5. ირაციონალური გამოსახულებები

განსაზღვრება. n−ური ხარისხის ფესვი a ნამდვილი რიცხვიდან, $n\in N$, $n>1$, ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომლის n−ური ხარისხი a−ს ტოლია, ე. ი.

$$x^n = a. \tag{1}$$

იმის მიხედვით, თუ როგორი რიცხვია n, გვაქვს შემდეგი შემთხვევები.

1. ვთქვათ, n კენტი რიცხვია, მაშინ (1) ტოლობას აკმაყოფილებს x−ის ერთადერთი ნამდვილი მნიშვნელობა. ამრიგად, კენტი ხარისხის ფესვი არსებობს ნებისმიერი a ნამდვილი რიცხვიდან და იგი ერთადერთია. მის აღსანიშნავად გვაქვს $\sqrt[n]{a}$−სიმბოლო. n−ს ეწოდება ფესვის მაჩვენებელი, ხოლო a−ს–ფესვქვეშა გამოსახულება.

მაგალითად, $\sqrt[3]{8}=2$ და $\sqrt[5]{-32}=-2$, რადგან $2^3=8$ და $(-2)^5=-32$.

2. ვთქვათ, n ლუწი რიცხვია.

თუ $a>0$, მაშინ (1) ტოლობას აკმაყოფილებს x−ის მხოლოდ ორი ნამდვილი მნიშვნელობა და ისინი ურთიერთმოპირდაპირე რიცხვებს წარმოადგენენ. მათ შორის დადებითი $\sqrt[n]{a}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო მისი მოპირდაპირე რიცხვი ჩაიწერება $-\sqrt[n]{a}$ სახით.

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \begin{cases} a, \text{ როცა } a\ge 0, \\ -a, \text{ როცა } a<0, \; k\in N. \end{cases}$$

$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,\; k\in N$, $\quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, კერძოდ $\sqrt{a^2}=|a|$.

არიტმეტიკული ფესვის თვისებები

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}, b \neq 0$

$(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}, a \neq 0$

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$

რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხი:

განსაზღვრება. თუ $a>0$ და $r=\frac{m}{n}$ რაციონალური რიცხვია ($m\in Z, n\in N, n\neq 1$), მაშინ

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

განსაზღვრება. თუ $a=0$ და r დადებითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ $a^r=0$.

ცხადია, რომ თუ $m,n\in N$, მაშინ

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს გააჩნია მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის ანალოგიური თვისებები:

1. $(a\cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$;
3. $a^{r_1}\cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
4. $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1\cdot r_2}$,
5. $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1-r_2}$;

სადაც $a>0$, $b>0$ და $r_1, r_2, r\in Q$.