双绝对值问题的处理策略

例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

绝对值恒等式： $|m|+|n|=\max\left\{|m+n|,|m-n|\right\}$

$$\therefore f(x)=\max\left\{\left|x^2+x+a+b\right|,\left|x^2-x+a-b\right|\right\}$$

方法一：利用绝对值三角不等式

$$\because \left|x^2+x+a+b\right|_{\max}=\max\left\{\left|\frac{-1}{4}+a+b\right|,\left|6+a+b\right|\right\}$$

$$\because \left|x^2-x+a-b\right|_{\max}=\max\left\{\left|\frac{-1}{4}+a-b\right|,\left|6+a-b\right|\right\}$$

$$\therefore M(a,b)=\max\left\{\left|\frac{-1}{4}+a+b\right|,\left|6+a+b\right|,\left|\frac{-1}{4}+a-b\right|,\left|6+a-b\right|\right\}$$

$$\therefore 4M(a,b)\geq\left|\frac{-1}{4}+a+b\right|+\left|6+a+b\right|+\left|\frac{-1}{4}+a-b\right|+\left|6+a-b\right|$$

$$\geq\left|\frac{-1}{4}+a+b-(6+a+b)\right|+\left|\frac{-1}{4}+a-b-(6+a-b)\right|=\frac{25}{2}$$

$$\therefore M(a,b)\geq\frac{25}{8}$$

当 $a=-\frac{23}{8},b=0$ 时取到

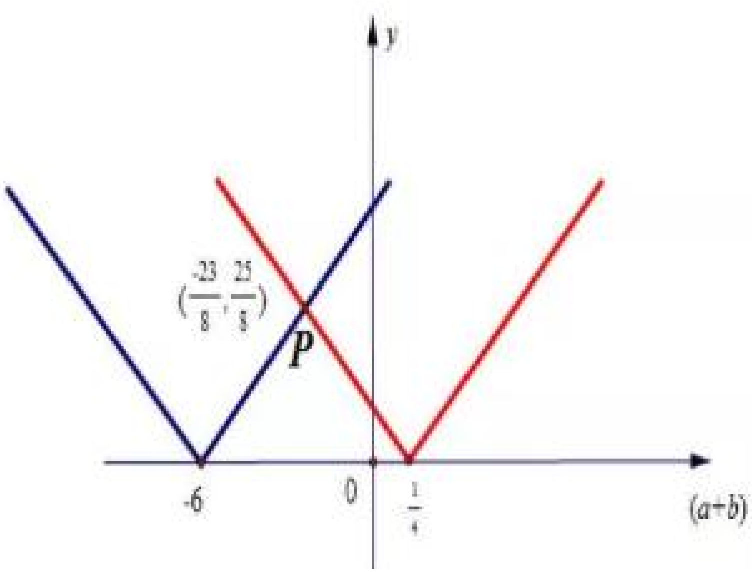
例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，

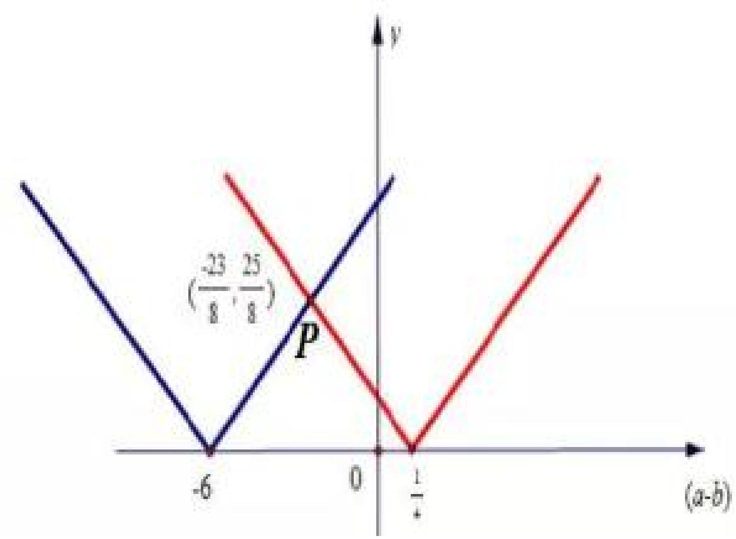
记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

方法二：利用图像处理绝对值函数值域

$$\therefore M(a,b)=\max\left\{\left|\frac{-1}{4}+a+b\right|,\left|6+a+b\right|,\left|\frac{-1}{4}+a-b\right|,\left|6+a-b\right|\right\}$$

把$a+b$与$a-b$看成整体，作为变量，画出图像





由图得：最大值的最小值都为$\dfrac{25}{8}$

例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$ 时，

记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

$$\therefore f(x)=\max\left\{\left|x^2+x+a+b\right|,\left|x^2-x+a-b\right|\right\}$$

方法三：利用绝对值的几何意义

$$f(x)=\begin{cases}\left|x^2+x+a+b\right|,(x^2+a)(x+b)\geq 0\\ \left|x^2-\text{x}+a-b\right|,(x^2+a)(x+b)<0\end{cases}=\begin{cases}\left|t+a+b\right|,(1)\\ \left|k+a-b\right|,(2)\end{cases}$$

令 $t=x^2+x\in[-\frac{1}{4},6]$　令 $\text{k}=x^2-x\in[-\frac{1}{4},6]$

(1)式：数轴上动点 t 与定点 $(a+b)$ 距离的最大值的最小值为：

$$\frac{6-(-\frac{1}{4})}{2}=\frac{25}{8}$$ 同理(2)式也是 $\frac{25}{8}$

把双绝对值变为单绝对值

例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$ 时，

记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

在线性规划里，$|x|+|y|=1$ 表示对角线长为2的正方形

$\therefore |x|+|y|=k$ 是对角线长为 $2k$ 的正方形

解法四： 令 $y=x^2$ $\quad f(x)=\left|y-(-a)\right|+\left|x-(-b)\right|\le M$

点 (x,y) 的轨迹：以 $(-b,-a)$ 为对称中心，

对称轴垂直于坐标轴的正方形内部（含边界）

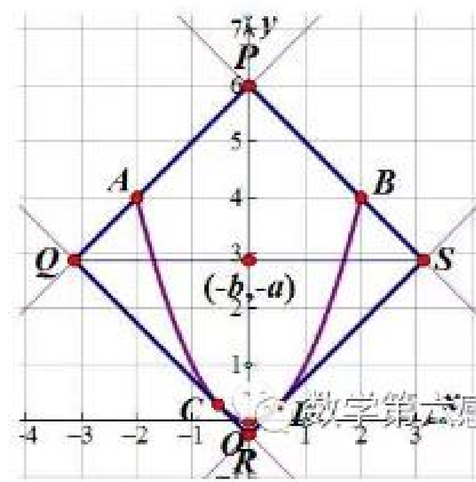
随着M的变化，正方形的大小变化

作一个正方形，把 $y=x^2, x\in[-2,2]$ 包在形内

取零界状态 $\quad l_{PQ}: y=x+6, l_{PS}: y=-x+6$

$l_{PR}: y=x-\dfrac{1}{4}, l_{RS}: y=-x-\dfrac{1}{4}$（切线）

$\therefore$ 对称中心 $(0,\dfrac{23}{8})$，即：$a=-\dfrac{23}{8}, b=0, M=\dfrac{25}{8}$



已知 $y=|a\sin\theta+b\cos\theta|+|b\sin\theta-a\cos\theta-1|$

的最大值为 11，求 a^2+b^2 的值。

令 $u=a\sin\theta+b\cos\theta, v=b\sin\theta-a\cos\theta$

$\therefore u^2+v^2=a^2+b^2=r^2 \quad y=|u|+|v-1|=M$

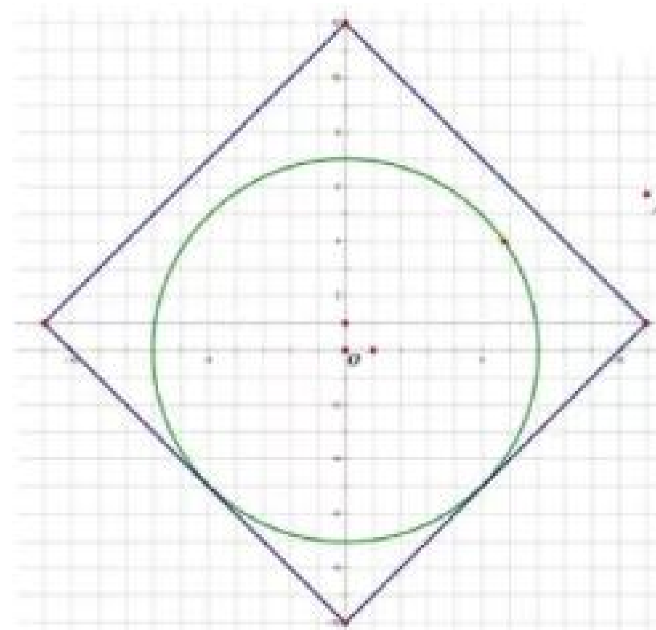
随着M的增大，正方形逐渐变大（以(0,1)为对称中心的正方形）

当正方形边界与圆相切时，$M_{\max}=11$

(圆：以原点为圆心，r为半径的圆）

$l_{切}: x-y-10=0 \quad \therefore r=d=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=50$



已知a,b为实数，对任意的$x\in R$，都有$|a\sin x+b|\le 1$成立，

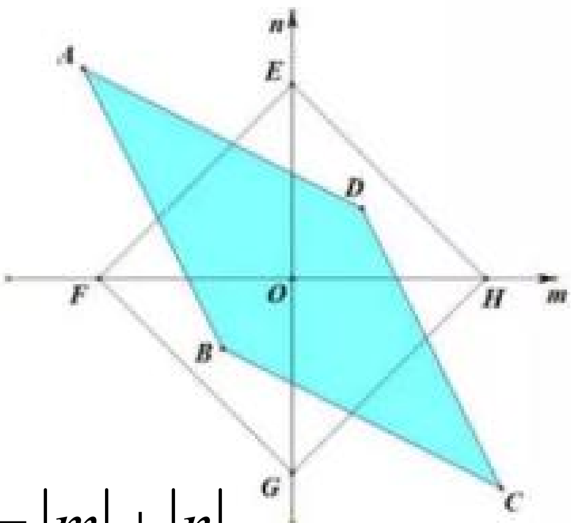
两个绝对值之和的几何意义

则$|a+3b|+|a-3b|$的最大值为______

令$m=a+3b,n=a-3b$ $\quad\therefore a=\dfrac{m+n}{2},b=\dfrac{m-n}{6}$

$$\therefore |a\sin x+b|=\left|\frac{m+n}{2}\sin x+\frac{m-n}{6}\right|\le 1$$

转化为：$\begin{cases}\left|\dfrac{m+n}{2}+\dfrac{m-n}{6}\right|\le 1\\ \left|-\dfrac{m+n}{2}+\dfrac{m-n}{6}\right|\le 1\end{cases}$ 恒成立



$\Rightarrow\begin{cases}|2m+n|\le 3\\ |m+2n|\le 3\end{cases}$ 作出可行域ABCD 令$Z=|m|+|n|$

$\therefore$当正方形过$A(-3,3)$时，$Z_{\max}=6$

曼哈顿距离：

曼哈顿距离是一种使用在几何度量空间的几何学用语，用以标明两个点在标准坐标系上的绝对轴距的总和。

曼哈顿的街道纵横交错（如图），若要从A地经过C地到达B地，行走的最短距离显然是AC+BC.

在$Rt\mathrm{H}ABC$中，用$|AC|+|BC|$表示AB间的折线距离

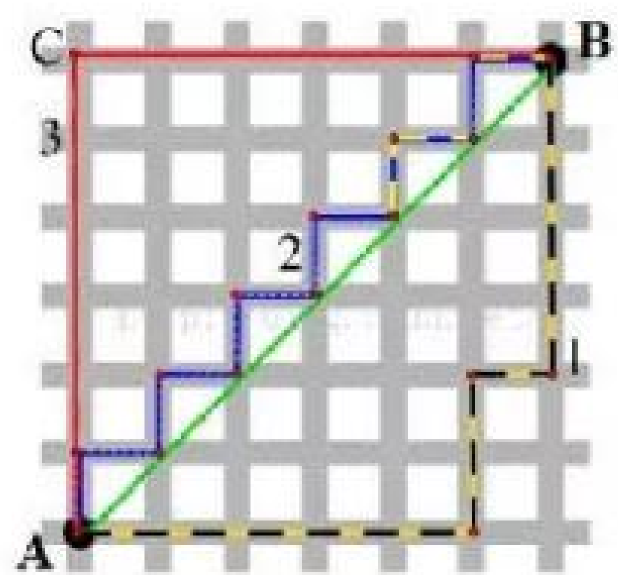
如图，三种不同的线性路径(1，2，3)都对应AB的曼哈顿距离。

数学表示如下：

点$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$之间

的曼哈顿距离为：

$$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$



例：设函数 $f(x)=|x^2+a|+|x+b|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，

记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

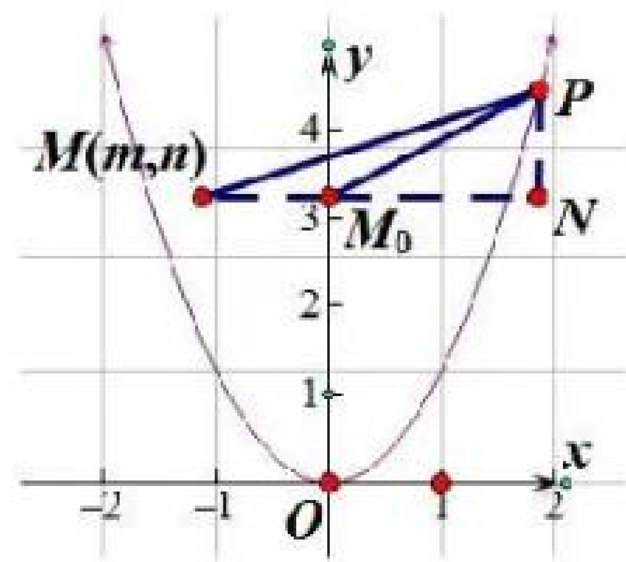
解法五： $f(x)=|x^2-(-a)|+|x-(-b)|=|x^2-n|+|x-m|$

表示点$P(x,x^2)$与点$M(m,n)$之间的“曼哈顿距离”

即：$d_{MP}=|MN|+|PN|$

显然，当$M(m,n)$在y轴上，即$M_0(0,n)$时，d_{MP}取得最大值的最小值

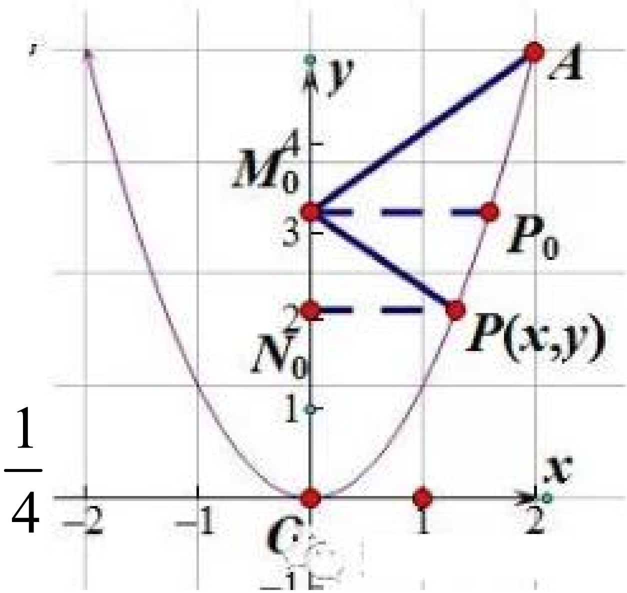
即：$d_{\max}=|x^2-n|+x$



例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，

记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

解法五： 即：$d_{\max}=\left|x^2-n\right|+x$　先把n看成常量



(1)当$x^2\ge n$,即$x\ge\sqrt{n}$时　$d_{\max}=x^2+x-n$

当$x\in[\sqrt{n},2]$时，$d_{\max}=d(2)=6-n$

(2)当$x^2\le n$,即$0\le x\le\sqrt{n}$时

$$d_{\max}=-x^2+x+n=-(x-\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{4}$$

(i)当$0\le n\le\frac{1}{4}$时,$d_{\max}=\sqrt{n}$ (ii)当$n>\frac{1}{4}$时,$d_{\max}=n+\frac{1}{4}$

$\therefore$ 当$0\le \mathrm{n}\le\frac{1}{4}$时,$d_{\max}=d_{M_0A}=6-n$

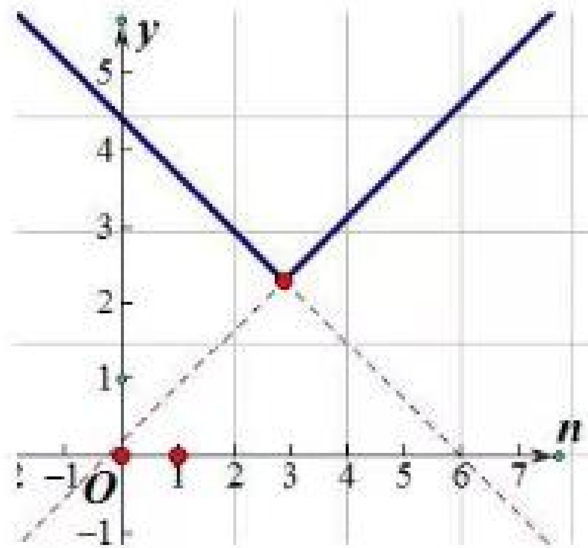
当$n\ge\frac{1}{4}$时，$(\mathrm{d}_{MP})_{\max}=\max\left\{6-n.n+\frac{1}{4}\right\}=\begin{cases}6-n,\frac{1}{4}\le n\le\frac{23}{8}\\ n+\frac{1}{4},n>\frac{23}{8}\end{cases}$

例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

解法五： 即：$d_{\max}=\left|x^2-n\right|+x$　　先把n看成常量

综上：$(\mathrm{d}_{MP})_{\max}=\begin{cases}6-n,0\le n\le\dfrac{23}{8}\\ n+\dfrac{1}{4},n>\dfrac{23}{8}\end{cases}$

$\therefore[(d_{MP})_{\max}]_{\min}=\dfrac{25}{8}$　　$(n=\dfrac{23}{8}$取到）

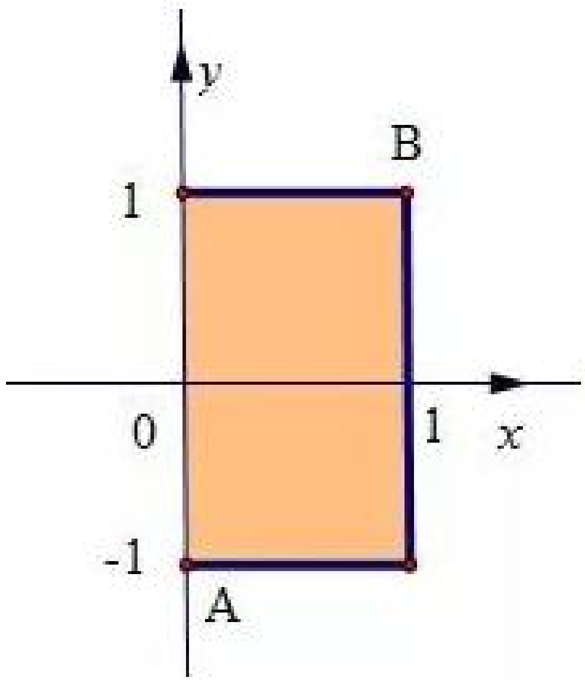


这是严谨地推理过程，作为填空题，直接去临界状态即可（虽然不严谨）

对任意$x, y \in R$, $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$的最小值为（ C ）

（A） 1　（B） 2　（C） 3　(D) 4

原式即为$P(x, y)$到$A(0,-1), B(1,1)$的“曼哈顿距离”之和



当且仅当p在矩形区域时，
最小值为3

设函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=2(x-x^2)$，$f_3(x)=\frac{1}{3}|\sin 2\pi x|$，

$a_i=\frac{i}{99}$，$i=0,1,2,\cdots,99$，

记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$，

$k=1,2,3$，则（ B ）

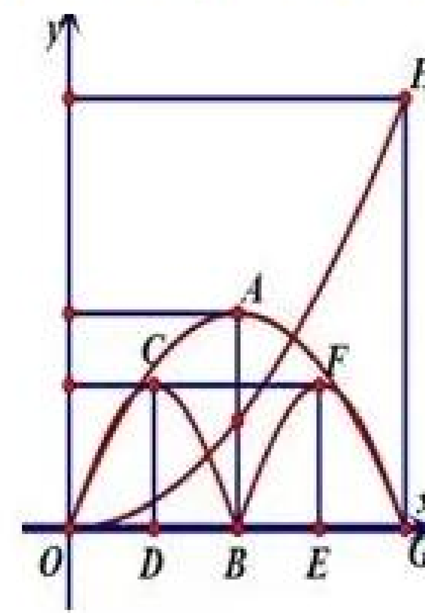
（A） $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_2<I_1<I_3$ (C) $I_1<I_3<I_2$ (D) $I_3<I_2<I_1$

$$|a_1-a_0|+|a_2-a_1|+\cdots+|a_{99}-a_{98}|=1$$

$$I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$$

$$+|a_1-a_0|+\cdots+|a_{99}-a_{98}|-1$$

表 示： 图 像 上 相 邻 两 点 a_i 与 a_{i+1} 之 间 的 “ 曼 哈 顿 距 离 ” 之 和



由于水平方向所走的路程均为1，故只需比较竖直方向上所走路程之和的大小。

$I_1=|GH|=1$ $\quad I_2<2|AB|=1$ $\quad I_3\approx 4|CD|=\frac{4}{3}>1$

例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，

记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

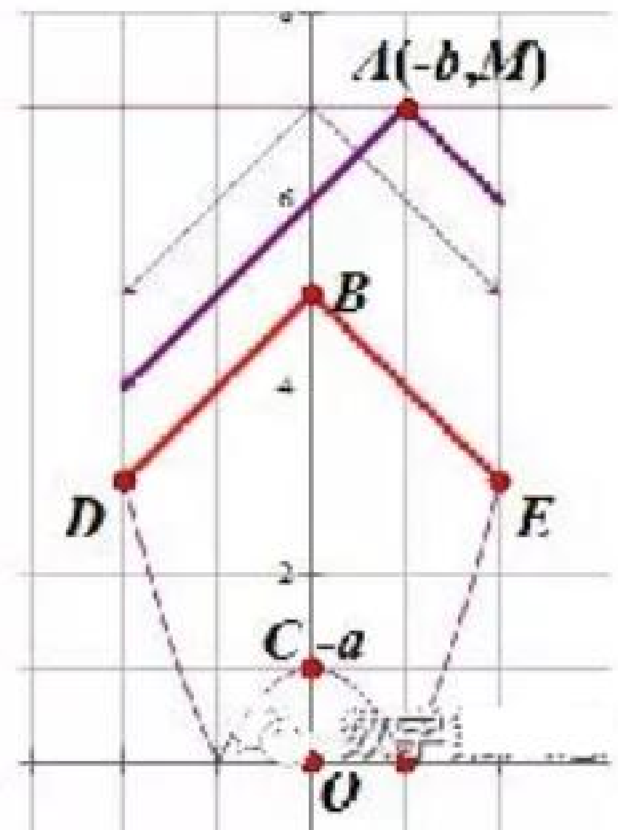
$\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|\le M$在$x\in[-2,2]$上恒成立 $\Rightarrow\left|x^2+a\right|\le M-\left|x+b\right|$

令$y_1=\left|x^2+a\right|, y_2=M-\left|x+b\right|$ 即y_1的图像恒在y_2图像的下方。

由图得，当点A(-b,M)先向左移，再向下移，尖角到达点B时，“V”图到达临界位置。

题目简化为:$\left|x^2+a\right|\le M-\left|x\right|$恒成立，

求M的最小值



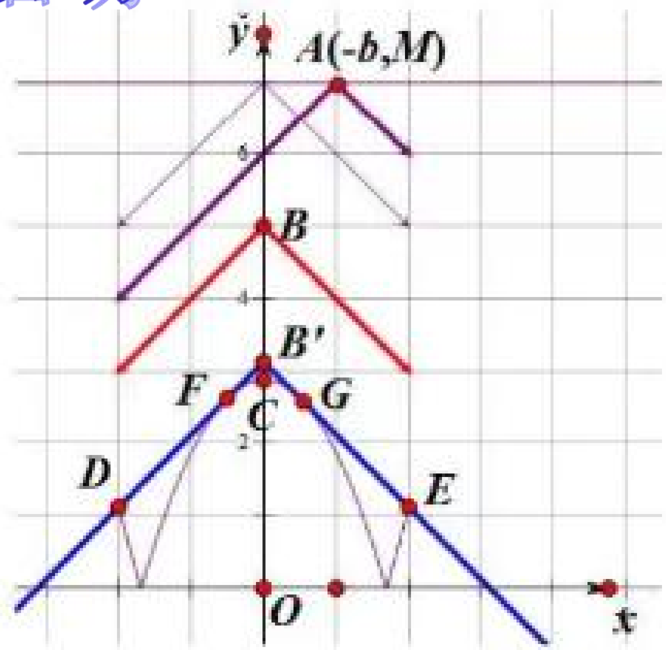
例：设函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|+\left|x+b\right|,(a,b\in R)$，当 $x\in[-2,2]$时，

记 $f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值为________

题目简化为: $\left|x^2+a\right|\le M-\left|x\right|$恒成立，求$M$的最小值

接着让a变化 **一定一动，先定后动**

显然，当C点越高，D,E点越低时，“V”图还能继续下移，直到如图的临界位置。



此时：$y_1=a-x^2$ $\quad\therefore F(-\frac{1}{2},-a-\frac{1}{4})$

$y_1'=-2x=1\Rightarrow x_F=-\frac{1}{2}$ $\quad D(-2,4+a)$

$$\therefore k_{DP}=\frac{4+a-(-a-\frac{1}{4})}{-2+\frac{1}{2}}=1 \quad \Rightarrow a=\frac{-23}{8}$$

$$\therefore l_{DF}: y=x+\frac{25}{8} \qquad M_{\min}=\frac{25}{8}$$