§9. ფიგურათა ფართობები

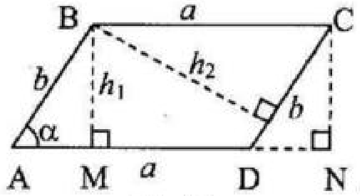
1. მართკუთხედის და კვადრატის ფართობი.
მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძის და სიგანის ნამრავლის ტოლია:

$$S=ab \text{ ანუ } S_{ABCD}=DC\cdot BC.$$

კერძოდ, კვადრატის ფართობი მისი გვერდის კვადრატის ტოლია: $S=a^2$.

ნახ. 1.

2.პარალელოგრამის ფართობი. განვიხილოთ ABCD პარალელოგრამი. რადგან $\Delta ABM=\Delta DCN$. ამიტომ $S_{ABCD}= S_{MBCN}=MN\cdot BM$. რადგან $MN=AD$, ამიტომ $S_{ABCD}=AD\cdot BM$. სხვანაირად, $S_{ABCD}=ah_1$, სადაც $a=AD$, ხოლო h_1 ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლეა ანუ



ნახ. 2.

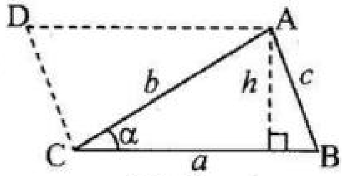
პარალელოგრამის ფართობი ტოლია მისი გვერდის და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის. შევნიშნოთ, რომ მნიშვნელობა არ აქვს, რომელ გვერდს ავირჩევთ. $S_{ABCD}=bh_2$
ნახ.2 გვიჩვენებს აგრეთვე, რომ $h_1=b\sin\alpha$, ამიტომ ***პარალელოგრამის ფართობი ასევე ტოლია ორი მეზობელი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის:***

$$S_{ABCD} = ab\sin\alpha.$$

ეს ფორმულა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც თუ α-ს ადგილზე ავიღებდით ბლაგვი B კუთხის სიდიდეს.

3. სამკუთხედის ფართობი. ყოველი სამკუთხედი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც რომელიღაც პარალელოგრამის ნახევარი, ამიტომ ფართობის გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულები:

$$S_{ABC}=\frac{ah}{2}, \quad S_{ABC}=\frac{ab\sin\alpha}{2},$$



ნახ. 3.

ანუ სამკუთხედის ფართობი სამკუთხედის გვერდის სიგრძისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევარია.

ხშირად გამოიყენება აგრეთვე **ჰერონის ფორმულა**

$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

სადაც p ABC სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრია $p=\frac{a+b+c}{2}$.

როდესაც ცნობილია სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი (R), ან ჩახაზული წრეწირის რადიუსი (r), შეიძლება ვისარგებლოთ

$$S=\frac{abc}{4R}, \quad S=pr$$

ფორმულებით.

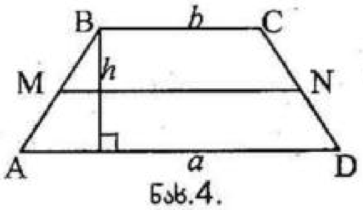
მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი მისი კათეტების სიგრძეების ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

4. ტრაპეციის ფართობი. ტრაპეციის ფართობი მისი ფუძეების ნახევარჯამის და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია:

$$S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}h.$$



ნახ.4.

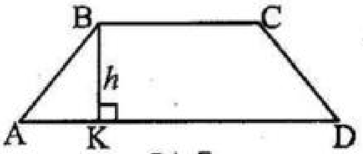
რადგან ფუძეების ნახევარჯამი შუამონაკვეთის (ნახ. 4-ზე MN-ის) ტოლია, ამიტომ

$$S_{ABCD}=MN\cdot h,$$

ანუ ტრაპეციის ფართობი მისი შუამონაკვეთის და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

თუ ABCD ტრაპეცია ტოლფერდაა (AB=CD), მაშინ MN=KD, ამიტომ სამართლიანია აგრეთვე

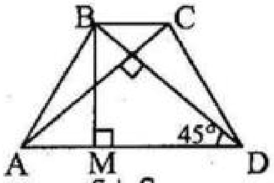
$$S_{ABCD}=KD\cdot h,$$



ნახ.5.

თუ ტრაპეცია ტოლფერდაა, ხოლო მისი დიაგონალები ურთიერთმართობული, მაშინ $\angle ADB=45°$ და ΔBDM-ში $h=MD$. ამიტომ ამ შემთხვევაში

$$S=h^2 \text{ ანუ } S=(MD)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$



ნახ.6.

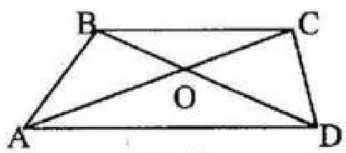
რადგან ABD და ACD სამკუთხედებს (ნახ.7) ერთი და იგივე ფუძე და სიმაღლე აქვთ, ამიტომ

$$S_{ABD}=S_{ACD}$$

ანალოგიურად, $S_{ABC}=S_{BCD}$. აქედან მარტივად გამომდინარეობს, რომ

$$S_{AOB}=S_{COD},$$

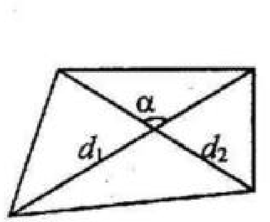
რადგან $S_{AOB}=S_{ABD}-S_{AOD}$ და $S_{COD}=S_{ACD}-S_{AOD}$.



ნახ.7.

5. ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა. ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობი მისი დიაგონალების და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია (ნახ.8)

$$S=\frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$



ნახ.8.

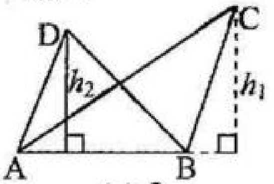
კერძოდ, რომბის ფართობი მისი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია:

$$S=\frac{d_1 d_2}{2}.$$

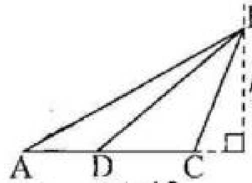
6. მსგავსი სამკუთხედების ფართობების შეფარდება. მსგავსი სამკუთხედების ფართობების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების კვადრატის ტოლია, ე.ი. მსგავსი სამკუთხედების ფართობების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია. მაგ., თუ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, მაშინ $\frac{S_{ABC}}{S_{PQR}}=\frac{AB^2}{PQ^2}=k^2$.

7. საერთო გვერდის ან სიმაღლის მქონე სამკუთხედების ფართობების შეფარდება. ამოცანებში ხშირად გვხვდება სამკუთხედები, რომლებსაც საერთო ელემენტი ანუ საერთო გვერდი ან სიმაღლე აქვთ. ამ შემთხვევაში მათი ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც შეეფარდება ერთმანეთს არასაერთო ელემენტები, მაგ., $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h_1$, $S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot h_2$. ამიტომ $\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac{h_1}{h_2}$. ამ სამკუთხედებს

საერთო ფუძე ჰქონდათ. სხვა შემთხვევაში საერთო შეიძლება იყოს სიმაღლე (ნახ.10): $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot h$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h$. ამიტომ $\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac{AC}{AD}$.



ნახ.9.

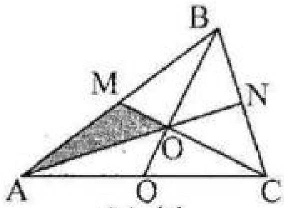


ნახ.10.

ამოცანა. $S_{ABC}=1$. AN, BQ და CM მედიანებია. იპოვეთ S_{AOM}.

ამოხსნა. ABQ და CBQ სამკუთხედებს საერთო სიმაღლე აქვთ. ამიტომ

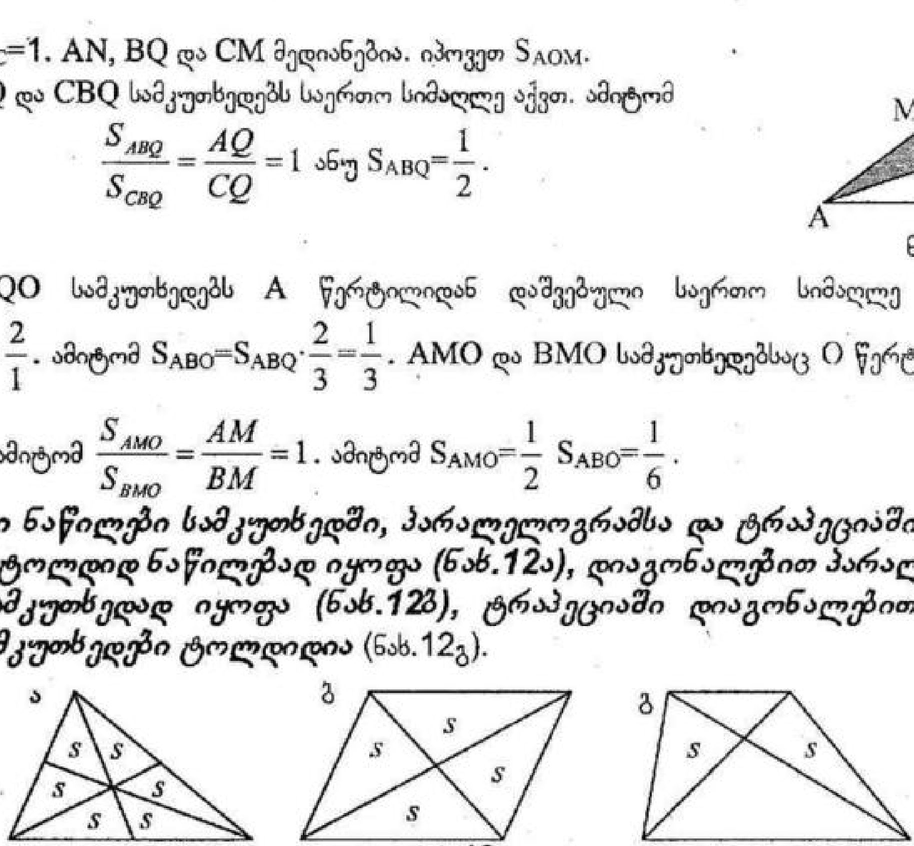
$$\frac{S_{ABQ}}{S_{CBQ}}=\frac{AQ}{CQ}=1 \text{ ანუ } S_{ABQ}=\frac{1}{2}.$$



ნახ.11.

ABO და AQO სამკუთხედებს A წერტილიდან დაშვებული საერთო სიმაღლე აქვთ. ამიტომ $\frac{S_{ABO}}{S_{AQO}}=\frac{BO}{QO}=\frac{2}{1}$. ამიტომ $S_{ABO}=S_{ABQ}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. AMO და BMO სამკუთხედებსაც O წერტილიდან საერთო სიმაღლე აქვთ. ამიტომ $\frac{S_{AMO}}{S_{BMO}}=\frac{AM}{BM}=1$. ამიტომ $S_{AMO}=\frac{1}{2}S_{ABO}=\frac{1}{6}$.

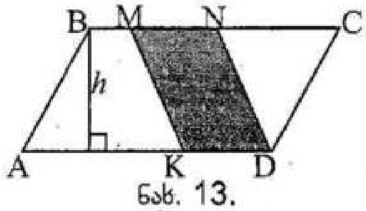
8. ტოლდიდი ნაწილები სამკუთხედში, პარალელოგრამსა და ტრაპეციაში. მედიანებით სამკუთხედი ტოლდიდ ნაწილებად იყოფა (ნახ.12ა), დიაგონალებით პარალელოგრამი 4 ტოლდიდ სამკუთხედად იყოფა (ნახ.12ბ), ტრაპეციაში დიაგონალებით ფერდებთან შექმნილი სამკუთხედები ტოლდიდია (ნახ.12გ).



ნახ.12.

9. საერთო გვერდის ან სიმაღლის მქონე ოთხკუთხედები. ოთხკუთხედებთან დაკავშირებით ხშირად გვხვდება საერთო გვერდი ან სიმაღლე.

ამოცანა. ABCD პარალელოგრამის AD გვერდზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ AK:KD=2:1, KM||DN. იპოვეთ S_{KMND} თუ $S_{ABCD}=9$.



ნახ. 13.

ამოხსნა. $S_{ABCD}=AD\cdot h$, $S_{KMND}=KD\cdot h$. ამიტომ $\frac{S_{ABCD}}{S_{KMND}}=\frac{AD}{KD}=3$. ამიტომ $S_{KMND}=\frac{S_{ABCD}}{3}$.