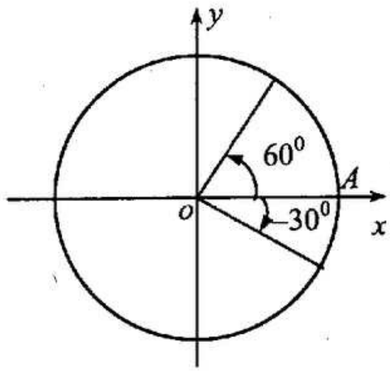
§ 15. ტრიგონომეტრია

I. კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომა. კავშირი კუთხის გრადუსულ დ რადიანულ ზომებს შორის. საკოორდინატო xoy სიბრტყის ox-ღერძზე, სათავის მარჯვნი მოვნიშნოთ რაიმე A წერტილი და o ცენტრიდან oA რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი. oA რადიუს ვუწოდოთ საწყისი რადიუსი. შევთანხმდეთ: თუ საწყისს რადიუსს o წერტილის გარშემო შემოვაბრუნებ საათის ისრის მიმართულებით, მაშინ **მობრუნების კუთხე** ითვლება უარყოფითად, ხოლო თ შემოვაბრუნებთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ მობრუნების კუთხე ითვლებ დადებითად. მაგალითად:



კუთხე იზომება გრადუსებში ან რადიანებში. ***იმ ცენტრალური კუთხის სიდიდეს, რომლი შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია რადიანი ეწოდება.*** რადგა ერთეულრადიუსიანი ნახევარწრეწირის სიგრძე π-ს ტოლია, ხოლო მისი შესაბამისი ცენტრალური კუთხ სიდიდეა 180^0, ამიტომ ***1 რად*** $= \mathbf{\frac{180°}{\pi}} \approx \mathbf{57^0}$ და პირიქით $\mathbf{1^0 = \frac{\pi}{180}}$ ***რად*** $\approx$ ***0,017*** რად. A^0-ის მქონ

კუთხის რადიანული ზომა ტოლია $\alpha = \frac{A^0 \cdot \pi}{180^0}$. ამ ტოლობიდან შეიძლება ჩავწეროთ, რომ ***α რადიანი მქონე კუთხის გრადუსული ზომაა*** $A^0 = \frac{\alpha \cdot 180^0}{\pi}$. ***$180^0 = \pi$ რად.*** ტოლობიდან გამომდინარეობ

რომ $90^0 = \frac{\pi}{2}$, $60^0 = \frac{\pi}{3}$, $30^0 = \frac{\pi}{6}$ და ა.შ. მოვიყვანოთ მაგალითები.

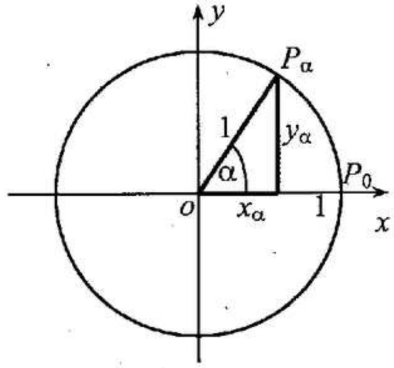
მაგალითი 1. გამოსახეთ A კუთხე რადიანებში, თუ $A = 150^0$.

ამოხსნა. $150^0 = \frac{150^0 \pi}{180^0}$ რად$= \frac{5\pi}{6}$ რად.

მაგალითი 2. გამოსახეთ α კუთხე გრადუსებში, თუ $\alpha = 4,5$ რად.

ამოხსნა. $4,5$ რად$= \frac{4,5 \cdot 180^0}{\pi} \approx \frac{4,5 \cdot 180^0}{3,14} \approx 258^0$.

II. ნამდვილი რიცხვის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი. განვიხილოთ წრეწირი, რომლ ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო რადიუსი 1-ის ტოლია. ასეთ წრეწირს **ერთეულოვანი წრეწირ** ეწოდება:



ერთეულოვან წრეწირზე მოვნიშნოთ $P_0(1;0)$. საწყისი რადიუსი O სათავის მიმართ რაიმე $\alpha \in R$ რადიანით მობრუნებისას (საათის ისრის მიმართულებით ან საწინააღმდეგო მიმართულებით) გადავა რომელიღაც P_α წერტილში, რომლის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_α და y_α-თი.

α ნამდვილი რიცხვის სინუსი ეწოდება P_α წერტილის ორდინატს:

$$\sin\alpha = y_\alpha$$

α ნამდვილი რიცხვის კოსინუსი ეწოდება P_α წერტილის აბსცისას:

$$\cos\alpha = x_\alpha$$

α ნამდვილი რიცხვის ტანგენსი ეწოდება P_α წერტილის ორდინატისა და აბსცისის ფარდობას:

$$tg\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cos\alpha \neq 0.$$

შენიშვნა: ყოველ α სიდიდეს (α ნამდვილ რიცხვს) შეესაბამება ერთადერთი $P_\alpha(x_\alpha;y_\alpha)$ მობრუნების წერტილი და შესაბამისად ერთადერთი სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის მნიშვნელობები. ასე რომ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $tg\alpha$ ნამდვილი რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციებს წარმოადგენენ.

III. ***ძირითადი დამოკიდებულებანი $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $tg\alpha$-ს შორის.*** ერთეულოვანი წრის ნებისმიერი $P_\alpha(x_\alpha;y_\alpha)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას: $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$ (ეს გამომდინარეობს მართკუთხა სამკუთხედიდან, რომლის კათეტებია $|x_\alpha|$ და $|y_\alpha|$, ხოლო ჰიპოთენუზა 1-ის ტოლია), საიდანაც

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \alpha \in R.$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს:

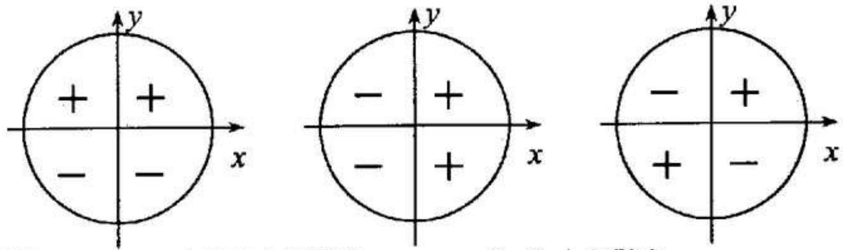
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \text{და} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

ფორმულები.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობის** ორივე მხარეს თუ გავყოფთ $\cos^2\alpha$-ზე, მივიღებთ ფორმულას:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha \neq 0.$$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრების საფუძველზე შეიძლება დავადგინოთ მათი ნიშნები საკოორდინატო მეოთხედებში. მაგალითად, $\sin\alpha$ ფუნქცია დადებითია იმ მეოთხედებში, რომლებშიც $y_\alpha>0$, ანუ I და II მეოთხედებში, უარყოფითია III და IV მეოთხედებში. ანალოგიურია $\cos\alpha$-ს ნიშნების განისაზღვრება x-ის მიხედვით. $tg\alpha$ კი დადებითია იმ მეოთხედებში, რომლებშიც $\sin\alpha$-სა და $\cos\alpha$-ს ერთნაირი ნიშნები აქვთ.



სინუსის ნიშნები   კოსინუსის ნიშნები   ტანგენსის ნიშნები

პრაქტიკულ გამოთვლებში ხშირად გამოიყენება სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის ზოგიერთ მნიშვნელობები, რომლებიც შემდეგი ცხრილითაა წარმოდგენილი:

α	$0=0^0$	$\frac{\pi}{6}=30^0$	$\frac{\pi}{4}=45^0$	$\frac{\pi}{3}=60^0$	$\frac{\pi}{2}=90^0$	$\pi=180^0$	$\frac{3\pi}{2}=270^0$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–

ამ ცხრილში ,,–" ნიშნავს, რომ ფუნქცია შესაბამისი არგუმენტისათვის განსაზღვრული არ არის.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\cos\alpha$ და $\text{tg}\alpha$ თუ $\sin\alpha=-1/8$, და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

ამოხსნა. $\cos\alpha$ ვიპოვოთ ფორმულიდან $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\cos\alpha=\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$. რადგან $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

ამიტომ $\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3\sqrt{7}}$.

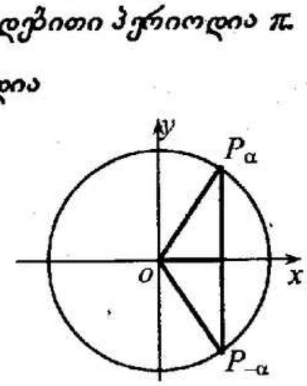
IV. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობა და ლუწ-კენტობა. სინუსისა დ კოსინუსის მნიშვნელობები არ შეიცვლება, თუ კუთხეს (არგუმენტს) დავუმატებთ $2\pi n$, $n\in Z$ სახის რიცხვებ $\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi n)$, $\cos\alpha=\cos(\alpha+2\pi n)$, $\alpha\in R$, $n\in Z$; ხოლო ტანგენსის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თ არგუმენტს დავუმატებთ πn, $n\in Z$ სახის რიცხვებს: $\text{tg}\alpha=\text{tg}(\alpha+\pi n)$, $\alpha\in R$, $n\in Z$. ე.ი ***ტრიგონომეტრიული ფუნქციები პერიოდულია. სინუსისა და კოსინუსის პერიოდები სიმრავლეა $\{2\pi n\}$, $n\in Z$, უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ხოლო ტანგენსი პერიოდების სიმრავლეა $\{\pi n\}$, $n\in Z$, უმცირესი დადებითი პერიოდია π.***

განვიხილოთ P_α და $P_{-\alpha}$ მობრუნებები. ცხადია

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\alpha.$$



ე.ი. სინუსი და ტანგენსი კენტი, ხოლო კოსინუსი ლუწი ფუნქციებია.

მაგალითი **4.** პერიოდულობისა და ლუწ-კენტობის გათვალისწინებით გამოვთვალოთ $\dfrac{2\sin(-2250^0)-\cos 1740^0}{2tg(-1485^0)}$.

ამოხსნა. $\sin(-2250^0)=-\sin 2250^0=-\sin(90^0+6\cdot 360^0)=-\sin 90^0=-1$;

$\cos 1740^0=\cos(300^0+4\cdot 360^0)=\cos 300^0=\cos(360^0-60^0)=\cos(-60^0)= \quad =\cos 60^0=1/2$; $\quad tg(-1485^0)=-tg 1485^0=-tg(45^0+8\cdot 180^0)=-tg 45^0=-1$;

მაშინ მოცემული გამოსახულება მიიღებს მნიშვნელობას: $\dfrac{2\cdot(-1)-1/2}{2\cdot(-1)}=\dfrac{5}{4}$.

V. დაყვანის ფორმულები. ***ნებისმიერი α-თვის sinα და cosα ფუნქციათა მნიშვნელობების შეიძლება დავიყვანოთ sinα და cosα-ს მოძებნამდე, სადაც*** $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. ***დაყვანის ფორმულების დამახსოვრება ადვილად შეიძლება შემდეგი წესის მიხედვით: თუ დაყვანის ფორმულაში*** $\dfrac{\pi}{2}$ ***აღებულია კენტ რიცხვჯერ და მას აკლდება ან ემატება α, მაშინ დასაყვანი ფუნქცია იცვლება „კოფუნქციით",*** * ***თუ*** $\dfrac{\pi}{2}$ ***აღებულია ლუწ რიცხვჯერ, მაშინ დასაყვანი ფუნქციის დასახელება უცვლელი რჩება. დაყვანილი ფუნქციის წინ იწერება ის ნიშანი, რა ნიშანიც აქვს დასაყვან ფუნქციას, თუ ჩავთვლით, რომ*** $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

მაგალითად

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

მაგალითი **5.** გამოვთვალოთ: ა) $\sin(-1560^0)$; ბ) $\cos(-1560^0)$.

ამოხსნა.

ა) $\sin(-1560^0)=-\sin(4\cdot 360^0+120^0)=-\sin 120^0=-\sin(90^0+30^0)=-\cos 30^0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

ბ) $\cos(-1560^0)=\cos 1560^0=\cos(4\cdot 360^0+120^0)=\cos 120^0=\cos(90^0+30^0)=-\sin 30^0=-\dfrac{1}{2}$.

VI. შეკრების ფორმულები.

ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის სინუსის ფორმულებია:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის კოსინუსის ფორმულებია:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

* სინუსისა და კოსინუსის კოფუნქციები ეწოდებათ შესაბამისად კოსინუსსა და სინუსს.

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტანგენსის ფორმულებია:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ k,n,m\in Z;$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ k,n,m\in Z.$$

***მაგალითი* 6.** გამოთვალოთ: ა) $\sin105^0$; ბ) $tg15^0$

ამოხსნა. ა) $\sin105^0=\sin(60^0+45^0)=\sin60^0\cos45^0+\cos60^0\sin45^0=$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3+1)$$

ბ) $tg15^0=tg(45^0\ \ 30^0)=\dfrac{tg45^0-tg30^0}{1+tg45^0tg30^0}=2\ \ \sqrt3$.

VII. ორმაგი კუთხის ფორმულები. წინა პუნქტის ფორმულებში ჩავთვალოთ, რომ $\alpha=\beta$ ვღებულობთ **ორმაგი კუთხის** ფორმულებს:

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha,$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ k,m\in Z.$$

შენიშვნა: ორმაგი კუთხის ფორმულები აკავშირებს არგუმენტებს, სადაც ფორმულის მარცხენა არგუმენტი წარმოადგენს მარჯვენა არგუმენტის გაორკეცებულ ნამრავლს. მაგალითად $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ ფორმულა სამართლიანი იქნება, თუ α ს ნაცვლად ჩავსვამთ 5α ს, ე.ი. $\sin10\alpha=2\sin5\alpha\cos5\alpha$, ან $\frac{\alpha}{6}$ ს, ე.ი. $\sin\frac{\alpha}{3}=2\sin\frac{\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}$

ორმაგი კუთხის ფორმულებიდან $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ და $tg^2\alpha$ შეიძლება გამოისახოს $\cos2\alpha$ თი:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\quad tg^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$$

***მაგალითი* 7** გამოვთვალოთ $\sin75^0\sin15^0$

ამოხსნა. $\sin75^0\sin15^0=\sin(90^0\ \ 15^0)\sin15^0=\cos15^0\sin15^0=$

$$=\frac{2\sin15^0\cos15^0}{2}=\frac{\sin30^0}{2}=\frac{1}{4}$$

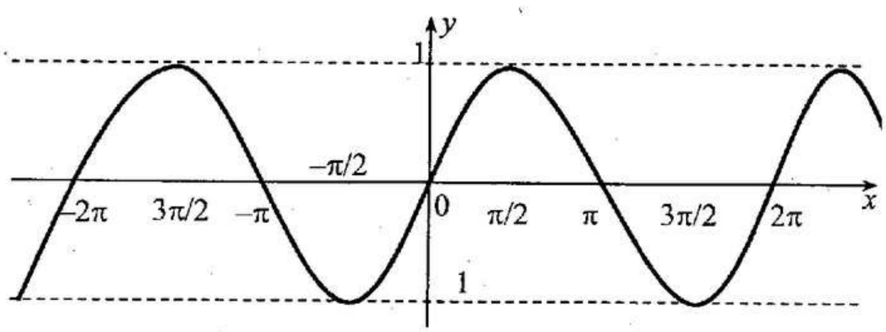
VIII. $y=\sin x$ ფუნქცია; თვისებები და გრაფიკი. $y=\sin x$ ფუნქციის ძირითადი თვისებებია:

- **განსაზღვრის არეა R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;**
- **მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-1;1]$ ინტერვალი;**
- **ფუნქცია კენტია $\sin(-x)=-\sin x,\ \forall x\in R$;**

- $\sin x=0$, როცა $x=\pi k$, $k\in Z$;
- ფუნქცია იზრდება -1-დან 1-მდე $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$, შუალედებში;
- *ფუნქცია კლებულობს 1-დან –1-მდე* $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$, *შუალედებში;*
- *ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 1, რომელიც მიიღწევა* $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, *წერტილებში;*
- *ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა –1, რომელიც მიიღწევა* $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, *წერტილებში;*
- *ფუნქცია პერიოდულია 2π უმცირესი დადებითი პერიოდით:*

$$\sin(x+2\pi n)=\sin x,\ \forall x\in R,\ n\in Z.$$

$y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის **სინუსოიდის**, ასაგებად ჯერ ვაგებთ მას $[-\pi;\pi]$ შუალედში (2π პერიოდის სიგრძის შუალედში), ხოლო შემდეგ პერიოდულობის გათვალისწინებით ვაგებთ განსაზღვრის არეზეც:

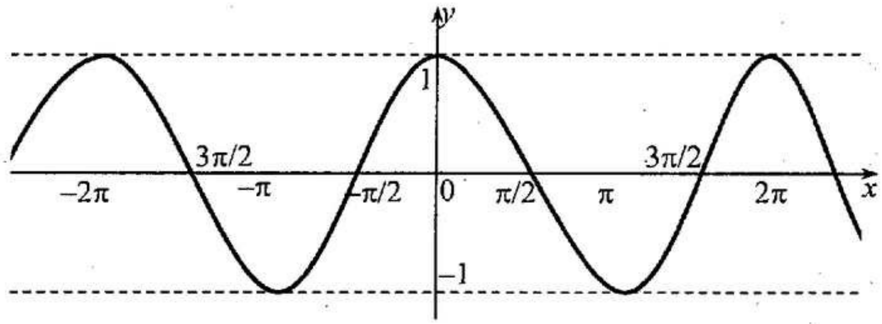


IX. $y=\cos x$ ფუნქცია; თვისებები და გრაფიკი. $y=\cos x$ ფუნქციის ძირითადი თვისებებია:

- განსაზღვრის არეა R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
- მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-1;1]$ ინტერვალი;
- ფუნქცია ლუწია $\cos(-x)=\cos x$, $\forall x\in R$;
- $\cos x=0$, როცა $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$;
- ფუნქცია იზრდება -1-დან 1-მდე $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in Z$, შუალედებში
- ფუნქცია კლებულობს 1-დან -1-მდე $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in Z$, შუალედებში;
- ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 1, რომელიც მიიღწევა $x=2\pi k$, $k\in Z$, წერტილებში;
- ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა -1, რომელიც მიიღწევა $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, წერტილებში;
- ფუნქცია პერიოდულია 2π უმცირესი დადებითი პერიოდით:

$$\cos(x+2\pi n)=\cos x,\ \forall x\in R,\ n\in Z.$$

y=cos$x$ ფუნქციის გრაფიკის, **კოსინუსოიდის**, ასაგებად ჯერ ვაგებთ მას [π π] შუალედში (2 პერიოდის სიგრძის შუალედში), ხოლო შემდეგ პერიოდულობის გათვალისწინებით ვაგებთ განსაზღვრ არეზეც:

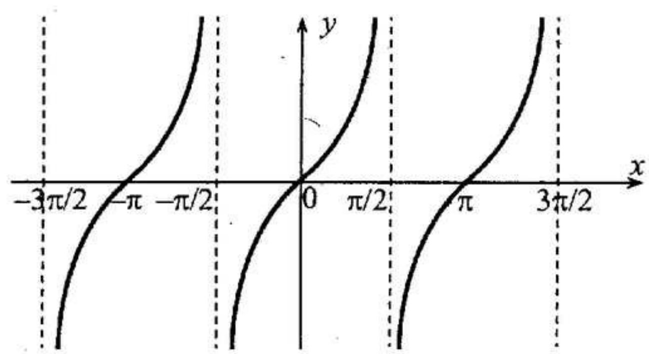


X. y=tg$x$ ფუნქცია; თვისებები და გრაფიკი. y=tgx ფუნქციის ძირითადი თვისებებია:

- **განსაზღვრის არეა R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, სახი რიცხვებისა;**
- **მნიშვნელობათა სიმრავლეა R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;**
- **ფუნქცია კენტია tg(–x)=–tgx, $\forall x\in R$;**
- **tgx=0, როცა $x=\pi k$, $k\in Z$;**
- **ფუნქცია იზრდება $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, შუალედებში;**
- **ფუნქცია პერიოდულია π უმცირესი დადებითი პერიოდით:**

$$\mathbf{tg(x+\pi n)=tgx,\ \forall x\in R,\ n\in Z.}$$

y=tg$x$ ფუნქციის გრაფიკის, **ტანგენსოიდის**, ასაგებად ჯერ ვაგებთ მას $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში (1 პერიოდის სიგრძის შუალედში), ხოლო შემდეგ პერიოდულობის გათვალისწინებით ვაგებთ განსაზღვრ არეზეც:



XI. ნამდვილი რიცხვის არკსინუსი, არკკოსინუსი და არკტანგენსი. ***−1≤a≤1 ნამდვილი რიცხვის არკსინუსი ეწოდება ისეთ α კუთხეს $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედიდან, რომლი სინუსი a-ს ტოლია. აღინიშნება arcsina-სიმბოლოთი. ე.ი.***

$$\boldsymbol{arcsina}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\quad -1\le a\le 1$$

და სამართლიანია იგივეობა: $\sin(\arcsin a)=a$. არკსინუსი კენტია:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a|\le 1.$$

$-1\le a\le 1$ ნამდვილი რიცხვის არკკოსინუსი ეწოდება ისეთ α კუთხეს $[0;\pi]$ შუალედიდან, რომლის კოსინუსი a-ს ტოლია. აღინიშნება $\arccos a$-სიმბოლოთი. ე.ი.

$$\arccos a\in[0;\pi], \quad -1\le a\le 1$$

და სამართლიანია იგივეობა: $\cos(\arccos a)=a$.

$$\arccos(-a) = \pi-\arccos a, \quad |a|\le 1.$$

$-\infty\le a\le\infty$ ნამდვილი რიცხვის არკტანგენსი ეწოდება ისეთ α კუთხეს $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედიდან, რომლის ტანგენსი a-ს ტოლია. აღინიშნება $\operatorname{arctg} a$-სიმბოლოთი. ე.ი.

$$\operatorname{arctg} a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \quad a\in R$$

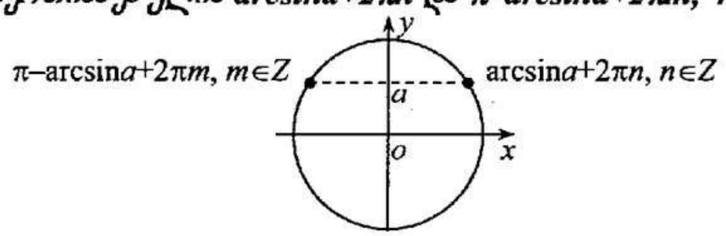
და სამართლიანია იგივეობა: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a,\ a\in R$. არკტანგენსი კენტია:

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad a\in R.$$

XII. $\sin x=a$ სახის განტოლების ამოხსნა. $\sin x=a,\ -1\le a\le 1$, სახის ტრიგონომეტრიული განტოლების ფესვთა ფორმულაა:

$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k, \quad k\in Z.$$

ამ ფორმულაში გაერთიანებულია $\arcsin a+2\pi n$ და $\pi-\arcsin a+2\pi m,\ n,m\in Z$ ამონახსნები



მნიშვნელოვანია შემდეგი კერძო შემთხვევები:

- $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$
- $\sin x=0,\ x=\pi k,\ k\in Z;$
- $\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

აღვნიშნოთ, რომ $\sin x=a$ განტოლებას, როცა $|a|>1$ ამონახსნი არ გააჩნია.

ამოვხსნათ რამდენიმე ტრიგონომეტრიული განტოლება:

ა) $\sin 3x=\frac{1}{2},\ 3x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ 3x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z;$

ბ) $\sin\left(\frac{2x}{3}+5^0\right)=0,\ \frac{2x}{3}+5^0=180^0k,\ \frac{2x}{3}=\ 5^0+180^0k,\ x=\ 7{,}5^0+270^0k,\ k\in Z;$

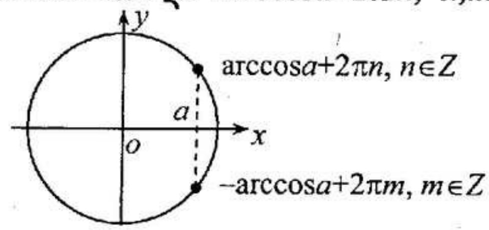
გ) $\sin x=\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ x=(\ 1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ x=(\ 1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,$

$x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

XIII. cos*x*=*a* სახის განტოლების ამოხსნა. ***cosx=a, −1≤a≤1, სახი*** ***ტრიგონომეტრიული განტოლების ფესვთა ფორმულაა:***

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ \ k\in Z.$$

ამ ფორმულაში გაერთიანებულია arccosa+2πn და −arccosa+2πm, n,m∈Z ამონახსნები



მნიშვნელოვანია შემდეგი კერძო შემთხვევები:

- $\boldsymbol{\cos x=1,\ \ x=2\pi k,\ k\in Z;}$
- $\boldsymbol{\cos x=0,\ \ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;}$
- $\boldsymbol{\cos x=-1,\ \ x=\pi+2\pi k,\ k\in Z;}$

cosx=a განტოლებას, როცა |a|>1 ამონახსნი არ გააჩნია.

ამოვხსნათ რამდენიმე ტრიგონომეტრიული განტოლება:

ა) $\cos 2x=\dfrac{1}{2},\ 2x=\pm\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi k,\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;$

ბ) $\cos(x-17^0)=0,\ x-17^0=90^0+180^0k,\ x=107^0+180^0k,\ k\in Z;$

გ) $\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{x}{2}=\pm\arccos\dfrac{1}{2}+\pi k,\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;$

დ) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k,\ x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\ \ k\in Z;$

XIV. tg*x*=*a* სახის განტოლების ამოხსნა. ***tgx=a, −∞<a<+∞, სახი*** ***ტრიგონომეტრიული განტოლების ფესვთა ფორმულაა:***

$$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi k,\ \ k\in Z.$$

ამოვხსნათ რამდენიმე ტრიგონომეტრიული განტოლება:

ა) $tg\left(\dfrac{\pi}{3}-5x\right)=\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{3}-5x=arctg\sqrt{3}+\pi k,\ -5x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}+\pi k$

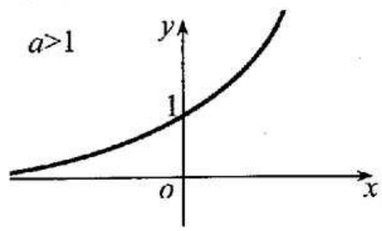
$x=\dfrac{\pi k}{5},\ k\in Z;$

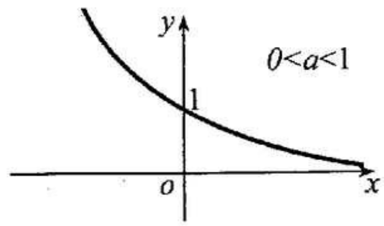
ბ) $\mathrm{tg}x=-1,\ x=\mathrm{arctg}(-1)+\pi k,\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\ \ k\in Z;$

გ) $tg^2x=\dfrac{1}{3},\ tgx=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x=\pm\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\pi k\ \ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$

§ 16. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები

მაჩვენებლიანი ფუნქცია. $y=a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>0$, $a\neq 1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. მისი განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე – $(-\infty;+\infty)$, მნიშვნელობათა სიმრავლეა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე – $(0;+\infty)$. $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკი oy-ღერძს კვეთს $(0;1)$ წერტილში. როცა $a>1$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $0<a<1$ ფუნქცია კლებადია. გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:





- როცა $a>1$ და $x>0$, მაშინ $a^x>1$;
- როცა $a>1$ და $x<0$, მაშინ $0<a^x<1$;
- როცა $0<a<1$ და $x>0$, მაშინ $0<a^x<1$;
- როცა $0<a<1$ და $x<0$, მაშინ $a^x>1$;

რიცხვის ლოგარითმი. თუ $a>0$, $a\neq 1$, დადებითი b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით ეწოდება ისეთ c რიცხვს (ეს რიცხვი ერთადერთია), რომლისთვისაც $a^c=b$ და აღნიშნავენ $c=\log_a b$. სხვანაირად, b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით ($a>0$, $a\neq 1$) ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b. ლოგარითმის განმარტების ძალით

$$a^{\log_a b}=b,$$

ამ ტოლობას ძირითად ლოგარითმულ იგივეობას უწოდებენ. მაგალითად,

$\log_3 9=2$, რადგან $3^2=9$ და $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$, რადგან $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

ჩამოვაყალიბოთ ლოგარითმის რამდენიმე თვისება:

1) *ერთის ლოგარითმი ნებისმიერი ფუძით ნულის ტოლია, $\log_a 1=0$, რადგან $a^0=1$.*
2) *თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი დადებითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი – უარყოფითი;*

   მაგალითად, $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$.
3) *თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე მეტი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი უარყოფითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი – დადებითი;*

მაგალითად, $\log_2 4=2$, $\log_2 \frac{1}{4}=-2$.

4) *ფუძის ლოგარითმი ერთის ტოლია.* $\log_a a=1$, *რადგან* $a^1=a$.

5) *დადებითი რიცხვების ნამრავლის ლოგარითმი თანამამრავლთა ლოგარითმები ჯამის ტოლია, ე.ი.*

$$\log_a(x_1 \cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2, \text{ სადაც } x_1>0,\ x_2>0.$$

6) *ორი დადებითი რიცხვის ფარდობის ლოგარითმი უდრის გასაყოფისა და გამყოფი ლოგარითმების სხვაობას, ე.ი.*

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2, \text{ სადაც } x_1>0,\ x_2>0.$$

7) *ხარისხის ლოგარითმი ხარისხის მაჩვენებლისა და ხარისხის ფუძის ლოგარითმი ნამრავლის ტოლია, ე.ი.*

$$\log_a x^k=k\cdot\log_a x, \text{ სადაც } x>0.$$

$$\log_{a^k} x=\frac{1}{k}\log_a x, \text{ სადაც } x>0.$$

8) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – *ფორმულას ლოგარითმის ახალ ფუძეზე გადასვლის ფორმულ ეწოდება. როცა* $c=b$ *ამ ფორმულიდან გვაქვს* $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

ზემოთ მოყვანილი ყველა ფორმულა სამართლიანია, როცა ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ მდგომი რიცხვ (ზოგადად, გამოსახულება) დადებითია. მაგრამ ზოგიერთი მაგალითის ამოხსნისას აუცილებელი გავითვალისწინოთ, რომ გარკვეულმა ცვლადებმა შეიძლება მიიღონ უარყოფითი მნიშვნელობაც. მაგალითად როცა $x_1<0$ და $x_2<0$ არ შეიძლება დავწეროთ

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2,$$

რადგან ტოლობის მარჯვენა მხარეს აზრი არ აქვს (უარყოფითი რიცხვის ლოგარითმი არ არსებობს). ამ დრო ასე ვიქცევით: $x_1x_2=|x_1x_2|=|x_1|\cdot|x_2|$, ე.ი.

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a|x_1x_2|=\log_a(|x_1|\cdot|x_2|),$$

რადგან $|x_1|>0$ და $|x_2|>0$, მე-5 თვისების ძალით

$$\log_a(|x_1|\cdot|x_2|)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,$$

ე.ი. როცა $x_1x_2>0$, მაშინ

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,$$

ანალოგიურად,

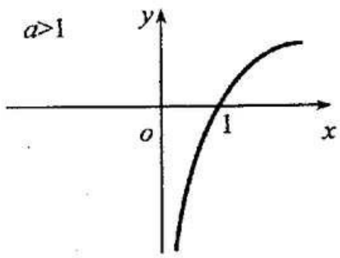
$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|,$$

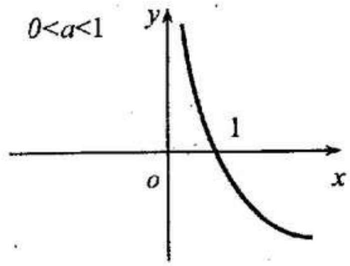
$$\log_a x^k=k\log_a|x|,$$

სადაც $x\neq0$ და k ლუწი რიცხვია.

ლოგარითმული ფუნქცია. **$y=\log_a x$ სახის ფუნქციის, სადაც $a>0$, $a\neq1$ ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება. მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $(-\infty;+\infty)$. ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი OX-ღერძს კვეთს $(1;0)$ წერტილში. თუ**

$0<a<1$ ლოგარითმული ფუნქცია კლებადია, ხოლო თუ $a>1$ – ზრდადი. გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:





გალოგარითმება და პოტენცირება. თუ რაიმე გამოსახულება შედგენილია დადებითი სიდიდეებიდან გამრავლების, გაყოფის და ახარისხების ოპერაციებით, მაშინ ზემოთ მოყვანილი თვისებების გამოყენებით შეიძლება ამ გამოსახულების ლოგარითმის გამოსახვა მასში შემავალი სიდიდეების ლოგარითმების საშუალებით. ასეთ გარდაქმნას **გალოგარითმება** ეწოდება. ლოგარითმის ფუძედ შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ერთისგან განსხვავებული რიცხვი.

მაგალითი. გავალოგარითმოთ 5-ის ფუძით $\dfrac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$ გამოსახულება, სადაც a, b, c, – დადებითი სიდიდეებია.

ამოხსნა.

$$\log_5\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}=\log_5(125a^3b^2)-\log_5(\sqrt{c})=\log_5 125+\log_5 a^3+\log_5 b^2-\log_5 c^{\frac{1}{2}}=$$

$$=3\log_5 5+3\log_5 a+2\log_5 b-\frac{1}{2}\log_5 c=3+3\log_5 a+2\log_5 b-\frac{1}{2}\log_5 c.$$

ხშირად შებრუნებული ამოცანის გადაჭრა გვიწევს. გამოსახულების ლოგარითმის საშუალებით თვით გამოსახულების პოვნა. ასეთ გარდაქმნას **პოტენცირება** ეწოდება.

მაგალითი. იპოვეთ x, თუ $\log_3 x=2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 8-3\log_3 10$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ 5-7,

$$\log_3 x=\log_3 5^2+\log_3 8^{\frac{1}{2}}-\log_3 10^3=\log_3 25+\log_3\sqrt{8}-\log_3 1000=$$

$$=\log_3\frac{25\cdot 2\sqrt{2}}{1000}=\log_3\frac{\sqrt{2}}{20}.$$

$\log_3 x=\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{20}$ ტოლობიდან გვაქვს $x=\dfrac{\sqrt{2}}{20}$.

მაჩვენებლიანი განტოლებები. განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში **მაჩვენებლიანი განტოლება** ეწოდება. $a^x=b$, სადაც $a>0$ $a\neq 1$ წარმოადგენს უმარტივეს მაჩვენებლიან განტოლებას. როცა $b>0$ ამ განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს $x=\log_a b$, ხოლო როცა $b\leq 0$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს. ხშირად მაჩვენებლიანი განტოლება დაიყვანება $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ სახის განტოლებაზე, რომელიც $f(x)=g(x)$ განტოლების ტოლფასია. $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$ სახის განტოლება $y=a^x$ ჩასმით დაიყვანება $Ay^2+By+C=0$ სახის კვადრატულ განტოლებაზე.

მაგალითი. ამოხსენით განტოლება, $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$.

ამოხსნა. $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=3^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7}$, საიდანაც $x_1=-\frac{2}{7}$, $x_2=1$.

მაგალითი. ამოხსენით განტოლება, $3^{2x+2}+3^{2x}=30$.

ამოხსნა. $3^{2x+2}+3^{2x}=30 \Leftrightarrow 3^2\cdot 3^{2x}+3^{2x}=30$, აღვნიშნოთ $3^{2x}=y$,

$$9y+y=30 \Leftrightarrow y=3,\ 3^{2x}=3,\ 2x=1,\ x=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი. ამოხსენით განტოლება, $5^{2x}=6\cdot 5^x-5$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $5^x=y$, მივიღებთ $y^2-6y+5=0$, საიდანაც $y_1=1$, $y_2=5$;

$$5^x=1 \Rightarrow x_1=0, \qquad 5^x=5 \Rightarrow x_2=1.$$

ლოგარითმული განტოლებები. განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმის ნიშნის ქვე **ლოგარითმული განტოლება** ეწოდება. $\log_a x=b$, სადაც $a>0$, $a\neq 1$ წარმოადგენს უმარტივ ლოგარითმულ განტოლებას, მისი ამონახსნია $x=a^b$. ხშირად ლოგარითმული განტოლება $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ სახეზე დაიყვანება. ასეთ შემთხვევაში საკმარისია $f(x)=g(x)$ განტოლების ამოხსნა და ამონახსნების შემოწმებ საწყის განტოლებაში ჩასმით. ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნის დროს ხშირად მოსახერხებელია ახალ ცვლადის შემოტანა.

მაგალითი. ამოხსენით განტოლება, $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1)=6$.

ამოხსნა. $x-1=(\sqrt[3]{4})^6$, $\Rightarrow x=17$.

მაგალითი. ამოხსენით განტოლება, $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$.

ამოხსნა. $x^2-4x-5=7-3x$, $\Rightarrow$ $x_1=-3$, $x_2=4$. $x^2-4x-5>0$ და $7-3x>0$ პირობებს აკმაყოფილებს მხოლო $x_1=-3$. (შევნიშნოთ, რომ შესაბამისი უტოლობების ამოხსნა აუცილებლობას არ წარმოადგენს) $x=4$ – გარეშე ფესვია.

მაჩვენებლიანი უტოლობები. უტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში **მაჩვენებლიანი უტოლობა** ეწოდება. $a^x>b$ და $a^x<b$ სადაც $a>0$, $a\neq 1$ წარმოადგენენ უმარტივ მაჩვენებლიან უტოლობებს. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

ა) $a^x>b$

თუ $b\leq 0$, მაშინ ამ უტოლობის ამონახსნია $(-\infty;+\infty)$.

თუ $b>0$, მაშინ $x<\log_a b$, როცა $0<a<1$ და $x>\log_a b$, როცა $a>1$.

ბ) $a^x<b$

თუ $b\leq 0$, მაშინ ამ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

თუ $b>0$, მაშინ $x>\log_a b$, როცა $0<a<1$ და $x<\log_a b$, როცა $a>1$.

$a^{f(x)}<a^{g(x)}$ სახის უტოლობის ამოხსნა, სადაც $a>0$, $a\neq 1$ აგრეთვე დამყარებულია მაჩვენებლიან ფუნქციის მონოტონურობაზე. კერძოდ, თუ $0<a<1$ მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქციის კლებადობის გამო

$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x).$$

ხოლო, თუ $a>1$, მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ზრდადია და

$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x).$$

იმავე პრინციპით ამოიხსნება $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ უტოლობა.

უფრო რთული სახის მაჩვენებლიანი უტოლობების ამოხსნისას ჯერ ვიყენებთ იგივე მეთოდებს, რასაც ვიყენებდით შესაბამისი მაჩვენებლიანი განტოლებების ამოხსნისას და შემდეგ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მონოტონურობის თვისებას.

მაგალითი. ამოხსენით უტოლობა, $(0,25)^{x-4} \le \left(\frac{1}{16}\right)^{x}$.

ამოხსნა. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \Leftrightarrow x-4 \ge 2x \Leftrightarrow x \le -4,\ x \in (-\infty;-4]$.

მაგალითი. ამოხსენით უტოლობა, $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > (0,81)^{x}$.

ამოხსნა. $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > \left(\frac{81}{100}\right)^{x} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{-4x} \Leftrightarrow x^2-45>-4x$, აქედან $x \in (-\infty;-9) \cup (5;+\infty)$.

მაგალითი. ამოხსენით უტოლობა, $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 < 0$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $3^{2\sqrt{x}} = y$, მივიღებთ $y^2-4y+3<0$, ანუ $\begin{cases} y<3 \\ y>1 \end{cases}$

შევიტანოთ y-ის შესაბამისი მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}} < 3 \\ 3^{2\sqrt{x}} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2\sqrt{x}} < 3^1 \\ 3^{2\sqrt{x}} > 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} < 1 \\ 2\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 1/4 \\ x > 0, \end{cases}$$

საბოლოოდ $x \in (0;1/4)$.

ლოგარითმული უტოლობები. უტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ, **ლოგარითმული უტოლობა** ეწოდება. $\log_a x > b$ და $\log_a x < b$ სადაც $a>0$, $a \ne 1$ წარმოადგენენ უმარტივეს ლოგარითმულ უტოლობებს. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

ა) $\log_a x > b$

თუ $0<a<1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია კლებადია. მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty)$, ამიტომ $0<x<a^b$.

თუ $a>1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ $x>a^b$.

ბ) $\log_a x < b$

თუ $0<a<1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ $x>a^b$.

თუ $a>1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty)$, ამიტომ $0<x<a^b$.

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ სახის უტოლობის ამოხსნა, სადაც $a>0$, $a \ne 1$ აგრეთვე დამყარებულია ლოგარითმული ფუნქციის მონოტონურობაზე. კერძოდ, თუ $0<a<1$ მაშინ ლოგარითმული ფუნქცია კლებადია და

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

ხოლო, თუ $a>1$, მაშინ ლოგარითმული ფუნქცია ზრდადია და

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}.$$

ანალოგიური პრინციპით ამოიხსნება $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ უტოლობა.

მაგალითი. ამოხსენით უტოლობა, $\log_3(x^2+4x-12)<\log_3 3x$.

ამოხსნა. $\log_3(x^2+4x-12)<\log_3 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-12>0 \\ x^2+4x-12<3x \end{cases}$, $x\in(2;3)$.