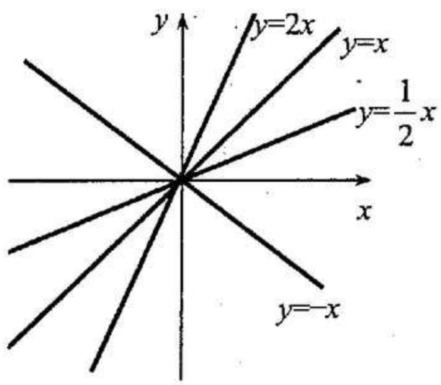
§ 9. წრფივი ფუნქცია. წრფივი განტოლება და უტოლობა. წრფივ განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები

***I. წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი.** $y=kx+b$ ფორმულით განსაზღვრულ ფუნქციას, სადაც k და b რაიმე ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება.*

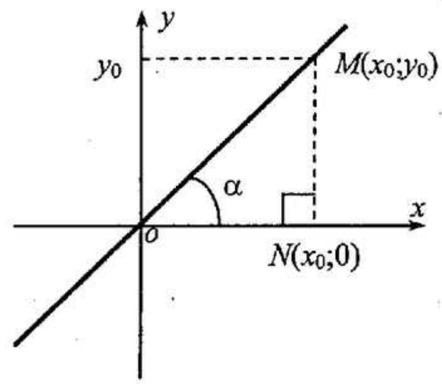
წრფივი ფუნქციის განსაზღვრის არე წარმოადგენს R-ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, რადგან $kx+b$ განსაზღვრულია ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის.

$y=kx+b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე (ამიტომ ეწოდება მას წრფივი ფუნქცია). მისი გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ვიპოვოთ ორი წერტილი, მაგალითად ღერძებთან გადაკვეთის $A(0;b)$ და $B(-b/k;0)$ წერტილები, თუ $k\neq 0$ და მათზე გავავლოთ წრფე.

k კოეფიციენტი ახასიათებს კუთხეს, რომელსაც $y=kx$ წრფე ადგენს ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან (ნახ.1).



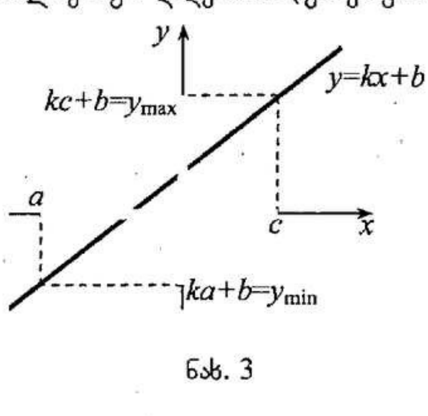
ნახ.1



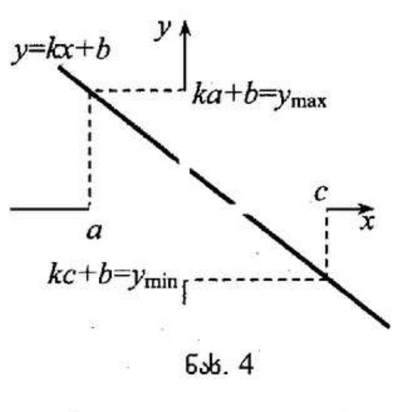
ნახ.2

ერთი წერტილი, რომელიც ეკუთვნის $y=kx$-ის გრაფიკს, არის კოორდინატთა სათავე O. თუ მეორე წერტილი არის M კოორდინატებით $(x_0;y_0)$, მაშინ OMN მართკუთხა სამკუთხედში $k=\frac{y_0}{x_0}=\operatorname{tg}\alpha$ (ნახ. 2). ამიტომ ***k-ს ვუწოდებთ საკუთხო კოეფიციენტს. თუ $k>0$, კუთხე მახვილია, თუ $k<0$, კუთხე ბლაგვია. თუ $k=0$, $y=kx$ წრფე ემთხვევა ox ღერძს.***

$y=kx+b$-ს გრაფიკი მიიღება $y=kx$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით ზემოთ (ქვემოთ) $|b|$ მანძილზე თუ b დადებითია (უარყოფითია).



ნახ. 3



ნახ. 4

როდესაც $k>0$ (როგორიც არ უნდა იყოს b) $y=kx+b$ არის ზრდადი ფუნქცია და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე არის R. ყოველ $a\le x\le c$ სახის შუალედზე $y=kx+b$ იღებს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას, როცა $x=c$ და მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა $x=a$ (ნახ. 3).

როდესაც $k<0$, $y=kx+b$ (ნებისმიერი b-სათვის) არის კლებადი ფუნქცია, მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე არის R. ყოველ $a\le x\le c$ სახის შუალედზე იგი აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას $x=a$ წერტილში, მინიმალურს $x=c$ წერტილში (ნახ. 4).

როდესაც $k=0$, $y=b$ არის აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე. ამ დროს $y=b$ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის $\{b\}$.

II. წრფივი განტოლება და უტოლობა. წრფივ ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემა. $kx+b=0$ სახის განტოლებას ეწოდება **წრფივი** (უფრო ვრცლად, წრფივი ერთცვლადიანი განტოლება). გეომეტრიულად, წრფივი განტოლების ამოხსნა ნიშნავს $y=kx+b$ წრფის ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისის განსაზღვრას.

როდესაც $k\neq0$, $y=kx+b$ წრფე ერთადერთ წერტილში კვეთს აბსცისთა ღერძს, რომლის აბსცისა განისაზღვრება $kx+b=0$ განტოლებიდან: $x=-\frac{b}{k}$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ერთადერთ ამონახსნს.

როდესაც $k=0$, $y=kx+b$ წრფე პარალელურია აბსცისთა ღერძის თუ $b\neq0$. ამ შემთხვევაში $0\cdot x=b$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს; თუ $b=0$, მაშინ $y=b$ წრფე ემთხვევა აბსცისთა ღერძს და $0x=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის R.

როგორც წესი, წრფივი განტოლებები დაიყვანება $ax=b$ სახის განტოლებაზე, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, x კი უცნობი $x=\frac{b}{a}$.

თუ $a\neq0$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი;

თუ $a=0$ და $b=0$, მაშინ ყოველი ნამდვილი რიცხვი განტოლების ამონახსნია ($x\in R$).

თუ $a=0$ და $b\neq0$, მაშინ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია ($x\in\varnothing$).

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება $a^2x+3=9x+a$.

ამოხსნა. განტოლება მიიყვანება სახეზე: $(a^2-9)x=a-3$.

1) თუ $a^2-9\neq0$, ანუ $a\neq\pm3$, მაშინ განტოლების ერთადერთი ამონახსნია $x=\frac{1}{a+3}$.

2) თუ $a=3$, მაშინ გვაქვს $0\cdot x=0$ და განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი რიცხვი.

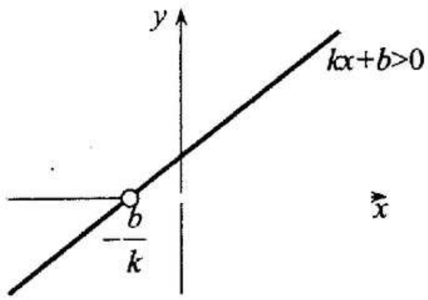
3) თუ $a=-3$, მაშინ გვაქვს $0\cdot x=-3$ და განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

$kx+b>0$ ($kx+b\ge0$) და $kx+b<0$ ($kx+b\le0$) სახის უტოლობებს, სადაც x ცვლადია, ხოლო k და b ნებისმიერად მოცემული ნამდვილი რიცხვები, წრფივი (ერთცვლადიანი) უტოლობები ეწოდება.

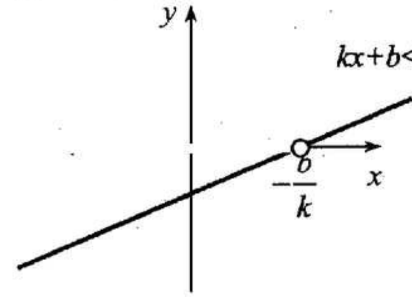
თუ $k>0$, მაშინ $kx+b>0$ უტოლობა ტოლფასია $x>-\frac{b}{k}$ უტოლობისა. თუ $k<0$, მაშინ $kx+b>0$ უტოლობა ტოლფასია $x<-\frac{b}{k}$ უტოლობისა. როცა $k=0$, მაშინ $kx+b>0$

უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე არის ან R (როცა $b>0$), ან ცარიელი სიმრავლე (როცა $b\leq 0$).

გეომეტრიულად $k>0$ შემთხვევა ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზებზე.



ნახ. 5



ნახ. 6

ნახ. 5-ზე დაშტრიხულია $kx+b>0$-ის ამონახსნთა სიმრავლე, ხოლო ნახ. 6-ზე $kx+b<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.

წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობების სასრულ სიმრავლეს ეწოდება წრფივ ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემა. ასეთი სისტემის ამოსახსნელად, ცალ-ცალკე ვხსნით სისტემაში შემავალ თითოეულ უტოლობას და შემდეგ ვიღებთ ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთას, რაც წარმოადგენს უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს.

მაგალითი. ამოვხსნათ წრფივ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ x-5\leq 0 \\ 3x+2>0 \end{cases} \tag{1}$$

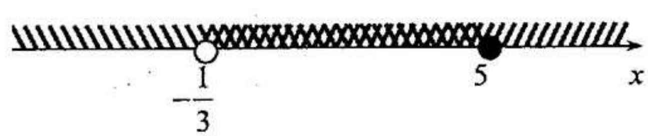
ამოხსნა. (1)-ის ტოლფასი სისტემა არის:

$$\begin{cases} x>-1/3 \\ x\leq 5 \\ x>-2/3 \end{cases} \tag{2}$$

ორი ერთნაირი აზრის $x>-\frac{1}{3}$ და $x>-\frac{2}{3}$ უტოლობიდან დაგვრჩება $x>-\frac{1}{3}$ უტოლობა. მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x>-1/3 \\ x\leq 5 \end{cases} \tag{3}$$

თუ (3)-ში შემავალ ინტერვალებს გამოვსახავთ რიცხვით ღერძზე:



ვნახავთ, რომ უტოლობათა სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს $-\frac{1}{3}<x\leq 5$, ანუ $\left(-\frac{1}{3};5\right]$ სიმრავლე.

III. ორუცნობიან წრფივ განტოლებთა სისტემა. განვიხილოთ ერთი ორუცნობიანი (ანუ ორცვლადიანი) წრფივი განტოლება:

$$ax+by=c \qquad (4)$$

და ვიგულისხმოთ, რომ ერთ-ერთი კოეფიციენტი (a ან b) მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ანუ $a^2+b^2>0$. (4) სახის განტოლებას შეესაბამება წრფე xoy საკოორდინატო სიბრტყეზე: თუ $b\neq0$, ესაა $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ წრფე, თუ $b=0$, მაშინ ესაა ორდინატთა ღერძის პარალელური $x=\dfrac{c}{a}$ წრფე. ცხადია, რომ თუ $(x;y)$ წერტილი ეკუთვნის ასეთ წრფეს, მაშინ იგი აკმაყოფილებს (4) განტოლებას. ამგვარად, ყოველ ორუცნობიან წრფივ განტოლებას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

ახლა განვიხილოთ **ორუცნობიან წრფივ განტოლებთა სისტემა.**

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (5)$$

და ვიგულისხმოთ, $a_1^2+b_1^2>0$ და $a_2^2+b_2^2>0$. (5) სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება **ჩასმის ან ცვლადის გამორიცხვის** მეთოდი. ამ მეთოდების ილუსტრაცია მოვახდინოთ მაგალითებით:

***მაგალითი* 1.** ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+y=11. \end{cases}$

ამოხსნა. პირველი განტოლებიდან x გამოვსახოთ y-ით, $x=3y+2$ და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში. მივიღებთ $2(3y+2)+y=11$, საიდანაც $y=1$. y-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ პირველი განტოლებიდან მიღებულ x-ის გამოსახულებაში მივიღებთ $x=5$. ე.ი. სისტემის ამონახსნია $(5;1)$.

***მაგალითი* 2.** ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$

ამოხსნა. პირველი განტოლება გავამრავლოთ 3-ზე, მეორე 2-ზე და შემდეგ პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე. მივიღებთ $5y=15$, ანუ $y=3$ და ჩავსვათ y-ის ეს მნიშვნელობა პირველ განტოლებაში (შეიძლება მეორეშიც) და მივიღებთ $x=1$. ე.ი. სისტემის ამონახსნია $(1;3)$.

***მაგალითი* 3.** ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 12x-4y=4. \end{cases}$

ამოხსნა. პირველი განტოლების 4-ზე გამრავლება და x-ის გამორიცხვა (ანუ განტოლებების გამოკლება) მოგვცემს $0\cdot y=0$, რასაც აკმაყოფილებს ყოველი y. ამიტომ ყოველი y-ისათვის $\left(\dfrac{1+y}{3};y\right)$ არის სისტემის ამონახსნი.

***მაგალითი* 4.** ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$

ამოხსნა. ვიქცევით ისე როგორც წინა მაგალითში, მაგრამ ვიღებთ $0\cdot y=2$, ამიტომ y არ განისაზღვრება და მოცემულ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია.

***მაგალითი* 5.** m პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს შემდეგ სისტემას უამრავი ამონახსნი?

$$\begin{cases} mx+y=1 \\ x-y=m \end{cases}$$

ამოხსნა. შევკრიბოთ განტოლებები (ე.ი. გამოვრიცხოთ y): $(m+1)x=m+1$. როცა $m+1\neq 0$, მაშინ $x=1$ და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში. მივიღებთ $y=1-m$, ე.ი. თუ $m\neq -1$ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს: $(1;1-m)$. თუ $m=-1$ მაშინ $0\cdot x=0$ განტოლებას აკმაყოფილებს ნებისმიერი x, და სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი: $(x;x-m)$, $x\in R$.

მაგალითი 6. დავწეროთ A(2;1) და B(1;3) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

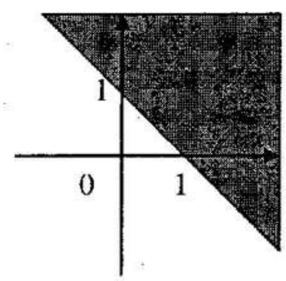
ამოხსნა. წრფის განტოლებაა $y=kx+b$. რადგან ეს წრფე გადის A(2;1) წერტილზე, ამიტომ $1=2k+b$; რადგან ეს წრფე B(1;3)-ზეც გადის, ამიტომ $3=k+b$. ე.ი. k და b აკმაყოფილებენ სისტემას:

$$\begin{cases} 2k+b=1 \\ k+b=3 \end{cases}$$

რომლის ამოხსნაც გვაძლევს: $k=-2$, $b=5$. ამიტომ, $y=-2x+5$ წრფე გადის მოცემულ A და B წერტილებზე.

III. ორუცნობიანი წრფივი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის ამონახსნის წარმოდგენა საკოორდინატო სიბრტყეზე. ***ორცვლადიან უტოლობას აქვს სახე $f(x;y)>0$. ორცვლადიანი უტოლობის ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა დალაგებულ $(x_0;y_0)$ წყვილს, რომელიც მოცემულ უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს. როგორც წესი, უტოლობას უამრავი ამონახსნი გააჩნია.*** ამოვხსნათ უტოლობა ნიშნავს ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნის სიმრავლე. რიცხვთა ყოველ $(x_0;y_0)$ წყვილს საკოორდინატო სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი, ეს საშუალებას გვაძლევს ორცვლადიანი უტოლობის (უტოლობათა სისტემის) ამონახსნთა სიმრავლე გამოვსახოთ საკოორდინატო სიბრტყის წერტილთა სიმრავლით. მაგალითად, $ax+by+c\geq 0$ წრფივი უტოლობის ამონახსნს გეომეტრიულად შეესაბამება $ax+by+c=0$ წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე.

მაგალითი 7. გამოსახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $x+y-1\geq 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.



ამოხსნა. მოცემულ უტოლობას მივცეთ შემდეგი სახე $y\geq -x+1$. ავაგოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $y=-x+1$ წრფე. უტოლობის ამონახსნი ამ წრფის ერთ-ერთ მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყეა. საკმარისია შევამოწმოთ ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყის ნებისმიერად აღებული წერტილი აკმაყოფილებს თუ არა უტოლობას, რადგან წერტილი (0;0) არ აკმაყოფილებს უტოლობას, ამიტომ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ამ წრფის ზევით მდებარეობენ მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლის ინტერპრეტაციას წარმოადგენს.

მაგალითი 8. გამოსახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y<5 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე.

ამოხსნა. $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე პირველი საკოორდინატო მეოთხედია. $x+y<5$ ანუ $y<-x+5$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი ნახევარსიბრტყე, რომელიც $y=-x+5$ წრფის ქვევით მდებარეობს. მოცემული სისტემის ამონახსნებს შეესაბამება სამკუთხედი, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით და $y=-x+5$ წრფით (ამ წრფის წერტილები არ ეკუთვნიან ამონახსნთა სიმრავლეს).