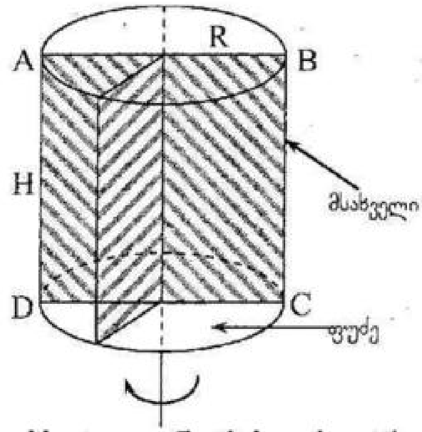
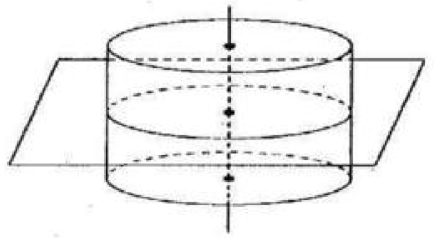
§16. ცილინდრი, კონუსი და ბირთვი. მათი ელემენტები



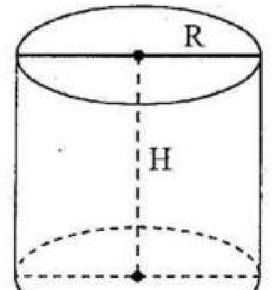
I ცილინდრი. მართი ცილინდრი ეწოდება სხეულს, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მისი გვერდის გარშემო. ამ გვერდის შემცველ წრფეს ეწოდება ცილინდრის ღერძი, ხოლო მის პარალელურ გვერდს – ცილინდრის მსახველი. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მართ ცილინდრებს.

ცილინდრის ზედაპირი შეიცავს პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე ორ ტოლ წრეს, რომლებსაც ცილინდრის ფუძეები ეწოდება და გვერდით ზედაპირს.

ცილინდრის რადიუსი ეწოდება მისი ფუძის რადიუსს. ცილინდრის ერთ-ერთი ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძეზე დაშვებულ მართობს ცილინდრის სიმაღლე ეწოდება. **ცილინდრის ღერძზე გამავალ სიბრტყით კვეთას ღერძული კვეთა ეწოდება (ABCD მართკუთხედია).**



ცილინდრის ღერძის მართობული სიბრტყე მის გვერდით ზედაპირს კვეთს წრეწირზე, რომელიც ფუძის წრეწირის ტოლია.



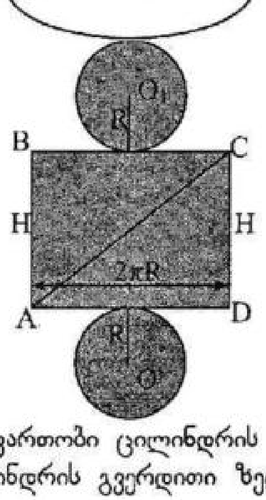
ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_{გვ}=2\pi RH,$$

ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_{სრ}= S_{გვ}+2S_{ფ}=2\pi R^2+2\pi RH,$$

სადაც R ცილინდრის რადიუსია, H კი - სიმაღლე.



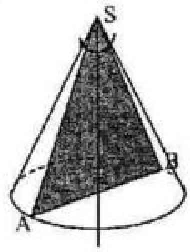
წარმოვიდგინოთ, რომ ცილინდრის ზედაპირი მუყაოს ფურცლისგან არის დამზადებული. თუ „მუყაოს ცილინდრს" გავჭრით რაიმე მსახველზე და წრეწირებზე გავხსნით ფუძეებს, მივიღებთ ბრტყელ ფიგურას (როგორც ეს ნახაზზეა მოცემული), რომელსაც ***ცილინდრის შლილი*** ეწოდება. O წრე ქვედა ფუძეა, ხოლო O_1—ზედა ფუძე. ABCD მართკუთხედს ცილინდრის ***გვერდითი შლილი*** ეწოდება. მისი სიმაღლე ცილინდრის სიმაღლეა, ხოლო მისი სიგრძე ცილინდრის ფუძის წრეწირის სიგრძეა. AC დიაგონალი ცილინდრის ***გვერდითი შლილის დიაგონალია***. ცილინდრის შლილის ფართობი ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობია, ცილინდრის გვერდითი შლილის ფართობი კი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია.

ცილინდრის მოცულობა მისი ფუძის ფართობის და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია $V=\pi R^2H$, სადაც R ცილინდრის რადიუსია, H კი—სიმაღლე.

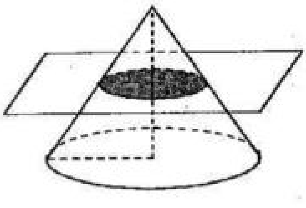
II კონუსი. მართი კონუსი ეწოდება სხეულს, რომელიც მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით მისი კათეტის გარშემო. ამ კათეტის შემცველ წრფეს კონუსის

ღერძი ეწოდება, ჰიპოტენუზას კი – მსახველი. მეორე კათეტი ბრუნვის შედეგად ქმნის წრეს, რომელსაც კონუსის ფუძე ეწოდება. მსახველის იმ ბოლოს, რომელიც ფუძეში არ მდებარეობს კონუსის წვერო ეწოდება.

კონუსის სიმაღლე ეწოდება მართობს, რომელიც დაშვებულია წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე. სიმაღლის ფუძე კონუსის ფუძის ცენტრს ემთხვევა. კვეთას, რომელიც კონუსის ღერძზე გამავალი სიბრტყით მიიღება, ღერძული კვეთა ეწოდება (SAB ტოლფერდა სამკუთხედი).



კონუსის მკვეთი სიბრტყე, რომელიც ღერძის მართობულად არის გავლებული, კონუსს კვეთს წრეზე, ხოლო გვერდით ზედაპირს—წრეწირზე, რომლის ცენტრი კონუსის ღერძზე ძევს.



კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

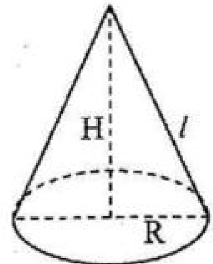
$$S_{გვ}=\pi Rl,$$

სადაც R კონუსის რადიუსია, l კი მსახველი.

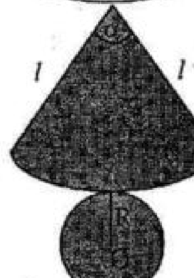
კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S_{სრ}=S_{გვ}+S_{ფ}=\pi Rl+\pi R^2,$$

სადაც R კონუსის რადიუსია, l კი მსახველი.



წარმოვიდგინოთ, რომ კონუსის ზედაპირი მუყაოს ფურცლისგან არის დამზადებული. თუ „მუყაოს კონუსს" გავჭრით რაიმე მსახველზე და წრეწირზე გავხსნით ფუძეს, მივიღებთ ბრტყელ ფიგურას (როგორც ეს ნახაზზეა მოცემული), რომელსაც ***კონუსის შლილი*** ეწოდება. O წრე კონუსის ფუძეა, ხოლო სექტორს კი კონუსის ***გვერდითი ზედაპირის შლილი*** ეწოდება. გვერდითი შლილის რადიუსია კონუსის მსახველი, ხოლო სექტორის რკალის სიგრძე კონუსის ფუძის წრეწირის სიგრძეა. სექტორის (α) ცენტრალურ კუთხეს კონუსის ***გვერდითი ზედაპირის შლილის ცენტრალური კუთხე*** ეწოდება. კონუსის შლილის ფართობი კონუსის სრული ზედაპირის ფართობია, კონუსის გვერდითი შლილის ფართობი კი – კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია.

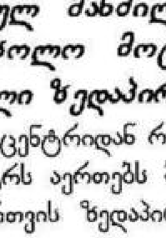


კონუსის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია:

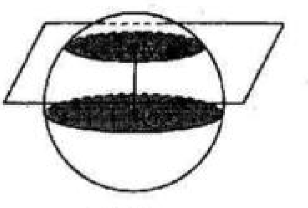
$V=\frac{1}{3}S_{ფ}H=\frac{1}{3}\pi R^2H$, სადაც R კონუსის რადიუსია, H კი კონუსის სიმაღლეა.

III ბირთვი და სფერო. ბირთვი ეწოდება სივრცის ყველა იმ წერტილისგან შემდგარ სხეულს, რომელთა დაშორება მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილს არ აღემატება. მოცემულ წერტილს ბირთვის ცენტრი ეწოდება, ხოლო მოცემულ მანძილს— ბირთვის რადიუსი. ბირთვის საზღვარს ეწოდება ბირთვული ზედაპირი ანუ სფერო. ამრიგად, სფეროს წერტილები ბირთვის ყველა ის წერტილებია, რომლებიც ცენტრიდან რადიუსის ტოლ მანძილითაა დაშორებული. ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც ბირთვის ცენტრს აერთებს ბირთვის ზედაპირთან, აგრეთვე ***სფეროს რადიუსი*** ეწოდება. მონაკვეთს, რომელიც ბირთვის ზედაპირის ორ წერტილს აერთებს და ბირთვის ცენტრზე გადის, ***დიამეტრი*** ეწოდება.

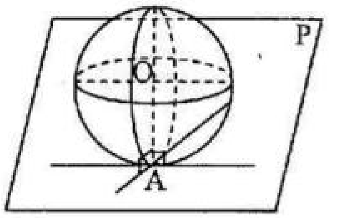
ბირთვი, ისევე, როგორც ცილინდრი და კონუსი, ***ბრუნვის სხეულს*** წარმოადგენს. იგი მიიღება ნახევარწრის ბრუნვით მისი დიამეტრის შემცველი წრფის გარშემო.



ბირთვის ყოველი კვეთა სიბრტყით არის წრე. ამ წრის (M) ცენტრი ბირთვის (O) ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყეზე დაშვებული (OM) მართობის ფუძეა. ბირთვის ცენტრიდან თანაბრად დაშორებული სიბრტყეები ბირთვს ტოლ წრეწირებზე კვეთენ.



(P) სიბრტყეს, რომელიც ბირთვის ზედაპირის რაიმე (A) წერტილზე გადის და ამ წერტილზე გამავალი (OA) რადიუსის მართობულია (P⊥OA), ***მხები სიბრტყე*** ეწოდება. ამ წერტილს კი ***შეხების წერტილი***. მხებ (P) სიბრტყეს ბირთვთან მხოლოდ ერთი საერთო (A) წერტილი – შეხების წერტილი აქვს.



R რადიუსიანი ***ბირთვის მოცულობა*** გამოითვლება ფორმულით:

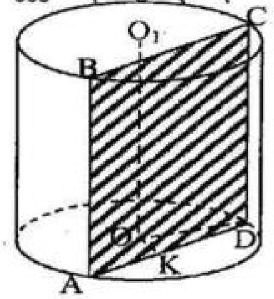
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

R რადიუსიანი სფეროს ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=4\pi R^2.$$

მოვიყვანოთ რამდენიმე ტიპიური ამოცანის ამოხსნა ცილინდრის, კონუსის, ბირთვისა და სფეროს მაგალითებზე.

ამოცანა 1. ცილინდრის სიმაღლეა 8 დმ, ფუძის რადიუსი კი – 5 დმ. ცილინდრი გადაკვეთილია ცილინდრის ღერძის პარალელური სიბრტყით ისე, რომ კვეთაში მიიღება კვადრატი.
იპოვეთ: ა) მანძილი ამ კვეთიდან ცილინდრის ღერძამდე; ბ) მოცულობა.

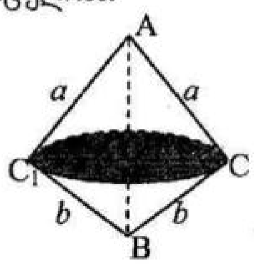


მოც: ცილინდრი. BCDA კვადრატია.
AO=OD=5 დმ, OO_1=8 დმ

უ.გ. OK – ? $V_{\text{ც}}$.

ამოხსნა. ΔAOD ტოლფერდაა. OK ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეა: $OK=\sqrt{OD^2-KD^2}=\sqrt{5^2-KD^2}$;
$KD=\frac{AD}{2}=\frac{CD}{2}=\frac{OO_1}{2}=\frac{8}{2}=4$ დმ, რადგან ABCD კვადრატია. მაშინ მივიღებთ
$OK=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$ დმ. $V_{\text{ც}}=\pi R^2H=\pi\cdot 25\cdot 8=200\pi$ დმ^3.
პასუხი: 3 დმ; 200π დმ^3.

ამოცანა 2. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია a და b, ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.



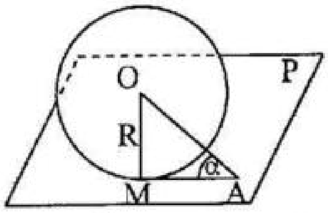
მოც: ΔABC, ∠C=90°, AC=a,
BC=b, AB ბრუნვის ღერძია

უ.გ. $V_{\text{ბრ}}$.

ამოხსნა. ბრუნვით მიიღება სხეული, რომელიც შედგება საერთო ფუძის მქონე ორი კონუსისაგან (წვეროებით A და B). მაშინ $V=\frac{1}{3}\pi OC^2\cdot AO+\frac{1}{3}\pi OC^2\cdot OB=\frac{1}{3}\pi OC^2(AO+OB)=\frac{1}{3}\pi OC^2\cdot AB$. ΔABC-ში $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, ხოლო $OC^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. მაშინ $V_{ბრ}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

პასუხი: $V_{ბრ}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ამოცანა 3. მანძილი O სფეროს მხებ სიბრტყეზე მდებარე A წერტილიდან სფეროს ცენტრამდე $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$-ს ტოლია. AO მონაკვეთი დახრილია მხები სიბრტყისადმი α კუთხით, რომლის კოსინუსი $\frac{2}{5}$-ის ტოლია. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი და შესაბამისი ბირთვის მოცულობა.



მოც: O სფერო და P მხები სიბრტყე.

$O\cap P=\{M\}$, $OA=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$, $\widehat{OA;P}=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$

უ.გ. $S_{სფ}$; $V_{ბ}$.

ამოხსნა. ΔOMA მართკუთხაა. $\cos\alpha=\frac{AM}{OA}\Rightarrow AM=\frac{5}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. პითაგორას თეორემით,

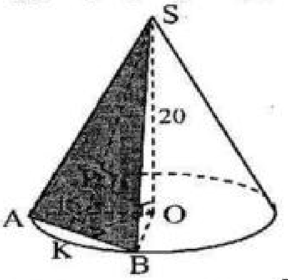
$$R^2=OA^2-AM^2=(\frac{5}{\sqrt{\pi}})^2-(\frac{2}{\sqrt{\pi}})^2\cdot R=\sqrt{\frac{25-4}{\pi}}=\sqrt{\frac{21}{\pi}}.$$

მაშინ

$$S_{სფ}=4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{21}{\pi}=84;\ V_{ბ}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{21}{\pi}\sqrt{\frac{21}{\pi}}=28\sqrt{\frac{21}{\pi}}.$$

პასუხი: $S_{სფ}=84$; $V_{ბ}=28\sqrt{\frac{21}{\pi}}$

ამოცანა 4. კონუსის სიმაღლეა 20, ფუძის რადიუსი კი—25. იპოვეთ წვეროზე გავლებული კვეთის ფართობი, თუ ამ კვეთიდან კონუსის ფუძის ცენტრამდე მანძილია 12.



მოც: კონუსი, SO სიმაღლეა SO=20, AO=25, OP⊥ASB, OP=12

უ.გ. S_{ASB} .

ამოხსნა. ΔSBO მართკუთხაა: $SB=\sqrt{OS^2+OB^2}=\sqrt{20^2+25^2}=\sqrt{1025}$. ასევე, $SP^2=OS^2-OP^2=20^2-12^2=16^2$ ანუ SP=16. მართკუთხა SKO სამკუთხედში მსგავსებათა დამოკიდებულებიდან მივიღებთ: $OS^2=SK\cdot SP\Rightarrow SK=\frac{OS^2}{SP}=\frac{400}{16}=25$. მაშინ ΔSKB-ში:

$$KB=\sqrt{SB^2-SK^2}=\sqrt{1025-625}=\sqrt{400}=20.$$

ΔABO-ში AB=2KB=40. ΔASB-ში $S_{\Delta ASB}=\frac{AB\cdot SK}{2}=\frac{40\cdot 25}{2}=500$.

პასუხი: 500.