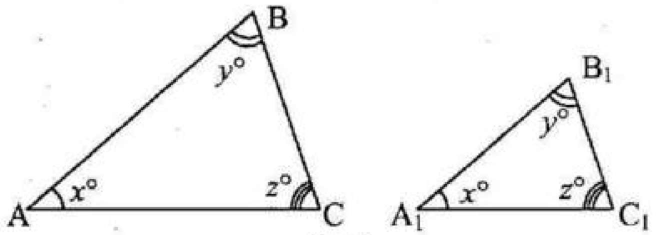
§6. სამკუთხედების მსგავსება

1. ***მსგავსების განმარტება და სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები.*** თუ მოცემული ორი ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედისთვის სრულდება $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ და $\angle C=\angle C_1$ (ნახ.1), მაშინ მათ ეწოდება მსგავსი სამკუთხედები და ვწერთ: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. ყურადღება უნდა მიექცეს, რომ ჩანაწერში წვეროების მიმდევრობაში (I, II ან III) დგას ტოლი კუთხეების შესაბამისი წვეროები. თუ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, მაშინ A და A_1, B და B_1, C და C_1 წვეროებს **შესაბამისი** ეწოდებათ. შესაბამისი წვეროებისგან შედგენილ გვერდებსაც **შესაბამისი** ეწოდებათ, მაგ., AB და A_1B_1 შესაბამისი გვერდებია



ნახ.1.

ძირითადი თვისება. მსგავს სამკუთხედებში შესაბამისი გვერდების სიგრძეების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა, რომელსაც მსგავსების ან პროპორციულობის კოეფიციენტი ეწოდება, მაგ., თუ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, მაშინ არსებობს $k \neq 0$ მსგავსების კოეფიციენტი, რომლისთვისაც $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$ ანუ $AB=kA_1B_1$, $BC=kB_1C_1$, $AC=kA_1C_1$.

მსგავსი სამკუთხედების სხვა წყვილისთვის მსგავსების კოეფიციენტს შეუძლია განსხვავებული მნიშვნელობის მიღება. სამკუთხედების ტოლობა მსგავსების კერძო შემთხვევაა, როცა მსგავსების კოეფიციენტი 1-ის ტოლია.

სამკუთხედების მსგავსების დასადგენად გამოიყენება შემდეგი ნიშნები:

ნიშანი 1. თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე, შესაბამისად, ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

ნიშანი 2. თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი, შესაბამისად, პროპორციულია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და ამ გვერდებით შექმნილი კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

ნიშანი 3. თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები, შესაბამისად, პროპორციულია მეორე სამკუთხედის გვერდების, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

მსგავს სამკუთხედებში შესაბამისი სიმაღლეების, მედიანების, ბისექტრისების და პერიმეტრების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია.

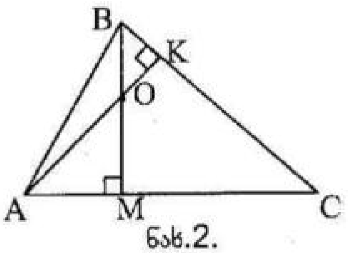
2. ***მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება. რამდენიმე მაგალითი.*** რადგან ორ მართკუთხა სამკუთხედს თითო კუთხე გარანტირებულად ტოლი აქვთ, ამიტომ მათთვის მსგავსების პირველი ორი ნიშანი იღებს სახეს:

ნიშანი 1. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ მათ თითო მახვილი კუთხე ტოლი აქვთ.

ნიშანი 2. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ ერთი მათგანის კათეტები მეორის კათეტების პროპორციულია.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა, რომლებშიც აუცილებელია ამ ნიშნების გამოყენება.

ამოცანა 1. ABC სამკუთხედში გავლებულია AK და BM სიმაღლეები, O მათი გადაკვეთის წერტილია. ვაჩვენოთ, რომ $\Delta AOM \sim \Delta BOK$.

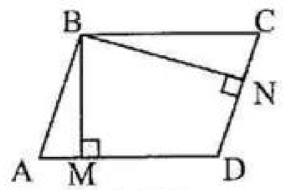


ნახ.2.

ამოხსნა. ეს ორივე სამკუთხედი მართკუთხაა და $\angle AOM=\angle BOK$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. ამიტომ **ნიშანი 1-ის** თანახმად, ისინი მსგავსია, რადგან $\angle BKO=\angle AMO$ და $\angle AOM=\angle BOK$. ამიტომ $\Delta AOM \sim \Delta BOK$.

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ პარალელოგრამში სიმაღლეების შეფარდება მათი შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია, ანუ $\frac{BM}{BN}=\frac{AB}{BC}$.

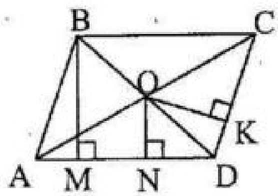
ამოხსნა. $\angle A=\angle C$, ამიტომ **ნიშანი 1-ის** თანახმად, $\Delta ABM \sim \Delta CBN$, საიდანაც ვღებულობთ დასამტკიცებელ პროპორციას.



ნახ.3.

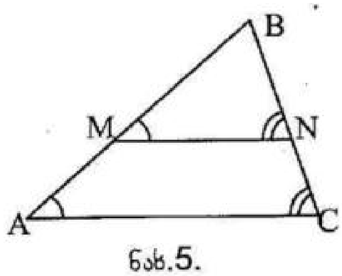
ამოცანა 3. ვაჩვენოთ, რომ პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან გვერდებამდე მანძილები შესაბამისი სიმაღლეების ნახევრების ტოლია.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $\Delta BDM \sim \Delta ODN$, ამიტომ $\frac{OD}{BD}=\frac{ON}{BM}$ ანუ $\frac{ON}{BM}=\frac{1}{2}$. ანალოგიური შეფასება იგივე გზით მიიღება BK მანძილისთვის.



ნახ.4.

3. *სამკუთხედის გვერდის პარალელური წრფის თვისება. ნებისმიერ სამკუთხედში მისი რომელიმე გვერდის პარალელური და დანარჩენი ორი გვერდის გადამკვეთი წრფით მიღებული სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის მსგავსია.* $MN \parallel AC$ (ნახ.5), ამიტომ სამართლიანია სამკუთხედების მსგავსების I ნიშანი და $\Delta ABC \sim \Delta MBN$.

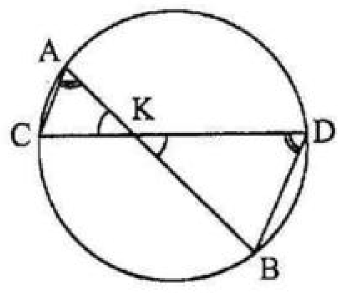


ნახ.5.

4. *ურთიერთგადამკვეთი ქორდების თვისება.* ვთქვათ, AB და CD ორი ურთიერთგადამკვეთი ქორდაა (ნახ.6). $\angle AKC=\angle DKB$ და $\angle CAB=\angle BDC=\frac{\breve{BC}}{2}$. ამიტომ $\Delta AKC \sim \Delta DKB$, საიდანაც $\frac{AK}{KD}=\frac{CK}{KB} \Rightarrow$

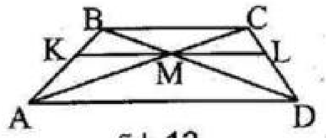
$$AK \cdot KB = CK \cdot KD.$$

ეს თვისება ძალიან ხშირად გამოიყენება ამოცანებში და იგი შეიძლება ჩამოყალიბდეს წესის სახით: ***ორი ურთიერთგადამკვეთი ქორდა გადაკვეთის წერტილით იყოფა მონაკვეთებად, რომელთა ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია.***



ნახ.6.

ამოცანა 8. რისი ტოლია ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე ფუძეების პარალელურად გავლებული მონაკვეთის სიგრძე, თუ BC=a და AD=b?



ნახ.13.

ამოხსნა. როგორც ვნახეთ, $\frac{AM}{MC}=\frac{AD}{BC}$. თალესის თეორემით, $\frac{AK}{KB}=\frac{AD}{BC}$ და წინა ამოცანის შედეგად,

KL=$\frac{2AD\cdot BC}{AD+BC}=\frac{2ab}{a+b}$.