17. კომბინატორიკა

შეკრების წესი

საზოგადოდ, თუ არსებობს რაიმე a ობიექტის შერჩევათა k შესაძლებლობა(a-ს ვირჩევთ A სიმრავლიდან, რომლის ელემენტების რაოდენობაა k) და b ობიექტის შერჩევათ l შესაძლებლობა (b-ს ვირჩევთ B-დან, n(B)=l) ამასთან a და b ობიექტები ერთმანეთისგან განსხვავევბულია მაშინ a ან b შერჩევათ რაოდენობა იქნება k+l.

სიმრავლეთა ენაზე თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. ამ წესს უწოდებენ შეკრების წესს.

გამრავლების წესი

საზოგადოდ, თუ რაიმე ობიექტი შეიძლება k გზით შეირჩეს ყოველი ასეთი შერჩევის შემდეგ კი მეორე ობიექტი l გზით შეირჩეს, მაშინ პირველი და მეორე ობიექტების თანმიმდევრობით შერჩევათა რაოდენობა იქნება k*l. ამ წესს გამრავკების წესს უწოდებენ.

დალაგებული სიმრავლეები

„სასრულ სიმრავლეს ეწოდება დალაგებული სიმრავლე თუ ცნობილია და დაფიქსირებულია მისი პირველი ელემენტი, მეორე ელემენტი და ა.შ.“ დალაგებული სიმრავლის აღსაღნიშნავად მის ელემენტებს ვათავსებთ მრგვალ ფრჩხილებში მოცემული რიგის მიხედვით. ორი სასრული დალაგებული სიმრავლე ტოლია, თუ მათი ელემენტების რაოდენობა ერთი და იგივეა და შესაბამის ადგილებზე მდგომი ელმენტები ტოლია.

მაგალითად: A=(1,8,9) და C=(1,8,9) დალაგებული სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ A=(1,8,9) და B=(9,8,1) დალაგებული სიმრავლეები არ არის ერთმანეთის ტოლი.

ადვილი შესამჩნევია რომ B სიმრავლეში უბრალოდ A სიმრავლის ელმენტები გადანცვლებული ან პირიქით. „n ელემენტიანი A სიმრავლის ელემენტებისგან შედგენილ ნებისმიერ n ელემენტებიან დალაგებულ სიმრავლეს A სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლება ეწოდება“. მაგრამ გაცილებით საინტერესოა თუ რამდენი გადანაცვლება შეიძლება შევადგინოთ სამ a,b და c ელმეტებისაგან შედგენილ სიმრავლეში?

გადანაცვლება

(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a) მათი რაოდენობა ექვსია.

განვიხილოთ რამდენი შემთხვევა გვექნება 4 ელემენტიანი (a,b,c,d) სიმრავლისთვის. მათი ჩამოწერის გარეშე რომ ვიმსჯელოთ შეგვიძლია ყველა ზემოთ მოცემულ ვარაინტს 3 ელემენტიანი სიმრავლისთვის მივუწეროთ ბოლოში ახალი, მეოთხე ელემენტი d. ამ შემთხვევაში გვექნება 6 ვარაინტი სადაც d ბოლო ელემენტია, მაგრამ შიეძლება ბოლო ელემენტად d–ს გარდა ავირჩიოთ a,c და b რაც განსხვავებულ დალაგებულ სიმრავლეებს მოგვცემს, შედეგად ადვილია დავასკვანთ რომ 4 ელემენტიან სიმრავლეს ექნება 4 ჯერ 6 ანუ 24 განსხვავებულად დალაგებული სიმრავლე. ანალოგიური მსჯელობით რომ მივუდგეთ 5 ელმენეტიან სიმრავლესაც მივიღებ 5 ჯერ 24 ანუ 120 განსხვავებულად დალაგებულ სიმრავლეს.

3*2*1=6

4*3*2*1=24

5*4*3*2*1=120

n*(n-1)*(n-2)*(n-3)….5*4*3*2*1=n!

უკანასკნელს n ის **ფაქტორიალს** უწოდებენ.

შედეგად აღმოვჩინეთ კანონზომიერება, რომლის მიხედვითაც შეგვიძლია გამოვთვალოთ თუ მოცემულ n ელემენტიან სიმრავლისგან რამდენი

განსხვავებულად დალაგებული n ელემენტიანი სიმრავლე შევქმნათ. ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი, ანუ ყველა არსებული განსხვავებულად დალაგებული სიმრავლის რიცხვი აღინიშნება Pn სიმბოლოთი.

$$\boldsymbol{P_n = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \ldots\ldots * (n-2) * (n-1) * n = n!\,(1)}$$

წყობა

„n ელემენტიან სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ეწოდება m ელემენტიანი წყობა n ელემენტისაგან ან წყობა n–ელემენტისა m ელემენტად.(m<=n)"

$$\mathbf{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\,(2)}$$

წყობათა თვისებები:

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$$

$$A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = P_n = n!$$

ჯუფდება

n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან ქვესიმრავლეს (m<=n) ეწოდება m ელემენტიანი ჯუფდება n ელემენტისგან.

ვთქვათ, მოცემულია n– ელემნტიანი რაიმე A სიმრავლე. განვიხილოთ მისი ნებისმიერად შედგენილი m განსხვავებულ ელემენტიან ქვესიმრავლე, ოღონ დალაგების გარეშე ანუ სიმრავლეები {a,b,c} {a,c,b} {b,c,a} ტოლია, რადგან დალაგების რიგს არ ექცევა ყურადღება. ამას კი ეწოდება ჯუფთება n–ელემენტისა m ელემენტად. აღინიშნება სიმბოლოთი C_n^m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ (3)$$

ჯუფთებათა თვისებები:

$C_n^0 = 1$

$C_n^1 = n$

$C_n^m = C_n^{n-m}$