Metody Numeryczne

Praca domowa 2.

Hubert Michalski hm438596

6 lutego 2024

Zadanie 2.2

Wykaż, ze jeśli współczynniki b_0, b_1, b_2 rozwinięcia w bazie Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a opartego na trzech węzłach równoodległych: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ zaburzymy z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε, to jego wartości na przedziale $[x_0, x_2]$ zmienią się nie więcej niż o $E = 5\varepsilon$.

Następnie, oszacuj E dla przypadku, gdy $x_i = i \cdot h$ $(i = 0, 1, 2)$ dla pewnego $h > 0$.

Rozwiązanie

Zauważmy początkowo, że oszacowanie E dla przypadku, gdy $x_i = i \cdot h$ $(i = 0, 1, 2)$ dla pewnego $h > 0$ to ogólna wersja początkowo danego zadania. Zatem możemy od razu przystąpić do dowodu wersji ogólniejszej, a następnie pokazać, że faktycznie ograniczenie dla $h = 1$ będzie wynosiło $E = 5\varepsilon$. Zapiszmy najpierw dany WIL oraz jego zaburzoną wersję:

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x - h)$$

$$p'(x) = b_0' + b_1' x + b_2' x(x - h)$$

Gdzie $|b_i - b_i'| \leq \varepsilon$. Dla tak danych wielomianów, będziemy szukać funkcji $\alpha(\varepsilon)$ następującej:

$$|p(x) - p'(x)| \leq \alpha(\varepsilon) \cdot \varepsilon \text{ dla każdego } x \in [x_0, x_2]$$

Rozpisując powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$|p(x) - p'(x)| = |(b_0 - b_0') + (b_1 - b_1')x + (b_2 - b_2')x(x-h)| \leq \underbrace{|(b_0 - b_0')|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|(b_1 - b_1')|}_{\leq \varepsilon}|x| + \underbrace{|(b_2 - b_2')|}_{\leq \varepsilon}|x||x-h| \leq$$

$$\varepsilon + \varepsilon|x| + \varepsilon|x||x - h| \leq \varepsilon + \varepsilon x + \varepsilon x|x - h|$$

Opuściliśmy moduł z x ponieważ rozważamy ten wielomian jedynie na przedziale $[x_0, x_2]$, więc same dodatnie wartości. Czyli na ten momenty mamy:

$$|p(x) - p'(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon \cdot x + \varepsilon \cdot x \cdot |x - h| \leq \alpha(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

Rozważmy $\varepsilon > 0$, ponieważ gdy $\varepsilon = 0$ to funkcje p i p' są równe.

$$\varepsilon + \varepsilon \cdot x + \varepsilon \cdot x \cdot |x - h| \leq \alpha(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

$$1 + x + x \cdot |x - h| \leq \alpha(\varepsilon)$$

Obserwujemy teraz, że aby poznać $\alpha(\varepsilon)$ wystarczy znaleźć maksymalną wartość jaką przyjmuje funkcja $f(x) = 1 + x + x \cdot |x - h|$ na przedziale $[x_0, x_2]$. Dodatkowo wiemy, że jeśli składniki sumy przyjmują maksimum w jednym punkcie, to cała suma przyjmuje maksimum w tym punkcie. Oczywiście pierwszy składnik nie zależy od x a drugi to funkcja liniowa zatem przyjmuje maksimum na krańcu przedziału tzn. dla $x = 2h$. Zatem wystarczy teraz udowodnić, że składnik $x \cdot |x - h|$ także przyjmuje maksimum w tym punkcie:

- dla $x > h$ mamy: $x(x-h)$ czyli funkcje kwadratową z ramionami zwróconymi w górę, oś symetrii tej funkcji jest w punkcie $x = \frac{h}{2}$, więc maksymalną wartość funkcja ta przyjmuje na końcu przedziału tzn. $x = 2h$ co daje nam ostatecznie wartość $2h^2$.
- dla $x < h$ mamy: $x(h-x)$ czyli funkcje kwadratową z ramionami zwróconymi w dół, największą wartość funkcja ta przyjmuje w osi symetrii tzn. dla $x = \frac{h}{2}$ gdzie po podstawieniu otrzymujemy wartość $\frac{1}{4}h^2$ – zatem nie większą niż dla $x = 2h$.
- dla $x = h$ dostajemy 0.

To oznacza, że ostatni składnik sumy także przyjmuje maksimum dla $x = 2h$. Podsumowując powyższe rozważania otrzymujemy, że maksymalną wartością jaką przyjmuje funkcja $1+x+x\cdot|x-h|$ na przedziale $[x_0, x_2]$ jest $1 + 2h + 2h^2$. Zatem oszacowaniem E w przypadku ogólnym jest:

$$E = (1 + 2h + 2h^2) \cdot \varepsilon$$

Dla $h = 1$ mamy $E = (1 + 2 + 2) \cdot \varepsilon = 5 \cdot \varepsilon$, co należało udowodnić.