§ 3. სიმრავლე. რიცხვითი ღერძი. რიცხვითი შუალედები, რიცხვის მოდული

I. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე. სიმრავლე არის რიცხვების ან სხვა სახის ობიექტების კრებული, ერთობლიობა. ობიექტებს, რომლებისგანაც შედგება სიმრავლე, ეწოდებათ სიმრავლის **ელემენტები.** როგორც წესი, სიმრავლეებს აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით, მაგალითად M, S, T და ა.შ. თუ სიმრავლე S შედგება ელემენტების სასრული რაოდენობისაგან, მაშინ მას ეწოდება სასრული სიმრავლე (წინააღმდეგ შემთხვევაში ეწოდება უსასრულო სიმრავლე) და ჩანაწერი $n(S)$ აღნიშნავს ელემენტების რაოდენობას ამ სიმრავლეში. ზოგჯერ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობის აღსანიშნავად იყენებენ $|S|$ აღნიშვნას. სასრული სიმრავლეები, უმეტეს შემთხვევაში, განისაზღვრებიან მათი ელემენტების ჩამოთვლით; მაგალითად, $S=\{-2;0;7\}$ არის სიმრავლე, რომლისთვისაც $n(S)=3$. აღსანიშნავია, რომ ელემენტების თანმიმდევრობა არ არის არსებითი; მაგალითად,

$$\{-2;0;7\} = \{7;-2;0\}.$$

თუ აღმოჩნდა, რომ S სიმრავლის ყოველი ელემენტი ამავდროულად არის რომელიღაც T სიმრავლის ელემენტი, მაშინ S-ს ეწოდება T-ს ქვესიმრავლე, რაც ჩაიწერება $S\subset T$; თუ t არის T სიმრავლის ელემენტი, ვწერთ $t\in T$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $t\notin T$. მაგალითად, $S=\{-2;0;7\}$ არის $T=\{-2;0;3;7\}$-ის ქვესიმრავლე, $7\in S$ და $7\in T$, თუმცა $3\in T$, მაგრამ $3\notin S$. მათემატიკაში ხშირად გამოიყენება ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$. ესაა სიმრავლე, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს; მაგალითად, $2x=4$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის $\{2\}$ და შედგება ერთადერთი $x=2$ ამონახსნისაგან, ხოლო $0\cdot x=4$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$. ზოგიერთი სიმრავლე იმდენად ხშირად გვხვდება, რომ მათთვის განსაკუთრებული აღნიშვნები გამოიყენება. მაგალითად, ნატურალური რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება N-ით:

$$N=\{1;\ 2;\ \ldots\};$$

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Z-ით:

$$Z=\{\ldots\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\};$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Q-თი:

$$Q=\left\{\frac{n}{d}\,\middle|\,n\in Z, d\in N\right\}.$$

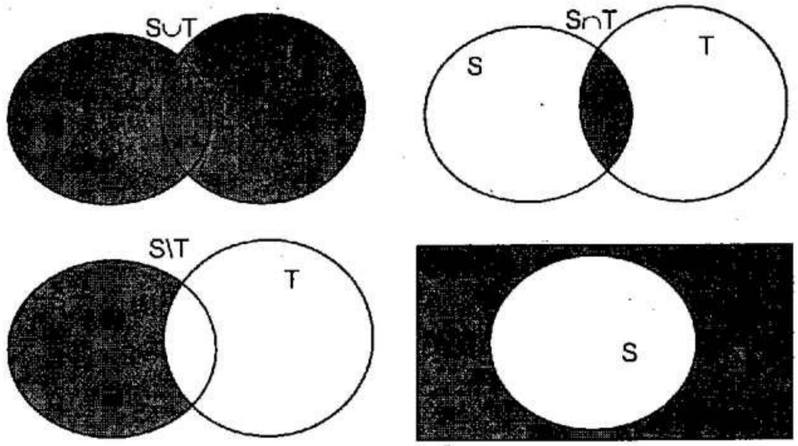
შევნიშნოთ, რომ N და Z სიმრავლეები განსაზღვრულია მათი ელემენტების ჩამოთვლის გზით, ხოლო Q განსაზღვრულია მისი აღწერის გზით: Q შედგება $\frac{n}{d}$ სახის რიცხვებისაგან, სადაც n მთელია, d ნატურალური. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ N არის Z-ის ქვესიმრავლე, ხოლო Z არის Q-ს ქვესიმრავლე, ანუ $N\subset Z\subset Q$.

თუ მოცემულია ორი A და B სიმრავლე, მათი საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ ორი ახალი სიმრავლე: A და B-ს გაერთიანება (აღინიშნება $A\cup B$) და A და B-ს თანაკვეთა ($A\cap B$). განმარტების მიხედვით, გაერთიანება $A\cup B$ შედგება ყველა იმ ელემენტისაგან, რომელიც ეკუთვნის მხოლოდ A-ს, ან მხოლოდ B-ს ან ორივეს ერთად. თანაკვეთა $A\cap B$ შედგება ყველა იმ ელემენტისაგან, რომელიც არის ერთდროულად A-შიც და B-შიც. მაგალითად, თუ $A=\{2;3\}$ და $B=\{3;5;7\}$, მაშინ $A\cup B=\{2;3;5;7\}$ და $A\cap B=\{3\}$. თუ ორ სიმრავლეს არ გააჩნია საერთო ელემენტი, მათ ეწოდებათ **არათანამკვეთი.**

მოცემული A და B სიმრავლეებისათვის ასევე შესაძლებელია განვსაზღვროთ მათი სხვაობა A\B. იგი შედგება A-ს მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც არ ეკუთვნიან B-ს.

თუ S არის X-ის რაიმე ქვესიმრავლე, მაშინ S სიმრავლის **დამატება** X სიმრავლემდე ეწოდება X და S სიმრავლეების სხვაობას. აღინიშნება $\overline{S} = X \setminus S$.

სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების ილუსტრირებისათვის ხშირად გამოიყენება ე.წ. **ვენის დიაგრამები.** მაგალითად, თუ S და T არის არაცარიელი თანაკვეთის მქონე ორი ისეთი სიმრავლე, რომ არცერთი არაა მეორის ქვესიმრავლე, მაშინ $S\cup T$, $S\cap T$, $S\setminus T$ და $\overline{S}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ დაშტრიხული არის სახით:



ეს დიაგრამები გვეხმარება ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტის უკეთ წარმოდგენაში, რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი ორი სასრული S და T სიმრავლისათვის: მათ ***გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობა ტოლია მათში (ცალ-ცალკე აღებული) ელემენტთა რაოდენობების ჯამს გამოკლებული თანაკვეთაში ელემენტთა რაოდენობა:***

$$n(S\cup T)=n(S)+n(T)-n(S\cap T) \qquad (1)$$

მაგალითი. კლასში 15 მოსწავლე სწავლობს ინგლისურს, 12 გერმანულს და 5 მოსწავლე – ორივე ენას ერთდროულად. რამდენი მოსწავლეა კლასში, თუ ყოველი მოსწავლე ერთ ენას მაინც სწავლობს?

ამოხსნა. ვთქვათ S არის იმ მოსწავლეთა სიმრავლე, რომლებიც სწავლობენ ინგლისურს, T – რომლებიც სწავლობენ გერმანულს. მაშინ $S\cap T$ იქნება სიმრავლე იმ მოსწავლეებისა, რომლებიც სწავლობენ ორივე ენას. ვისარგებლოთ მოყვანილი ფორმულით $n(S\cup T)=15+12-5=22$. ე.ი. კლასში 22 მოსწავლეა.

სამი სასრული სიმრავლის გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე:

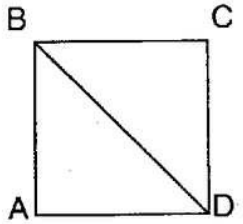
$$n(M\cup S\cup T)=n(M)+n(S)+n(T)-n(M\cap S)-n(M\cap T)-n(S\cap T)+n(M\cap S\cap T).$$

II. ირაციონალური რიცხვები. ნამდვილი რიცხვები. ***გარდა სასრული ათწილადისა და უსასრულო პერიოდული ათწილადისა, არსებობენ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები, ანუ ირაციონალური რიცხვები.*** მაგალითად, ირაციონალურ რიცხვს წარმოადგენს შემდეგი უსასრულო ათწილადი:

0,101001000100001...

რომელშიც ერთიანებს შორის ნულების რაოდენობა განუხრელად იზრდება.

ირაციონალურ რიცხვები ხშირად მიიღება გამოთვლების შედეგად. მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ ერთეულოვანი კვადრატის დიაგონალის სიგრძე ირაციონალური რიცხვია.



დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ BD დიაგონალის სიგრძე რაციონალური რიცხვია, ანუ

$$BD=\frac{p}{q},$$

სადაც $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადია. რადგან $AB=1$, ამიტომ

(პითაგორას თეორემის ძალით) $BD^2=1^2+1^2=2=\frac{p^2}{q^2}$, ანუ $p^2=2q^2$. ე.ი. p^2 არის ლუწი რიცხვი და ამიტომ p აგრეთვე ლუწია: $p=2k$, რომელიღაც ნატურალური k-სთვის. $p^2=2q^2$-ში ჩავსვათ $p=2k$:

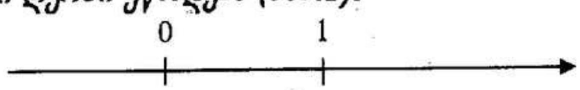
$$4k^2=2q^2 \Rightarrow q^2=2k^2,$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ q^2 და მაშასადამე q-ც ლუწი რიცხვებია. მივიღეთ, რომ p და q ლუწია, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $\frac{p}{q}$ წილადის უკვეცობის შესახებ. ამგვარად, კვადრატის BD დიაგონალის სიგრძე ირაციონალური რიცხვია. რიცხვი რომლის კვადრატია 2 აღინიშნება $\sqrt{2}$ სიმბოლოთი და ეწოდება კვადრატული ფესვი ორიდან.

ირაციონალური რიცხვები არის აგრეთვე π და e რიცხვები, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ მათემატიკაში.

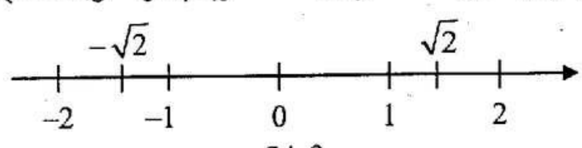
რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების გაერთიანებას ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და აღინიშნება R სიმბოლოთი.

III. რიცხვითი ღერძი. კოორდინატი. ნამდვილი რიცხვების გამოსახვა კოორდინატებით. ***წრფეს, რომელზეც მონიშნულია ათვლის წერტილი ანუ ნული, მასშტაბი (ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთის სახით) და დადებითი მიმართულება (ისრის სახით) რიცხვითი ღერძი ეწოდება (ნახ.1).***



ნახ.1

რიცხვითი ღერძის ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ წერტილის **კოორდინატი** ეწოდება. ნულის მარჯვნივ მოთავსებული ყოველი წერტილისათვის კოორდინატი ტოლია ამ წერტილიდან ნულამდე მანძილისა, ხოლო ნულის მარცხნივ მოთავსებული წერტილებისათვის — მინუს ნიშნით აღებული ნულამდე მანძილისა. აღსანიშნავია, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი წარმოადგენს რიცხვითი ღერძის რომელიღაც წერტილის კოორდინატს, ამიტომ ნებისმიერ ნამდვილ a რიცხვს ჩვენ ვაიგივებთ იმ წერტილთან, რომლის კოორდინატიც არის a. ამგვარად, დადებითი ნამდვილი რიცხვები განლაგებულია რიცხვით ღერძზე ნულის მარჯვნივ, ანუ დადებითი მიმართულებით. დადებითი რიცხვების მოპირდაპირე რიცხვები განლაგებულია ნულის მარცხნივ, დადებითი რიცხვების სიმეტრიულად (ნახ. 2)



ნახ.2

ნახ. 2-ზე, $1<\sqrt{2}<2$, რადგან $1^2<2<2^2$.

IV. მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე. ვთქვათ, a და b არის ორი ნამდვილი რიცხვი და გვინდა $a+b$-ს პოვნა. თუ ერთი რიცხვი მაინც ირაციონალურია, იძულებული ვართ შევზღუდოთ ნულის მარჯვნივ

ციფრების რაოდენობა და $a+b$-ს მნიშვნელობა განვსაზღვროთ მიახლოებით. მაგალითად, თუ $a=\sqrt{2}$, b=3,010020009 და $a+b$-ს ვიანგარიშებთ ნულის მარჯვნივ ოთხი თანრიგის სიზუსტით, გვექნება:

$$a+b \approx 1,4142+3,0100 = 4,4242,$$

თუ ვიანგარიშებთ ნულის მარჯვნივ 6 თანრიგის სიზუსტით, გვექნება:

$$a+b \approx 1,414213+3,010020 = 4,424233$$

და ა.შ., რაც უფრო მეტ თანრიგს ვტოვებთ მით უფრო მეტი სიზუსტით აღვადგენთ იმ უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს, რომელიც წარმოადგენს $a+b$-ს ზუსტ მნიშვნელობას.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, და სხვა მრავალი ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობის საპოვნელად შეიძლება ვისარგებლოთ სპეციალური ცხრილებით ან კალკულატორით. ზოგიერთი ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ცნობილია. მაგალითად, $\pi\approx3,14$, $e\approx2,72$.

ანალოგიური ვითარებაა სხვა არითმეტიკულ მოქმედებებთან დაკავშირებით, — მოქმედების შესრულება ხშირ შემთხვევაში მხოლოდ მიახლოებით ხდება. თუმცა, ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებები ინარჩუნებენ იმ თვისებებს, რაც მათ გააჩნდათ რაციონალურ რიცხვებზე. ვიგულისხმოთ, რომ x, y, z არის ნებისმიერად აღებული ნამდვილი რიცხვები და აღვნიშნოთ ზოგიერთი თვისება.

1) გადანაცვლებადობის თვისება ახასიათებს როგორც შეკრებას, ისე გამრავლებას:

$$x+y=y+x \quad \text{და} \quad xy=yx.$$

2) ჯუფდებადობის თვისებაც ორივე მოქმედებას ახასიათებს:

$$(x+y)+z=x+(y+z) \quad \text{და} \quad (xy)z=x(yz).$$

3) განრიგებადობის თვისება ერთმანეთთან ათანხმებს შეკრებასა და გამრავლებას:

$$x(y+z)=xy+zy.$$

4) თუ x და y ორივე დადებითია, მაშინ დადებითია $x+y$ და xy.

5) თუ x და y ორივე უარყოფითია, მაშინ $x+y$ უარყოფითია და xy — დადებითი.

6) თუ x დადებითია, ხოლო y უარყოფითი, მაშინ xy უარყოფითია.

7) 0-ის ნამრავლი ნებისმიერ რიცხვზე ისევ ნულია, ხოლო თუ $xy=0$, მაშინ ან $x=0$ ან $y=0$. მაგალითად, $5y=0$ ნიშნავს, რომ $y=0$.

V. ნამდვილი რიცხვების შედარება. რიცხვითი შუალედები. ნებისმიერი ორი რიცხვისათვის რიცხვით ღერძზე, მარცხნივ მოთავსებული რიცხვი **ნაკლებია** მარჯვნივ მოთავსებულზე, ანუ მარჯვნივ მოთავსებული **მეტია** მარცხნივ მოთავსებულზე. მაგალითად, $-5<-1$, $0<3$, $5>2,5$; სიმბოლო **<** ნიშნავს ,,ნაკლებია", ხოლო **>** ნიშნავს ,,მეტია".

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი ან რაციონალურია ან ირაციონალური. რადგან ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვიდგინოთ უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით[1], ხოლო ირაციონალური — უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი შეიძლება წარმოვიდგინოთ უსასრულო ათწილადის სახით შემდეგნაირად:

$$a = a_0,a_1a_2a_3\ldots$$

სადაც $a_0\in Z$, ხოლო ყოველი a_n (n=1, 2, 3, ...) წარმოადგენს ერთ-ერთს შემდეგი ციფრებიდან 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

[1] თუ რაციონალური რიცხვი სასრული ათწილადია, მაშინ პერიოდად შეიძლება ავიღოთ 0 ან 9. მაგ: 4,25=4,25(0)=4.24(9).

ვთქვათ, a და b არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია. ამბობენ, რომ $a<b$, თუ რომელიმე არაუარყოფითი მთელი k-სათვის და ყოველი $0\leq i<k$-სათვის $a_i=b_i$ და $a_k<b_k$. თუ $a\geq 0$, ხოლო $b<0$, მაშინ $a>b$. თუ $a<0$ და $b<0$, მაშინ $a>b$, როცა $-a<-b$.

ხშირად სასარგებლოა გვახსოვდეს, რომ $a<b$ იგივეა, რაც $a-b<0$.

როდესაც ამბობენ, რომ a რიცხვი ***ნაკლებია ან ტოლი*** (მაგალითად) 7-ზე ან, რომ a რიცხვი **არ აღემატება** 7-ს, ეს ნიშნავს

$$a<7 \quad \text{ან} \quad a=7,$$

რაც ასე ჩაიწერება: $a\leq 7$.

როდესაც ამბობენ, რომ a რიცხვი არის, მაგალითად, 1-სა და 5-ს ***შორის***, ეს ნიშნავს, რომ $a>1$ და $a<5$, რაც ასე ჩაიწერება: $1<a<5$. როდესაც ამბობენ, რომ a არის ,,1-სა და 5-ს შორის, ჩათვლით", ეს ნიშნავს $1\leq a\leq 5$.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ რიცხვითი შუალედების ძირითადი ტიპები, უნდა გამოვიყენოთ სიმრავლის აღწერა მისი განმსაზღვრელი რაიმე თვისების საფუძველზე: თუ S სიმრავლის T ქვესიმრავლის ყოველ ელემენტს აქვს გარკვეული (*) თვისება, მაშინ წერენ:

$$T=\{x\in S \mid x\text{-ს აქვს } (*) \text{ თვისება}\}.$$

მაგალითად, თუ S-ის ნაცვლად ავიღებთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს, (*) თვისება შესაძლოა იყოს $x\leq 1$ ან $-3<x\leq 2$ და სხვა.

განვსაზღვროთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$[a;b]=\{x\in R \mid a\leq x\leq b\}, \qquad (2)$$
$$(a;b)=\{x\in R \mid a<x<b\}, \qquad (3)$$
$$(a;b]=\{x\in R \mid a<x\leq b\}, \qquad (4)$$
$$[a;b)=\{x\in R \mid a\leq x<b\}. \qquad (5)$$

(2)-ს ეწოდება ***ჩაკეტილი შუალედი*** ანუ ***მონაკვეთი***. (3)-ს ეწოდება ***ღია შუალედი***, ანუ ***ინტერვალი***. (4) და (5)-ს ეწოდებათ ***ნახევრად ღია შუალედები***. ოთხივე შემთხვევაში გვაქვს ***სასრული შუალედი***. a და b ბოლოებით, ხოლო $b-a$ წარმოადგენს შუალედის სიგრძეს. შევნიშნოთ, რომ $(a;a)=\varnothing$ და $[a;a]=\{a\}$.

ხშირად გვხვდება აგრეთვე უსასრულო შუალედები:

$$[a;+\infty)=\{x\in R \mid x\geq a\},$$

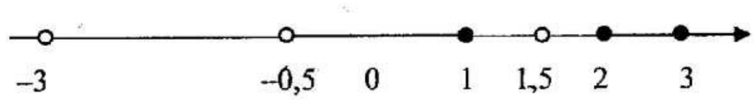
$$(a;+\infty)=\{x\in R \mid x>a\},$$

$$(-\infty;a]=\{x\in R \mid x\leq a\},$$

$$(-\infty;a)=\{x\in R \mid x<a\}.$$

რიცხვითი ღერძი არის უსასრულო შუალედი: $R=(-\infty;+\infty)$.

ორ განსხვავებულ რიცხვით შუალედს შესაძლოა ერთი და იგივე ბოლოები ჰქონდეს, მაგალითად [0;1] და (0;1), ამიტომ რიცხვით ღერძზე მათი გამოსახვისას საჭიროა გარკვეული წესების დაცვა. თუ ბოლო ეკუთვნის რიცხვით შუალედს, იგი გამოისახება პატარა მუქი წრის სახით, თუ არ ეკუთვნის – პატარა წრეწირის სახით. მაგალითად, ნახ. 3-ზე გამოსახულია (–3;–0,5), [1;2] და (1,5;3] შუალედები.



როგორც ნახაზიდან ჩანს,

$$[1;2]\cap(1,5;3]=(1,5;2] \quad \text{და} \quad [1;2]\cup(1,5;3]=[1;3].$$

საერთოდ რიცხვითი შუალედების თანაკვეთა ყოველთვის რიცხვითი შუალედია, ხოლო გაერთიანება შესაძლოა აღარ აღმოჩნდეს რიცხვითი შუალედი, როგორც $(-3;-0,5)$, $[1;3]$ შემთხვევაში.

VI. რიცხვის მოდული (აბსოლუტური მნიშვნელობა). *a რიცხვის მოდული ეწოდება მანძილს a რიცხვიდან ნულამდე რიცხვით ღერძზე და აღინიშნება |a| სიმბოლოთი:*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{თუ} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{თუ} \quad a < 0. \end{cases}$$

განმარტებიდან გამომდინარე, ყოველი არანულოვანი რიცხვის მოდული დადებითია, ნულის მოდული ნულის ტოლია, მოპირდაპირე რიცხვების მოდულები ტოლია. მაგალითად,

$$|-5|=|5|=5, \qquad \left|-\frac{5}{4}\right| = \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}, \qquad |0|=0.$$

რადიკალის შიგნით მამრავლის შეტანის დროს საჭირო ხდება ნამდვილი რიცხვის გამოსახვა მისი მოდულის საშუალებით:

$$a = \begin{cases} |a|, & \text{თუ} \ a \geq 0, \\ -|a|, & \text{თუ} \ a < 0. \end{cases}$$

ნებისმიერი ნამდვილი a და b რიცხვებისათვის სამართლიანია შემდეგი თვისებები:

1) $|0|=0$ ***და*** $|a| \geq 0$;

2) $|-a|=|a|$;

3) $|ab|=|a||b|$;

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, ***თუ*** $b \neq 0$;

5) $|a+b| \leq |a|+|b|$, ***როცა a და b ერთნაირი ნიშნისაა ან ერთი მაინც ნულია გვაქვს ტოლობა;***

6) $|a^2|=|a|^2=a^2$.