todas las imágenes juntas es necesario primero homogeneizar el tamaño.

La homogeneización de tamaño se realizó con un padding al tamaño mínimo capaz de contener todas las imágenes.

El padding se realizó con 3 tipos de patrones distintos.

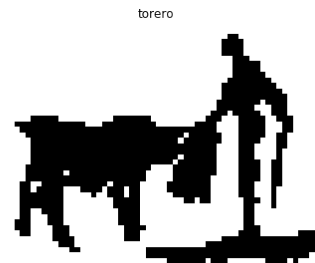
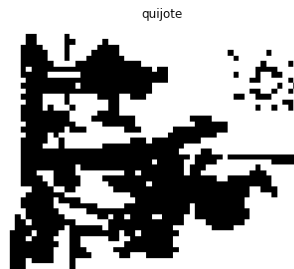
Padding con Zeros:

[492]: Image paloma quijote torero panda perro guyFawkes  
 Learned False True False True True True



Padding con Unos:

```
[493]: Image    paloma quijote torero panda perro  guyFawkes  
       Learned   False   False   False False False    True
```



Padding con patrón pseudoaleatorio:

```
[494]: Image    paloma quijote torero panda perro  guyFawkes  
       Learned   False   True   True   True   True    True
```





En ninguno de los casos la red pudo aprender todos los patrones, pero los resultados variaron con el tipo de padding utilizado.

El padding el blanco fue el que produjo mayores solapamientos y solo aprendió un patrón.

El padding en negro produjo que 2 patrones no pudieran ser aprendidos.

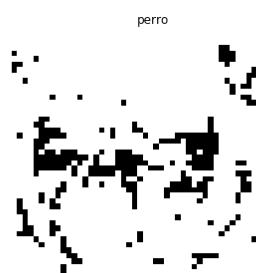
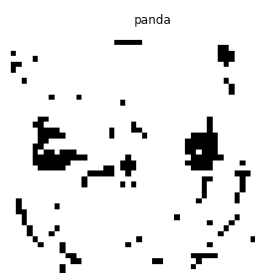
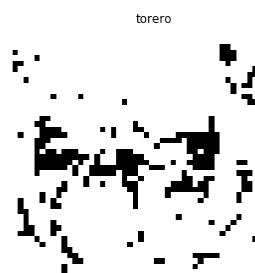
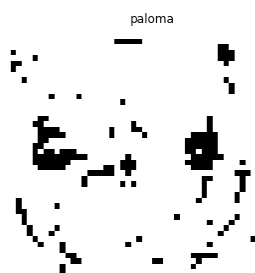
El padding con patrones pseudoaleatorios produjo que 1 o 2 patrones nos se pudieran aprender dependiendo de la corrida.

Patrones a los que converge el algoritmo:

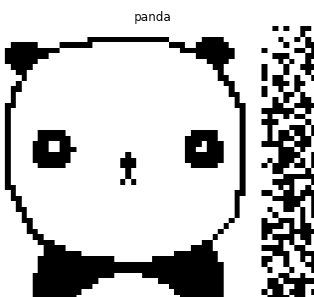
Padding con Zeros:



Padding con Unos:



Padding pseudo aleatorio:



Al analizar dónde convergen los patrones que fallaron se observa que los patrones de salida contienen parte de la información del patrón de entrada. Por ejemplo las alas de la paloma y las patas del toro todavía pueden apreciarse para el caso del padding negro.

Se concluye que los patrones no son lo suficientemente ortogonales entre sí para ser aprendidos todos, o que la red es muy chica para ese fin.

## 2. Comprobar estadísticamente la capacidad de la red de Hopfield '82 calculando la cantidad máxima de patrones pseudo-aleatorios aprendidos en función del tamaño de la red.

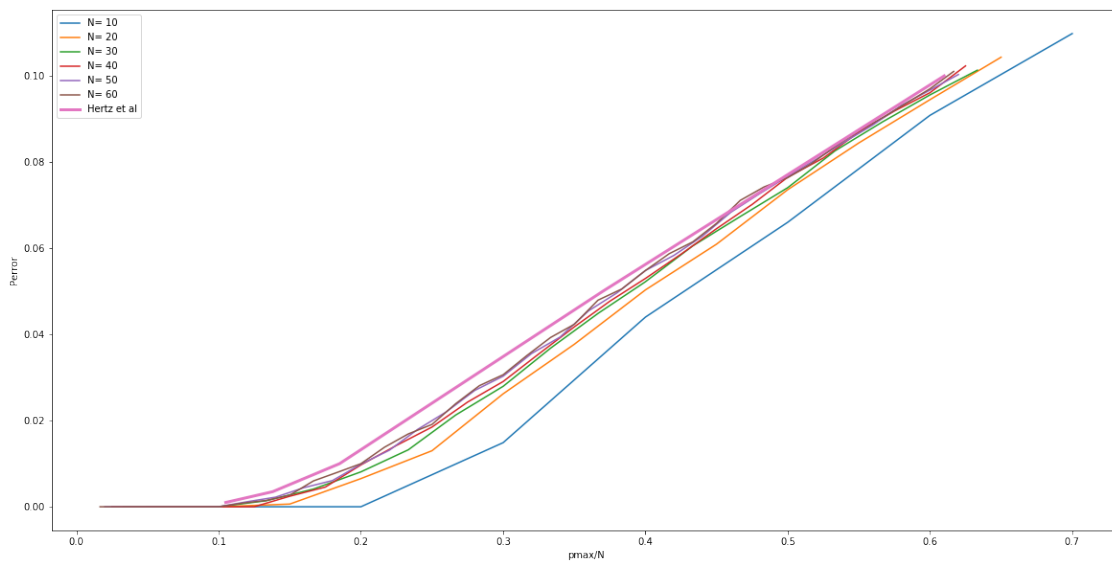
a) Obtener experimentalmente los resultados de la siguiente tabla (los valores de la tabla corresponden a una iteración con actualización sincrónica).

[502] :

	$p_{max}/N$
Error	
0.0010	0.105
0.0035	0.138
0.0100	0.185
0.0500	0.370
0.1000	0.610

Capacidad de la red para Hopfield Síncrono:

Se estimó mediante método de Montecarlo para distintos tamaños de red ( $N$ ) y distinta cantidad de patrones a aprender ( $P_{max}$ ), el error esperado después de 1 paso del algoritmo de hopfield, con 3 decimales para un intervalo de confianza del 95%



Si bien no se pudo reproducirla exactamente, se observa que las curvas se acercan a los valores de la tabla de Hertz conforme se incrementa la cantidad de neuronas  $N$ .



**b) Analice cómo cambia la capacidad de una red en función de la correlación entre patrones**

Si definimos nuestra correlación como:

$$\rho = \mathbb{E} \frac{\sum_j \xi_j^\mu \xi_j^\nu}{N}$$

Si N es la cantidad de neuronas, las imágenes se correlacionaron de la siguiente manera:

- La primer imagen ( $\nu = 1$ ) es pseudo aleatoria
- La  $\nu$ -ésima imagen con  $\nu > 1$  se compone de los valores de  $(\nu - 1)$  para algún  $K < N$  posiciones elegidas al azar. El resto de los posiciones toma valores aleatorios.

Esto producirá que para 2 patrones consecutivos

$$\rho = \mathbb{E} \frac{\sum_{j=1}^N \xi_j^\nu \xi_j^{\nu-1}}{N} = \frac{\mathbb{E} \sum_{j=1}^K \xi_j^\nu \xi_j^{\nu-1} + \mathbb{E} \sum_{j=K+1}^N \xi_j^\nu \xi_j^{\nu-1}}{N} = \frac{K}{N}$$

La sumatoria de la derecha corresponde a patrones pseudo-ortogonales por lo que su media es nula.

La sumatoria de la izquierda corresponded a patrones idénticos, por lo que el producto es siempre 1 y la sumatoria vale K

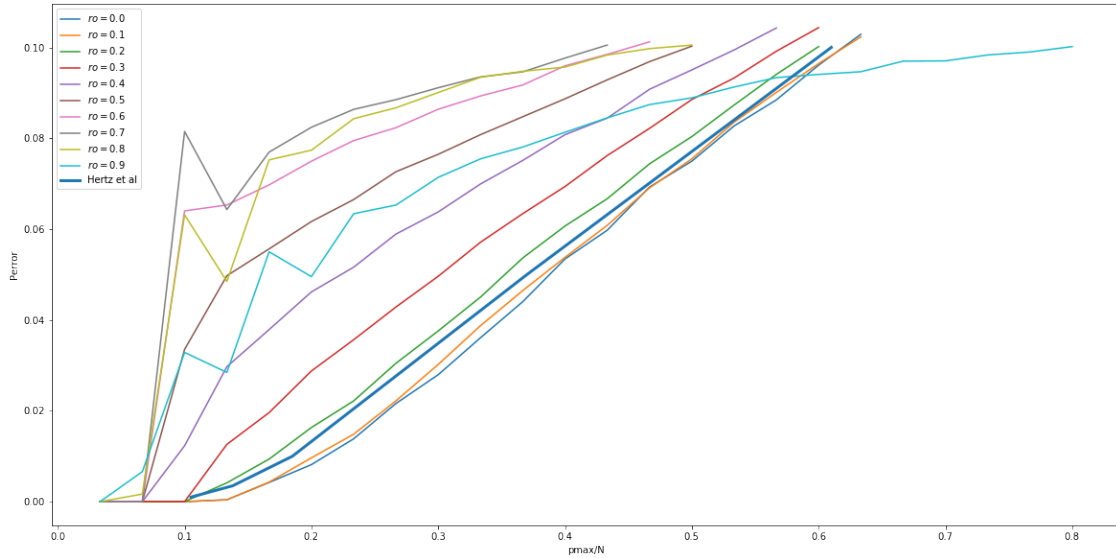
Con éste metodo podemos generar patrones con la correlación deseada.

Se valida que las correlaciones den el resultado correcto, para pares de patrones con  $N = 10000$

```
[546] :           Corr
ro
0.0 -6.04753e-05
0.1  0.0999917
0.2  0.200026
0.3  0.300002
0.4  0.399995
0.5  0.499973
0.6  0.60002
0.7  0.699965
0.8  0.799989
0.9  0.899991
```

Se pude observar que los patrones se generan con la correlación deseada.

Se realiza el cálculo de capacidad para  $N=30$



Se puede observar que para  $\rho$  chicos la capacidad se ubica cerca de la teórica calculada por Herz. Pero conforme incrementa la correlación entre patrones, la capacidad cae hasta colapsar.

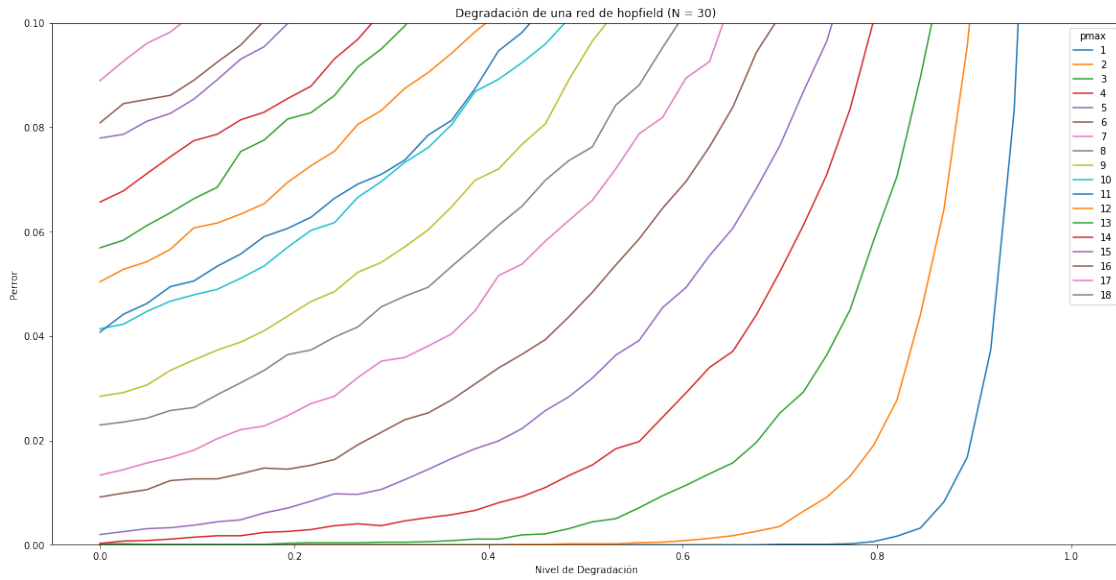
Es de notar que el método de generación de patrones correlacionados secuencialmente que se utilizó, donde se parte de una imagen A y se genera una imagen B con correlación  $\rho$  con de A, y luego una imagen C con correlación  $\rho$  con B implica que existe una correlación  $\rho' < \rho$  entre A y C. Esa correlación no fue analizada en este trabajo.

### 3. Implemente una red de Hopfield '82 que aprenda patrones pseudo-aleatorios y estudie qué sucede con los patrones aprendidos cuando algunas interconexiones son eliminadas al azar.

Para un conjunto de patrones pseudoaleatorios se arma una red de Hopfield y se elimina cierto porcentaje de los pesos sinápticos progresiva y aleatoriamente.

Repitiendo el experimento, mediante método de Montecarlo se estima el error medio después de un paso de Hopfield para distintos niveles de degradación de la matriz de pesos sinápticos.

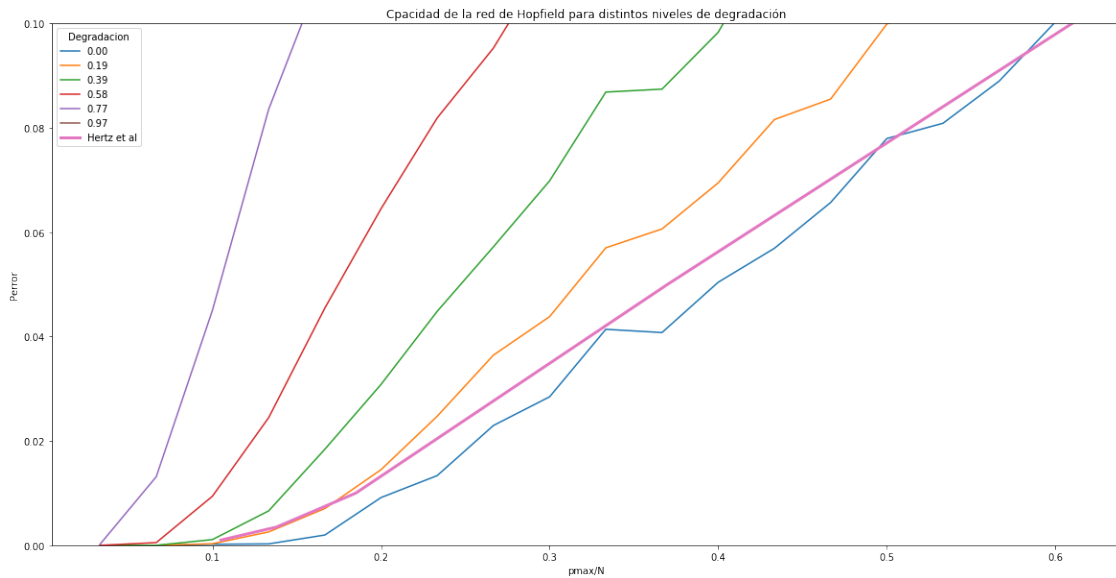
a) ¿Cómo cambia el error en función del porcentaje de sinapsis eliminadas?



Se observa que al incrementar el porcentaje de sinapsis eliminadas respecto al total de sinapsis, al principio la red es robusta frente a estas degradaciones, pero llega un punto en que el error se dispara.

También, como era de esperarse, la tolerancia a la degradación es mayor, conforme menor es la cantidad de patrones aprendidos. Para el caso de  $p_{max} = 1$  y  $p_{max} = 2$ , la tolerancia a la degradación es de 80% y 60% respectivamente, manteniendo errores bajos.

b) ¿Cómo cambia la capacidad en función del porcentaje de sinapsis eliminadas?



En el gráfico de capacidad se puede observar como la probabilidad de error incrementa al aumentar el nivel de degradación de la red.

#### 4. Simular un modelo de Ising en una y dos dimensiones. Encontrar la temperatura crítica para ambos casos

Se utiliza el algoritmo de metrópolis para simular un modelo de Ising. Se toma como simplificación que la interacción de intercambio magnético vale 1 para los dipolos que están en contacto en la red, y 0 para el resto.

Calculamos la energía de ising como:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij} \sigma_j \sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij}$$

El segundo término corresponde al mínimo de energía, cuando todos los spin están alineados y es una corrección para que la energía sea positiva.

Se utilizó como constante de Boltzmann,  $k' = 8.3E - 3$  que es un valor ad-hoc para que la temperatura de curie de los experimentos de aproximadamente 1000

Consideramos que se estabiliza la energía en un nivel de temperatura, cuando podemos determinar la media de energía con 1% de error y un 95% de confianza.

Esta implementación de algoritmo de metrópolis decrementa la temperatura en pasos  $T_{k+1} = 0.9T_k$

El paso de temperatura se da cuando mediante Montecarlo, se obtiene una estimación de la energía media que se considera estable.

Se trabaja con la hipótesis que si converge el estimador de la energía media, también el sistema se estabiliza en ese nivel de temperatura.

Metropolis 1D

Estado inicial, T = 1.00e+06



Temperature 1.00e+06, Mean Energy 1.00e+02



Temperature 9.00e+05, Mean Energy 9.60e+01



Temperature 8.10e+05, Mean Energy 8.80e+01



Temperature  $7.29 \times 10^5$ , Mean Energy  $9.00 \times 10^1$



Temperature  $6.56 \times 10^5$ , Mean Energy  $9.80 \times 10^1$



Temperature  $5.90 \times 10^5$ , Mean Energy  $9.40 \times 10^1$



Temperature  $5.31 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.00 \times 10^2$



Temperature  $4.78 \times 10^5$ , Mean Energy  $9.60 \times 10^1$



Temperature  $4.30 \times 10^5$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $3.87 \times 10^5$ , Mean Energy  $8.20 \times 10^1$



Temperature  $3.49 \times 10^5$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $3.14 \times 10^5$ , Mean Energy  $7.60 \times 10^1$



Temperature  $2.82 \times 10^5$ , Mean Energy  $8.80 \times 10^1$



Temperature  $2.54 \times 10^5$ , Mean Energy  $8.20 \times 10^1$



Temperature  $2.29 \times 10^5$ , Mean Energy  $8.80 \times 10^1$



Temperature  $2.06 \times 10^5$ , Mean Energy  $8.20 \times 10^1$



Temperature  $1.85 \times 10^5$ , Mean Energy  $6.60 \times 10^1$



Temperature  $1.67 \times 10^5$ , Mean Energy  $8.00 \times 10^1$



Temperature  $1.50 \times 10^5$ , Mean Energy  $7.00 \times 10^1$



Temperature  $1.35 \times 10^5$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $1.22 \times 10^5$ , Mean Energy  $6.60 \times 10^1$



Temperature  $1.09 \times 10^5$ , Mean Energy  $7.20 \times 10^1$



Temperature  $9.85 \times 10^4$ , Mean Energy  $8.40 \times 10^1$



Temperature  $8.86 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.60 \times 10^1$



Temperature  $7.98 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $7.18 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.20 \times 10^1$



Temperature  $6.46 \times 10^4$ , Mean Energy  $9.20 \times 10^1$



Temperature  $5.81 \times 10^4$ , Mean Energy  $8.40 \times 10^1$



Temperature  $5.23 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $4.71 \times 10^4$ , Mean Energy  $8.80 \times 10^1$



Temperature  $4.24 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.00 \times 10^1$



Temperature  $3.82 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.00 \times 10^1$



Temperature  $3.43 \times 10^4$ , Mean Energy  $6.20 \times 10^1$



Temperature  $3.09 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.60 \times 10^1$



Temperature  $2.78 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $2.50 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.20 \times 10^1$



Temperature  $2.25 \times 10^4$ , Mean Energy  $5.80 \times 10^1$





Temperature  $2.03 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.80 \times 10^1$



Temperature  $1.82 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.00 \times 10^1$



Temperature  $1.64 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.20 \times 10^1$



Temperature  $1.48 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.00 \times 10^1$



Temperature  $1.33 \times 10^4$ , Mean Energy  $6.80 \times 10^1$



Temperature  $1.20 \times 10^4$ , Mean Energy  $7.20 \times 10^1$



Temperature  $1.08 \times 10^4$ , Mean Energy  $5.20 \times 10^1$



Temperature  $9.70 \times 10^3$ , Mean Energy  $7.80 \times 10^1$



Temperature  $8.73\text{e}+03$ , Mean Energy  $6.00\text{e}+01$



Temperature  $7.86\text{e}+03$ , Mean Energy  $6.40\text{e}+01$



Temperature  $7.07\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.60\text{e}+01$



Temperature  $6.36\text{e}+03$ , Mean Energy  $6.20\text{e}+01$



Temperature  $5.73\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.20\text{e}+01$



Temperature  $5.15\text{e}+03$ , Mean Energy  $6.40\text{e}+01$



Temperature  $4.64\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.40\text{e}+01$



Temperature  $4.17\text{e}+03$ , Mean Energy  $6.00\text{e}+01$



Temperature  $3.76\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.00\text{e}+01$



Temperature  $3.38\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.20\text{e}+01$



Temperature  $3.04\text{e}+03$ , Mean Energy  $3.80\text{e}+01$



Temperature  $2.74\text{e}+03$ , Mean Energy  $4.40\text{e}+01$



Temperature  $2.47\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.00\text{e}+01$



Temperature  $2.22\text{e}+03$ , Mean Energy  $4.20\text{e}+01$



Temperature  $2.00\text{e}+03$ , Mean Energy  $2.60\text{e}+01$



Temperature  $1.80\text{e}+03$ , Mean Energy  $2.20\text{e}+01$



Temperature  $1.62\text{e}+03$ , Mean Energy  $2.20\text{e}+01$



Temperature 1.46e+03, Mean Energy 1.20e+01



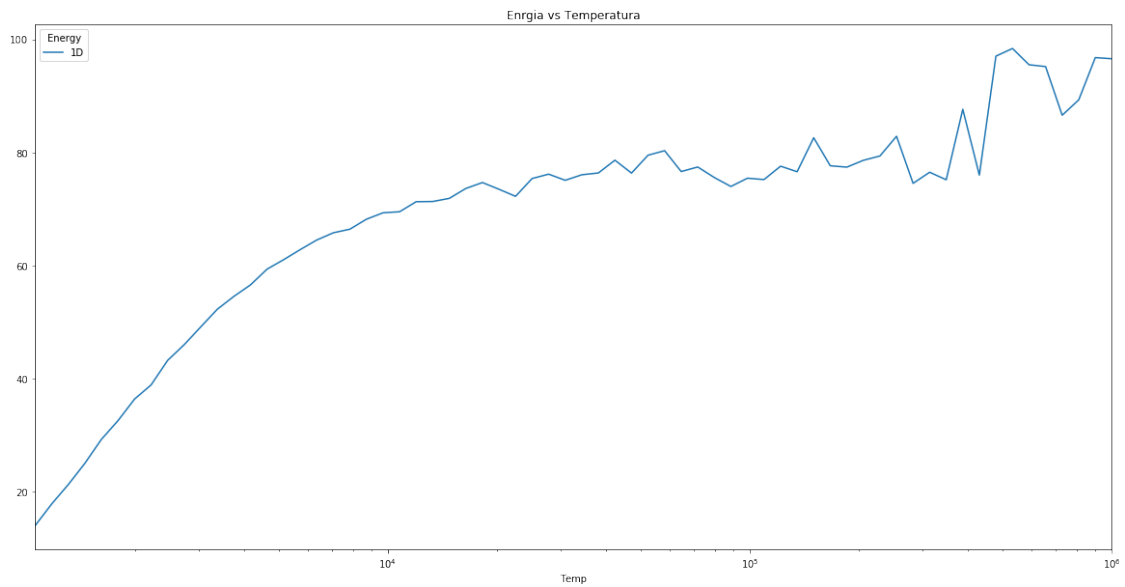
Temperature 1.31e+03, Mean Energy 2.60e+01



Temperature 1.18e+03, Mean Energy 2.60e+01

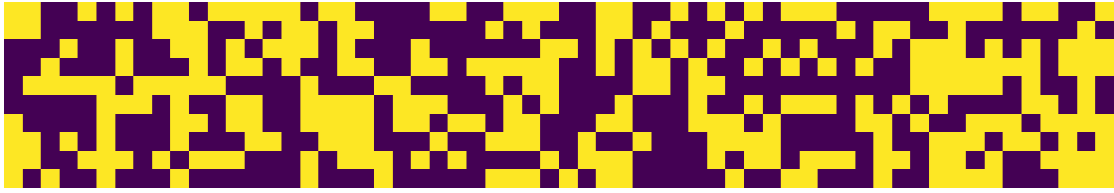


Temperature 1.06e+03, Mean Energy 0.00e+00

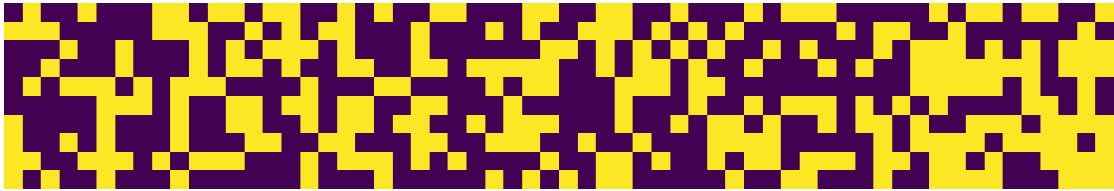


Metropolis 2D

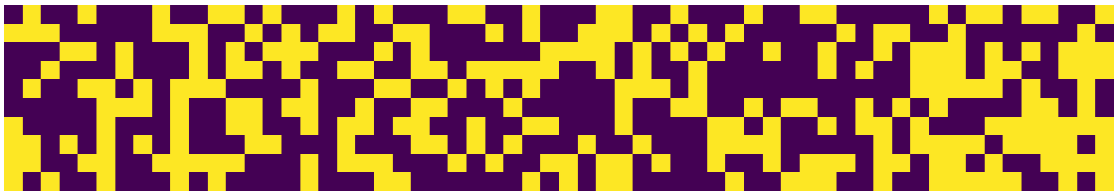
Estado inicial,  $T = 1.00\text{e}+06$



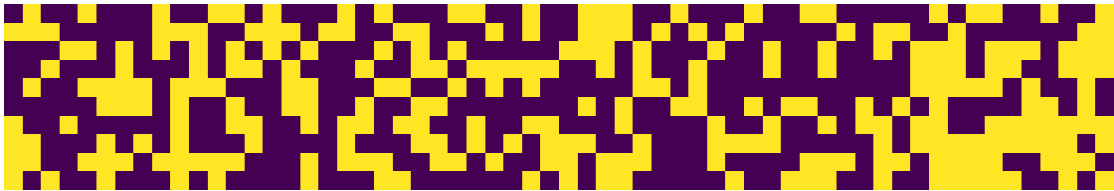
Temperature  $1.00\text{e}+06$ , Mean Energy  $1.17\text{e}+03$



Temperature  $9.00\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.17\text{e}+03$



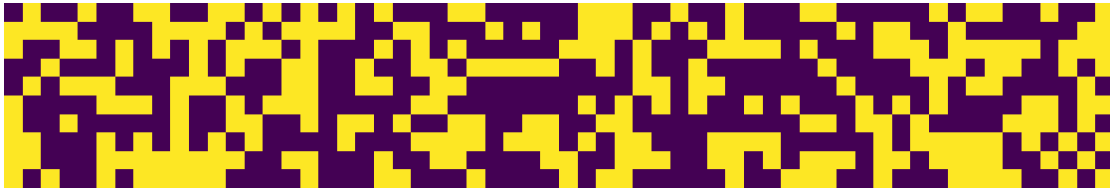
Temperature  $8.10\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.11\text{e}+03$



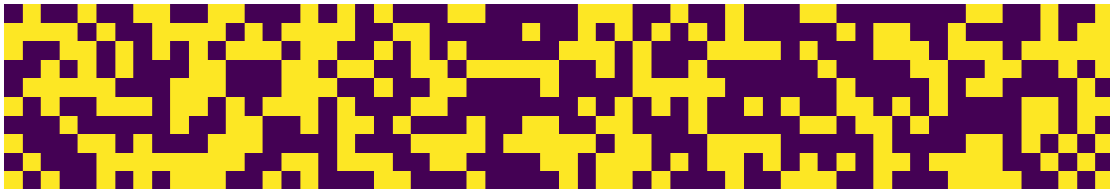
Temperature  $7.29\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.12\text{e}+03$



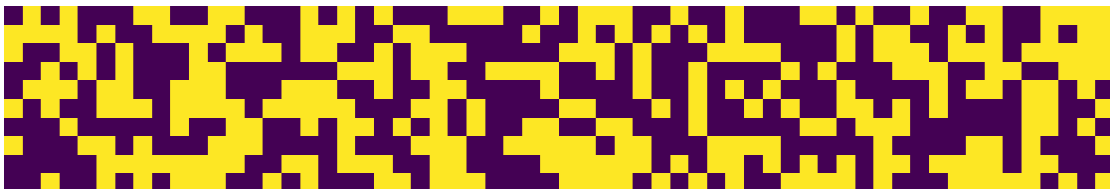
Temperature  $6.56 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.12 \times 10^3$



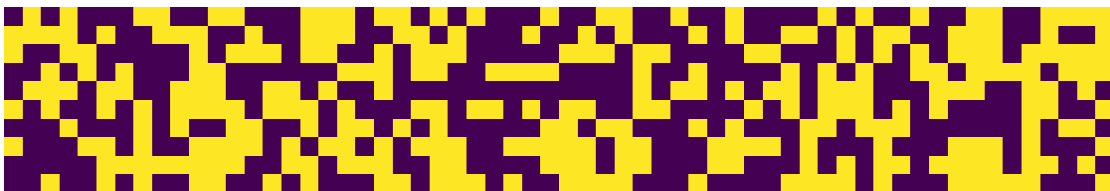
Temperature  $5.90 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.17 \times 10^3$



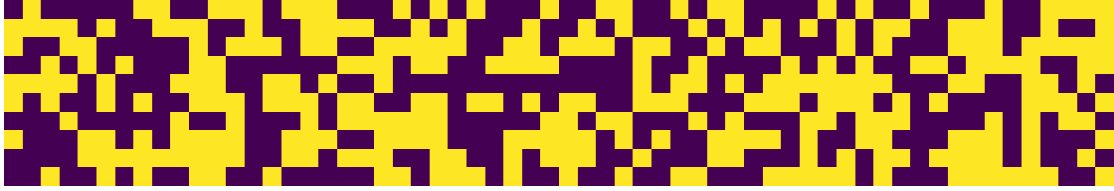
Temperature  $5.31 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.12 \times 10^3$



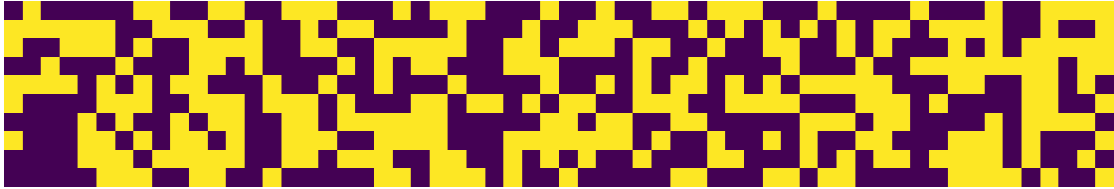
Temperature  $4.78 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.13 \times 10^3$



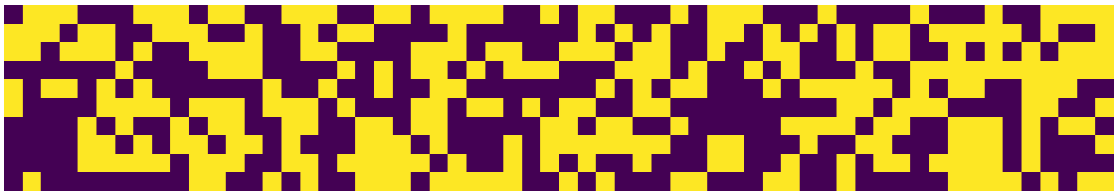
Temperature  $4.30 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.14 \times 10^3$



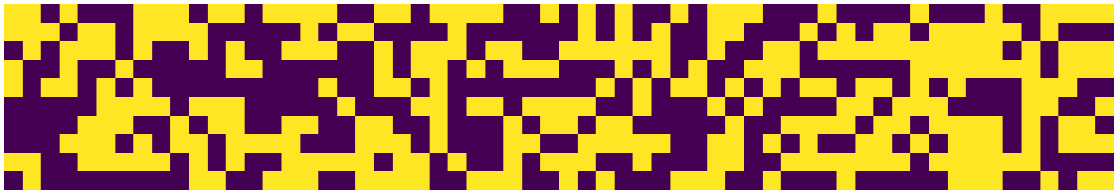
Temperature  $3.87\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.15\text{e}+03$



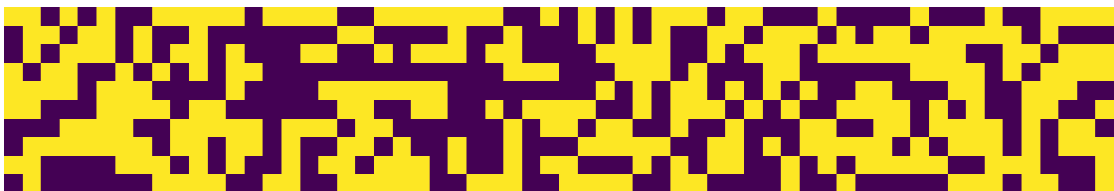
Temperature  $3.49\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.14\text{e}+03$



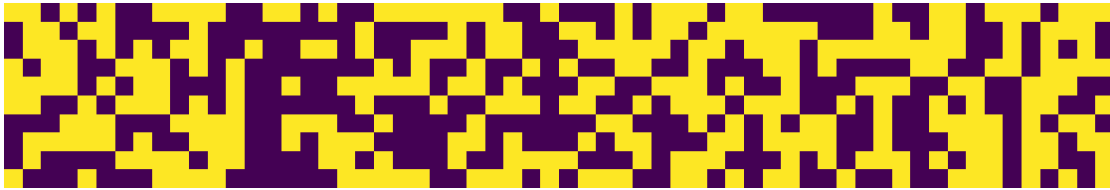
Temperature  $3.14\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.14\text{e}+03$



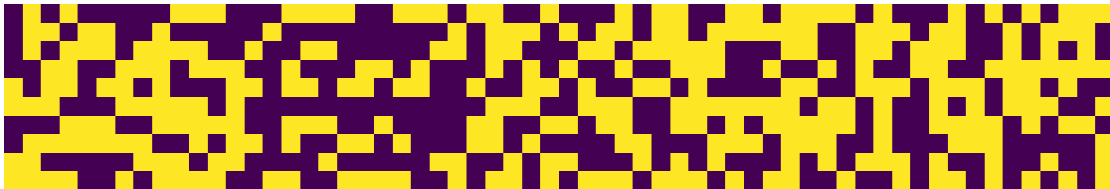
Temperature  $2.82\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.13\text{e}+03$



Temperature  $2.54 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.13 \times 10^3$



Temperature  $2.29 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.17 \times 10^3$



Temperature  $2.06 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.16 \times 10^3$

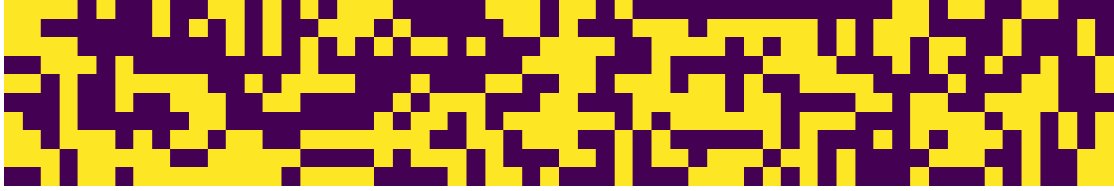


Temperature  $1.85 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.14 \times 10^3$

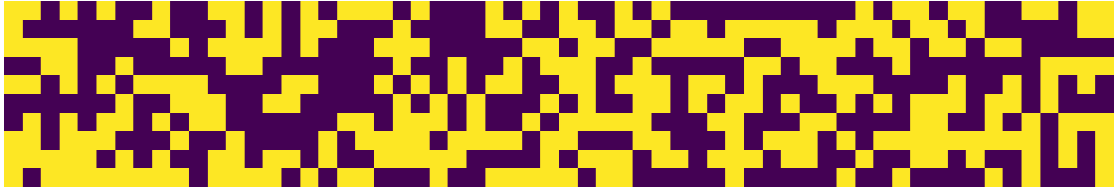


Temperature  $1.67 \times 10^5$ , Mean Energy  $1.08 \times 10^3$

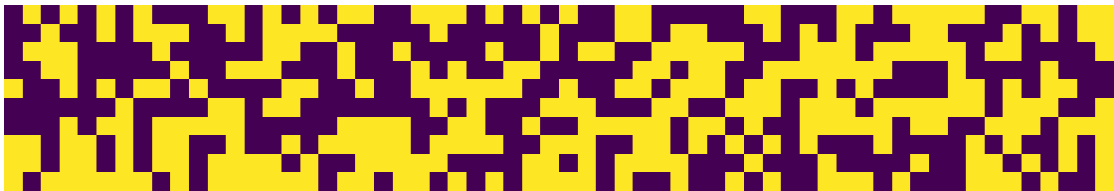




Temperature  $1.50\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.16\text{e}+03$



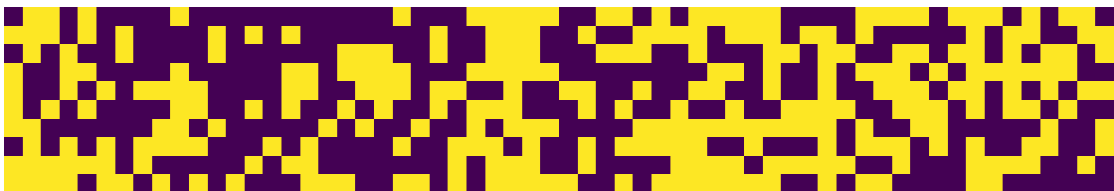
Temperature  $1.35\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.11\text{e}+03$



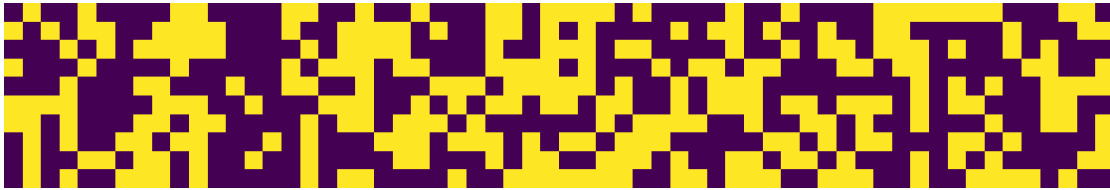
Temperature  $1.22\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.12\text{e}+03$



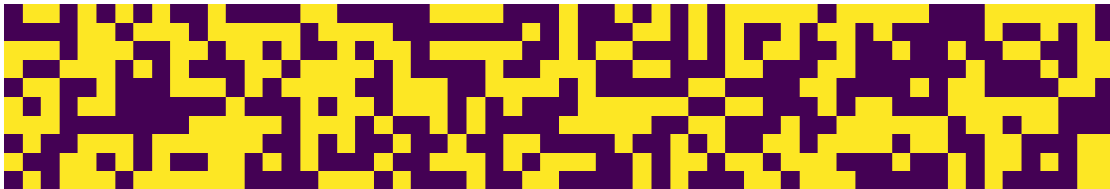
Temperature  $1.09\text{e}+05$ , Mean Energy  $1.09\text{e}+03$



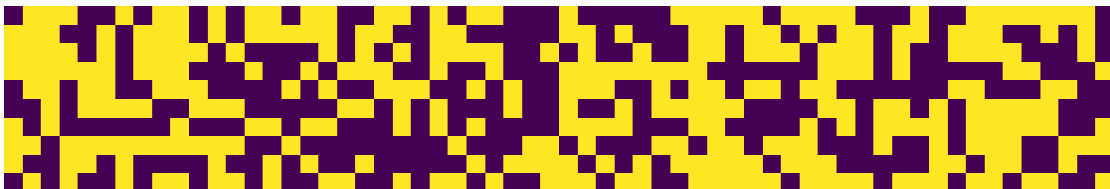
Temperature  $9.85\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.12\text{e}+03$



Temperature  $8.86\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.14\text{e}+03$



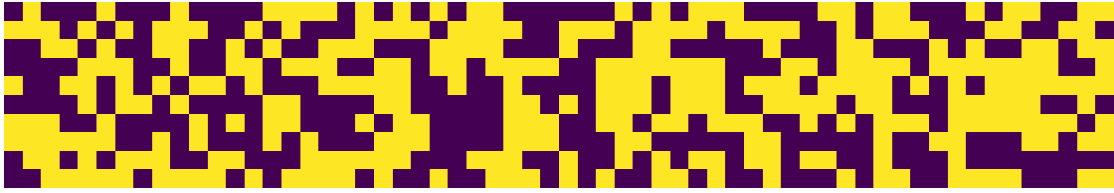
Temperature  $7.98\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.11\text{e}+03$



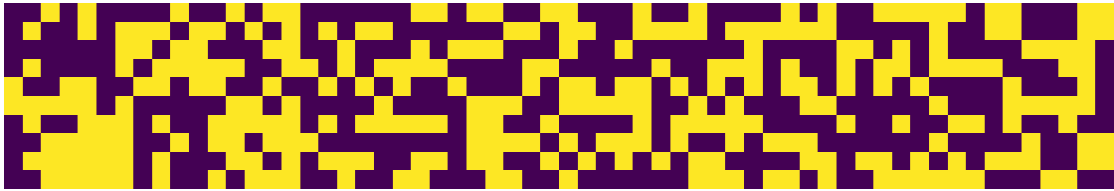
Temperature  $7.18\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.06\text{e}+03$



Temperature  $6.46\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.09\text{e}+03$



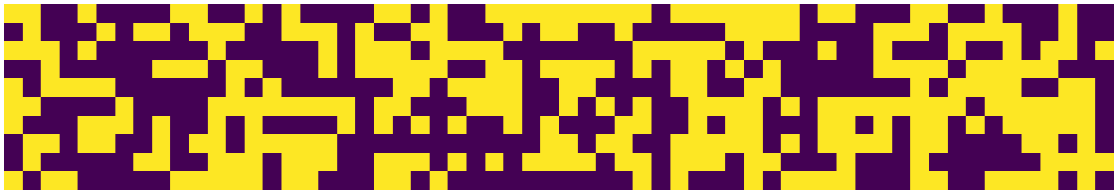
Temperature  $5.81\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.18\text{e}+03$



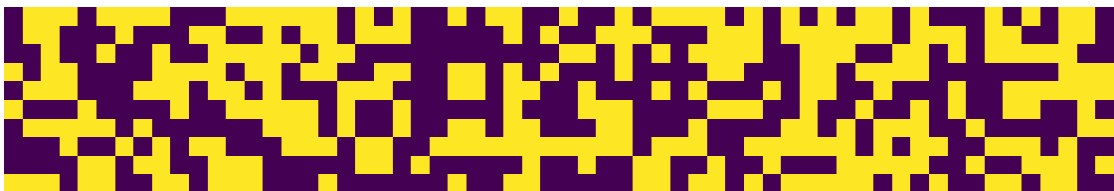
Temperature  $5.23\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.10\text{e}+03$



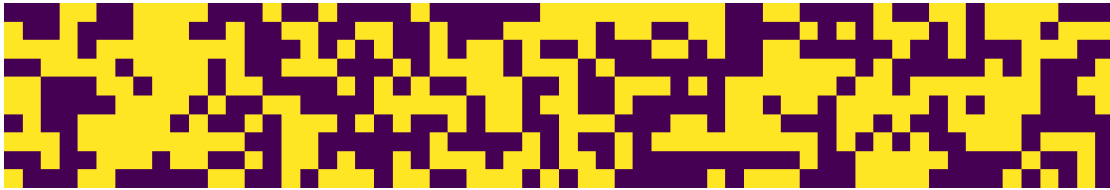
Temperature  $4.71\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.06\text{e}+03$



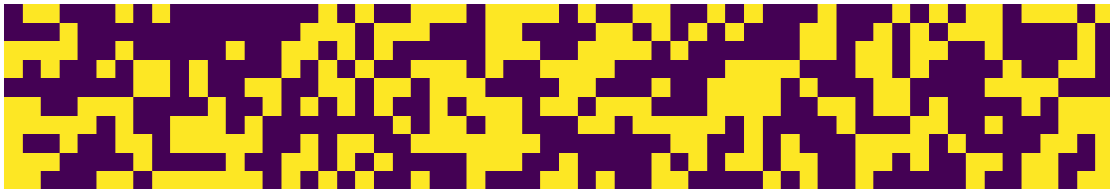
Temperature  $4.24\text{e}+04$ , Mean Energy  $1.10\text{e}+03$



Temperature  $3.82 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.07 \times 10^3$



Temperature  $3.43 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.09 \times 10^3$



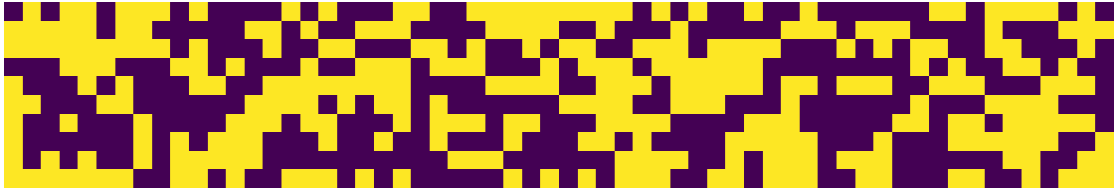
Temperature  $3.09 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.09 \times 10^3$



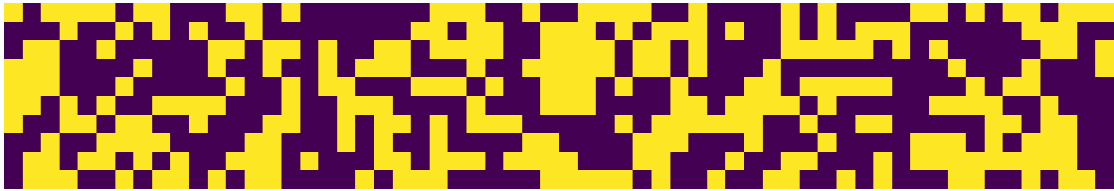
Temperature  $2.78 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.06 \times 10^3$



Temperature  $2.50 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.03 \times 10^3$



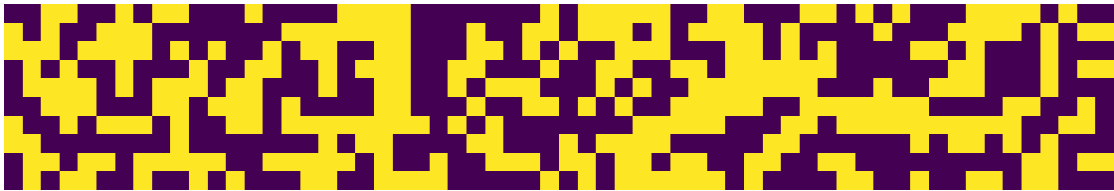
Temperature  $2.25 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.07 \times 10^3$



Temperature  $2.03 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.09 \times 10^3$



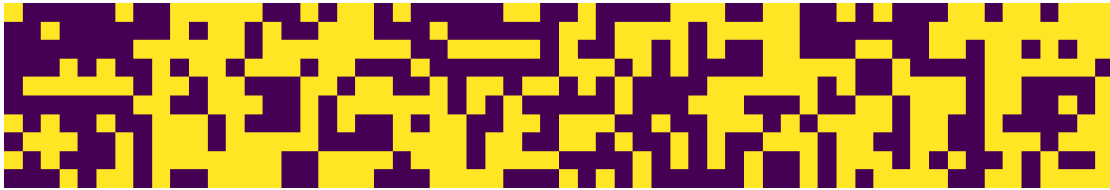
Temperature  $1.82 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.05 \times 10^3$



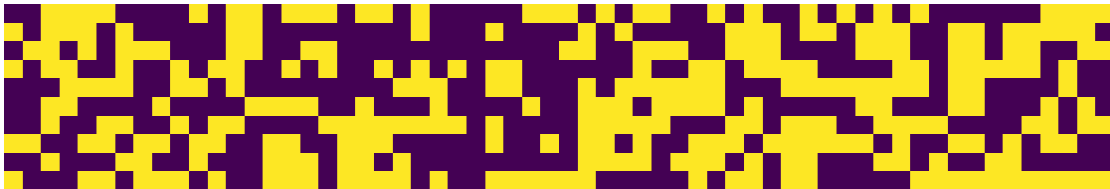
Temperature  $1.64 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.10 \times 10^3$



Temperature  $1.48 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.05 \times 10^3$



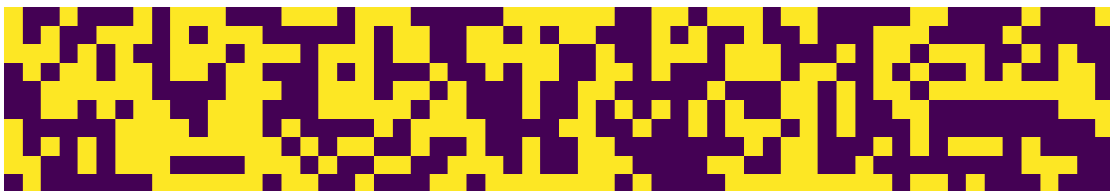
Temperature  $1.33 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.06 \times 10^3$



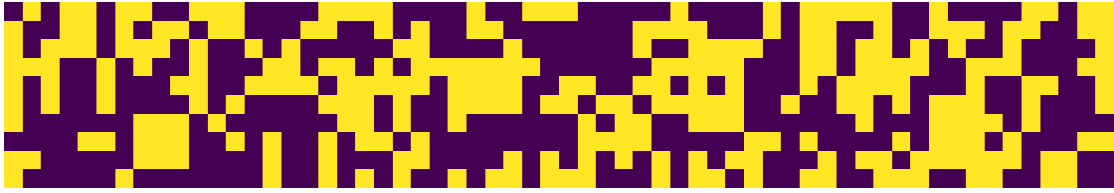
Temperature  $1.20 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.03 \times 10^3$



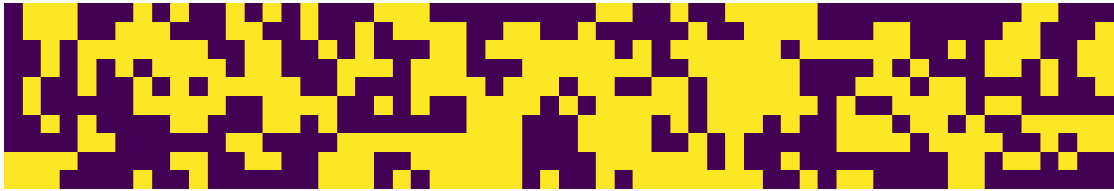
Temperature  $1.08 \times 10^4$ , Mean Energy  $1.06 \times 10^3$



Temperature  $9.70 \times 10^3$ , Mean Energy  $1.00 \times 10^3$



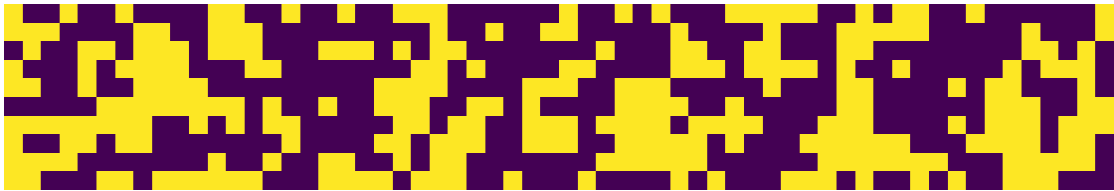
Temperature  $8.73\text{e}+03$ , Mean Energy  $9.30\text{e}+02$



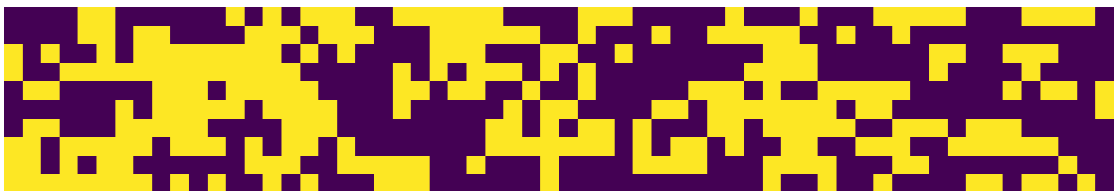
Temperature  $7.86\text{e}+03$ , Mean Energy  $9.06\text{e}+02$



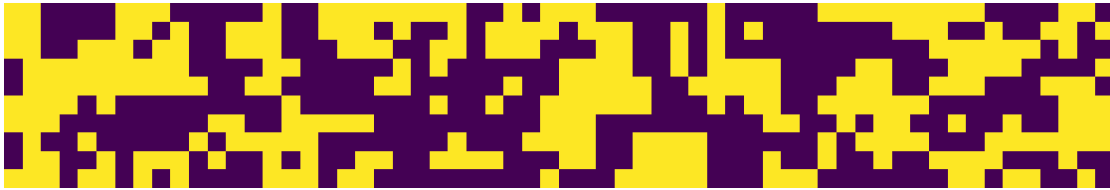
Temperature  $7.07\text{e}+03$ , Mean Energy  $8.90\text{e}+02$



Temperature  $6.36\text{e}+03$ , Mean Energy  $9.24\text{e}+02$



Temperature  $5.73\text{e}+03$ , Mean Energy  $8.58\text{e}+02$



Temperature  $5.15\text{e}+03$ , Mean Energy  $8.82\text{e}+02$



Temperature  $4.64\text{e}+03$ , Mean Energy  $7.58\text{e}+02$



Temperature  $4.17\text{e}+03$ , Mean Energy  $8.04\text{e}+02$



Temperature  $3.76\text{e}+03$ , Mean Energy  $7.16\text{e}+02$





Temperature  $3.38\text{e}+03$ , Mean Energy  $6.72\text{e}+02$



Temperature  $3.04\text{e}+03$ , Mean Energy  $5.74\text{e}+02$



Temperature  $2.74\text{e}+03$ , Mean Energy  $4.50\text{e}+02$



Temperature  $2.47\text{e}+03$ , Mean Energy  $3.14\text{e}+02$



Temperature  $2.22 \times 10^3$ , Mean Energy  $2.06 \times 10^2$



Temperature  $2.00 \times 10^3$ , Mean Energy  $5.00 \times 10^1$



Temperature  $1.80 \times 10^3$ , Mean Energy  $7.40 \times 10^1$



Temperature  $1.62 \times 10^3$ , Mean Energy  $0.00 \times 10^0$



