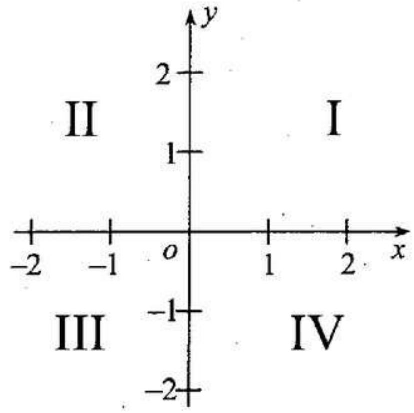
§ 7. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყესა და სივრცეში. ფუნქცია, ფუნქციის გრაფიკი

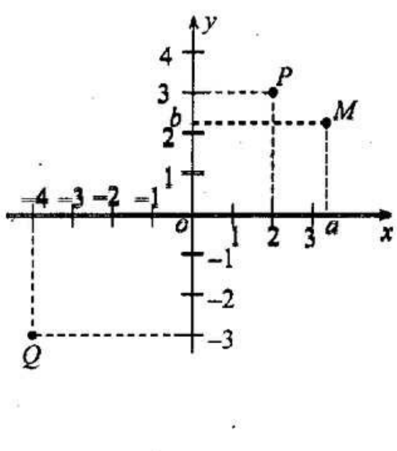
I. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე.



***xoy* მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე წარმოადგენს ორი ურთიერთმართობული *x* და *y* წრფე.** ჰორიზონტალურ წრფეს ეწოდება **აბსცისთა ღერძი**. x სიმბოლო მიუთითებს, რომ აბსცისთა ღერძის წერტილებს (რიცხვებს), ზოგადად, აღვნიშნავთ x-ით, ამიტომ ამ შემთხვევაში აბსცისთა ღერძის ნაცვლად შეგვიძლია ვთქვათ ox-ღერძი. აბსცისთა ღერძის მართობულ ვერტიკალურ წრფეს ეწოდება **ორდინატთა ღერძი**, ამ ღერძის წერტილებს (რიცხვებს) – ორდინატები და (როგორც მითითებულია), ორდინატს ზოგადად აღვნიშნავთ y-ით. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ აგრეთვე oy-ღერძი. ამ ორი ღერძის თანაკვეთის წერტილს ეწოდება (კოორდინატთა) **სათავე** და აღინიშნება o სიმბოლოთი. საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ყოფს ოთხ მეოთხედად.

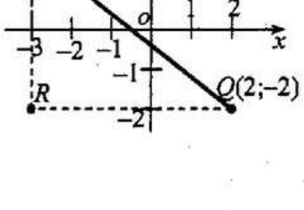
შენიშვნა. არაა სავალდებულო, რომ აბსცისების და ორდინატების აღსანიშნავად გამოვიყენოთ აუცილებლად x და y სიმბოლოები. მაგალითად, ხშირად აბსცისთა ღერძის წერტილები გამოხატავენ დროის სხვადასხვა მომენტებს. ამ დროს ბუნებრივია, რომ აბსცისთა ღერძს ვუწოდოთ დროის ღერძი ანუ ot-ღერძი და მისი წერტილები აღვნიშნოთ t ასოთი.

საკოორდინატო სიბრტყის ყოველ წერტილს აქვს x-კოორდინატი (აბსცისა) და y-კოორდინატი (ორდინატი). ამიტომ ყოველი წერტილი შეგვიძლია გავაიგივოთ დალაგებულ $(x;y)$ წყვილთან, რომელშიც x-კოორდინატი პირველი რიცხვია და y-კოორდინატი მეორე. დალაგებული წყვილი ნიშნავს, რომ, მაგალითად, $(1;3)\neq(3;1)$, და, ზოგადად, $(x;y)\neq(y;x)$ როცა $x\neq y$.



ნახაზზე P წერტილის $(x;y)$ კოორდინატები არის $(2;3)$, რადგან P არის 2 ერთეულით მარჯვნივ oy-ღერძისგან (ანუ $x=2$) და 3 ერთეულით ზემოთ ვიდრე ox-ღერძი (ანუ $y=3$). ანალოგიურად, Q წერტილის $(x;y)$ კოორდინატები არის $(-4;-3)$. სათავის კოორდინატები არის $(0;0)$. **პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა ყოველ $(a;b)$ წყვილს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი სიბრტყეზე, რომლის x-კოორდინატი არის a, ხოლო y-კოორდინატი b. ამ ერთადერთი წერტილის მოსაძებნად, რომელიც ნახაზზე მონიშნულია M-ით,** აბსცისთა ღერძის a წერტილიდან უნდა გავავლოთ oy ღერძის პარალელური წრფე და oy-ღერძის b წერტილიდან უნდა გავავლოთ ox-ღერძის პარალელური წრფე. მათი თანაკვეთის წერტილი არის M. ზოგჯერ ნახაზზე კოორდინატებსაც ვუთითებთ: $M(a;b)$.

ძალიან ხშირად ჩნდება იმის აუცილებლობა, რომ განვსაზღვროთ მანძილი საკოორდინატო სიბრტყის ორ წერტილს შორის. ამის გაკეთება შეგვიძლია პითაგორას თეორემის გამოყენებით.



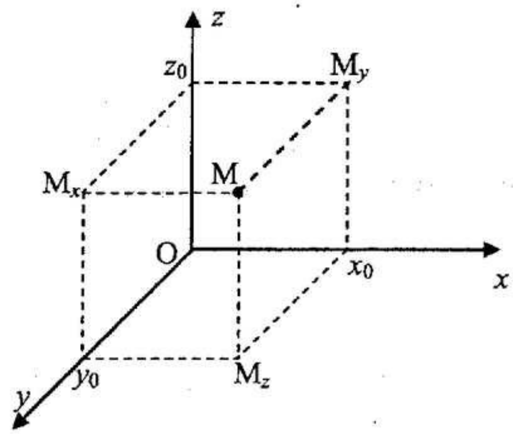
მაგალითად, ვიპოვოთ მანძილი P და Q წერტილებს შორის პითაგორას თეორემის გამოყენებით. დავხაზოთ მართკუთხა სამკუთხედი. მართი კუთხის R წვეროს კოორდინატები, ცხადია, არის $(-3;-2)$. ასევე ცხადია, რომ: $PR=4$, $RQ=5$, ამიტომ

$$PQ=\sqrt{PR^2+RQ^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$$

II. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. ***სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას წარმოადგენს სამი ურთიერთმართობული წრფე x, y და z, რომლებიც ერთმანეთს ერთ წერტილში კვეთენ. ამ წრფეებს საკოორდინატო ღერძები ეწოდება, მათი გადაკვეთის წერტილს – კოორდინატთა სათავე. სამი საკოორდინატო ღერძიდან ყოველი ორი ქმნის სიბრტყეს. ყოველ ღერძზე მოცემულია დადებითი მიმართულება, სამივე ღერძზე მოცემულია ერთი და იგივე მასშტაბი.***

ავიღოთ ნებისმიერი M წერტილი და მასზე გავავლოთ Z ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც xoy სიბრტყეს კვეთს M_z წერტილში. ამ წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_0, y_0-ით. ახლა გავატაროთ M-ზე x-ის პარალელური წრფე, რომელიც yoz სიბრტყეს კვეთს M_x-ში. M_x-ის y კოორდინატი იგივე y_0-ია, ხოლო Z-კოორდინატი აღვნიშნოთ z_0-ით. ეს სამეული $(x_0;y_0;z_0)$ წარმოადგენს M წერტილის კოორდინატებს xyz მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, რასაც ასე ჩავწერთ:

$$M(x_0;y_0;z_0) \text{ ან } M=(x_0;y_0;z_0)$$



ფორმულები, რომლებშიც კოორდინატები ფიგურირებენ, უმნიშვნელოდ განსხვავდება სიბრტყისა და სივრცის შემთხვევაში. მაგალითად, თუ **A**$(x_1;y_1)$ და ***B**$(x_2;y_2)$ **სიბრტყის ორი წერტილია, მათ შორის მანძილის ფორმულაა:***

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,,$$

ხოლო AB მონაკვეთის შუაწერტილია $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$. ***ანალოგიურად, სივრცეში მოცემული A$(x_1;y_1;z_1)$ და B$(x_2;y_2;z_2)$ წერტილებისათვის მათ შორის მანძილი არის:***

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,,$$

ხოლო AB მონაკვეთის შუაწერტილია $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2};\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

III. ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხერხები. ვიტყვით, რომ f არის x ცვლადის **ფუნქცია**, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1) მოცემულია x-ის დასაშვები მნიშვნელობების სიმრავლე;

2) x-ის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთადერთი მნიშვნელობა $f(x)$.

ფუნქციის აღსანიშნად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვა სიმბოლოებიც. მაგალითად, g. ***f ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება x-ის ყველა დასაშვებ მნიშვნელობას და აღინიშნება $D(f)$ სიმბოლოთი. f ფუნქციის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა (ანუ $f(x)$-ების) ერთობლიობას ეწოდება f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე და აღინიშნება $E(f)$***

სიმბოლოთი. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ რიცხვით ფუნქციებს, როდესაც $D(f)\subset R$ და $E(f)\subset R$.

ფუნქციის განსაზღვრა ფორმულის საშუალებით. ნებისმიერი ფორმულა, რომელიც განსაზღვრავს ფუნქციას, შეიცავს ცვლადიან გამოსახულებებს, ერთს ან რამდენიმეს. მაგალითად, x^3-5x^2+1 გამოსახულება ამავე დროს არის x ცვლადის ფუნქცია, თუ ამ ფუნქციას აღვნიშნავთ f-ით, ანუ ჩავწერთ:

$$f(x)=x^3-5x^2+1, \qquad (1)$$

$f(1)=-3$, $f(0)=1$ და ა.შ. (1) ფორმულაში, x ცვლადს ეწოდება f ფუნქციის **არგუმენტი**. $f(x)$ არის **ფუნქციის მნიშვნელობა** არგუმენტის x მნიშვნელობისათვის.

ანალოგიურად, $\frac{2a+7}{\sqrt{a+1}}$ განსაზღვრავს a ცვლადის ფუნქციას:

$$g(a)=\frac{2a+7}{\sqrt{a+1}}, \qquad (2)$$

$g(0)=7$, $g(3)=\frac{13}{2}$ და ა.შ.

როდესაც რამდენიმე ერთმანეთისაგან განსხვავებული გამოსახულება განსაზღვრავს ფუნქციას, მაშინ ფორმულას შედარებით რთული სახე აქვს. მაგალითად:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-5x^2+1, & \text{როცა} \quad x\ge 0, \\ \sqrt{1-x}, & \text{როცა} \quad x<0, \end{cases}$$

ამ შემთხვევაშიც, x არის არგუმენტი, f ფუნქცია, $f(x)$ – ფუნქციის მნიშვნელობა. აქ $f(1)$ გამოითვლება პირველი სტრიქონის მიხედვით, ხოლო $f(-\sqrt{3})$ – მეორე სტრიქონის მიხედვით.

(1)-ით განსაზღვრული f ფუნქციისათვის $D(f)=(-\infty;+\infty)$, ხოლო (2)-ით განსაზღვრული g ფუნქციისათვის $D(g)=(-1;+\infty)$. თუ ფუნქცია ფორმულით არის განსაზღვრული, მაგრამ განსაზღვრის არე არ არის მითითებული, მაშინ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ განსაზღვრის არე შედგება არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობისაგან, რომლისთვისაც ფორმულას აქვს აზრი.

ფორმულით ფუნქცია იმ შემთხვევაშიც შეიძლება განისაზღვროს, როდესაც მისი განსაზღვრის არე შედგება ნატურალური რიცხვებისაგან.

$$a(n)=n^3+\frac{n}{5}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

ასეთ ფუნქციას ეწოდება **მიმდევრობა** და $a(n)$ აღინიშნება a_n-ით. a_n მიმდევრობის მნიშვნელობებია: როცა $n=2$, $a_n=2^3+\frac{2}{5}$, როცა $n=3$, $a_n=3^3+\frac{3}{5}$ და ა.შ. მიმდევრობებს შემდეგში ცალკე პარაგრაფში შევისწავლით.

ფუნქციის განსაზღვრა ცხრილის საშუალებით. ფუნქციის განსაზღვრის არე შესაძლოა იყოს სასრული სიმრავლეც. ამ დროს არგუმენტი იღებს რამდენიმე მნიშვნელობას, რომლებიც იწერება ცხრილის პირველ სტრიქონში, ხოლო ცხრილის მეორე სტრიქონი ეთმობა ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს. ცხადია I სტრიქონის რიცხვები შეადგენენ ცხრილის საშუალებით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ხოლო II სტრიქონის რიცხვები მნიშვნელობათა სიმრავლეს. მაგალითად:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

ამ ცხრილით მოცემული ფუნქციის ჩაწერა შეიძლება ფორმულის სახითაც:

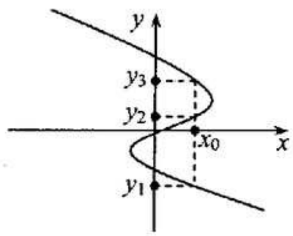
$$f(x)=x^2, \qquad x\in\{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

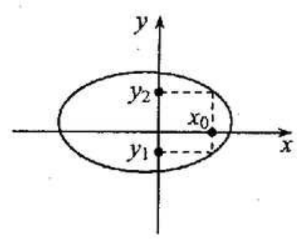
პირიქით, ფორმულით განსაზღვრული ფუნქციის წარმოდგენა ცხრილის სახით მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, თუ განსაზღვრის არე სასრულია. თუმცა, მაინც, არგუმენტების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ყველაზე ხშირად გამოიყენება, ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ფუნქციისათვის შედგენილია მნიშვნელობათა ცხრილები. მაგალითად, ტრიგონომეტრიული, ლოგარითმული).

ფუნქციის მოცემა გრაფიკის საშუალებით. f ფუნქციის **გრაფიკი** ეწოდება $(x;\ f(x))$, $x\in D(f)$ წერტილთა სიმრავლეს საკოორდინატო სიბრტყეზე.

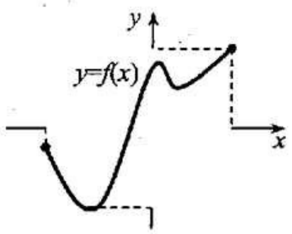
ამ განმარტების ძალით ყოველი x-სათვის f-ის განსაზღვრის არედან, წერტილი კოორდინატებით $(x;f(x))$ ეკუთვნის f ფუნქციის გრაფიკს და გრაფიკი შედგება ყველა ასეთი წერტილისაგან.

შემდეგ ნახაზზე ნაჩვენებია წირები, რომლებიც არ წარმოადგენენ ფუნქციის გრაფიკს, რადგან ყოველ x-ს უნდა შეესაბამებოდეს ერთადერთი $f(x)$.

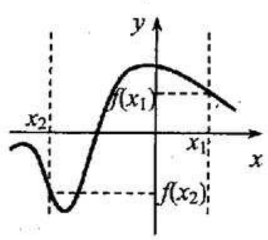




იმისათვის, რომ წირი წარმოადგენდეს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ y-ღერძის პარალელური ყოველი წრფე მოცემულ წირს კვეთდეს არაუმეტეს ერთ წერტილში.



ფუნქციის გრაფიკი ამარტივებს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის, ანუ $E(f)$-ის პოვნას. მაგალითად, ამ ნახაზზე, აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებზე, შესაბამისად, დაშტრიხულია $D(f)$ და $E(f)$.

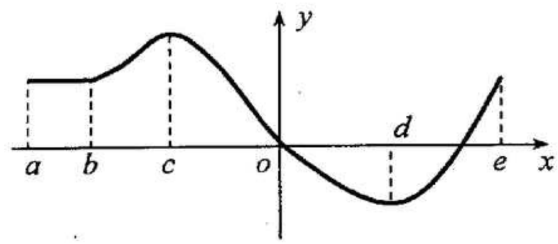


ვთქვათ მოცემულია წირი, რომელიც წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს. მაშინ $x\in D(f)$, თუ $(x;0)$ წერტილზე Oy ღერძის პარალელურად გავლებული წრფე გადაკვეთს ამ წირს, და ამ შემთხვევაში, გადაკვეთის წერტილის ორდინატი წარმოადგენს $f(x)$-ს.

რადგან ფორმულის საშუალებით მოცემული ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ გრაფიკული სახითაც, ამიტომ „f ფუნქციის" ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ აგრეთვე ტერმინი „$y=f(x)$ ფუნქცია".

IV. ფუნქციის ზრდადობა, კლებადობა, ლუწობა, კენტობა, პერიოდულობა. ***f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა $f(x_1)<f(x_2)$, ანუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის მეტი მნიშვნელობა.***

f ფუნქციას ეწოდება კლებადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა $f(x_1)>f(x_2)$, ანუ არგუმენტის მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის ნაკლები მნიშვნელობა.



მაგალითად ნახაზზე, f ფუნქცია მუდმივია $[a;b]$ შუალედზე, ზრდადია $[b;c]$ და $[d;e]$ შუალედებზე, კლებადია $[c;d]$ შუალედზე.

თუ ფუნქცია რაიმე სიმრავლეზე ზრდადია ან კლებადი, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია **მონოტონურია** ამ სიმრავლეზე. შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი განმარტებები, ისევე როგორც ლუწი და კენტი ფუნქციის ცნება, სამართლიანია ცხრილის სახით მოცემული ფუნქციებისთვისაც.

***f* ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მას აქვს შემდეგი ორი თვისება:**

ა) $D(f)$ სიმეტრიულია ნულის მიმართ, ანუ, თუ $x\in D(f)$, მაშინ $-x\in D(f)$;

ბ) ყოველი $x\in D(f)$-ისათვის სრულდება $f(-x)=f(x)$.

მაგალითად, $f(x)=x^2+1$ არის ლუწი ფუნქცია, რადგან $D(f)=R$ და

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x).$$

***f* ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მას აქვს შემდეგი ორი თვისება:**

ა) $D(f)$ სიმეტრიულია ნულის მიმართ, ანუ, თუ $x\in D(f)$, მაშინ $-x\in D(f)$;

ბ) ყოველი $x\in D(f)$-ისათვის სრულდება $f(-x)=-f(x)$.

მაგალითად, $f(x)=x^3+2x$ არის კენტი ფუნქცია, რადგან $D(f)=R$ და

$$f(-x)=(-x)^3+2(-x)=-(x^3+2x)=-f(x).$$

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ნებისმიერი ფუნქცია ან კენტია ან ლუწი. მაგალითად, $f(x)=1+x$ არც ლუწია და არც კენტი.

***f* ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი $T\neq0$, რომ ნებისმიერი $x\in D(f)$-ისათვის რიცხვები $x-T$, $x+T$ აგრეთვე ეკუთვნიან $D(f)$-ს და სრულდება ტოლობა:**

$$f(x)=f(x-T)=f(x+T);$$

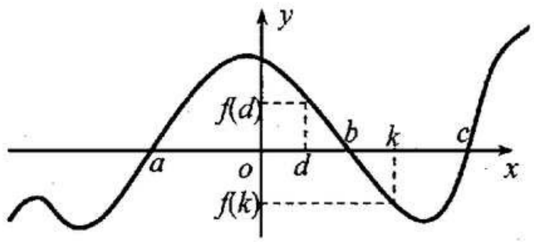
ამ შემთხვევაში T რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის პერიოდი.

თუ T არის f ფუნქციის პერიოდი, მაშინ ყოველი kT, სადაც k არის არანულოვანი მთელი რიცხვი, აგრეთვე წარმოადგენს f-ის პერიოდს. ამგვარად, თუ ვიცით პერიოდული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, მისგან მივიღებთ ნებისმიერ სხვა პერიოდს. პერიოდულ ფუნქციებს წარმოადგენენ, მაგალითად ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, რომელსაც შემდეგ შევისწავლით.

V. ფუნქციის თვისებები. მარტივი უტოლობების ამოხსნა. $x\in D(f)$ რიცხვებს, რომლისთვისაც სრულდება $f(x)=0$ ტოლობა, f ფუნქციის **ფესვები**, ანუ **ნულები** ეწოდებათ. გეომეტრიულად, f ფუნქციის ნულები არის ფუნქციის გრაფიკისა და აბსცისთა ღერძის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

თუ $x\in D(f)$ წერტილზე y-ღერძის პარალელურად გავლებული წრფე f ფუნქციის გრაფიკს კვეთს აბსცისთა ღერძის ზემოთ (ქვემოთ), მაშინ x არის $f(x)>0$, ($f(x)<0$) უტოლობის ამონახსნი.

თუ გვინდა არამკაცრი, მაგალითად $f(x)\geq0$ უტოლობის ამოხსნა, უნდა ამოვხსნათ $f(x)>0$ უტოლობა და მის ამონახსნებს დავუმატოთ f ფუნქციის ფესვები. მაგალითად, შემდეგ ნახაზზე მოყვანილი ფუნქციისათვის:



ფუნქციის ფესვებია a, b, c რიცხვები, $f(x)>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$(a;b)\cup(c;+\infty),$$

ხოლო $f(x)<0$ უტოლობის:

$$(-\infty;a)\cup(b;c).$$

VI. ფუნქციათა გრაფიკების გეომეტრიული გარდაქმნები. განვიხილოთ გეომეტრიული გარდაქმნები, რომელთა საშუალებით მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკიდან მივიღებთ $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=f(-x)$, $y=-f(x)$, $y=|f(x)|$ და $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკებს.

1) ვთქვათ, $a>0$. $f(x-a)$ ფუნქცია ღებულობს იგივე მნიშვნელობებს, რასაც $y=f(x)$, ოღონდ ox-ღერძზე a ერთეულის დაგვიანებით. ამიტომ $y=f(x-a)$ გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით მარჯვნივ a მანძილზე ox ღერძის მიმართულებით (ნახ. 3). ანალოგიურად $y=f(x+a)$-ს გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით მარცხნივ a მანძილზე ox ღერძის მიმართულებით (ნახ. 2).

2) $y=f(x)+a$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით ზემოთ (ქვემოთ) $|a|$ მანძილზე oy-ღერძის მიმართულებით, თუ a დადებითია (უარყოფითია) (ნახ. 5, 6).

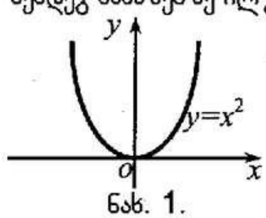
3) $y=f(-x)$ ფუნქციის გრაფიკი არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული oy-ღერძის მიმართ.

4) $y=-f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული ox-ღერძის მიმართ (ნახ. 4).

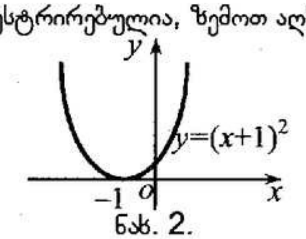
5) $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკიდან შემდეგნაირად: $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია ox-ღერძის ზემოთ, რჩება უცვლელი, ხოლო ox-ღერძის ქვემოთ მოთავსებული ნაწილი აისახება სიმეტრიულად ox-ღერძის მიმართ (ნახ. 10).

6) $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკიდან შემდეგნაირად: როცა $x\geq 0$, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი რჩება უცვლელი და გრაფიკის ამ ნაწილის სიმეტრიული ასახვა oy-ღერძის მიმართ გვაძლევს $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკს, როცა $x<0$ (ნახ. 9).

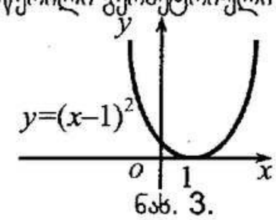
შემდეგ ნახაზებზე ილუსტრირებულია, ზემოთ აღწერილი გეომეტრიული გარდაქმნები:



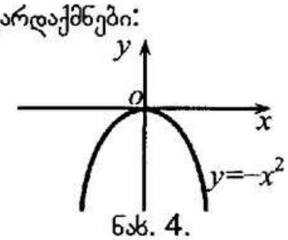
ნახ. 1.



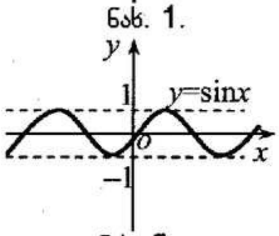
ნახ. 2.



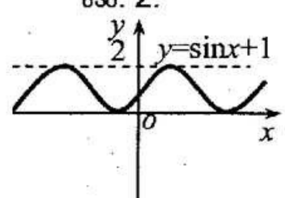
ნახ. 3.



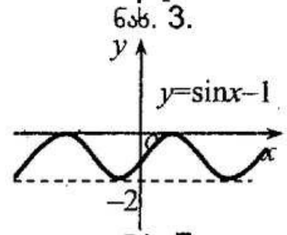
ნახ. 4.



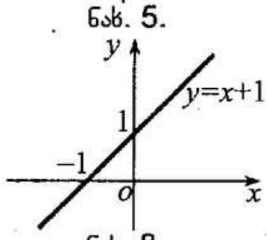
ნახ. 5.



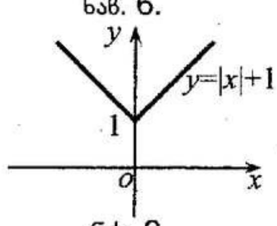
ნახ. 6.



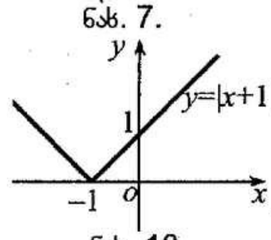
ნახ. 7.



ნახ. 8.



ნახ. 9.



ნახ. 10.