§ 14. რიცხვითი მიმდევრობა. არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები

I. რიცხვითი მიმდევრობა. ვთქვათ, ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ნამდვი რიცხვი: 1-ს შეესაბამება რიცხვი a_1, 2-ს – რიცხვი a_2, 3-ს – რიცხვი a_3, … , n-ს – რიცხვი a_n და ა სხვანაირად *მოცემული გვაქვს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ რიცხვითი ფუნქცია. ამ დროს ვამბობთ, რომ მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობ $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ მიმდევრობა შეიძლება ჩავწეროთ (a_n) $n \in N$ სიმბოლოთი, a-ს ნაცვლ შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი სხვა ასო. $a_1, a_2, \dots, a_m \dots$ რიცხვებს მიმდევრობ წევრები ეწოდება: a_1 – პირველი წევრია, a_2 – მეორე წევრი, … , a_n – n-ური (ზოგად წევრი.*

მიმდევრობის მოცემა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით:

1) **ანალიზურად** – ანუ ზოგადი წევრის ფორმულით. მაგალითად, $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n^2$. თუ მივცემთ მნიშვნელობებს 1, 2, 3, … მივიღებთ მიმდევრობის შესაბამისი წევრების მნიშვნელობებს. (მიმდევრობა მიიღებს სახეს $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$, ხოლო (b_n) – $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ სახეს.

2) **რეკურენტულად** – ამ დროს მოცემულია მიმდევრობის პირველი (ან რამდენიმე) წევრი და ფორმულ რომლის მიხედვითაც დანარჩენი წევრები გამოითვლება. მაგალითად, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … მიმდევრო შეიძლება მოცემული იქნას შემდეგნაირად:

$$a_1=1,\ a_2=2,\quad a_n=a_{n-2}+a_{n-1},\ n>2.$$

3) **სიტყვიერად** – მიმდევრობა მოცემულია აღწერით. ასეთია, მაგალითად კენტ ნატურალურ რიცხვ მიმდევრობა.

რიცხვით მიმდევრობას, რომელიც ზრდად ფუნქციას წარმოადგენს, ზრდ მიმდევრობას უწოდებენ. ზრდადია ის და მხოლოდ ის მიმდევრობა, რომლის ყოველ წევრი (მეორედან დაწყებული) წინა წევრზე მეტია, ანუ $a_{n+1}>a_n$, $n \in N$.

რიცხვით მიმდევრობას, რომელიც კლებად ფუნქციას წარმოადგენს, კლება მიმდევრობას უწოდებენ. კლებადია ის და მხოლოდ ის მიმდევრობა, რომლის ყოველ წევრი (მეორედან დაწყებული) წინა წევრზე ნაკლებია, ანუ $a_{n+1}<a_n$, $n \in N$.

II. არითმეტიკული პროგრესია. *რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრ დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრისაგან ერთი და იგივე რიცხვის მიმატები არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, (a_n) მიმდევრო არითმეტიკული პროგრესიაა, თუ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის სრულდება*

$$a_{n+1} = a_n+d$$

პირობა, სადაც d რაიმე რიცხვია. ანუ $a_{n+1}-a_n=d$ ტოლობა სამართლიანია ნებისმიე ნატურალური n-ისათვის:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\dots=a_{n+1}-a_n=d,$$

d რიცხვს არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ეწოდება. თუ $d>0$ არითმეტიკულ პროგრესია ზრდადი მიმდევრობაა, ხოლო თუ $d<0$ – კლებადი. როცა $d=0$, მაშინ $a_n=a$ არითმეტიკული პროგრესია მუდმივი მიმდევრობაა.

მაგალითად:

1, 4, 7, 10, 13, … ($d=3$) – ზრდადი პროგრესიაა;

12, 10, 8, 6, 4, … ($d=-2$) – კლებადი პროგრესიაა;

5, 5, 5, 5, … ($d=0$) – მუდმივია.

არითმეტიკული პროგრესიის ზემოთ მოცემული განსაზღვრება ფაქტიურად წარმოადგენს მიმდევრობის მოცემას რეკურენტული წესით. არითმეტიკული პროგრესიის საკმარისად დიდნომრიანი (მაგ., 1000) წევრის გამოსათვლელად რეკურენტული ფორმულით მოცემისას საჭიროა ყველა წინა წევრის ცოდნა (999 წევრი). ეს გამოთვლები შეიძლება შევამციროთ თუ $a_{n+1}=a_n+d$ თანაფარდობიდან გამოვიყვანთ არითმეტიკული პროგრესიის n-ური (ზოგადი) წევრის ფორმულას. გვაქვს:

$a_2=a_1+d$,

$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d$,

$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d$.

ზუსტად ასევე ვიპოვოთ, რომ $a_6=a_1+5d$, $a_7=a_1+6d$ და საზოგადოდ,

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$

ამ ფორმულას არითმეტიკული პროგრესიის n-ური (ზოგადი) წევრის ფორმულა ეწოდება. ზოგადი წევრის ფორმულა ერთმანეთს აკავშირებს ოთხ სიდიდეს: a_1, a_n, d და n-ს. თუ სამი მათგანი მოცემულია, ამ ფორმულით შეიძლება მეოთხე სიდიდის პოვნა. მოვიყვანოთ a_1-ის, d-სა და n-ის გამოსათვლელი ფორმულები:

$$a_1=a_n-d(n-1), \qquad d=\frac{a_n-a_1}{n-1}, \qquad n=\frac{a_n-a_1}{d}+1.$$

არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრი შეიძლება ასევე ვიპოვოთ მის წინ მდგომი ნებისმიერი a_k წევრისა და d-ს საშუალებით:

$$a_n=a_k+(n-k)d, \qquad 1\le k\le n-1.$$

მაგალითად, $a_9=a_5+4d$, $a_9=a_8+d$.

არითმეტიკული პროგრესიის განსაზღვრების ძალით, გვაქვს

$$a_n-a_{n-1}=d, \qquad a_{n+1}-a_n=d,$$

ამრიგად, როცა $n\ge2$, $a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n$, საიდანაც

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

ანუ არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია. მართებულია შებრუნებული დებულებაც. ამიტომ a, b და c რიცხვები მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენენ არითმეტიკული პროგრესიის მომდევნო წევრებს, როცა ერთ-ერთი მათგანი დანარჩენი ორის საშუალო არითმეტიკულის ტოლია. სამართლიანია უფრო ზოგადი ფორმულაც

$$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}, \quad 1\le k\le n-1,$$

ანუ არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან, მის[ი] თანაბრად დაშორებული წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია. მაგალით[ად,]

$$a_7=\frac{a_{10}+a_4}{2}.$$

ნებისმიერი არითმეტიკული პროგრესიისათვის სამართლიანია ტოლობა $a_m+a_n=a_k+a_l$, თუ $m+n=k$[...] მაგალითად, $a_9+a_3=a_2+a_{10}$, რადგან $9+3=2+10$.

ვთქვათ, საჭიროა პირველი ასი ნატურალური რიცხვის ჯამის პოვნა. ვაჩვენოთ, როგორ შეიძლებ[ა] ამოცანის ამოხსნა ისე, რომ რიცხვები უშუალოდ არ შევკრიბოთ.

საძიებელი ჯამი აღვნიშნოთ S-ით, ჩავწეროთ იგი ორჯერ; პირველ შემთხვევაში შესაკრებ[ები] დავალაგოთ ზრდის მიხედვით, ხოლო მეორე შემთხვევაში — კლების მიხედვით:

$$S=\ 1\ +2+3+\cdots+98+99+100,$$

$$S=100+99+98+\cdots+3+2+\ 1.$$

ერთმანეთი ქვეშ მდგომი რიცხვების ჯამი 101-ის ტოლია. ასეთი წყვილების რაოდენობა 100-ია. ამიტომ, ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$2S=101\cdot 100, \qquad S=5050.$$

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერი არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევ[რის] ჯამი. ***თუ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამს აღვნიშნავთ S_n-ი[თ,] სამართლიანია ფორმულა***

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრის ფორმულის გათვალისწინებით, პირველი[...] წევრის ჯამის ფორმულა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n.$$

თუ გვაინტერესებს არითმეტიკული პროგრესიის $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ $(1\le k<n)$ წევრე[ბის] ჯამი, შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n=S_n-S_k$$

კერძოდ აქედან ვღებულობთ მრავალი პრაქტიკული ამოცანისათვის საჭი[რო] ფორმულას

$$a_n=S_n-S_{n-1},\ \ \textit{როცა}\ n\ge 2\ \ \textit{და}\ a_1=S_1.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. დაამტკიცეთ, რომ $a_n=2n-7$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრე[სიაა.]

ამოხსნა. როცა $n\ge 2$ გვაქვს

$$a_n=2n-7, \quad a_{n-1}=2(n-1)-7=2n-9, \quad a_{n+1}=2(n+1)-7=2n-5,$$

$$a_n=2n-7=\frac{(2n-5)+(2n-9)}{2}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}.$$

მაგალითი 2. არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობაა 4, ხოლო პირველი შვიდი წევრის ჯამი 105. იპოვე[თ] პროგრესიის პირველი წევრი.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$ ფორმულით, მივიღებთ

$$105=\frac{2a_1+4(7-1)}{2}\cdot 7, \text{ საიდანაც } a_1=3.$$

მაგალითი 3. იპოვეთ ყველა იმ სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც უნაშთოდ იყოფა 7-ზე.

ამოხსნა. უმცირესი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც უნაშთოდ იყოფა 7-ზე არის 105, უდიდესი კი – 994. გვაქვს $a_1=105$, $a_m=994$, $d=7$.

$$994=105+7(m-1), \text{ ანუ } m=\frac{994-98}{7}=128.$$

მაგალითი 4. აჩვენეთ, რომ მიმდევრობა, რომლის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება $S_n=2n^2+3n$ ფორმულით არითმეტიკული პროგრესიაა.

ამოხსნა. გვაქვს $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=2(k+1)^2+3(k+1)-2k^2-3k=4k+5$. $a_k=4k+1$ და $a_{k-1}=4k-3$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია $2a_k=a_{k+1}+a_{k-1}$ ტოლობა. ამით დამტკიცებულია, რომ მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაა.

II. გეომეტრიული პროგრესია. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის პირველი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრის ერთიდაიგივე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებით, გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერი წევრის შეფარდება მის წინა წევრთან ერთიდაიგივე რიცხვის ტოლია, ე.ი. თუ $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\cdots=\frac{b_n}{b_{n-1}}=\cdots$$

ამ რიცხვს გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ეწოდება და q ასოთი აღინიშნება.

გეომეტრიული პროგრესია ზრდადი მიმდევრობაა, თუ $b_1>0$ და $q>1$ ან $b_1<0$ და $0<q<1$.

გეომეტრიული პროგრესია კლებადი მიმდევრობაა, თუ $b_1>0$ და $0<q<1$ ან $b_1<0$ და $q>1$.

როცა $q<0$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია ნიშანცვლადი მიმდევრობაა; კენტნომრიან წევრებს აქვთ იგივე ნიშანი რაც პირველ წევრს, ხოლო ლუწნომრიანებს – მისი საწინააღმდეგო, ამიტომ არც ზრდადია და არც კლებადი. როცა $q=1$ გეომეტრიული პროგრესია მუდმივი მიმდევრობაა.

1, 3, 9, 27, ... ($q=3$, $b_1>0$) – ზრდადია;

1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... ($q=\frac{1}{2}$, $b_1>0$) – კლებადია;

2, 2, 2, 2, ... ($q=1$) – მუდმივია;

1, –2, 4, –8, ... ($q=-2$) – არც ზრდადია, არც კლებადი.

თუ ცნობილია გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი, მაშინ შეიძლება თანმიმდევრობით ვიპოვოთ მეორე, მესამე და საზოგადოდ, ნებისმიერი წევრი:

$b_2=b_1q$,

$b_3=b_2q=b_1q^2$,

$b_4=b_3q=b_1q^3$,

საზოგადოდ b_n-ის მოსაძებნად b_1 უნდა გავამრავლოთ q^{n-1}-ზე, ე.ი.

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

მივიღეთ გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა. თუ (l გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელია q, როცა $n\geq 2$ გვაქვს

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \,, \quad \text{ე.ი.} \quad b_n^2=b_{n-1}b_{n+1},$$

ანუ გეომეტრიული პროგრესიის, მეორედან დაწყებული, ნებისმიერი წევრის კვადრა(მისი წინა და მომდევნო წევრების ნამრავლის ტოლია. მაგალითად 1, 4, 16, 64, პროგრესიაში $4^2=1\cdot 16$, $16^2=4\cdot 64$.

a, b და c რიცხვები მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენენ გეომეტრიუ(პროგრესიის მომდევნო წევრებს, როცა ერთ-ერთი მათგანის კვადრატი დანარჩენი ორ ნამრავლის ტოლია. სამართლიანია უფრო ზოგადი ფორმულაც:

$$b_n^2=b_{n-k}b_{n+k}, \quad 1\leq k\leq n-1.$$

ნებისმიერი გეომეტრიული პროგრესიისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$b_mb_n=b_kb_l, \quad \text{თუ} \quad m+n=k+l.$$

მაგალითად $b_7b_8=b_5b_{10}$, რადგან 7+8=5+10.

თუ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამს აღვნიშნავთ S_n-ი მაშინ მისი პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, \quad q\neq 1.$$

როცა $q=1$ (პროგრესია მუდმივია) მაშინ ვისარგებლებთ ფორმულით $S_n=b_1\cdot n$.

პრაქტიკულ ამოცანებში სასარგებლოა შემდეგი ფორმულის გამოყენება:

$$b_n=S_n-S_{n-1}, \text{ როცა } n\geq 2 \text{ და } b_1=S_1.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

***მაგალითი* 1.** გეომეტრიული პროგრესიის მესამე წევრი 8-ის ტოლია, მეხუთე კი — 32-ის. იპოვეთ მეა წევრი.

ამოხსნა. პირობის თანახმად $b_3=8$ და $b_5=32$. გვაქვს $b_4^2=b_3b_5$, $b_4^2=8\cdot 32=256$. $b_4=16$ ან $b_4=-16$. ცხად გეომეტრიული პროგრესის მნიშვნელისთვისაც გვექნება ორი მნიშვნელობა

$$q=2 \quad \text{ან} \quad q=-2.$$

ამრიგად, ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს ორი პროგრესია: პირველისათვის გვაქვს

$$b_{10}=8\cdot 2^7=1024.$$

მეორესათვის

$$b_{10}=8\cdot(-2)^7=-1024.$$

***მაგალითი* 2.** იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი 8 წევრის ჯამი, თუ მისი ზოგადი წევ მოცემულია $b_n=3\cdot 2^n$ ფორმულით.

ამოხსნა. რადგან $b_1=3\cdot 2=6$, $b_2=3\cdot 2^2=12$, მნიშვნელი შეიძლება ვიპოვოთ $q=\dfrac{b_2}{b_1}$ ტოლობიდან, $q=2$, მაშინ

$$S_8=\frac{b_1(q^8-1)}{q-1}=6\cdot(2^8-1)=1530.$$

მაგალითი 3. სამი რიცხვი, რომელთა ჯამი 21-ის ტოლია, არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენენ. თუ მეორე რიცხვს ერთით შევამცირებთ, ხოლო მესამეს ერთით გავადიდებთ, მივიღებთ გეომეტრიული პროგრესიის სამ მომდევნო წევრს. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ამოხსნა. ვთქვათ a_1, a_2 და a_3 არითმეტიკული პროგრესიის წევრებია, მაშინ a_1, a_2-1 და a_3+1 გეომეტრიული პროგრესიის წევრებია. ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=21 \\ (a_2-1)^2=a_1(a_3+1) \end{cases}$$

რომლის პირველი განტოლება ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, მეორე კი გეომეტრიული პროგრესიის თვისებიდან. თუ ყოველ წევრს გამოვსახავთ a_1-სა და d-ს საშუალებით, მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} 3a_1+3d=21 \\ (a_1+d-1)^2=a_1(a_1+2d+1) \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} a_1=3 \\ d=4 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a_1=12 \\ d=-5 \end{cases}$$

ეს რიცხვებია 3, 7, 11, ან 12, 7, 2.

მაგალითი 4. შეიძლება თუ არა რიცხვები 12, 20 და 35 წარმოადგენდნენ რომელიღაც გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს?

ამოხსნა. მოცემული რიცხვების შემდეგნაირი განლაგებები:

$$12,\ldots,35,\ldots,20 \quad 20,\ldots,35,\ldots,12 \quad 20,\ldots,12,\ldots,35 \quad 35,\ldots,12,\ldots,20$$

გეომეტრიულ პროგრესიაში შეუძლებელია, რადგან მნიშვნელი არ შეიძლება ერთდროულად იყოს 1-ზე მეტიც და ნაკლებიც. თუ მათი თანმიმდევრობა $12,\ldots,20,\ldots,35$ სახისაა, მაშინ $20=12\cdot q^k$ და $35=12\cdot q^{k+m}$, სადაც q მნიშვნელია, ხოლო k და m ნატურალური რიცხვებია. მაშინ $q^m=\dfrac{7}{4}$ და გვაქვს:

$$5=3(q^m)^{\frac{k}{m}}=3\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{k}{m}}.$$

აქედან

$$5^m\cdot 2^{2k}=3^m\cdot 7^k,$$

ეს კი ეწინააღმდეგება ნატურალური რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლის ერთადერთობას, ამიტომ მოცემული რიცხვები განხილული თანმიმდევრობით არ შეიძლება იყოს გეომეტრიული პროგრესიის წევრები. ამრიგად 12, 20 და 35 რიცხვები არ შეიძლება წარმოადგენდნენ გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს.