Metody Numeryczne

Praca domowa 2.

Hubert Michalski hm438596

6 lutego 2024

Zadanie 2.1

Wyprowadź i następnie zapisz w postaci macierzowej układ równań, jaki musi spełniać splajn kubiczny s, oparty na węzłach $x_0, \ldots, x_n$ i reprezentowany w postaci PP, interpolujący pewną funkcję f w tych węzłach oraz spełniający dodatkowe dwa warunki:

$$s''' \text{ jest ciągła w } x_1 \text{ oraz w } x_{n-1}.$$

Podaj algorytm rozwiązania tego układu kosztem liniowym w n. Tam, gdzie to sensowne, można powołać się wprost na wiedzę z wykładu.

Rozwiązanie

Spróbujmy skonstruować powyższy splajn kubiczny interpolujący daną funkcję f w podanych węzłach $x_0, \ldots, x_n$ reprezentując go w postaci PP czyli podać:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \text{ dla } i = 0, \ldots, n-1$$

Zatem musimy wyznaczyć wszystkie współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i dla $i = 0, \ldots, n-1$. Dla uproszczenia zapisu oznaczmy $h_i = x_{i+1} - x_i$. Wykorzystując wiedzę z wykładu mamy:

$$a_i = f(x_i), \text{ dla } i = 0, \ldots, n-1$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \text{ dla } i = 0, \ldots, n-1$$

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \text{ dla } i = 0, \ldots, n-2$$

Gdzie c_n będzie dobrane tak, aby zachodziły dodatkowe warunki brzegowe, które zostaną rozwinięte poniżej. Zatem mamy b_i (poza b_{n-1}) oraz d_i zależne tylko od c_i, więc jeśli udałoby się wyznaczyć c_i to otrzymamy już prawie całe rozwiązanie. Dalej wykorzystując przekształcenia z wykładu:

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} c_i + 2c_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} c_{i+2} = 3f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \text{ dla } i = 0, \ldots, n-2$$

Mamy więc $n-1$ równań na współczynniki $c_0, \ldots, c_n$ ale jeszcze nie wykorzystaliśmy dodatkowych warunków:

$$s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1) \text{ oraz } s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1})$$

Otrzymujemy w ten sposób równania:

$$d_0 = d_1 \text{ oraz } d_{n-2} = d_{n-1}, \text{ ponieważ } s_i'''(x) = 6d_i$$

Rozpisując z wcześniej wyznaczonego wzoru na d_i mamy:

$$\frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} \text{ oraz } \frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{3h_{n-2}} = \frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}}$$

Z powyższych równań wyznaczamy c_0 oraz c_n:

$$c_0 = c_1(1 + \frac{h_0}{h_1}) - \frac{h_0}{h_1}c_2$$

$$c_n = c_{n-1}(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}) - \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}c_{n-2}$$

Następnie możemy podstawić c_0 pod wzór z wykładu dla $i = 0$:

$$\frac{h_0}{h_0 + h_1}c_0 + 2c_1 + \frac{h_1}{h_0 + h_1}c_2 = 3f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\frac{h_0}{h_0 + h_1}(c_1(1 + \frac{h_0}{h_1}) - \frac{h_0}{h_1}c_2) + 2c_1 + \frac{h_1}{h_0 + h_1}c_2 = 3f[x_0, x_1, x_2]$$

$$c_1 \underbrace{\left(\frac{h_0}{h_0 + h_1}(1 + \frac{h_0}{h_1}) + 2\right)}_{ozn.\ \alpha} + c_2 \underbrace{\left(\frac{h_0}{h_0 + h_1}(-\frac{h_0}{h_1}) + \frac{h_1}{h_0 + h_1}\right)}_{ozn.\ \beta} = 3f[x_0, x_1, x_2]$$

Analogiczne przekształcenia wykonujemy dla $i = n - 2$:

$$\frac{h_{n-2}}{h_{n-2} + h_{n-1}}c_{n-2} + 2c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}}c_n = 3f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

$$\frac{h_{n-2}}{h_{n-2} + h_{n-1}}c_{n-2} + 2c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}}(c_{n-1}(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}) - \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}c_{n-2}) = 3f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

$$c_{n-1} \underbrace{\left(\frac{h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}}(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}) + 2\right)}_{ozn.\ \delta} + c_{n-2} \underbrace{\left(\frac{h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}}(-\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}) + \frac{h_{n-2}}{h_{n-2} + h_{n-1}}\right)}_{ozn.\ \gamma} = 3f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

Dodatkowo pamiętamy, że możemy wyznaczyć b_{n-1} wykorzystując ostatni warunek interpolacji $s(x_n) = f(x_n)$, z tego otrzymujemy równanie:

$$f(x_{n-1}) + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3 = f(x_n) \text{ skąd wyznaczamy } b_{n-1}$$

Ostatecznie zadanie sprowadza się do układu równań na współczynniki $c_1, \ldots, c_{n-1}$ z macierzą:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & & \\ \eta_1 & 2 & \zeta_1 & & & \\ & \eta_2 & 2 & \zeta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_{n-3} & 2 & \zeta_{n-3} \\ & & & & \gamma & \delta \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \eta_i = \underbrace{\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}}_{<1},\ \zeta_i = \underbrace{\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}}_{<1}$$

Sprawdźmy dodatkowo, czy otrzymana macierz jest diagonalnie dominująca. Oczywiście zachodzi $2 > |\eta_i| + |\zeta_i|$ więc wystarczy sprawdzić czy $|\alpha| > |\beta|$ oraz $|\delta| > |\gamma|$:

$$\underbrace{\left|\left(\frac{h_0}{h_0 + h_1}(1 + \frac{h_0}{h_1}) + 2\right)\right|}_{\alpha} > \underbrace{\left|\left(\frac{h_0}{h_0 + h_1}(-\frac{h_0}{h_1}) + \frac{h_1}{h_0 + h_1}\right)\right|}_{\beta}$$

$$\frac{h_0}{h_0 + h_1}(1 + \frac{h_0}{h_1}) + 2 > \left|\frac{h_0}{h_0 + h_1}(-\frac{h_0}{h_1}) + \frac{h_1}{h_0 + h_1}\right|$$

$$\frac{h_0 h_1}{(h_0 + h_1)h_1} + \frac{h_0^2}{(h_0 + h_1)h_1} + \frac{2(h_0 + h_1)h_1}{(h_0 + h_1)h_1} > \left|\frac{h_1^2 - h_0^2}{(h_0 + h_1)h_1}\right|$$

- dla $h_1 > h_0$:

$$h_0h_1 + h_0^2 + 2(h_0 + h_1)h_1 > h_1^2 - h_0^2$$
$$3h_0h_1 + 2h_0^2 + h_1^2 > 0$$

- wpp.

$$h_0h_1 + h_0^2 + 2(h_0 + h_1)h_1 > h_0^2 - h_1^2$$
$$3h_0h_1 + 3h_1^2 > 0$$

Spełnione - analogicznie można sprawdzić $|\delta| > |\gamma|$. Zatem powyższa macierz jest diagonalnie dominująca, więc nieosobliwa. Taką macierz trójdiagonalną można rozwiązać w czasie liniowym eliminacją Gaussa bez osiowania. Resztę współczynników a_i, b_i, d_i także wyznaczamy w czasie liniowym, więc ostateczny algorytm ma koszt liniowy. ■