§ 11. რაციონალური, მოდულის შემცველი, ირაციონალური განტოლებები და უტოლობები

I. რაციონალური განტოლებები. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ სახის განტოლებას , სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ ($Q(x)\neq 0$) მრავალწევრებია **რაციონალური განტოლება** ეწოდება. ამ განტოლების ამოხსნა დაიყვანება სისტემის ამოხსნაზე

$$\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

***მაგალითი* 1.** ამოვხსნათ განტოლება $\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{x(3-x)}$.

ამოხსნა. თუ ყველა წევრს გადავიტანთ მარცხნივ და გავაერთმნიშვნელიანებთ, მივიღებთ $\dfrac{x^2-7x+12}{4x(3-x)}=0$,

რაც ტოლფასია

$$\begin{cases} x^2-7x+12=0 \\ 4x(3-x)\neq 0 \end{cases}$$

სისტემის. $x^2-7x+12=0$ განტოლებიდან ვპოულობთ $x_1=3$, $x_2=4$. მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება $x=3$-თვის (არ სრულდება მეორე პირობა), ამიტომ 3 არ არის მოცემული განტოლების ფესვი. პასუხია $x=4$.

რაციონალური განტოლებების ამოხსნისას ზოგჯერ გამოიყენება **სრული კვადრატის** გამოყოფის ხერხი. განვიხილოთ

***მაგალითი* 2.** ამოვხსნათ განტოლება $x^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=8$.

ამოხსნა. გვაქვს

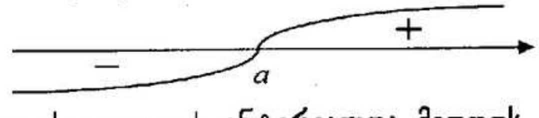
$$x^2+2x\cdot\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\cdot\frac{x}{x-1}=8 \Leftrightarrow \left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\cdot\frac{x}{x-1}=8 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^2-2\dfrac{x^2}{x-1}=8$. აღვნიშნოთ $\dfrac{x^2}{x-1}=y$, მივიღებთ განტოლებას $y^2-2y=8$, რომლის ფესვებია 4 და -2. ე.ი.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1}=4 \\ x\neq 1 \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1}=-2 \\ x\neq 1, \end{cases}$$

რომელთა ფესვები, $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{3}$, $x_3=-1-\sqrt{3}$ წარმოადგენენ მოცემული განტოლების ამონახსნებს.

II. რაციონალური უტოლობები. გავიხსენოთ, რომ $x-a$ ორწევრი დადებითია x-ის ყველა მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც რიცხვით ღერძზე a წერტილის მარჯვნივაა, ხოლო უარყოფითია ყველა x-სათვის, რომელიც a წერტილის მარცხნივაა,



$x-a$ ორწევრის ეს თვისება საფუძვლად უდევს **ინტერვალთა მეთოდს**, რომელიც ხშირად გამოიყენება რაციონალური უტოლობების ამოხსნისას.

ვთქვათ, უნდა ამოვხსნათ $P(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$ სახის უტოლობა, სადაც $a_1<a_2<\cdots<a_n$ ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $x_0>a_n$-თვის $P(x)$-ის ყოველი თანამამრავლ დადებითია, ე.ი. $P(x)$-იც დადებითია. ნებისმიერი $x_1\in(a_{n-1};a_n)$ რიცხვისათვის ბოლო თანამამრავლი მნიშვნელობა უარყოფითია და დანარჩენი თანამამრავლები დადებითი, ე.ი. $P(x)$ უარყოფითია. ანალოგიურა ნებისმიერი $x_2\in(a_{n-2};a_{n-1})$-თვის $P(x)$ იქნება დადებითი და ა.შ.

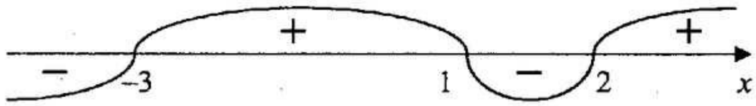
$P(x)>0$ ან $P(x)<0$ უტოლობათა ამოხსნის მეთოდი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: რიცხვით წრფეზ დავალაგოთ a_1, a_2, ... , a_n რიცხვები ზრდადობით, უკიდურეს მარჯვენა შუალედში დავსვათ „+" ნიშანი მომდევნოში (მარჯვნიდან მარცხნივ) „−" ნიშანი და ა.შ. გავაგრძელებთ დასმებს ნიშანთა მონაცვლეობით მაშინ $P(x)>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება ყველა იმ შუალედის გაერთიანება, რომლებში დასმულია პლუს ნიშანი, ხოლო $P(x)<0$ უტოლობისა კი გაერთიანება ყველა შუალედისა, სადაც დასმული მინუს ნიშანი. განვიხილოთ

***მაგალითი* 3.** ამოვხსნათ უტოლობა $(x-2)(3+x)(1-x)>0$.

ამოხსნა. უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ -1-ზე. მივიღებთ

$$(x-2)(x-(-3))(x-1)<0.$$

რიცხვით ღერძზე დავალაგოთ უტოლობაში შემავალი მამრავლების ფესვები -3, 1, 2. ისინი რიცხვით ღერძ გაყოფენ 4 შუალედად.



ამ შუალედებში მარჯვნიდან განვალაგოთ ნიშნები. მინუს ნიშანი გვაქვს $(-\infty;-3)$ და $(1;2)$ შუალედებში ამიტომ მოცემული უტოლობის ამონახსნია $(-\infty;-3)\cup(1;2)$ სიმრავლე.

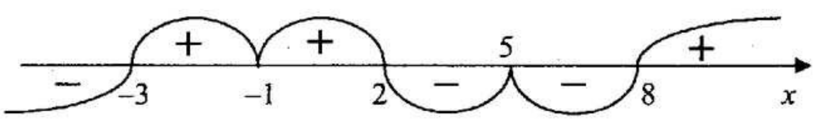
განხილული მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ მაშინაც, როცა უტოლობის მარცხენა მხარე უფრო რთულია

$$P(x)\equiv(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}$$

სახისაა, სადაც $k_1,k_2,...,k_n\in Z$.

***მაგალითი* 4.** ამოვხსნათ უტოლობა $\dfrac{(x-2)(x+3)^5(x+1)^6}{(x-5)^2(x-8)}>0$.

ამოხსნა. აქაც რიცხვით ღერძზე განვალაგოთ უტოლობაში შემავალი მამრავლების ფესვები: -3, -1, 2, 5, 8 და მიღებულ შუალედებს დავუსვათ პლუს ან მინუს ნიშანი მარჯვნიდან მარცხნივ დაწყებული პლუს ნიშნით მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ლუწ მაჩვენებლიანი მამრავლის ფესვზე გადასვლის დროს შევინარჩუნოთ წინა შუალედის ნიშანი.



მოცემული უტოლობის ამონახსნი იქნება ყველა პლუს-ნიშნიანი შუალედის გაერთიანება, ანუ $(-3;-1)\cup(-1;2)\cup(8;+\infty)$.

იმისათვის, რომ $P(x)>0$ ან $P(x)<0$ **ზოგადი სახის უტოლობები** დავიყვანოთ ისეთ სახემდე, რომ შესაძლებელი იყოს ინტერვალთა მეთოდის გამოყენება, **საჭიროა:** უტოლობის მარცხენა მხარე დაიშალოს მამრავლებად; უტოლობათა თვისებების გათვალისწინებით ის მამრავლები, რომლებიც რიცხვით ღერძზე ინარჩუნებენ ერთი და იმავე ნიშანს უკუვაგდოთ, ხოლო დანარჩენი მამრავლები ჩავწეროთ ისე, რომ ყოველი ცვლადის კოეფიციენტი იყოს ერთის ტოლი.

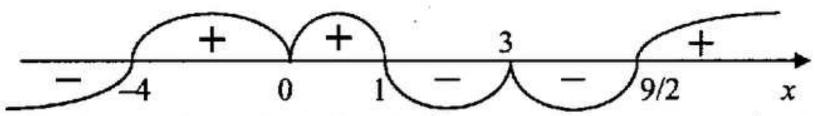
არამკაცრი $P(x)\geq 0$ უტოლობის ამოხსნისას ხშირად ხელსაყრელია ამოვხსნათ მისი ტოლფასი გაერთიანება $\left[\begin{array}{l} P(x)=0 \\ P(x)>0 \end{array}\right.$, ანუ ჯერ განტოლება, შემდეგ მკაცრი უტოლობა და მიღებული სიმრავლეები გავაერთიანოთ.

***მაგალითი* 5.** ამოვხსნათ უტოლობა $\dfrac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4(x^2-3x+9)} \leq 0$.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ x^2-3x+9 კვადრატულ სამწევრს ფესვები არა აქვს, მთელ ღერძზე დადებითია და მისი უკუგდება შესაძლებელია. რადგან უტოლობა არამკაცრია, ჯერ ამოვხსნათ შესაბამისი განტოლება და შემდეგ მკაცრი უტოლობა. განტოლების ამოხსნა გვაძლევს $x_1=0$, $x_2=9/2$, $x_3=1$. შესაბამის მკაცრ უტოლობას კი აქვს სახე

$$\frac{x^2(x-9/2)(x-1)^3}{(x+4)^5(x-3)^4} < 0.$$

რიცხვით ღერძზე დავალაგოთ უტოლობაში შემავალი მამრავლების ფესვები -4, 0, 1, 3, $9/2$ და დავსვათ ნიშნები



მკაცრი უტოლობის ამონახსნია $(-\infty;-4)\cup(1;3)\cup(3;9/2)$ სიმრავლე. თუ გავითვალისწინებთ განტოლების ამონახსნსაც, საბოლოოდ მივიღებთ პასუხს:

$(-\infty;-4)\cup[1;3)\cup(3;9/2]\cup\{0\}$.

III. მოდულის შემცველი განტოლებები და უტოლობები. მოდულის განმარტებიდან გამომდინარეობს უმარტივესი **მოდულიანი განტოლების** ამოხსნის წესი:

$$\text{თუ} \quad a>,0 \quad \text{მაშინ} \quad |f(x)|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-a \\ f(x)=a; \end{array}\right.$$

$|f(x)|=-a$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს; $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

მოდულიანი უტოლობების ამოხსნისას გამოვიყენებთ შემდეგ ფორმულებს: თუ $a>0$ მაშინ

$$|f(x)|<a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>-a \\ f(x)<a; \end{array}\right. \qquad |f(x)|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)<-a \\ f(x)>a. \end{array}\right.$$

$|f(x)|<-a$ და $|f(x)|\leq -a$ უტოლობებს ამონახსნი არა აქვთ; $|f(x)|>-a$ და $|f(x)|\geq -a$ უტოლობების ამონახსნებია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არედან ($x\in D(f)$).

თუ $a=0$ გვაქვს:

$|f(x)|\geq 0 \Leftrightarrow x\in D(f)$; $\qquad |f(x)|\leq 0 \Leftrightarrow f(x)=0$;

$|f(x)|>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D(f) \\ f(x)\neq 0; \end{cases}$; $\qquad$ ***$|f(x)|<0 \Leftrightarrow$ უტოლობას ამონახსნი არა აქვს;***

***მაგალითი* 6.** რისი ტოლია x, თუ $|x-2|-7=0$ და $x<0$.

ამოხსნა. გვაქვს $|x-2|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=7 \\ x-2=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-5, \end{array}\right.$ საბოლოოდ $x=-5$.

***მაგალითი* 7.** ამოვხსნათ განტოლება $x^2-4|x|=5$.

***ამოხსნა.* I ხერხი:** შევნიშნოთ, რომ $x^2=|x|^2$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $|x|=y$, მივიღებთ $y^2-4y-5=0$ განტოლებას, რომლის ფესვებია $y_1=-1$ და $y_2=5$. $|x|=-1$ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია. $|x|=5$ კი გვაძლევს $x=\pm5$.

II ხერხი: მოდულის განმარტების ძალით $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0, \end{cases}$ ამიტომ მოცემული განტოლება ტოლფასია ორი სისტემის გაერთიანების:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-4x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2+4x=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ x=-1,\ x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x=1,\ x=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-5 \end{array}\right.$$ ანუ $x=\pm5$.

***მაგალითი* 8.** იპოვეთ უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს $|3-x|<7$ უტოლობას.

ამოხსნა. $|3-x|<7 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<7 \\ x-3>-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<10 \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow -4<x<10$. უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც მიღებულ სიმრავლეს ეკუთვნის, არის 9.

IV. *ირაციონალური განტოლებები და უტოლობები.* განტოლებას (უტოლობას), რომელიც ცვლადს შეიცავს რადიკალის ნიშნის ქვეშ, **ირაციონალური განტოლება (უტოლობა)** ეწოდება. მისი ამოხსნის ძირითადი მეთოდი მდგომარეობს ცვლადის რადიკალისაგან განთავისუფლებაში, რისთვისაც საჭიროა განტოლების (უტოლობის) ორივე მხარის თანდათანობით ახარისხება, მანამ არ მიიღება განტოლება (უტოლობა) რადიკალის გარეშე. ამასთან, ახარისხება ერთხელ მაინც თუ მოხდა ლუწ ხარისხში, შესაძლებელია მივიღოთ გარეშე ფესვები. ამიტომ ამ დროს აუცილებელია ამონახსნის შემოწმება. განვიხილოთ ზოგიერთი მარტივი სახის ირაციონალური განტოლებისა და უტოლობის ამოხსნის ხერხი.

1. თუ $a>0$ მაშინ

$\sqrt{f(x)}=a \Leftrightarrow f(x)=a^2$;

$\sqrt{f(x)}=-a$ ***განტოლებას ამონახსნი არა აქვს;***

$\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

2. თუ $a>0$ მაშინ

$\sqrt{f(x)}<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)<a^2; \end{cases}$ $\quad \sqrt{f(x)}>a \Leftrightarrow f(x)>a^2$;

$\sqrt{f(x)}<-a$, $\sqrt{f(x)}\le -a$, ***უტოლობებს ამონახსნი არა აქვს;***

$\sqrt{f(x)}\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge 0$;

$\sqrt{f(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$;

$\sqrt{f(x)}\le 0 \Leftrightarrow f(x)=0$;

$\sqrt{f(x)}<0$, ***უტოლობას ამონახსნი არა აქვს;.***

***მაგალითი* 9.** ამოვხსნათ განტოლება $\sqrt{x-2}+4=x$.

ამოხსნა. გვაქვს $\sqrt{x-2}=x-4$, ავიყვანოთ განტოლების ორივე მხარე კვადრატში, მივიღებთ: $x-2=x^2-8x+16$; მიღებული განტოლების ფესვებია $x_1=3$, $x_2=6$. თუ მიღებულ ფესვებს ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, $x=3$-ის ჩასმით ვღებულობთ $5=3$ მცდარ ტოლობას, ხოლო $x=6$-ის ჩასმით $6=6$ ჭეშმარიტ ტოლობას. ე.ი. $x=6$ მოცემული განტოლების ერთადერთი ფესვია. შევნიშნოთ, რომ შეიძლებოდა ჯერ გვეპოვა მოცემული

განტოლების განსაზღვრის არე, ანუ ამოგვეხსნა $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემა, რაც გვაძლევს $x\geq 4$, საიდანაც ჩანს, რომ $x=3$ გარეშე ფესვია.

***მაგალითი* 10.** ამოვხსნათ უტოლობა $\sqrt{3-x^2}>-5$.

ამოხსნა. რადგან კვადრატული ფესვი მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს, მოცემული უტოლობა ტოლფასია $3-x^2\geq 0$ უტოლობისა, რომლის ამონახსნია $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ სიმრავლე.

***მაგალითი* 11.** ამოვხსნათ უტოლობა $\sqrt{x-1}<\sqrt{x^2+5x+4}$.

ამოხსნა. მოცემული უტოლობა ტოლფასია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2+5x+4\geq 0 \\ x-1<x^2+5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-1<x^2+5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+4x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$$

საბოლოოდ $x\in[1;+\infty)$.

§ 12. $y=\frac{k}{x}$, $y=\sqrt{x}$ და $y=x^3$ ფუნქციები

I. $y=\frac{k}{x}$ *ფუნქცია.* $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq0$) ფუნქციის განსაზღვრის არეა

$$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

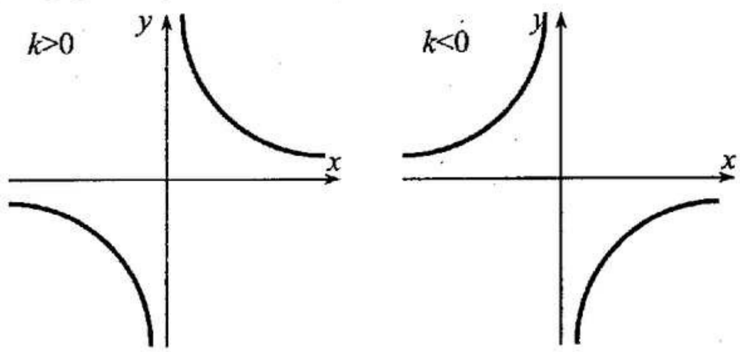
$y=\frac{k}{x}$ კენტი ფუნქციაა, რადგან $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

თუ $k>0$, ფუნქცია კლებადია როგორც $(-\infty;0)$, ასევე $(0;+\infty)$ შუალედში, ხოლო თუ $k<0$, ფუნქცია ზრდადია როგორც $(-\infty;0)$, ასევე $(0;+\infty)$ შუალედში.

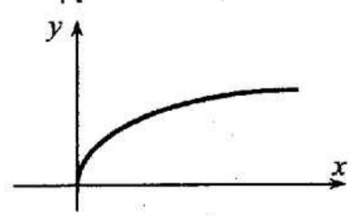
ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

შევნიშნოთ, რომ $y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია მთელ განსაზღვრის არეში მონოტონური არ არის

$y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი შტოსაგან, რომელიც მოთავსებულია I და III საკოორდინატო მეოთხედებში, როცა $k>0$, ხოლო II და IV მეოთხედებში, როცა $k<0$. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება.



II. $y=\sqrt{x}$ ფუნქცია. $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y)=[0;+\infty)$. იგი ზრდადია მთელ განსაზღვრის არეზე. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $E(y)=[0;+\infty)$.



III. $y=x^3$ ფუნქცია. $y=x^3$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y)=(-\infty;+\infty)$. იგი ზრდადია მთელ განსაზღვრის არეზე. ფუნქცია კენტია, რადგან $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $E(y)=(-\infty;+\infty)$. იგი წარმოადგენს ე.წ. კუბურ პარაბოლას.