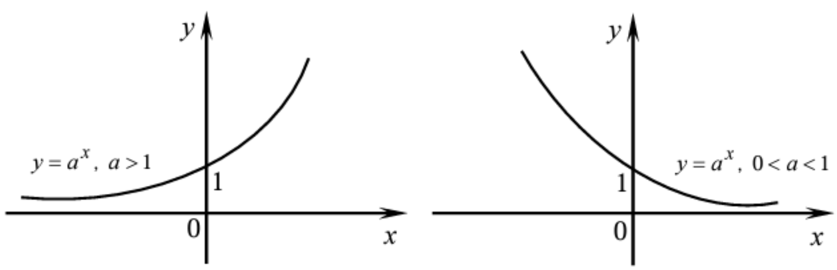
16. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები.

მაჩვენებლიანი ფუნქცია

$y = a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $-]0;+\infty[$. $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს (0;1) წერტილში, რადგან $a^0 = 1$



როცა a>1 და x>0, მაშინ a^x>1;

როცა a>1 და x<0, მაშინ 0<a^x<1;

როცა 0<a<1 და x>0, მაშინ 0<a^x<1;

როცა 0<a<1 და x<0, მაშინ a^x>1;

ლოგარითმის ცნება

განსაზღვრება. b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით ($a > 0, a \neq 1$) ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b და $\log_a b$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაგალითად:

$\log_5 25 = 2$, რადგან $5^2 = 25$;

ლოგარითმის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

$$a^{\log_a b} = b$$

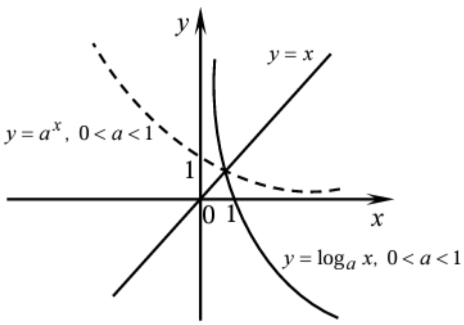
ლოგარითმის ძირითადი თვისებები:

1. $\log_a b$ გამოსახულებას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $b > 0$.
2. ერთის ლოგარითმი ნებისმიერი ფუძით ნულის ტოლია. მართლაც, რადგან $a^0 = 1$, ამიტომ $\log_a 1 = 0$.
3. თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი დადებითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი–უარყოფითი.
4. თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე მეტი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი უარყოფითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი–დადებითი.
5. ფუძის ლოგარითმი ერთის ტოლია. მართლაც, რადგან $a^1 = a$, ამიტომ $\log_a a = 1$.

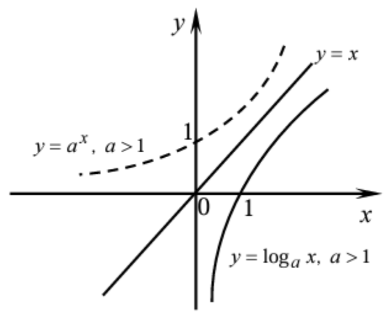
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 0 = \begin{cases} -\infty \text{ თუ } a > 1 \\ +\infty \text{ თუ } a < 1 \end{cases}$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x^n) = n \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \log_c x \cdot \log_a c, c > 0, c \neq 1$
- $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$
- $x = a^{\log_a x}$
- **ლოგარითმი 10-ის ფუძით** $\log_{10} x = \log x$

ლოგარითმული ფუნქცია:

$y=\log_a x$ სახის ფუნქციას $(a>0,\ a\neq 1)$, ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება. რადგან ლოგარითმული ფუნქცია წარმოადგენს მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას, ამიტომ $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკისა $y=x$ წრფის მიმართ (ნახ. 81, 82).



ნახ. 81



ნახ. 82

მაჩვენებლიანი განტოლება:

განტოლებას, რომელიც ცვლდს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება.

$a^x=b \quad (a>0,\ a\neq 1)$ წარმოადგენს უმარტივეს მაჩვენებლიან განტოლებას. როცა ხ>0 ამ განტოლების ამონახნს წარმოადგენს $x=\log_a b$, ხოლო როცა ხ<0 განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

ლოგარითმული განტოლება

განტოლებას რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ ლოგარითმული განტოლება ეწოდება.

$\log_a x=b \quad (a>0,\ a\neq 1)$ წარმოადგენს უმარტივეს ლოგარითმულ განტოლებას რომლის ამონახსნია $x=a^b$.

მაჩვენებლიანი უტოლობა

უტოლობას რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში მაჩვენებლიანი უტოლობა ეწოდება.

$a^x > b$ და $a^x < b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ წარმოადგენენ უმარტივეს მაჩვენებლიან უტოლობებს. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

ა) $a^x > b$.

თუ $b \leq 0$, მაშინ ამ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა R.

თუ $b > 0$, მაშინ a^x ფუნქციის მონოტონურობის გამო $x < \log_a b$, როდესაც $0 < a < 1$ და $x > \log_a b$, როდესაც $a > 1$.

ბ) $a^x < b$.

თუ $b \leq 0$, მაშინ ამ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

თუ $b > 0$, მაშინ a^x ფუნქციის მონოტონურობის გამო $x > \log_a b$, როდესაც $0 < a < 1$ და $x < \log_a b$, როდესაც $a > 1$.

ლოგარითმული უტოლობა

უტოლობას რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმული ნიშნის ქვეშ ლოგარითმული უტოლობა ეწოდება.

$\log_a x > b$ და $\log_a x < b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ წარმოადგენენ უმარტივეს ლოგარითმულ უტოლობებს. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

ა) $\log_a x > b$.

თუ $0 < a < 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, მისი განსაზღვრის არეა $]0;+\infty[$, ამიტომ $0 < x < a^b$.

თუ $a > 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ $x > a^b$.

ბ) $\log_a x < b$.

თუ $0 < a < 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ $x > a^b$.

თუ $a > 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, მისი განსაზღვრის არეა $]0;+\infty[$, ამიტომ $0 < x < a^b$.