11. რაციონალური, მოდულის შემცველი, ირაციონალური განტოლებები და უტოლობები.

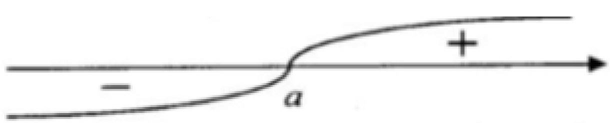
რაციონალური განტოლებები

$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ სახის განტოლებას, სადაც P(x) და Q(x) (Q(x) არ უდრის 0-ს)მრავალწევრებია რაციონალური განტოლება ეწოდება. ამ განტოლების ამოხსნა დაიყვანება სისტემის ამოხსნაზე.

$$\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

რაციონალური უტოლობები

x-a ორწევრი დადებითია x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისთვის, რომლებიც რიცხვით ღერძზე a წერტილის მარჯვნივაა, ხოლო უარყოფითია ყველა x-სათვის, რომელიც a წერტილის მარცხნივაა.



x-a ორწევრის ეს თვისება საფუძვლად უდევს **ინტერვალტა მეთოდს,** რომელიც ხშირად გამოიყენება რაციონალური უტოლობების ამოხსნისას.

ინტერვალთა მეთოდით ამოხსნის მაგალითი:

ვთქვათ, უნდა ამოვხსნათ $P(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$ სახის უტოლობა, სადაც $a_1<a_2<\cdots<a$
ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $x_0>a_n$-თვის $P(x)$-ის ყოველი თანამამრავლ
დადებითია, ე.ი. $P(x)$-იც დადებითია. ნებისმიერი $x_1\in(a_{n-1};a_n)$ რიცხვისათვის ბოლო თანამამრავლი
მნიშვნელობა უარყოფითია და დანარჩენი თანამამრავლები დადებითი, ე.ი. $P(x)$ უარყოფითია. ანალოგიურა
ნებისმიერი $x_2\in(a_{n-2};a_{n-1})$-თვის $P(x)$ იქნება დადებითი და ა.შ.

$P(x)>0$ ან $P(x)<0$ უტოლობათა ამოხსნის მეთოდი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: რიცხვით წრფეზ
დავალაგოთ a_1, a_2, ... , a_n რიცხვები ზრდადობით, უკიდურეს მარჯვენა შუალედში დავსვათ „+" ნიშანი
მომდევნოში (მარჯვნიდან მარცხნივ) „–" ნიშანი და ა.შ. გავაგრძელებთ დასმებს ნიშანთა მონაცვლეობით
მაშინ $P(x)>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება ყველა იმ შუალედის გაერთიანება, რომლებშიც
დასმულია პლუს ნიშანი, ხოლო $P(x)<0$ უტოლობისა კი გაერთიანება ყველა შუალედისა, სადაც დასმული
მინუს ნიშანი. განვიხილოთ

***მაგალითი* 3.** ამოვხსნათ უტოლობა $(x-2)(3+x)(1-x)>0$.

ამოხსნა. უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ -1-ზე. მივიღებთ

$$(x-2)(x-(-3))(x-1)<0.$$

რიცხვით ღერძზე დავალაგოთ უტოლობაში შემავალი მამრავლების ფესვები -3, 1, 2. ისინი რიცხვით ღერძ
გაყოფენ 4 შუალედად.

ამ შუალედებში მარჯვნიდან განვალაგოთ ნიშნები. მინუს ნიშანი გვაქვს $(-\infty;-3)$ და $(1;2)$ შუალედებში
ამიტომ მოცემული უტოლობის ამონახსნია $(-\infty;-3)\cup(1;2)$ სიმრავლე.

განხილული მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ მაშინაც, როცა უტოლობის მარცხენა მხარე უფრო
რთულია

$$P(x)\equiv(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}$$

სახისაა, სადაც $k_1,k_2,\ldots,k_n\in Z$.

მოდულის შემცველი განტოლებები და უტოლობები:

მოდულის განმარტებიდან გამომდინარეობს უმარტივესი მოდულიანი განტოლების ამოხსნის წესი:

$$\textit{თუ}\quad a>,0\quad \textit{მაშინ}\quad |f(x)|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-a \\ f(x)=a; \end{array}\right.$$

$|f(x)|=-a$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს; $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

მოდულიანი უტოლობების ამოხსნისას გამოვიყენებთ შემდეგ ფორმულებს თუ a>0

მაშინ:

$$|f(x)|<a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>-a \\ f(x)<a; \end{array}\right. \qquad |f(x)|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)<-a \\ f(x)>a. \end{array}\right.$$

$|f(x)|<-a$ და $|f(x)|\le -a$ უტოლობებს ამონახსნი არა აქვთ; $|f(x)|>-a$ და $|f(x)|\ge -a$ უტოლობების ამონახსნებია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არედან ($x \in D(f)$).

თუ $a=0$ გვაქვს:

$|f(x)|\ge 0 \Leftrightarrow x \in D(f);$ $\qquad |f(x)|\le 0 \Leftrightarrow f(x)=0;$

$|f(x)|>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f) \\ f(x) \neq 0; \end{cases};$ $\qquad |f(x)|<0 \Leftrightarrow$ ***უტოლობას ამონახსნი არა აქვს;***

ირაციონალური განტოლებები და უტოლობები:

განტოლებას (უტოლობას) რომელიც ცვლადს შეიცავს რადიკალის ნიშნის ქვეშ, ირაციონალური განტოლება(უტოლობა) ეწოდება. ირაციონალური განტოლების ან უტოლობის ამოხნისას შესაძლოა მივიღოტ გარეშე ფესვი ამიტომ საჭიროა ამონახსნის შემოწმება.

მარტივი სახის ირაციონალური განტოლებებისა და უტოლობების ამოხნის ხერხები:

1. თუ $a>0$ მაშინ

$\sqrt{f(x)}=a \Leftrightarrow f(x)=a^2;$

$\sqrt{f(x)}=-a$ ***განტოლებას ამონახსნი არა აქვს;***

$\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0.$

2. თუ $a>0$ მაშინ

$\sqrt{f(x)}<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)<a^2; \end{cases}$ $\qquad \sqrt{f(x)}>a \Leftrightarrow f(x)>a^2;$

$\sqrt{f(x)}<-a$, $\sqrt{f(x)}\le -a$, ***უტოლობებს ამონახსნი არა აქვს;***

$\sqrt{f(x)}\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge 0;$

$\sqrt{f(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)>0;$

$\sqrt{f(x)}\le 0 \Leftrightarrow f(x)=0;$

$\sqrt{f(x)}<0$, ***უტოლობას ამონახსნი არა აქვს;.***