§ 17. კომბინატორიკა

კომბინატორიკა მათემატიკის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან სხვადასხვა კომბინაციების შედგენისა და მათი რაოდენობის დადგენის წესებს. მათემატიკის ეს დარგი ფართოდ გამოიყენება ალბათობის თეორიაში, რიცხვთა თეორიაში, მათემატიკური ლოგიკაში და სხვა მეცნიერებებში.

მოვიყვანოთ კომბინატორიკის 2 ძირითადი წესი, რომელთა გამოყენებით ამოვხსნით კომბინატორიკის ამოცანებს.

I. შეკრების წესი. ვთქვათ A სიმრავლე სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან შედგება. A-ს ელემენტების რაოდენობა აღვნიშნოთ $n(A)$-თი.

მაგალითი.

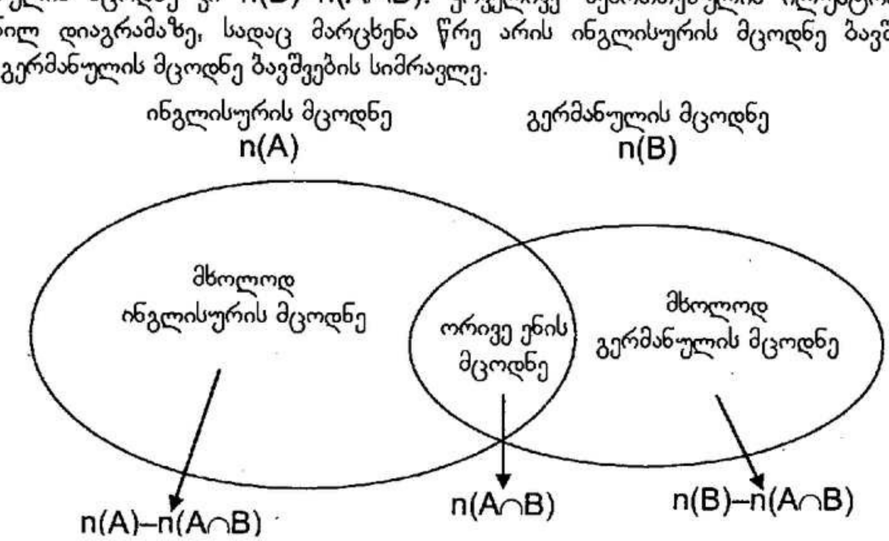
ა) A={ქართული ანბანის ასოები}, $n(A)=33$;
ბ) A={ლათინური ანბანის ასოები}, $n(A)=26$;
გ) A={9-ის გამყოფები}, $n(A)=3$;
დ) A={$x^2+4=0$ განტოლების ნამდვილი ამონახსნები}, $n(A)=0$.

განვიხილოთ ორი ისეთი A და B სიმრავლე, რომელთა თანაკვეთაც ცარიელია, $A\cap B=\varnothing$. მაგალითად, კლასში გოგონების სიმრავლე იყოს A, ხოლო ბიჭების B. ამ ორი სიმრავლის გაერთიანება $A\cup B$ გვაძლევს კლასის მოსწავლეების სიმრავლეს. ცხადია, რომ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

საზოგადოდ, თუ არსებობს რაიმე a ობიექტის შერჩევათა k შესაძლებლობა (a-ს ვირჩევთ A სიმრავლიდან, რომლის ელემენტების რაოდენობაა k) და b ობიექტის შერჩევათა l შესაძლებლობა (b-ს ვირჩევთ B-დან, $n(B)=l$), ამასთან a და b ობიექტები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ "a, ან b" ობიექტის შერჩევათა რაოდენობა იქნება $k+l$. სიმრავლეთა ენაზე: თუ $A\cap B=\varnothing$, მაშინ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$. ამ წესს უწოდებენ ***შეკრების წესს***.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $A\cap B\neq\varnothing$. დავადგინოთ $n(A\cup B)$-ს გამოსათვლელი ფორმულა.

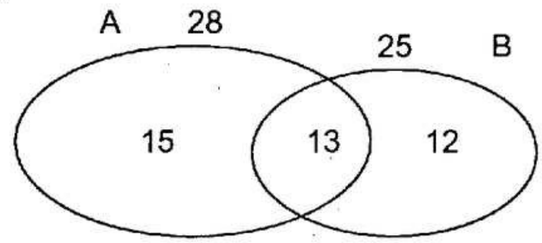
ვთქვათ კლასში ყველა მოსწავლემ იცის ერთი უცხო ენა მაინც (ინგლისური ან გერმანული). ინგლისური ენის მცოდნე ბავშვების სიმრავლე აღვნიშნოთ A-თი, გერმანული ენის მცოდნე ბავშვებისა კი B-თი. ცხადია, რომ კლასის ბავშვების სიმრავლეა $A\cup B$. ინგლისური ენის მცოდნე ბავშვების რაოდენობის $n(A)$-ს დასადგენად, ვითვლით შესაბამის კითხვაზე დადებითად მოპასუხე ბავშვების რაოდენობას. ანალოგიურად ვითვლით $n(B)$-ს. ბავშვი, რომელიც ფლობს როგორც ინგლისურს, ასევე გერმანულს, ორჯერ გვიპასუხებს კითხვაზე დადებითად. თუ ასეთი ბავშვი არ არის კლასში, ეს ნიშნავს $A\cap B=\varnothing$. მაშინ, როგორც ზემოთ დავადგინეთ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$, ხოლო თუ ასეთი ბავშვები არიან კლასში, ეს ნიშნავს $A\cap B\neq\varnothing$, მათი რაოდენობა იქნება $n(A\cap B)$. მარტო ინგლისურის მცოდნე ბავშვების რაოდენობა იქნება $n(A)-n(A\cap B)$, მარტო გერმანულის მცოდნე კი $n(B)-n(A\cap B)$. ყოველივე ზემოთთქმულის ილუსტრაცია მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ დიაგრამაზე, სადაც მარცხენა წრე არის ინგლისურის მცოდნე ბავშვების სიმრავლე, მარჯვენა კი — გერმანულის მცოდნე ბავშვების სიმრავლე.



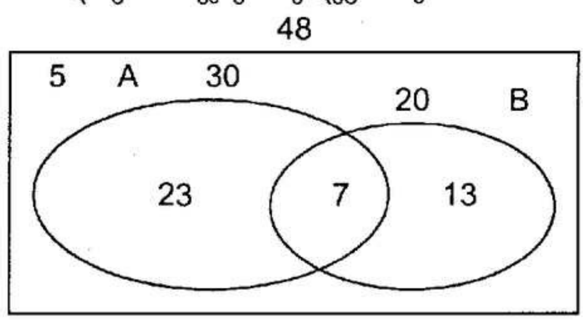
ცხადია, რომ

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B).$$

მაგალითი. კლასში ყველა მოსწავლემ იცის ერთი უცხო ენა მაინც. კლასში სულ 30 მოსწავლეა. რამდენ მოსწავლემ იცის ორივე ენა, თუ ინგლისურის მცოდნე მოსწავლეების რაოდენობაა 15, გერმანულის კი 15?
ამოხსნა. $n(A)=15$, $n(B)=15$, $n(A \cup B)=30$, ე.ი. $n(A \cap B)=15+15-30=0$.
მაგალითი. კლასში ყველა მოსწავლემ იცის ერთი უცხო ენა მაინც. კლასში სულ 40 მოსწავლე ინგლისურის მცოდნე მოსწავლეთა რაოდენობაა 28, გერმანულის კი 25. რამდენმა მოსწავლემ იცის ორი ენა? რამდენმა მოსწავლემ იცის მარტო ინგლისური ენა? რამდენმა მოსწავლემ იცის მარტო გერმანული ენა
ამოხსნა. $n(A)=28$, $n(B)=25$, $n(A \cup B)=40$, ვისარგებლოთ ფორმულით, $n(A \cup B)=n(A)+n(B)$ $n(A \cap B)$. $n(A \cap B)=13$. ე.ი. ორივე ენა იცის 13 მოსწავლემ. მარტო ინგლისური იცის $n(A)$ $n(A \cap B)=28-13=15$. მარტო გერმანული იცის $n(B)-n(A \cap B)=25-13=12$. ამოცანის შესაბამ დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე:

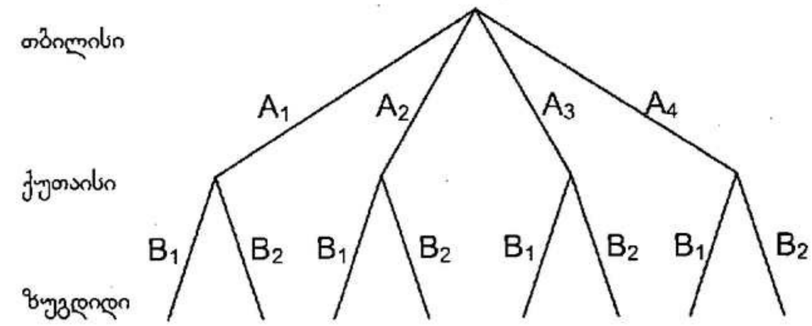


მაგალითი. ვთქვათ კლასში 5 მოსწავლემ არ იცის არც ერთი უცხო ენა. კლასში სულ 48 მოსწავლე ინგლისურის მცოდნე მოსწავლეების რაოდენობაა 30, გერმანულის კი 20. რამდენმა მოსწავლემ იცის ორი ენა? რამდენმა მოსწავლემ იცის მარტო ინგლისური ენა? რამდენმა მოსწავლემ იცის მარტო გერმანული ენა
ამოხსნა. $n(A \cup B)=48-5=43$, $n(A)=30$, $n(B)=20$, $n(A \cap B)=7$. აქედან $n(A)-n(A \cap B)=23$ და $n(B)$ $n(A \cap B)=13$. ამოცანის შესაბამის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე:



ამ ნახაზზე გარეთა მართკუთხედი აღნიშნავს მთლიანი კლასის ბავშვების სიმრავლეს. მართკუთხედი დაშტრიხული ნაწილია არცერთი ენის მცოდნე ბავშვები, რომელთა რაოდენობაა 5.

II. გამრავლების წესი. განვიხილოთ ამოცანა: თბილისიდან ქუთაისში ჩასვლა შეიძლება მატარებლი (A_1), თვითმფრინავით (A_2), ავტობუსით (A_3) ან სამარშრუტო ტაქსით (A_4). ქუთაისიდან ზუგდიდში ავტობუსით (B_1) ან მატარებლით (B_2). რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება თბილისიდან ზუგდიდშ ჩასვლა, თუ სავალდებულოა, რომ ჯერ ქუთაისში უნდა ჩავიდეთ?
ამოხსნა. რადგან თბილისიდან ქუთაისში ჩასვლის 4 საშუალებიდან თითოეულისათვის გვაქვს ქუთაისიდა ზუგდიდში ჩასვლის 2 საშუალება, ამიტომ სულ გვექნება თბილისიდან ზუგდიდში ჩასვლის 4×2 საშუალებ მოვიყვანოთ ამ ამოცანის ამოხსნის შესაბამისი "ხისებრი დიაგრამა".



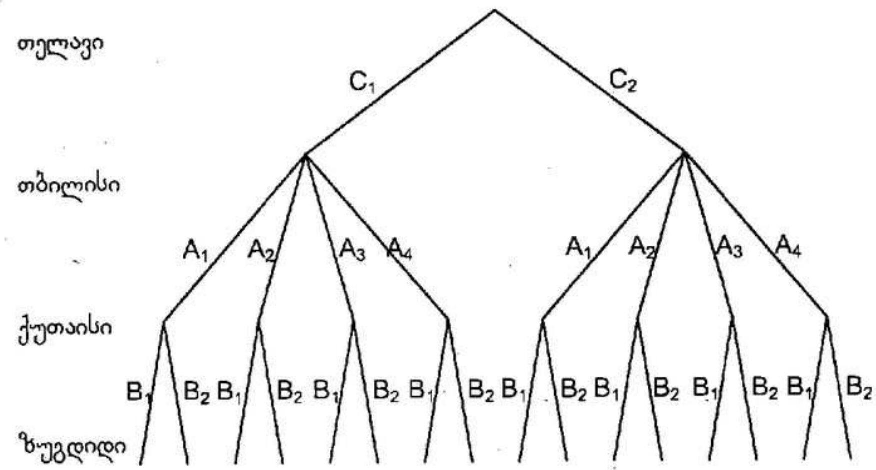
ნახაზზე მოცემულია თბილისიდან ზუგდიდში ჩასვლის ყველა შესაძლო ვარიანტი. მათი რაოდენობაა 8: A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_1, A_4B_2. მაგალითად ვარიანტი A_2B_1 ნიშნავს, რომ თბილისიდან ქუთაისამდე ვიმგზავრებთ თვითმფრინავით, ხოლო ქუთაისიდან ზუგდიდამდე ავტობუსით.

საზოგადოდ, თუ რაიმე ობიექტი შეიძლება k გზით შეირჩეს, ყოველი ასეთი შერჩევის შემდეგ კი მეორე ობიექტი l გზით შეირჩეს, მაშინ პირველი და მეორე ობიექტების თანმიმდევრობით შერჩევათა რაოდენობა იქნება $k{\cdot}l$. ამ წესს ***გამრავლების წესს*** უწოდებენ.

შეიძლება საჭირო იყოს არა წყვილების, არამედ სამეულების შერჩევა.

ამოცანა. წინა ამოცანის პირობებში დავუშვათ, რომ მგზავრი მოდის თელავიდან. თელავიდან თბილისამდე მას ჩამოსვლა შეუძლია მატარებლით (C_1) ან ავტობუსით (C_2). რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეუძლია მგზავრს ჩასვლა თელავიდან ზუგდიდში?

ამოხსნა. დავხაზოთ შესაბამისი ხისებრი დიაგრამა.



თელავიდან ზუგდიდში ჩასვლის ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობაა 16. ამოვწეროთ ეს ვარიანტები:

$C_1A_1B_1$, $C_1A_1B_2$, $C_1A_2B_1$, $C_1A_2B_2$, $C_1A_3B_1$, $C_1A_3B_2$, $C_1A_4B_1$, $C_1A_4B_2$,

$C_2A_1B_1$, $C_2A_1B_2$, $C_2A_2B_1$, $C_2A_2B_2$, $C_2A_3B_1$, $C_2A_3B_2$, $C_2A_4B_1$, $C_2A_4B_2$.

მაგალითად $C_2A_3B_2$ ნიშნავს, რომ მგზავრი თელავიდან თბილისამდე მგზავრობს ავტობუსით, თბილისიდან ქუთაისამდე ავტობუსით, ხოლო ქუთაისიდან ზუგდიდამდე მატარებლით.

გამრავლების წესი სამი ობიექტის შემთხვევაში ასე ჩამოყალიბდება: ვთქვათ თანმიმდევრულად საჭიროა სამი მოქმედების ჩატარება, თუ პირველი მოქმედება შეიძლება n_1 სხვადასხვა გზით ჩავატაროთ, თითოეული ასეთი მოქმედებისათვის მეორე მოქმედება n_2 სხვადასხვა გზით, შემდეგ — მესამე n_3 სხვადასხვა გზით, მაშინ სამივე მოქმედება ერთად

$$n_1{\cdot}n_2{\cdot}n_3$$

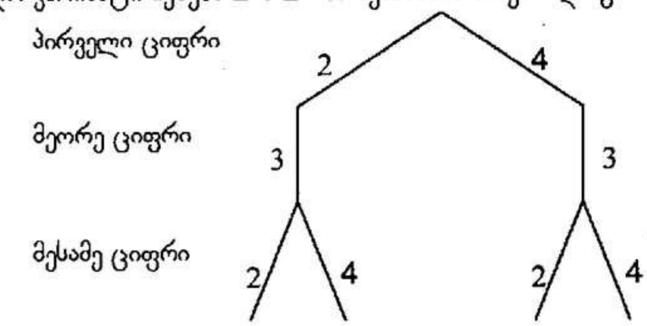
გზით შეიძლება ჩავატაროთ.

ცხადია, რომ k ობიექტის შემთხვევაში ყველა შესაძლო ვარიანტი იქნება

$$n_1{\cdot}n_2{\cdot}n_3{\cdots}n_k.$$

მაგალითი: რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებისაგან 2, 3, 4, თუ სამნიშნა რიცხვის პირველი ციფრი უნდა იყოს ლუწი, მეორე კენტი, მესამე კი ლუწი.

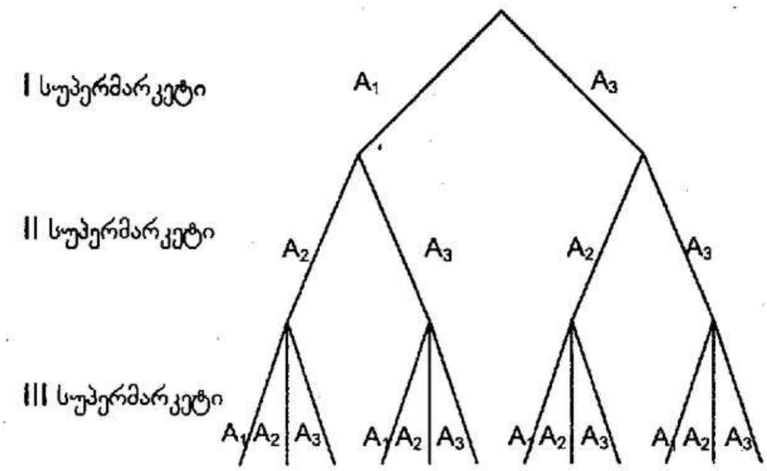
ამოხსნა. ყველა შესაძლო ვარიანტი იქნება $2\cdot1\cdot2=4$. შესაბამის ხისებრ დიაგრამას აქვს სახე:



ეს რიცხვებია: 232, 234, 432, 434.

ამოცანა. კომპანიის მენეჯერს სურს კომპანიის სამი სახის პროდუქცია (A_1, A_2, A_3), განათავსოს სა სუპერმარკეტში (B_1, B_2, B_3). მარკეტინგული კვლევით დადგენილია: 1) პირველ სუპერმარკეტში A პროდუქციაზე მოთხოვნა ძალიან დაბალია, 2) მეორე სუპერმარკეტში A_1-ზე მოთხოვნაა დაბალი, 3) მესამ სუპერმარკეტში სამივე პროდუქციაზე დიდი მოთხოვნაა. რამდენი სხვადასხვა გზით შეიძლება მენეჯერმ განალაგოს პროდუქცია სუპერმარკეტებში. ამოწერეთ ყველა შესაძლო ვარიანტი.

ამოხსნა. ვთქვათ 1) და 2) პირობების გამო მენეჯერმა გადაწყვიტა, რომ პირველ სუპერმარკეტში A პროდუქცია, ხოლო მეორე სუპერმარკეტში A_1 პროდუქცია საერთოდ არ შეიტანოს:

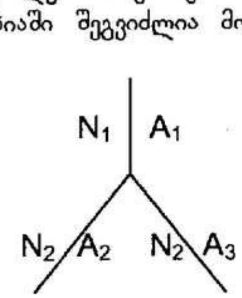


ყველა შესაძლო ვარიანტია 12: $A_1A_2A_1$, $A_1A_2A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_1$, $A_1A_3A_2$, $A_1A_3A_3$, $A_3A_2A_1$, $A_3A_2A_2$, $A_3A_2A_3$, $A_3A_3A_1$, $A_3A_3A_2$, $A_3A_3A_3$.

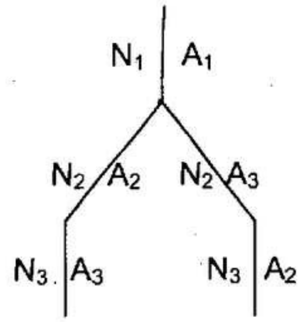
III. გადანაცვლება, წყობა, ჯუფდება.

ამოცანა 1. კომპანია აწარმოებს სამი სახის ღვინოს: საფერავს (A_1), რქაწითელს (A_2), ცოლიკაურს (A_3) რეალიზაციის მიზნით კომპანიას ღვინო შეაქვს ერთ-ერთ სავაჭრო ცენტრში, სადაც არის სამი ღვინი მაღაზია. (N_1, N_2, N_3). რამდენნაირად შეიძლება ღვინოების განთავსება მაღაზიებში, თუ ყოველ მაღაზიაშ კომპანიას შეუძლია შეიტანოს მხოლოდ ერთი სახის ღვინო?

ამოხსნა. პირველ მაღაზიაში (N_1) შეიძლება მოვათავსოთ სამი სახის ღვინიდან ერთ-ერთი. ვთქვა მოვათავსეთ საფერავი (A_1), N_2 მაღაზიაში შეგვიძლია მოვათავსოთ დარჩენილი ორიდან ერთ-ერთი რქაწითელი (A_2), ან ცოლიკაური (A_3).



დარჩენილი N_3 მაღაზიის შესავსებად დაგვრჩება მხოლოდ ერთი ვარიანტი, რადგან ორი სახის ღვინო უკვე მოთავსებულია N_1 და N_2 მაღაზიებში.

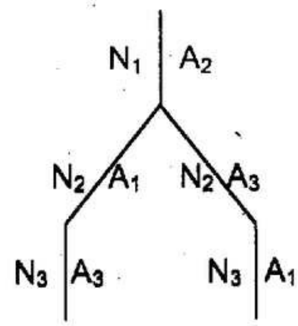


ე.ი გვაქვს სულ ორი ვარიანტი:

1) (N_1, A_1), (N_2, A_2), (N_3, A_3);

2) (N_1, A_1), (N_2, A_3), (N_3, A_2).

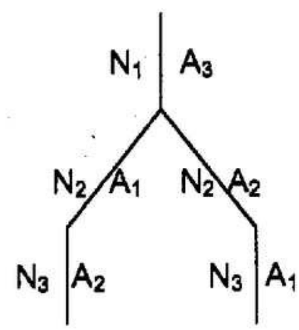
ანალოგიურად, თუ პირველ მაღაზიაში (N_1) მოვათავსებთ საფერავის (A_1) ნაცვლად რქაწითელს (A_2), კვლავ მივიღებთ ორ ვარიანტს:



1) (N_1, A_2), (N_2, A_1), (N_3, A_3);

2) (N_1, A_2), (N_2, A_3), (N_3, A_1).

დაგვრჩა კიდევ ორი ვარიანტი, თუ პირველ მაღაზიაში (N_1) მოვათავსებთ ცოლიკაურს (A_3), მივიღებთ



1) (N_1, A_3), (N_2, A_1), (N_3, A_2);

2) (N_1, A_3), (N_2, A_2), (N_3, A_1).

მაშასადამე, ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობაა 6. ამოცანაში მაღაზიების რაოდენობა იყო 3. ღვინოების რაოდენობაც 3. N_1 ადგილის დაკავების შემდეგ (3 ვარიანტი A_1, ან A_2, ან A_3) თითოეული ვარიანტისათვის N_2-ის შესავსებად გვრჩება 2 ვარიანტი, ხოლო N_3-ის შესავსებად თითოეულისათვის ერთი ვარიანტი. ე.ი. გვაქვს $3\cdot2\cdot1=6$ ვარიანტი.

პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლს ეწოდება n-ის ფაქტორიალი და აღინიშნება $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$. შევნიშნოთ, რომ მიღებულია $0!=1$.

მაგალითი. 1) $3!=1\cdot2\cdot3$,

2) $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$,

3) $\frac{7!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 = 42$,

4) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} = n$.

n ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ დალაგებას n-ელემენტიანი გადანაცვლება ეწოდება. n-ელემენტიანი გადანაცვლებათა რიცხვი აღვნიშნოთ P_n-ით. ნამრავლის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P_n = n!$$

მართლაც, რადგან ელემენტთა რაოდენობაა n, არსებობს პირველი ადგილის დაკავების n ვარიანტი. თითოეული მათგანისათვის არსებობს მეორე ადგილის დაკავების (n–1) ვარიანტი. როცა პირველი და მეორე ადგილები დაკავებულია, არსებობს მესამე ადგილის შევსების (n–2) ვარიანტი და ა.შ. ბოლო მე-n ადგილის შესავსებად დაგვრჩება ერთი ვარიანტი. ნამრავლის წესით სულ გვაქვს

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n! = P_n.$$

მაგალითი. A={a,b}, B={a,b,c}. იპოვეთ A და B სიმრავლეების ყველა შესაძლო დალაგება.

ამოხსნა. A={a,b} ორ ელემენტიანია. $P_2=2!=1 \cdot 2=2$ ე.ი. გვაქვს ორი დალაგება {a,b}, {b,a}. B={a,b,c} სამ ელემენტიანია $P_3=1 \cdot 2 \cdot 3=3!=6$. ე.ი. გვაქვს 6 დალაგება: {a,b,c}, {a,c,b}, {b,c,a}, {b,a,c}, {c,a,b}, {c,b,a}.

ამოცანა 2. კომპანიას, რომელიც აწარმოებს სამი სახის ღვინოს: საფერავი (A_1), რქაწითელი (A_2), ცოლიკაური (A_3), რეალიზაციის მიზნით ღვინო შეაქვს ერთ-ერთ სავაჭრო ცენტრში, სადაც არის ღვინის ორი მაღაზია, ამასთან ეს მაღაზიები ერთმანეთისაგან განსხვავდება პროდუქციის რეკლამირების თვალსაზრისით. ერთ-ერთი მათგანი უფრო "თვალსაჩინო" ადგილზეა მოთავსებული, მომხმარებელი უფრო ხშირად ხვდება ამ ადგილზე. რამდენნაირად შეიძლება განათავსოს კომპანიამ თავისი პროდუქცია სავაჭრო ცენტრის მაღაზიებში? (იგულისხმება, რომ ერთ მაღაზიაში შეიძლება შეიტანოს მხოლოდ ერთი სახის ღვინო).

ამოხსნა. ამოცანა 1-ისაგან განსხვავებით აქ ადგილების რაოდენობა შეზღუდულია, კერძოდ 3-ის ნაცვლად არის 2 მაღაზია. თუ მაღაზიებს კვლავ აღვნიშნავთ N_1-ით და N_2-ით, მივიღებთ შემდეგ 6 ვარიანტს:

1) (N_1, A_1), (N_2, A_2);
2) (N_1, A_2), (N_2, A_1);
3) (N_1, A_2), (N_2, A_3);
4) (N_1, A_3), (N_2, A_2);
5) (N_1, A_1), (N_2, A_3);
6) (N_1, A_3), (N_2, A_1).

რა განსხვავებაა 1 და 2 ვარიანტებს შორის? ორივე შემთხვევაში მაღაზიებში მოთავსდა საფერავი და რქაწითელი. პირველ ვარიანტში საფერავი მოთავსდა პირველ მაღაზიაში, რქაწითელი მეორე მაღაზიაში, მეორე ვარიანტში კი პირიქით: საფერავი მეორე მაღაზიაში, რქაწითელი — პირველში. პირობის თანახმად მაღაზიები პროდუქციის რეკლამირების თვალსაზრისით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. თუ კომპანიას სურს გაყიდოს საფერავი მეტი რაოდენობით, ვიდრე რქაწითელი, აირჩევს ღვინოების განლაგების პირველ ვარიანტს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მეორე ვარიანტს.

ანალოგიური შინაარსი აქვს ზემოთ მოყვანილ ექვსივე ვარიანტს. მაშასადამე, ზოგჯერ მნიშვნელოვანია გარკვეული სიმრავლიდან ამორჩეულ ელემენტებს როგორ დავალაგებთ.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს წყობა ეწოდება. წყობების რაოდენობა აღვნიშნოთ A_n^m-ით. სამართლიანია ფორმულა

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

შევნიშნოთ, რომ $A_n^0 = 1$, $A_n^n = n!$.

ამოცანა 2-ში ამოხსნაა 3 ელემენტიანი სიმრავლიდან 2 ელემენტიანი წყობების რაოდენობის პოვნა.

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

ამოცანა 3. წინა ამოცანის პირობებში დავუშვათ, რომ მაღაზიები პროდუქციის რეკლამირების თვალსაზრისით არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. რამდენნაირად შეიძლება ღვინოების განთავსება მაღაზიებში?

ამოხსნა. ამ ამოცანაში მნიშვნელობა აღარ აქვს, თუ რომელ ღვინოს რომელ მაღაზიაში მოვათავსებთ, ამიტომ აზრი აღარ აქვს ამორჩეული ღვინოების დალაგებას. სულ არსებობს 3 ვარიანტი.

1) (N_1, A_1), (N_2, A_2);
2) (N_1, A_1), (N_2, A_3);
3) (N_1, A_2), (N_2, A_3).

n-ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m-ელემენტიან ქვესიმრავლეს ჯუფდება ეწოდება. მათი რაოდენობა აღვნიშნოთ C_n^m-ით. სამართლიანია ფორმულა:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

შევნიშნოთ, რომ $C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1$.

კავშირი C_n^m-სა და A_n^m-ს შორის მოიცემა ფორმულით:

$$A_n^m = m!\cdot C_n^m.$$

ყოველი m ელემენტიანი ჯუფდებისათვის, დარჩენილი (n–m) ელემენტი ქმნის (n–m) ელემენტიან ჯუფდებას. მაგალითად, თუ A={a;b;c;d}:

m=1, n–m=3
{a} – {b;c;d}
{b} – {a;c;d}
{c} – {a;b;d}
{d} – {a;b;c}

ე.ი. A-ს ერთელემენტიანი და სამელემენტიანი ჯუფთებათა რაოდენობები ტოლია. საზოგადოდ:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

როგორც წესი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $\varnothing$ და თვითონ A, A სიმრავლის ქვესიმრავლეებად ითვლება. n-ელემენტიანი სიმრავლისათვის არსებობს ერთადერთი n-ელემენტიანი ჯუფდება. ეს ჯუფდებაა თვითონ A სიმრავლე: $C_n^n = 1$. ცარიელი სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც n-ელემენტიანი სიმრავლის 0-ელემენტიანი ქვესიმრავლე: $C_n^0 = 1$.

სამართლიანია ფორმულა

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n;$$

ანუ, n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n.

მაგალითი. მოცემულია B={a,b,c,}. იპოვეთ A_3^2, C_3^2.

ამოხსნა. სამელემენტიანი B სიმრავლის 2 ელემენტიანი წყობები იქნება

{a,b}, {b,a}, {a,c}, {c,a}, {b,c}, {c,b},

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6.$$

სამელემენტიანი A სიმრავლის 2 ელემენტიანი ჯუფდებები იქნება

{a,b}, {a,c}, {b,c},

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3.$$

მაგალითი. 3 ბავშვი საკონტროლო სამუშაოს შესასრულებლად შეგვიძლია დავსვათ საკლასო ოთახში მოთავსებულ 5 მერხზე. მერხებზე მათ დახვდებათ საკონტროლო სამუშაოს ბილეთები. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ ა) ყველა მერხზე ერთი და იგივე ბილეთია; ბ) მერხებზე დევს განსხვავებული ვარიანტის ბილეთები.

ამოხსნა. ა) შემთხვევაში ბავშვს რომელ მერხზე დავსვამთ არა აქვს მნიშვნელობა, რადგან ყველა მერხზე ერთი და იგივე ბილეთია, ე.ი. სულ არსებობს C_5^3 ვარიანტი:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 10\,.$$

ბ) შემთხვევაში მნიშვნელობა აქვს ბავშვებს რომელ მერხზე დავსვამთ, ამიტომ უნდა დავითვალოთ 5-დან 3-ელემენტიანი წყობების რაოდენობა:

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 60\,.$$