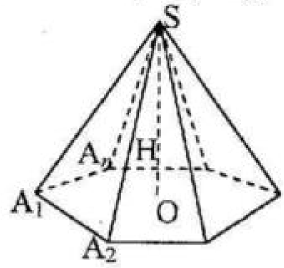
§15. პირამიდა და მისი ელემენტები. წესიერი პირამიდა

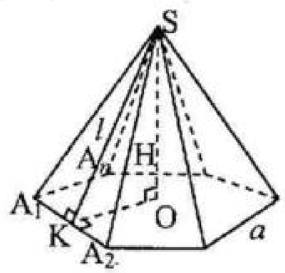
მრავალწახნაგას, რომლის ერთ-ერთი წახნაგი ნებისმიერი მრავალკუთხედია, ხოლო დანარჩენი წახნაგები საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია, პირამიდა ეწოდება. ხსენებულ ($A_1A_2...A_n$) მრავალკუთხედს პირამიდის ფუძე ეწოდება, ხოლო საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებს (მაგ., SA_1A_2, SA_1A_n და ა.შ.) – გვერდითი წახნაგები. გვერდითი წახნაგების საერთო (S) წერტილს პირამიდის წვერო ეწოდება. წიბოებს, რომლებიც ფუძის გვერდებს არ წარმოადგენენ (მაგ., SA_1, SA_2 და ა.შ.), გვერდითი წიბოები ეწოდება. პირამიდის წვეროდან ფუძის შემცველ სიბრტყეზე დაშვებულ (SO) მართობს პირამიდის სიმაღლე ეწოდება. პირამიდას ეწოდება n-კუთხა, თუ მისი ფუძე n-კუთხედია. სამკუთხა პირამიდას ტეტრაედრი ეწოდება.



n-კუთხა პირამიდას აქვს $n+1$ წვერო, $n+1$ წახნაგი და $2n$ წიბო.

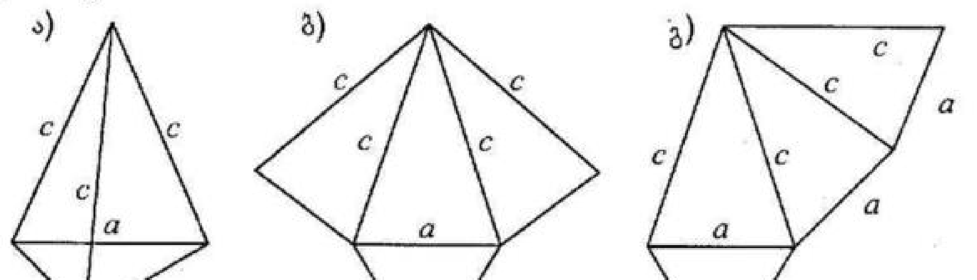
პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი (გვერდითი ზედაპირი) ეწოდება მისი გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამს, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი (სრული ზედაპირი) ეწოდება გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ფართობთა ჯამს.

პირამიდას ეწოდება წესიერი, თუ მისი ფუძე წესიერი მრავალკუთხედია, ხოლო სიმაღლის ფუძე ამ მრავალკუთხედის ცენტრს ემთხვევა. ცხადია, რომ წესიერი პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია, ხოლო გვერდითი წახნაგები ერთმანეთის ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედებია. წესიერი პირამიდის გვერდითი წახნაგის (SK) სიმაღლეს, რომელიც პირამიდის წვეროდანაა გავლებული, აპოთემა ეწოდება.



წესიერი n-კუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძის ნახევარპერიმეტრისა და აპოთემის ნამრავლის ტოლია: $S_{გვ}=\frac{1}{2}P_{ფუძე}\cdot l=\frac{1}{2}nal$, სადაც $P_{ფუძე}$ ფუძის პერიმეტრია, l აპოთემაა და a ფუძის გვერდია.

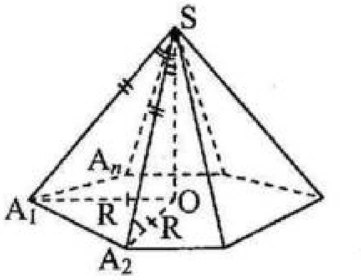
პირამიდის შლილი და მისი ფართობი: წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული რაიმე პირამიდის ზედაპირი დამზადებულია მუყაოს ფურცლისგან. თუ რამდენიმე წიბოზე გავჭრით ,,მუყაოს პირამიდას“, დავშლით მას, მივიღებთ ბრტყელ ფიგურას, რომელსაც **პირამიდის შლილი** ეწოდება. შლილი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს მრავალი ფორმით, თუმცა ისინი ყველა ტოლდიდებია და მათი ფართობი პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობის ტოლია. მაგალითისთვის ნახაზზე მოყვანილია წესიერი სამკუთხა პირამიდა (ა) და მისი შლილის ორი (ბ და გ) ვარიანტი.



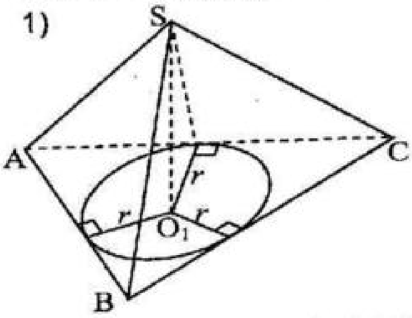
პირამიდის მოცულობა მისი ფუძის ($A_1A_2...A_n$) ფართობისა და (H) სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია:

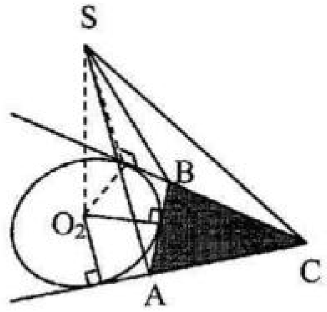
$$V=\frac{1}{3}S_{\text{ფ}}\cdot H.$$

მნიშვნელოვანია შემდეგი თეორემები, რომლებიც პირამიდებზე ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას გვიადვილებს (მოგვყავს მტკიცების გარეშე): სამართლიანია შემდეგი ოთხი დებულების ტოლფასობა:



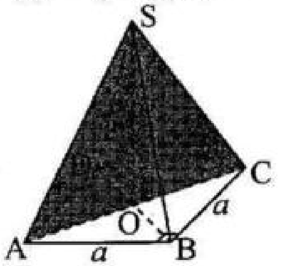
ა) პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია;
ბ) პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი;
გ) პირამიდის გვერდითი წიბოები სიმაღლესთან ქმნიან ტოლ კუთხეებს;
დ) პირამიდის ფუძეზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის O ცენტრში.
სამართლიანია შემდეგი დებულებების ტოლფასობა:
ა) პირამიდის გვერდითი წახნაგების სიმაღლეები ტოლია;
ბ) პირამიდის სიმაღლე გვერდით წახნაგებთან ქმნის ტოლ კუთხეებს;
გ) პირამიდის გვერდითი წახნაგები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი;
შენიშვნა: სამკუთხა პირამიდის შემთხვევაში სამართლიანია მეოთხე დებულებაც.
დ) პირამიდის ფუძეში შეიძლება წრეწირის ან 1) შიგა ჩახაზვა ან 2) გარე ჩახაზვა და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის (O_1 ან O_2) ცენტრში.





მოვიყვანოთ რამდენიმე ტიპიური ამოცანის ამოხსნა პირამიდაზე.

ამოცანა 1. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია არის a. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალური კვეთა ფუძის ტოლდიდია.



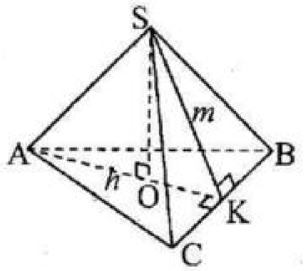
მოც: SABCD წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა. AB=a, $S_{ASC}=S_{ABCD}$

უ.გ. V.

ამოხსნა. $V=\frac{1}{3}S_{\text{ფ}}\cdot SO$, $S_{\text{ფ}}=a^2$. ΔACB ტოლფერდა მართკუთხაა, $AC^2=2a^2$, $AC=a\sqrt{2}$. რადგან $S_{ASC}=S_{ABCD}$, ამიტომ $\frac{AC\cdot SO}{2}=a^2 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}\cdot SO}{2}=a^2 \Rightarrow SO=\frac{2a^2}{a\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$. მაშინ $V=\frac{1}{3}a^2\cdot a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

პასუხი: $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$.

ამოცანა 2. წესიერი სამკუთხა პირამიდის აპოთემაა m, ფუძის სიმაღლე კი — h. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



მოც: SABC წესიერი სამკუთხა პირამიდა. $SK \perp BC$, $SK=m$, $AK \perp BC$, $AK=h$, $SO \perp ABC$

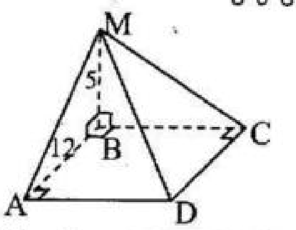
უ.გ. ა) $S_{\text{სრ}}$; ბ) $V_{\text{პირ}}$.

ამოხსნა. ა) ΔABC ტოლგვერდაა, O მისი ცენტრია. ამიტომ $\frac{\sqrt{3}BC}{2}=h \Rightarrow BC=\frac{2h}{\sqrt{3}}$; $S_{\text{ფ}}=S_{\Delta ABC}=\frac{(BC)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4h^2\sqrt{3}}{3\cdot 4}=\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$, ხოლო $P_{\Delta ABC}=3BC=\frac{6h}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}h$. მაშინ $S_{\text{გვ}}=\frac{1}{2}P_{\text{ფ}}\cdot m=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}hm=\sqrt{3}hm$, საიდანაც $S_{\text{სრ}}=S_{\text{ფ}}+S_{\text{გვ}}=\frac{h^2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}hm$.

ბ) $V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{\text{ფ}}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2\sqrt{3}}{3}\cdot SO$. რადგან $OK=\frac{1}{3}AK=\frac{h}{3}$, ამიტომ ΔSOK-ში $SO=\sqrt{SK^2-OK^2}=\sqrt{m^2-\frac{h^2}{9}}$. მაშინ $V_{SABCD}=\frac{h^2}{9}\sqrt{3m^2-\frac{h^2}{3}}$.

პასუხი: $S_{\text{სრ}}=\frac{h^2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}hm$; $V_{\text{პირ}}=\frac{h^2}{9}\sqrt{3m^2-\frac{h^2}{3}}$.

ამოცანა 3. მოცემულია MABCD პირამიდა. ABCD კვადრატია, $AB=12$, $MBA \perp ABCD$, $MBC \perp ABCD$, $MB=5$. გავიგოთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



მოც: MABCD პირამიდა. ABCD კვადრატია, $AB=12$, $MBA \perp ABCD$, $MBC \perp ABC$, $MB=5$

უ.გ. $S_{\text{სრ}}$, $V_{\text{პირ}}$.

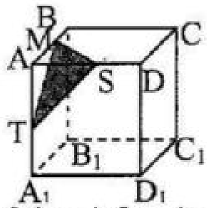
ამოხსნა. რადგან $MBA \perp ABCD$, $MBC \perp ABCD$, მაშინ $MB \perp ABCD$. MB პირამიდის სიმაღლეა და სამი მართობის თეორემის ძალით $MA \perp AD$ და $MC \perp CD$. $S_{\text{ფ}}=AB^2=12^2=144$; $S_{\text{გვ}}=S_{MBA}+S_{MBC}+S_{MAD}+S_{MDC}$. ოთხივე სამკუთხედი მართკუთხაა. მაშინ

$S_{\text{გვ}}=\frac{2\cdot 12\cdot 5}{2}+\frac{2\cdot 12\sqrt{5^2+12^2}}{2}=60+12\cdot 13=60+156=216$. მაშინ

$S_{\text{სრ}}=S_{\text{ფ}}+S_{\text{გვ}}=144+216=360$. $V_{\text{პირ}}=\frac{1}{3}S_{\text{ფ}}\cdot MB=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot 5=240$.

პასუხი: $S_{\text{სრ}}=360$; $V_{\text{პირ}}=240$

ამოცანა 4. კუბის მკვეთი სიბრტყე ერთი წვეროდან გამოსულ სამ წიბოს კვეთს წერტილებში, რომელთა დაშორებანი მოცემული წვეროდან შეადგენს კუბის წიბოს p, q და r ნაწილებს. იპოვეთ კვეთით ჩამოჭრილი სამკუთხა პირამიდისა და კუბის მოცულობათა ფარდობა.



მოც: კუბი. $AM:AB=p$, $AS:AD=q$, $AT:AA_1=r$

უ.გ. $V_{AMST}:V_{\text{კუბი}}$.

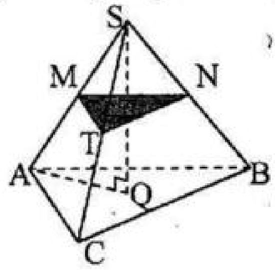
ამოხსნა. კვეთით ჩამოჭრილ სამკუთხა პირამიდაში სამი წახნაგი წყვილ-წყვილად ურთიერთმართობულია: $MAT \perp MAS$, $MAT \perp TAS$, $MAS \perp TAS$. თუ ფუძედ ავირჩევთ ერთ-ერთ მათგანს, მაგალითად, MAT-ს, მაშინ პირამიდის წვერო იქნება S. პირამიდის სიმაღლეა AS და პირამიდის ფუძე კი მართკუთხა MAT სამკუთხედია. აღვნიშნოთ $AB=a$. მაშინ $AM=pa$, $AS=qa$, $AT=ra$. ასევე,

$$S_{MAT}=\frac{AM\cdot AT}{2}=\frac{pa\cdot ra}{2}=\frac{pra^2}{2};\ V_{SMAT}=\frac{1}{3}S_{MAT}\cdot AS=\frac{1}{6}prqa^3=V_{AMST}.$$

კუბის მოცულობაა a^3. მაშინ საძიებელი სიდიდეა $\frac{1}{6}prqa^3:a^3=\frac{1}{6}prq$.

პასუხი: $V_{AMST}:V_{\text{კუბი}}=\frac{1}{6}prq$.

ამოცანა 5. სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. იპოვეთ წვეროდან კვეთით მოჭრილი პირამიდისა და მოცემული პირამიდის მოცულობათა ფარდობა.



მოც: SABC სამკუთხა პირამიდა.

$MNT \parallel ABC$, $SQ \perp ABC$, $SP=\frac{1}{2}SQ$.

უ.გ. $V_{SMNT}:V_{SABC}$.

ამოხსნა. $\Delta SMP \sim \Delta SAQ$, $\Delta MNT \sim \Delta ABC$, $\frac{SP}{SQ}=\frac{1}{2}=\frac{MP}{AQ}=\frac{MT}{AC}$;

$$\frac{S_{MNT}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}.\ \text{მაშინ}\ \frac{V_{SMNT}}{V_{SABC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{MNT}\cdot SP}{\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SQ}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

პასუხი: $V_{SMNT}:V_{SABC}=1:8$.