10. კვადრატული ფუნქცია. კვადრატული განტოლება და უტოლობა.

$ax^2 + bx + c = 0$ სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $a \neq 0$, კვადრატული განტოლება ეწოდება. a–ს ეწოდება კვადრატული განტოლების პირველი კოეფიციენტი, b-ს მეორე კოეფიციენტი, ხოლო c–ს თავისუფალი წევრი.

კვადრატული განტოლება ax 2 + bx + c = 0

დისკრიმინანტი D = b^2 − 4ac

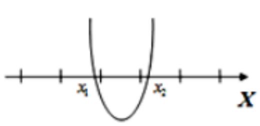
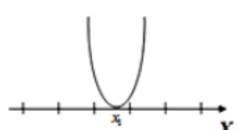
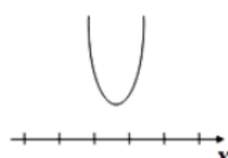
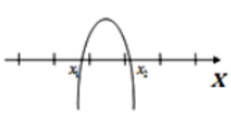
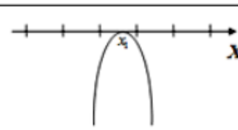
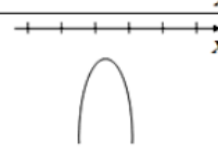
• თუ **D > 0,** მაშინ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ნამდვილი ამონახსნი

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

• თუ **D = 0**, მაშინ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი ამონახსნი

$$x = -\frac{b}{2a},$$

• თუ **D < 0**, მაშინ განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ამონახსნები.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

ვიეტის თეორემა

თეორემა. თუ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი $D>0$, მაშინ განტოლების ამონახსნთა ჯამი უდრის $-\frac{b}{a}$–ს, ხოლო ნამრავლი $\frac{c}{a}$–ს.

თუ ax 2 + bx + c = 0 განტოლებას აქვს ნამდვილი ამონახსნები, მაშინ

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

კვადრატული სამწევრის დაშლა მამრავლებად

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)=$$
$$=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right)=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

ამრიგად

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

ბიკვადრატული განტოლება

$ax^4+bx^2+c=0$ სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $a\neq 0$, ბიკვადრატული განტოლება ეწოდება.

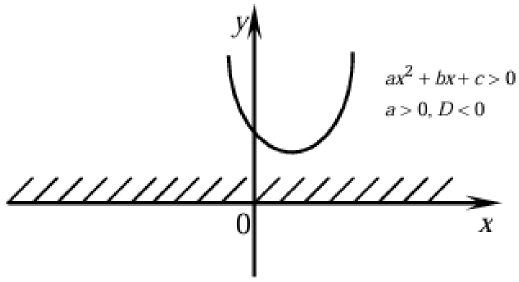
თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x^2=y$, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას y ცვლადის მიმართ

$$ay^2+by+c=0. \tag{1}$$

კვადრატული უტოლობა:

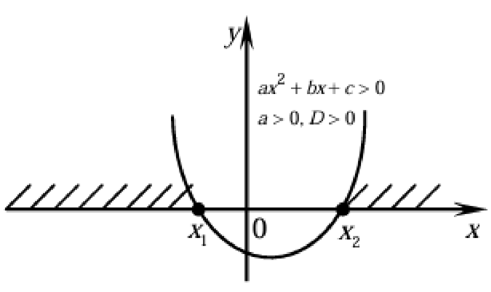
$ax^2+bx+c>0$ და $ax^2+bx+c<0$ სახის უტოლობებს, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $a\neq 0$, კვადრატული უტოლობები ეწოდება.

1. თუ $D=b^2-4ac<0$, მაშინ პარაბოლა მთლიანად მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ და ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა R (ნახ. 31), ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი–ცარიელია.

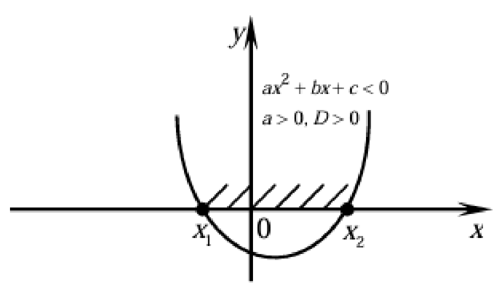


ნახ. 31

2. თუ $D=b^2-4ac>0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა Ox ღერძს ჰკვეთს ორ x_1 და x_2 წერტილში $(x_1<x_2)$, რომლებიც ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის ფესვებს წარმოადგენენ. ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე შედგება Ox ღერძის ყველა იმ წერტილებისაგან, რომლებიც მდებარეობენ x_1–ის მარცხნივ ან x_2–ის მარჯვნივ ე. ი. "ფესვებს გარეთ" (ნახ. 32), ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე შედგება Ox ღერძის ყველა იმ წერტილებისაგან, რომლებიც მდებარეობენ x_1 და x_2 წერტილებს შორის (ე. ი. "ფესვებს შორის") (ნახ. 33).



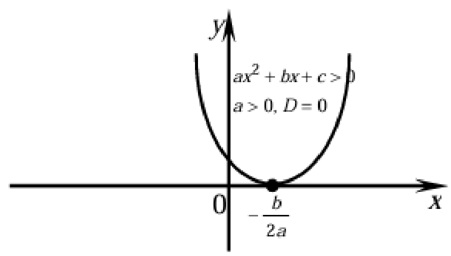
ნახ. 32



ნახ. 33

ამრიგად, თუ $a>0$ და $D>0$, მაშინ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$, ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი $-]x_1;x_2[$.

3. თუ $D=b^2-4ac=0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა Ox ღერძს ეხება $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში. ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნს წარმოადგენს Ox ღერძის ნებისმიერი წერტილი გარდა $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილისა (ნახ. 34), ე. ი. ამონახსნთა სიმრავლეა $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right[\cup\left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$, ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი ცარიელია.



ნახ. 34

იმ შემთხვევაში, როცა $a<0$, უტოლობის ორივე მხარის -1-ზე გამრავლებით და უტოლობის ნიშნის მოპირდაპირეთი შეცვლით კვადრატული უტოლობის ამოხსნა დაიყვანება განხილულ შემთხვევებზე.

კვადრატული ფუნქცია, თვისებები:

$Y= ax^2 +bx +c$ ($a \neq 0$) $D(y)=R$; თუ $a>0$ მცირდება$(-\infty; x_0]$ და იზრდება $[x_{0;} +\infty)$; $x_0 = -\frac{b}{2a}$

(მინიმუმის წერტილი): $Y_0 = Y(X_0)$)მინიმუმი $E(Y)=[Y_{0;} +\infty)$; გრაფიკის სახე პარაბოლა.

წვეროს კოორდინატები $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $Y_0 = Y(X_0) =-\frac{D}{4a}$. სიმეტრიის ღერძი $x=x_0$ თუ $a<0$
y_0 –უდიდესს მნიშვნელობაა, თუ $a>0$ y_0 -უმცირესი მნიშვნელობაა. თუ $a<0$ იზრდება

$(-\infty; x_0]$შუალედში, მცირდება $[x_{0;} +\infty)$ შუალედში. $x_0 = -\frac{b}{2a}$ - მაქსიმუმის წერტილია, - $Y_0 = Y(X_0)$ –მაქსიმუმია. $E(Y)= (-\infty; Y_0)$; $Y= ax^2$ ლუწი ფუნქციაა.

$D=b^2-4ac>0$	$D=b^2-4ac=0$	$D=b^2-4ac<0$
აქვს ორი ფესვი $X_1; X_2$ OX ღერძს კვეთსორ წერტილში	აქვს ერთი ფესვი$X_0 = -\frac{b}{2a}$ OX ღერძს გრაფიკი ეხება x_0წერტილში	არ აქვს ფევი OX ღერძს არ კვეთს