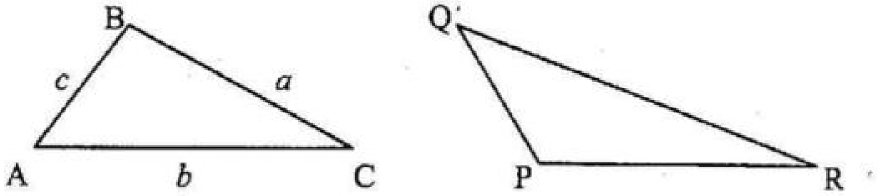
§3. სამკუთხედი და მისი ელემენტები

1. *სამკუთხედის ძირითადი ელემენტები.* **სამკუთხედი** ეწოდება ფიგურას, რომელიც შედგება ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის შეერთებით მიღებული ტეხილისაგან და ამ ტეხილით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილისაგან. ამ წერტილებს **სამკუთხედის წვეროები** ეწოდებათ, ხოლო მონაკვეთებს – **სამკუთხედის გვერდები**.



ნახ. 1.

A, B, C წერტილებისგან შედგენილი სამკუთხედი აღინიშნება ΔABC (ასოების მიმდევრობა არსებითი არაა). ნახ.1-ზე, მარჯვნივ მოცემულია ΔPQR.

სამკუთხედი შეიძლება იყოს მრავალი კერძო სახის, მაგრამ ყოველ მათგანს აქვს **6 ძირითადი ელემენტი**: წვეროებით და გვერდებით შედგენილი **3 შიგა კუთხე** და **სამი გვერდი**. მაგალითად, ABC სამკუთხედში კუთხეებია $\angle BAC$ (მოკლედ $\angle A$), $\angle ABC$ (მოკლედ $\angle B$) და $\angle BCA$ (მოკლედ $\angle C$); გვერდებია AB (მოკლედ c – ამ გვერდის მოპირდაპირე წვეროს მცირე სიმბოლო), BC (მოკლედ a) და AC (მოკლედ b). ასეთი შემოკლებები მიღებულია. ΔABC სამკუთხედში $\angle A$ და a, $\angle B$ და b, $\angle C$ და c ერთმანეთის **მოპირდაპირე** კუთხეები და გვერდებია. მაგალითად, ΔPQR-ში $\angle Q$ კუთხე PR გვერდის მოპირდაპირეა და პირიქით.

ნებისმიერი ABC სამკუთხედისათვის, მისი გვერდები და კუთხეები აუცილებლად აკმაყოფილებენ შემდეგ თანაფარდობებს:

1. შიგა კუთხეების ჯამია 180°, ანუ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$;

2. ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე (სამკუთხედის უტოლობა) ანუ

$$a+b>c \ \ (\text{შედეგად, } a>c-b \text{ და } b>c-a),$$

$$a+c>b \ \ (a>b-c \text{ და } c>b-a),$$

$$b+c>a \ \ (b>a-c \text{ და } c>a-b).$$

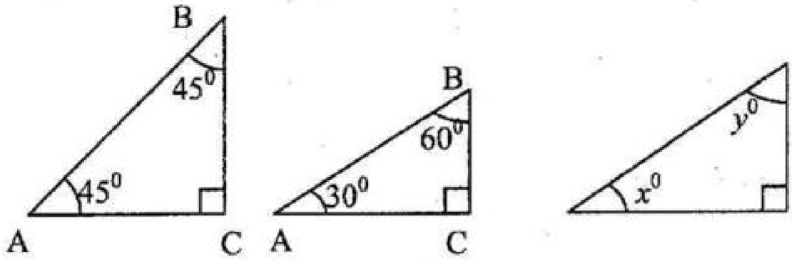
სამკუთხედის კუთხეებს და გვერდებს შორის ფაქიზი კავშირი არსებობს, რომელიც სრულყოფილად აღიწერება ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით. მაგრამ არსებობს ზოგადი კანონზომიერებაც: თუ ვადარებთ ორ გვერდს და მათ მოპირდაპირე ორ კუთხეს, მაშინ უდიდესი გვერდის პირდაპირ უდიდესი კუთხე მდებარეობს, მაგალითად, ნახ.1-ზე ΔPQR-ში $\angle P>\angle Q$ ნიშნავს, რომ $QR>PR$. შევნიშნოთ, რომ ეს კანონზომიერება არ იძლევა რაოდენობრივი დასკვნების გაკეთების საშუალებას, მაგალითად, $\angle P=2\angle Q$ არ ნიშნავს, რომ $QR=2PR$.

2. *სამკუთხედების კლასიფიკაცია ძირითადი ელემენტების მიხედვით.* სამკუთხედი შეიძლება იყოს:

- **მახვილკუთხა**, როდესაც სამივე კუთხე მახვილია;
- **მართკუთხა**, როდესაც ერთი კუთხე მართია, ორი კი – მახვილი;
- **ბლაგვკუთხა**, როდესაც ერთი კუთხე ბლაგვია, ორი კი – მახვილი;

- **ტოლფერდა**, როდესაც ორი გვერდი ტოლია და მათ **ფერდები** ეწოდება, მესამე გვერდს კი – **ფუძე**;
- **ტოლგვერდა**, როდესაც სამივე გვერდი და სამივე კუთხე ტოლია;
- **სხვადასხვაგვერდა**, როდესაც სამივე გვერდი და სამივე კუთხე განსხვავებულია.

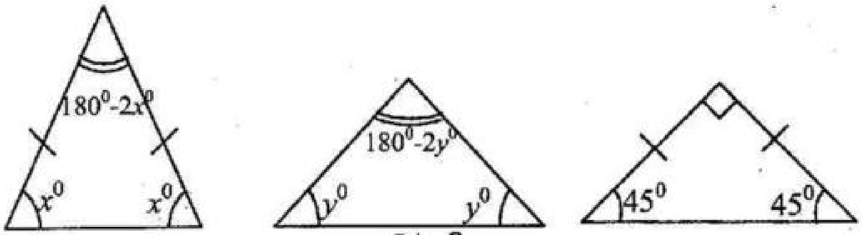
მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის შემადგენელ გვერდებს **კათეტები** ეწოდება, მესამე გვერდს – **ჰიპოტენუზა**. ჩვეულებრივ, მართი კუთხე სხვა კუთხეებიდან განსხვავებულად მოინიშნება (ნახ.2).



ნახ. 2.

მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამია 90°: $x°+y°=90°$.

ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდების მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია (ნახ.3).



ნახ. 3.

პირიქით, თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მათი მოპირდაპირე გვერდებიც ტოლია ანუ ეს გვერდები ფერდებია, სამკუთხედი კი ტოლფერდაა.

ტოლგვერდა სამკუთხედში სამივე კუთხე 60°-ის ტოლია, ანუ სამკუთხედი კუთხეებით 60°=60°=60° ტოლგვერდაა.

3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები და ძირითადი ელემენტების ზოგიერთი სხვა კომბინაცია. ორ სამკუთხედს **ტოლი** ეწოდება, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე ძირითადი ელემენტები (სამი გვერდი+სამი კუთხე). როდესაც $\Delta ABC=\Delta PQR$, ეს, როგორც წესი ნიშნავს, რომ ეს სამკუთხედები ტოლია და $\angle A=\angle P$, $\angle B=\angle Q$, $\angle C=\angle R$, $AB=PQ$, $BC=QR$, $AC=PR$. პრაქტიკულად რომ დავრწმუნდეთ $\Delta ABC=\Delta PQR$ ტოლობის სამართლიანობაში, აუცილებელი არაა გვერდების და კუთხეების შედარება. უმჯობესია სამკუთხედების ტოლობის ნიშნების გამოყენება.

სამკუთხედების ტოლობის I ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

სამკუთხედების ტოლობის II ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მისი მიმდებარე ორი კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის გვერდის და მისი მიმდებარე ორი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

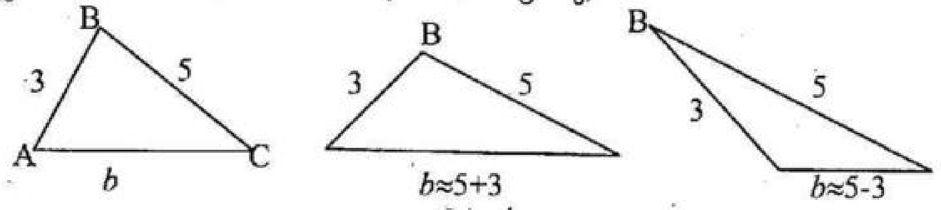
სამკუთხედების ტოლობის III ნიშანი: თუ ორ სამკუთხედს ერთი და იგივე სიგრძის გვერდები აქვთ, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

თუ გვინდა ამ ნიშნების გამოყენებით ორი მართკუთხა სამკუთხედის ტოლობის ჩვენება, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ მათი თითო კუთხე უკვე ერთმანეთის ტოლია. ზოგჯერ, სპეციფიკური შეიძლება აღმოჩნდეს ტოლფერდა სამკუთხედის ტოლობის დამტკიცებაც.

როგორც ვნახეთ, ΔABC-ს ექვსი ძირითადი ელემენტიდან მას ტოლობის სიზუსტით დაადგენს მხოლოდ სამი სამეული: $\angle A, c, b$; $\angle B, \angle C, a$; a, b, c. დანარჩენი სამეულები და ორეულები შესაძლოა საერთო იყოს არატოლი სამკუთხედებისთვის, რაც მრავალი საინტერესო ამოცანის საფუძველია.

ამოცანა: სამკუთხედის ორი გვერდია 5 სმ და 3 სმ. რა შესაძლო მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს მესამე გვერდმა?

ამოხსნა: ვთქვათ, ΔABC-ში a=5 სმ c=3 სმ (ნახ.4, მარცხნივ).

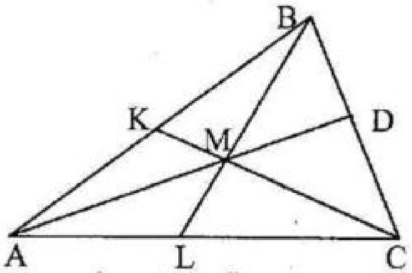


ნახ. 4.

ცხადია, $b<a+c$ და $b>a-c$ ანუ $2<b<8$. როცა $\angle B$ უახლოვდება 180°-იან მნიშვნელობას, $b\approx 5+3=8$. როცა $\angle B\approx 0$, მაშინ $b\approx 5-3=2$. ამგვარად, მესამე გვერდი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას (2; 8) ღია შუალედიდან.

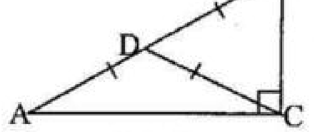
4. *პერიმეტრი, მედიანა, სიმაღლე, ბისექტრისა, გარე კუთხე. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების ჯამს მისი პერიმეტრი ეწოდება.* ABC სამკუთხედისათვის P-თი აღნიშნავენ P=AB+BC+AC, ხოლო საჭიროების შემთხვევაში, ნახევარპერიმეტრს აღნიშნავენ p-თი: $p=\frac{P}{2}=\frac{AB+BC+AC}{2}$.

მედიანა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის ნებისმიერ წვეროს აერთებს მისი მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან. სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება და მათი გადაკვეთის წერტილი თითოეულ მედიანას ყოფს პროპორციით 2:1 წვეროს მხრიდან. მაგალითად, ნახ.5-ზე AD მედიანაა. (ე.ი. BD=CD). მედიანებია CK და BL. ამიტომ AM:DM=2:1, CM:KM=2:1, BM:LM=2:1



ნახ. 5.

ხშირად სასარგებლოა იმ ფაქტის ცოდნა, რომ ***მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია*** (ნახ.6).

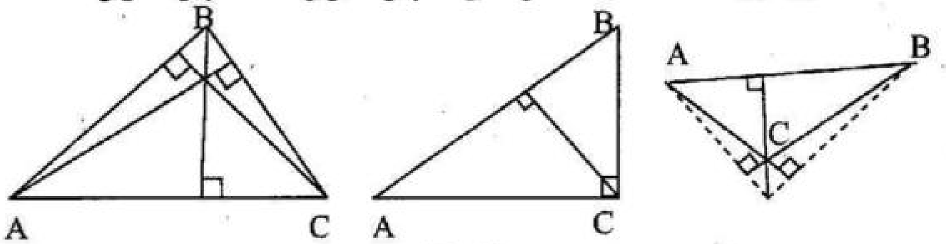


ნახ. 6.

სამკუთხედის შიგა კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს წვეროდან მის მოპირდაპირე გვერდამდე სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება. ნებისმიერ სამკუთხედში სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება, რომელიც აუცილებლად ამ სამკუთხედის შიგნითაა (შემდეგში ვნახავთ, რომ ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია).

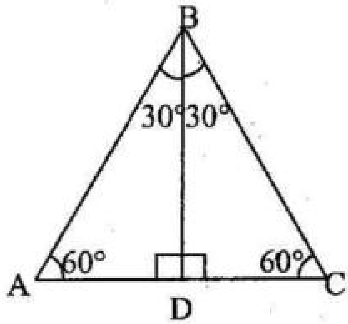
სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის ნებისმიერ წვეროს აერთებს მის მოპირდაპირე გვერდთან ან ამ გვერდის გაგრძელებასთან და მისი მართობულია. სამივე სიმაღლე ერთ წერტილში იკვეთება და ეს წერტილი:

- ***მახვილკუთხა სამკუთხედში სამკუთხედის შიგნითაა*** (ნახ.7. მარცხნივ);
- ***მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროა*** (ნახ.7. შუაში);
- ***ბლაგვკუთხა სამკუთხედში სამკუთხედის გარეთაა*** (ნახ.7. მარჯვნივ).



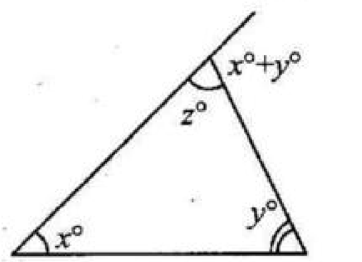
ნახ. 7.

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე ამავე დროს მედიანაცაა და ბისექტრისაც, ხოლო ტოლგვერდა სამკუთხედში ყოველი სიმაღლე მედიანაცაა და ბისექტრისაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია (ნახ. 8 გვიჩვენებს, რომ მართკუთხა ΔABD, რომელშიც $\angle ABD=30°$, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ტოლგვერდა სამკუთხედის ნახევარი, რომელშიც BD მედიანაცაა და ამიტომ $AD=\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}$).



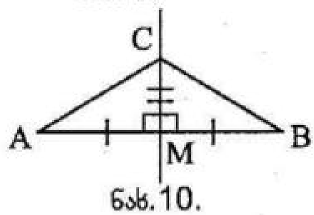
ნახ. 8.

სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს გარე კუთხე ეწოდება. რადგან $x+y+z=180°$, ამიტომ $x°+y°$ აგრეთვე $z°$ სიდიდის შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხის გრადუსული ზომაა.



ნახ. 9.

5. ***მონაკვეთის შუამართობი. მონაკვეთის შუამართობი (შუაპერპენდიკულარი) ეწოდება ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალ მონაკვეთის მართობულ წრფეს.*** თუ MC AB-ს შუამართობია, მაშინ $\Delta AMC=\Delta BMC$, რაც ნიშნავს, რომ $AC=BC$. ამგვარად, ***მონაკვეთის შუამართობის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან.***

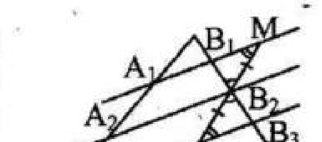


ნახ.10.

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: ***მონაკვეთის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილი მონაკვეთის შუამართობს ეკუთვნის.***

6. ***თალესის თეორემა. მისი ზოგიერთი გამოყენება.***

თეორემა /თალესის/: თუ კუთხის გვერდების გადამკვეთი პარალელური წრფეები მის ერთ გვერდზე ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს, მაშინ ეს წრფეები მეორე გვერდზეც ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს.



ნახ.11.

დამტკიცება: ვთქვათ, A_1, A_2, A_3 პარალელური წრფეების კუთხის ერთ გვერდთან გადაკვეთის წერტილებია და $A_1A_2=A_2A_3$. ვაჩვენოთ, რომ თუ B_1, B_2, B_3 იგივე კუთხის მეორე გვერდთან გადაკვეთის წერტილებია, მაშინ $B_1B_2=B_2B_3$.

პირობიდან გამომდინარეობს, რომ A_1A_3 მონაკვეთის შუაწერტილია A_2 (ნახ.11). ამიტომ A_1 და A_3 წერტილები A_2B_2 მონაკვეთის სხვადასხვა მხარესაა. $A_1B_1 \| A_2B_2$. ამიტომ B_1 და A_1B_1 მონაკვეთის

ნებისმიერი წერტილი A_2B_2 მონაკვეთის იმავე მხარესაა, სადაც – A_1. ანალოგიურად, B_3 წერტილი A_2B_2 მონაკვეთის იმავე მხარესაა, სადაც – A_3, ე.ი. B_1B_3 მონაკვეთი იკვეთება A_2B_2 წრფესთან ანუ B_2 წერტილი მდებარეობს B_1B_3 მონაკვეთის შიგნით რადგან ორივე წრფე ერთადერთ წერტილში იკვეთება.

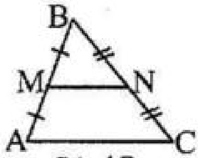
B_2 წერტილზე გავავლოთ A_1A_3 წრფის პარალელური MN წრფე. პარალელოგრამის თვისების თანახმად, $A_1A_2=MB_2$, $A_2A_3=B_2N$. რადგან $A_1A_2=A_2A_3$, ამიტომ $MB_2=B_2N$.

შედეგი 1. თუ კუთხის გვერდების გადამკვეთი სამი წრფის მიერ ერთ გვერდზე მოკვეთილი მონაკვეთების შეფარდებაა $m:n$, მაშინ მეორე გვერდზე მოკვეთილი შესაბამისი მონაკვეთების შეფარდებაც არის $m:n$.

დამტკიცება. საკმარისია მეზობელი მონაკვეთების გაერთიანება გავყოთ $m+n$ ტოლ მონაკვეთად, დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ მოცემული წრფეების პარალელური წრფეები და გამოვიყენოთ თალესის თეორემა.

შემდეგი ორი შედეგის დამტკიცება სტანდარტულია და მათ გამოვტოვებთ.

შედეგი 2. სამკუთხედის შუამონაკვეთი (ე.ი. მისი ორი გვერდის შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი) მესამე გვერდის პარალელურია და მისი ნახევრის ტოლია. $MN \parallel AC$, $MN=AC/2$.

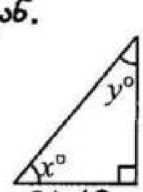


ნახ.12.

შედეგი 3. სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება და თითოეული მათგანი გადაკვეთის წერტილით იყოფა შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან.

7. მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები.

მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამია $90°$ (ნახ.13), ანუ თუ ცნობილია ერთი მახვილი კუთხე, შეგვიძლია მეორის გაგებაც. აქედან გამომდინარეობს მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის პირველი ორი ნიშანი.



ნახ.13.

ნიშანი 1. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე, შესაბამისად, ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის და მახვილი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

ნიშანი 2. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მისი მოპირდაპირე კუთხე, შესაბამისად, ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის და მისი მოპირდაპირე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

ნიშანი 3. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი, შესაბამისად, ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის და კათეტის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

ვაჩვენოთ მე-3-ე ნიშნის სამართლიანობა.

ნახ.14.

ვთქვათ, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ და $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1=90°$. AC-ს გაგრძელებაზე გადავზომოთ $CD=AC$. შუამართობის თვისების ძალით $AB=BD$. ანალოგიურად ვიღებთ $C_1D_1=A_1C_1$ და $A_1B_1=B_1D_1$. ამგვარად, $\Delta ABD=$ $=\Delta A_1B_1D_1$ და $\angle A=\angle A_1$ (ნახ.7). მაგრამ სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის ძალით ეს ნიშნავს, რომ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

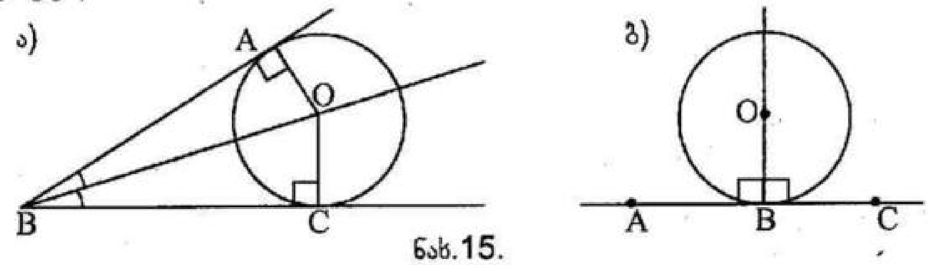
8. კუთხის ბისექტრისის თვისება. თუ რაიმე A წერტილი ეკუთვნის a წრფეს, მაშინ მათ შორის მანძილი ნულის ტოლად ითვლება. თუ A წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს ანუ $A \notin a$, მაშინ მათ შორის მანძილი A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძის ტოლია ანუ იმ მონაკვეთის სიგრძეა, რომელიც A წერტილს a წრფესთან აერთებს და a წრფის მართობულია.

დებულება. გაშლილ კუთხეზე ნაკლები კუთხის ბისექტრისის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან.

შედეგი. კუთხეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი კუთხის ბისექტრისაზე ძევს.

დამტკიცება. თუ $\angle ABC<180°$ (ნახ.15 ა), მაშინ $AO=OC$ რადიუსებია, საერთოა და $\angle A=\angle C=90°$ ანუ $\angle AOB=\angle COB \Rightarrow \angle ABO=\angle CBO$.

თუ $\angle ABC=180°$, მაშინ წრეწირი AC წრფეს ეხება B წერტილში ანუ $OB \perp AC$, ე. ი. $\angle ABO=\angle CBO=90°$.



ნახ.15.