§ 4. რაციონალური გამოსახულებები

I. გამოსახულებები. მათემატიკაში გვხვდება ორი სახის გამოსახულება, რიცხვითი და ცვლადიანი. ცვლადიანი გამოსახულება, თავის მხრივ, მოიცავს რამდენიმე შემთხვევას.

რიცხვითი გამოსახულება შედგება ერთი ან რამდენიმე რიცხვისაგან და საჭიროების შემთხვევაში, არითმეტიკული მოქმედების ნიშნებისა და ფრჩხილებისაგან, რომლებიც გვიჩვენებენ თუ რა მოქმედებები და რა მიმდევრობით უნდა შესრულდეს რიცხვებზე. მაგალითად,

$$17; \qquad 2{,}5+5{,}7\cdot 1{,}3; \qquad 2(3-7)+\frac{27}{44}.$$

თუ რიცხვით გამოსახულებაში მითითებული თანმიმდევრობით მოქმედებების ჩატარების შედეგად მიიღება რიცხვი, ამ რიცხვს ეწოდება რიცხვითი გამოსახულების **რიცხვითი მნიშვნელობა**. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ რიცხვით გამოსახულებას არა აქვს აზრი. მაგალითად $\frac{2+5}{3-3}$ გამოსახულებას არა აქვს აზრი.

ცვლადიანი გამოსახულება შედგება ერთი ან რამდენიმე ცვლადისაგან და საჭიროების შემთხვევაში, რიცხვებისაგან, არითმეტიკული მოქმედებების ნიშნებისაგან და ფრჩხილებისაგან. მაგალითად,

$$x, \qquad 3xy, \qquad 2x^3y+\frac{3}{y}, \qquad 5a^2b(x+y), \qquad tv.$$

თუ ცვლადიან გამოსახულებაში ცვლადების ნაცვლად ჩავსვამთ კონკრეტულ რიცხვებს, მივიღებთ რიცხვით გამოსახულებას. თუ მიღებულ გამოსახულებას აქვს რიცხვითი მნიშვნელობა, მაშინ ცვლადების აღებულ კონკრეტულ მნიშვნელობებს ეწოდებათ **დასაშვები მნიშვნელობები**. მაგალითად, $\frac{a}{b}$ ცვლადიან გამოსახულებაში a-ს ყოველი მნიშვნელობა არის დასაშვები, ხოლო b-სათვის დასაშვებია მხოლოდ არანულოვანი მნიშვნელობები.

ერთი და იგივე ცვლადების (ცვლადის) შემცველი სხვადასხვა გამოსახულების მნიშვნელობებს, გამოთვლილს ერთსახელა ცვლადების ერთიდაიგივე მნიშვნელობისათვის, ეწოდებათ **შესაბამისი მნიშვნელობები**. მაგალითად, $2x^2+1$ და $3x^3+5x+1$ გამოსახულებების შესაბამისი მნიშვნელობები, როცა $x=1$ არის 3 და 9.

ტოლობის „=" ნიშნით შეერთებულ ორ გამოსახულებას ტოლობა ეწოდება. თუ ორივე გამოსახულება რიცხვითია, მაშინ ტოლობასაც **რიცხვითი ტოლობა** ეწოდება. რიცხვითი ტოლობა შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი (მაგალითად, $5=5$) ან მცდარი (მაგალითად, $5=2$). თუ ერთ-ერთი გამოსახულება მაინც ცვლადიანია, მაშინ ტოლობას ეწოდება **ცვლადების შემცველი ტოლობა**. ცვლადების შემცველი ტოლობა შესაძლოა ჭეშმარიტი იყოს ცვლადების დასაშვები ერთი მნიშვნელობებისათვის და მცდარი — სხვა მნიშვნელობებისათვის. მაგალითად, $x^2=x$ ჭეშმარიტია, როდესაც $x=0$ და $x=1$, სხვა მნიშვნელობებისათვის — მცდარი.

ორ გამოსახულებას ეწოდება **იგივურად ტოლი**, თუ მათი შესაბამისი მნიშვნელობები ტოლია ცვლადების ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის. მაგალითად x^2-y^2 და $(x-y)(x+y)$ იგივურად ტოლი გამოსახულებებია.

ორ იგივურად ტოლ გამოსახულებას, შეერთებულს ტოლობის ნიშნით, **იგივეობა** ეწოდება. მაგალითად $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ არის იგივეობა.

ერთი გამოსახულების შეცვლას მისი იგივურად ტოლი გამოსახულებით ეწოდება **იგივური გარდაქმნა**.

ისევე, როგორც ცვლადებისაგან მიიღება გამოსახულება, გამოსახულებისაგან, არითმეტიკული

მოქმედებების გამოყენებით, შეგვიძლია მივიღოთ ახალი გამოსახულებები. გამოსახულებების კლასიფიკაცია ხდება იმის მიხედვით, თუ რომელი არითმეტიკული ოპერაციები იქნა გამოყენებული ცვლადებზე გამოსახულების მისაღებად.

ცვლადიან გამოსახულებას, რომელშიც ცვლადების მიმართ გამოყენებულია შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები, რაციონალური გამოსახულება ეწოდება. მაგალითად:

$$a^2+\frac{c}{b^2}, \qquad \sqrt{2}a, \qquad \frac{x+y}{x-y}$$

რაციონალური გამოსახულებებია, მაგრამ $2\sqrt{a}$ არ არის რაციონალური გამოსახულება. ტერმინი „რაციონალური გამოსახულება" მოტივირებულია იმ გარემოებით, რომ მინიმალური რიცხვითი სიმრავლე, რომელზეც განსაზღვრულია რაციონალური გამოსახულების განმარტებაში მონაწილე ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება, არის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე; $2\sqrt{a}$ არ არის რაციონალური გამოსახულება, რადგან როცა a რაციონალურია, $\sqrt{a}$ შეიძლება იყოს ირაციონალური. შემდეგი ტერმინის მოტივაციაც ანალოგიურია.

ცვლადიან გამოსახულებას, რომელშიც ცვლადების მიმართ გამოყენებულია შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციები, ეწოდება მთელი გამოსახულება. მთელი გამოსახულების მაგალითებია ერთწევრი და მრავალწევრი.

თუ მთელ გამოსახულებაზე ვიმოქმედებთ მათი განმსაზღვრელი სამი ოპერაციით, მივიღებთ ისევ მთელ გამოსახულებას, ხოლო თუ რაციონალურ გამოსახულებაზე ვიმოქმედებთ მათი განმსაზღვრელი ოთხი მოქმედებით, კვლავ რაციონალურ გამოსახულებას მივიღებთ.

II. მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი. ***ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის, განმარტების თანახმად***

$$a^1=a, \quad \textit{ხოლო} \quad a^n=\underbrace{a\cdots a}_{n-\text{ჯერ}}, \quad n\geq 2, \quad n\in N.$$

შეგვიძლია მოვიყვანოთ ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის რეკურენტული განმარტებაც:

$$a^1=a, \quad \text{ხოლო} \quad a^n=a^{n-1}\ a=a\ a^{n-1}, \quad n\geq 2, \quad n\in N$$

უშუალოდ განმარტების შედეგად გვაქვს:

- $1^n=1,\ 0^n=0,\ n=1, 2, \ldots$;
- ნებისმიერი რიცხვი ლუწ ხარისხში არის დადებითი რიცხვი. მაგალითად, $(\ 3)^{104}>0$;
- უარყოფითი რიცხვი კენტ ხარისხში არის უარყოფითი რიცხვი. მაგალითად, $(-3)^3<0$
- დადებითი რიცხვი ნებისმიერ ხარისხში არის დადებითი რიცხვი.

ავიღოთ არანულოვანი a რიცხვი ***ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის განვმარტოთ a რიცხვის უარყოფითი მთელი ხარისხი a^{-n} შემდეგი ფორმულით:***

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}. \tag{1}$$

მიღებულია, რომ $a^0=1$, რაც ეთანხმება (1) ს.

მთელმაჩვენებლიან ხარისხს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $(ab)^n=a^n\cdot b^n$,

2) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$,

3) $(a^n)^m=a^{nm}$,

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$,

5) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$, $a\neq 0$,

სადაც m და n მთელი რიცხვებია. a და b – ნამდვილი.

მაგალითად,

$2^2 \cdot 5^2=(2 \cdot 5)^2=100;$

$2^3 \cdot 2^2=2^5=32, \qquad a^3 \cdot a^{-1}=a^2;$

$(2^2)^3=2^6=64,$ მაგრამ $(a^m)^n \neq a^{m^n}$; კერძოდ $(2^2)^3 \neq 2^{2^3}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$$

შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ ვნახავთ, რომ 1) – 4) ფორმულები სამართლიანია გაცილებით ზოგად შემთხვევაში.

III. ერთწევრი და მრავალწევრი. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები. ***ერთწევრი ეწოდებათ რიცხვებს, რიცხვების ნამრავლებს და რიცხვებისა და ცვლადების ნატურალური ხარისხების ნამრავლებს.*** მაგალითად, შემდეგი გამოსახულებები

$$6, \quad 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3}, \quad axy, \quad (-0,5)cx^2z^3$$

წარმოადგენენ ერთწევრებს.

სტანდარტული სახის ერთწევრი ეწოდება ნამრავლს, რომელიც შედგება ერთი რიცხვითი თანამამრავლისაგან, ანუ **კოეფიციენტისაგან** და სხვადასხვა ცვლადების ხარისხებისაგან. მაგალითად:

$$-5, \quad a, \quad x^3, \quad 3a^2x^4, \quad \frac{2}{3}b.$$

ერთწევრის ხარისხი ეწოდება ცვლადების ხარისხის მაჩვენებლების ჯამს. მაგალითად, ზემოთ ჩამოთვლილი სტანდარტული სახის ერთწევრების ხარისხები, შესაბამისად ტოლია:

$$0, \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 1.$$

ერთმანეთის ტოლ, მაგრამ შესაძლო რიცხვითი კოეფიციენტებით განსხვავებულ ერთწევრებს ეწოდებათ **მსგავსი** ერთწევრები. მაგალითად, x^2y; $-5x^2y$; $2x^2y$ მსგავსი ერთწევრებია.

რამდენიმე ერთწევრის ალგებრულ ჯამს მრავალწევრი ეწოდება. მაგალითად, a^2-3ax^5+3 არის მრავალწევრი, ხოლო $\frac{x}{x+y+5}$ არაა მრავალწევრი.

მსგავსი ერთწევრების ჯამი შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი ერთწევრით, რომლის კოეფიციენტი არის ერთწევრების კოეფიციენტების ჯამი, ხოლო სიმბოლური ნაწილი იგივეა. მრავალწევრის ამგვარ იგივურ გარდაქმნას ეწოდება **მსგავსი წევრების შეერთება.** მაგალითად, $5ab^2c^3+6ab^2c^3-ac$ მრავალწევრში პირველი ორი წევრი მსგავსია, ამიტომ მათი შეერთებით ვღებულობთ მოცემული მრავალწევრის იგივურად ტოლ მრავალწევრს: $11ab^2c^3-ac$.

მრავალწევრს, რომელშიც ყველა ერთწევრი სტანდარტული სახითაა ჩაწერილი და მსგავსი წევრები შეერთებულია, **სტანდარტული სახის მრავალწევრი** ეწოდება.

მრავალწევრის ხარისხი, ანუ რიგი ეწოდება მასში შემავალი ერთწევრების ხარისხებს შორის უდიდესს. მაგალითად, $3+xy+2x^2y^3$ არის მეხუთე რიგის მრავალწევრი.

არითმეტიკული მოქმედებები მრავალწევრებზე. მრავალწევრი წარმოადგენს მთელ გამოსახულებას, ამიტომ მრავალწევრებზე შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების მოქმედებების ჩატარების შედეგად ისევ მრავალწევრს ვღებულობთ.

იმისათვის, რომ შევკრიბოთ ან გამოვაკლოთ მრავალწევრები, უნდა გავხსნათ ფრჩხილები და

შევაერთოთ მსგავსი წევრები. თუ ფრჩხილების წინ არის ნიშანი „+", მაშინ ფრჩხილებში მდგარი ყოვე შესაკრების ნიშანს ვინარჩუნებთ. თუ ფრჩხილების წინ მინუსია, მაშინ ფრჩხილების გახსნისას ფრჩხილებ მოთავსებული ყოველი წევრის ნიშანს ვცვლით მოპირდაპირე ნიშნით. მაგალითად,

$(5x^2-4x+3)-(3x^2-x+2)=$	
$=5x^2-4x+3-3x^2+x-2=$	ვხსნით ფრჩხილებს
$=2x^2-3x+1.$	ვაერთებთ მსგავს წევრებს

შენიშვნა. თუ მრავალწევრის მოთავსება გვინდა ფრჩხილებში, მაშინ ყურადღება უნდა გავამახვილო ფრჩხილების წინ ნიშნის არჩევაზე. მაგალითად:

$$7a^4-a^3y-6a^2y^2-ay^3=(7a^4-a^3y)-(6a^2y^2+ay^3).$$

იმისათვის, რომ გადავამრავლოთ მრავალწევრები, პირველი მრავალწევრის ყოველი წევრი უნ გადავამრავლოთ მეორე მრავალწევრის ყოველ წევრზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. მაგალითად:

$$(2x+y)(x-y)=2x^2-2xy+xy-y^2=2x^2-xy-y^2.$$

ზოგიერთი მარტივი სახის მრავალწევრების ნამრავლი იმდენად ხშირად გამოიყენება მათემატიკაშ რომ მიზანშეწონილია დავიმახსოვროთ შესაბამისი, ე.წ. **შემოკლებული გამრავლების ფორმულებ** ქსენია:

ჯამისა და სხვაობის კვადრატის გამოსათვლელი ფორმულები:

$$\boldsymbol{1)\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\qquad 2)\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,}$$

ხშირად ამ ორ ფორმულას აერთიანებენ:

$$\boldsymbol{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.}$$

მაგალითები:

$$(5+3a)^2=5^2+2\cdot5\cdot3a+(3a)^2=25+30a+9a^2; \qquad \text{ანალოგიურად}$$

$$(5-3a)^2=25-30a+9a^2;$$

კვადრატების სხვაობის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$\boldsymbol{3)\ a^2-b^2=(a+b)(a-b).}$$

მაგალითად, $25-9a^2=(5+3a)(5-3a)$.

კუბების ჯამისა და სხვაობის გამოსათვლელი ფორმულები:

$$\boldsymbol{4)\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\ 5)\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),}$$

მაგალითად, $27a^3+2^3=(3a)^3+2^3=(3a+2)(9a^2-6a+4)$. ცხადი მსგავსების გამო, a^2+ab+b^2 და a^2-ab+b ეწოდებათ, შესაბამისად ჯამისა და სხვაობის არასრული კვადრატი. ხშირად 4) და 5) ფორმულებ აერთიანებენ:

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

ჯამისა და სხვაობის კუბის გამოსათვლელი ფორმულები:

$$\boldsymbol{6)\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\qquad 7)\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,}$$

ხშირად ამ ორ ფორმულას აერთიანებენ:

$$\boldsymbol{(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.}$$

მაგალითად, $(2-a)^3=8-12a+6a^2-a^3$.

IV. რაციონალური წილადები. მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად.

რაციონალურ გამოსახულებას, რომელშიც ცვლადებიანი გამოსახულებები ერთმანეთზე იყოფა, ეწოდება რაციონალური წილადი,

მაგალითად,

$$\frac{x^2-2x+1}{x-y}, \quad \frac{x+y}{y}-\frac{3}{a}, \quad \left(\frac{1}{x^2}+2\right):\frac{x+y}{x-y}$$

არის რაციონალური წილადები.

რაციონალურ წილადებზე იგივე მოქმედებები განისაზღვრება და ისევე, როგორც ჩვეულებრივ წილადებზე, ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობებისათვის, რაციონალური წილადის მრიცხველის და მნიშვნელის ერთიდაიგივე არანულოვან მრავალწევრზე ერთდროული გაყოფა (შეკვეცა) ან გამრავლება არ ცვლის რაციონალური წილადის მნიშვნელობებს.

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right):\frac{2x^2+x+1}{x+1}. \qquad (2)$$

არითმეტიკულ მოქმედებებს აქვთ იგივე პრიორიტეტი, რაც რიცხვით გამოსახულებებში: ჯერ გამრავლება და გაყოფა, მერე შეკრება და გამოკლება, მაგრამ პირველ რიგში ფრჩხილებში ვატარებთ მოქმედებებს:

$$\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{(x^2+1)(x^2-x+1)}{(x^3+1)(x-3)}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}.$$

აქ, წილადების შეკვეცისას გამოვიყენეთ კუბების ჯამის ფორმულა. შემდეგ,

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-3)}+\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

ანუ გავაერთმნიშვნელიანეთ და შევკრიბეთ. ბოლოს

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)}:\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{1}{x-3}.$$

მივიღეთ, რომ (2) გამოსახულება იგივურად ტოლია $\frac{1}{x-3}$ რაციონალური წილადისა ყოველი x-ისათვის, გარდა $x=-1$ და $x=3$ ($x=-1$ და $x=3$ არ შედის (2) გამოსახულებისათვის ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობებში)

იმისათვის, რომ შეკვეცების შედეგად მივიღოთ უკვეცი რაციონალური წილადი, უნდა ვიცოდეთ მრიცხველისა და მნიშვნელის (და ზოგადად, მრავალწევრის) მამრავლებად დაშლის რამდენიმე გავრცელებული მეთოდი.

ა) საერთო თანამამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანის წესი. თუ მრავალწევრის ყოველი წევრი შეიცავს საერთო (ერთიდაიგივე) თანამამრავლს, მისი ფრჩხილებს გარეთ გატანა შეგვიძლია განრიგებადობის წესის ძალით. მივიღებთ ორ მამრავლს, მათ შორის ერთი — საერთო იყო.

მაგალითი. დავშალოთ მამრავლებად $x^3+3x^2+4x^4$.

ამოხსნა. $x^3+3x^2+4x^4=x^2\cdot x+x^2\cdot 3+x^2\cdot 4x^2=x^2(4x^2+x+3)$.

ფრჩხილებს გარეთ გატანის წესის გამოყენება სასარგებლოა სხვა შინაარსის ამოცანებშიც.

მაგალითი. დაამტკიცეთ, რომ 25^7+5^{13} იყოფა 30-ზე.

ამოხსნა. $25^7+5^{13}=(5^2)^7+5^{13}=5^{14}+5^{13}=5^{13}(5+1)=5^{13}\cdot 6=5^{12}(5\cdot 6)=30\cdot 5^{12}$.

ბ) დაჯგუფების წესი. თუ მრავალწევრის წევრები არ შეიცავენ საერთო მამრავლს, უნდა ვცადოთ დ ჯგუფებად გავაერთიანოთ წევრები ისე, რომ თითოეული ჯგუფიდან მოხერხდეს საერთო მამრავლის გატან ფრჩხილებს გარეთ. შესაძლოა, ასეთი გარდაქმნის შემდეგ სხვადასხვა ჯგუფსაც აღმოაჩნდეს საერთო მამრავლ მაგალითად დავშალოთ მამრავლებად $3(x-2y)^2-3x+6y$ მრავალწევრი

$3(x-2y)^2-3x+6y=$	
$=3(x-2y)^2-3(x-2y)=$	ბოლო ორი წევრი გავაერთიანეთ ჯგუფში
$=3(x-2y)(x-2y-1)$	ჯგუფებს აქვთ საერთო მამრავლი $3(x-2y)$

გ) მამრავლებად დაშლა შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით. საერთ მამრავლის პოვნაში გვეხმარება შემოკლებული გამრავლების ფორმულებიც. მაგალითად:

$x^3+1+2(x^2-1)=$	ვიყენებთ კუბის ჯამის და კვადრატების
$=(x+1)(x^2-x+1)+2(x+1)(x-1)=$	სხვაობის ფორმულებს
$=(x+1)(x^2-x+1+2x-2)=$	საერთო მამრავლია $(x+1)$
$=(x+1)(x^2+x-1)$	

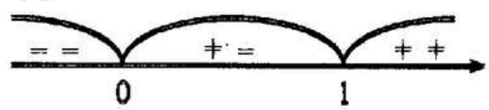
დ) მამრავლებად დაშლის შერეული მეთოდი. შედარებით რთულ შემთხვევებში ზემოთ აღწერილი სამ მეთოდიდან რამდენიმეს გამოყენება გვიწევს ერთდროულად. მაგალითად,

$x^2+2x-3=$	
$=x^2+2x+1-4=$	შევავსეთ სრულ კვადრატამდე
$=(x+1)^2-2^2=$	პირველი სამი წევრი გავაერთიანეთ ჯგუფებში
$=(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$	

ე) მოდულის შემცველი გამოსახულების გამარტივება.

მაგალითი. გავამარტივოთ გამოსახულება $X=\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

ამოხსნა. x და $x-1$ ნიშანს იცვლიან, შესაბამისად $x=0$ და $x=1$ წერტილებში. ამიტომ, მათი ნიშნები რიცხვითი შუალედების მიხედვით იქნება



ანუ

$(-\infty;0]$-ში: $|x|=-x$, $|x-1|=-x+1$;

$[0;1]$-ში: $|x|=x$, $|x-1|=-x+1$;

$[1;+\infty]$-ში: $|x|=x$, $|x-1|=x-1$.

ამიტომ, იმის გათვალისწინებით რომ $x=\dfrac{1}{3}$ და $x=1$ არ არის დასაშვები მნიშვნელობები, გვაქვს:

$$X=\frac{1-x-x+x}{3x^2-4x+1}=\frac{1}{1-3x}, \quad x\in(-\infty;0]; \tag{3}$$

$$X=\frac{1+x}{(3x-1)(x-1)}, \quad x\in\left[0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right); \tag{4}$$

$$X=\frac{1}{x-1}, \quad x\in(1;+\infty).$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $x=0$, (3) და (4) გამოსახულება გვაძლევს X-ის ერთიდაიგივე მნიშვნელობას.