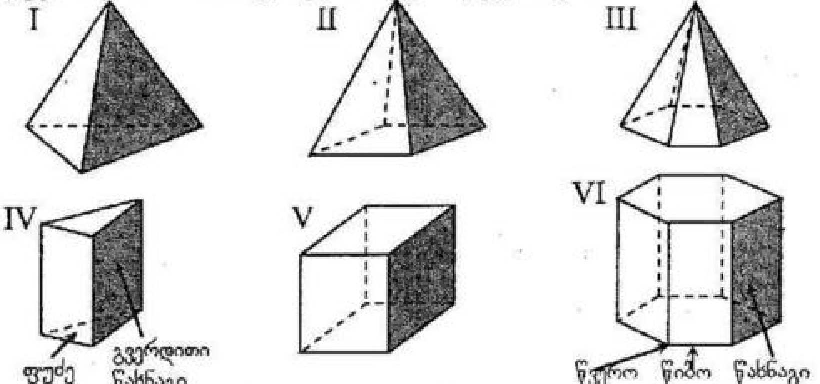
§14. მრავალწახნაგა და მისი ელემენტები. მრავალწახნაგას სახეები: მართი პრიზმა, მართი პარალელეპიპედი, მართკუთხა პარალელეპიპედი

მრავალწახნაგა ეწოდება სხეულს, რომელიც შემოსაზღვრულია სასრული რაოდენობა სიბრტყეებით. მრავალწახნაგას საზღვარს მისი ზედაპირი ეწოდება. მრავალწახნაგას ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი შემომსაზღვრელი თითოეული სიბრტყის ერთ მხარეს ძევს. ამოზნექილი მრავალწახნაგას (ჩვენ მომავალში მხოლოდ ასეთებს განვიხილავთ) ზედაპირისა და მისი შემომსაზღვრელი ერთ-ერთი სიბრტყის საერთო ნაწილს წახნაგი ეწოდება. მრავალწახნაგას წახნაგები ბრტყელ მრავალკუთხედებს წარმოადგენენ, რომელთა გვერდებს მრავალწახნაგას წიბოები ეწოდება, ხოლო წვეროებს — მრავალწახნაგას წვეროები.

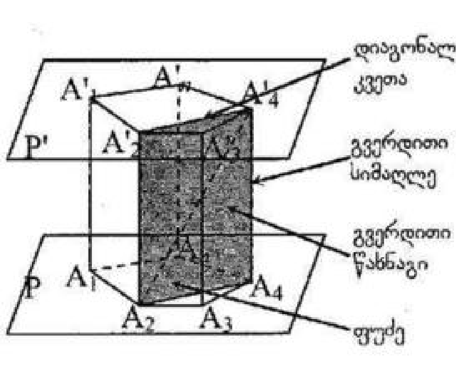


სურათზე, პირველ სტრიქონში მოცემული მრავალწახნაგები ***პირამიდებია***, ხოლო მეორე სტრიქონში მოცემული მრავალწახნაგები კი ***მართი პრიზმები***. წვეროების, წახნაგების და წიბოების რაოდენობა შესაბამისად e, f და k ასოებით აღვნიშნოთ. შევავსოთ ცხრილი პირველი სამი მრავალწახნაგასთვის

მრავალწახნაგა	e	f	k	$e+f-k$
I	4	4	6	2
II	5	5	8	2
III	7	7	12	2

როგორც ვხედავთ, სამივე მრავალწახნაგასთვის ბოლო სვეტში მიღებული რიცხვია 2, ანუ $e+f-k=2$. იგივე თვისება აქვს ყველა სხვა მრავალწახნაგას (მტკიცდება) (შეამოწმეთ IV, V და VI მრავალწახნაგებისთვის).

I. ***მართი პრიზმა. მრავალწახნაგას, რომლის ორი წახნაგი პარალელურ სიბრტყეებში მოთავსებული ბრტყელი n-კუთხედებია, ხოლო დანარჩენი n წახნაგი ბრტყელ მართკუთხედებს წარმოადგენს, მართი პრიზმა ეწოდება. პარალელურ ($P\|P'$) სიბრტყეებში მდებარე n-კუთხედებს პრიზმის ფუძეები ეწოდება, ხოლო დანარჩენ წახნაგებს — გვერდით წახნაგები. მართ პრიზმას ეწოდება n-კუთხა, თუ მისი ფუძეები n-კუთხედებია.***

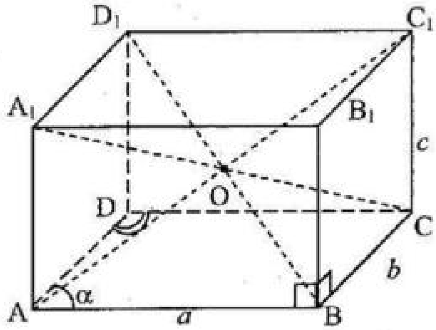


პრიზმის იმ ფუძეებს, რომლებიც ფუძეთა გვერდებს არ წარმოადგენენ, ***გვერდითი წიბოები*** ეწოდება. ცხადია, ყველა გვერდითი წიბო პარალელურია და ტოლია, ხოლო მართი პრიზმის ფუძეები ტოლი მრავალკუთხედებია. პრიზმის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძის შემცველ სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს (მაგალითად, ნებისმიერ გვერდით წიბოს) მართი პრიზმის ***სიმაღლე*** ეწოდება. მონაკვეთს,

რომელიც ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ წვეროს აერთებს, ***მართი პრიზმის დიაგონალი*** ეწოდება (მაგ., A_2A_4'). კვეთას, რომელიც მიიღება მართი პრიზმის სხვადასხვა გვერდით წახნაგებზე მდებარე ორ გვერდით წიბოზე გამავალი სიბრტყით, ***დიაგონალური კვეთა*** ეწოდება (მაგ., $A_2A_2'A_4'A_4$ – მართკუთხედი). ყოველი დიაგონალური კვეთა მართკუთხედია. მართ პრიზმას ***წესიერი*** ეწოდება, თუ მისი ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია. პრიზმის ***გვერდითი ზედაპირის ფართობი*** (გვერდითი ზედაპირი) ეწოდება გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამს, ხოლო ***სრული ზედაპირის ფართობი*** (სრული ზედაპირი) – გვერდითი ზედაპირისა და მისი ფუძეების ფართობთა ჯამს: $S_{\text{სრ}}=S_{\text{გვ}}+2S_{\text{ფ}}$. მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ფუძის პერიმეტრისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია: $S_{\text{გვ}}=P_{\text{ფ}}\cdot A_1A_1'$. თუ მართი n-კუთხა პრიზმა წესიერია, მაშინ $S_{\text{გვ}}=n\cdot a\cdot A_1A_1'$, სადაც a ფუძის გვერდია. ***მართი პრიზმის მოცულობა*** მისი ($A_1A_2\cdot A_n$) ფუძის ფართობის და (A_1A_1') გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია: $V=S_{\text{ფ}}\cdot A_1A_1'$.

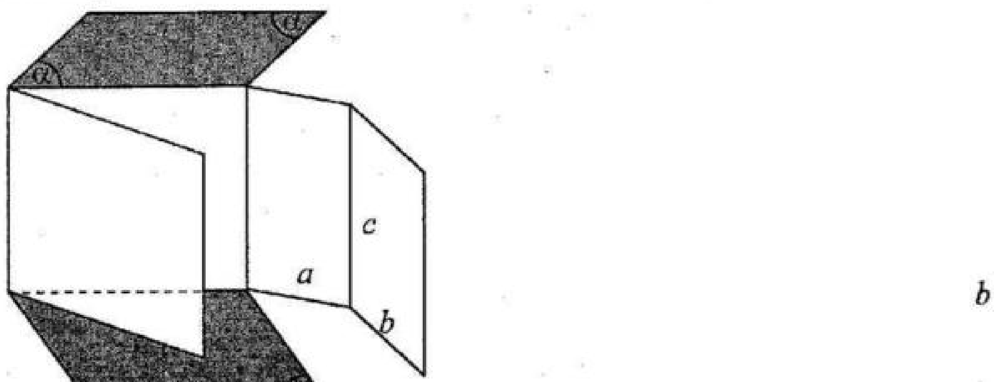
n-კუთხა პრიზმას აქვს $2n$ წვერო, $n+2$ წახნაგი და $3n$ წიბო.

II. მართი პარალელეპიპედი: მართ პრიზმას, რომლის ფუძე პარალელოგრამია, მართი პარალელეპიპედი ეწოდება. მართი პარალელეპიპედის იმ წახნაგებს, რომლებსაც საერთო წვერო არ აქვთ, მოპირდაპირე წახნაგები ეწოდება. სამართლიანია მართი პარალელეპიპედის შემდეგი თვისებები:



მართი პარალელეპიპედის მოპირდაპირე წახნაგები პარალელურია და ტოლია. მართი პარალელეპიპედის ოთხივე დიაგონალი ერთმანეთს ერთ წერტილში კვეთს და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან.

წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის ზედაპირი მუყაოს ფურცლისგან არის დამზადებული. თუ რამდენიმე წიბოზე გავჭრით ამ „კოლოფს“ და გავშლით მივიღებთ ბრტყელ ფიგურას, რომელსაც ***მართი პარალელეპიპედის შლილი*** ეწოდება. იგი მართი პარალელეპიპედის წახნაგებისგან შედგება და მას შეიძლება ჰქონდეს სურათზე წარმოდგენილი ფორმა (ეს წარმოდგენა ერთადერთი არაა):



I-დან IV-ის ჩათვლით გვერდითი წახნაგებია გადანომრილი, V პარალელეპიპედის ზედა ფუძეა, VI —ქვედა ფუძე. ***მართი პრიზმის ნებისმიერი შლილის ფართობი მართი პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობის ტოლია:***

$$S=2ac+2bc+2ab\sin\alpha.$$

გვერდითი ზედაპირი (I, II, III და IV წახნაგთა ფართობების ჯამი) ტოლია

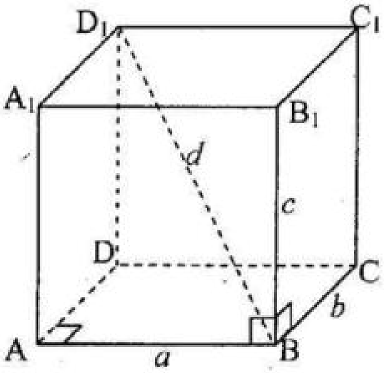
$$S_{\text{გვ}}=2ac+2bc.$$

მართი პარალელეპიპედის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლია:

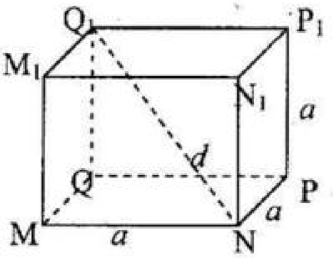
$$V=abc\sin\alpha.$$

3. მართკუთხა პარალელეპიპედი.

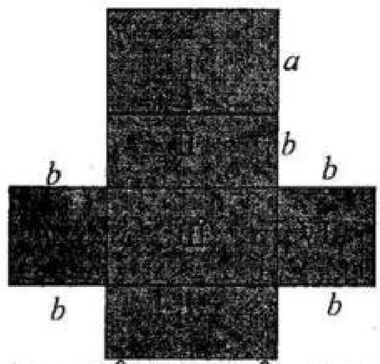
მართ პარალელეპიპედს, რომლის ფუძე მართკუთხედია, მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება. მართკუთხა პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი მართკუთხედია. მართკუთხა პარალელეპიპედის არაპარალელური წიბოების სიგრძეებს მისი განზომილებები ეწოდება. მართკუთხა პარალელეპიპედს აქვს სამი (a, b, c) განზომილება. მართკუთხა პარალელეპიპედის ნებისმიერი d დიაგონალის კვადრატი მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამია: $d^2=a^2+b^2+c^2$ ($BD_1^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$).



მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ყველა წიბო ტოლია, კუბი ეწოდება. ამრიგად, კუბში სამივე განზომილება ერთმანეთს ემთხვევა და $d^2=3a^2$.



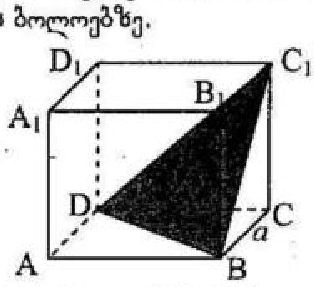
სურათზე მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთ-ერთი შესაძლო **შლილი.** მისი ფართობი მართკუთხა პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობის ტოლია $S_{სრ}=2ab+2ac+2bc$, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობი (I, II, III და IV წახნაგთა ფართობების ჯამი) კი არის: $S_{გვ}=2ac+2bc$.



თუ მოცემულია $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ კუბი ($a=b=c$), მაშინ $S_{სრ}=6a^2$, $S_{გვ}=4a^2$. **მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა** მისი სამი განზომილების ნამრავლია: $V=abc$, კუბის მოცულობა კი კუბის განზომილების კუბის ტოლია: $V=a^3$.

ამოვხსნათ ზოგიერთი ამოცანა მართ პრიზმებზე და მის კერძო სახეებზე.

ამოცანა 1. კუბის წიბოს სიგრძეა $5\sqrt[4]{3}$ სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ერთი წვეროდან გამოსული სამივე წიბოს ბოლოებზე.



მოც: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი.
$a=5\sqrt[4]{3}$ სმ

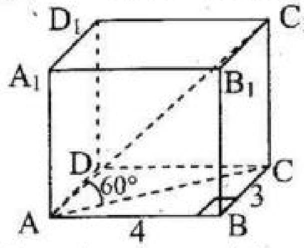
უ.გ. $S_{\Delta BC_1D}$.

ამოხსნა. C წვეროდან გამოსული CB, CD და CC_1 წიბოს B, D და C_1 ბოლოებზე გავლებული სიბრტყე კუბიდან ჩამოკვეთს BDC_1 ტოლგვერდა სამკუთხედს. ΔBDC_1 ტოლგვერდაა, რადგან მისი ყოველი გვერდი a სიგრძის მქონე კვადრატების დიაგონალებია. მაშინ $BD=DC_1=BC_1=a\sqrt{2}$. მაშინ

$$S_{DBC_1} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{(5\sqrt[4]{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{25 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2} \text{ (სმ}^2\text{)}.$$

პასუხი: 75/2 სმ^2.

ამოცანა 2: მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდებია 3 სმ და 4 სმ.



მოც: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედი. $\angle C_1AC=60°$; $BC=3$ სმ; $AB=4$ სმ

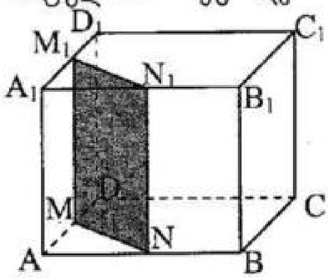
უ.გ. CC_1.

ამოხსნა. ΔABC მართკუთხაა. პითაგორას თეორემით: $AC^2=AB^2+BC^2=4^2+3^2=25$. $AC=5$ (სმ).

მართკუთხა ACC_1 სამკუთხედში $\mathrm{tg}60°=\dfrac{CC_1}{AC}$, საიდანაც $CC_1=AC\,\mathrm{tg}60°=5\sqrt{3}$ (სმ).

პასუხი: $5\sqrt{3}$ სმ.

ამოცანა 3. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოს პარალელური სიბრტყე ფუძის განზომილებებს ყოფს $p:q$ და $m:n$ ნაწილებად მოცემული გვერდითი წიბოს ბოლოების მხრიდან. იპოვეთ კვეთით გაყოფილი მართი პრიზმების მოცულობათა შეფარდება.



მოც: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედი. $AA_1 \| MNN_1M_1$. $A_1M_1:M_1D_1=p:q$, $A_1N_1:N_1B_1=m:n$.

უ.გ. $V_{ANMA_1N_1M_1} : V_{NBCDMN_1B_1C_1D_1M_1}$.

ამოხსნა. მოცემულობის პროპორციებიდან შეიძლება ჩავწეროთ: $A_1M_1=px$, $M_1D_1=qx$, $A_1N_1=my$, $N_1B_1=ny$, მაშინ

$$V_{ANMA_1N_1M_1}=S_{A_1N_1M_1}\cdot AA_1=\frac{1}{2}px\cdot my\sin(\angle A_1)\cdot AA_1,$$

$$V_{NBCDMN_1B_1C_1D_1M_1}=V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}-V_{ANMA_1N_1M_1}=A_1D_1\cdot A_1B_1\cdot\sin(\angle A_1)\cdot AA_1-\frac{1}{2}pxmy\sin(\angle A_1)\cdot AA_1=$$

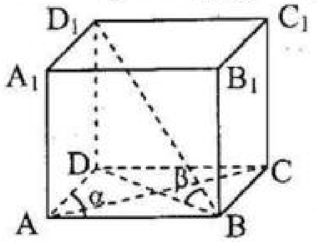
$$=(p+q)x\cdot(m+n)y\sin(\angle A_1)\cdot AA_1-\frac{1}{2}pxmy\sin(\angle A_1)\cdot AA_1=[(p+q)(m+n)-\frac{1}{2}pm]xy\sin(\angle A_1)\cdot AA_1.$$

მაშინ

$$\frac{V_{ANMA_1N_1M_1}}{V_{NBCDMN_1B_1C_1D_1M_1}}=\frac{\frac{1}{2}pmxy\sin(\angle A_1)\cdot AA_1}{[(p+q)(m+n)-\frac{1}{2}pm]xy\sin(\angle A_1)\cdot AA_1}=$$

$$=\frac{pm}{2(p+q)(m+n)-pm}=\frac{1}{\frac{2(p+q)(m+n)}{pm}-\frac{pm}{pm}}=\frac{1}{2(1+\frac{q}{p})(1+\frac{n}{m})-1}.$$

ამოცანა 4. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2, ხოლო ფუძის მახვილი კუთხე უდრის α-ს, რომლის $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$. იპოვეთ კუთხე პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ პარალელეპიპედის სიმაღლე ფუძის დიდი დიაგონალის ტოლია.



მოც: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედი. $\angle DAB=\alpha$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$, $CC_1=AC$.

უ.გ. $\angle D_1BD\equiv\beta$.

ამოხსნა. ABCD პარალელოგრამში ჩავწეროთ მისი დიაგონალებისა და გვერდების დამაკავშირებელი ფორმულა:

$$2(AB^2+AD^2)=BD^2+AC^2.$$

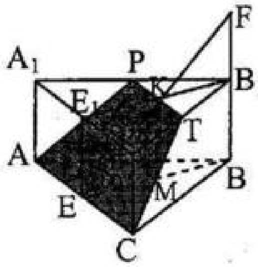
რადგან $AC=DD_1=CC_1$, ამიტომ $BD^2+AC^2=BD^2+DD_1^2$ და ეს ჯამი ΔDD_1B-ში D_1B^2-ის ტოლია, ე.ი. $2(AB^2+AD^2)=DD_1^2$ ანუ $2(4x^2+x^2)=DD_1^2$. $10x^2=DD_1^2$. ΔADB-ში ჩავწეროთ კოსინუსების თეორემა:

$DB^2=AB^2+AD^2-2\cdot AD\cdot AB\cos\alpha=x^2+(2x)^2-2x(2x)\cdot\dfrac{1}{4}=x^2+4x^2-4x^2\cdot\dfrac{1}{4}=4x^2$, საიდანაც $DB=2x$.

მივიღეთ $DD_1=\sqrt{10}\,x$, $DB=2x$. მაშინ ΔDD_1B-ში ჩავწეროთ $tg\beta$-ს გამოსათვლელი გამოსახულება: $tg\beta=\dfrac{DD_1}{DB}=\dfrac{\sqrt{10}x}{2x}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. მაშინ $\beta=arctg(\dfrac{\sqrt{10}}{2})$.

პასუხი: $\beta=arctg(\dfrac{\sqrt{10}}{2})$.

ამოცანა 5. მოცემულია $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმა, რომლის ყოველი წიბო $2\sqrt{3}$-ის ტოლია. ფუძის გვერდზე 60°-იანი კუთხით ფუძის სიბრტყისადმი გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთაში მიღებული ფიგურის ფართობი.



მოც: $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმა. $AC=AA_1=2\sqrt{3}$ სმ, $\angle FEB=60°$

უ.გ. S_{ACTP}.

ამოხსნა. ადვილად შევნიშნავთ, რომ კვეთა ტრაპეციაა და არა სამკუთხედი, რადგან $FB=EBtg60°=\dfrac{AC\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}AC=\dfrac{3}{2}BB_1>BB_1$, მაშინ $EB=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3$, $FB=EBtg60°=3\sqrt{3}$, $FB_1=FB-BB_1=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$. $\Delta FB_1K\sim\Delta FBE$ (ორი კუთხის მიხედვით). მაშინ $\dfrac{KB_1}{EB}=\dfrac{FB_1}{FB}=\dfrac{1}{3}$,

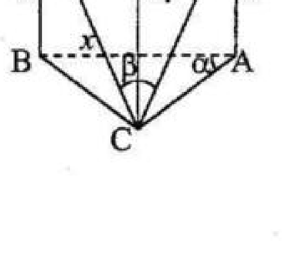
$KB=\dfrac{1}{3}BE=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$, $\Delta PB_1T\sim\Delta A_1B_1C_1$ (ორი კუთხის მიხედვით). მაშინ $\dfrac{PT}{A_1C_1}=\dfrac{KB_1}{E_1B_1}=\dfrac{1}{3}$,

$PT=\dfrac{A_1C_1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $KM\perp BE$. ΔEKM-ში $\dfrac{KM}{KE}=\sin 60°$, $KE=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=4$. მაშინ

$$S_{კვ}=\frac{1}{2}(PT+AC)\cdot KE=\frac{1}{2}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3})\cdot 4=2\cdot 2(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3})=4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16}{\sqrt{3}}\ (სმ).$$

პასუხი: $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ სმ.

ამოცანა 6. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე უდრის α-ს. პრიზმის უდიდესი გვერდითი წახნაგი არის კვადრატი. იპოვეთ ორ დანარჩენ გვერდით წახნაგთა ურთიერთგადამკვეთ დიაგონალებს შორის კუთხის კოსინუსი.



მოც: $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმა. $\angle C_1=90°$, AA_1B_1B კვადრატია, $\angle A=\alpha$

უ.გ. $\cos(B_1C\,\hat{;}\,A_1C)\equiv\cos\beta$.

ამოხსნა. AB აღვნიშნოთ x-ით. მაშინ $AC=x\cos\alpha$ და $BC=x\sin\alpha$.
ΔA_1AC-ში. $A_1C^2=AC^2+AA_1^2=x^2\cos^2\alpha+x^2=x^2(1+\cos^2\alpha)$;
ΔBB_1C-ში $B_1C^2=CB^2+BB_1^2=x^2\sin^2\alpha+x^2=x^2(1+\sin^2\alpha)$;
ΔCB_1A_1-ში ჩავწეროთ კოსინუსების თეორემა: $B_1A_1^2=B_1C^2+A_1C^2-2B_1C\cdot A_1C\cdot\cos\beta$. მივიღებთ:
$x^2=x^2(1+\sin^2\alpha)+x^2(1+\cos^2\alpha)-2x\cdot x\sqrt{(1+\sin^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}\cdot\cos\beta$ ანუ
$2\sqrt{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\cos\beta=2$, საიდანაც $\cos\beta=(\sqrt{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha})^{-1}$.

პასუხი: $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$.