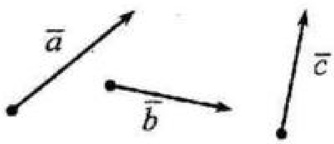
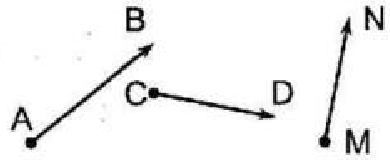
§11. ვექტორები სიბრტყესა და სივრცეში

I. *ვექტორის ცნება*.ისეთი სიდიდეები, როგორიცაა სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, ტემპერატურა და ა.შ. სავსებით განისაზღვრებიან მათი რიცხვითი მნიშვნელობით. ასეთ სიდიდეებს ***სკალარული*** სიდიდეები ეწოდებათ. არსებობენ სხვა სახის სიდიდეებიც, რომელთა განსაზღვრისათვის გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა საჭიროა აგრეთვე მიმართულების ცოდნა, მათ ***ვექტორული*** სიდიდეები ეწოდებათ. ვექტორული სიდიდეა ძალა, რომელიც მოდებულია სხეულზე. იგი განისაზღვრება ორი მახასიათებლით: ძალის სიდიდით და მიმართულებით. ვექტორული სიდიდეა სიჩქარეც. იგი განისაზღვრება ორი მახასიათებლით: სიჩქარის სიდიდით და მიმართულებით. ზოგადად, ვექტორი ყოველთვის ორი მახასიათებლით განისაზღვრება. ერთ შემთხვევაში მოსახერხებელია ამ მახასიათებლებად ავირჩიოთ ვექტორის მიმართულება და მისი აბსოლუტური სიდიდე (მაგალითად ძალის სიდიდე, სიჩქარის სიდიდე, ვექტორის სიგრძე), სხვა შემთხვევაში მოსახერხებელია, რომ ვექტორის მახასიათებლებად შევარჩიოთ კოორდინატები.

მიმართულ მონაკვეთს ვექტორი ეწოდება. ვექტორების აღნიშვნისათვის გამოიყენება ლათინური ანბანის მცირე ასოები თავზე პატარა ისრით ან ხაზით:



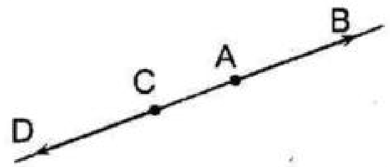
ზოგჯერ ვექტორს მისი გამომსახველი მონაკვეთის ბოლოების მითითებით აღნიშნავენ. ამ შემთხვევაში, პირველ ადგილზე ყოველთვის ვექტორის საწყისი წერტილი იწერება, რომელსაც ***სათავე*** ან ***მოდების წერტილი*** ეწოდება. მონაკვეთის მეორე ბოლოს ვექტორის ***ბოლო*** ეწოდება.



ნახაზზე მოცემული ექტორებია $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$.

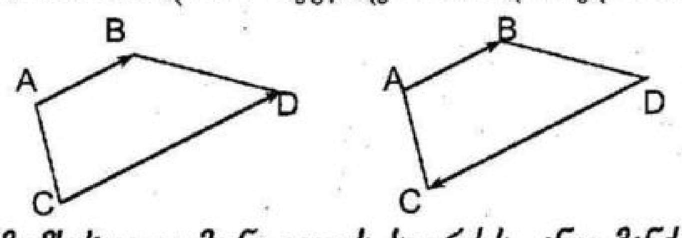
თუ ვექტორის სიწყისი და ბოლო წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მას ნულოვანი ვექტორი ეწოდება. ნულოვანი ვექტორი აღინიშნება ასე: $\overline{0}$.

ვიტყვით, რომ ვექტორი მდებარეობს წრფეზე, თუ ამ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები ამ წრფეს ეკუთვნის. $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორები AC წრფეზე მდებარეობს. ***ერთ წრფეზე მდებარე ვექტორები ან ერთნაირადაა მიმართული ან მოპირდაპირედ,*** რაც ძალიან ადვილი გასარჩევია.



მაგალითად, წინა ნახატზე მოცემული $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორები მოპირდაპირედაა მიმართული. სიბრტყეში და სივრცეში მდებარე ვექტორების წყვილი შესაძლოა ერთნაირად იყოს მიმართული, შესაძლოა მოპირდაპირედ იყოს მიმართული და შესაძლებელია არც ერთნაირად იყოს მიმართული და არც მოპირდაპირედ.

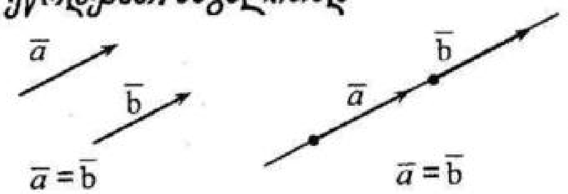
ვთქვათ, $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორები არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე. იმ შემთხვევაში, თუ ABDC ოთხკუთხედი ტრაპეციას ქმნის და AB||CD, მაშინ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ერთნაირადაა მიმართული. თუ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ერთნაირადაა მიმართული, მაშინ $\overline{AB}$ და $\overline{DC}$-ს ვუწოდებთ მოპირდაპირედ მიმართულს.



ვექტორის გამომსახველი მონაკვეთის სიგრძეს, ანუ მანძილს მის სათავესა და ბოლოს შორის ვექტორის სიგრძე ეწოდება. ამ ტერმინის ნაცვლად, და იგივე

მნიშვნელობით ხშირად გამოიყენება ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე. $\overline{a}$ ვექტორის სიგრძეს ჩავწერთ ასე: $|\overline{a}|$. ნულოვანის ვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია.

თუ ვექტორები ერთნაირად არიან მიმართული და ტოლი სიგრძეები აქვთ, მაშინ მათ ტოლი ვექტორები ეწოდებათ. მაგალითად

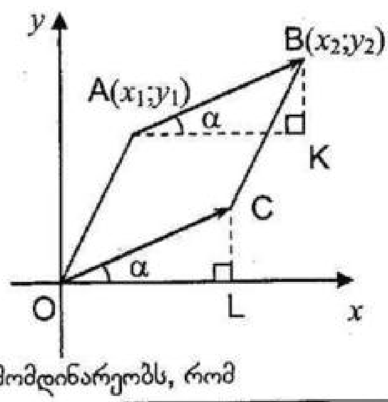


II. *ვექტორის კოორდინატები.* ვექტორებისთვის სამართლიანი შემდეგი მნიშვნელოვანი ფაქტი: თუ $\overline{a}$ არის ნებისმიერი ვექტორი, ხოლო A არის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ არსებობს $\overline{a}$-ს ტოლი ვექტორი, რომელიც A წერტილზე არის მოდებული. მართლაც, A წერტილზე გაივლება ერთადერთი წრფე, რომელიც $\overline{a}$-ს პარალელურია, ხოლო ამ წრფეზე A წერტილიდან (სხვადასხვა მხარეს) შეგვიძლია გადავდოთ $\overline{a}$ ვექტორის ტოლი ორი ვექტორი.

როგორც ვხედავთ, ყოველი ვექტორისათვის მისი ტოლი ვექტორების რაოდენობა უსასრულოა, რადგან ყოველ წერტილზე შეიძლება მოვდოთ ამ ვექტორის ტოლი ვექტორი. ტოლი ვექტორების უსასრულო რაოდენობიდან განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ერთი, რომელიც მოდებულია კოორდინატთა სათავეზე. მისი კოორდინატები, შეგვიძლია ჩავთვალოთ ერთდროულად ყველა ამ ვექტორის ტოლი ვექტორის კოორდინატებად, რადგან მისი ბოლოს კოორდინატები ერთდროულად წარმოადგენს კოორდინატებს ყველა, მისი ტოლი ვექტორისათვის.

ვიპოვოთ $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატები. $\overline{AB}=\overline{OC}$, ამიტომ OABC არის პარალელოგრამი, AK||Ox, ΔABK=ΔOCL, OL=x_2-x_1, CL=y_2-y_1, ანუ C წერტილის და $\overline{AB}=\overline{OC}$ ვექტორის კოორდინატები არის $(x_2-x_1;y_2-y_1)$. ამას ვწერთ ასე:

$$\overline{AB}\,(x_2-x_1;y_2-y_1),\ ან\ \overline{AB\,(x_2-x_1;y_2-y_1)}.$$



შედეგად, პითაგორას თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

მაგალითად, თუ A(4;3), B(–2;11), მაშინ $|\overline{AB}|$=10.

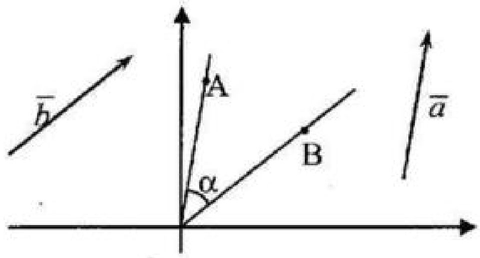
თუ $A(x_1;y_1;z_1)$ და $B(x_2;y_2;z_2)$ წერტილები მოცემულია სივრცეში, მაშინ ანალოგიური მსჯელობით ვრწმუნდებით, რომ

$$\overline{AB}\,(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)\ ან\ \overline{AB\,(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)}$$

და

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

როგორც ვექტორის კოორდინატების ერთი მარტივი გამოყენება, განვსაზღვროთ კუთხე ვექტორებს შორის. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია ორი ვექტორი: $\overline{a}\,(a_1;a_2)$ და $\overline{b}\,(b_1;b_2)$. სიბრტყეზე ავიღოთ A($a_1;a_2$) და B($b_1;b_2$) (რომლებიც წარმოადგენენ კოორდინატთა სათავეზე მოდებულ $\overline{a}$ და $\overline{b}$-ს ტოლი ვექტორების ბოლოებს) და განვიხილოთ სხივები OA და OB. განმარტების თანახმად, ამ ორ სხივს შორის კუთხეს ეწოდება ***კუთხე $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებს შორის.***



თუ სივრცეშია მოცემული $\overline{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ და $\overline{b}\,(b_1;b_2;b_3)$ ვექტორები, მაშინ კოორდინატთა სათავესა A$(a_1;a_2;a_3)$ და B$(b_1;b_2;b_3)$ წერტილებზე გამავალ OA და OB სხივებზე გადის ერთადერთი სიბრტყე. ამ სიბრტყეში OA და OB-ს შორის კუთხეს ვუწოდოთ კუთხე $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებს შორის.

III. ***მოქმედებები ვექტორებზე. ორი ვექტორის ჯამი (სხვაობა) ეწოდება ვექტორს, რომლის კოორდინატები წარმოადგენენ მოცემული ვექტორების კოორდინატების ჯამს (სხვაობას).*** მაგალითად, თუ მოცემულია $\overline{a}\,(a_1;a_2)$ და $\overline{b}\,(b_1;b_2)$, მაშინ მათი ჯამი არის $\overline{c}(a_1+b_1;a_2+b_2)$, ანუ

$$\overline{a}\,(a_1;a_2)+\overline{b}\,(b_1;b_2)=\overline{c}(a_1+b_1;a_2+b_2);$$

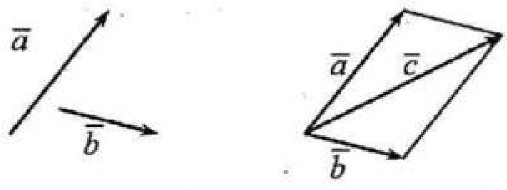
თუ მოცემულია $\overline{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ და $\overline{b}\,(b_1;b_2;b_3)$, მაშინ

$$\overline{a}\,(a_1;a_2;a_3)-\overline{b}\,(b_1;b_2;b_3)=\overline{c}(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3).$$

ახლა მოვიყვანოთ ვექტორების შეკრების გეომეტრიული ილუსტრაცია. დავუშვათ მოცემულია $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვეტორები და უნდა ვიპოვოთ $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$. აღნიშნული $\overline{c}$ ვექტორი შეიძლება ვიპოვოთ ორი ხერხით:

1) ვექტორების შეკრების ***სამკუთხედის*** წესი. ავიღოთ $\overline{a}$ ვექტორი და $\overline{b}$ ვექტორის სათავე მოვდოთ $\overline{a}$ ვექტორის ბოლოს, $\overline{c}$ ვექტორი კი იქნება ვექტორი, რომლის სათავეა $\overline{a}$ ვექტორის სათავე, ხოლო ბოლო კი $\overline{b}$ ვექტორის ბოლო.

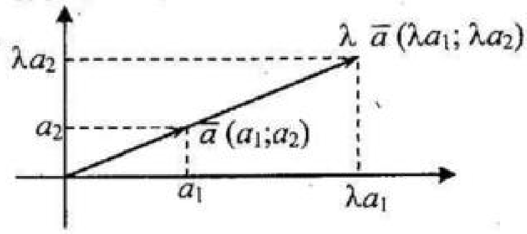
2) ვექტორების შეკრების ***პარალელოგრამის*** წესი. ავიღოთ $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორები და ორივე მოვდოთ ერთ წერტილში მიღებულ გვერდებზე ავაგოთ პარალელოგრამი. ამ შემთხვევაში $\overline{c}$ ვექტორი იქნება პარალელოგრამის დიაგონალი, მიმართული საერთო წვეროდან მოპირდაპირე წვეროსკენ.



შენიშვნა. ორი ვექტორის ჯამი ერთი და იგივე ვექტორია, ვექტორების შეკრების რომელი წესიც არ უნდა გამოვიყენოთ.

$\overline{a}$ ვექტორის რაიმე $\lambda\neq 0$ რიცხვზე ნამრავლი $\lambda\overline{a}$ ეწოდება ისეთ $\overline{b}$ ვექტორს, რომლის სიგრძეა $|\overline{b}|=|\lambda\cdot\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, ხოლო მიმართულება ემთხვევა $\overline{a}$ ვექტორის მიმართულებას, თუ $\lambda>0$ და აქვს საწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda<0$.

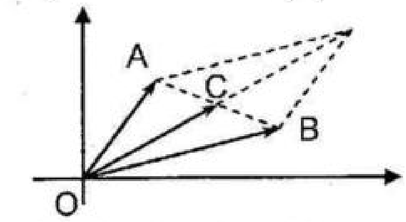
როცა $\lambda=0$, მაშინ $\lambda\overline{a}=0$ ნებისმიერი $\overline{a}$ ვექტორისათვის. როცა $|\lambda|>1$ ვექტორის სიგრძე იზრდება, ხოლო როცა $|\lambda|<1$, ხდება ვექტორის "შეკუმშვა". თუ $\overline{a}=(a_1;a_2)$, მაშინ $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2)$.



ვექტორების შეკრების და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ოპერაციები აკმაყოფილებენ შემდეგ თვისებებს:

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$
$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c},$$
$$\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{b}+\lambda\overline{a},$$
$$(\lambda_1+\lambda_2)\overline{a}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{a},$$
$$(\lambda_1\lambda_2)\overline{a}=\lambda_1(\lambda_2\overline{a})=\lambda_2(\lambda_1\overline{a}),$$

მაგალითი. სიბრტყეზე მოცემულია $A(a_1;a_2)$ და $B(b_1;b_2)$ წერტილები. ვიპოვოთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები. ავაგოთ $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორები. AB მონაკვეთის შუა წერტილი აღვნიშნოთ C-თი. ცხადია, რომ $\overline{OC}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$ და C-ს კოორდინატები იგივეა, რაც $\overline{OC}$-ს კოორდინატები, ამიტომ C-ს კოორდინატებია $\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$.



თუ A და B წერტილები სივრცეშია: $A(a_1;a_2;a_3)$ და $B(b_1;b_2;b_3)$, მაშინ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

ორი ვექტორის ***სკალარული ნამრავლი*** წარმოადგენს რიცხვს და არა ვექტორს. იგი მიიღება ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლების შეკრებით:

$$\overline{a}\,(a_1;a_2)\cdot\overline{b}\,(b_1;b_2)=a_1b_1+a_2b_2;$$
$$\overline{a}\,(a_1;a_2;a_3)\cdot\overline{b}\,(b_1;b_2;b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

სამართლიანია ტოლობები:

$$\overline{a}\;\overline{b}=\overline{b}\;\overline{a},$$
$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\;\overline{c}+\overline{b}\;\overline{c}.$$

ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლისათვის გამოიყენება შემოკლებული ჩანაწერი:

$$\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2,$$

როგორც ვხედავთ, სკალარული ნამრავლი წარმოადგენს რიცხვების ნამრავლის ბუნებრივ განზოგადებას. მაგალითად

$$(\overline{a}+\overline{b})^2=\overline{a}^2+2\overline{a}\;\overline{b}+\overline{b}^2,$$
$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2.$$

შინაარსობრივადაც სკალარული ნამრავლი ბუნებრივად ერგება მრავალ ამოცანას. მაგალითად, თუ მაღაზიაში ვყიდულობთ ერთიდაიგივე სახის x ნივთს, თითოს p ფასად, დანახარჯი არის px. თუ სამი სახის

ნივთის ყიდვა მინდა, რომელთა ფასებია $p(p_1;p_2;p_3)$, ხოლო რაოდენობებს აღვნიშნავთ $x(x_1;x_2;x_3)$, მაშინ მთლიანი დანახარჯი არის მათი სკალარული ნამრავლი:

$$\overline{x}\cdot\overline{p}=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3.$$

ვთქვათ მოცემულია $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორები. მაშინ მათი სკალარული ნამრავლისათვის სამართლიანია ფორმულა:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi,$$

სადაც φ არის $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე. ხშირად გამოიყენება ამ ფორმულის კერძო შემთხვევები:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|,$$

როდესაც ვექტორები ერთნაირადაა მიმართული;

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0,$$

როდესაც ვექტორები მართობულია;

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=-|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|,$$

როდესაც ვექტორები ერთმანეთის მოპირდაპირედაა (φ=180°) მიმართული.

IV. *რამდენიმე მაგალითი.*

ამოცანა 1. $\overline{a}(4;y)$ ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე არის 5-ის ტოლი. რისი ტოლი შეიძლება იყოს y?

ამოხსნა. $|\overline{a}|=\sqrt{4^2+y^2}=5$, საიდანაც $y=\pm3$.

ამოცანა 2. $\overline{a}(5;a_2;13)$ ვექტორის არის $\overline{AB}$ ვექტორის ტოლი, სადაც A(3;4;z) და B(x;2;7) მოცემული წერტილებია. რისი ტოლია x, a_2 და z?

ამოხსნა. $\overline{a}(5;a_2;13)=\overline{AB}(x-3;-2;7-z)$, ამიტომ

$$\begin{cases} x-3=5 \\ a_2=-2 \\ 7-z=13 \end{cases}$$

საიდანაც $x=8$, $a_2=-2$, $z=-6$.

ამოცანა 3. იპოვეთ $3\overline{a}-2\overline{b}$ ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე, თუ $\overline{a}(1;0;-3)$, $\overline{b}(-3;1;2)$.

ამოხსნა. $3\overline{a}(3;0;-9)$, $2\overline{b}(-6;2;4)$, $3\overline{a}-2\overline{b}=(9;-2;-13)$,

$$|3\overline{a}-2\overline{b}|=\sqrt{81+4+169}=\sqrt{254}.$$

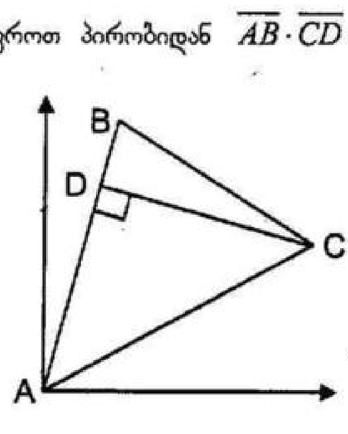
ამოცანა 4. სამკუთხედის წვეროებია A(1;1;0), B(2;2;5) და C(0;4;3). იპოვეთ A წვეროდან BC გვერდზე დაშვებული მედიანა.

ამოხსნა. BC გვერდის შუაწერტილი არის D(1;3;4). ამიტომ მედიანის სიგრძე არის $|\overline{AD}|$ და

$$|\overline{AD}|=\sqrt{(1-1)^2+(3-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{5}.$$

ამოცანა 5. სამკუთხედის წვეროებია A(0;0), B(2;4) და C(4;1). იპოვეთ C წვეროდან AB გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

ამოხსნა. სიმაღლე უნდა განვსაზღვროთ პირობიდან $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, რადგან მართობული ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულია.



A და B წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება არის $y = 2x$, ამიტომ რომელიღაც x-ისათვის D(x ;2 x) არის. შესაბამისად გვაქვს: $\overline{CD} = (4 - x;1 - 2x)$, $\overline{AB}(2;4)$ და

$$(4 - x) \cdot 2 + (1 - 2x) \cdot 4 = 0,$$

$$x = 1{,}2.$$

ამიტომ გვაქვს $\overline{CD}(3{,}8;1{,}4)$ და

$$|\overline{CD}| = \sqrt{14{,}44 + 1{,}96} = \sqrt{16{,}4}.$$

ამოცანა 6. სამკუთხედის წვეროებია A(0;0), B(2;1) და C(–3;6). იპოვეთ მისი ფართობი.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ფირმულა $S = \dfrac{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cdot \sin\varphi}{2}$, სადაც φ არის C წვეროსთან მოთავსებული კუთხე, რომლის კოსინუსს სკალარული ნამრავლის ფორმულიდან ვიპოვით.

გვაქვს $\overline{CA} = (-3;6)$, $\overline{CB} = (-5;5)$, $|\overline{CA}| = 3\sqrt{5}$, $|\overline{CB}| = 5\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{15 + 30}{3 \cdot \sqrt{5} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$,

$\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

$$S = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{10}} = 7{,}5.$$