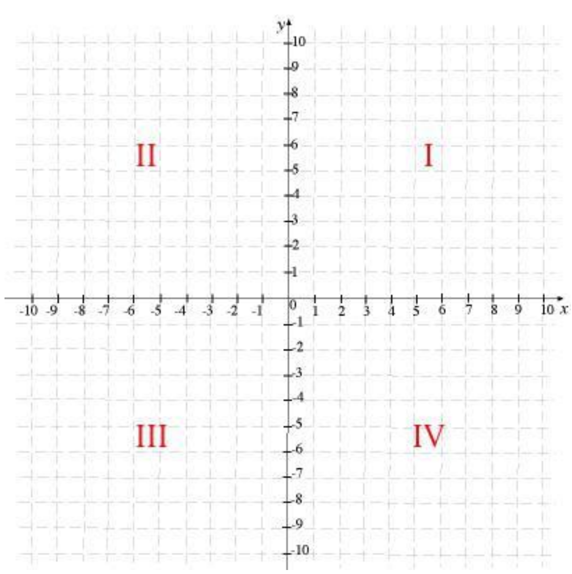
7. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყესა და სივრცეში. ფუნქცია, ფუნქციის გრაფიკი.

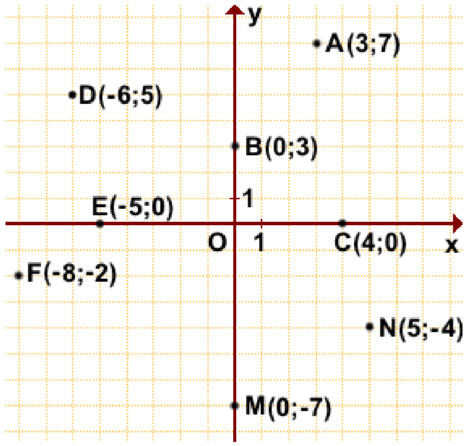
სიბრტყეზე:

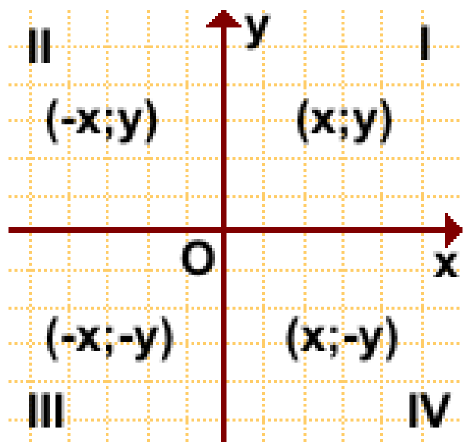
მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე მოცემულია ორი ერთმანეთის პერპენდიკულარული ხაზით. სწორ ხაზებს კოორდინატულ ღერძებს (ან კოორდინატულ ღერძებს) უწოდებენ. ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილს ეწოდება საწყისი და აღინიშნება ასო O-ით.

ჩვეულებრივ, ერთი ხაზი ჰორიზონტალურია, მეორე კი ვერტიკალური. ჰორიზონტალური ხაზი აღინიშნება როგორც x (ან Ox) ღერძი და ეწოდება აბსცისის ღერძი, ვერტიკალური არის y (Oy) ღერძი, ეწოდება ორდინატთა ღერძი. მთელი კოორდინატთა სისტემა აღინიშნება xOy-ით. O წერტილი თითოეულ ღერძს ყოფს ორ ნახევრადღერძად, რომელთაგან ერთი დადებითად ითვლება (ისრით აღინიშნება), მეორე უარყოფითად.

მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყე იყოფა 4 მეოთხედად:





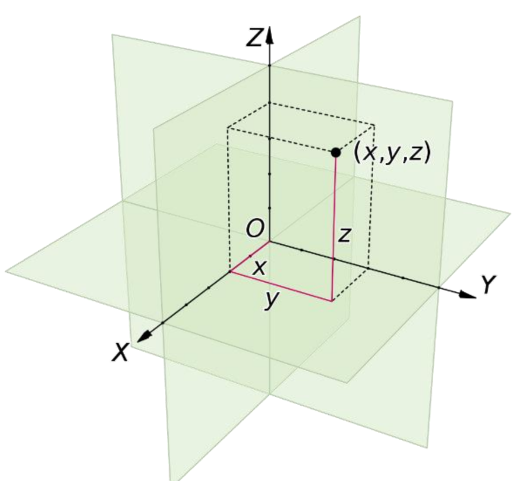


მანძილი ორ წერტილს შორის

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

მართხუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში:

სიბრტყის ანალოგიურად ხდება მართკუთხა კოორდინატების განსაზღვრა სამგანზომილენიან (N-განზომილებიან) სივრცეში, იმ განსხვავებით, რომ ამ შემთხვევაში არჩეული უნდა იქნას სამი (N) ურთიერთმართობული წრფე და წერტილის მდებარეობა ამ სივრცეში შესაბამისად ხასიათდება სამი (N) კოორდინატით.



სამგანზომილებიანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, O კოორდინატთა სათავითა და X, Y, Z ღერძებით რომელთა ორიენტაცია ისრებით არის ნაჩვენები. დანაყოფები ღერძებზე შეესაბამება სიგრძის ერთეულებს. შავი წერტილი აღნიშნავს წერტილს კოორდინატებით $X = 2$, $Y = 3$, და $Z = 4$, ანუ (2,3,4).

სამგანზომილებიან სივრცეში მანძილი ორ წერტილს შორის:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ფუნქცია:

X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება, ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციის ჩასაწერად, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას X და Y სიმრავლეებს შორის რაიმე f წესით, მიღებულია აღნიშვნები:

$$X \xrightarrow{f} Y, \text{ ან } f : X \to Y, \text{ ან } y = f(x), \text{ სადაც } x \in X, \quad y \in Y.$$

x-ს უწოდებენ **დამოუკიდებელ ცვლადს** ანუ არგუმენტს, ხოლო f(x)–ს **ფუნქციის მნიშვნელობას,** რომელიც შეესაბამება არგუმენტის x მნიშვნელობას.

X სიმრავლეს f ფუნქციის **განსაზღვრის არე** ეწოდება და **D(f)** სიმბოლოთი აღინიშნება. Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამებიან, f ფუნქციის **მნიშვნელობათა სიმრავლე** ან ცვლილების არე ეწოდება და **E(f)** სიმბოლოთი აღინიშნება.

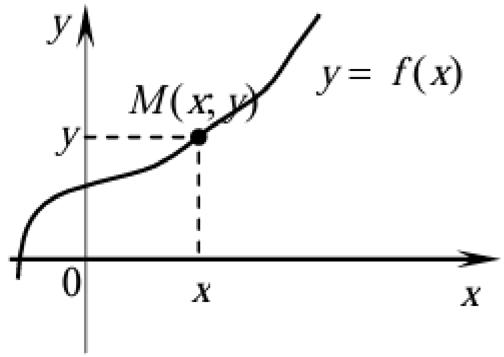
ფუნქციის მოცემის ხერხები:

ფუნქციის მოცემის სამი ყველაზე უფრო გავრცელებული ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

ცხრილური:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

გრაფიკი:



ანალიზური:

$$y = 3x^2 - 1\,; \qquad y = \frac{2x-9}{x+7}\,;$$

ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა:

თუ x-ის ზრდასთან ერთად f(x) ფუნქციის მნიშვნელობა იზრდება და გრაფიკი ზევით მიიწევს, ვიტყვით, რომ ფუნქცია ზრდადია. ხოლო თუ x-ის ზრდასთან ერთად ფუნქციის მნიშვნელობა f(x) კლებულობს და გრაფიკი ქვევით ეშვება, ვიტყვით, რომ ფუნქცია კლებადია.

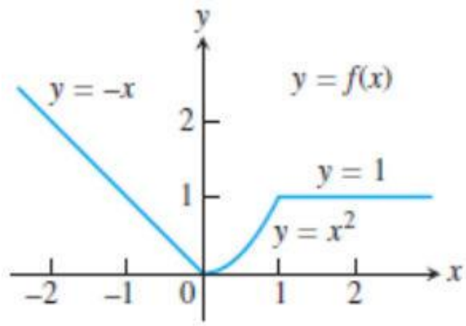
განსაზღვრება. ვთქვათ y = f(x) ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე [a; b] ინტერვალზე და x1, x2 ∈ [a; b] ნებისმიერი ორი წერტილია.

• თუ f(x1) < f(x2) ყოველთვის, როცა x1 < x2, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **ზრდადი** [a; b]-ზე.

• თუ f(x1) > f(x1) ყოველთვის, როცა x1 < x2, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **კლებადი** [a; b]-ზე.

მაგალითი. უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



კლებადია [−∞; 0]-ზე და ზრდადია [0; 1]-ზე. ფუნქცია არც ზრდადია და არც კლებადია [1;+∞] ინტერვალზე.

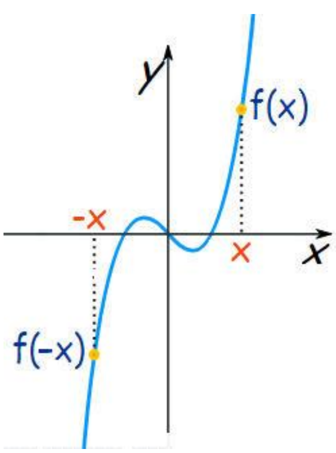
ფუნქციის ლუწ-კენტობა:

ლუწი:

ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და აკმაყოფილებს

პირობას f(−x) = f(x)

თვისება: გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა (oy) ღერძის მიმართ.



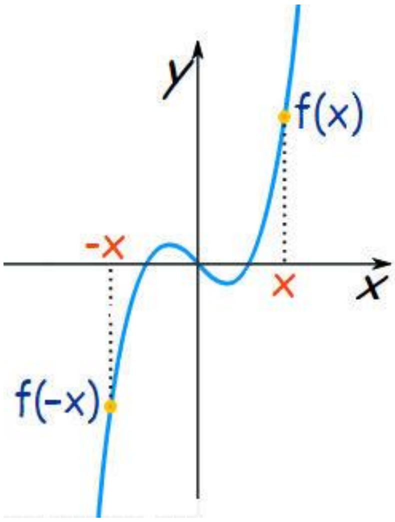
კენტი:

ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და

აკმაყოფილებს

პირობას $f(-x) = -f(x)$

თვისება: გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

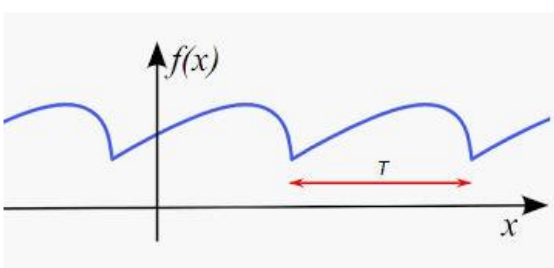


ფუნქციის პერიოდულობა:

თუ ნებისმიერი $x \in D(f)$ -სათვის რიცხვები $x-T$ და $x+T$ აგრეთვე ეკუთვნის $D(f)$-ს

და მართებულია ტოლობა

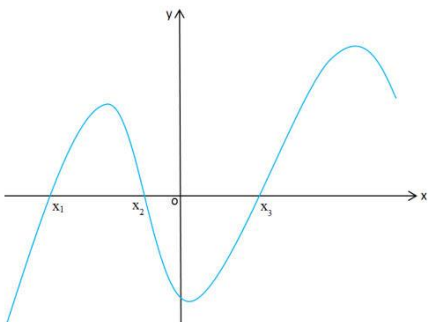
$f(x) = f(x + T) = f(x - T)$



ფუნქციის ნულები (აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები)

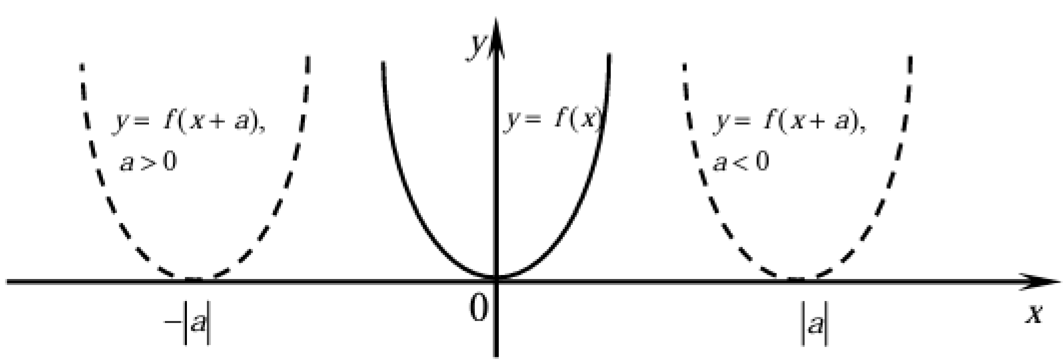
y = f(x) ფუნქციის ნულები არის არგუმენტის (x ცვლადის) ისეთი მნიშვნელობები, როდესაც ფუნქციის მნიშვნელობა (y ცვლადის მნიშვნელობა) ტოლია ნულის. თუ ფუნქცია მოცემულია y = f(x) ფორმულით, მაშინ ფუნქციის ნულების დადგენისთვის საჭიროა ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების ფესვები f(x) = 0.

გეომეტრიულად ფუნქციის ნულები არის ფუნქციის გრაფიკის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები.



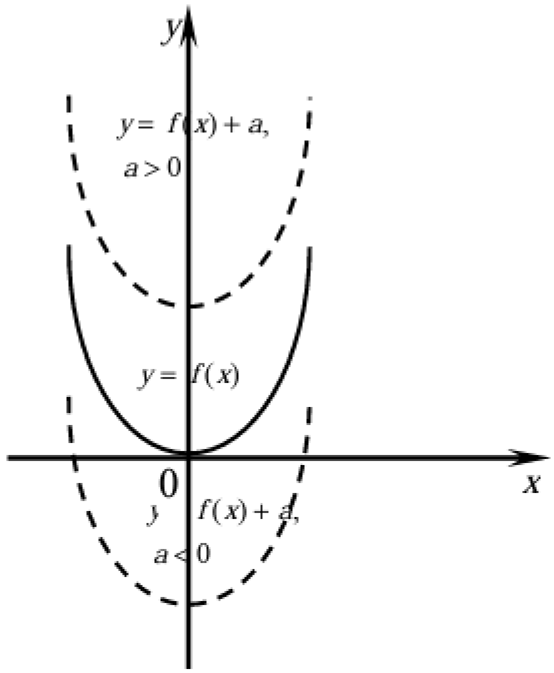
ფუნქციათა გრაფიკების გეომეტრიული გარდაქმნები:

1. $y=f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით $|a|$ მანძილზე Ox ღერძის მიმართულებით, თუ $a<0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $a>0$ (ნახ.7).



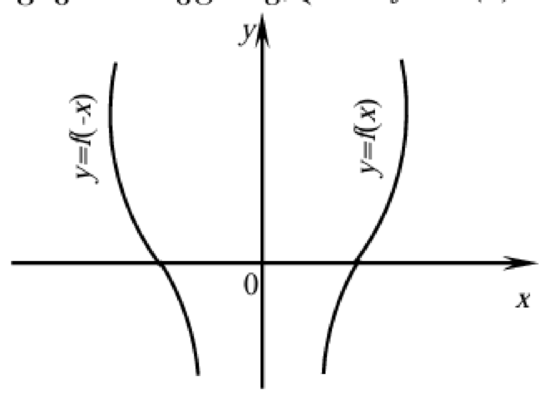
ნახ. 7

2. $y = f(x) + a$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით $|a|$ მანძილზე Oy ღერძის მიმართულებით, თუ $a > 0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $a < 0$ (ნახ. 8).

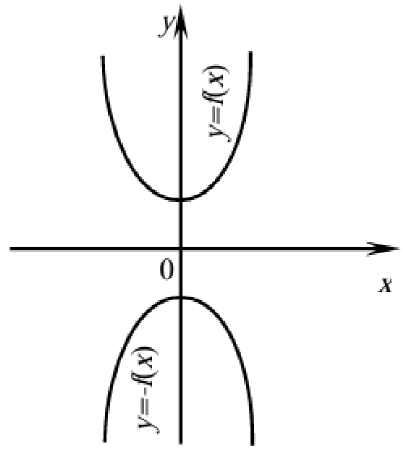


ნახ. 8

3. $y = f(-x)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა Oy ღერძის მიმართ (ნახ. 9).

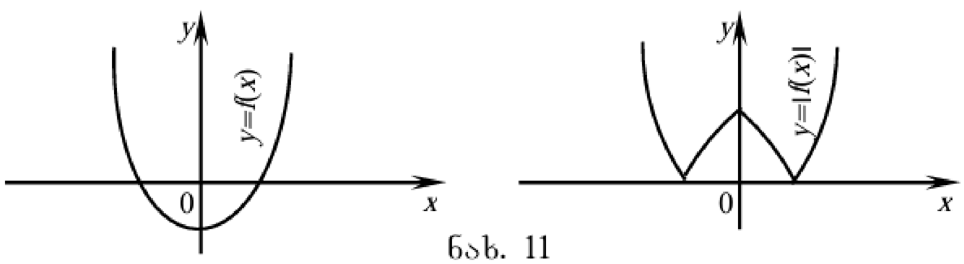


4. $y = -f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა Ox ღერძის მიმართ (ნახ.10).



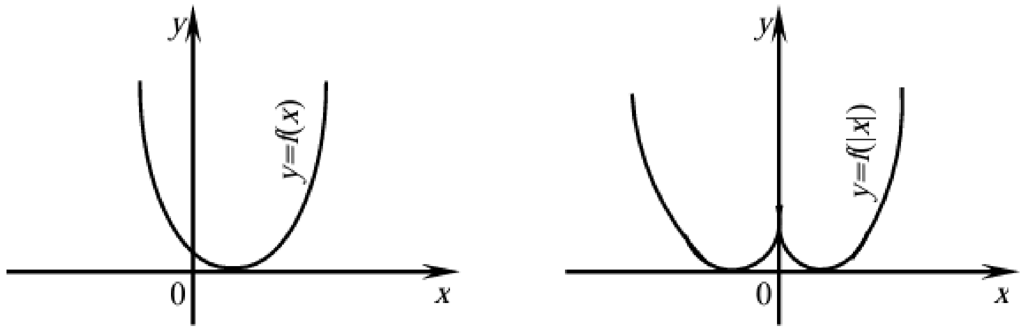
ნახ. 10

5. $y = |f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საჭიროა $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც Ox ღერძის ქვემოთ მდებარეობს, სიმეტრიულად აისახოს Ox ღერძის მიმართ, ხოლო დანარჩენი ნაწილი უცვლელად დავტოვოთ (ნახ.11).



ნახ. 11

6. $y = f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი არგუმენტის არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. რადგან $y = f(|x|)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ (ნახ.12).



ნახ. 12

დამატებითი ნახაზები: