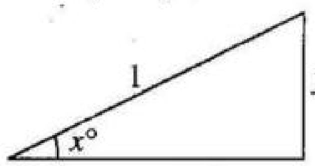
§8. მართკუთხა სამკუთხედში კუთხეებს და გვერდებს შორის ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები. სინუსების თეორემა. კოსინუსების თეორემა.

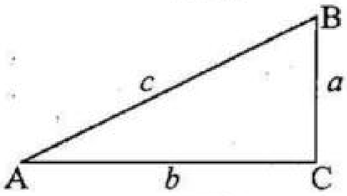
1. *ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს და კუთხეებს შორის.* განვიხილოთ მართკუთხა სამკუთხედი (ნახ.1), რომლი ჰიპოტენუზა 1-ის ტოლია, ხოლო ერთ-ერთ მახვილ კუთხეს და მის მოპირდაპირე კათეტს აღვნიშნავთ, შესაბამისად, x° და y.

როცა $0<x<90^\circ$, x ყოველ განსხვავებულ მნიშვნელობებს შეესაბამებათ y განსხვავებული მნიშვნელობები ანუ კუთხის გრადუსულ ზომას და მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება მნიშვნელოვან როლს ასრულებს გეომეტრიაში და იგი აღიწერება $y=\sin x^\circ$ ფუნქციით.



ნახ.1.

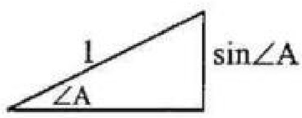
ახლა ნებისმიერად ავიღოთ მართკუთხა ΔACB, $\angle C=90^\circ$ (ნახ.2) და განვიხილოთ მისი მსგავსი სამკუთხედი 1-ის ტოლი ჰიპოტენუზით (ნახ.3). მსგავსების გამო,



ნახ.2.

$$\sin\angle A=\frac{a}{c},$$

ანუ ნებისმიერ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის წინამდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან არის ამ კუთხის სინუსის ტოლი.



ნახ.3.

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ

ნებისმიერ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან არის ამ კუთხის კოსინუსის ტოლი,

$$\cos\angle A=\frac{b}{c}$$

და წინამდებარე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან ამ კუთხის ტანგენსის ტოლია,

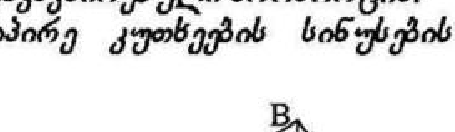
$$tg\angle A=\frac{a}{b}.$$

მართკუთხა სამკუთხედში კათეტი ტოლია ჰიპოტენუზისა და ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხის სინუსის ნამრავლის; ან ჰიპოტენუზისა და ამ კათეტის მიმდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლის:

$$a = c\cdot\sin\angle A = c\cdot\cos\angle B.$$

2.*სინუსების თეორემა და სამკუთხედის ბისექტრისასთან დაკავშირებული პროპორცია. თეორემა/სინუსების/. სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.*

დამტკიცება. განვიხილოთ ΔABC a, b და c გვერდებით (ნახ.4). B წვეროდან დავუშვათ BD სიმაღლე. ცხადია, რომ $BD=c\cdot\sin\angle A$ (ეს შეფასება არაა დამოკიდებული იმაზე, მახვილია თუ არა $\angle A$). ანალოგიურად, $BD=a\sin\angle C$. ამგვარად, $a\cdot\sin\angle C=c\cdot\sin\angle A$ ანუ $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C}$. თუ განვიხილავთ A-დან ან C-დან დაშვებულ სიმაღლესაც, დავრწმუნდებით, რომ $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$.



ნახ.4.

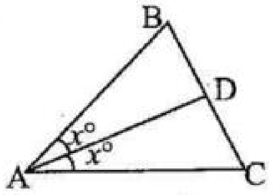
სინუსების თეორემიდან გამომდინარეობს ორი მნიშვნელოვანი ფაქტი:

1) სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის ფარდობა მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან შემოხაზული წრეწირის დიამეტრია:

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R;$$

2) ABC სამკუთხედის A კუთხის AD ბისექტრისა ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდს ყოფს კუთხის მიმდებარე გვერდების პროპორციულ მონაკვეთებად:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$



ნახ.5.

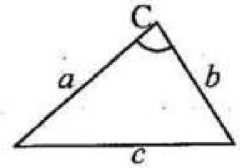
სამართლიანია ფორმულა

$$AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot CD.$$

3.კოსინუსების თეორემა და მისი შედეგები.

თეორემა/კოსინუსების/. სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი

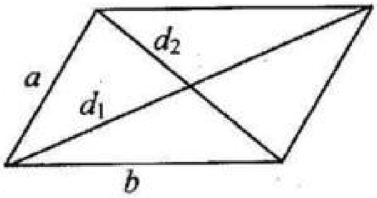
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$$



ნახ.6.

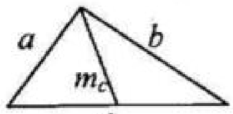
როდესაც $\angle C=90°$, მაშინ ამ თეორემიდან მიიღება პითაგორას თეორემა: $c^2=a^2+b^2$, რადგან $\cos 90°=0$. კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი წესი: ***ნებისმიერ პარალელოგრამში გვერდების კვადრატების ჯამი დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია.***

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$$



ამ წესიდან გამომდინარეობს სამკუთხედის მედიანის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$



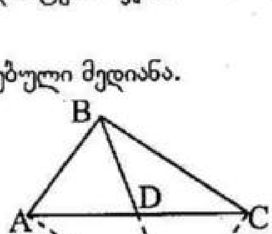
ამოვხსნათ ორი ტიპიური ამოცანა ამ წესის გამოყენებით.

ამოცანა 1. რომბის გვერდია 4 სმ და იგი მცირე დიაგონალის ტოლია. იპოვეთ დიდი დიაგონალი.

ამოხსნა. ოთხი გვერდის კვადრატების ჯამია $4\cdot 4^2=64$, ხოლო დიაგონალების კვადრატების ჯამი – 4^2+d^2 (d უცნობი დიაგონალია), ე.ი. $64=16+d^2$, ანუ $d=4\sqrt{3}$.

ამოცანა2. სამკუთხედის გვერდებია 16,18 და 26. გავიგოთ უდიდეს გვერდზე დაშვებული მედიანა.

ამოხსნა. A წვეროდან გავავლოთ BC-ს პარალელური წრფე, C-დან – AB-ს პარალელური წრფე. მიღებულ პარალელოგრამში ერთი დიაგონალი AC=26, ხოლო მეორე უცნობი დიაგონალის ნახევარს წარმოადგენს ABC სამკუთხედის მედიანა BD. რადგან $2AB^2+2BC^2=AC^2+(2BD)^2$, სადაც $2\cdot 256+2\cdot 324=676+4\cdot AD^2$, AD=11.



ნახ.7.