函数最值背景下的求参问题

一般而言，含参数背景下的求函数最值问题比较常见，而已知函数的最值再求参数，这相当于一个逆向问题。

基本解题策略：

1.利用给定函数的最值，确定函数的性质；或利用函数图像的特征，确定可能取到最值的点，进行逆向验证，从而得到解答。

2. 转化为函数不等式恒成立问题，但必须确保能取到最值。

已知函数 $f(x)=-x^2+2b|x|+1-b,(b\in R)$

在 $[0,2]$ 上的最大值为 3，求 b 的取值范围；

$f(x)=-(|x|-b)^2+b^2-b+1$

由题意：$b^2-b+1\geq 3\Rightarrow b\geq 2$或$b\leq -1$

结合二次函数的性质，最值只能在对称轴或区间端点处取得，

(1)当$f(0)=3$时，$1-b=3\Rightarrow b=-2$，符合题意；

(2)当$f(b)=3$，即$0\leq b\leq 2$时，　**按取最值的可能点分类**

$b^2-b+1=3\Rightarrow b=-1$或$b=2$　　$\therefore b=2$

(3)当$f(2)=3$时，$-4+4b+1-b=3\Rightarrow b=2$　　$\therefore b=\pm 2$

由f(x)是偶函数可得，图像只能是双峰“M”型或单峰“倒V”型，　$\therefore$ 必有$f(0)=3$或$f(2)=3$

例 2：设二次函数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 满足：对任意 $x\in R$，均有 $f(x)\geq x$ 成立，

且当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leq(\frac{x+1}{2})^2$，若 $f(x)$ 在 R 上的最小值为 0，试求最大的实数 m，

使得存在 $t\in R$，当 $x\in[1,m]$ 时，不等式 $f(x+t)-x\leq 0$ 成立。

对称轴：$x=-1\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow b=a$

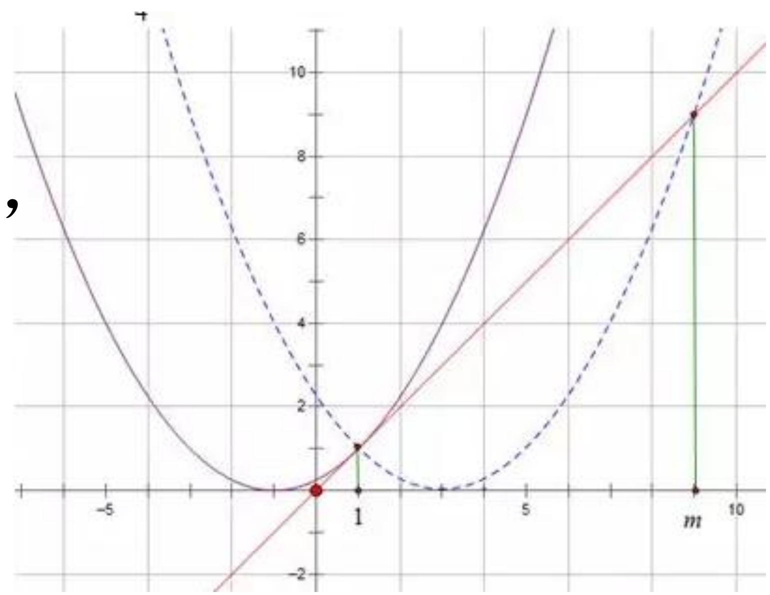
取$x=1$,得：$f(1)\geq 1$ 且$f(1)\leq(\frac{1+1}{2})^2=1\therefore f(1)=1\Rightarrow 3a+b=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$

结合图像，将$f(x)$的图像尽量右移，

直到$y=f(x+t)$与$y=x$的

左交点的横坐标为1时，m最大。



$f(1+t)=\frac{1}{4}(1+t+1)^2=1$

$\therefore t=-4$

$\therefore\frac{1}{4}(m-3)^2=m\Rightarrow m=9$

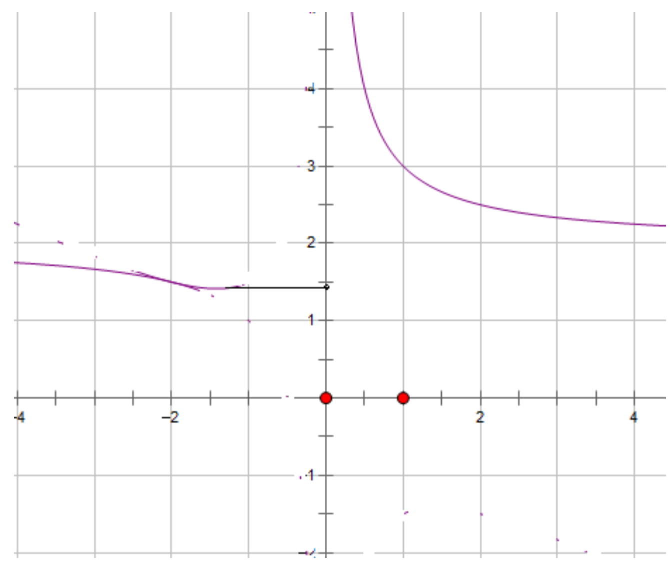
例 3：设 $a\in R$，记函数 $f(x)=\frac{1}{a}\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

的最大值为 $h(a)$，若满足 $h(a)=h(\frac{1}{a})$，则实数 a 的取值范围是___

令$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ $\quad\therefore t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$ $\quad t\in[\sqrt{2},2]$

$\therefore f(x)=g(t)=\frac{1}{2a}t^2+t-\frac{1}{a}$ $\quad$ 对称轴：$t=-a$

$$\therefore h(a)=\begin{cases}\frac{1}{a}+2, a>0\\ \sqrt{2}, -\sqrt{2}\le a<0\\ -\frac{a}{2}-\frac{1}{a}, -2\le a<-\sqrt{2}\\ \frac{1}{a}+2, a<-2\end{cases}$$



$\therefore\begin{cases}-\sqrt{2}\le a<0\\ -\sqrt{2}\le\frac{1}{a}<0\end{cases}$ 满足$h(a)=h(\frac{1}{a})$

$\therefore a\in[-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup\{1\}$

已知函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-kx+10}{x^2+4x+6}$ 的最小值为 1，求实数 k 的取值范围。

$$f(x)=1+\frac{x^2-(k+4)x+4}{x^2+4x+6} \qquad \because x^2+4x+6=(x+2)^2+2>0$$

令 $g(x)=x^2-(k+4)x+4$ 　转化为：$g(x)$ 的最小值为 0

$$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\frac{k+4}{2}\right)=-\frac{k^2+8k}{4}=0 \qquad \therefore k=0 \text{或} -8$$

又解：

$$\frac{2x^2-kx+10}{x^2+4x+6}\geq 1 \Leftrightarrow 2x^2-kx+10\geq x^2+4x+6 \text{恒成立}$$

$$\Leftrightarrow x^2-(k+4)x+4\geq 0 \quad \therefore \Delta\leq 0 \Rightarrow -8\leq k\leq 0$$?

最值是取得到的值，故恒成立下且有解。 $\therefore \Delta=0$

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域为 $[-1,4]$，

则实数 b 的取值范围是________________

令 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1} \Rightarrow yx^2-ax+y-b=0$ 有解

$\therefore \Delta = a^2-4y(y-b)\ge 0 \quad \Rightarrow 4y^2-4by-a^2\le 0$

由题意得：解集为 $-1\le y\le 4 \quad \therefore b=3$

判别式法求值域

已知$a\in(\frac{2}{3},1)$，函数$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+b, x\in[-1,1]$

的最大值为 1，最小值为$-\frac{\sqrt{6}}{2}$，求实数a, b的值。

$$f'(x)=3x^2-3ax=3x(x-a)$$

$\therefore f(x)$在$[-1,0]$递增,$[0,a]$递减, [a, 1]递增;

$\therefore f(x)_{\max}=\max\{f(0), f(1)\}$ $\therefore f(x)_{\min}=\min\{f(-1), f(a)\}$

$f(0)=b, f(1)=1-\frac{3}{2}a+b$ $\qquad \frac{2}{3}<a<1\Rightarrow 1-\frac{3}{2}a<0$

$$\therefore f(x)_{\max}=f(0)=b=1$$

$$f(-1)=-1-\frac{3}{2}a+b, f(a)=-\frac{1}{2}a^3+b$$

$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=-1-\frac{3}{2}a+b=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\qquad \Rightarrow a=\frac{\sqrt{6}}{3}$

已知函数 $f(x)=ax^3+(3-a)x$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 3，则实数 a 的取值范围是__________

$f(1)=3, f(-1)=-3, f'(x)=3ax^2+(3-a)$

(1)当$0\le a\le 3$时，$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$在$[-1,1]$递增， 满足题意；

(2)当$a>3$时， $f'(x)=0\Rightarrow x_1=-\sqrt{\frac{a-3}{3a}}, x_2=\sqrt{\frac{a-3}{3a}}$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,x_1)$递增,(x_1,x_2)递减,$(x_2,+\infty)$递增;

$\therefore$只需$f(x_1)=a(-\sqrt{\frac{a-3}{3a}})^3+(a-3)\sqrt{\frac{a-3}{3a}}\le 3 \quad \Rightarrow 3<a\le 12$

(3)当$a<0$时 $f(x)$在$(-\infty,x_1)$递减,(x_1,x_2)递增,$(x_2,+\infty)$递减;

$\therefore$只需$x_2=\sqrt{\frac{a-3}{3a}}\ge 1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\le a<0$ $\qquad \therefore a\in[-\frac{3}{2},12]$

已知函数 $f(x)=ax^3+(3-a)x$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 3，则实数 a 的取值范围是____________

转化为：$ax^3+(3-a)x\le 3$ 恒成立，且存在 x_0，使得 $f(x_0)=3$

$\Leftrightarrow a(x^3-x)\le 3(1-x)$ $\quad\because f(0)=0,\ f(-1)=-3,\therefore x_0\ne 0,-1$

(1) 当 $x_0=1$ 时，$a\in R$

(2) 当 $x_0\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时 $\quad\Leftrightarrow -ax(x+1)\le 3$

(i) 当 $x_0\in(-1,0)$ 时，$\quad\Leftrightarrow a\le\dfrac{-3}{x(x+1)}\quad\Leftrightarrow a\le g(x)_{\min}=12$

(ii) 当 $x_0\in(0,1)$ 时，$\quad\Leftrightarrow a\ge\dfrac{-3}{x(x+1)}\quad\Leftrightarrow a\ge g(x)_{\max}=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore a\in[-\dfrac{3}{2},12]$

转化为恒成立问题

已知t为常数，函数$f(x)=\left|x^3-3x-t+1\right|$在区间$[-2,1]$上的最大值为2，则实数$t=$________

令$g(x)=x^3-3x-t+1$

$\therefore g'(x)=3x^2-3=0 \quad \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$

$\therefore g(x)$在$[-2,-1]$递增,$[-1,1]$递减;

$f(-2)=\left|-1-t\right|=f(1) \qquad f(-1)=\left|3-t\right|$

$$\therefore \begin{cases} \left|1+t\right|=2 \\ \left|3-t\right|\le 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \left|1+t\right|\le 2 \\ \left|3-t\right|=2 \end{cases} \qquad \therefore t=1$$

已知函数 $g(x)=\dfrac{a+2bx+\sin x+2bx\cos x}{3+\cos x},(a,b\in R)$，

若 $g(x)$ 在 R 上有最大、最小值，且最大值与最小值的和为 6，则 $a+b=$ <u>8</u>

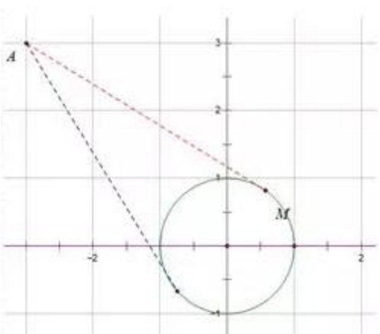
$\because \sin x,\cos x$为有界函数，f(x)有最值， 故b=0

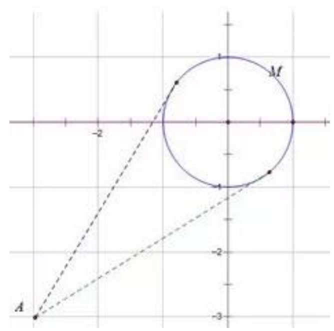
$\therefore g(x)=\dfrac{a+\sin x}{3+\cos x}$ $\Leftrightarrow A(-3,-a)$与$M(\cos x,\sin x)$连线的斜率；

$a>0$时 $l_{切}$：$y+a=k(x+3)$

$d=\dfrac{|3k-a|}{\sqrt{1+k^2}}=1$

$8k^2-6ak+a^2-1=0$





$a<0$时， 最值均为负数，

故无解；

$\therefore k_1+k_2=\dfrac{6a}{8}=6\Rightarrow a=8$

已知函数 $f(x)=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围是 $a\in[-\frac{3}{2},12]$

转化为：存在 $x_0\in R$，使得 $f(x)_{\min}=f(x_0)=-3$，且 $f(x)\geq -3$ 恒成立。

(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=-3\sin x$，满足题意；

(2)当 $a\neq 0$ 时，不妨令 $t=\sin x\in[-1,1]$

$$\therefore f(x)=g(t)=t[a(1-t^2)-3]=at(1-t^2)-3t\geq -3$$

$$\Rightarrow at(1-t^2)\geq 3(t-1)$$

(i)当 $t=\pm 1$ 时，$a\in R$

(ii)当 $-1<t<0$ 时 $\Leftrightarrow a\leq \dfrac{-3}{t(t+1)}=h(t)\quad\Rightarrow a\leq h(t)_{\min}=12$

(iii)当 $0<t<1$ 时 $\Leftrightarrow a\geq \dfrac{-3}{t(t+1)}=h(t)\Rightarrow a\geq h(t)_{\max}\to -\dfrac{3}{2}$

若函数 $f(x)=|ax+1|+|x+1|$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$，则实数 $a=$____

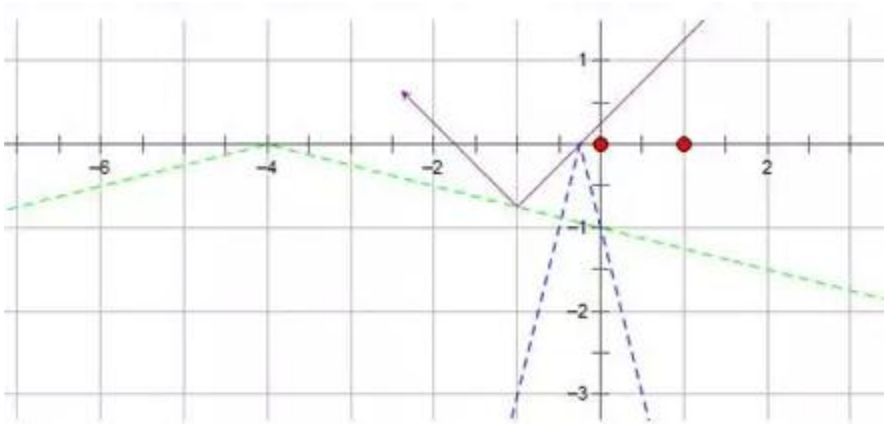
转化为：存在$x_0\in R$,使得$f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{3}{4}$,且$f(x)\geq\frac{3}{4}$恒成立。

转化为：存在$x_0\in R$,使得$|x_0+1|-\frac{3}{4}=-|ax_0+1|$

且对任意$x\in R$,$|x+1|-\frac{3}{4}\geq-|ax+1|$恒成立，求实数a的值。

令$y_1=|x+1|-\frac{3}{4}$, $y_2=-|ax+1|$　y_1图像恒在y_2上方，且有唯一交点

y_2图像恒过$(0,-1)$,且最大值为0;



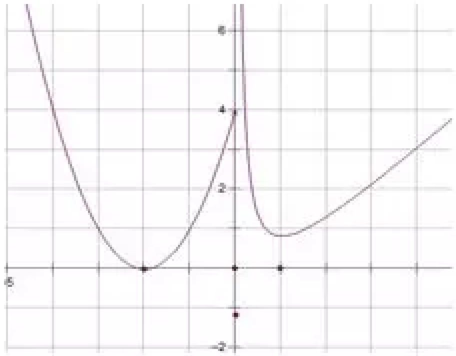
(1)y_2过$(0,-1)$，$(-1,-\frac{3}{4})$,$\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

(2)y_2过$(0,-1)$,$(-\frac{1}{4},0)$,$\Rightarrow a=4$

$\therefore a=4$或$\frac{1}{4}$

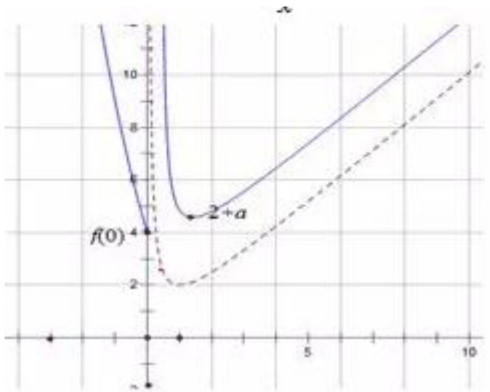
设 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, x>0\end{cases}$，若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围是 $a\in[0,2]$______

$f(x)$可看成是$g(x)=\begin{cases}x^2, x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}, x>0\end{cases}$平移而来



$a<0$

$f(x)_{\min}=f(a)\ne f(0)$



$a\ge 0 \qquad f(0)\le f(1)$

$\therefore a^2\le a+2\Rightarrow -1\le a\le 2$

已知函数 $f(x)=\lg(|x-a|+1)$ 在区间 $[0,3a-1]$ 上的最小值为 0，最大值为 $\lg(a+1)$，则实数 a 的取值范围是__________

$$3a-1>0\Rightarrow a>\frac{1}{3}$$

$$f(x)_{\min}=f(a)=0\Rightarrow a\le 3a-1\Rightarrow a\ge\frac{1}{2}$$

$$f(0)=\lg(|a|+1)=\lg(a+1)$$

$$f(3a-1)=\lg(|2a-1|+1)=\lg(2a)$$

$$\therefore \lg(2a)\le\lg(a+1)\Rightarrow a\le 1$$

$$\therefore a\in[\frac{1}{2},1]$$

设函数 $f(x)=\begin{cases}|x+a|, x\le 0\\ x+\dfrac{4}{x}+a, x>0\end{cases}$，若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围是____________

$f(x)$ 可看成是 $g(x)=\begin{cases}|x|, x\le 0\\ x+\dfrac{4}{x}, x>0\end{cases}$ 平移而来

$a>0$, 显然不合题意

$a<0$ 时, $|a|\le a+4$

$\therefore a\in[-2,0]$

已知$a\in R$，函数$f(x)=\left|x+\frac{a}{x}\right|+a$在区间$[1,4]$上的最大值为$-1$，则实数$a$的取值范围是___

显然$a\le -1$

$$\left|x+\frac{a}{x}\right|+a\le -1 \Leftrightarrow \left|x+\frac{a}{x}\right|\le -1-a \quad \Leftrightarrow (x+\frac{a}{x})^2\le (1+a)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-1\le a^2(1-\frac{1}{x^2})=a^2\cdot\frac{x^2-1}{x^2}$$

当$x\in(1,4]$时，$\Leftrightarrow a^2\ge x^2$恒成立， $\therefore a\le -4$

又$\because f(1)=|1+a|+a=-1$

$$\therefore a\le -4$$

已知函数 $f(x)=\left|x+\frac{1}{x}-a\right|+\left|x-\frac{1}{x}-a\right|+2x-2a,(x>0)$

的最小值为 $\frac{3}{2}$，则实数 a 的取值范围是________________

$$f(x)\geq\left|(x+\frac{1}{x}-a)-(x-\frac{1}{x}-a)\right|+2x-2a$$

$$=\frac{2}{x}+2x-2a\geq 4-2a=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a=\frac{5}{4}$$

已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-a}{\cos x+\sqrt{2}}+bx$ 在 R 上的最大值为 1，

则 $a+b=$ ________________

显然 $b=0$

$\therefore f(x)=\dfrac{\sin x-a}{\cos x+\sqrt{2}}$

看成 $(\cos x,\sin x)$ 与 $(-\sqrt{2},a)$ 连线的斜率；

设 $l_{切}$： $y-a=x+\sqrt{2}\Rightarrow x-y+a+\sqrt{2}=0$

$d=\dfrac{\left|a+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow a=0$ 或 $a=-2\sqrt{2}$

当 $a=-2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 1，故舍去；　　$\therefore a=0$

$\therefore a+b=0$

若函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+2)$，(a>0且a $\neq$ 1)

无最小值，则 a 的取值范围是＿＿＿＿＿＿＿＿

转化为求有最小值的范围。

$$u=(x-\frac{a}{2})^2+2-\frac{a^2}{4} \qquad \therefore u_{\min}=2-\frac{a^2}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} a>1 \\ 2-\dfrac{a^2}{4}>0 \end{cases} \Rightarrow 1<a<2\sqrt{2}$$

$$\therefore a\in(0,1)\cup[2\sqrt{2},+\infty)$$

若函数 $f(x)=\left|4^x-a\cdot 2^x+4\right|+a\cdot 2^x$，记函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{2^x},(0\le x\le 2)$，

若 $g(x)$ 的最大值为 5，则实数 a 的取值范围是____________

令 $t=2^x,\therefore 1\le t\le 4$ $\quad g(t)=\dfrac{\left|t^2-at+4\right|+at}{t}=\left|t+\dfrac{4}{t}-a\right|+a$

$\because t+\dfrac{4}{t}\in[4,5],$

(1)当 $a\le 4$ 时， $g(t)=t+\dfrac{4}{t},\therefore g(t)_{\max}=5$

(2)当 $4<a<5$ 时， $g(t)_{\max}=\begin{cases}\left|5-a\right|+a=5,a\in(4,\dfrac{9}{2}],\text{符合}\\ \left|4-a\right|+a=2a-4,a\in(\dfrac{9}{2},5),\text{ 不符合}\end{cases}$

(3)当 $a>5$ 时， $g(t)=2a-(t+\dfrac{4}{t})$

$\therefore g(t)_{\max}=2a-4=5\therefore a=\dfrac{9}{2}$，舍去

$$a\in(-\infty,\frac{9}{2}]$$