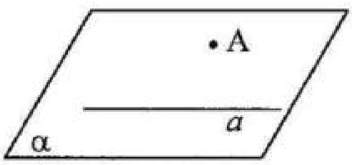
§13. სტერეომეტრიის საწყისები

1. ***წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში.*** წერტილი, წრფე და სიბრტყე წარმოადგენენ ძირითად ობიექტებს, რომლებსაც სტერეომეტრია შეისწავლის. აღვწეროთ ის ფუნდამენტური კავშირები, რაც არსებობს მათ შორის.

თუ მოცემულია ორი განსხვავებული წერტილი (წერტილებს კვლავ დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ), მაშინ არსებობს წრფე, რომელსაც ეკუთვნის ორივე წერტილი და ასეთი წრფე ერთადერთია.

თუ მოცემულია ერთ წრფეზე არამდებარე სამი განსხვავებული წერტილი, მაშინ არსებობს სიბრტყე (სიბრტყეებს პატარა ბერძნული ასოებით აღვნიშნავთ, მაგალითად, α, β და ა.შ.), რომელსაც ეკუთვნის სამივე წერტილი და ასეთი სიბრტყე ერთადერთია.



თუ მოცემულია (a) წრფე და ამ წრფის გარეთ მდებარე (A) წერტილი, მაშინ არსებობს (α) სიბრტყე, რომელიც მოიცავს წრფესაც და წერტილსაც და ასეთი სიბრტყე ერთადერთია. ამ დროს ამბობენ, რომ (α) სიბრტყე გადებულია (a) წრფესა და (A) წერტილზე.

თუ ორი წრფე იკვეთება (ე.ი. აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი), მაშინ არსებობს სიბრტყე, რომელიც შეიცავს ამ წრფეებს და ასეთი სიბრტყე ერთადერთია, ე.ი. თანამკვეთ წრფეებზეც არის შესაძლებელი სიბრტყის გავლება.

ორ წრფეს (სიბრტყეს) ვუწოდებთ განსხვავებულს, თუ მათი თანაკვეთა (საერთო ნაწილი) განსხვავდება თითოეული მათგანისგან.

თუ ორ განსხვავებულ სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვთ, მაშინ მათი თანაკვეთა არის წრფე. ამ დროს ამბობენ, რომ სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს.

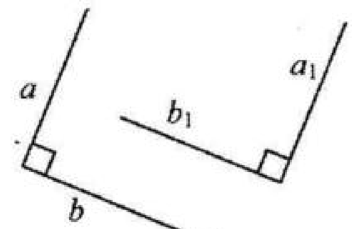
თუ წრფის ორი წერტილი რომელიმე სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფე მთლიანად ამ სიბრტყეს ეკუთვნის. აქედან გამომდინარეობს, რომ სიბრტყე და ის წრფე, რომელიც მას არ ეკუთვნის (მთლიანად), ან არ კვეთს ერთმანეთს, ან კვეთს ერთ წერტილში.

2. ***წრფეთა ურთიერთგანლაგება სივრცეში.*** ვამბობთ, რომ ორი ან რამდენიმე წრფე ***ერთ სიბრტყეში ძევს***, თუ ეს წრფეები ერთდროულად ეკუთვნის რომელიმე სიბრტყეს.

თუ ორი წრფე ერთ სიბრტყეში არ ძევს, მაშინ მათ აცდენილი წრფეები ეწოდებათ.

თუ ორი წრფე ერთ სიბრტყეში ძევს და ერთმანეთს არ კვეთს, მაშინ მათ პარალელური (ან ურთიერთპარალელური) წრფეები ეწოდებათ. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე, ხოლო თუ ორი წრფე ცალ-ცალკე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია. უნდა შევნიშნოთ, რომ სამი, წყვილ-წყვილად ურთიერთპარალელური წრფე ყოველთვის არ ძევს ერთ სიბრტყეში.

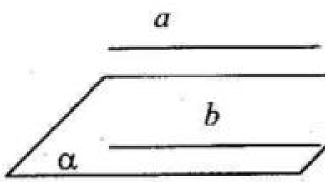
ორ წრფეს მართობული (ან ურთიერთმართობული) ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს მართი კუთხით კვეთენ. ურთიერთმართობული ($a \perp b$) წრფეების პარალელური ($a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$) ურთიერთგადამკვეთი (a_1 და b_1) წრფეები ურთიერთმართობულია (ე.ი. $a_1 \perp b_1$, ნახ.1).



ნახ.1.

3. ***წრფისა და სიბრტყის პარალელობა და მართობულობა. წრფეს და სიბრტყეს პარალელური ეწოდებათ, თუ მათ არ აქვთ საერთო წერტილი (ანუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს). წრფისა და სიბრტყის პარალელობის დასადგენად გამოიყენება შემდეგი ნიშანი:***

თუ (a) წრფე, რომელიც (α) სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ამ სიბრტყეზე რომელიმე (b) წრფის პარალელურია ($a \| b$), მაშინ ის თვით (α) სიბრტყის პარალელურია (ე.ი. $a \| \alpha$, ნახ.2).



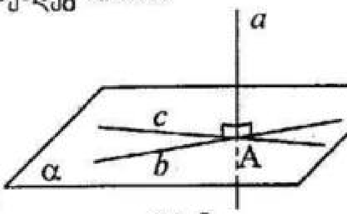
ნახ.2.

განმარტების თანახმად, კუთხე წრფესა და მის პარალელური სიბრტყეს შორის ითვლება 0°-ის ტოლად. ზოგადად, კუთხე განიმარტება ნებისმიერ წრფესა და ნებისმიერ სიბრტყეს შორის და მისი გრადუსული ზომა იცვლება 0°-სა და 90°-ს შორის.

როდესაც წრფე არ ეკუთვნის მოცემულ სიბრტყეს და არც მისი პარალელურია, მაშინ მათ აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი და ეწოდებათ ***გადამკვეთი (ურთიერთგადამკვეთი).***

სიბრტყის გადამკვეთ წრფეს ამ სიბრტყის მართობული ეწოდება, თუ იგი გადაკვეთის წერტილზე გამავალი და ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის მართობულია. პრაქტიკაში, წრფის და სიბრტყის მართობულობის დასადგენად ვიყენებთ შემდეგ ნიშანს:

თუ (α) სიბრტყის გადამკვეთი (a) წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთის (A) წერტილზე გამავალი ორი განსხვავებული (b და c) წრფის მართობულია ($a \perp b$ და $a \perp c$), მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია ($a \perp \alpha$, ნახ.3). ცხადია, კუთხე ურთიერთმართობულ წრფესა და სიბრტყეს შორის ითვლება 90°-ის ტოლად.

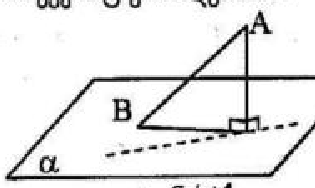


ნახ.3.

თუ ორი ურთიერთპარალელური ($a \| b$) წრფიდან ერთ-ერთი (α) სიბრტყის მართობულია ($a \perp \alpha$), მაშინ მეორე წრფეც ამ სიბრტყის მართობულია ($b \perp \alpha$), ხოლო თუ ორი წრფე ერთი და იგივე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ეს წრფეები ურთიერთპარალელურია.

4. *მანძილი წერტილიდან წრფემდე. სამი მართობის თეორემა.* სივრცეში ავიღოთ ორი განსხვავებული A და B წერტილი და გავავლოთ მათზე a წრფე. a წრფის წერტილები, რომლებიც მოთავსებულია A და B წერტილებს შორის (მათი ჩათვლით), ქმნიან AB ***მონაკვეთს.*** რადგან A და B წერტილებზე ერთადერთი წრფე გაივლება, ამიტომ მათი შემაერთებელი AB მონაკვეთიც ერთადერთია.

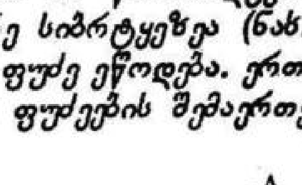
მოცემული წერტილიდან მოცემულ სიბრტყემდე დაშვებული მართობი ეწოდება იმ მონაკვეთს, რომელიც მოცემულ წერტილს სიბრტყის ერთ-ერთ წერტილთან აერთებს და ძევს ამ სიბრტყის მართობულ წრფეზე. მართობის იმ ბოლოს, რომელიც სიბრტყეში ძევს, მართობის ფუძე ეწოდება. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი ეწოდება ამ წერტილიდან სიბრტყემდე დაშვებული მართობის სიგრძეს.



ნახ!4.

მოცემული წერტილიდან მოცემული სიბრტყისადმი გავლებული დახრილი ეწოდება ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც ამ სიბრტყისადმი მართობს არ წარმოადგენს და რომლის ერთი ბოლო მოცემულ წერტილშია, ხოლო მეორე სიბრტყეზეა (ნახ. 4). დახრილის იმ ბოლოს, რომელიც სიბრტყეში ძევს, დახრილის ფუძე ეწოდება. ერთი და იგივე წერტილიდან გავლებული მართობისა და დახრილის ფუძეების შემაერთებელ მონაკვეთს დახრილის გეგმილი ეწოდება.

თეორემა /სამი მართობის/. თუ (α) სიბრტყეზე მდებარე რაიმე (c) წრფე (ნახ.5) (AC) დახრილის (C) ფუძეზე გადის და ამ დახრილის გეგმილის მართობულია ($c \perp BC$), მაშინ იგი დახრილის მართობულიცაა ($c \perp AC$).



ნახ.5.

პირიქით, თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის მართობულია, მაშინ ის დახრილის გეგმილის მართობულიცაა.

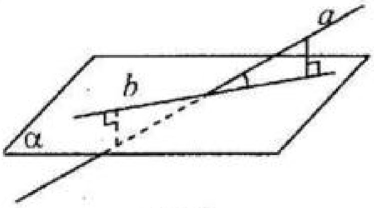
5. წერტილის, მონაკვეთისა და წრფის ორთოგონალური დაგეგმილება სიბრტყეზე. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. ვთქვათ, A წერტილი არ ეკუთვნის α სიბრტყეს. განმარტების თანახმად, A წერტილის ორთოგონალური გეგმილი α სიბრტყეზე ეწოდება A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეს. α სიბრტყის ნებისმიერი B წერტილის ორთოგონალური გეგმილს α სიბრტყეზე თვითონ B წარმოადგენს.

ვთქვათ, ახლა მოცემულია a წრფე და α სიბრტყე. სიმრავლე, რომელიც მიიღება α სიბრტყეში a წრფის წერტილების ორთოგონალური გეგმილების გაერთიანებით, წარმოადგენს a-ს ორთოგონალურ გეგმილს α-ზე და არის წრფე (თუ a არ არის α-ს მართობული) ან წერტილი (როცა $a \perp \alpha$).

ანალოგიურად, თუ მოცემულია AB მონაკვეთი და α სიბრტყე, მაშინ AB-ს ორთოგონალური გეგმილი α-ზე არის მონაკვეთი (თუ AB არ ძევს α-ს მართობულ წრფეზე) ან წერტილი (საწინააღმდეგო შემთხვევაში). კერძოდ, დახრილის გეგმილი წარმოადგენს ამ დახრილის ორთოგონალურ გეგმილს სიბრტყეზე.

სივრცეში ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე ქმნის 8 კუთხეს. მათგან უმცირესის გრადუსულ ზომას ***წრფეებს შორის კუთხე*** ეწოდება. პარალელურ წრფეებს შორის კუთხე 0°-ად ითვლება, მართობულებს შორის კი 90°-ად. სხვა შემთხვევაში კუთხე იცვლება 0°-სა და 90°-ს შორის.

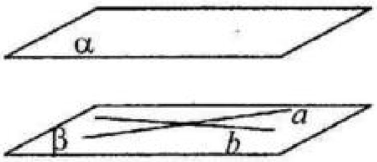
განვიხილოთ ურთიერთგადამკვეთი a წრფე და α სიბრტყე. ვთქვათ, a არაა α-ს მართობული და b რის a-ს ორთოგონალური გეგმილი α-ზე. მაშინ კუთხედ a წრფესა და α სიბრტყეს შორის, განმარტების თანახმად, მიღებულია a და b წრფეებს შორის კუთხე (ნახ.6). კერძოდ, დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე არის კუთხე დახრილსა და მის გეგმილს შორის.



ნახ.6.

6. სიბრტყეთა პარალელობა. ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს. სიბრტყეთა პარალელობის დასადგენად გამოიყენება შემდეგი ნიშანი:

ორი სიბრტყე პარალელურია, თუ ერთი მათგანი (მაგალითად, α) მეორე (β) სიბრტყეში მდებარე ორი (a და b) ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია ($\alpha \| a$, $\alpha \| b$). თუ წერტილი მოცემულ სიბრტყეში არ მდებარეობს, მაშინ ამ წერტილიდან შესაძლებელია მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

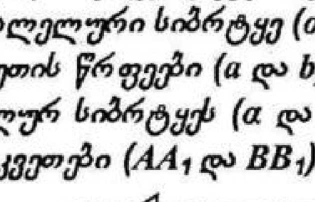


ნახ.7.

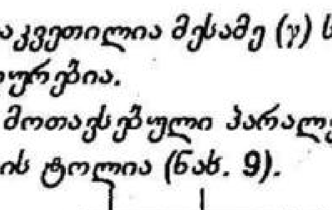
ხშირად, სასრგებლოა შემდეგი ფაქტების ცოდნა:

1) თუ ორი პარალელური სიბრტყე (α და β) გადაკვეთილია მესამე (γ) სიბრტყით (ნახ.8), მაშინ გადაკვეთის წრფეები (a და b) პარალელურებია.

2) ორ პარალელურ სიბრტყეს (α და β) შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების (a და b) მონაკვეთები (AA_1 და BB_1) ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 9).



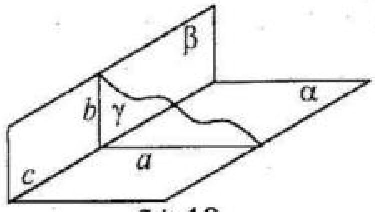
ნახ.8.



ნახ.9.

7. *სიბრტყეთა მართობულობა.*

ორ (α და β) ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეს მართობული ან (ურთიერთმართობული) ეწოდება, თუ მესამე (γ) სიბრტყე, რომელიც (α და β) სიბრტყეთა გადაკვეთის (c) წრფის მართობულია, ამ სიბრტყეებს კვეთს ურთიერთმართობულ (a და b) წრფეებზე.



ნახ.10.

სიბრტყეთა ურთიერთმართობულობის დასადგენად ხშირად გამოიყენება შემდეგი ნიშანი:

თუ ერთი სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.

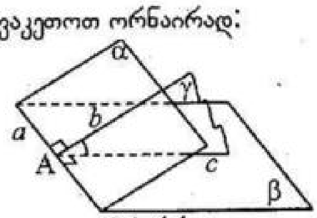
სამართლიანია აგრეთვე, ბოლო დებულების შებრუნებული დებულებაც:
თუ ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთში გავავლებთ მათი გადაკვეთის წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობული იქნება.

8. *ორწახნაგა კუთხე და მისი ზომა. კუთხე სიბრტყეებს შორის.*

როგორც ვიცით, ორი წრფის გადაკვეთისას მიიღება 8 კუთხე. ანალოგიურად, ორი სიბრტყის გადაკვეთისას მიიღება 8 ***ორწახნაგა კუთხე*** ანუ საერთო წრფით შემოსაზღვრული ორი ნახევარსიბრტყით შექმნილი ფიგურა. ორწახნაგა კუთხის შემომსაზღვრელ ნახევარსიბრტყეებს ***წახნაგები*** ეწოდებათ, ხოლო წახნაგების საერთო წრფეს – ***ორწახნაგა კუთხის წიბო.***

ორწახნაგა კუთხის გასაზომად უნდა ავაგოთ ხაზოვანი კუთხე. ეს შეიძლება გავაკეთოთ ორნაირად:

1) ორწახნაგა კუთხის a წიბოს რომელიმე A წერტილზე გავავლოთ a-ს მართობული γ სიბრტყე. γ სიბრტყე წახნაგებს კვეთს b და c სხივებზე (ნახ.11). γ სიბრტყეში ეს b და c სხივები ქმნიან კუთხეს, რომელსაც ორწახნაგა კუთხის



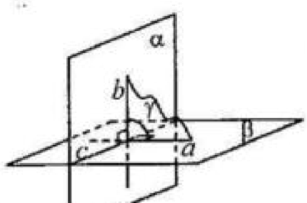
ნახ.11.

ხაზოვანი კუთხე ეწოდება. ორწახნაგა კუთხის ზომად ვიღებთ მისი შესაბამისი ხაზოვანი კუთხის ზომას. არსებითია, რომ ორწახნაგა კუთხის ზომა არაა დამოკიდებული ხაზოვანი კუთხის არჩევაზე.

2) შეგვიძლია ნებისმიერად ავარჩიოთ a წიბოს წერტილი A და A-დან გავავლოთ a წრფის მართობული ორი სხივი, ერთი α წახნაგში, მეორე–β წახნაგში. ეს ორი სხივი ქმნის ხაზოვან კუთხეს, რომლის ზომაც, განმარტების თანახმად, არის ორწახნაგა კუთხის ზომა (და არაა დამოკიდებული A წერტილის არჩევაზე).

9. *კუთხე ორ სიბრტყეს შორის.*

პარალელურ სიბრტყეებს შორის კუთხე ითვლება 0°-ის ტოლად. ვთქვათ მოცემული (α და β) სიბრტყეები ერთმანეთს კვეთს. გავავლოთ მათი გადაკვეთის (c) წრფის მართობული რაიმე (γ) სიბრტყე. ეს სიბრტყე მოცემულ სიბრტყეებს (a და b) ორ წრფეზე კვეთს. ამ წრფეებს შორის კუთხე ეწოდება **კუთხეს ორ მოცემულ სიბრყეს** შორის.

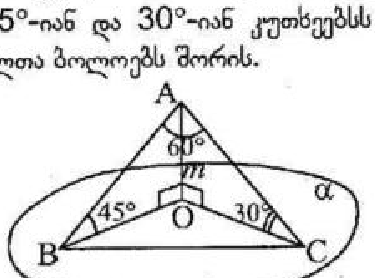


ნახ.12.

შევნიშნოთ, რომ ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არ არის დამოკიდებული მკვეთი სიბრტყის შერჩევაზე.

განვიხილოთ რამდენიმე ტიპიური ამოცანის ამოხსნა.

ამოცანა 1. სიბრტყიდან m მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან 45°-იან და 30°-იან კუთხეებს ადგენენ, ხოლო ერთმანეთთან კი–60°-იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ბოლოებს შორის.



მოც: $AO \perp \alpha$, $AO=m$, $\angle ABO=45°$, $\angle ACO=30°$, $\angle BAC=60°$.

უ.გ. BC.

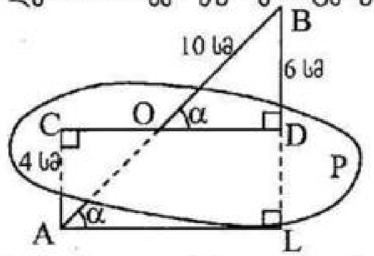
ამოხსნა. AB და AC დახრილები გამოვსახოთ m-ით, ΔABO მართკუთხაა: $AB=\dfrac{m}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}\,m$. ასევე, ΔACO-ში $AC=\dfrac{m}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2m}{\sqrt{3}}$. განვიხილოთ ΔABC, რომელშიც $AB=\sqrt{2}\,m$, $AC=\dfrac{2m}{\sqrt{3}}$ და $\angle BAC=60^\circ$. თუ ვისარგებლებთ კოსინუსების თეორემით, მაშინ BC-ს გამოვსახავთ m-ით:

$$BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos 60^\circ=2m+\frac{4m^2}{3}-2\cdot\sqrt{2}\,m\cdot\frac{2m}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{10m^2}{3}-\frac{2\sqrt{2}m^2}{\sqrt{3}}=\frac{10m^2-2\sqrt{6}m^2}{3}=\frac{10-2\sqrt{6}}{3}m^2,$$ ე.ი. $BC=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{6}}{3}}m$.

პასუხი: $BC=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{6}}{3}}m$.

ამოცანა 2. 20 სმ სიგრძის მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 4 სმ და 6 სმ მანძილებით. იპოვეთ კუთხე მოცემულ მონაკვეთსა და სიბრტყეს შორის.



მოც: $AB\cap P=\{O\}$, $BD\perp P$, $AC\perp P$

$BD=6$ სმ, $AC=4$ სმ, $AB=20$ სმ

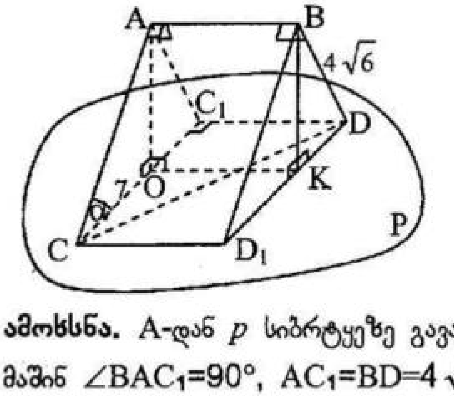
უ.გ. $\angle(AB,P)\equiv\alpha$.

ამოხსნა. BD მართობი გავაგრძელოთ მეორე ნახევარსივრცეში A წერტილიდან CD წრფის პარალელური წრფის გავლებით მიღებულ წრფესთან გადაკვეთამდე L წერტილში (ცხადია, გადაკვეთა მოხდება AB და CD წრფეებით შექმნილ სიბრტყეში). $CD\parallel AL$, ე.ი. $\angle BAL=\alpha$, როგორც შესაბამისი კუთხეები. $DL=AC=4$ სმ, როგორც ACDL მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები. განვიხილოთ მართკუთხა ΔABL. $AB=20$ სმ. იგი ჰიპოტენუზაა, ხოლო

$BL=BD+DL=6+4=10$ სმ და ის კათეტია, ე.ი. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია. ანუ კათეტის მოპირდაპირე α კუთხე 30°-ის ტოლია.

პასუხი: $\angle(AB,P)=30^\circ$.

ამოცანა 3. AB მონაკვეთი p სიბრტყის პარალელურია, ხოლო AC და BD კი AB-ს პერპენდიკულარულად და მისგან სხვადასხვა მხარეს გავლებული დახრილებია. AB მონაკვეთის სიგრძეა 16 სმ. AC დახრილი, რომლის გეგმილი p სიბრტყეზე 7 სმ-ია, p სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ CABDC ტეხილის პერიმეტრი, თუ BD დახრილის სიგრძეა $4\sqrt{6}$ სმ და $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.



მოც: $AB\parallel p$, $AC\perp AB$, $BD\perp AB$

$\angle(AC,p)=\alpha$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$,

$BD=4\sqrt{6}$ სმ, $AO\perp p$, $BK\perp p$,

$CO=7$ სმ, $AB=16$ სმ,.

უ.გ. P_{CABDC}.

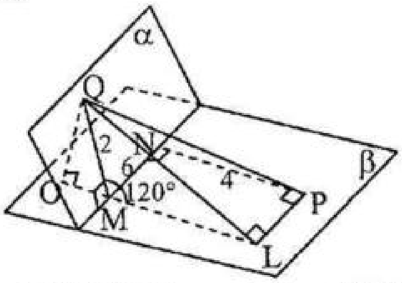
ამოხსნა. A-დან p სიბრტყეზე გავატაროთ BD-ს პარალელური AC_1 დახრილი. რადგან $\angle ABD=90^\circ$, მაშინ $\angle BAC_1=90^\circ$, $AC_1=BD=4\sqrt{6}$ სმ, $AO\perp p$ და $AB\parallel p$. ამიტომ AC, AC_1 და AO p სიბრტყის

მართობული სიბრტყის წრფეებია. ΔACO მართკუთხაა. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{15}{64}}=\frac{7}{8}$. მაშინ $\cos\alpha=\frac{CO}{AC}\Rightarrow AC=\frac{CO}{\cos\alpha}=\frac{7}{7/8}=8$ სმ. პითაგორას თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ $AO=\sqrt{AC^2-CO^2}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$ სმ. ΔAOC_1 მართკუთხაა. ვღებულობთ $OC_1=\sqrt{AC_1^2-AO^2}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-15}=\sqrt{96-15}=\sqrt{81}=9$ სმ. მაშინ $CC_1=CO+OC_1=7+9=16$ (სმ). ΔCC_1D მართკუთხაა, რადგან $CC_1\perp C_1D$ ($ABDC_1$ მართკუთხედია, $AC_1 \parallel BD$, $AC_1=BD$ და სამი მართობის ძალით $\angle OC_1D=90°$). მაშინ $CD=\sqrt{CC_1^2+C_1D^2}=\sqrt{16^2+16^2}=16\sqrt{2}$ სმ.

CABDC ტეხილის ყველა მონაკვეთის სიგრძე ნაპოვნია. მაშინ მისი პერიმეტრი იქნება $P=CA+AB+BD+DC=8+16+4\sqrt{6}+16\sqrt{2}=4(6+\sqrt{6}+4\sqrt{2})$ (სმ).

პასუხი: $4(6+\sqrt{6}+4\sqrt{2})$ სმ.

ამოცანა 4. M და N წერტილები 120°-იანი ორწახნაგა კუთხის წიბოზე მდებარე წერტილებია; NP და MQ სხვადასხვა წახნაგებზე გავლებული წიბოს პერპენდიკულარებია. იპოვეთ PQ მონაკვეთის სიგრძე, თუ $MN=6$, $NP=4$, $MQ=2$.



მოც: $(\alpha \hat{;} \beta)=120°$, $Q\in\alpha$, $P\in\beta$,
$QM\perp MN$, $PN\perp MN$,
$QM=2$, $PN=4$, $MN=6$

უ.გ. PQ.

ამოხსნა. M-დან β წახნაგში გავატაროთ NP-ს ტოლი და მისი პარალელური ML მონაკვეთი. L შევაერთოთ Q-ს და P-ს. ცხადია, რომ $ML\perp MN$ და $\angle QML$ ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი ზომაა და უდრის 120°-ს. ΔQML-ში კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვიპოვით QL-ს:

$QL^2=QM^2+LM^2-2\cdot QM\cdot LM\cdot\cos120°$, საიდანაც

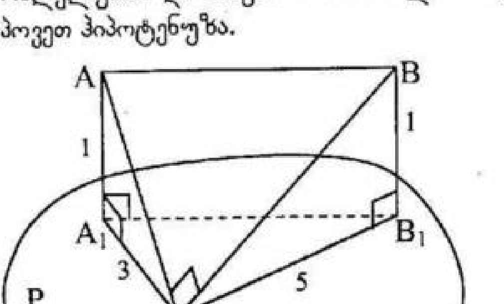
$QL=\sqrt{2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos120^\circ}=\sqrt{4+16+8}=\sqrt{28}$ სმ.

β წახნაგზე MNPL ოთხკუთხედი მართკუთხედია, ე.ი. $\angle MLP=90°$. სამი მართობის თეორემის ძალით $QL\perp LP$ და ΔQLP მართკუთხაა:

$QP=\sqrt{QL^2+LP^2}=\sqrt{(\sqrt{28})^2+6^2}=\sqrt{28+36}=\sqrt{64}=8$ სმ.

პასუხი: $QP=8$ სმ.

ამოცანა 5. ABC მართკუთხა სამკუთხედის C მართი კუთხის წვეროზე გავლებულია P სიბრტყე, რომელიც ჰიპოტენუზის პარალელურია და მისგან 1 მ მანძილითაა დაშორებული. კათეტების გეგმილები ამ სიბრტყეზე 3 მ და 5 მ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.



მოც: $ABC\cap P=\{C\}$, ΔABC მართკუთხაა: $\angle C=90°$, $AB\parallel P$, $AA_1\perp P$, $BB_1\perp P$, $AA_1=BB_1=1$ მ, $A_1C=3$ მ, $B_1C=5$ მ

უ.გ. AB.

ამოხსნა. მართკუთხა AA_1C და BB_1C სამკუთხედებში გვაქვს:

$CA^2 = AA_1^2 + A_1C^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ (მ^2);

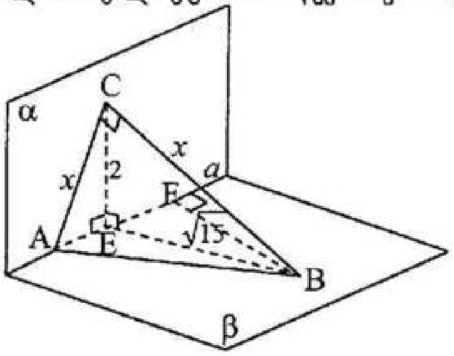
$CB^2 = BB_1^2 + B_1C^2 = 5^2 + 1^2 = 26$ (მ^2).

მართკუთხა ABC სამკუთხედში გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 10 + 26 = 36$, საიდანაც $AB = 6$ (მ).

პასუხი: $AB = 6$ მ.

ამოცანა 6. ABC მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის კათეტი და ჰიპოტენუზა ძევს $(\alpha\hat{;}\beta)$ ორწახნაგა კუთხის სხვადასხვა წახნაგებზე. მართი კუთხის C წვერო ორწახნაგა კუთხის a წიბოდან დაშორებულია 2 სმ-ის მანძილით, ხოლო მახვილი კუთხის B წვერო კი $-\sqrt{15}$ სმ-ით. იპოვეთ ΔABC-ს ფართობი.



მოც: ΔABC, $\angle C = 90°$ და $(\alpha\hat{;}\beta)$ მართი ორწახნაგა კუთხეა, $CE \in \alpha$, $CE \perp a$, $AC \in \alpha$, $BF \in \beta$, $BF \perp a$, $CE = 2$ სმ, $BF = \sqrt{15}$ სმ.

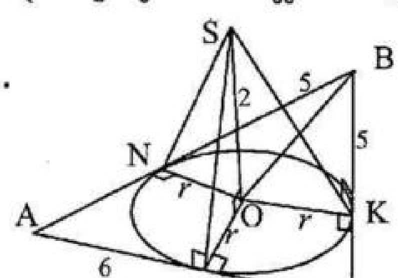
უ.გ. $S_{\Delta ABC}$.

ვთქვათ, $AC = BC = x$. მაშინ ΔABC-დან $AB^2 = 2x^2$. $AE = EB = \sqrt{x^2 - 4}$ და $EF = \sqrt{EB^2 - BF^2} = \sqrt{x^2 - 4 - 15} = \sqrt{x^2 - 19}$. $AF = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 19}$. ΔABF მართკუთხაა: $AB^2 = AF^2 + BF^2$, საიდანაც

$2x^2 = x^2 - 4 + 2\sqrt{(x^2 - 4)(x^2 - 29)} + x^2 - 19 + 15$. ვღებულობთ ბიკვადრატულ განტოლებას: $x^4 - 23x^2 + 60 = 0$, საიდანაც $x^2 = 3$ ან $x^2 = 20$. რადგან $x^2 > 19$ ($AE = \sqrt{x^2 - 19}$), ამიტომ $x^2 = 20$ ანუ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = \dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2} = 10$ (სმ^2).

პასუხი: $S_{\Delta ABC} = 10$ სმ^2.

ამოცანა7. მოცემულია ABC ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის AC ფუძეა 6 მ, ხოლო AB ფერდია 5 მ. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის O ცენტრიდან ABC სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია OS მართობი, რომლის სიგრძეა 2 მ. იპოვეთ მანძილები მართობის S წვეროდან ΔABC-ის გვერდებამდე.



მოც: $SO \perp ABC$,

ΔABC ტოლფერდაა:

$AB = BC = 5$ მ, $AC = 6$ მ, $SO = 2$ მ.

უ.გ. SN, SK, SM.

ამოხსნა: $SO \perp ABC$, O ΔABC-ში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, $ON = OK = OM$ ჩახაზული წრეწირის რადიუსებია და ისინი სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების მართობულებია (მაგ., $OM \perp AC$). სამი მართობის თეორემის ძალით $SK \perp BC$, $SM \perp AC$ და $SN \perp AB$, ე.ი. SK, SM და SN მონაკვეთების სიგრძეები საძიებელი სიდიდეებია. მაგრამ $\Delta SOK = \Delta SOM = \Delta SON$, რადგან მათი კათეტები შესაბამისად ტოლია. მაშინ $SN = SM = SK$. ΔSOM-დან $SM = \sqrt{SO^2 + r^2} = \sqrt{4 + r^2}$. ვიპოვოთ r:

$S_{\Delta ABC}=p\cdot r$, $p=\dfrac{AB+BC+AC}{2}=\dfrac{5+5+6}{2}=8$ (სმ). მაშინ $S_{\Delta ABC}=\dfrac{BM\cdot AC}{2}$, ხოლო

$BM=\sqrt{BC^2-MC^2}=\sqrt{5^2-(\frac{6}{2})^2}=\sqrt{16}=4$ (სმ). მაშინ

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 6}{2}=12$ (სმ^2), ე.ი. $8r=12$ და $r=\dfrac{12}{8}=1{,}5$ (მ). რადგან

$SM=\sqrt{4+r^2}$, მივიღებთ $SM=2{,}5$ (მ).

პასუხი: SN=SM=SK=2,5 მ.