§ 10. კვადრატული ფუნქცია. კვადრატული განტოლება და უტოლობა

I. კვადრატული ფუნქცია. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე და ზრდადობა-კლებადობის შუალედები. ***კვადრატული ფუნქცია ანუ სამწევრი განისაზღვრება ერთი x ცვლადის შემცველი ax^2+bx+c გამოსახულებით, სადაც a, b, c მოცემული ნამდვილი რიცხვებია და $a\neq0$.*** ჩვენს მიზანს წარმოადგენს კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის, მისი ფესვების და, ზოგადად, თვისებების შესწავლა. ამიტომ კვადრატული ფუნქციის ჩაწერისათვის გამოვიყენებთ შემდეგი ორივე ტიპის ჩანაწერს:

$$f(x)=ax^2+bx+c. \tag{1}$$

$$y=ax^2+bx+c. \tag{2}$$

(1) მოსახერხებელია როდესაც ხშირად გვჭირდება ფუნქციის სხვადასხვა მნიშვნელობის გამოთვლა; მაგალითად $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ და ა.შ. (2) სახე მოსახერხებელია გრაფიკთან დაკავშირებული საკითხების შესწავლისას, რადგან იგი დაკავშირებულია xoy კოორდინატთა სისტემასთან და გვიჩვენებს, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობები უნდა გადაიზომოს y ღერძზე. (2) სახე წარმოადგენს ფუნქციის ზოგადი $y=f(x)$ ჩანაწერის კონკრეტულ რეალიზაციას კვადრატული ფუნქციის შემთხვევაში.

კვადრატული ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს R, რადგან ax^2+bx+c განსაზღვრულია ყოველი x რიცხვისათვის.

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგებისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენის მიზნით, წინასწარ დავამტკიცოთ მისი რამდენიმე თვისება.

1) თუ კვადრატული ფუნქცია ორ განსხვავებულ წერტილში ტოლ მნიშვნელობას იღებს, მაშინ ეს წერტილები $x=-\dfrac{b}{2a}$-ის სიმეტრიულად არიან განლაგებული.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_1\neq x_2$ და $f(x_1)=f(x_2)$. მაშინ

$$\begin{array}{c|l}
ax_1^2+bx_1+c=ax_2^2+bx_2+c & \text{გათილდება } c \\
a(x_1^2-x_2^2)=-b(x_1-x_2) & \text{იკვეცება } (x_1-x_2)\text{-ზე} \\
a(x_1+x_2)=-b & \\
\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a} &
\end{array}$$

ბოლო ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $-\dfrac{b}{2a}$ არის x_1 და x_2 წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუა წერტილი.

2) როცა $a>0$ ($a<0$), $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქცია კლებადია (ზრდადია) $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ შუალედზე და ზრდადია (კლებადია) $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ შუალედზე.

დამტკიცება. საკმარისია $a>0$ შემთხვევის განხილვა, რადგან $a<0$ შემთხვევა სრულად ანალოგიურია. ავიღოთ $-\infty<x_1<x_2\leq-\dfrac{b}{2a}$. ცხადია,

$$\frac{x_1+x_2}{2}<-\frac{b}{2a} \text{ და } x_2-x_1>0. \tag{3}$$

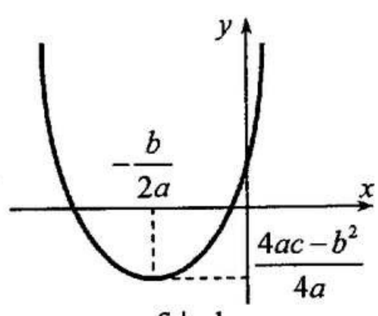
განვიხილოთ სხვაობა: $f(x_2)-f(x_1)=$

$=ax_2^2+bx_2+c-ax_1^2-bx_1-c=$	შევაერთოთ მსგავსი წევრები;
$=a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=$	საერთო მამრავლია (x_2-x_1);
$=(x_2-x_1)[a(x_2+x_1)+b]=$	$2a$ გავიტანოთ კვადრატული ფრჩხილებიდან
$=2a(x_2-x_1)\left[\dfrac{x_2+x_1}{2}+\dfrac{b}{2a}\right]<0$	$a>0$ და (3)-ის თანახმად

ე.ი. f ფუნქცია კლებადია $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$-ზე. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ იგი ზრდადია $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ შუალედზე.

გავითვალისწინოთ, რომ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ და 1)-2) თვისებების გამოყენებით ავაგოთ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი.

ჯერ განვიხილოთ $a>0$ შემთხვევა. $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$-ზე ფუნქცია კლებულობს, $-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში იღებს $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ მნიშვნელობას და $-\dfrac{b}{2a}$-ს მარჯვნივ იზრდება, ამიტომ მივიღეთ წირი რომელსაც ეწოდება **პარაბოლა** (ნახ. 1), რომლის **სიმეტრიის ღერძი** არის $x=-\dfrac{b}{2a}$ წრფე, ხოლო **პარაბოლას წვეროს** კოორდინატებია $\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$. ამიტომ ამ შემთხვევაში (2) კვადრატული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის $\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right)$; ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა არის $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ და იგი მიიღწევა $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში. $a>0$ შემთხვევაში შტოები ყოველთვის ზემოთაა მიმართული.



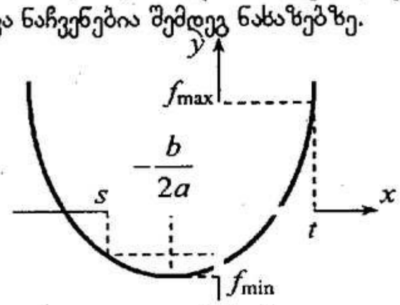
ნახ. 1

როდესაც $a<0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია იზრდება $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ შუალედზე, $-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, შემდეგ კლებულობს $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ შუალედზე. ამგვარად, ამ შემთხვევაში გრაფიკი არის პარაბოლა, რომლის წვერო მდებარეობს $\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ წერტილში, ხოლო

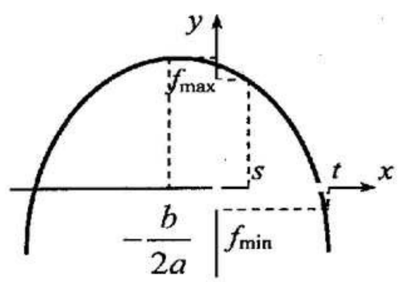
შტოები მიმართულია ქვემოთ; მნიშვნელობათა სიმრავლე არის $\left(-\infty; \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$; მაქსიმალური მნიშვნელობა არის $\frac{4ac-b^2}{4a}$ და იგი მიიღწევა $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილში .

საბოლოოდ $y=ax^2+bx+c$ კვადრატული სამწევრის მონოტონურობის შუალედები არის (a-ს ნიშნის მიუხედავად) $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ და $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$.

ზოგჯერ საჭიროა $f(x)=ax^2+bx+c$ სამწევრის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების განსაზღვრა რაიმე წინასწარ მოცემულ $[s;t]$ სახის შუალედში. თუ $[s;t]$ მთლიანად მდებარეობს მონოტონურობის რაიმე შუალედში, ანუ თუ $-\frac{b}{2a}\notin[s;t]$, მაშინ ამ შუალედზე სამწევრის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მიიღწევა ბოლოებში, ანუ უნდა გამოვთვალოთ $f(s)$, $f(t)$; მათ შორის უდიდესი არის f-ის მაქსიმუმი $[s;t]$-ზე, ხოლო უმცირესი – მინიმუმია ამავე შუალედზე. თუ $-\frac{b}{2a}\in[s;t]$, მაშინ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ არის მაქსიმუმი (მინიმუმი) როცა $a<0$ ($a>0$), ხოლო მინიმუმი (მაქსიმუმი) მიიღწევა $[s;t]$-ს ერთ-ერთ ბოლოზე. რამდენიმე შესაძლო შემთხვევა ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზებზე.



ნახ. 2



ნახ. 3

II. ***კვადრატული სამწევრის გაშლა მამრავლებად. კვადრატული განტოლების და უტოლობის ამოხსნა.*** ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია კვადრატული სამწევრის გაშლა მამრავლებად:

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$	
$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$	სრული კვადრატის გამოყოფა
$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=$	თუ $b^2-4ac\geq 0$, კვადრატულ ფრჩხილებში კვადრატების სხვაობაა
$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\lvert a\rvert}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\lvert a\rvert}\right)=$	
$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$	რადგან მოდულის წინ $\pm$ არის, ამიტომ მოდულის ნიშნის მოხსნა შეგვიძლია

აღვნიშნოთ $D=b^2-4ac$. D სიდიდეს დისკრიმინანტი ეწოდება და მის ნიშანზე არის დამოკიდებული ისევე როგორც კვადრატული **სამწევრის მამრავლებად** გაშლადობა, აგრეთვე კვადრატული განტოლების და უტოლობის ამოხსნადობის საკითხი.

დისკრიმინანტს გეომეტრიული შინაარსიც გააჩნია. მისი გამოყენებით პარაბოლის წვეროს ორდინატი ასე ჩაიწერება: $-\dfrac{D}{4a}$.

ვთქვათ $D>0$. როგორც ვნახეთ, როცა $D>0$, კვადრატული სამწევრისათვის სამართლიანია გაშლა:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{4}$$

სადაც

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{5}$$

ცხადია, ორი განსხვავებული რიცხვი x_1 და x_2 წარმოადგენს **კვადრატული**

$$ax^2+bx+c=0, \tag{6}$$

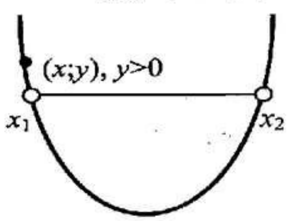
განტოლების ამონახსნებს, რადგან (4)-ის ძალით (6) იგივეა რაც

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

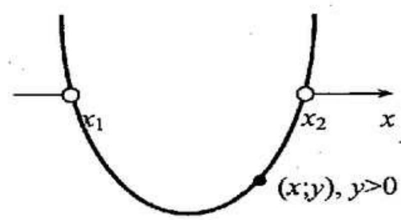
განტოლება, რომლის ფესვებია x_1 და x_2.

კვადრატული უტოლობის ამოსახსნელად, $D>0$ შემთხვევაში გავარჩიოთ ორი შემთხვევა, $a>0$ და $a<0$ ჯერ განვიხილოთ $a>0$.

$ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს წარმოადგენს $(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ (ნახ.4), რადგან აბსცისთა ღერძის ზემოთ მოთავსებული ნებისმიერი $(x;y)$ წერტილისათვის $y>0$. ასევე, $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $(x_1;x_2)$ (ნახ. 5).



ნახ. 4



ნახ. 5

არამკაცრი უტოლობების ამონახსნების მისაღებად, მკაცრი უტოლობების ამონახსნებს ვუმატებთ x_1 და x_2 ფესვებს, ანუ $ax^2+bx+c\ge0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$, ხოლო $ax^2+bx+c\le0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $[x_1;x_2]$.

როდესაც $a<0$, გვაქვს:

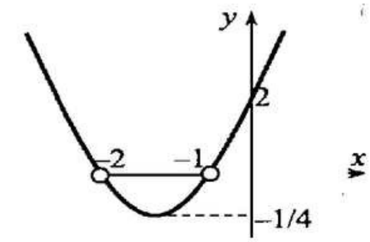
უტოლობა	ამონახსნთა სიმრავლე
$ax^2+bx+c>0$	$(x_1;x_2)$
$ax^2+bx+c\ge0$	$[x_1;x_2]$
$ax^2+bx+c<0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
$ax^2+bx+c\le0$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$

მაგალითი. ვიპოვოთ $x^2+3x+2=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები, გავშალოთ იგი მამრავლებად, ავაგოთ $y=x^2+3x+2$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი, ვიპოვოთ $x^2+3x+2>0$ კვადრატული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.

ამოხსნა. $ax^2+bx+c=x^2+3x+2$ ე.ი. ჩვენს მაგალითში $a=1$, $b=3$, $c=2$. $D=b^2-4ac=1$. რადგან $a>0$, გრაფიკი არის პარაბოლა, რომლის შტოები მიმართულია ზემოთ. პარაბოლის წვერო არის წყვილი $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a}\right)=(-1,5;-0,25)$. $-0,25$ არის ამ კვადრატული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა. ზუსტი გრაფიკის ასაგებად ჩვენ გვჭირდება პარაბოლისა და საკოორდინატო ღერძების გადაკვეთის წერტილების პოვნა. აბსცისთა ღერძთან პარაბოლას საერთო აქვს ორი წერტილი, რადგან $D>0$, ესენია $(x_1;0)$ და $(x_2;0)$, სადაც x_1 და x_2 არის

$$x^2+3x+2=0$$

განტოლების ფესვები. (5)-ის თანახმად $x_1=-2$ და $x_2=-1$. ორდინატთა ღერძის ყოველი წერტილისათვის $x=0$, რისი ჩასმა კვადრატულ ფუნქციაში გვაძლევს $y=2$. ე.ი. $(0;2)$ არის პარაბოლისა და ორდინატთა ღერძის გადაკვეთის წერტილი. ამგვარად, მოცემული კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს აქვს ნახ. 6-ზე გამოსახული სახე. ამ ნახაზიდანვე ჩანს, რომ $x^2+3x+2>0$ კვადრატული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე არის $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.



ნახ. 6

შევნიშნოთ, რომ კონკრეტულ მაგალითებში წვეროს y_0 ორდინატის (კვადრატული ფუნქციის მნიშვნელობა $x_0=-\frac{b}{2a}$ წერტილში) საპოვნელად მოსახერხებელია არა $y_0=-\frac{D}{4a}$ ფორმულით სარგებლობა, არამედ უშუალოდ x_0-ის ჩასმა კვადრატული სამწევრის გამოსახულებაში.

მაგალითი. ვიპოვოთ $y=x^2-6x+10$ პარაბოლის წვერო.

ამოხსნა. $x_0=-\frac{b}{2a}=3$, $y_0=3^2-6\cdot3+10=1$, ე.ი. პარაბოლის წვეროა $(3;1)$ წერტილი.

ვთქვათ $D=0$. ამ შემთხვევაში კვადრატული სამწევრი გაიშლება შემდეგნაირად

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2, \tag{7}$$

სადაც

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

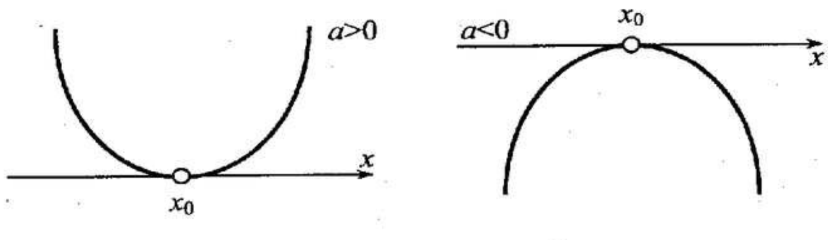
ცხადია, კვადრატულ განტოლებას

$$ax^2+bx+c=0$$

რომელიც ამ შემთხვევაში იგივეა, რაც

$$a(x-x_0)^2=0,$$

აქვს ერთი ფესვი $x_0=-\frac{b}{2a}$.



a-ს ნიშნის მიხედვით, უტოლობებს აქვთ შემდეგი ამონახსნები:

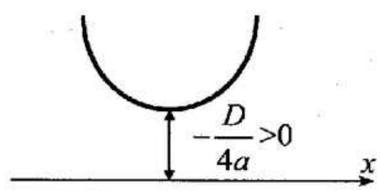
როცა $a>0$

უტოლობა	ამონახსნთა სიმრავლე
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$
$ax^2+bx+c\geq0$	R
$ax^2+bx+c<0$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\leq0$	$\{x_0\}$

როცა $a<0$

უტოლობა	ამონახსნთა სიმრავლე
$ax^2+bx+c>0$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq0$	$\{x_0\}$
$ax^2+bx+c<0$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$
$ax^2+bx+c\leq0$	R

დასასრულ, განვიხილოთ $D<0$ შემთხვევა.



ნახ. 9

როდესაც $a>0$, პარაბოლის შტოები ზემოთაა მიმართული და პარაბოლის წვეროს ორდინატა $-\frac{D}{4a}$ აგრეთვე დადებითია (რადგან $-D>0$), ამიტომ პარაბოლა არ კვეთს აბსცისთა ღერძს, ანუ კვადრატულ განტოლებას

$$ax^2+bx+c=0$$

არა აქვს ნამდვილი ფესვები, კვადრატული სამწევრი ნამრავლად არ იშლება, კვადრატული უტოლობების

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{და} \quad ax^2+bx+c\geq0$$

ამონახსნთა სიმრავლე არის R, ხოლო კვადრატული უტოლობების

$$ax^2+bx+c<0 \quad \text{და} \quad ax^2+bx+c\leq0$$

ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

ანალოგიურად, როცა $a<0$, მაშინ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ, წვეროც აბსცისთა ღერძის ქვემოთაა, პარაბოლა არ კვეთს აბსცისთა ღერძს და ამიტომ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატულ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს; კვადრატული სამწევრი ნამრავლად არ იშლება, კვადრატული უტოლობების

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{და} \quad ax^2+bx+c\geq0$$

ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია, ხოლო კვადრატული უტოლობების

$$ax^2+bx+c<0 \quad \text{და} \quad ax^2+bx+c\leq0$$

ამონახსნთა სიმრავლე არის R.

III. არასრული კვადრატული განტოლებები. კვადრატული განტოლების ამოხსნა ლუწი b კოეფიციენტის შემთხვევაში. როდესაც b და c რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულია, მაშინ განტოლებას ეწოდება **არასრული** სახის კვადრატული განტოლება. არასრული კვადრატული განტოლების ამოხსნა მიზანშეწონილია (5) ფორმულების გამოყენების გარეშე. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) თუ $b\neq 0$ და $c=0$ გვექნება

$$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0$$

საიდანაც $x_1=0,\ x_2=-\dfrac{b}{a}$.

2) თუ $b=0$ და $c\neq 0$ გვექნება

$$ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a},$$

საიდანაც ჩანს, რომ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია, როდესაც a-სა და c-ს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, ხოლო როდესაც მათ მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ, მაშინ განტოლების ამონახსნებია:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3) თუ $b=c=0$ გვექნება $ax^2=0$ და მისი ამონახსნია $x=0$.

განვიხილოთ კვადრატული განტოლება

$$ax^2+bx+c=0, \tag{8}$$

ლუწი b კოეფიციენტით $b=2k$, $k\in Z$. როგორც ვიცით, როცა $D\geq 0$, (8)-ის ამონახსნები არის:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{9}$$

(როცა $D=0$, $x_1=x_2$). (9)-ში გავითვალისწინოთ, რომ $b=2k$. მივიღებთ:

$$x_1=\frac{-2k-\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a}, \tag{10}$$

და ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ მეორე ფესვი გამოითვლება ფორმულით

$$x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a}. \tag{11}$$

(10) და (11) ფორმულებით კვადრატული განტოლების ფესვების გამოთვლა უფრო მოსახერხებელია (9)-სთან შედარებით. რადგან $\dfrac{b}{2}$-ის კვადრატი გაცილებით მცირეა, ვიდრე b-ს კვადრატი. გარდა ამისა თუ $a=1$, (10) და (11) იძლევა ფესვებს გაყოფის მოქმედების გარეშე.

მაგალითი. ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება: $x^2+32x+156=0$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (10) და (11): $x=-16\pm\sqrt{256-156}=-16\pm 10$. ე.ი. განტოლების ფესვებია $x_1=-26$, $x_2=-6$.

IV. ბიკვადრატული განტოლება. ბიკვადრატული არის

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{12}$$

სახის განტოლება, სადაც a, b, c ნამდვილი რიცხვებია და $a\neq0$, x ცვლადი. ბიკვადრატული განტოლებ იხსნება $y=x^2$ აღნიშვნის გამოყენებით, რომლის შედეგად, (12) იღებს კვადრატული განტოლების სახეს:

$$ay^2+by+c=0. \qquad (13$$

თუ $D=b^2-4ac<0$, მაშინ ბიკვადრატულ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია ნამდვილ რიცხვებში.

თუ $D=0$, მაშინ (13)-დან ვღებულობთ $y=-\dfrac{b}{2a}$; რაც ნიშნავს, რომ ბიკვადრატული განტოლებ ამონახსნი მიიღება

$$x^2=-\frac{b}{2a}$$

განტოლების ამოხსნით.

თუ $D>0$, მაშინ (13)-დან ვღებულობთ $y_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $y_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ და ბიკვადრატულ განტოლების ამონახსნებს მივიღებთ

$$x^2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \qquad x^2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

კვადრატული განტოლებების ამოხსნის შემდეგ.

მაგალითი. ამოვხსნათ ბიკვადრატული განტოლება: $2x^4-9x^2+4=0$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $y=x^2$ და მივიღებთ $2y^2-9y+4=0$ განტოლებას, რომლის ამონახსნებია

$$y_1=\frac{9-\sqrt{81-32}}{4}=\frac{1}{2}, \qquad y_2=\frac{9+\sqrt{81-32}}{4}=4$$

ამგვარად

$$x^2=\frac{1}{2}, \quad x^2=4.$$

ე.ი. განტოლების ფესვებია

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\, x_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\, x_3=-2,\, x_4=2.$$

V. ვიეტის თეორემა და მისი რამდენიმე გამოყენება.

თეორემა (ვიეტის). თუ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი $D>0$ მაშინ განტოლების ამონახსნთა ჯამი არის $-\dfrac{b}{a}$, ხოლო ნამრავლი არის $\dfrac{c}{a}$:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

შენიშვნა. ვიეტის თეორემა სამართლიანია $D=0$ შემთხვევაშიც, ოღონდ ამ შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ რომ: $x_1=x_2=x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

სამართლიანია ვიეტის თეორემის შებრუნებული

თეორემა. თუ p, q, x_1 და x_2 ისეთებია, რომ

$$x_1+x_2=-p \quad \text{და} \quad x_1x_2=q,$$

მაშინ x_1 და x_2 არის

$$x^2+px+q=0$$

განტოლების ამონახსნები.

ვიეტის თეორემის გამოყენებით ბევრი საინტერესო ამოცანა იხსნება. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

***მაგალითი* 1.** $2x^2+5x-3=0$ განტოლების ამოუხსნელად იპოვეთ $x_1+x_2+x_1x_2$ და $x_1^2+x_2^2$, სადაც x_1 და x_2 არის მოცემული განტოლების ფესვები.

ამოხსნა. ვიეტის თეორემის თანახმად, $x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}$, $x_1x_2=-\dfrac{3}{2}$ მაშინ

$$x_1+x_2+x_1x_2=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=-4,\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+3=9{,}25.$$

***მაგალითი* 2.** როდის აქვს $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას მოდულით ტოლი და ნიშნით განსხვავებული ფესვები?

ამოხსნა. პირველ ყოვლისა, ორი ფესვის არსებობისათვის საჭიროა პირობა $D>0$. პირობის თანახმად $x_1+x_2=0$ $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}=0 \Leftrightarrow b=0$. ე.ი. უნდა შესრულდეს $D>0$ და $b=0$ პირობები, ანუ $ac<0$, $b=0$ პირობები.

***მაგალითი* 3.** როდის აქვს $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას დადებითი ფესვები?

ამოხსნა. ფესვების არსებობის პირობასთან ($D>0$) ერთად უნდა გამოვიყენოთ ვიეტის თეორემა: $x_1>0$ და $x_2>0$-დან ვიღებთ

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0 \text{ და } x_1x_2=\frac{c}{a}>0$$

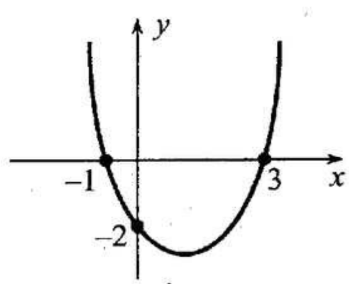
ე.ი. უნდა შესრულდეს $D>0$, $\dfrac{b}{a}<0$, $\dfrac{c}{a}>0$ პირობები.

***მაგალითი* 4.** როდის აქვს $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას სხვადასხვა ნიშნის ფესვები?

ამოხსნა. საჭიროა შესრულდეს $\dfrac{c}{a}<0$, ან რაც იგივეა $ac<0$. ამ შემთხვევაში $D>0$ პირობის შემოწმება საჭირო არაა, რადგან თუ $ac<0$, მაშინ იგი ავტომატურად სრულდება.

VI. რამდენიმე საინტერესო ამოცანა. ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიც მოცემულია $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკის სხვადასხვა წრფეებთან (მათ შორის საკოორდინატო ღერძებთან) თანაკვეთის წერტილები, რომელთა მიხედვით უნდა დავადგინოთ a, b, c კოეფიციენტების მნიშვნელობები. შემდეგი ამოცანა ამ ტიპისაა.

***მაგალითი* 1.** ნახაზზე გამოსახული $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან თანაკვეთის წერტილებით იპოვეთ a, b, c-ს მნიშვნელობები.



ამოხსნა. ნახაზის მიხედვით, როცა $x=0$, მაშინ $y=-2$, ანუ, თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ $y=ax^2+bx+c$-ში, $c=-2$. ე.ი. ფუნქცია არის $y=ax^2+bx-2$ და მისი ფესვებია $x_1=-1$ და $x_2=3$, ანუ თუ ფუნქციაში ჩავსვამთ $x_1=-1$ და $x_2=3$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} a-b-2=0 \\ 9a+3b-2=0, \end{cases}$$

რისი ამოხსნაც გვაძლევს $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$.

შემდეგ ამოცანაში ვნახავთ, თუ როგორ ხდება ორი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკების თანაკვეთის წერტილების განსაზღვრა. იგივე მეთოდი გამოიყენება მაშინაც, თუ ერთ-ერთი ფუნქცია წრფივია. მონაცემების მიხედვით, განსხვავებული ფუნქციების გრაფიკების თანაკვეთის წერტილების რაოდენობა შეიძლება იყოს ნული, ერთი ან ორი.

მაგალითი 2. მოცემულია ორი კვადრატული ფუნქცია: $y=2x^2+3x+4$ და $y=x^2-x+1$. იპოვეთ მათი გრაფიკების თანაკვეთის წერტილები.

ამოხსნა. თანაკვეთის წერტილებში y იღებს ერთი და იგივე მნიშვნელობებს, ამიტომ თანაკვეთის წერტილებში აბსცისა x აკმაყოფილებს იმ კვადრატულ განტოლებას, რომელიც მიიღება მოცემული კვადრატული ფუნქციების გატოლების შედეგად:

$$(2x^2+3x+4)=(x^2-x+1) \iff x^2+4x+3=0.$$

ამიტომ თანაკვეთის წერტილთა აბსცისებია $x_1=-3$ და $x_2=-1$. თანაკვეთის წერტილთა ორდინატები მიიღება $x_1=-3$ და $x_2=-1$ მნიშვნელობების ჩასმით ერთ-ერთ კვადრატულ ფუნქციაში (სულ ერთია რომელში):

$$y_1=2\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)+4=13 \quad \text{და} \quad y_2=2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+4=3$$

ე.ი. გრაფიკთა თანაკვეთის წერტილებია: $(-3;13)$ და $(-1;3)$.

ფუნქციებს, რომლებსაც ჩვენ განვიხილავთ, აქვთ ერთი ძალიან საყურადღებო თვისება: თუ რაიმე შუალედზე ფუნქცია მიიღებს ორ განსხვავებულ y_1 და y_2 მნიშვნელობას, მაშინ ეს ფუნქცია იგივე შუალედზე მიიღებს ყველა მნიშვნელობას y_1-სა და y_2-ს შორის. კერძოდ, თუ ჩვენ ვიპოვით რაიმე შუალედზე ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მიშვნელობებს, მაშინ გვეცოდინება ყველა მნიშვნელობა, რომლის მიღებაც შეუძლია ფუნქციას მოცემულ შუალედზე.

მაგალითი 3. რამდენი მთელი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $f(x)=x^2+2x-3$ კვადრატულმა ფუნქციამ, თუ $-4,2\le x\le 3,1$?

ამოხსნა. $f(x)=x^2+2x-3$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკია პარაბოლა, რომლის წვერო არის $(-1;-4)$; რადგან $-1\in[-4,2;3,1]$, ამიტომ f ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა ამ შუალედზე ემთხვევა პარაბოლის წვეროს ორდინატს და არის $f_{\min}=f(-1)=-4$. მაქსიმალურ მნიშვნელობას ფუნქცია მიიღებს შუალედის ერთ-ერთ ბოლოზე. რადგან

$$f(-4,2)=17,64-8,4-3=6,24, \quad f(3,1)=9,61+6,2-3=12,81,$$

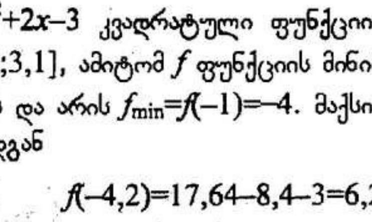
ამიტომ $f_{\max}=f(3,1)=12,81$.

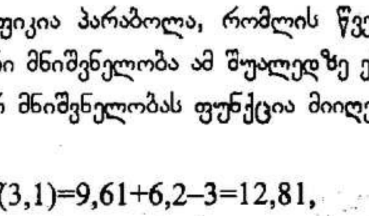
ამგვარად $[-4,2\ ;\ 3,1]$ შუალედზე f ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას -4-დან $12,81$-ის ჩათვლით. ამათ შორის მთელი მნიშვნელობები არის:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, \ldots, 12,$$

სულ 17 განსხვავებული მთელი მნიშვნელობა.

იმისათვის, რომ შევამოწმოთ, არის თუ არა მოცემული p რიცხვი მოთავსებული $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ფესვებს შორის (ვგულისხმობთ $a\neq0$), არ არის აუცილებელი კვადრატული განტოლების ამოხსნა. ამისათვის საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ $f(p)<0$ როცა $a>0$, ან $f(p)>0$ როცა $a<0$, სადაც $f(x)=ax^2+bx+c$. ეს ფაქტი კარგად ჩანს შემდეგ ორ ნახაზზე.





ორივე შემთხვევა შეგვიძლია გავაერთიანოთ ერთ პირობაში: $af(p)<0$. ეს ფაქტი, ვიეტის თეორემასთან ერთად, საკმარისია შემდეგი ამოცანების ამოსახსნელად.

მაგალითი 4. $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ამოუხსნელად შევამოწმოთ მისი ფესვები ნაკლებია თუ არა მოცემულ p რიცხვზე.

ამოხსნა. იმისათვის, რომ p მეტი იყოს $f(x)=0$ განტოლების ($f(x)=ax^2+bx+c$) ორივე ფესვზე, საკმარისია შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\begin{cases} D>0 & \text{ორი ფ ესვის არსებობის პირობა} \\ af(p)>0 & p \text{ არაა ფ ესვებს შორის} \\ p>-\dfrac{b}{2a} & p \text{ მეტია წვეროს აბსცისაზე} \end{cases}$$

მაგალითი 5. ax^2+bx+c კვადრატული განტოლების ამოუხსნელად შევამოწმოთ მოთავსებულია თუ არა მისი ფესვები $(p;q)$ ღია შუალედში.

ამოხსნა. კვლავ აღვნიშნოთ $f(x)=ax^2+bx+c$. იმისათვის, რომ $f(x)=0$ განტოლების ფესვები მოთავსებული იყოს $(p;q)$ შუალედში, საკმარისია:

$$\begin{cases} D>0 & \text{ორი ფ ესვის არსებობის პირობა,} \\ af(p)>0 & p \text{ არაა ფ ესვებს შორის} \\ af(q)>0 & q \text{ არაა ფ ესვებს შორის} \\ p<-\dfrac{b}{2a}<q & p \text{ ნაკლებია წვეროს აბსცისაზე და} \\ & q \text{ მეტია წვეროს აბსცისაზე} \end{cases}$$

პარაგრაფის ბოლოს მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მოვიყვანოთ $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქციის შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1) განსაზღვრის არე $D(f)=(-\infty;+\infty)$;

2) მნიშვნელობათა სიმრავლე $E(f)=\begin{cases}[y_0;+\infty), & \text{როცა} \quad a>0 \\ (-\infty; y_0], & \text{როცა} \quad a<0;\end{cases}$

3) ფუნქციის გრაფიკა პარაბოლა:

ა) წვეროს კოორდინატებია $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, ***შევნიშნოთ რომ, როცა კვადრატულ სამწევრს ფესვები გააჩნია x_0-ის გამოთვლა შეიძლება შემდეგნაირად*** $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

ბ) თუ $a>0$, შტოები მიმართულია ზემოთ, თუ $a<0$, შტოები მიმართულია ქვემოთ;

გ) პარაბოლა OY ღერძს კვეთ (0;C) წერტილში;

დ) პარაბოლა ox ღერძს კვეთ ორ (x_1 და x_2) წერტილში. x_1 და x_2 არის $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ამონახსნებია. პარაბოლა ეხება ox ღერძს x_0 წერტილში, თუ x_0 არის

$ax^2+bx+c=0$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი. პარაბოლა არ გადაკვეთს ox
ღერძს, თუ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია

4) როცა $a>0$, ფუნქცია ზრდადია $(x_0;+\infty)$ შუალედში და კლებადია , $(-\infty;x_0)$ შუალედში;
როცა $a<0$, ფუნქცია ზრდადია $(-\infty;x_0)$ შუალედში და კლებადია $(x_0;+\infty)$ შუალედში;

5) როცა $a>0$, ფუნქცია ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას x_0 წერტილში და ეს
მნიშვნელობაა y_0. როცა $a<0$, ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას x_0
წერტილში და ეს მნიშვნელობაა y_0;

6) კვადრატული ფუნქცია ყველა თავის მნიშვნელობას მნიშვნელობათა სიმრავლიდან
ღებულობს ორ სხვადასხვა წერტილში გარდა y_0-სა, რომელსაც ღებულობს მხოლოდ x_0-
ში;

7) როცა კვადრატულ ax^2+bx+c სამწევრს ორი x_1 და x_2 ფესვი აქვს, ადგილი აქვს შემდეგ
წარმოდგენას:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

8) როცა კვადრატულ ax^2+bx+c სამწევრს ერთი x_0 ფესვი აქვს, ადგილი აქვს შემდეგ
წარმოდგენას:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2.$$