JAIO - Zadanie 1

Hubert Michalski

31 marca 2023

1 Zadanie pierwsze.

Załóżmy, że $\mathcal{A} = \langle Q, I, F, \delta \rangle$ jest automatem deterministycznym rozpoznającym język L. Zdefiniujmy automat $\mathcal{B} = \langle Q_\mathcal{B}, I_\mathcal{B}, F_\mathcal{B}, \delta_\mathcal{B} \rangle$ rozpoznający język $EvenLen(L)$. Stanami tego automatu będą podzbiory stanów automatu $\mathcal{A}$ czyli $\mathcal{Q}_\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{Q})$. Będziemy chcieli utrzymać niezmiennik taki, że po przejściu słowa w automat $\mathcal{B}$ znajdzie się w takim stanie $X \subseteq \mathcal{Q}$, że do X należą wszystkie stany, do których istnieje **nieparzysta** liczba biegów długości $|w|$ ze stanu początkowego $q_0 \in I$ w automacie $\mathcal{A}$.

Dlaczego chcemy utrzymywać informacje o akurat takich stanach? Ostatecznie potrzebujemy wyliczyć, jaka jest parzystość liczby słów akceptowanych przez automat $\mathcal{A}$ o danej długości - oznaczmy ją n. Informacja, że istnieje parzysta liczba ścieżek o długości n do pewnego stanu $q \in \mathcal{Q}$ nie musi być utrzymywana przez automat, ponieważ to oznacza, że istnieje parzysta liczba słów długości n kończących się w q, które nie zmieniają parzystości końcowego wyniku. Można w takim razie przyjąć, że jeśli danego stanu nie ma w zbiorze to prowadzi do niego parzysta liczba ścieżek (być może 0). Zatem jako stany końcowe automatu $\mathcal{B}$ interesują nas podzbiory stanów automatu $\mathcal{A}$ takie, że liczba stanów akceptujących $q_F \in F$ jest **parzysta** ponieważ to mówi nam, że automat $\mathcal{A}$ akceptuje parzystą liczbę słów w pewnej liczbie kroków. Formalnie:

$$F_\mathcal{B} = \{X \subseteq \mathcal{Q} : |X \cap F| \equiv 0 \mod 2\}$$

Zdefiniujmy również stan początkowy automatu $\mathcal{B}$:

$$I_\mathcal{B} = \{\{q_0\}\}.$$

Stan początkowy jest zdefiniowany w ten sposób, bo tylko do stanu początkowego automatu $\mathcal{A}$ prowadzi nieparzysta liczba ścieżek w 0 krokach, konkretnie prowadzi do niego bieg pusty.

Pozostało jedynie zdefiniować relację przejścia. Zatem zgodnie z pierwotnym niezmiennikiem chcemy przejść ze stanu X automatu $\mathcal{B}$ do stanu Y takiego, że w Y będą wszystkie te stany, które potrafimy osiągnąć w jednym kroku przechodząc ze stanów zbioru X i liczba sposobów, na które możemy dojść do stanów automatu $\mathcal{A}$ zawartych w Y w określonej liczbie kroków, jest **nieparzysta**. Czyli:

$$\delta_{\mathcal{B}}(X, 1) = \{q \in \mathcal{Q} : |\{(p, a) : a \in A \land p \in X \land \delta(p, a) = q\}| \equiv 1 \mod 2\}$$

Udowodnijmy indukcyjnie po długości słowa, że automat $\mathcal{B}$ akceptuje słowo $w \iff w \in L'$, gdzie $L' = EvenLen(L)$. Bazę indukcyjną wyznacza słowo puste ε. Zauważmy, że słowo $\varepsilon \in L'$ wtedy i tylko wtedy gdy stan początkowy **nie** jest stanem końcowym w automacie $\mathcal{A}$. Stan początkowy automatu $\mathcal{B}$ jest zdefiniowany jako singleton stanu początkowego pierwotnego automatu, więc zgodnie z definicja stanów końcowych automatu $\mathcal{B}$ łatwo zauważyć, że stan początkowy jest akceptujący jeśli q_0 **nie** jest. Tak więc baza indukcyjna jest spełniona.

Załóżmy więc, że automat $\mathcal{B}$ poprawnie odpowiada dla słów długości n. Rozważmy słowo $w = 1^{n+1}$, po wczytaniu prefiksu długości n słowa w automat znajdzie się w takim stanie X, że do każdego $q \in X$ istnieje nieparzysta liczba biegów dł. n, a do reszty stanów parzysta liczba biegów dł. n. Czytając kolejny znak alfabetu znajdziemy się w stanie Y wyznaczającym to samo tylko dla biegów długości $n+1$. Na podstawie tego, ile jest stanów akceptujących w Y potrafimy stwierdzić czy liczba słów długości $n+1$ w L była parzysta. A zauważmy, że jest parzysta tylko wtedy, gdy stanów końcowych $q_F \in F$ w Y jest parzyście wiele co jest równoważne byciu stanem końcowym automatu $\mathcal{B}$. To z kolei dowodzi poprawności automatu $\mathcal{B}$.

2 Zadanie drugie.

Aby pokazać, że języki regularne nie są zamknięte na operację $SquareLen$, wystarczy znaleźć język regularny, z którego operacja $SquareLen$ generuje język nieregularny. Rozważmy zatem język regularny L nad alfabetem $A = \{a, b\}$ taki, że $L = L(a^*ba^*)$. Zauważmy, że wszystkie słowa długości $n \in \mathbb{N}$ należące do L są postaci a^iba^{n-i} dla wszystkich $i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n$, zatem słów długości n w L jest dokładnie n. Łatwo następnie zaobserwować, że do języka wynikowego należą jedynie słowa w, których długość jest potęgą liczby naturalnej:

$$SquareLen(L) = \{1^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$$

Udowodnię przez sprzeczność, że język $L' = SquareLen(L)$ jest nieregularny. Załóżmy zatem, że język jest regularny. Niech N będzie stałą z lematu o pompowaniu i rozważmy słowo $w = 1^{N^2} \in L'$. Z lematu o pompowaniu istnieje dekompozycja $w = xyz$, gdzie $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$ i słowo xy^iz należy do języka L' dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Zbadajmy zatem słowo $w' = xy^2z$. Zauważmy, że $|xy^2z| = (N^2+|y|) < (N^2+2N+1) = (N+1)^2$, bo $|y| \leq N$. To z kolei oznacza, że słowo w' ma długość która nie jest kwadratem liczby naturalnej, zatem nie należy do języka L' a to prowadzi do sprzeczności. Tak więc otrzymujemy, że klasa języków regularnych nie jest zamknięta na operację $SquareLen$.