§ 8. განტოლება. განტოლებათა სისტემები. უტოლობა. უტოლობათა სისტემები

I. განტოლება. განტოლებათა სისტემა. ***ტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს, განტოლება ეწოდება.***

ცვლადების რაოდენობის მიხედვით განტოლება შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ. მაგალითად: $3x^2=2x+7$ არის ერთცვლადიანი განტოლება, ხოლო $3xy=17z$ – სამცვლადიანი.

ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსნი, ანუ ფესვი ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს. მაგალითად, $2x^2-10x=12$ განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს $x=-1$ მნიშვნელობა, რადგან $2(-1)^2-10(-1)=12$ ჭეშმარიტია; მაგრამ $x=3$ არ წარმოადგენს ფესვს, რადგან $2\cdot3^2-10\cdot3=-12\neq12$.

განტოლების ყველა ამონახსნის ერთობლიობას განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. განტოლების ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის განსაზღვრას. განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება იყოს ან სასრული, ან უსასრულო, ან ცარიელი. მაგალითად, $x=x+1$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია; $x(x+1)=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $\{-1;0\}$, ხოლო $|x|=x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $[0;+\infty)$.

ანალოგიურად განიმარტება მრავალცვლადიანი განტოლების ამონახსნი და ამონახსნთა სიმრავლე. კერძოდ, ასეთი განტოლების ამონახსნი ეწოდება ცვლადების იმ მნიშვნელობებს, რომელთა ჩასმა განტოლებაში ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას გვაძლევს, ამონახსნთა სიმრავლე, ჩვეულებრივ, ყველა ამონახსნის ერთობლიობაა. მრავალცვლადიან განტოლებებთან გარკვეული ყურადღებაა საჭირო, რომ სხვადასხვა ცვლადის მნიშვნელობა ერთმანეთში არ აგვერიოს. ამიტომ, ან უნდა დეტალურად ჩამოვწეროთ თუ რომელი ცვლადი რა მნიშვნელობას იღებს, ან უნდა შევთანხმდეთ ცვლადების რიგითობაზე და ამონახსნი ჩავწეროთ რიცხვების დალაგებული კრებულის სახით. მაგალითად, $2x-y=3$ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია $x=2$ და $y=1$; თუ ვიგულისხმებთ, რომ პირველი უცნობია x, მეორე კი y, შეგვიძლია ვთქვათ აგრეთვე, რომ $(2;1)$ წყვილი (უფრო ზუსტად $(x;y)=(2;1)$ წყვილი) არის იგივე განტოლების ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ რიცხვების მიმდევრობა არსებითია, რადგან $(1;2)$ წყვილი ამონახსნს არ წარმოადგენს.

განტოლებებს ეწოდებათ ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია.

განტოლების **ამოხსნა** არის პროცესი, როცა მოცემული განტოლებიდან თანდათანობით გადავდივართ მის ტოლფას, მაგრამ უფრო მარტივ განტოლებაზე მანამ, სანამ ამონახსნს მივიღებთ. ამოხსნის პროცესში გამოიყენება განტოლებათა შემდეგი თვისებები:

1) თუ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ (ან დავაკლებთ) ერთიდაიგივე ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ცვლადების ყოველი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის, მაშინ მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას. მაგალითად, $x+9x^4=9x^4+1$ და $x=1$ განტოლებები ტოლფასია, რადგან მეორე მიიღება პირველისაგან, ორივე მხარეში $9x^4$-ის გამოკლებით;

2) თუ განტოლების ერთი მხარიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას (ცხადია, ეს თვისება არის წინა თვისების შედეგი);

3) თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ფუნქციაზე (გამოსახულებაზე), რომელიც განსაზღვრულია დასაშვები ცვლადების ყოველი მნიშნელობისათვის და არცერთ წერტილში არ ხდება ნულის ტოლი, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას. მაგალითად, $\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x^2}$

განტოლება ტოლფასია $\frac{1}{x}=1$ განტოლებისა, რადგან x=0 არაა დასაშვები მნიშვნელობა და ამიტომ $\frac{1}{x^2}\neq 0$, რომელზეც ვამრავლებთ განტოლების ორივე მხარეს.

ბოლო თვისებაში არსებითია, რომ მამრავლი (ან გამყოფი) განსხვავდება ნულისაგან. მაგალითად $x^2=x$ განტოლების ფესვებია 0 და 1. თუ ორივე მხარეს გავყოფთ x-ზე, მივიღებთ $x=1$ არატოლფას განტოლებას, რომლის ფესვი არაა 0. ეს მოხდა იმის გამო, რომ x ცვლადმა შეიძლება მიიღოს ნულის ტოლი მნიშვნელობაც.

თუ განტოლებას აქვს სახე:

$$g(x)\cdot f(x)=0 \tag{1}$$

ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $g(x)=0$ და $f(x)=0$ განტოლებების ყველა იმ ამონახსნთა გაერთიანებას, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის $D(f)$-სა და $D(g)$-ს. თუ $D(f)=D(g)=R$, მაგალითად როდესაც f და g მრავალწევრებია, მაშინ (1)-ის ამონახსნთა სიმრავლე არის $g(x)=0$ და $f(x)=0$ განტოლებების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება. მაგალითად, ამოვხსნათ $\sqrt{x}\,(x+1)=0$. $\sqrt{x}=0$ განტოლების ამონახსნია $x=0$, $(x+1)=0$ ნიშნავს $x=-1$, მაგრამ როცა $x=-1$, $\sqrt{x}$ არაა განსაზღვრული. ამიტომ რჩება ერთადერთი ფესვი $x=0$.

ნებისმიერი ერთცვლადიანი განტოლება შეგვიძლია, 2) თვისების ძალით, ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f(x)=0 \tag{2}$$

ასეთი სახის განტოლებისათვის სამართლიანია წინა პარაგრაფში განხილული გეომეტრიული ინტერპრეტაციები.

რამდენიმე ცვლადის შემცველი განტოლებების სასრულ სიმრავლეს განტოლებათა სისტემა ეწოდება. უფრო კონკრეტულად, თუ მოცემულია m განტოლება, რომლებშიც განსხვავებული ცვლადების მთლიანი რაოდენობა არის n, მაშინ ვამბობთ რომ მოცემულია n ცვლადიანი m განტოლებათა სისტემა. მაგალითად,

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^2=3xyz \\ x+y=5, \end{cases}$$

არის სამცვლადიანი ორი განტოლების სისტემა; როგორც ვხედავთ, არაა სავალდებულო, რომ n ცვლადიან სისტემაში ყოველი განტოლება შეიცავდეს n ცვლადს.

განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება ამ სისტემაში შემავალი ყველა განტოლების საერთო ამონახსნს; ყველა ამონახსნის ერთობლიობას ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას, ისევე როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება იყოს ცარიელი, სასრული ან უსასრულო. მაგალითად,

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=2, \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია;

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y=0, \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $\{(0;0), (1;-1)\}$; ხოლო

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-y^2=0, \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $\{(a;a) \mid a\in R\}$;

თუ სისტემა არის 2 ან 3-ცვლადიანი, ხოლო ცვლადები აღნიშნულია x, y, z-ით, მაშინ, როგორც წესი, ამონახსნი იწერება დალაგებული წყვილის ან სამეულის სახით, სადაც (ისევე როგორც კოორდინატების შემთხვევაში) პირველი რიცხვი არის x ცვლადის მნიშვნელობა, მეორე y-ის, მესამე z-ის. თუ ცვლადები სხვა სიმბოლოებით არის აღნიშნული, ჩვენ განვსაზღვრავთ მათ რიგითობას.

ერთიდაიგივე ცვლადების შემცველ განტოლებათა სისტემებს ეწოდებათ ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია. ამოხსნის პროცესში, განტოლებათა სისტემა თანდათან იცვლება ტოლფასი, მაგრამ უფრო მარტივი სისტემით, ვიდრე არ ვიპოვით ამონახსნს. ამოხსნის პროცესში გამოიყენება შემდეგი თვისებები:

1) თუ სისტემის ერთ განტოლებას შევცვლით მისი ტოლფასი განტოლებით, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას;

2) თუ სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან ერთ-ერთ ცვლადს გამოვსახავთ დანარჩენი ცვლადებით და მიღებულ გამოსახულებას ჩავსვამთ სხვა განტოლებაში, მივიღებთ მოცემული სისტემის ექვივალენტურ სისტემას. მაგალითად, სისტემები

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \end{cases} \quad (x^2 + x^2 = 2)$$

არის ტოლფასი სისტემები.

3) თუ სისტემის ნებისმიერ განტოლებას შევცვლით განტოლებით, რომელიც მიიღება მისი მიმატებით (ან გამოკლებით) ამ სისტემის ნებისმიერ სხვა განტოლებასთან, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას. მაგალითად შემდეგი სისტემები ტოლფასია,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

და მეორის მეორე განტოლება წარმოადგენს პირველის განტოლებათა სხვაობას.

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდები მრავარფეროვანია. მათ ნაწილს ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ პარაგრაფებში, კონკრეტული სახის სისტემების შესწავლის მიზნით.

II. უტოლობა. უტოლობათა სისტემა. ნებისმიერი ორი ნამდვილი x და y რიცხვისათვის შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევა: ან $x=y$ (x ტოლია y-ის), ან $x>y$ (x მეტია y-ზე), ან $x<y$ (x ნაკლებია y-ზე). x ტოლია y-ის, თუ $x-y=0$; x მეტია y-ზე, თუ $x-y>0$, x ნაკლებია y-ზე, თუ $x-y<0$. მაგალითად, $6>2$ რადგან $6-2=4>0$ და $6<10$ რადგან $6-10=-4<0$.

თუ $x>y$ უტოლობა სრულდება, მაშინ ვამბობთ აგრეთვე, რომ $x>y$ არის **ჭეშმარიტი უტოლობა.** ჩანაწერი $x\geq y$ ($x\leq y$) ნიშნავს, რომ ან $x>y$, ან $x=y$ (ან $x<y$, ან $x=y$) და იკითხება „x მეტია ან ტოლი y-ზე" („x ნაკლებია ან ტოლი y-ზე").

ჩანაწერს, რომელშიც ორი რიცხვი ან ორი გამოსახულება შეერთებულია ერთ-ერთი ნიშნით შემდეგი ოთხიდან: >, <, ≤, ≥ უტოლობა ეწოდება.

უტოლობას ეწოდება მკაცრი, თუ გამოყენებულია > ან <, წინააღმდეგ შემთხვევაში, უტოლობას ეწოდება არამკაცრი.

ორ უტოლობას ეწოდება ერთნაირი აზრის, თუ ორივეში გამოყენებულია > ნიშანი, ან თუ ორივეში გამოყენებულია < ნიშანი.

ორ უტოლობას ეწოდება მოპირდაპირე აზრის, თუ ერთში გამოყენებულია > ნიშანი, მეორეში კი <. მაგალითად $5>0$ და $4>1$ არის ერთნაირი აზრის უტოლობები, ხოლო $3>-1$ და $5<7$ არის მოპირდაპირე აზრის უტოლობები.

ორი $a<b$, $b<c$ უტოლობის ნაცვლად გამოიყენება $a<b<c$ ჩანაწერი. ასეთ ჩანაწერს **ორმაგი უტოლობა** ეწოდება.

თუ უტოლობა მხოლოდ რიცხვებს შეიცავს, მას **რიცხვითი უტოლობა** ეწოდება. მაგალითად 5>(არის რიცხვითი უტოლობა, ხოლო $5>x$ არ არის რიცხვითი უტოლობა.

თუ უტოლობა შეიცავს ცვლადებს, იგი შეიძლება შესრულდეს მასში შემავალი ცვლადების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის. მაგალითად, $x^3>0$ სრულდება მხოლოდ დადებითი x-ებისათვის. იშვიათად რიცხვითი უტოლობების მსგავსად, ცვადების შემცველი უტოლობაც შეიძლება სრულდებოდეს ცვლადების ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის. მაგალითად,

$$\frac{(a+b)^2}{x^4} \geq 0$$

სრულდება ყოველთვის, როცა მარცხენა მხარეში მდგომ გამოსახულებას აქვს აზრი (ანუ როცა აქვს რიცხვითი მნიშვნელობა).

ჩამოვთვალოთ რიცხვითი უტოლობების ძირითადი თვისებები:

1) თუ $a>b$, მაშინ $b<a$;

2) თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a>c$. უტოლობის ამ თვისებას ეწოდება ტრანზიტულობა;

3) თუ $a>b$ და c ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $a+c>b+c$;

4) თუ $a+b>c$, მაშინ $a>c-b$;

5) თუ $a>b$ და $c\neq0$, მაშინ $ac>bc$, როცა $c>0$ და $ac<bc$, როცა $c<0$;

6) თუ $a>b$, a და b რიცხვებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, მაშინ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

რიცხვით უტოლობებზე შესაძლებელია გარკვეული მოქმედებების ჩატარებაც.

1) ერთნაირი აზრის უტოლობები შეგვიძლია შევკრიბოთ წევრ-წევრად. მაგალითად:

$$+\begin{array}{c} a>b \\ c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array} \qquad +\begin{array}{c} a<m \\ b<n \\ \hline a+b<m+n \end{array}$$

2) მოპირდაპირე აზრის უტოლობები შეგვიძლია გამოვაკლოთ წევრ-წევრად; უტოლობის ნიშანი რჩება იმ უტოლობიდან, რომელიც წარმოადგენს საკლებს. მაგალითად:

$$-\begin{array}{c} a>b \\ c<d \\ \hline a-c>b- \\ d \end{array}$$

3) ერთნაირი აზრის უტოლობები, რომლებიც დადებითი წევრებისაგან შედგება, შეგვიძლია წევრ-წევრად გადავამრავლოთ. მაგალითად, თუ $a>b>0$ და $c>d>0$, მაში $ac>bd$.

4) თუ $a>b$, a და b დადებითი რიცხვებია და $n\in N$, მაშინ $a^n>b^n$.

5) თუ $a>b$, a და b დადებითი რიცხვებია და n არის ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვი, მაშინ, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

უტოლობის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

უტოლობებს ეწოდებათ ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია.

უტოლობის ამოხსნის პროცესი წარმოადგენს უტოლობებიდან მათ ტოლფას, მაგრამ უფრო მარტივ უტოლობებზე გადასვლას. ამ პროცესში გამოიყენება უტოლობათა შემდეგი თვისებები:

1) ვთქვათ f და g ფუნქციებია. თუ $f(x)>g(x)$ უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ (ან დავაკლებთ) ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეში შედის $D(f)$ და $D(g)$, მაშინ მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას;

2) თუ უტოლობის ერთი მხრიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას;

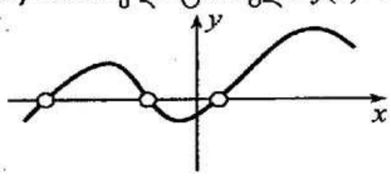
3) თუ $f(x)>g(x)$ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ (ან გავყოფთ) ერთი და იგივე $\varphi(x)$ ფუნქციაზე, რომლის განსაზღვრის არე შეიცავს $D(f)$ და $D(g)$, მაშინ:

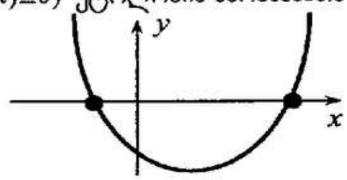
   ა) თუ $\varphi(x)>0$ ყოველთვის მოცემული უტოლობის ტოლფასი უტოლობა არის $f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x)$;

   ბ) თუ $\varphi(x)<0$ ყოველთვის მოცემული უტოლობის ტოლფასი უტოლობა არის $f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x)$.

ზემოთ მოყვანილი თვისებები სამართლიანია არამკაცრი უტოლობების შემთხვევაშიც.

მეორე თვისების ძალით, ნებისმიერ უტოლობას შეგვიძლია მივცეთ $f(x)>0$ ან $f(x)<0$ სახე. ქვემოთ, მარცხენა (მარჯვენა) ნახაზზე დაშტრიხულია $f(x)>0$ ($f(x)\leq 0$) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე





უტოლობათა სასრულ სიმრავლეს **უტოლობათა სისტემა** ეწოდება.

უტოლობათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება ამ სისტემაში შემავალი ყველა უტოლობის საერთო ამონახსნს, ხოლო სისტემის ყველა ამონახსნის ერთობლიობას ეწოდება უტოლობათა სისტემის **ამონახსნთა სიმრავლე**. უტოლობათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის დადგენას.

უტოლობათა სისტემებს ეწოდებათ **ტოლფასი**, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია.

უტოლობათა სისტემის ამოხსნის მეთოდები ძალიან მრავალფეროვანია. მათ ნაწილს ჩვენ შევისწავლით შემდეგ პარაგრაფებში.

განტოლებების და უტოლობების, აგრეთვე მათი სისტემების განხილვისას, ცვლადის ნაცვლად ხშირად გამოიყენება ტერმინი **უცნობი**, რაც მოტივირებულია იმით, რომ მიზანს წარმოადგენს ცვლადების უცნობი მნიშვნელობების განსაზღვრა.