§10. წესიერი მრავალკუთხედები. წრეწირის სიგრძე. წრის ფართობი. წრეწირში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული ფიგურები

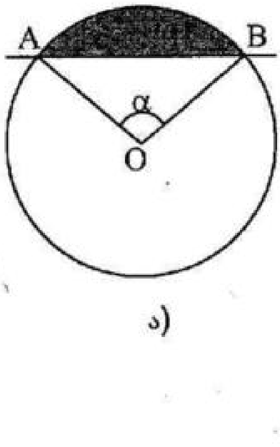
1.წესიერი მრავალკუთხედები. დამოკიდებულება კუთხეთა რაოდენობას და მათ გრადუსულ ზომას შორის. მრავალკუთხედს წესიერი ეწოდება თუ მისი ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია. რადგან n-კუთხედში კუთხეთა ჯამია $180°(n-2)$, ამიტომ წესიერი n-კუთხედის თითოეული კუთხე ტოლია $\frac{180^0(n-2)}{n}$ სიდიდის. მაგ., წესიერი სამკუთხედის კუთხე ტოლია $\frac{180^0(3-2)}{3}=60°$, წესიერი ოთხკუთხედის ანუ კვადრატის – $\frac{180^0(4-2)}{4}=90°$ და ა. შ. ზოგადად, წესიერი n-კუთხედის კუთხე $\alpha_n=\frac{180^0(n-2)}{n}$. ამ ფორმულის გამოყენება შეიძლება იმ შემთხვევაშიც, თუ ცნობილია წესიერი n-კუთხედის გრადუსული ზომა, მაგრამ არაა ცნობილი კუთხეთა რაოდენობა. მაშინ $n=\frac{360^0}{180^0-\alpha}$. მართლაც თუ $\alpha=60°$, მაშინ ამ ფორმულის თანახმად, $n=3$. თუ $\alpha=90°$, $n=4$ და ა.შ.

2.წრეწირის სიგრძე. თუ R წრეწირის რადიუსია, მაშინ მისი სიგრძე ანუ გარშემოწერილობა ტოლია $2\pi R$-ის, სადაც π დაახლოებით 3,14-ის ან $\frac{22}{7}$-ის ტოლია. რადგან წრეწირი 360°-იანი რკალია, ამიტომ $\alpha°$-იანი რკალის სიგრძეა $\frac{2\pi\pi}{360^0}\alpha=\frac{\pi R}{180^0}\alpha$.

3.წრე. წრის და მისი ნაწილების ფართობი. სიბრტყის ყველა იმ წერტილისგან შედგენილ ფიგურას, რომელიც მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილზე მეტად არაა დაშორებული, **წრე** ეწოდება. მოცემულ წერტილს **წრის ცენტრი** ეწოდება, მოცემულ მანძილს – **წრის რადიუსი**. წრის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=\pi R^2$.

წრის თანაკვეთას მის ნებისმიერ ცენტრალურ კუთხესთან **წრიული სექტორი** ეწოდება. ***თუ ცენტრალური კუთხეა $\alpha°$, მაშინ შესაბამისი წრიული სექტორის ფართობია $S=\frac{\pi R^2}{360^0}\alpha$.***

წრის და ნახევარსიბრტყის თანაკვეთას (როცა იგი არაცარიელია) **წრიული სეგმენტი** ეწოდება. ***$\alpha°$ გრადუსიანი წრიული სეგმენტის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=\frac{\pi R^2}{360^0}\alpha-S_{AOB}$, თუ $0<\alpha<180°$ და $S=\frac{\pi R^2}{360^0}\alpha+S_{AOB}$, თუ $180°<\alpha<360°$.***



ა) ბ)

ნახ.1.

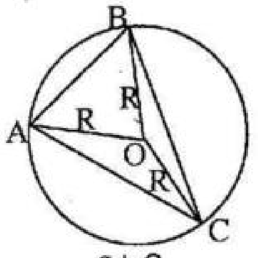
4. წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული სამკუთხედები. როდესაც სამკუთხედის წვეროები წრეწირზე ძევს, მაშინ სამკუთხედს **წრეწირში ჩახაზული** ეწოდება, ხოლო წრეწირს – **სამკუთხედზე შემოხაზული.**

ვთქვათ, ABC სამკუთხედი ჩახაზულია (O; R) წრეწირში. მაშინ წრეწირის ცენტრი მდებარეობს სამკუთხედის გვერდების შუამართობების გადაკვეთაზე. R რადიუსისთვის სამართლიანია ფორმულები

$$R=\frac{a}{2\sin\angle A}=\frac{b}{2\sin\angle B}=\frac{c}{2\sin\angle C}$$

და

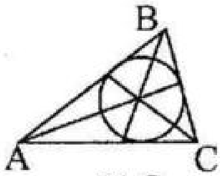
$$R=\frac{abc}{4S_{ABC}}.$$



ნახ.2.

ახლა ვთქვათ, ΔABC შემოხაზულია (O; r) წრეწირზე ანუ მისი სამივე გვერდი ეხება წრეწირს. მაშინ O ცენტრი სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო r რადიუსისთვის სამართლიანია ფორმულა

$r=\frac{2S}{P}$, სადაც $P=a+b+c$ ABC სამკუთხედის პერიმეტრია.



ნახ.3.

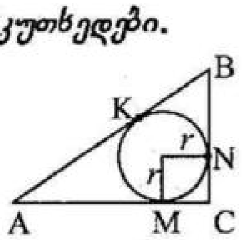
შევნიშნოთ, რომ ყოველ სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა და ყოველ სამკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

5. წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მართკუთხა სამკუთხედები.

ვთქვათ, მართკუთხა ($\angle C=90°$) ABC სამკუთხედი შემოხაზულია (O; r) წრეწირზე. რადგან AK=AM, BK=BN და CM=CN, ამიტომ

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

თუ მართკუთხა სამკუთხედი წრეწირშია ჩახაზული, მაშინ წრეწირის რადიუსი მისი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.



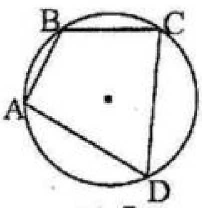
ნახ.4.

6. წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედები.

ვთქვათ, ABCD (O; R) წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედია ანუ A, B, C და D წვეროები წრეწირზე ძევს. მაშინ წრეწირის ცენტრი გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო მოპირდაპირე კუთხეების ჯამია 180°:

$$\angle A+\angle C=180° \text{ და } \angle B+\angle D=180° \qquad (1).$$

რაც ადვილად გამომდინარეობს ჩახაზული კუთხეების თვისებებიდან. შევნიშნოთ, რომ მხოლოდ (1) თვისების მქონე ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

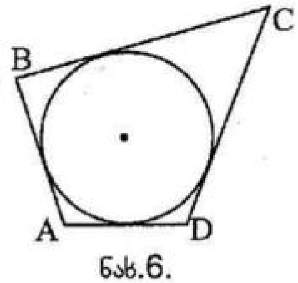


ნახ.5.

ახლა ვთქვათ, ABCD (O; r) წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედია ანუ მისი გვერდები წრეწირს ეხება. მაშინ O ცენტრი ოთხკუთხედის კუთხეთა ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია და მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია

$$AB+CD=BC+AD \qquad (2),$$

რაც გამომდინარეობს ერთი წერტილიდან გავლებული მონაკვეთების ტოლობიდან.



ნახ.6.

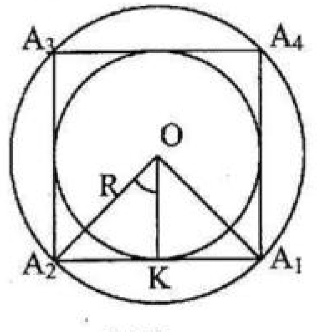
ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი და შუამონაკვეთი ერთმანეთის ტოლია. შევნიშნოთ, რომ მხოლოდ (2) თვისების მქონე ოთხკუთხედში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი.

7. წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედები. სამკუთხედის და ოთხკუთხედის ანალოგიურად, n-კუთხედს წრეწირში ჩახაზული ეწოდება თუ მისი ყველა წვერო წრეწირზე ძევს და ეწოდება წრეწირზე შემოხაზული თუ მისი ყველა გვერდი ეხება წრეწირს. ზოგადად,

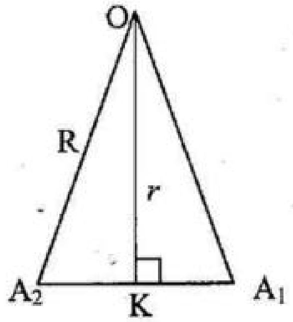
შეიძლება მხოლოდ ის ითქვას, რომ თუ n-კუთხედი შემოხაზულია წრეწირზე, მისი ცენტრი კუთხეთა ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია და თუ n-კუთხედი ჩახაზულია წრეწირში, მისი ცენტრი გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია. ამიტომ განვიხილოთ ჩახაზული და შემოხაზული წესიერი n-კუთხედები.

ყველა წესიერ მრავალკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა და მასში წრეწირის ჩახაზვა. თანაც შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა.

ავიღოთ $A_1A_2...A_n$ წესიერი n-კუთხედი და დავადგინოთ დამოკიდებულება შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებს და n-კუთხედის გვერდს შორის. ვთქვათ, $a=A_1A_2$ n-კუთხედის გვერდია, ხოლო O შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრია. თუ მას შევაერთებთ A_1 და A_2 წვეროებთან, მივიღებთ A_1OA_2 ტოლფერდა სამკუთხედს, რომელშიც $OA_1=OA_2=R$ შემოხაზული წრეწირის რადიუსია. თუ A_1A_2 ფუძეზე დავუშვებთ OK სიმაღლეს, ვნახავთ, რომ იგი ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r: ნახ.7-კვადრატის შემთხვევა; ნახ.8-n-კუთხედის შემთხვევა.



ნახ.7.



ნახ.8.

ამის გარდა, $\angle A_1OA_2=\dfrac{360^0}{n}=\angle A_2OK=\dfrac{180^0}{n}$. ამიტომ A_2OK მართკუთხა სამკუთხედში $\sin\angle A_2OK=\dfrac{A_2K}{A_2O}$ და $\mathrm{tg}\angle A_2OK=\dfrac{A_2K}{OK}$, რაც გვაძლევს

$$R=\frac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}}, \qquad r=\frac{a}{2tg\dfrac{180^0}{n}}.$$

წესიერი n-კუთხედის ფართობი შეიძლება გამოითვალოს ფორმულით:

$$S_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}.$$