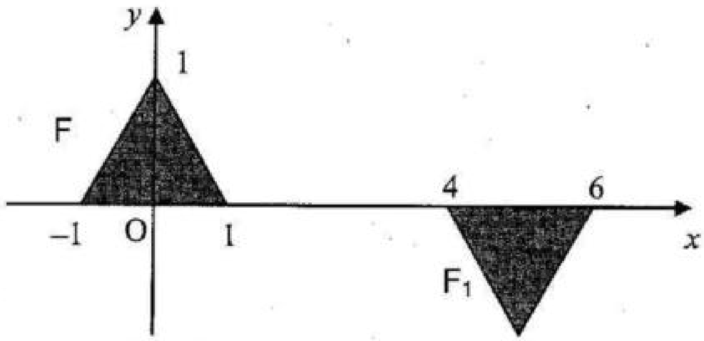
§12. ფიგურათა გარდაქმნები სიბრტყეზე. გარდაქმნათა კომპოზიციები

I. *ფიგურათა გარდაქმნა.* ვთქვათ მოცემულია რაიმე ფიგურა და აგრეთვე ფორმულა ან სიტყვიერი აღწერა, რომელიც განსაზღვრავს მოცემული ფიგურის ნებისმიერი წერტილის გარდაქმნის წესს. მაშინ გარდაქმნილი წერტილების ერთობლიობა ქმნის ახალ ფიგურას, რომელსაც უწოდებენ ***მოცემული ფიგურის გარდაქმნით მიღებულს***.

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია f გარდაქმნა, განსაზღვრული შემდეგი ფორმულით:

$$f(x;y)=(x+5;-y).$$

სიტყვიერი აღწერით იგივე გარდაქმნა შეგვიძლია ასე განვსაზღვროთ: f გარდაქმნა პირველ კოორდინატს (აბსცისას) ზრდის 5-ით, ხოლო მეორე კოორდინატს (ორდინატს) უცვლის ნიშანს. შემდეგი ნახაზი გვიჩვენებს, თუ ეს f როგორ გარდაქმნის ფიგურებს: F_1 ფიგურა მიიღება F ფიგურის f გარდაქმნით.



ვთქვათ, რომელიმე f გარდაქმნა (არა აუცილებლად ამ მაგალითში მოყვანილი) გარდაქმნის ფიგურებს და არსებობს სხვა გარდაქმნა, g, რომელიც f-ის მიერ გარდაქმნილ ფიგურებს საწყის ფიგურებში გარდაქმნის. მაშინ f და g გარდაქმნებს ***ურთიერთშექცეული*** ეწოდებათ, ცალკე f-ს და ცალკე g-ს კი ***შექცევადი გარდაქმნები*** ეწოდებათ.

მაგალითად, განხილულ მაგალითში f-ის შექცეულმა გარდაქმნამ უნდა განახორციელოს მისი შებრუნებული მოქმედებები: აბსცისა შეამციროს 5-ით, ორდინატს შეუცვალოს ნიშანი – ესაა სიტყვიერი აღწერა. ფორმულით $g(x;y)=(x-5;-y)$.

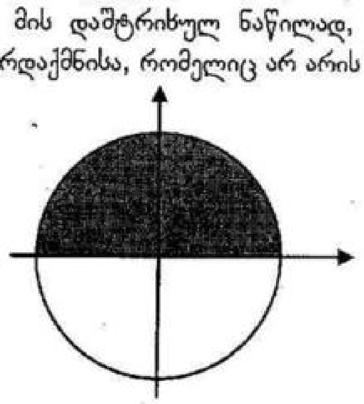
ზოგადად, თუ ჯერ g გარდაქმნა მოქმედებს წერტილებზე, ხოლო შემდეგ f, მაშინ ვამბობთ რომ ადგილი აქვს g და f-ის ***კომპოზიციას***, ამ შემთხვევაში გარდაქმნილი $(x;y)$ წერტილის აღსანიშნავად ვიყენებთ აღნიშვნას:

$$(f\circ g)(x;y) \quad \text{ან} \quad f(g(x;y)).$$

აუცილებელი არაა მხოლოდ ერთმანეთისაგან განსხვავებული გარდაქმნების კომპოზიციები განვიხილოთ, შესაძლებელია ერთი და იგივე გარდაქმნამ იმოქმედოს ზედიზედ რამდენჯერმე. მაგალითად, უკვე განხილული f გარდაქმნის ზედიზედ ორჯერ გამოყენება არის გარდაქმნა $f\circ f$, რომელიც მოქმედებს შემდეგი წესით: აბსცისას გაზრდის 10-ით, ხოლო ორდინატს დატოვებს უცვლელს.

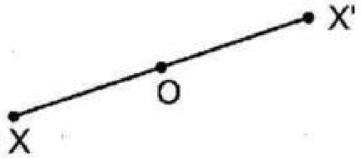
გარდაქმნას ეწოდება ***იგივური***, თუ ყოველ წერტილს (და ფიგურას) თავის თავში გარდაქმნის.

შესაძლებელია გარდაქმნა არ იყოს შექცევადი. მაგალითად, გარდაქმნა $f(x;y)=(x;|y|)$ შემდეგ ნახატზე მოყვანილ წრეს გარდაქმნის მის დაშტრიხულ ნაწილად, ხოლო $g(x;y)=(0;0)$ კიდევ უფრო მარტივი და თვალსაჩინო მაგალითია გარდაქმნისა, რომელიც არ არის შექცევადი.



II. რამდენიმე გავრცელებული გარდაქმნა.

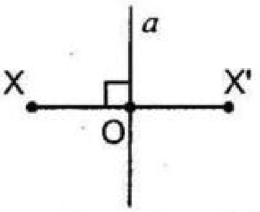
ა) წერტილის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა. ვთქვათ, O არის სიბრტყის ფიქსირებული წერტილი, ხოლო X არის ნებისმიერი წერტილი. XO მონაკვეთის გაგრძელებაზე O-ს მეორე მხარეს გადავზომოთ XO მონაკვეთის ტოლი OX' მონაკვეთი, მაშინ X' წერტილს ეწოდება ***X წერტილის სიმეტრიული O წერტილის მიმართ***. O წერტილის სიმეტრიული O-ს მიმართ თვითონ O არის.



F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი მოცემული O წერტილის მიმართ სიმეტრიულ X' წერტილში გადადის, ***O წერტილის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა*** ეწოდება. ამ დროს F და F' ფიგურებს ***O წერტილის მიმართ სიმეტრიული*** ეწოდება.

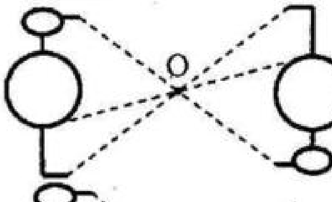
თუ O წერტილის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნას F ფიგურა თავის თავში გადაჰყავს, მაშინ F-ს ეწოდება ***ცენტრულ-სიმეტრიული***, ხოლო O წერტილს — ***სიმეტრიის ცენტრი***. მაგალითად, პარალელოგრამი არის ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა, რომლის სიმეტრიის ცენტრს წარმოადგენს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.

ბ) წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა. ვთქვათ, a ფიქსირებული წრფეა. ავიღოთ ნებისმიერი X წერტილი და a წრფეზე დავუშვათ XO მართობი. ამ მართობის გაგრძელებაზე a წრფის მეორე მხარეს გადავზომოთ OX-ის ტოლი მონაკვეთი OX'. X' წერტილს ეწოდება ***X წერტილის სიმეტრიული a წრფის მიმართ***. ცხადია, თუ X წერტილი a წრფეზე მდებარეობს, იგი საკუთარი თავის სიმეტრიულია a წრფის მიმართ.

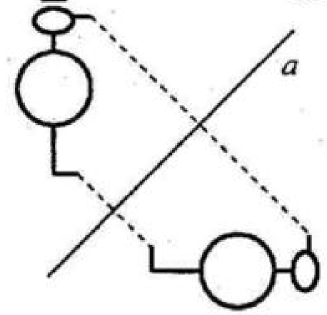


F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი a წრფის მიმართ სიმეტრიულ X' წერტილში გადადის, ***a წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ეწოდება***. ამ დროს F და F' ფიგურებს ***a წრფის მიმართ სიმეტრიული*** ეწოდება.

თუ a წრფის მიმართ სიმეტრიულ გარდაქმნას F ფიგურა თავის თავში გადაჰყავს, მაშინ ამ ფიგურას ***a წრფის მიმართ სიმეტრიული*** (ზოგჯერ ღერძულ-სიმეტრიულსაც ვამბობთ) ეწოდება, ხოლო a წრფეს სიმეტრიის ღერძი ეწოდება. მაგალითად, რომბის დიაგონალები (მაგრამ არა ნებისმიერი მართკუთხედის) მისი სიმეტრიის ღერძებს წარმოადგენენ. შემდეგი ორი ნახატი გვიჩვენებს განსხვავებას განხილულ გარდაქმნებს შორის:

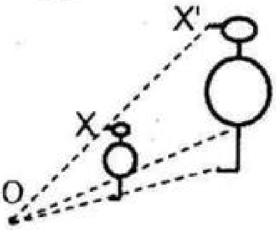


O წერტილის მიმართ სიმეტრიის ასახვა



a წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ფაქტიურად სარკისებური ასახვაა

გ) O ცენტრის მიმართ ჰომოთეტია. ვთქვათ O მოცემული წერტილია, k მოცემული რიცხვია. F ფიგურის ნებისმიერ X წერტილზე გავავლოთ OX სხივი და მასზე გადავზომოთ k·OX-ის ტოლი OX' მონაკვეთი.



k=2.

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი აღნიშნული ხერხით აგებულ X' წერტილად გარდაიქმნება, ***O ცენტრის მიმართ ჰომოთეტია*** ეწოდება. ამ დროს, k-ს ეწოდება ***ჰომოთეტიის კოეფიციენტი***, F და F'-ს – ჰომოთეტიური ფიგურები k კოეფიციენტით.

ჰომოთეტიის კოეფიციენტი შეიძლება იყოს უარყოფითიც. მაგალითად, თუ $k=-1$, მაშინ ჰომოთეტია წარმოადგენს ცენტრულ სიმეტრიას.

საზოგადოდ, თუ A და B წერტილები ჰომოთეტიის ასახვით გადადის A' და B' წერტილებში, ხოლო k ჰომოთეტიის კოეფიციენტია, სამართლიანია ტოლობა $A'B'=|k|\cdot AB$.

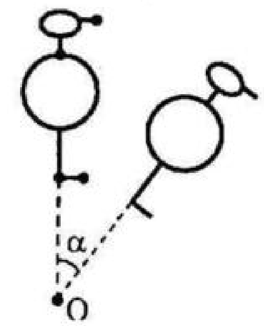
დ) მოძრაობა. F ფიგურის F' ფიგურად გარდაქმნას მოძრაობა ეწოდება, თუ იგი წერტილებს შორის მანძილებს ინარჩუნებს, ანუ თუ F ფიგურის ნებისმიერი ორი X და Y წერტილი გარდაიქმნა F' ფიგურის X' და Y' წერტილებად, მაშინ XY=X'Y'.

მოძრაობის მაგალითებს წარმოადგენენ წერტილის და წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნები. O ცენტრის მიმართ ჰომოთეტია, როცა k≠1, არ წარმოადგენს მოძრაობას.

მოძრაობის გარდაქმნას აქვს შემდეგი თვისებები:

- წრფეზე განლაგებული წერტილები გარდაიქმნება წრფეზე მდებარე წერტილებში მათი ურთიერთგანლაგების შენარჩუნებით;
- მოძრაობა წრფეებს წრფეებში გარდაქმნის, სხივებს სხივებში, მონაკვეთებს მონაკვეთებში;
- მოძრაობა ნებისმიერ კუთხეს მის ტოლ კუთხეში გარდაქმნის;
- ორი მოძრაობის კომპოზიცია კვლავ მოძრაობას წარმოადგენს.

ე) მობრუნება. ვთქვათ O მოცემული წერტილია, α მოცემული კუთხე (დადებითი ან უარყოფითი). F ფიგურის ნებისმიერ წერტილზე გავავლოთ OX სხივი და ამ სხივის α კუთხით მობრუნებით მიღებულ სხივზე გადავზომოთ OX-ის ტოლი OX' მონაკვეთი (თუ α>0, მობრუნება ხდება საათის ისრის მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ისრის საპირისპირო მიმართულებით).

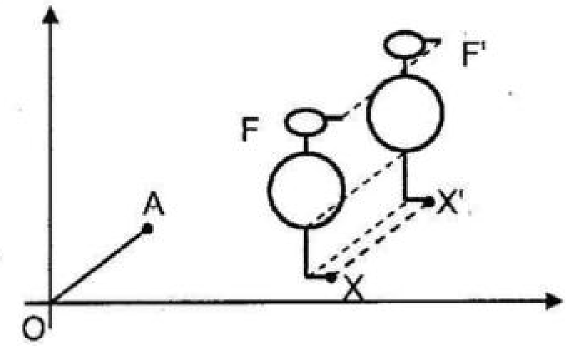


F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი აღნიშნული ხერხით აგებულ X' წერტილად გარდაიქმნება, ***O ცენტრის მიმართ α კუთხით მობრუნება ეწოდება.***

განმარტებიდან გამომდინარე, მობრუნების გარდაქმნაც მოძრაობას წარმოადგენს, რადგან წერტილებს შორის მანძილებს არ ცვლის.

გ) პარალელური გადატანა. ვთქვათ $(x_0;y_0)$ სიბრტყის მოცემული წერტილია. F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როდესაც მისი ყოველი $(x;y)$ წერტილი $(x+x_0;y+y_0)$ წერტილად გარდაიქმნება, ***პარალელური გადატანა*** ეწოდება.

პარალელური გადატანაც მოძრაობას წარმოადგენს, რადგან ფიგურის წერტილების გარდაქმნით მათ შორის მანძილი არ იცვლება.



თუ $A=(x_0;y_0)$, X არის F ფიგურის ნებისმიერი წერტილი, ხოლო X' არის X'-ის გარდაქმნით მიღებული, მაშინ OA და XX' პარალელური და ტოლი მონაკვეთებია.

ვთქვათ, T არის პარალელური გადატანა, რომელიც A წერტილს ასახავს B წერტილში, ანუ $T(A)=B$, მაშინ T პარალელური გადატანა განისაზღვრება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით, ანუ ნებისმიერი C წერტილისათვის $T(C)=C+\overrightarrow{AB}$.

III. *ზოგიერთი გარდაქმნის კომპოზიცია.* მოვიყვანოთ რამდენიმე ცხადი ფაქტი გარდაქმნების კომპოზიციის შესახებ.

- წერტილების მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნების კომპოზიცია პარალელური გადატანაა.
- წერტილის მიმართ სიმეტრიის ასახვის კომპოზიცია თავის თავთან არის იგივური გარდაქმნა.
- ვთქვათ a და b პარალელური წრფეებია, f სიმეტრიის გარდაქმნაა a-ს მიმართ, g სიმეტრიაა b-ს მიმართ. მაშინ, $f \circ g$ არის პარალელური გადატანა.
- წრფის მიმართ სიმეტრიის ასახვის კომპოზიცია თავის თავთან არის იგივური გარდაქმნა.
- პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია არის პარალელური გადატანა.
- ერთი და იგივე ცენტრის მიმართ მობრუნებათა კომპოზიცია არის მობრუნება.
- ორი მოძრაობის კომპოზიცია კვლავ მოძრაობას წარმოადგენს.