

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Приоритетный национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета**

А.С. ДОНСКОЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ПРИВОДАХ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлению подготовки
150400 – Технологические машины и оборудование*

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2009

УДК 621.86.01:62–525
ББК 32.965.2
Д 67

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
Санкт–Петербургской государственной лесотехнической академии
И.И. Холявин

Кандидат технических наук, доцент
Санкт–Петербургского государственного политехнического университета
В.П. Корнев

Донской А.С. **Математическое моделирование процессов в пневматических приводах:** Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 122 с.

Излагаются методы математического моделирования рабочих процессов в пневматических системах. Даются методики расчета основных параметров пневмоприводов. Приводится расчет диаметров трубопроводов, при которых обеспечивается максимальное быстродействие пневматических систем.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 150400 – Технологические машины и оборудование. Пособие может быть полезно для студентов, обучающихся по другим специальностям.

Работа выполнена в рамках реализации Инновационной образовательной программы Санкт-Петербургского государственного политехнического университета «Развитие политехнической системы подготовки кадров в инновационной среде науки и высокотехнологичных производств Северо–Западного региона России».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Донской А. С. , 2009

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения.....	4
Введение	5
Основные обозначения.....	7
1. Базовые элементы пневматических систем.....	8
2. Особенности моделирования пневматических приводов	10
2.1. Классификация пневмоприводов.....	10
2.2. Особенности расчета газодинамических процессов в пневмоприводах	11
2.3. Расчет сопротивлений пневматических линий	24
3. Математические модели пневмоприводов	31
3.1. Математическая модель линейного пневмопривода	31
3.2. Математическая модель пневмопривода с торможением путем изменения параметров выхлопной линии.....	42
3.3. Математическая модель пневмопривода при торможении с помощью внешних тормозных устройств.....	46
3.4. Торможение пневмопривода с помощью встроенного пневмодемпфера	48
3.5. Торможение пневмопривода позиционного типа	49
3.6. Математическая модель пневмопривода при торможении противодавлением.....	51
3.7. Математическая модель поворотного пневмопривода.....	55
3.8. Расчет установившейся скорости движения пневмопривода	61
4. Проектный расчет пневмопривода.....	64
4.1 расчет пневмоцилиндра.....	64
4.2. Расчет поворотного пневмопривода.....	69
5. Математические модели пневматических линий.....	73
5.1. Математические модели пневматических линий для частных случаев.	74
5.1.1. Математическая модель открытой линии	74
5.1.2. Математическая модель пневматической камеры	78
5.1.3. Эмпирические модели	83
5.2. Математические модели типовых линий.....	84
5.2.1. Математическая модель линии связи в частных производных.....	84
5.2.2. Обобщенная математическая модель пневматической линии.....	89
6. Выбор диаметров пневматических линий	105
6.1. Расчет диаметров линий связи пневматических систем управления ...	105
6.2. Расчет диаметров трубопроводов пневмоприводов.....	112
приложение.....	114
библиографический список.....	120

Основные обозначения

k – показатель адиабаты (коэффициент Пуассона);
 R – газовая постоянная, Дж/(кг·К)
 ρ – плотность газа, кг/м³;
 T – абсолютная температура газа, К;
 p – давление, Па;
 p_A – давление на выходе, Па;
 p_M – давление питания, Па;
 G – массовый расход газа, кг/с;
 x – координата положения поршня, м;
 x_0 – приведенная координата, характеризующая объем вредного пространства, м;
 f – площадь проходного сечения трубопровода, м²;
 l – длина трубопровода, м;
 μ – коэффициент расхода;
 λ – коэффициент трения воздуха при движении по линии;
 ζ – коэффициент сопротивления линии, дросселей;
 m – масса газа, кг;
 M – масса подвижных частей, кг;
 F – эффективная площадь поршня, м²;
 S – максимальный ход поршня, м;
 N – статическая нагрузка, Н;
 c_p, c_v – удельные теплоемкости газа, Дж/(кг·К);
 c – скорость звука, м/с;
 q – удельная энергия поступающего в полость газа.

Численные значения параметров для воздуха при температуре $T = 293^0\text{K}$ (20^0C) и давлении $p = 101,3 \text{ кПа}$ (1 атм.):

$$k = 1,4;$$

$$R = 287 \text{ Дж/(кг·К)};$$

$$\rho = 1,204 \text{ кг/м}^3;$$

$$c = 344 \text{ м/с}.$$

ВВЕДЕНИЕ

Пневматические приводы и системы управления широко применяются в различных отраслях промышленности, что объясняется высокой надежностью пневмосистем, простотой эксплуатации, пожаро–взрывобезопасностью и низкой стоимостью. При этом воздух может использоваться как бесконтактный инструмент в технологических операциях и в операциях контроля и измерения.

В сочетании с электронными системами управления с помощью пневмосистем можно значительно проще решить многие задачи, которые решались ранее другими средствами. Однако низкое быстродействие пневматических систем и сложность реализации заданных законов движения с помощью пневматических приводов во многих случаях ставит под сомнение возможность их применения. Поэтому важно уже на этапе проектирования решить вопрос о принципиальной возможности и эффективности использования пневматической системы.

В пособии изложены основы математического моделирования рабочих процессов в пневмоприводах и их элементах, даны практические рекомендации для построения математических моделей с целью использования их в САПР пневмоприводов.

На основании материала пособия студенты должны научиться разбираться в многообразии известных методов моделирования процессов в пневматических приводах и их элементах и грамотно выбирать наиболее эффективные методы их расчета.

В пособии рассмотрены математические модели двух типовых (базовых) пневматических элементов, которые составляют основу практически любой пневматической системы, – элементов постоянного объема типа линий связи (трубопроводы, рабочие полости, камеры, каналы в конструкциях пневматических устройств и т.п.) и элементов переменного объема типа пневматических исполнительных механизмов (силовые пневмоприводы, приводные механизмы в конструкциях пневматических устройств, подвижные узлы в пневматических датчиках и т.п.).

Изложены основы метода математического моделирования динамики пневматических линий на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных дифференциальным уравнениям в частных производных с точки зрения описания волновых процессов на концах этих элементов.

Для закрепления и расширения знаний, полученных в области математического моделирования переходных процессов в пневмоприводах рекомендуется применение пакетов MathCAD, MathLAB и пакетов САПР пневмосистем PROPNEU и FLUIDSIM.

Пособие предназначено для обучения магистров по направлению 140500 «Энергетическое машиностроение» (профиль 552705 – Системы гидравлических и пневматических приводов).

Материалы пособия могут быть использованы при написании магистерской диссертации, а также полезны аспирантам, занимающимся исследованием переходных процессов в пневматических приводах.

Основные обозначения

k – показатель адиабаты (коэффициент Пуассона);
 R – газовая постоянная, Дж/(кг *K)
 ρ – плотность газа, кг/м³;
 T – абсолютная температура газа, K;
 p – давление, Па;
 p_A – давление на выходе, Па;
 p_M – давление питания, Па;
 G – массовый расход газа, кг/с;
 x – координата положения поршня, м;
 x_0 – приведенная координата, характеризующая объем вредного пространства, м;
 f – площадь проходного сечения трубопровода, м²;
 l – длина трубопровода, м;
 λ – коэффициент трения воздуха при движении по линии;
 ζ – коэффициент сопротивления линии, дросселей;
 m – масса газа, кг;
 M – масса подвижных частей, кг;
 F – эффективная площадь поршня, м² ;
 S – максимальный ход поршня, м;
 N – статическая нагрузка, Н;
 c_p, c_v – удельные теплоемкости газа, Дж/(кг K);
 c – скорость звука, м/с;
 q – удельная энергия поступающего в полость газа.

Численные значения параметров для воздуха при температуре $T=293^0K$ (20^0C) и давлении $p=101,3$ кПа (1 атм.):

$$k = 1,4;$$

$$R=287 \text{ Дж}/(\text{кг} *K):$$

$$\rho = 1,204 \text{ кг}/\text{м}^3;$$

$$c = 344 \text{ м}/\text{с}.$$

1. БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Под пневмосистемой будем понимать пневмопривод или пневматическую систему управления объемного типа, в которых форма элементов конструкции остается неизменной. Особый тип пневмосистем представляют пневмоустройства типа гибких цилиндров с изменяемой конфигурацией (пневмомускулы, шланг–привод и др.), а также лопастные устройства (турбины).

Систематизируем элементы пневмосистемы и найдем общий подход к составлению их математических моделей. Для этого выясним, какие общие элементы присутствуют в разных пневматических устройствах. Изобразим составляющие элементы на следующей схеме.

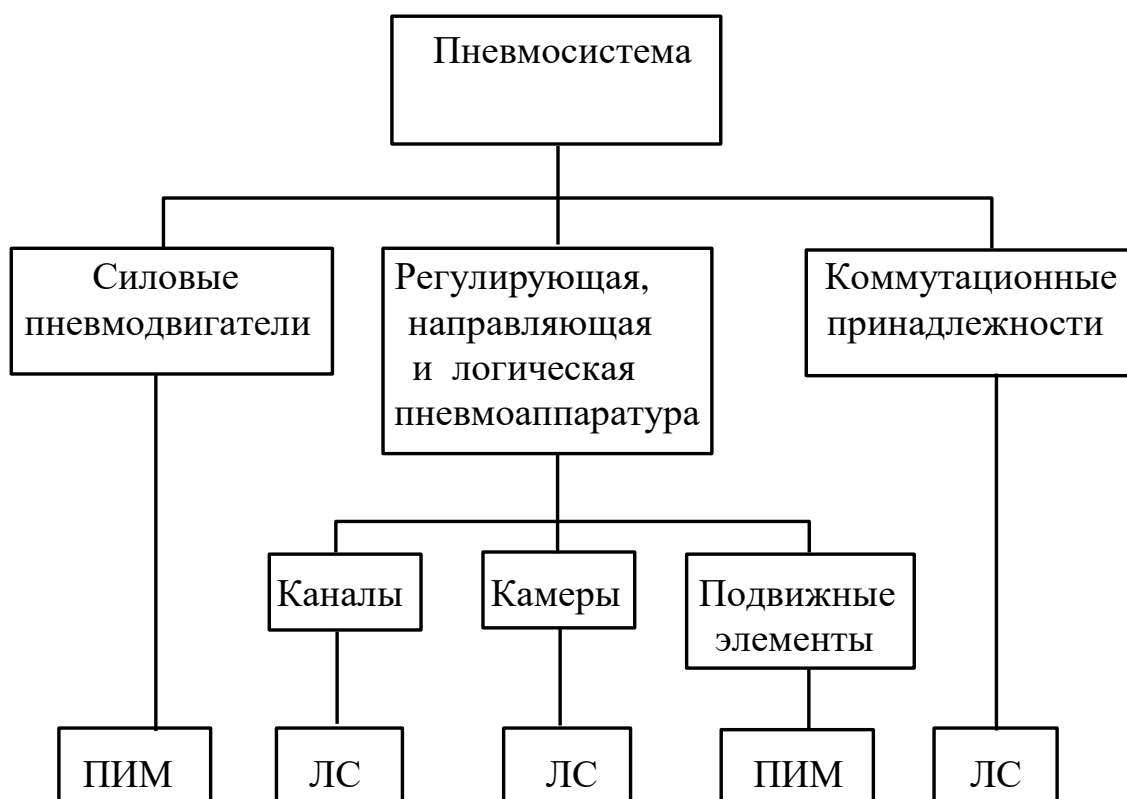


Рис. 1.1. Анализ состава пневмосистем

Любая пневматическая система включает в себя следующие возможные составляющие.

1. Силовые пневмодвигатели (поршневые, мембранные) – линейные, неполноповоротные, пневмомоторы.

2. Регулирующая, направляющая и логическая пневмоаппаратура (пневмораспределители, ПК («И», «ИЛИ»), регуляторы давления и др.).

3. Коммуникационные принадлежности (трубопроводы, штуцера и др.).

Все эти три составляющие, в конечном счете, как видно на рис. 1.1, содержат всего два базовых элемента, являющиеся общими для всех с точки зрения моделирования происходящих в них процессов. К ним относятся:

1) пневматические элементы постоянного объема типа линий связи (ЛС), которые включают в себя трубопроводы, рабочие полости (камеры), каналы в конструкциях пневмоаппаратуры,

2) пневматические элементы переменного объема типа пневматических исполнительных механизмов (ПИМ), включающие силовые приводы, приводные механизмы в конструкциях пневмоаппаратуры, подвижные узлы в пневматических датчиках и т.п.

Таким образом, как видно из схемы, представленной на рис.1.1, в общем случае расчет динамики пневмосистем сводится к расчету динамики линий связи и пневматических исполнительных механизмов.

2. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ПРИВОДОВ

Математическая модель пневматического привода будет зависеть от математических моделей составляющих его элементов, т.е. от того, каким образом математически описаны пневматические линии связи и пневматические исполнительные механизмы. Для выбора математической модели привода необходимо выяснить, к какому типу он относится.

2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПНЕВМОПРИВОДОВ

По методам расчета пневмоприводы можно разделить на 3 типа /3/.

1 тип. Типовые пневмоприводы, в которых динамика линий связи и волновые процессы в полостях пневмоприводов практически не влияют на его работу.

2 тип. Малообъемные пневмоприводы (пневмомоторы, короткоходовые пневмоцилиндры и т.п.).

В таких пневмоприводах объем рабочих полостей может быть соизмерим или меньше объемов подключенных к ним трубопроводов. В результате линия оказывает существенное влияние на динамику пневмопривода. Поэтому при составлении математических моделей таких пневмоприводов требуется учитывать математическую модель линий связи.

3 тип. Сложные пневмоприводы (следающие и позиционные).

При построении следающих пневмоприводов при переключении пневмоклапанов с большой частотой вследствие упругости газа в полости пневмоцилиндра могут возникать резонансные колебания газа, которые приводят к ударным нагрузкам и колебаниям исполнительных органов. Так, например, значения резонансных частот для пневмоцилиндров длиной полостей 0,5 м и 1 м составляют соответственно около 170 Гц и 85 Гц, т. е. меньше частоты срабатывания современных пневмоклапанов.

2.2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПНЕВМОПРИВОДАХ

В общем случае математическая модель типового пневмопривода включает уравнение движения исполнительного органа и два уравнения изменения давлений: в полости нагнетания и в выхлопной полости.

Отличие математических моделей пневмоприводов заключается, как правило, в описании расходной функции, характеризующей изменение расхода в рабочих полостях в зависимости от перепада давлений в трубопроводе. Вид функции зависит от того, каков характер течения газа в трубопроводе: изотермический (когда за счет теплообмена с окружающей средой и внутреннего трения газа его температура остается постоянной) или адиабатический (когда пренебрегают теплообменом газа с окружающей средой и внутренним трением газа).

Реальный процесс течения газа в трубопроводах носит политропический характер. Вычисление показателя политропы зависит от многих факторов и весьма затруднительно. Поэтому для упрощения расчетов принимают процесс течения адиабатическим или изотермическим.

Для расчета расхода в случае теплоизолированного (адиабатического) потока используют формулу Сен-Венана и Ванцеля. Зависимость для расчета массового расхода имеет следующий вид.

$$G = \mu f p_M \sqrt{\frac{2k}{(k-1)RT_M} \left(\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}} \right)}, \quad (2.1)$$

где $\sigma = p/p_M$ – величина относительного давления, μ – коэффициент расхода.

С помощью коэффициента расхода μ учитывают потери на трение и другие потери давления. Под коэффициентом расхода в термодинамике обычно понимают произведение коэффициента скорости,

учитывающего потери на трение, и коэффициента сжатия, учитывающего уменьшение поперечного сечения струи при истечении. Однако на практике под коэффициентом расхода понимают отношение действительного расхода при истечении к теоретическому. Таким образом, с помощью коэффициента расхода учитываются многие факторы, не всегда поддающиеся точному расчету.

Если построить график изменения расхода от величины относительного давления, то он будет иметь вид, представленный рис. 2.1.

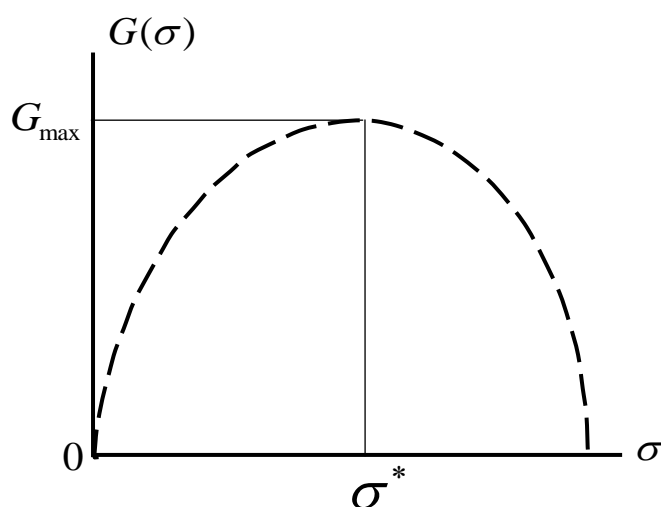


Рис. 2.1. Теоретический график изменения расхода воздуха $G(\sigma)$

Из полученного графика следует, что, если давление газа на выходе уменьшать, т.е. уменьшать величину относительного давления σ , то массовый расход газа сначала будет увеличиваться, затем в некоторой точке σ^* расход достигнет максимального значения.

При дальнейшем уменьшении давления на выходе расход начнет уменьшаться. Однако уменьшение расхода при увеличении перепада давлений, конечно, не соответствует ни здравому смыслу, ни экспериментальным данным.

Экспериментальные исследования показывают, что уменьшение давления на выходе приводит к увеличению массового расхода до определенной величины. Эта величина ограничена скоростью течения газа, которая не может превышать в обычных условиях скорости зву-

ка (особые режимы сверхзвукового истечения газа за счет специальных приспособлений мы не рассматриваем, поскольку такие режимы не характерны для промышленных систем). При дальнейшем уменьшении давления на выходе массовый расход газа не изменяется и остается равным своему максимальному значению G_{\max} .

Обозначим

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{(\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}})} . \quad (2.2)$$

Это выражение называют расходной функцией. Тогда зависимость для вычисления расхода (2.1) можем записать следующим образом:

$$G = \mu f p_M \sqrt{\frac{2k}{(k-1)RT_M}} \varphi(\sigma) . \quad (2.3)$$

Как видно из уравнения, характер графика изменения расхода на рис. 2.1 полностью определяется расходной функцией $\varphi(\sigma)$.

Найдем максимальное значение расходной функции $\varphi(\sigma)$. Для этого определим величину относительного давления σ^* , при котором функция $\varphi(\sigma^*)$ принимает максимальное значение. Величину σ^* найдем из условия определения экстремума функции, т.е.

$$\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} = 0 .$$

Дифференцируя (2.2), получим:

$$\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} = \frac{\frac{2}{k}\sigma^{*\frac{2-k}{k}} - \frac{k+1}{k}\sigma^{*\frac{1}{k}}}{2\sqrt{(\sigma^{*\frac{2}{k}} - \sigma^{*\frac{k+1}{k}})}} = 0 .$$

Отсюда следует:

$$\frac{2}{k} \sigma^{*\frac{2-k}{k}} - \frac{k+1}{k} \sigma^{*\frac{1}{k}} = 0.$$

После несложных преобразований найдем величину σ^*

$$\sigma^* = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Подставляя значение показателя адиабаты для воздуха $k = 1,4$, окончательно получим $\sigma^* = 0,528$.

Найдем максимальное значение расходной функции $\varphi(\sigma^*)$. Подставляя $\sigma^* = 0,528$ в уравнение (2.2), получим :

$$\varphi(\sigma^*) = \sqrt{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}} - \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}}. \quad (2.4)$$

Для воздуха при $k = 1,4$ максимальное значение расходной функции $\varphi(\sigma^*) = 0,259$.

Следовательно, реальную расходную функцию $\varphi(\sigma)$ следует вычислять следующим образом:

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 0,259, & \text{при } \sigma \leq 0,528, \\ \sqrt{\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}}}, & \text{при } \sigma > 0,528. \end{cases}$$

Таким образом, график изменения расходной функции будет иметь вид, представленный на рис. 2.2 (изображен сплошной линией).

Процесс течения газа при $\sigma > 0,528$ называют докритическим (подкритическим). Если $\sigma \leq 0,528$, то процесс называют закритическим (надкритическим).

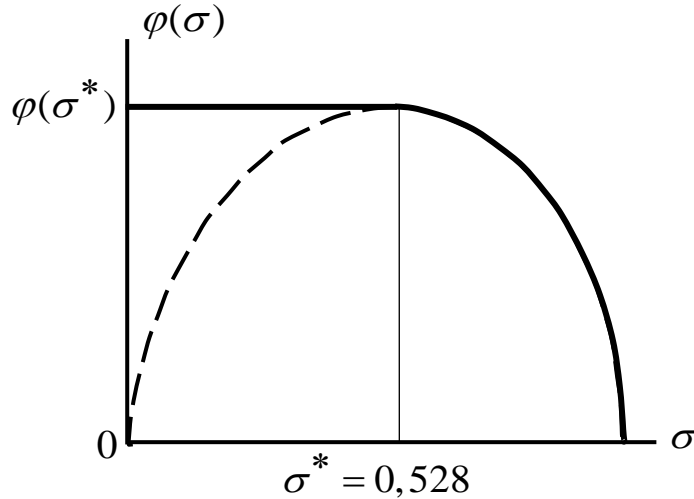


Рис. 2.2. График изменения расходной функции $\varphi(\sigma)$ при адиабатическом течении газа

Найдем максимальную величину расхода. Подставляя (2.4) в уравнение (2.3), получим:

$$G_{\max} = \mu f p_M \sqrt{\frac{k}{RT_M} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Итак, уравнения для вычисления массового расхода газа при адиабатическом течении можем записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} G &= \mu f p_M \sqrt{\frac{2k}{(k-1)RT_M}} \varphi(\sigma), \\ \varphi(\sigma) &= \begin{cases} 0,259, & \text{при } \sigma \leq 0,528, \\ \sqrt{\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}}}, & \text{при } \sigma > 0,528. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Эти же уравнения для вычисления массового расхода газа можно записать по-другому:

$$G = \left\{ \begin{array}{ll} \mu f p_M \sqrt{\frac{k}{RT_M} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} & \text{при } \sigma \leq 0,528, \\ \mu f p_M \sqrt{\frac{2k}{(k-1)RT_M}} \sqrt{\left(\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}} \right)} & \text{при } \sigma > 0,528. \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Необходимо иметь в виду, что объемный расход воздуха в отличие от расхода жидкости зависит не только от относительного давления, но и от уровня давления на входе p_M .

В реальных устройствах пневмосистем (клапанах, распределителях, трубопроводах) расходные характеристики в большинстве случаев не совпадают с теоретической. Прежде всего, каждое из реальных устройств представляет собой не одно сопротивление, а цепочку сопротивлений, т.е. сужений произвольной формы, чередующихся с участками увеличенного проходного сечения.

Даже если принять процесс течения через каждое сопротивление близким к изоэнтропическому, то расходная функция всей цепи все равно не будет совпадать с функцией для адиабатического истечения газа, что легко доказать, например, следующим образом.

Очевидно, что максимальный расход через цепочку из двух сопротивлений установится тогда, когда будет достигнуто критическое отношение давлений на входе и выходе любого из сопротивлений, т.е. $p_2' / p_1 = 0,528$ или $p_2 / p_2' = 0,528$ (рис. 2.3).

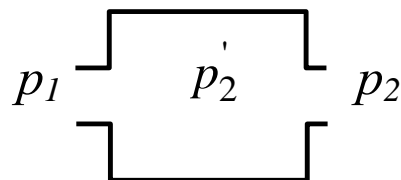


Рис. 2.3. Расчет суммарного относительного давления

Поскольку, относительное давление двух сопротивлений равно

$p_2 / p_1 = (p_2' / p_1)(p_2 / p_2')$, то очевидно, что относительное давление $p_2 / p_1 < 0,528$, т.е. не соответствует значению критического отношения для адиабатического течения $\sigma = 0,528$.

Таким образом, в общем случае при расчетах нельзя рассматривать процессы течения газа в линиях связи как адиабатические процессы. Действительно, газ, проходя по трубопроводу, расширяется и, как следствие, охлаждается. С другой стороны, за счет внутреннего сопротивления и трения о стенки трубы газ нагревается, приближая тем самым процесс к изотермическому.

Теоретические расчеты и опытные данные показывают, что действительно в промышленных системах процесс течения газа в трубопроводах весьма близок к изотермическому [2], т.е. процессы протекают практически с постоянной температурой газа. Поэтому при расчетах часто используются зависимости для изотермического процесса. В этом случае расход газа в трубопроводе G вычисляется по формуле:

$$G = \frac{f p_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\zeta - 2 \ln \sigma}} ,$$

где $\sigma = p/p_M$ – относительное давление, ζ – суммарный коэффициент сопротивления входящих в линию трубопроводов и пневмоаппаратуры.

Обозначим

$$\varphi(\sigma, \zeta) = \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\zeta - 2 \ln \sigma}} .$$

Это уравнение представляет собой расходную функцию при изотермическом течении газа. Как видно из этого уравнения, расходная функция при изотермическом течении, в отличие от расходной функции (2.2) для адиабатического течения, будет изменяться с изменением сопротивления ζ системы.

Из этого уравнения, также как и для случая адиабатического течения газа, следует, что при относительном давлении $\sigma = 0$, т.е. при максимальном перепаде давлений, расходная функции, а, следовательно, и расход, равны нулю, что не соответствует реальным процессам. В действительности существует некоторое предельное относительное давление σ_{np} , при котором массовый расход G достигает максимального значения. Величина расхода ограничена скоростью течения газа, которая не превышает в обычных условиях скорости звука. Поэтому выражение для расходной функции $\varphi(\sigma, \zeta)$ записывается следующим образом:

$$\varphi(\sigma, \zeta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\zeta - 2 \ln \sigma}}, & \sigma_{np} < \sigma < 1; \\ \varphi(\sigma_{np}, \zeta) & \sigma \leq \sigma_{np}. \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\sigma_{np} = p_{np}/p_M$ – предельное относительное давление, p_{np} – предельное значение давления в линии, при котором расходная функция и массовый расход достигают максимального значения.

Найдем максимальное значение расходной функции $\varphi(\sigma_{np}, \zeta)$ в уравнении (2.7). Для этого определим величину предельного относительного давления σ_{np} , при котором достигается максимальное значение расходной функции.

$$\varphi(\sigma, \zeta) = \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\zeta - 2 \ln \sigma}}. \quad (2.8)$$

Чтобы определить предельное относительное давление σ_{np} , вычислим производную функции (2.8) по относительному давлению σ и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\varphi(\sigma, \zeta)}{d\sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta - 2 \ln \sigma_{np}}{1 - \sigma_{np}^2}} \left(\frac{-2\sigma_{np}}{\zeta - 2 \ln \sigma_{np}} - \frac{-2}{\sigma_{np} (\zeta - 2 \ln \sigma_{np})^2} \right) = 0 .$$

Отсюда получим

$$\frac{\sigma_{np}}{\zeta - 2 \ln \sigma_{np}} - \frac{1}{\sigma_{np} (\zeta - 2 \ln \sigma_{np})^2} = 0 .$$

В результате несложных преобразований окончательно получим следующее уравнение, из которого можем определить величину предельного относительного давления σ_{np} :

$$2 \ln \sigma_{np} + \frac{1}{\sigma_{np}^2} = 1 + \zeta . \quad (2.9)$$

Запишем уравнение для вычисления максимального значения функции:

$$\varphi(\sigma_{np}, \zeta) = \sqrt{\frac{1 - \sigma_{np}^2}{\zeta - 2 \ln \sigma_{np}}} . \quad (2.10)$$

Из полученной зависимости (2.9) найдем уравнение для вычисления знаменателя подкоренного выражения (2.10):

$$\zeta - 2 \ln \sigma_{np} = \frac{1}{\sigma_{np}^2} - 1 = \frac{1 - \sigma_{np}^2}{\sigma_{np}^2} .$$

Подставляя полученное выражение в (2.10), найдем максимальную величину расходной функции $\varphi(\sigma_{np}, \zeta)$:

$$\varphi(\sigma_{np}, \zeta) = \sigma_{np} .$$

Таким образом, из уравнений (2.7) окончательно получим следующие зависимости для вычисления расходной функции $\varphi(\sigma, \zeta)$ при изотермическом течении газа:

$$\varphi(\sigma, \zeta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\zeta - 2 \ln \sigma}}, & \sigma_{np} < \sigma < 1; \\ \sigma_{np}, & \sigma \leq \sigma_{np}. \end{cases}$$

График изменения расходной характеристики при изотермическом течении показан на рис. 2.4 (при коэффициенте сопротивления $\zeta = 20$).

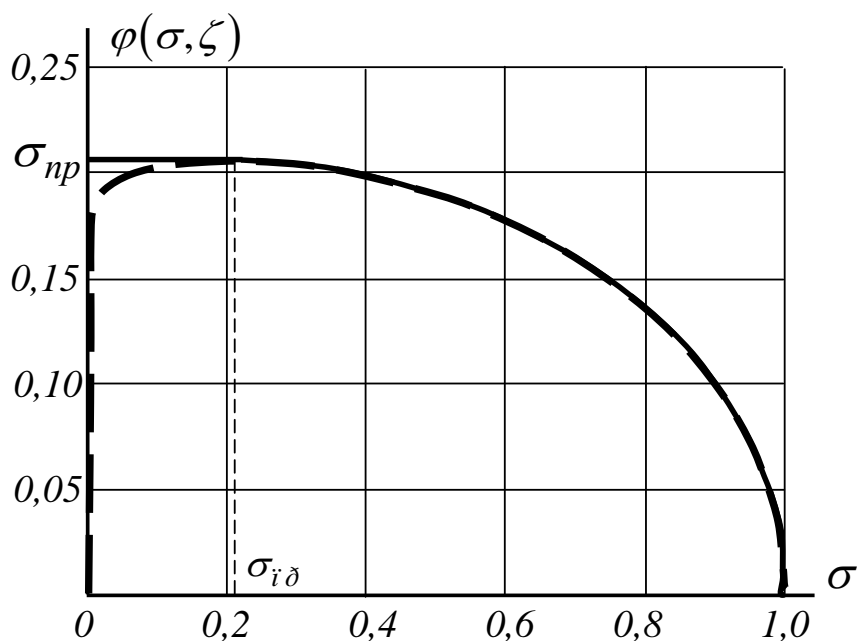


Рис.2.4. График изменения расходной функции $\varphi(\sigma, \zeta)$ при изотермическом течении газа

Таким образом, расчет массового расхода при изотермическом течении в трубопроводах сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{f p_M}{\sqrt{RT_M}} \varphi(\sigma, \zeta), \\ \varphi(\sigma, \zeta) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\sigma^2}{\zeta - 2\ln \sigma}}, & \sigma_{np} < \sigma < 1; \\ \sigma_{np}, & \sigma \leq \sigma_{np}, \end{cases} \\ 2\ln \sigma_{np} + \frac{1}{\sigma_{np}^2} &= 1 + \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Решение системы (2.11) можно найти только методом итераций. Однако для диапазона давлений и сопротивлений трубопроводов и аппаратуры промышленных систем расходную функцию можно упростить. Это объясняется тем, в пневматических системах коэффициент сопротивления всей линии ζ с учетом включенной в линию аппаратуры, как правило, $\zeta > 20$. При таких коэффициентах сопротивления, т.е. при $\zeta > 20$, величина предельного относительного давления $\sigma_{np} < 0,2$, что следует из уравнения (2.9). В результате при давлении питания, т.е. при давлении за блоком подготовки воздуха, равном $0,5 \text{ МПа}$, получается, что величина относительного давления $\sigma = p/p_M$ всегда больше $0,2$, т.е. $\sigma > 0,2$.

Иными словами, пневмопривод работает всегда в диапазоне относительных давлений $\sigma > \sigma_{np}$. Следовательно, для расчета расходной функции достаточно использовать только часть системы (2.11), т.е. расчет можно выполнять по зависимости

$$\varphi(\sigma, \zeta) = \sqrt{\frac{1-\sigma^2}{\zeta - 2\ln \sigma}}. \quad (2.12)$$

Кроме того, на практике суммарное сопротивление пневматических линий $\zeta \gg 2\ln \sigma$, В результате слагаемым $2\ln \sigma$ можно пренебречь. Окончательно зависимость (2.12) можно с достаточной для практических расчетов точностью заменить следующим, более про-

стым, выражением:

$$\varphi(\sigma, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sqrt{1 - \sigma^2}. \quad (2.13)$$

Для сравнения на рис. 2.5 представлены графики расходных функций, построенные по формулам (2.11) и (2.13) для коэффициента сопротивления $\zeta=30$.

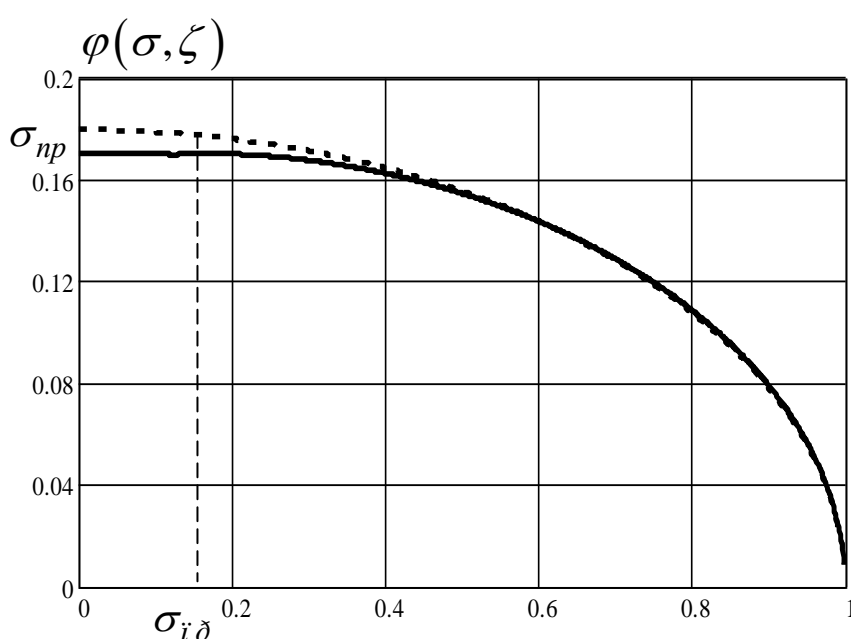


Рис.2.5. Графики точной (сплошная) и приближенной (пунктирная) расходных характеристик

Окончательно для изотермического течения газа в трубопроводах получим следующую формулу для вычисления расхода:

$$G = \frac{fp_M}{\sqrt{RT_M \zeta}} \sqrt{1 - \sigma^2}. \quad (2.14)$$

На рис. 2.6 приведен график зависимости погрешности δ расчетов расходной функции (2.11) по ее приближенной зависимости (2.13)

от относительного давления σ . График построен для случая, когда коэффициент сопротивления линии $\zeta = 30$.

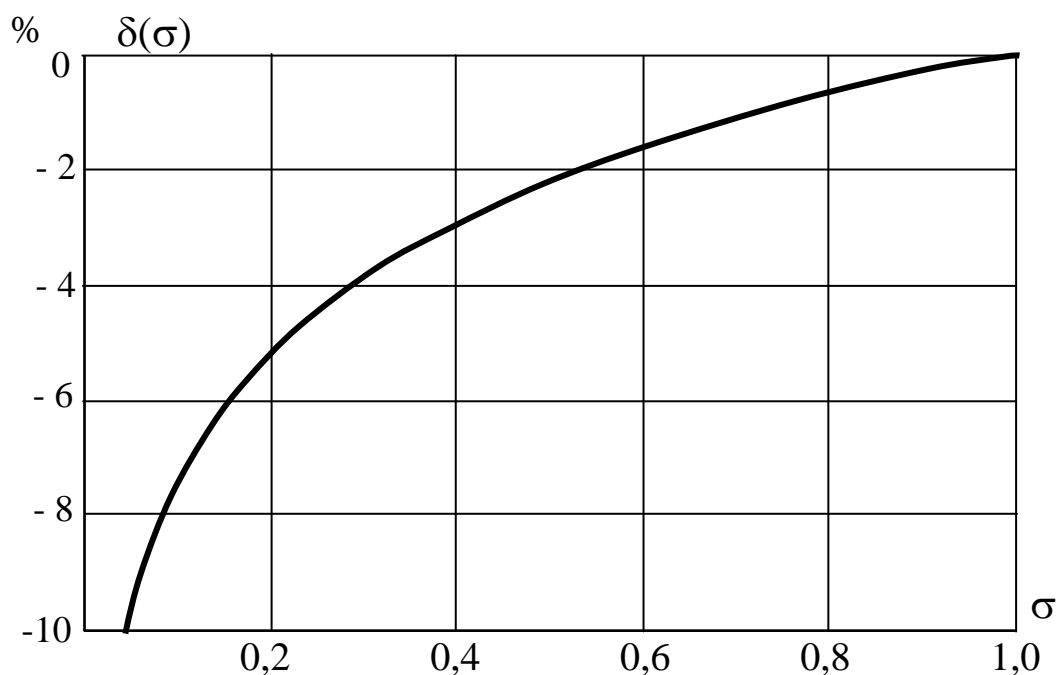


Рис. 2.6. График зависимости погрешности расчетов $\delta(\sigma)$ расходной функции по упрощенной формуле

Чем больше сопротивление линии ζ , тем меньше погрешность расчетов по упрощенной формуле (2.13). Для сравнения приведем следующие цифры. При давлении питания $p_M = 0,5 \text{ МПа}$, т.е. при изменении относительного давления в диапазоне $\sigma = 0,2 \div 1$, погрешности расчетов изменяется соответственно в следующем диапазоне: при $\zeta = 20$ – от 7% до 0%, при $\zeta = 30$ – от 5,3% до 0%, $\zeta = 50$ – от 3,5% до 0%.

2.3. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Коэффициент сопротивления ζ пневматической линии пневмопривода определяется суммарным сопротивлением входящих в линию пневмоэлементов и сопротивлением отдельных участков трубопровода:

$$\zeta = 1 + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n + \lambda \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_m}{d},$$

где $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ – коэффициент сопротивления входа в линию; $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ – коэффициенты сопротивления пневмоаппаратуры в линии; λ – коэффициент трения газа в трубопроводе, l_1, l_2, \dots, l_m – длины трубопроводов между пневматическими элементами в линии, d – диаметр трубопроводов.

Коэффициент трения λ зависит от характера течения (ламинарное или турбулентное) и числа Рейнольдса, а при турбулентном течении – еще и от коэффициента шероховатости Δ поверхности трубы.

Коэффициент трения λ для ламинарного течения вычисляется следующим образом:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Здесь $Re < 2300$ – число Рейнольдса, определяемое по формуле

$$Re = \frac{vd}{\nu},$$

v – скорость течения газа в трубопроводе, d – диаметр трубопровода, ν – кинематическая вязкость газа.

Для вычисления коэффициента трения λ при турбулентном течении необходимо знать шероховатость внутренней поверхности трубы, которая определяется экспериментально. Значения шероховатости для некоторых типов труб приведены в табл. 2.1 [3].

Таблица 2.1

№	Характеристика трубы	Шероховатость
1	Гладкие из синтетических материалов, стеклянные и медные	Менее 0,0015
2	Стальные оцинкованные новые	0,125
3	Стальные оцинкованные сварные новые	0,05–0,1
4	Стальные оцинкованные сварные ржавые	0,15–0,2
5	Стальные оцинкованные тянутые новые	0,01–0,05

Для определения коэффициента трения λ можно воспользоваться графиком (рис. 2.5). Однако для этого надо знать число Рейнольдса, которое, как видно из приведенной формулы, зависит от скорости газа в трубе и кинематической вязкости. В свою очередь вязкость зависит от давления газа в трубе. Кроме того, скорость газа и вязкость переменны как по длине трубы, так и по времени. Поэтому в качестве первого приближения скорость газа можно определить из условия, что средний расход воздуха в полости пневмоцилиндра G_{Π} равен среднему расходу воздуха в трубе G_T при одинаковой плотности газа ρ_0 в полости цилиндра и в трубе. В результате можем написать следующее соотношение:

$$\rho_0 f_T v_T = \rho_0 F v_{\Pi} ,$$

где v_T – средняя скорость газа в трубопроводе, v_{Π} – средняя скорость поршня, f_T и F – площадь проходного сечения трубы и площадь поршня. Отсюда, выражая площадь сечения трубы и площадь поршня через их диаметры, получим выражение для расчета скорости газа в трубе:

$$v_T = v_{\Pi} \frac{D^2}{d^2} ,$$

где D – диаметр поршня, d – диаметр трубы.

Основная доля сопротивления в пневматической линии, как правило, приходится на входящую в нее аппаратуру. В результате точный расчет коэффициента трения λ не вносит принципиальных изменений при определении суммарного коэффициента сопротивле-

ния всей линии ζ . Поэтому для практических расчетов коэффициент трения λ воздуха в трубе можно принимать, равным 0,03.

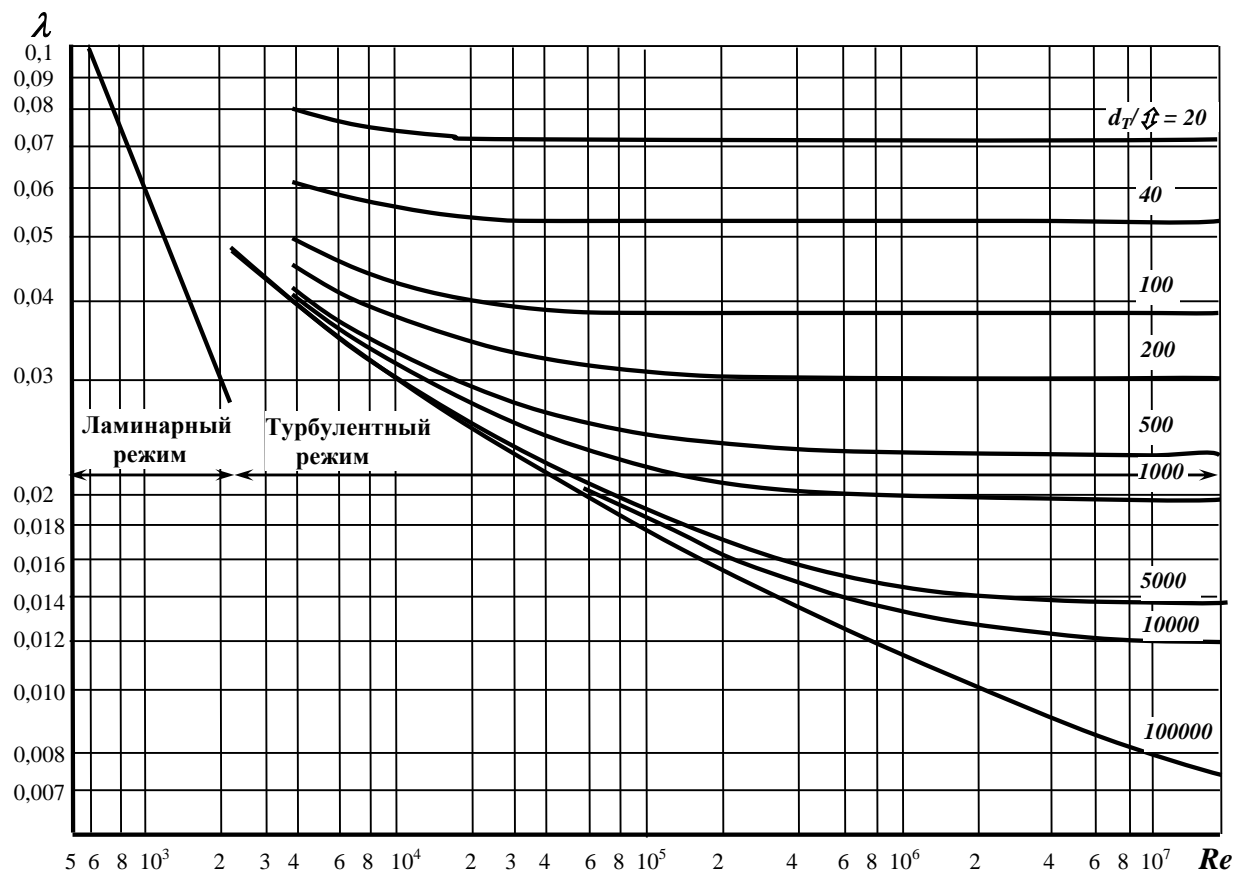


Рис. 2.5. График для определения коэффициента трения воздуха λ

Для определения коэффициентов сопротивления аппаратуры ζ_n можно воспользоваться таблицей 2.2 [2], имея в виду, что коэффициент сопротивления пневмоаппаратуры ζ_n связан с эквивалентной длиной l_ε заменяющего его трубопровода следующей зависимостью:

$$\zeta_n = \lambda \frac{l_\varepsilon}{d}.$$

Питание пневмопривода осуществляется через блок подготовки воздуха, в котором редукционный пневмоклапан поддерживает постоянное давление p_M . Поэтому при расчете коэффициентов сопротивления пневматической линии, по которой подается давление в полость нагнетания, будем учитывать сопротивления аппаратуры и участков трубопровода, расположенных после редукционного клапана.

Таблица 2.2

	Наименование аппаратуры	Услов- ный про- ход, мм	Коэффициент сопротивления ζ
1	Трехходовой клапан В76-2	3	19,2
2	Трехходовой клапан В67-2	4	16,6
3	Воздухораспределители В74-1 и В74-1	4	12,4
4	Воздухораспределители В74-1 и В74-1	8	16,7
5	Воздухораспределители В74-6 и В74-6	4	12,4
6	Воздухораспределители В74-6 и В74-6	8	18,1
7	Воздухораспределители В79-11	4	12,4
8	Воздухораспределители В63-1	4	12,4
9	Воздухораспределители В63-1	8	18,1
10	Воздухораспределители В63-1 и В63-2	10, 15, 20	17,1
11	Воздухораспределители В54-1 и В64-2	10, 15, 20	17,1
12	Трехходовой клапан В76-2	3	19,2
13	Трехходовой клапан В67-2	4	16,6
14	Воздухораспределители В-74-1 и В74-2	4	12,4
15	Воздухораспределители В-74-1 и В74-2	8	16,7
16	Воздухораспределители В-74-7 и В74-6	4	12,4
17	Воздухораспределители В-74-7 и В74-6	8	18,1
18	Воздухораспределители В-79-11	4	12,4
19	Воздухораспределители В-63-1	4	12,4
20	Воздухораспределители В-63-1	10	18,1
21	Воздухораспределители В-63-1	15, 20	17,1
22	Воздухораспределители В-63-2	10, 15, 20	17,1
23	Воздухораспределители В-54-1	10, 15, 20	17,1
24	Воздухораспределители В-64-2	10, 15, 20	17,1
25	Дроссели с обратным клапаном В77-1	10	41,0
26	Дроссели с обратным клапаном В77-1	15	33,2
27	Фильтры В41-1	10	10,2
28	Фильтры В41-1	15	12,8

Рассмотрим случай, когда пневматическая линия состоит из трубопроводов и аппаратуры с разными диаметрами проходных сечений.

Выполним расчет расхода в пневматической линии, состоящей из двух линий разного проходного сечения. Расчетная схема приведена на рис. 2.6.

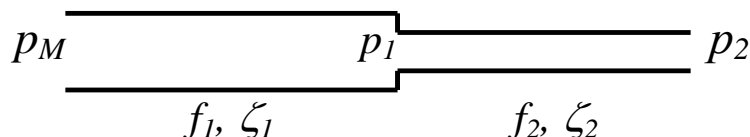


Рис. 2.6. Расчет сопротивления сложной линии

Обозначения на расчетной схеме следующие: f_1 и f_2 – проходные сечения трубопроводов и аппаратуры соответственно первой и второй линии, ζ_1 и ζ_2 – суммарные коэффициенты сопротивлений первой и второй линии. Дополнительное сопротивление в точке изменения диаметров учитывается в сопротивлении одной из линий.

Формулу для расчета расхода газа через сложную линию запишем следующим образом:

$$G = \frac{f}{\sqrt{\zeta}} \frac{p_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^2} = f_{\text{э}} \frac{p_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^2},$$

где $f_{\text{э}}$ – эффективная площадь проходного сечения всей сложной линии

$$f_{\text{э}} = \frac{f}{\sqrt{\zeta}}.$$

Выясним, какие значения площади f и сопротивления ζ необходимо подставить в эту формулу. Как видно из последнего уравнения, не важно, какую площадь f_1 или f_2 нужно подставить в формулу,

важно, чтобы эффективная площадь сложной линии $\frac{f}{\sqrt{\zeta}}$ была одной и той же.

Поэтому сложный трубопровод заменим одной пневматической линией, эквивалентной двум линиям с разными проходными сечениями.

Заменим, например, вторую линию с проходным сечением f_2 пневматической линией с проходным сечением, равным проходному сечению f_1 первой линии. Исходное значение эффективного сечения второй линии равно $\frac{f_2}{\sqrt{\zeta_2}}$. После замены этой линии ее сечение будет равно f_1 . Для того чтобы эффективная площадь второй линии оставалась без изменения, эта линия должна иметь новое значение сопротивления $\zeta_{2э}$, при котором ее эффективное сечение $\frac{f_1}{\sqrt{\zeta_{2э}}}$ останется прежним. Следовательно, должно выполняться следующее условие:

$$\frac{f_2}{\sqrt{\zeta_2}} = \frac{f_1}{\sqrt{\zeta_{2э}}}.$$

Отсюда найдем сопротивление трубопровода $\zeta_{2э}$:

$$\zeta_{2э} = \zeta_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2.$$

Определим суммарное сопротивление всей линии, которая теперь на обоих участках имеет одно и то же сечение f_1 :

$$\zeta_{1\Sigma} = \zeta_1 + \zeta_{2э} = \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 = \frac{\zeta_1 f_2^2 + \zeta_2 f_1^2}{f_2^2}.$$

Найдем расход через сложную линию, подставляя в формулу для вычисления расхода значения эквивалентного сечения f_1 для всей линии и суммарный коэффициент расхода ζ :

$$G = \frac{f_1}{\sqrt{\zeta_{1\Sigma}}} \frac{P_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{P_M} \right)^2} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{\zeta_1 f_2^2 + \zeta_2 f_1^2}} \frac{P_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{P_M} \right)^2}. \quad (2.15)$$

Теперь выполним расчет расхода той же сложной линии, заменив первую линию с проходным сечением f_1 линией с сечением f_2 .

Найдем новое значение сопротивления первой линии $\zeta_{1Э}$, при котором эффективное сечение этой линии не изменится. Это достигается при условии:

$$\frac{f_1}{\sqrt{\zeta_1}} = \frac{f_2}{\sqrt{\zeta_{1Э}}}.$$

Отсюда найдем сопротивление трубопровода $\zeta_{1Э}$:

$$\zeta_{1Э} = \zeta_1 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2.$$

Определим суммарное сопротивление всей линии, которая теперь на обоих участках имеет одно и то же сечение f_2 :

$$\zeta_{2\Sigma} = \zeta_{1Э} + \zeta_2 = \zeta_1 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2 + \zeta_2 = \frac{\zeta_1 f_2^2 + \zeta_2 f_1^2}{f_1^2}.$$

Найдем расход через сложную линию для этого случая, подставляя значения сечения f_2 для всей линии и суммарный коэффициент расхода ζ :

$$G = \frac{f_2}{\sqrt{\zeta_{2\Sigma}}} \frac{P_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{P_M} \right)^2} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{\zeta_1 f_2^2 + \zeta_2 f_1^2}} \frac{P_M}{\sqrt{RT_M}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{P_M} \right)^2}. \quad (2.16)$$

Сравнивая (2.15) и (2.16), видим, что результаты расчетов совпадают.

Таким образом, не имеет значения, какую площадь проходного сечения использовать для расчета сложных линий. Важно правильно вычислить новые значения коэффициентов сопротивления участков сложной линии, которые заменяем новым значением проходного сечения.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПНЕВМОПРИВОДОВ

При описании газодинамических процессов, происходящих в полости пневмоцилиндра, подводящих и отводящих трубопроводах, принимаем следующие допущения.

Газодинамические процессы рассматриваем как квазистационарные, протекающие при установившихся режимах течения. Температуру и давление воздуха в магистрали считаем постоянными. Утечками воздуха из полостей пневмоцилиндра пренебрегаем. Процесс течения газа в трубопроводах считаем изотермическим. Теплообменом в полостях пневмопривода пренебрегаем.

При расчетах типовых пневмоприводов характеристики подводящих и отводящих трубопроводов учитываются как дополнительные сопротивления, а объем трубопроводов при расчетах прибавляется к объемам соответствующих полостей привода.

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПНЕВМОПРИВОДА

Математическая модель пневмопривода представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающих движение исполнительного органа и изменение давлений в полостях исполнительного механизма. Таким образом, математическая модель пневмопривода включает следующие уравнения.

1. Уравнение движения исполнительного органа.
2. Уравнения изменения давлений в полости нагнетания.
3. Уравнения изменения давлений в выхлопной полости.

Расчетная схема пневмопривода представлена на рис.3.1.

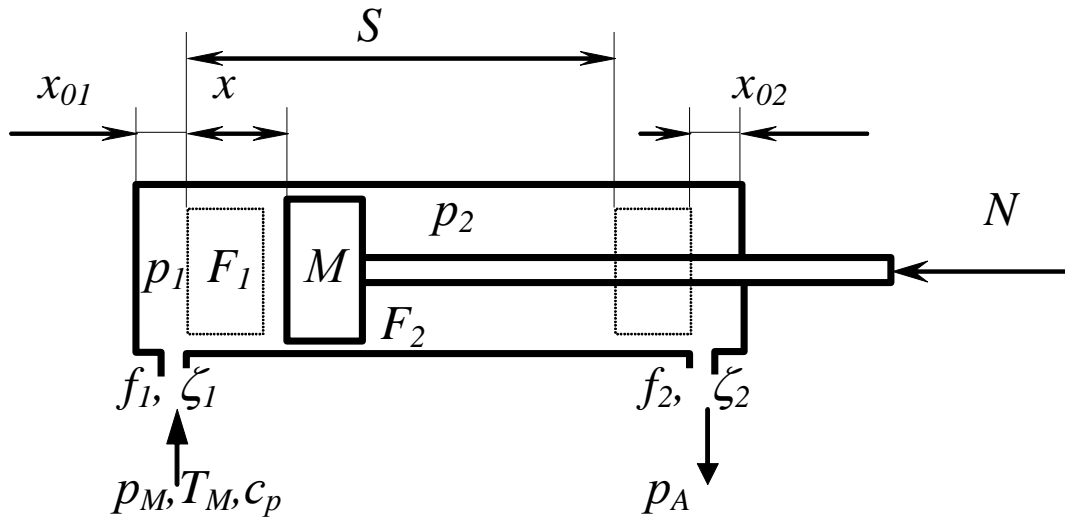


Рис.3.1. Расчетная схема пневмопривода

1. Уравнение движения привода имеет вид:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N. \quad (3.1)$$

2. Выведем уравнение, описывающее изменение давления P_1 в полости нагнетания.

В соответствии с первым законом термодинамики количество энергии dQ_M , поступающей с газом в полость нагнетания из магистрали, идет на изменение внутренней энергии газа dU_1 в полости и на совершение работы привода dL , т.е.

$$dQ_M = dU_1 + dL, \quad (3.2)$$

Количество энергии dQ_M , поступающей с элементарной массой газа dm , определяется выражением

$$dQ_M = q dm, \quad (3.3)$$

где q – удельная энергия поступающего в полость газа.

Как известно из термодинамики, удельная энергия газа q определяется его теплосодержанием – энтальпией i , которая связана с удельной теплоемкостью c_p и температурой газа в магистрали T_M следующей зависимостью:

$$q = i = c_p T_M. \quad (3.4)$$

Элементарную массу газа dm выразим через расход G_M :

$$dm = G_M dt. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в уравнение (3.3), найдем количество энергии, которая поступает в полость нагнетания,

$$dQ_M = c_p T_M G_M dt. \quad (3.6)$$

Уравнение изменения внутренней энергии газа имеет вид

$$dU_I = d(c_v T_I m_I) = c_v d(T_I m_I), \quad (3.7)$$

где c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, T_I – температура газа в полости нагнетания, m_I – масса газа в полости нагнетания.

Масса газа в полости определяется величиной плотности ρ_I и объема полости V_I :

$$m_I = \rho_I V_I. \quad (3.8)$$

Тогда, подставляя (3.8) в уравнение (3.7) получим следующее выражение для определения изменения внутренней энергии газа dU_I в полости:

$$dU_I = d(c_v T_I m_I) = c_v d(T_I \rho_I V_I). \quad (3.9)$$

Преобразуем уравнение (3.9) с целью сокращения числа переменных. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева имеем:

$$p_1/\rho_1 = RT_1,,$$

откуда найдем произведение $T_1\rho_1$, входящее в уравнение (3.9):

$$T_1\rho_1 = p_1/R. \quad (3.10)$$

Тогда, подставляя (3.10) в уравнение (3.9), получим уравнение с меньшим числом переменных, чем (3.9):

$$dU = \frac{c_v}{R} d(p_1 V_1).$$

Дифференцируя это выражение, окончательно получим

$$dU = \frac{c_v}{R} p_1 dV_1 + \frac{c_v}{R} V_1 dp_1. \quad (3.11)$$

Найдем работу, совершаемую газом:

$$dL_1 = p_1 dV_1. \quad (3.12)$$

Подставляя значения слагаемых (3.6), (3.11), (3.12) в исходное уравнение (3.2), получим:

$$c_p T_M G_M dt = c_v/R p_1 dV_1 + c_v/R V_1 dp_1 + p_1 dV_1$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$c_p T_M G_M dt = p_1 (c_v/R + 1) dV_1 + c_v/R V_1 dp_1. \quad (3.13)$$

Удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме связаны между собой следующей зависимостью:

$$c_V + R = c_p \quad (3.14)$$

Подставляя уравнение (3.14) в (3.13) после преобразований получим:

$$c_p T_M G_M dt = c_p/R p_1 dV_1 + c_V/R V_1 dp_1.$$

Умножим все члены уравнения на R и разделим на c_V , имея в виду, что $c_p/c_V = k = 1,4$ – показатель адиабаты для воздуха. Окончательно получим:

$$kRT_M G_M dt = k p_1 dV_1 + V_1 dp_1. \quad (3.15)$$

Найдем выражения для составляющих членов этого уравнения. Объем полости нагнетания V_1 состоит из рабочего (переменного) объема рабочей полости V_{1P} пневмоцилиндра и начального (постоянного) объема V_{01} пневмопривода:

$$V_1 = V_{1P} + V_{01}. \quad (3.16)$$

Рабочий объем полости нагнетания V_{1P} выразим через площадь поршня F_1 в полости нагнетания и координату x :

$$V_{1P} = F_1 x. \quad (3.17)$$

Начальный объем V_{01} включает конструктивный объем полости нагнетания в крайнем положении поршня и объем подводящей линии, состоящий из объемов трубопровода и подключенной пневмоаппаратуры.

Начальный объем V_{01} подводящей линии можем записать, как принято в некоторых работах [3], следующим образом:

$$V_{01} = F_1 x_{01}, \quad (3.18)$$

где x_{01} – приведенная начальная координата положения поршня.

Окончательно, подставляя (3.17) и (3.18) в уравнение (3.16),

найдем объем полости нагнетания V_I

$$V_I = F_I (x + x_{0I}) . \quad (3.19)$$

Формула для расчета расхода газа, поступающего в полость нагнетания, зависит от характера процесса.

В пневматических промышленных приводах течение газа близко к изотермическому процессу [2]. Поэтому расход газа определим из уравнения (2.13), которое запишем в следующем виде, имея в виду, что $\sigma = p/p_M$:

$$G_M = K_1 \sqrt{p_M^2 - p_1^2} , \quad (3.20)$$

где

$$K_1 = \frac{f_1}{\sqrt{RT_M \zeta_1}} .$$

Подставляя значения V_I и G_M из (3.19) и (3.20) в исходное уравнение (3.15), после преобразований получим уравнение изменения давления в полости нагнетания привода:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 (x + x_{0I}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{k p_1}{x + x_{0I}} \frac{dx}{dt} .$$

Выполним анализ уравнения. Если скорость равна нулю ($dx/dt = 0$), то получим уравнение, которое описывает процесс наполнения постоянного объема:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 (x + x_{0I}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2}$$

Если перекрыть отверстие, т.е. $f_I = 0$, то получим уравнение, описывающее адиабатический процесс изменения давления в полости пневмоцилиндра:

$$\frac{dp_1}{dt} = - \frac{k p_1}{x + x_{0I}} \frac{dx}{dt}$$

3. Выведем уравнение изменения давления газа в выхлопной полости.

Количество энергии dQ_2 , вытекающей с газом из выхлопной полости, идет на изменение внутренней энергии газа dU_2 в полости и на совершение работы привода dL_2 .

$$-dQ_2 = dU_2 + dL_2. \quad (3.21)$$

Найдем выражения для определения составляющих уравнения (3.21).

Аналогично выводам уравнений для полости нагнетания найдем уравнение для определения количества энергии dQ_2 , вытекающей с газом из выхлопной полости:

$$dQ_2 = c_p T_2 dm_2 = c_p T_2 G_2 dt. \quad (3.22)$$

Уравнение изменения внутренней энергии газа имеет вид

$$dU_2 = d(c_v T_2 m_2) = c_v d(T_2 \rho_2 V_2). \quad (3.23)$$

Согласно уравнению Клапейрона – Менделеева

$$p_2 / \rho_2 = RT_2,$$

откуда найдем

$$T_2 \rho_2 = p_2 / R. \quad (3.24)$$

Тогда, подставляя (3.24) в уравнение (3.23), получим

$$dU_2 = c_v d(V_2 p_2 / R) = c_v / R p_2 dV_2 + c_v / R V_2 dp_2 \quad (3.25)$$

Определим составляющую dL_2 в уравнении (3.21). В выхлопной полости, как правило, работа dL_2 связана с сжатием газа в поло-

сти и определяется уравнением

$$dL_2 = p_2 dV_2. \quad (3.26)$$

Подставляя значения слагаемых (3.22), (3.25) и (3.26) в исходное уравнение (3.21), и имея в виду, что $c_v + R = c_p$, после преобразований получим:

$$-kRT_2 G_2 dt = kp_2 dV_2 + V_2 dp_2. \quad (3.27)$$

Объем газа в выхлопной полости с учетом объема отводящего трубопровода и пневмоаппаратуры равен:

$$V_2 = (S + x_{02} - x)F_2. \quad (3.28)$$

Истечение газа из выхлопной полости по трубопроводу близко к изотермическому процессу. Поэтому расход определим из упрощенного уравнения, соответствующего изотермическому истечению газа:

$$G_2 = K_2 \sqrt{P_2^2 - P_A^2}, \quad (3.29)$$

где

$$K_2 = \frac{f_2}{\sqrt{RT_2 \zeta_2}}.$$

Подставляя значения V_2 и G_2 из (3.28) и (3.29) в уравнение (3.27), после преобразований получим следующее уравнение изменения давления в выхлопной полости:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{kf_2 \sqrt{RT_2}}{F_2 (S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{kp_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}. \quad (3.30)$$

При отсутствии теплообмена изменение состояния газа в выхлопной полости происходит по адиабатическому закону, поэтому температуру T_2 в уравнении выразим через давление P_2 из уравнения адиабатического процесса:

$$T_2 = T_M \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (3.31)$$

Подставляя (3.31) в уравнение (3.30), окончательно получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее изменение давления газа в выхлопной полости

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{kp_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}.$$

Выполним анализ уравнения.

Если скорость равна нулю ($dx/dt = 0$), то получим уравнение, которое описывает процесс истечения из полости постоянного объема:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2}$$

Если перекрыть отверстие $f_2 = 0$, то получим уравнение, описывающее адиабатический процесс в полости пневмоцилиндра:

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{kp_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}.$$

Координата положения поршня x изменяется в диапазоне от 0 до S , т.е. поршень в пневмоцилиндре перемещается от упора до упора. Это ограничение необходимо отразить в математической модели.

Формальное решение системы дифференциальных уравнений, описывающих движение пневмопривода без учета этих ограничений, приводит к абсурдным результатам. Рассмотрим, что будет происходить с пневмоприводом при следующих начальных условиях:

$$p_1 = p_A, \quad p_2 = p_M.$$

Подставляя значения давлений p_1 и p_2 в уравнение движения привода, получим

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = p_A F_1 - p_M F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N = -(p_M - p_A) F_2 - N < 0$$

Это значит, в начальный момент времени поршень начинает двигаться с отрицательным ускорением, т.е. привод, в соответствии с расчетной схемой на рис.3.1, должен начать движение влево, хотя фактически слева поршень упирается в крышку пневмоцилиндра. В результате при формальном решении уравнений скорость поршня и координата x станут отрицательными, что не соответствует действительности. При этом, объем полости нагнетания через некоторое время также примет отрицательное значение, что также физически не возможно.

В действительности до момента начала движения привода ускорение, скорость и координата поршня равны нулю. Поэтому необходимо дополнить математическую модель пневмопривода соответствующими логическими условиями, что принципиально важно при составлении программы расчета переходных процессов в пневмоприводе на компьютере. В данном случае эти условия можно выразить следующим образом.

Если пневмоцилиндр находится в крайнем левом положении, то в программе необходимо сразу после вычисления ускорения искусственно задавать ускорение, скорость движения и координату равными нулю, т.е. к полученным уравнениям математической модели пневмопривода необходимо добавить условие:

$$\text{если } x \leq 0, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = x = 0.$$

Аналогично и для случая, когда поршень доходит до конца в крайнем правом положении, надо записать условие, ограничивающее координату x длиной хода привода S :

$$\text{если } x \geq S, \text{ то } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = x = 0.$$

Окончательно математическая модель типового пневмопривода имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{k f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 (x + x_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{k p_1}{x + x_{01}} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= - \frac{k f_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x - x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{k p_2}{(S - x - x_{02})} \frac{dx}{dt}, \\ \text{если } x \leq 0, \text{ то } \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0, \\ \text{если } x \geq S, \text{ то } \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0. \end{aligned} \right\} (3.32)$$

Математическая модель пневмопривода (3.32) может быть дополнена еще условиями, которые будут зависеть от силы сопротивления N .

В общем случае эта сила представляет собой сумму сил, включающих полезную нагрузку, силу сухого и вязкого трения поршня, силу сопротивления демпфера. Кроме того, необходимо учесть, что составляющие силы трения зависят от знака скорости.

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПНЕВМОПРИВОДА С ТОРМОЖЕНИЕМ ПУТЕМ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЫХЛОПНОЙ ЛИНИИ

Напишем уравнения математической модели пневмопривода при торможении его путем уменьшения проходного сечения выхлопной линии. Пусть торможение начинается, как только поршень достигает некоторого заданного значения координаты x_T . В этот момент происходит изменение площади проходного сечения линии на выхлопе. В общем случае в математической модели можно изменять как площадь сечения выхлопной линии f_2 , так и коэффициент ее сопротивления ζ_2 на некоторые новые значения f_{2T} и ζ_{2T} соответственно.

Уравнение движения привода и уравнение изменения давления воздуха в полости нагнетания остаются, как и в предыдущей математической модели.

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 (x + x_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{k p_1}{x + x_{01}} \frac{dx}{dt}.$$

Изменение давления в выхлопной полости в период разгона и движения до начала торможения также можно описать полученным ранее уравнением:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k f_2 \sqrt{RT_2}}{F_2 (S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{k p_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}.$$

Однако, как только привод достигает значения координаты x_T , в этом уравнении площадь проходного сечения линии и (или) коэффициент ее сопротивления изменяются, т.е. уравнение будет иметь аналогичный вид, но с другими параметрами выхлопной линии:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{kf_{2T}\sqrt{RT_2}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2T}}}\sqrt{p_2^2-p_A^2} + \frac{kp_2}{(S-x+x_{02})}\frac{dx}{dt}.$$

Оба эти уравнения можем объединить в одно уравнение, используя логические коэффициенты H_P и H_T :

$$\frac{dp_2}{dt} = -\left(\frac{f_2}{\sqrt{\zeta_2}}H_P + \frac{f_{2T}}{\sqrt{\zeta_{2T}}}H_T\right)\frac{k\sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})}\left(\frac{p_2}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_2^2-p_A^2} + \frac{kp_2}{(S-x+x_{02})}\frac{dx}{dt}, \quad (3.33)$$

где f_2 и f_{2T} – площадь проходного сечения выхлопной линии при разгоне и торможении соответственно, ζ_2 и ζ_{2T} – коэффициенты сопротивления выхлопной линии при разгоне и торможении соответственно, H_P (разгон) и H_T (торможение) – коэффициенты управления, которые удовлетворяют условию:

$$\left. \begin{aligned} H_P &= \begin{cases} 1, & \text{если } x < x_T; \\ 0, & \text{если } x \geq x_T; \end{cases} \\ H_T &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq x_T; \\ 0, & \text{если } x < x_T. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

При составлении программы удобно воспользоваться готовыми функциями, входящими в программное обеспечение. Так, например, чтобы записать приведенные выше логические условия математическими зависимостями, воспользуемся функцией Хэвисайда. Значение функции Хэвисайда $\Phi(\tau)$ зависит от величины переменной τ и принимает два значения: 0 или 1:

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau > 0; \\ 0, & \text{если } \tau \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, используя функцию Хэвисайда, уравнение изменения давления в выхлопной полости с учетом логических выражений (3.33) можно записать следующим образом:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \left[\frac{f_2}{\sqrt{\zeta_2}} \Phi(x_T - x) + \frac{f_{2T}}{\sqrt{\zeta_{2T}}} \Phi(x - x_T) \right] \frac{k\sqrt{RT_M}}{F_2(S - x + x_{02})} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{kp_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}$$

В переходных процессах возможен отскок поршня в обратную сторону. В этом случае давление в полости нагнетания за счет компрессии может вырасти до величины, большей давления питания. Поэтому начинается процесс истечения воздуха из полости нагнетания через регулятор давления в атмосферу. При этом регулятор давления поддерживает постоянную величину давления p_M . Следовательно, при расчетах можно считать, что выхлоп в таких ситуациях происходит не в атмосферу, а в среду с давлением p_M , т.е., условно говоря, в магистраль. Для учета этого явления необходимо добавить дополнительное слагаемое во втором уравнении математической модели пневмопривода (3.32), которое учитывает процесс истечения из рабочей полости. Поэтому уравнение изменения давления в полости нагнетания будет иметь вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = H_1 \frac{kf_1\sqrt{RT_M}}{F_1(x + x_{01})\sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - H_M \frac{kf_{1M}\sqrt{RT_M}}{F_1(x + x_{01})\sqrt{\zeta_{1M}}} \left(\frac{p_1}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_1^2 - p_M^2} - \frac{kp_1}{x + x_{01}} \frac{dx}{dt}, \quad (3.35)$$

где f_1 и f_{1M} – площадь проходного сечения трубопровода полости нагнетания при ее наполнении и истечении в магистраль соответственно, ζ_1 и ζ_{1M} – коэффициенты сопротивления линий нагнетания при наполнении полости нагнетания и при истечении в магистраль соответственно, H_1 и H_M – коэффициенты управления, которые удовлетворяют условию:

$$H_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } p_1 < p_M; \\ 0, & \text{если } p_1 \geq p_M. \end{cases} \quad (3.36)$$

$$H_M = \begin{cases} 1, & \text{если } p_1 \geq p_M; \\ 0, & \text{если } p_1 < p_M. \end{cases}$$

Вместо использования коэффициентов управления (3.36) можем

записать уравнение изменения давления в полости нагнетания (3.35), используя функцию Хэвисайда:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} = & \frac{kf_1\sqrt{RT_M}}{F_1(x+x_{01})\sqrt{\zeta_1}}\sqrt{p_M^2-p_1^2}\Phi(p_M-p_1)- \\ & -\frac{kf_{1M}\sqrt{RT_M}}{F_1(x+x_{01})\sqrt{\zeta_{1M}}}\left(\frac{p_1}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_1^2-p_M^2}\Phi(p_1-p_M)-\frac{kp_1}{x+x_{01}}\frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Чтобы исключить сбой в программе при вычислении корней из отрицательных чисел в некоторых случаях рекомендуется вычислять абсолютные значения подкоренных выражений.

Таким образом, окончательно получим следующую математическую модель пневмопривода, торможение которого осуществляется изменением проходного сечения выхлопной линии и начинается в заданной точке x_T :

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A(F_1 - F_2) - N, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{kf_1\sqrt{RT_M}}{F_1(x+x_{01})\sqrt{\zeta_1}}\sqrt{p_M^2-p_1^2}\Phi(p_M-p_1)- \\ & -\frac{kf_{1M}\sqrt{RT_M}}{F_1(x+x_{01})\sqrt{\zeta_{1M}}}\left(\frac{p_1}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_1^2-p_M^2}\Phi(p_1-p_M)-\frac{kp_1}{x+x_{01}}\frac{dx}{dt}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\left[\frac{f_2}{\sqrt{\zeta_2}}\Phi(x-x_T)+\frac{f_{2T}}{\sqrt{\zeta_{2T}}}\Phi(x_T-x)\right]\frac{k\sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})}\left(\frac{p_2}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\sqrt{p_2^2-p_A^2}+ \\ & +\frac{kp_2}{(S-x+x_{02})}\frac{dx}{dt}, \\ \text{если } x \leq 0, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0, \\ \text{если } x \geq S, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0. \end{aligned} \right\} (3.37)$$

3.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПНЕВМОПРИВОДА ПРИ ТОРМОЖЕНИИ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ ТОРМОЗНЫХ УСТРОЙСТВ

Торможение пневмопривода может осуществляться с применением внешних тормозных устройств: механических, пневматических и гидравлических. Во всех этих случаях уравнение движения пневмопривода будет иметь одинаковый вид:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N(t).$$

И лишь в зависимости от способа торможения в уравнении движения будет изменяться слагаемое $N(t)$, учитывающее создаваемое при торможении усилие.

Для учета режима торможения необходимо добавить условие, при котором начинает действовать тормозное усилие.

Если до момента торможения на пневмопривод действовала некоторая постоянная нагрузка N , а при достижении приводом некоторой координаты x_T начинает действовать новая постоянная или переменная нагрузка $N(t)$, создаваемая демпфером, то уравнение изменение нагрузки можно записать следующим образом:

$$N(t) = H_P N_P + H_T N_T(t).$$

где H_P и H_T – коэффициенты, которые удовлетворяют условию:

$$H_P = \begin{cases} 1, & \text{если } x < x_T; \\ 0, & \text{если } x \geq x_T; \end{cases}$$
$$H_T = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq x_T; \\ 0, & \text{если } x < x_T. \end{cases}$$

Тогда уравнение движения привода будет описываться следую-

щей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A(F_1 - F_2) - H_P N_P - H_T N_T(t), \\ H_P &= \begin{cases} 1, & \text{если } x < x_T; \\ 0, & \text{если } x \geq x_T; \end{cases} \\ H_T &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq x_T; \\ 0, & \text{если } x < x_T. \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

С использованием функции Хэвисайда уравнение движения можем записать следующим образом:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A(F_1 - F_2) - N\Phi(x_T - x) - N(t)\Phi(x - x_T),$$

Таким образом, окончательно математическая модель пневмопривода с торможением с помощью внешних тормозных устройств будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A(F_1 - F_2) - N\Phi(x_T - x) - N(t)\Phi(x - x_T), \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{kf_1 \sqrt{RT_M}}{F_1(x + x_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{kp_1}{x + x_{01}} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{F_2(S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{kp_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}, \\ \text{если } x \leq 0, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0, \\ \text{если } x \geq S, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0. \end{aligned} \right\} (3.38)$$

3.4. ТОРМОЖЕНИЕ ПНЕВМОПРИВОДА С ПОМОЩЬЮ ВСТРОЕННОГО ПНЕВМОДЕМПФЕРА

В конструкциях современных пневмоприводов используется встроенный пневмодемпфер.

Вариант пневмодемпфирования показан на рис.3.2.

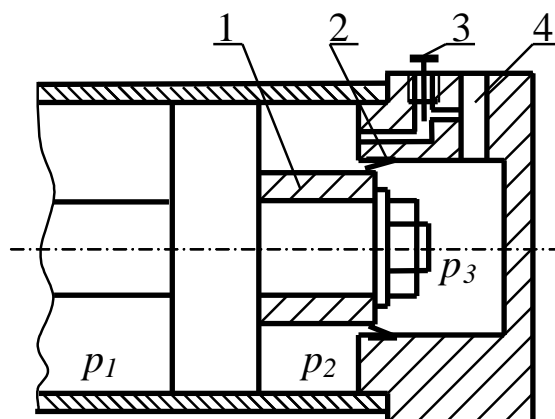


Рис.3.2. Конструктивная схема пневмодемпфера

Работа пневматического демпфера происходит следующим образом. Первоначально воздух из полости выходит через выхлопное отверстие 4. В конце хода в момент начала торможения втулка 1 входит в стакан с резиновым уплотнением 2 и перекрывает выходное отверстие 4. В результате начинается его медленное истечение через регулируемый игольчатый дроссель 3. Отсеченный втулкой воздух сжимается, благодаря чему происходит торможение поршня. Настройка режима торможения осуществляется дросселем 3.

При движении поршня в обратном направлении уплотнение 2 демпфера отжимается воздухом, поступающим из отверстия 4 (работает как обратный клапан), обеспечивая проход воздуха к поршню.

Уплотнение 2 ограничивает расход воздуха и замедляет движение поршня в начале обратного хода, поэтому рабочий ход демпфера должен быть как можно короче.

При очень больших инерционных нагрузках или высоких скоростях перемещения поршня применяют еще и наружный демпфер.

3.5. ТОРМОЖЕНИЕ ПНЕВМОПРИВОДА ПОЗИЦИОННОГО ТИПА

При создании пневмоприводов с позиционным управлением требуется обеспечить остановку пневмопривода в любой точке по длине хода. Для обеспечения торможения и остановки в этих случаях используется специальный пневматический тормоз.

В пневматическом цилиндре вместо стандартной торцевой крышки устанавливается тормозное устройство. Оно позволяет фиксировать шток в любом положении.

Конструктивная схема фиксатора изображена на рис.3.3.

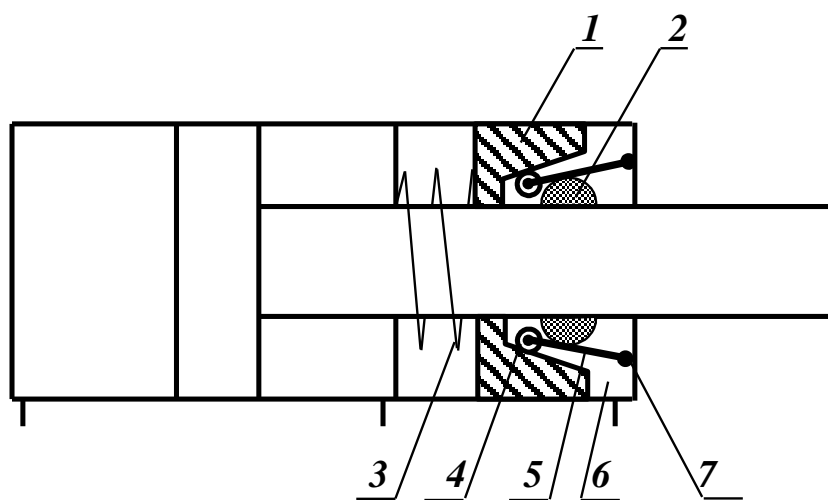


Рис.3.3. Конструктивная схема фиксатора

Принцип действия фиксатора следующий. При отсутствии давления в полости 6 тормозного устройства тормозной поршень 1 под действием пружины 3 выдвигается и за счет выполненной в нем плоскости клина давит через ролик 4 на зажимной рычаг 5. Зажимной рычаг, поворачиваясь вокруг неподвижного шарнира 7, прижимает тормозной башмак 2 к штоку.

Удерживающая сила превышает усилие на поршне при максимально допустимом рабочем давлении. Такая конструкция позволяет

надежно фиксировать шток даже в случае внезапного падения давления в сети.

При подаче давления воздуха в полость 6 тормозной поршень смещается и освобождает зажимной рычаг.

В настоящее время пневмоцилиндры с тормозом выпускаются серийно различными фирмами. Например, фирма Festo выпускает пневмоцилиндр двустороннего действия с тормозом. Вид такого пневмоцилиндра показан на рис.3.4.



Рис.3.4. Пневмоцилиндр с пневматическим тормозом

В тех случаях, когда торможение тормозом вызывает большие инерционные нагрузки или когда требуется обеспечить высокую точность позиционирования, перед срабатыванием тормоза необходимо снизить скорость привода до некоторой минимальной (ползучей) скорости. Снижение скорости за счет дросселирования выхлопной линии в этих случаях часто оказывается неэффективным. Для этого используется способ торможения подачей противодавления в выхлопную полость или же специальные тормозные пневмоклапана.

3.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПНЕВМОПРИВОДА ПРИ ТОРМОЖЕНИИ ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ

Для обеспечения плавной остановки в заданной точке пневмопривод должен уменьшить скорость до некоторой минимальной стабильной скорости.

Снижение скорости можно обеспечить разными способами. Рассмотрим способ уменьшения скорости пневмопривода методом противодействия, т.е. подключением выхлопной полости к линии с некоторой постоянной величиной противодействия. В результате воздух из выхлопной линии будет выходить не в атмосферу, а в среду с повышенным давлением.

Снижение скорости подачи противодействия начинается, как только поршень достигает заданного значения координаты x_T . До этого момента в выхлопной полости происходит истечение газа в атмосферу. Поэтому математическая модель до этого момента может быть представлена полученными ранее уравнениями.

Движение привода и изменение давления воздуха в полости нагнетания на протяжении всего периода движения и торможения описываются так же, как и в математической модели типового пневмопривода (3.32).

Изменение давления в выхлопной полости до начала торможения также описывается ранее полученным уравнением:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{kf_2\sqrt{RT_2}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_2}}\sqrt{p_2^2-p_A^2} + \frac{kp_2}{(S-x+x_{02})}\frac{dx}{dt}. \quad (3.39)$$

Рассмотрим, какие процессы протекают в выхлопной полости при торможении. В режиме снижения скорости противодействием возможны два принципиально противоположных газодинамических процесса. Если давление в выхлопной полости P_2 меньше величины противодействия P_{M2} , т.е. $P_2 < P_{M2}$, то происходит наполнение этой полости. В этом случае уравнение изменения давления в выхлопной

полости будет иметь вид

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{kf_{2H}\sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2H}}} \sqrt{p_{M2}^2 - p_2^2} + \frac{kp_2}{S-x+x_{02}} \frac{dx}{dt}, \quad (3.40)$$

где p_{M2} – величина настройки редукционного пневмоклапана, подающего давление (противодавление) в выхлопную полость, f_{2H} и ζ_{2H} – площадь проходного сечения выхлопной линии и ее сопротивление в режиме нагнетания противодавлением.

В случае, если в выхлопной полости давление больше величины противодавления, т.е. $p_2 > p_{M2}$, то происходит истечение газа через редукционный клапан с давлением p_{M2} . В конечном счете, редукционный клапан выпускает воздух в атмосферу. Будем считать, что при этом клапан поддерживает постоянную величину противодавления. Поэтому в математической модели считаем, что выхлоп происходит в среду с давлением p_{M2} . В этом случае уравнение изменения давления в выхлопной полости будет иметь вид:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{kf_{2B}\sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2B}}} \left(\frac{p_M}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_{M2}^2} + \frac{kp_2}{S-x+x_{02}} \frac{dx}{dt}, \quad (3.41)$$

где f_{2B} и ζ_{2B} – площадь проходного сечения выхлопной линии и ее сопротивление в режиме выпуска воздуха через редукционный пневмоклапан. Причем, ζ_{2B} – сопротивление линии между полостью и редукционным клапаном.

Таким образом, на протяжении всего периода движения привода процессы в выхлопной полости описываются уравнениями (3.39), (3.40) и (3.41).

Чтобы объединить все три уравнения, описывающие разные процессы в выхлопной полости, введем коэффициенты управления, которые принимают значения 0 или 1, в зависимости от того, какое слагаемое используется:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_2}{dt} = & -H_B \frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{F_2(S-x-x_{02})\sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \\
& + H_{HM2} \frac{kf_{2H} \sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2H}}} \sqrt{p_{M2}^2 - p_2^2} - \\
& - H_{BM2} \frac{kf_{2B} \sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2B}}} \left(\frac{p_2}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_{M2}^2} + \\
& + \frac{kp_2}{(S-x+x_{02})} \frac{dx}{dt},
\end{aligned}$$

где коэффициенты управления определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned}
H_B &= \begin{cases} 1, & \text{если } x < x_T; \\ 0, & \text{если } x \geq x_T; \end{cases} \\
H_{HM2} &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq x_T \text{ и } p_2 < p_{M2}; \\ 0, & \text{если } x < x_T \text{ или } x \geq x_T \text{ и } p_2 \geq p_{M2}; \end{cases} \\
H_{BM2} &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq x_T \text{ и } p_2 \geq p_{M2}; \\ 0, & \text{если } x < x_T \text{ или } x \geq x_T \text{ и } p_2 < p_{M2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Вместо использования логических функций можно воспользоваться функцией Хэвисайда. Тогда уравнение изменения давления в выхлопной полости будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_2}{dt} = & - \frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{F_2(S-x-x_{02})\sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} \Phi(x_T - x) + \\
& + \frac{kf_{2H} \sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2H}}} \sqrt{p_{M2}^2 - p_2^2} \Phi(x - x_T) \Phi(p_{M2} - p_2) - \\
& - \frac{kf_{2B} \sqrt{RT_M}}{F_2(S-x+x_{02})\sqrt{\zeta_{2B}}} \left(\frac{p_2}{p_M}\right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_{M2}^2} \Phi(x - x_T) \Phi(p_2 - p_{M2}) + \\
& + \frac{kp_2}{(S-x+x_{02})} \frac{dx}{dt}.
\end{aligned}$$

Окончательно получим следующую математическую модель пневмопривода с торможением противодавлением:

$$\left. \begin{aligned}
 M \frac{d^2 x}{dt^2} &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N, \\
 \frac{dp_1}{dt} &= \frac{k f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 (x + x_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{k p_1}{x + x_{01}} \frac{dx}{dt}, \\
 \frac{dp_2}{dt} &= - \frac{k f_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x - x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} \Phi(x_T - x) + \\
 &\quad + \frac{k f_{2H} \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_{2H}}} \sqrt{p_{M2}^2 - p_2^2} \Phi(x - x_T) \Phi(p_{M2} - p_2) - \\
 &\quad - \frac{k f_{2B} \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x + x_{02}) \sqrt{\zeta_{2B}}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_{M2}^2} \Phi(x - x_T) \Phi(p_2 - p_{M2}) + \\
 &\quad + \frac{k p_2}{(S - x + x_{02})} \frac{dx}{dt}, \\
 \text{если } x \leq 0, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0, \\
 \text{если } x \geq S, \text{ то } \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} = x = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.42)$$

Чтобы исключить сбой в программе при вычислении корней из отрицательных чисел, рекомендуется вычислять абсолютные значения подкоренных выражений.

Для того чтобы учесть срабатывание фиксатора, в математической модели (3.42) необходимо написать уравнения, описывающие изменение силы N в уравнении движения.

Пример построения программы расчета переходных процессов в пневмоприводе с торможением подачи противодавления и графики переходного процесса приведены в Приложении.

3.7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВОРОТНОГО ПНЕВМОПРИВОДА

Рассмотрим вывод уравнений математической модели поворотного пневмопривода, расчетная схема которого приведена на рис. 3.5.

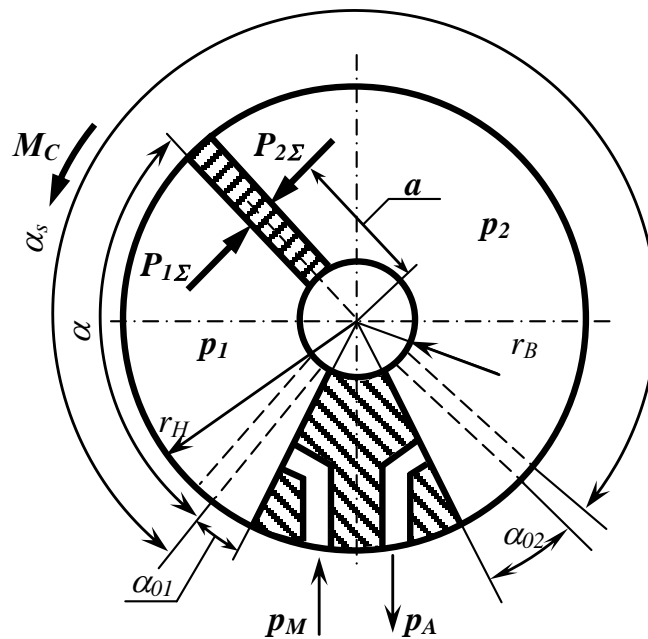


Рис.3.5. Расчетная схема поворотного пневмопривода

Уравнение движение поворотного привода имеет вид

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_1 - M_2 - M_c, \quad (3.43)$$

где, J – момент инерции подвижных частей привода; α – угол поворота лопасти (см. рис. 3.5); M_1 и M_2 – моменты результирующих сил $P_{1\Sigma}$ и $P_{2\Sigma}$ от давлений воздуха p_1 и p_2 соответственно в полости нагнетания и выхлопной полости; M_c – статический момент сопротивления (нагрузка).

Найдем момент, создаваемый давлением в полости нагнетания поворотного пневмопривода:

$$M_1 = P_{1\Sigma} a, \quad (3.44)$$

где a – плечо силы $P_{1\Sigma}$.

Определим суммарную силу $P_{1\Sigma}$, создаваемую давлением воздуха

$$P_{1\Sigma} = p_1 F, \quad (3.45)$$

где p_1 – давление в полости нагнетания, F_1 – рабочая площадь лопасти, которая определяется в соответствии с расчетной схемой на рис.3.5 по формуле:

$$F_1 = (r_H - r_B)h,$$

где $(r_H - r_B)$ – высота лопасти, h – ширина лопасти (в направлении, перпендикулярном рисунку).

Тогда

$$P_{1\Sigma} = p_1 (r_H - r_B)h. \quad (3.46)$$

Плечо силы a определим как расстояние от оси вращения лопасти до середины лопасти:

$$a = r_B + \frac{r_H - r_B}{2} = \frac{r_H + r_B}{2} \quad (3.47)$$

Подставляя значения для $P_{1\Sigma}$ и a из (3.46) и (3.47) в исходное уравнение (3.44), получим следующее выражение для вычисления момента M_1 :

$$M_1 = p_1 \frac{r_H^2 - r_B^2}{2} h.$$

Обозначим

$$K_v = \frac{(r_H^2 - r_B^2)h}{2}.$$

Тогда получим

$$M_1 = K_v p_1. \quad (3.48)$$

Аналогично получим зависимость для расчета момента M_2 :

$$M_2 = K_v p_2 \quad (3.49)$$

Подставляя (3.48) и (3.49) в уравнение (3.43), получим

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = K_v (p_1 - p_2) - M_c. \quad (3.50)$$

Для вывода уравнения изменения давления в полости нагнетания воспользуемся ранее полученным уравнением, отражающим 1-й закон термодинамики:

$$kRT_M G_M dt = k p_1 dV_1 + V_1 dp_1, \quad (3.51)$$

где расход G_M вычисляется по формуле

$$G_M = \frac{f_1}{\sqrt{RT_M \zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} \quad (3.52)$$

Найдем выражение для вычисления объема полости нагнетания V_1 .

Объем V_1 равен произведению площади $F_{\alpha 1}$ сектора с углом $\alpha + \alpha_{01}$ на ширину лопасти h .

$$V_1 = F_{\alpha 1} h \quad (3.53)$$

где площадь сектора $F_{\alpha 1}$ в соответствии с расчетной схемой на рис.3.5 будет равна

$$F_{\alpha 1} = \pi(r_H^2 - r_B^2) \frac{\alpha + \alpha_{01}}{2\pi} \quad (3.54)$$

где α_{01} – приведенная начальная угловая координата, характеризующая объем вредного пространства.

Подставляя (3.54) в уравнение (3.53), найдем объем полости нагнетания

$$V_1 = \pi(r_H^2 - r_B^2) \frac{\alpha + \alpha_{01}}{2\pi} h = \frac{(r_H^2 - r_B^2)h}{2} (\alpha + \alpha_{01}) = K_V (\alpha + \alpha_{01}). \quad (3.55)$$

Подставляя значения (3.55) и (3.52) в уравнение (3.51), после преобразований получим уравнение изменения давления в полости нагнетания привода:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{kf_1 \sqrt{RT_M}}{K_1 (\alpha + \alpha_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{kp_1}{\alpha + \alpha_{01}} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.56)$$

Для вывода уравнения изменения давления в выхлопной полости воспользуемся также ранее полученным уравнением (3.27):

$$-kRT_2 G_2 dt = kp_2 dV_2 + V_2 dp_2, \quad (3.57)$$

где

$$G_2 = \frac{f_2}{\sqrt{RT_2 \zeta_2}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2}. \quad (3.58)$$

Найдем объем выхлопной полости:

$$V_2 = F_{\alpha 2} h,$$

где площадь сектора $F_{\alpha 2}$ в соответствии с рис. 3.5 будет равна

$$F_{\alpha 2} = \pi(r_H^2 - r_B^2) \frac{\alpha_S - \alpha + \alpha_{02}}{2\pi}.$$

Тогда объем выхлопной полости

$$V_2 = \pi(r_H^2 - r_B^2) \frac{\alpha_s - \alpha + \alpha_{02}}{2\pi} h = K_V (\alpha_s - \alpha + \alpha_{02}). \quad (3.59)$$

Подставляя значения G_2 и V_2 из уравнений (3.58) и (3.59) в (3.57), получим следующее уравнение изменения давления в выхлопной полости:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k f_2 \sqrt{RT_2}}{K_V (\alpha_s - \alpha + \alpha_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{k p_2}{(\alpha_s - \alpha + \alpha_{02})} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.60)$$

В выхлопной полости считаем процесс адиабатическим. Тогда температуру T_2 выразим через давление P_2 из уравнения адиабатического процесса:

$$T_2 = T_M \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (3.61)$$

Окончательно получим

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k f_2 \sqrt{RT_M}}{K_V (\alpha_s - \alpha + \alpha_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{k p_2}{(\alpha_s - \alpha + \alpha_{02})} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.62)$$

Таким образом, получили уравнение движения поворотного пневмопривода (3.50), уравнения изменения давлений в полостях (3.56) и (3.62).

Угловая координата положения поршня α изменяется в диапазоне от 0 до α_s , т.е. лопасть перемещается от упора до упора.

Отразим это ограничение в математической модели, так как формальное решение уравнений математической модели поворотного пневмопривода без учета этих ограничений приведет к абсурдным результатам, аналогичным тем, о которых описано выше для линейного

пневмопривода.

Введем в уравнение движения ограничение по углу.

$$\text{если } \alpha \leq 0, \text{ то } \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha = 0,$$

$$\text{если } \alpha \geq \alpha_s, \text{ то } \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha = 0.$$

Таким образом, математическая модель поворотного пневмопривода, вал которого поворачивается от упора до упора, будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= K_V (p_1 - p_2) - M_c, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{kf_1 \sqrt{RT_M}}{K_V (\alpha + \alpha_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{kp_1}{\alpha + \alpha_{01}} \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{K_V (\alpha_s - \alpha + \alpha_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{kp_2}{(\alpha_s - \alpha + \alpha_{02})} \frac{d\alpha}{dt}, \\ \text{если } \alpha \leq 0, \text{ то } \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{d\alpha}{dt} = \alpha = 0, \\ \text{если } \alpha \geq \alpha_s, \text{ то } \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{d\alpha}{dt} = \alpha = 0. \end{aligned} \right\} (3.63)$$

При разработке конкретных математических моделей поворотного пневмопривода необходимо учитывать его особенности. Поскольку математические модели линейного и поворотного пневмоприводов аналогичны, то дополнительные условия к математической модели поворотного пневмопривода можно написать по аналогии с такими же условиями, написанными для линейного пневмопривода.

3.8. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕЙСЯ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПНЕВМОПРИВОДА

Выполним расчет возможной установившейся скорости движения исполнительного органа в типовом пневмоприводе. Для этого запишем систему уравнений (3.32) для установившегося движения поршня. Имея в виду, что при установившемся движении $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{dp_1}{dt} = 0$ и $\frac{d\delta_2}{dt} = 0$, система дифференциальных уравнений (3.32) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} p_1 F_1 - p_2 F_2 - p_A (F_1 - F_2) - N &= 0, \\ \frac{k f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 (x + x_{01}) \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{k p_1}{x + x_{01}} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ - \frac{k f_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 (S - x - x_{02}) \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_2}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} + \frac{k p_2}{(S - x - x_{02})} \frac{dx}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим: v_y – значение установившейся скорости движения поршня, p_{1y} и p_{2y} – постоянные установившиеся значения давлений в полостях. Тогда, имея в виду, что $dx/dt = v_y$, полученные уравнения можем записать как систему алгебраических уравнений следующим образом:

$$p_{2y} F_2 + p_A (F_1 - F_2) - p_{1y} F_1 + N = 0, \quad (3.64)$$

$$v_y = \frac{f_1 \sqrt{RT_M}}{F_1 p_{1y} \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_{1y}^2}, \quad (3.65)$$

$$v_y = \frac{f_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_{2y}}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \frac{\sqrt{p_{2y}^2 - p_A^2}}{p_{2y}}. \quad (3.66)$$

Вычислим сомножители в уравнении (3.66). Давление в промышленной пневмосети, как правило, не превышает 0,5 МПа, т.е. $P_M < 0,5 \text{ МПа}$. Поэтому при любом значении установившегося давления p_{2y} получим:

$$\left(\frac{p_{2y}}{P_M} \right) = 0,2 \dots 1,0.$$

Тогда, имея в виду, что показатель адиабаты $k = 1,4$, найдем сомножитель

$$\left(\frac{p_{2y}}{P_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} = 0,8 \dots 1,0. \quad (3.67)$$

Определим диапазон изменения сомножителя $\frac{\sqrt{p_{2y}^2 - p_A^2}}{p_{2y}}$ в уравнении (3.66). Преобразуем его следующим образом:

$$\frac{\sqrt{p_{2y}^2 - p_A^2}}{p_{2y}} = \sqrt{1 - \left(\frac{p_A}{p_{2y}} \right)^2}.$$

Если даже считать, что установившееся давление в выхлопной полости p_{2y} изменяется в максимальном диапазоне, т.е. от атмосферного давления p_A до давления магистрали P_M , то диапазон изменения сомножителя составит:

$$\frac{\sqrt{p_{2y}^2 - p_A^2}}{p_{2y}} = \sqrt{1 - \left(\frac{p_A}{p_{2y}} \right)^2} = 0,92 \dots 0,98. \quad (3.68)$$

Найдем диапазон изменения произведения двух сомножителей (3.67) и (3.68):

$$\left(\frac{p_{2y}}{P_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \frac{\sqrt{p_{2y}^2 - p_A^2}}{p_{2y}} = 0,83 \dots 0,98$$

Принимаем среднее значение этого произведения равным 0,9. Тогда уравнение (3.66) с погрешностью не более 8% можем записать следующим образом:

$$v_y = 0,9 \frac{f_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 \sqrt{\zeta_2}} . \quad (3.69)$$

В большинстве случаев фактическая погрешность этого выражения намного меньше, так как здесь рассмотрены наихудшие условия.

Подставляя (3.69) в уравнение (3.65), найдем величину установившегося давления в полости нагнетания:

$$p_{1y} = \frac{p_M}{\sqrt{1 + 0,81 \left(\frac{F_1 f_2}{F_2 f_1} \right)^2 \frac{\zeta_1}{\zeta_2}}} . \quad (3.70)$$

Найдем установившееся давление в выхлопной полости, подставляя полученное выражение (3.70) в уравнение (3.64):

$$p_{2y} = \frac{1}{F_2} \left[F_1 \frac{p_M}{\sqrt{1 + 0,81 \left(\frac{F_1 f_2}{F_2 f_1} \right)^2 \frac{\zeta_1}{\zeta_2}}} - p_A (F_1 - F_2) - N \right] . \quad (3.71)$$

Окончательно уточненное значение установившейся скорости v_y найдем из уравнения (3.66):

$$v_y = \frac{f_2 \sqrt{RT_M}}{F_2 p_{2y} \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p_{2y}}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p_{2y}^2 - p_A^2} \quad (3.72)$$

где p_{2y} определяется из уравнения (3.71).

Решение можно постепенно уточнять, повторяя вычисления по описанной схеме, т.е. снова подставить уточненное значение скорости (3.72) в уравнение (3.65) и найти уточненное значение давления в полости нагнетания. Затем из уравнения (3.64) найти уточненное значение давления в выхлопной полости. И, наконец, из уравнения (3.66) получить третье, уточненное значение установившейся скорости.

4. ПРОЕКТНЫЙ РАСЧЕТ ПНЕВМОПРИВОДА

Цель проектного расчета – по заданной нагрузке, магистральному давлению, массе перемещаемых деталей, скорости перемещения поршня определить диаметр поршня, штока и подводящих отверстий. Расчет будет зависеть от типа привода.

4.1 РАСЧЕТ ПНЕВМОЦИЛИНДРА

По характеру применения пневмоцилиндры условно делятся на 2 типа:

1 тип – зажимные пневмоцилиндры, которые создают заданное усилие после завершения хода, а также пневмоцилиндры с малым ходом – прессующие, выжимающие и т.п.

2 тип – транспортирующие пневмоцилиндры, которые развивают требуемое усилие на всем пути перемещения поршня.

Рассмотрим расчет транспортирующего пневмоцилиндра.

1). Найдем *диаметр пневмоцилиндра*, исходя из известных в литературе рекомендаций по выбору параметра безразмерной нагрузки χ :

$$\chi = \frac{P_{нагр}}{P_n}, \quad (4.1)$$

где $P_{нагр}$ – максимальная нагрузка на привод, P_n – усилие, создаваемое пневмоприводом со стороны поршневой полости.

Для транспортирующих пневмоцилиндров оптимальное значение $\chi = 0,4 - 0,5$.

При $\chi > 0,5$ время срабатывания пневмоцилиндра значительно возрастает. При $\chi = 0,1 - 0,2$ достигается максимальное быстродействие пневмоцилиндра, но эти значения свидетельствуют о неэффективном использовании пневмоцилиндра.

В расчетах можно принять $\chi = 0,45$.

Выразим величину нагрузки $P_{нагр}$ и усилия пневмопривода P_n через заданные параметры.

В общем случае результирующая сила $P_{нагр}$ включает следующие составляющие:

$$P_{нагр} = P_1 + P_2 + P_{30} + P_3 \quad (4.2)$$

где P_1 – сила сопротивления со стороны исполнительного механизма, P_2 – сила веса поршня и перемещаемых частей при вертикальном размещении цилиндра, P_{30} – сила предварительного натяжения пружины, P_3 – сила сжатия пружины в конце хода.

Найдем силу сжатия:

$$P_3 = c_n S,$$

где c_n – жесткость пружины, S – ход поршня.

Если пружина отсутствует, то в расчетах принимаем $P_{30} = 0$, $P_3 = 0$.

Усилие P_n , развиваемое со стороны поршневой полости, определим по формуле

$$P_n = (p_M - k_{mp} p_M) \frac{\pi D^2}{4} = p_M (1 - k_{mp}) \frac{\pi D^2}{4}, \quad (4.3)$$

где k_{mp} – коэффициент трения, учитывающий трение уплотняющих манжет; p_M – минимальное абсолютное давление в магистрали.

Ориентированные значения k_{mp} для различных величин полезной нагрузки при уплотнении манжетами по ГОСТ 6678-72 и магистральном давлении 0,5 МПа представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Значения коэффициентов трения $k_{тр}$ для различной нагрузки P_1

P_2 , кН	$P_2 \leq 0,6$	$P_2 = 0,6-6$	$P_2 = 6-25$
$k_{тр}$	0,5–0,2	0,2–0,12	0,12–0,08

Большие значения $k_{тр}$ принимают для меньших диаметров пневмоцилиндров.

Подставляя значения $P_{нагр}$ и P_n из (4.2) и (4.3) в выражение (4.1), получим:

$$\chi = \frac{4P_{нагр}}{p_M(1-k_{тр})\pi D^2}.$$

Отсюда находим зависимость для расчета диаметра поршня

$$D = \sqrt{\frac{4P_{нагр}}{\pi\chi p_M(1-k_{тр})}} = 1,13 \sqrt{\frac{P_{нагр}}{\chi p_M(1-k_{тр})}}$$

Окончательно принимают ближайшее большее значение диаметра из стандартного ряда. Так, например, Международной организацией по стандартизации (ISO) для пневмоцилиндров, выпускаемых серийно, установлен следующий стандартный ряд диаметров: 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 63, 80, 100, 125, 140, 160, 200, 250, 320 мм.

Из полученной формулы следует, что при отсутствии нагрузки P_H диаметр поршня теоретически может быть равен нулю. Однако минимальный диаметр поршня в типовом приводе определяется диаметром штока. Поэтому в данном случае следует сначала определить диаметр штока, который и определит минимальную величину диаметра поршня. Кроме того, привод может иметь большую инерционную нагрузку, т. е. может перемещать тяжелые грузы. А для этого пневмоцилиндр должен иметь вполне определенный диаметр, при котором обеспечивается заданное быстродействие привода. Поэтому величину диаметра поршня в дальнейшем уточняют по результатам

динамического анализа, т. е. по результатам исследования переходного процесса в пневмоприводе с учетом его инерционной нагрузки.

2). **Диаметр штока $D_{шт}$** зависит от конструктивного исполнения исполнительного устройства, от особенностей эксплуатации и определяется условиями его прочности в наиболее опасном сечении.

3). **Ход поршня S** определяется требуемым значением перемещения рабочего органа или детали. Максимальная величина хода пневмоцилиндра двустороннего действия обычно ограничивается из технологических соображений 8–10 диаметрами поршня:

$$S = (8...10)D.$$

Если требуется обеспечить длину хода больше полученного значения, то необходимо выполнить расчет штока на устойчивость, определив критическую нагрузку $P_{кр}$, выводящую шток из устойчивого положения. Критическое усилие, которое приводит к продольному изгибу, вычисляется по обобщенной формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta l)^2},$$

где E – модуль упругости (для стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа); I – момент инерции штока, $м^4$ ($I = 0,0491d_{\phi}^4$, где d_{ϕ} – диаметр штока, $м$); β – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления штока; l – максимальная длина выдвинутой части штока, $м$.

Значения коэффициента приведения длины β представлены в таблице 4.2.

Критическая нагрузка $P_{кр}$ должна быть значительно больше максимально допустимой нагрузки P_H . При расчете штока на устойчивость должно удовлетворяться условие:

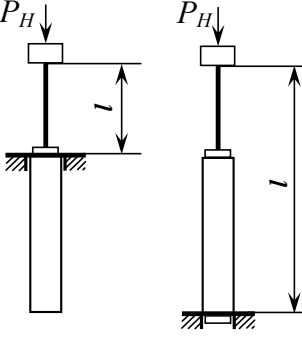
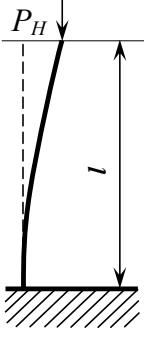
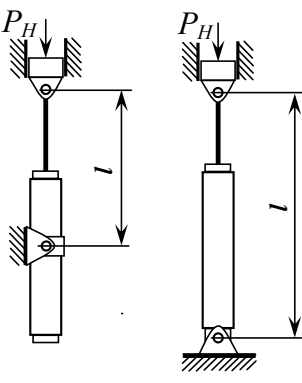
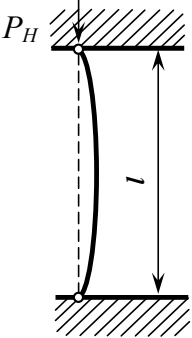
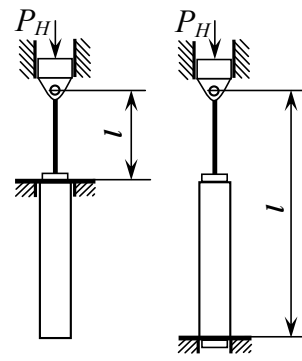
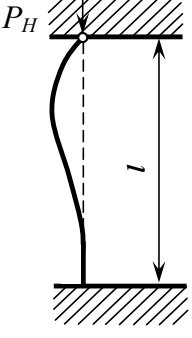
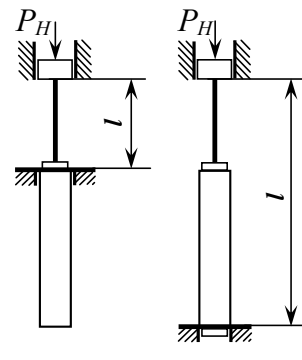
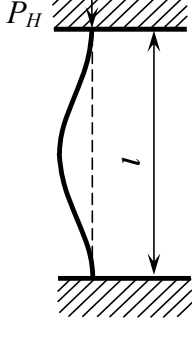
$$P_{кр} \geq KP_H,$$

где K – коэффициент запаса по прочности ($K = 2,5–3,5$).

4). **Диаметр присоединительных отверстий цилиндра** принимается равным $0,1D$ для обеспечения максимальной скорости поршня.

Таблица 4.2

Таблица для определения коэффициента β

Способ монтажа	Монтажная схема	Расчетная схема	Коэффициент β
Один конец жестко закреплен, второй – свободен			$\beta = 2$
На обоих концах установлены шарниры			$\beta = 1$
Один конец жестко закреплен, на другом установлен шарнир			$\beta = 0,7$
Оба конца жестко закреплены			$\beta = 0,5$

4.2. РАСЧЕТ ПОВОРОТНОГО ПНЕВМОПРИВОДА

1). *Найдем диаметр лопасти* пневмопривода, исходя из рекомендаций по выбору параметра безразмерной нагрузки χ . Величину нагрузки определим следующим образом:

$$\chi = \frac{M_H}{M_L}, \quad (4.4)$$

где M_H – момент нагрузки и сопротивления (кроме сил трения лопасти), M_L – момент результирующей силы $P_{M\Sigma}$ от давления воздуха p_M в полости нагнетания и силы $P_{A\Sigma}$ от атмосферного давления воздуха p_A в выхлопной полости.

По аналогии с расчетом пневмоцилиндра для транспортирующих поворотных пневмоприводов принимаем оптимальное значение $\chi = 0,4 - 0,5$.

Выразим M_H и M_L через заданные параметры. Найдем результирующий момент M_H :

$$M_H = M_1 + M_2, \quad (4.5)$$

где M_1 – момент сил вредного сопротивления (сил трения за исключением силы трения в манжетах), M_2 – момент сил полезного сопротивления со стороны исполнительного механизма.

Найдем момент, создаваемый лопастью:

$$M_L = P_{M\Sigma} a, \quad (4.6)$$

где $P_{M\Sigma}$ – суммарная движущая сила с учетом трения лопасти, a – плечо результирующей силы $P_{M\Sigma}$.

Определим величину силы $P_{M\Sigma}$ с учетом трения лопасти о корпус:

$$P_{M\Sigma} = [(p_M - p_A) - k_{mp}(p_M - p_A)]F = (p_M - p_A)(1 - k_{mp})F, \quad (4.7)$$

где F – площадь лопасти, k_{mp} – коэффициент трения лопасти о корпус, который выбираем по аналогии со значением коэффициента трения для пневмоцилиндра.

Найдем площадь лопасти:

$$F = (r_H - r_B)h.$$

Тогда зависимость (4.7) будет иметь вид:

$$P_{M\Sigma} = (p_M - p_A)(1 - k_{mp})(r_H - r_B)h. \quad (4.8)$$

Найдем плечо a силы $P_{M\Sigma}$. В соответствии с расчетной схемой на рис. 3.5 получим:

$$a = \frac{r_H - r_B}{2} + r_B = \frac{r_H + r_B}{2}. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.8) и (4.9) в уравнение (4.6), получим следующее выражение для вычисления момента лопасти M_L :

$$M_L = (p_M - p_A)(1 - k_{mp})h \frac{r_H^2 - r_B^2}{2}. \quad (4.10)$$

Подставляя значения M_H и M_L из (4.5) и (4.10) в (4.4), получим уравнение, связывающее конструктивные параметры h , r_H и r_B :

$$\chi = \frac{2(M_1 + M_2)}{(p_M - p_A)(1 - k_{mp})h(r_H^2 - r_B^2)}. \quad (4.11)$$

2). Диаметр внутреннего радиуса r_B лопасти пневмопривода находят из условия обеспечения прочности при кручении в наиболее опасном сечении и с учетом технологичности конструкции.

3). *Соотношение между шириной лопасти h и ее наружным радиусом r_H* можно найти, например, из условия обеспечения минимальной длины контакта лопасти с корпусом при заданной площади лопасти F .

Найдем периметр Π трущейся части лопасти:

$$\Pi = h + 2(r_H - r_B) . \quad (4.12)$$

Площадь лопасти найдем из уравнения:

$$F = h(r_H - r_B) . \quad (4.13)$$

Найдем ширину лопасти h , при которой обеспечивается минимум периметра Π .

Выразим высоту лопасти $r_H - r_B$ через ее ширину h и площадь F . Из уравнения (4.13) получим:

$$r_H - r_B = \frac{F}{h} . \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в уравнение (4.12), получим:

$$\Pi = h + \frac{2F}{h} .$$

Найдем ширину лопасти, при которой достигается минимальный периметр. Для этого найдем экстремум функции $\Pi(h)$, вычислив производную:

$$\frac{d\Pi}{dh} = 1 - \frac{2F}{h^2} = 0 .$$

Отсюда находим:

$$h = \sqrt{2F} .$$

Убедимся, что при этом функция Π принимает минимальное значение. Для этого найдем вторую производную функции Π :

$$\frac{d^2 \Pi}{dh^2} = \frac{4F}{h^3} .$$

Как видно из полученного выражения, при любых значениях параметров вторая производная положительна, т. е.:

$$\frac{4F}{h^3} > 0 .$$

Следовательно, функция в точке $h = \sqrt{2F}$ принимает минимальное значение, т. е. значение периметра минимально.

Окончательно получим:

$$h^2 = 2F = 2h(r_H - r_B) .$$

Отсюда для заданного внутреннего радиуса r_B найдем соотношение между шириной лопасти h и ее наружным радиусом r_H , при котором достигается минимальная длина контакта лопасти с корпусом:

$$h = 2(r_H - r_B) . \quad (4.15)$$

Окончательно, подставляя полученное значение h из уравнения (4.15) в уравнение (4.11), получим следующую зависимость, из которой можем определить любыми известными методами наружный радиус лопасти r_H :

$$\chi = \frac{(M_1 + M_2)}{(p_l - p_A)(1-k)(r_H^2 - r_B^2)(r_H - r_B)} . \quad (4.15)$$

4). Угол поворота пневмопривода α_S определяется из условия обеспечения технологических требований.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Пневматическая линия связи характеризуется следующими параметрами: длиной l , проходным сечением f и характеристиками входа и выхода.

Характер переходного процесса в линии определяется тремя различными физическими процессами:

1). Процессом разгона всей массы рабочей среды внутри линии, который приводит к изменению расхода в линии; процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

2). Процессом изменения количества рабочей среды при наполнении и опустошении линии, которое приводит к изменению давления, плотности и температуры газа внутри линии; этот процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

3). Процессом, обусловленным упругими свойствами рабочей среды, который приводит в переходных режимах к появлению волновых процессов изменения давления, плотности и расхода газа. Этот процесс описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

В зависимости от типа линии может преобладать тот или иной процесс или сочетания процессов. На рис. 5.1 представлены типы линий связи.

В короткой линии (рис.5.1,а) преобладает разгонное движение газа.

В сильно задресселированной линии (рис.5.1,б) проявляются, главным образом, процессы наполнения и опустошения.

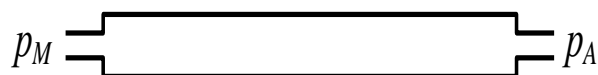
В типовой пневматической линии (рис.5.1,в) наблюдаются все эти физические процессы.



а) Незадросселированная линия связи (открытая линия)



б) Сильно задросселированная линия связи (камера)



в) Типовая линия связи

Рис.5.1. Типы пневматических линий

5.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ДЛЯ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Рассмотрим наиболее известные математические модели пневматических линий.

5.1.1. Математическая модель открытой линии

Рассмотрим вывод уравнений движения газа в короткой пневматической линии, не задросселированной на входе и выходе. В такой линии движение газа можно представить как движение объема газа с постоянной внутри линии массой m .

А) Ламинарное течение

Рассмотрим вывод уравнений движения газа в открытой пневматической линии при ламинарном течении. Расчетная схема такой линии приведена на рис. 5.2.

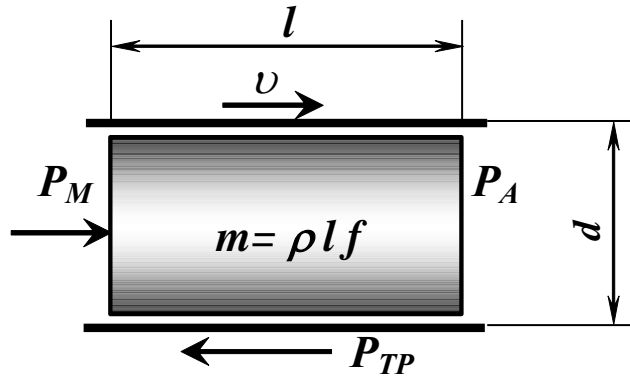


Рис. 5.2. Расчетная схема разгонного движения среды

Уравнение движения всей массы газа внутри линии имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = p_M f - p_A f - p_{TP} f, \quad (5.1)$$

где $m = \rho l f$ – масса газа внутри линии, v – скорость движения центра масс газа в линии, p_M и p_A – давления на концах линии, p_{TP} – перепад давления за счет трения газа при движении.

Найдем выражение для вычисления потерь на трение p_{TP} при ламинарном течении газа:

$$p_{TP} = \zeta \frac{\rho v^2}{2} \text{sign}(v),$$

Коэффициент сопротивления ζ линии определяется по формуле

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d},$$

где λ – коэффициент трения газа в линии, l и d – длина и диаметр линии.

Тогда потери на трение можем определить следующим образом:

$$p_{TP} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \text{sign}(v). \quad (5.2)$$

Коэффициент трения λ для ламинарного течения определяется следующим образом:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (5.3)$$

где Re – число Рейнольдса, которое определяется скоростью газа v , коэффициентом кинематической вязкости газа ϑ и диаметром линии d :

$$\text{Re} = \frac{vd}{\vartheta}. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в уравнение (5.3), получим:

$$\lambda = \frac{64\vartheta}{vd}. \quad (5.5)$$

Выразим диаметр линии d через площадь проходного сечения f :

$$d = 2\sqrt{\frac{f}{\pi}}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.5) с учетом (5.6) в уравнение (5.2), после преобразований получим:

$$p_{TP} = \frac{8\pi\vartheta\rho lv}{f} \text{sign}(v). \quad (5.7)$$

Окончательно уравнение движения (5.1) с учетом (5.7) после преобразований будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{8\pi\vartheta}{f} v \text{sign}(v) = \frac{p_M - p_A}{\rho l}. \quad (5.8)$$

Отсюда можем определить скорость v_Y установившегося течения газа в линии в конце переходного процесса, когда $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$v_Y = \frac{f}{8\pi 9l\rho} (P_M - P_A). \quad (5.9)$$

Б) Турбулентное течение

Выведем уравнение движения газа в пневматической линии при турбулентном течении:

$$m \frac{dv}{dt} = p_M f - p_A f - p_{TP} f. \quad (5.10)$$

Потери на трение определим из уравнения (5.2):

$$p_{TP} = \zeta \frac{\rho v^2}{2} \text{sign}(v) = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \text{sign}(v). \quad (5.11)$$

Подставляя выражение (5.11) в уравнение движения (5.10), получим:

$$\rho l f \frac{dv}{dt} + \lambda \frac{l\rho}{2d} v^2 f = (p_M - p_A) f$$

Разделив все члены уравнения на $\lambda \frac{l\rho}{2d} f$, получим уравнение в следующем виде:

$$\frac{2d}{\lambda} \frac{dv}{dt} + v^2 = \frac{2(P_M - P_A)d}{\lambda\rho l}. \quad (5.12)$$

Отсюда можем определить скорость установившегося течения.

Принимая $\frac{dv}{dt} = 0$, получим

$$v_Y = \sqrt{\frac{2(P_M - P_A)d}{\lambda\rho l}}. \quad (5.13)$$

Полученные математические модели (5.8) и (5.12) справедливы только для расчета проточных открытых (незадросселированных) линий при низких давлениях (рис. 5.1,а).

5.1.2. Математическая модель пневматической камеры

При составлении математической модели пневматической камеры процессом разгона всей массы газа в камере пренебрегают, а учитывают лишь процесс изменения количества рабочей среды, т.е. процессы наполнения и опустошения камеры. Изменение количества газа внутри камеры приводит к изменению давления, плотности и температуры газа. Этот процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

А) Ламинарное течение в дросселях

Выведем уравнение изменения давления в пневматической камере при ламинарном течении газа в дросселях на входе и выходе камеры. Расчетная схема представлена на рис. 5.3

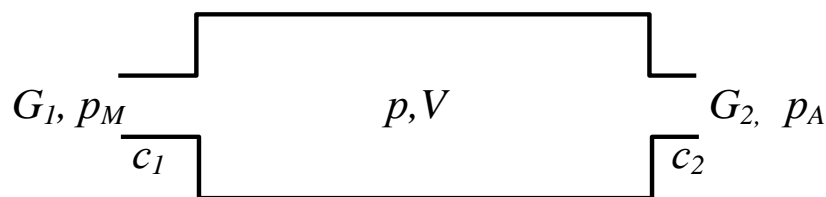


Рис. 5.3. Расчетная схема пневматической камеры

Изменение давления в камере найдем из уравнения изменения расхода:

$$\frac{dm}{dt} = G_1 - G_2, \quad (5.14)$$

где $m = \rho V$ – масса газа внутри камеры, G_1 и G_2 – расходы поступающего и выходящего из камеры газа. V – объем полости камеры.

Расход газа через дроссели на входе и выходе для ламинарного течения определяется по формулам:

$$\begin{aligned} G_1 &= c_1(p_M - p), \\ G_2 &= c_2(p - p_A), \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 – коэффициенты, характеризующие параметры ламинарных дросселей на входе и выходе камеры.

Найдем коэффициенты для круглых ламинарных дросселей. Рассмотрим дроссель на входе как короткую открытую линию с площадью проходного сечения f_1 и длиной l_1 .

Запишем уравнение расхода через дроссель на входе:

$$G_1 = \rho v_1 f_1.$$

Дроссель представляет собой открытую линию с установившимся течением. Тогда в соответствии с общепринятым допущением о квазистатичности движения газа в дросселях, скорость течения газа в нем найдем по ранее полученной формуле для установившегося течения газа (5.9)

$$v_1 = \frac{f_1}{8\pi\eta l_1\rho}(p_M - p).$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$G_1 = \rho v_1 f_1 = \frac{f_1^2}{8\pi\eta l_1}(p_M - p) = c_1(p_M - p),$$

Отсюда находим коэффициент пропорциональности расходной характеристики ламинарного дросселя на входе в камеру

$$c_1 = \frac{f_1^2}{8\pi\eta l_1}. \quad (5.15)$$

Аналогично находим коэффициент пропорциональности расходной характеристики дросселя на выходе из пневматической камеры:

$$c_2 = \frac{f_2^2}{8\pi g l_2} . \quad (5.16)$$

Имея в виду, что $m = \rho V$, уравнение изменения количества газа в камере (5.14) с учетом (5.15) и (5.16) будет иметь вид:

$$V \frac{d\rho}{dt} = c_1(p_M - p) - c_2(p - p_A) . \quad (5.17)$$

Выразим плотность газа через давление из уравнения состояния:

$$\rho = \frac{p}{RT} . \quad (5.18)$$

Подставим (5.18) в исходное уравнение (5.17). Считая характер процесса изотермическим, т.е. $T = const$, после преобразований получим уравнение изменения давления в пневматической камере:

$$\frac{V}{RT(c_1 + c_2)} \frac{dp}{dt} + p = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)} p_M + \frac{c_2}{(c_1 + c_2)} p_A . \quad (5.19)$$

Б). Турбулентное течение в дросселях

Математическая модель камеры при турбулентном течении газа в дросселях на ее входе и выходе будет зависеть от характера газодинамических процессов в самой камере и дросселях, т.е. от того, являются ли процессы адиабатическими или изотермическими.

Рассмотрим математические модели камеры при адиабатическом процессе внутри камеры для случаев адиабатического и изотермического процесса газа в дросселях.

1. Адиабатические процессы в дросселях. При адиабатическом процессе изменение давления в камере при ее наполнении и опустошении будет описываться соответственно следующими уравнениями:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{kKf_1^{\vartheta} p_M \sqrt{RT_M}}{V} \varphi(\sigma)$$

и

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-kKf_2^{\vartheta} p_M \sqrt{RT_M}}{V} \sigma^{\frac{3k-1}{k}} \varphi\left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right),$$

где $f_1^{\vartheta} = \mu_1 f_1$ и $f_2^{\vartheta} = \mu_2 f_2$ – эффективные площади входного и выходного отверстий; f_1 и f_2 – площади входного и выходного отверстий; μ_1 и μ_2 – коэффициенты расхода подводящей и отводящей линий.

Для одновременного наполнения и опустошения камеры можем записать:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{kKp_M \sqrt{RT_M}}{V} \left[f_1^{\vartheta} \varphi(\sigma) - f_2^{\vartheta} \sigma^{\frac{3k-1}{k}} \varphi\left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right) \right], \quad (5.20)$$

где

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 0,2588, & \text{если } \sigma \leq 0,528; \\ \sqrt{\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}}}, & \text{если } \sigma > 0,528; \end{cases}$$

$$K = \sqrt{\frac{2k}{k-1}}, \quad \sigma = \frac{p}{p_M}, \quad \sigma_A = \frac{p_A}{p_M},$$

$$f_1^{\vartheta} = \mu_1 f_1, \quad f_2^{\vartheta} = \mu_2 f_2.$$

2. Изотермические процессы в дросселях. Запишем уравнение изменения давления в камере при изотермическом течении газа в дросселях на ее входе и выходе. Для этого воспользуемся уравнениями (3.32), полученными при описании процессов в пневмоприводе с изотермическим течением газа в трубопроводах:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{kf_1 \sqrt{RT_M}}{V \sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p^2} - \frac{kf_2 \sqrt{RT_M}}{V \sqrt{\zeta_2}} \left(\frac{p}{p_M} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{p^2 - p_A^2}, \quad (5.21)$$

где ζ_1, ζ_2 – коэффициенты сопротивления пневмоаппаратуры, стоящей на входе и выходе.

Полученные модели (5.19), (5.20) и (5.21) не учитывают инерционность газа и не позволяют определить давления одновременно в начале и на конце линии.

В таблице 5.1 приводится сравнительная характеристика полученных математических моделей пневматических линий различных типов. Знаками + и – отмечены характеристики, которые соответственно учитываются и не учитываются той или иной математической моделью.

Таблица 5.1

Анализ математических моделей линий связи

№	Учитываемая характеристика	Математические модели ЛС	
		Открытая линия	Камера
1	Потери давления по длине	+	–
2	Инерционность газа	+	–
3	Параметры входа и выхода	–	+
4	Изменение массы газа, сжимаемость	–	+
5	Колебательные процессы	–	–
6	Задержка сигнала в линии	–	–

На рис. 5.4 схематично изображена область применения описанных выше моделей в зависимости от отношения проходных эффективных сечений на концах линий связи к проходному сечению линии.

Модель «Открытая линия» используется для линий, когда отсутствует сопротивление на входе и выходе линии, т. е. $f_1^3/f = 1$ и $f_2^3/f = 1$. Модель «Камера» применяется при расчетах сильно задрозселированных линий, т. е. при $f_1^3/f \rightarrow 0$ и $f_2^3/f \rightarrow 0$.

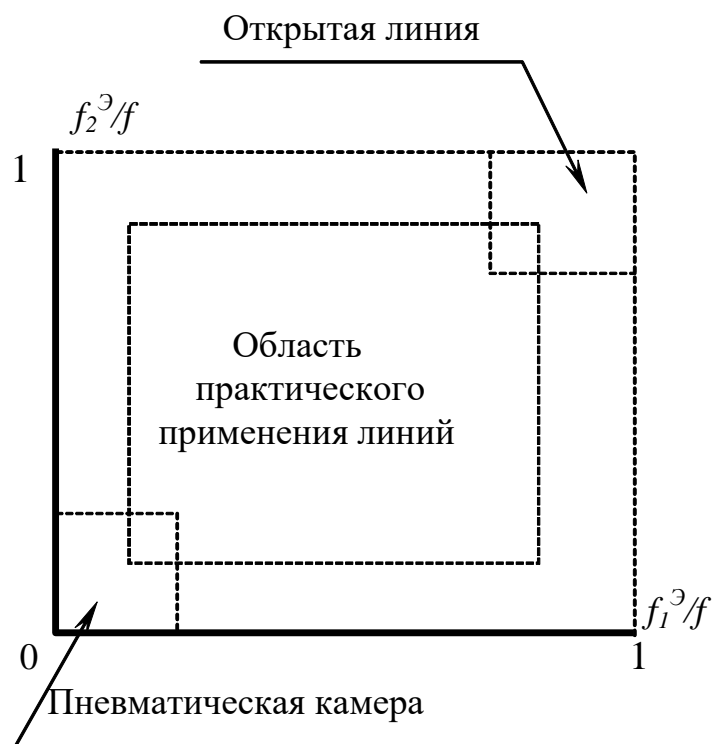


Рис. 5.4. Область применения математических моделей пневматических линий связи

В центре показана область, в которой расположены используемые на практике ЛС (трубопроводы, каналы и т.п.). Для этой области нужна модель ЛС, учитывающая все перечисленные в таблице характеристики.

5.1.3. Эмпирические модели

В некоторых конкретных случаях математические модели пневматических линий представляют как последовательное соединение звена чистого запаздывания и апериодического звена. При этом постоянную времени апериодического звена определяют на основании опытных данных для конкретных значений параметров линии и условий работы. Постоянные времени одной и той же линии в эмпирических моделях могут отличаться в сотни раз.

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПОВЫХ ЛИНИЙ

Пневматические линии представляет собой систему с распределенными параметрами. Такие системы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, что вызывает определенные сложности при их решении.

5.2.1. Математическая модель линии связи в частных производных

Рассмотрим вывод уравнений, описывающих линию как систему с распределенными параметрами. При расчетах пневматических линий обычно рассматривается одномерное течение газа.

Для того чтобы описать газодинамические процессы в линиях, необходимо установить взаимосвязь следующих параметров газа: скорости газа v , давления p , плотности ρ и вязкости η . Для этого используются следующие уравнения.

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости в общем случае имеют вид:

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \eta \nabla v_x, \quad (5.22)$$

где X – проекция ускорения, определяемая действием сил гидростатического давления, пропорциональных массе частиц; $\theta = \operatorname{div} \vec{V}$ – дивергенция вектора скорости, которая для одномерного течения вычисляется по формуле:

$$\theta = \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (5.23)$$

$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Членом $(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x})$ учитывается действие динамических сил давления. Членом $\frac{\rho}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \eta \nabla v_x$ учитывается влияние вязкости.

Движение сплошной среды характеризуется уравнением неразрывности потока, которое для одномерного движения жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0. \quad (5.24)$$

Известно, что плотность газа связана с давлением следующим соотношением:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

где c – скорость звука в газе.

Тогда уравнение (5.24) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}. \quad (5.25)$$

Уравнение состояния газа характеризует связь давления, плотности и температуры газа:

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (5.26)$$

Таким образом, уравнения (5.22), (5.23), (5.25) и (5.26) описывают переходный процесс в линии связи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + g \nabla v_x, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}, \\ \theta &= \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \frac{p}{\rho} &= RT. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Полученная система может быть решена численным методом конечных разностей, который состоит в замене непрерывной среды некоторой ее дискретной моделью. При этом дифференциальные уравнения в частных производных аппроксимируются системой алгебраических уравнений, описывающих динамику линии в каждой расчетной точке разностной сетки.

Расчетные сетки могут содержать сотни расчетных точек. Поэтому для расчета переходных процессов в линиях по описанной системе требуется численно интегрировать сотни уравнений. Если же стоит вопрос о многократном численном моделировании, то становится очевидной трудоемкость расчетов численными методами.

На практике идут по пути дальнейшего упрощения этих уравнений. Опуская промежуточные выкладки, покажем конечный результат. В итоге получим следующую систему уравнений, которая известна в теории дифференциальных уравнений как уравнения телеграфных линий /4/:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{8\pi g}{f}(\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

где \mathcal{G} – коэффициент кинематической вязкости, ν – скорость газа в линии, c – скорость звука в среде.

Эти уравнения могут быть решены численными методами, а также для определенных начальных и граничных условий – аналитическими методами: методом Фурье, методом операционного исчисления, методом Даламбера и др.

Существенное упрощение исходных уравнений приводит к ограничению области их применения. Так, полученная система уравнений (5.28) оказывается справедливой лишь для малых возмущений. При этом в литературе известны лишь решения, полученные для пневматических линий или камер с дросселем на выходе с незадресселированным входом. На практике же любая линия имеет сопротивление на входе и выходе. Даже если линия имеет полностью открытый вход, то практически всегда имеются потери механической энергии потока на входе.

Решения системы дифференциальных уравнений (5.28), получаемые известными методами, представляют собой сумму членов бесконечного ряда. Поэтому такие уравнения являются достаточно трудными для практического применения, так как неизвестно, какое количество членов ряда даст удовлетворительный результат. К тому же, если необходимо учесть взаимодействие линий с другими объектами, то полученные решения становятся неприемлемыми.

В качестве примера приведем решение уравнения (5.28) для частного случая, когда на входе линии отсутствует дроссель и не учитываются потери давления по длине линии ($\mathcal{G} = 0$) /1/.

Система уравнений (5.28) имеет три решения в зависимости от соотношения величины коэффициента расходной характеристики дросселя на выходе линии c_2 и коэффициента K , который характеризует расходную характеристику самой линии ($K = f/c$).

1). Для случая $c_2 > K$ решение имеет вид:

$$p = p_M \left\{ 1 + e^{-\frac{\alpha_2}{l} ct} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[\omega_s (t + x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + \left(\frac{2s+1}{2} \pi\right)^2}} - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[\omega_s (t - x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + \left(\frac{2s+1}{2} \pi\right)^2}} \right] \right\},$$

где

$$\omega_s = \frac{(2s+1)c}{2l} \pi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{2s+1}{\alpha_2} \frac{\pi}{2} (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),$$

$$\operatorname{th}(\alpha_2) = \frac{K}{c_2}, \quad K = \frac{f}{c},$$

s – число членов ряда, учитываемое при расчетах.

2). Для $c_2 < K$ получается следующее решение:

$$p = p_M \left\{ 1 - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} - e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}}}{2\alpha_2} e^{-\frac{\alpha_2}{l} ct} + e^{-\alpha_2 \frac{ct}{l}} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[s\omega (t + x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + s^2 \pi^2}} - \frac{e^{\alpha_2 \frac{x}{l}} \cos[s\omega (t - x/c) + \varphi_s]}{\sqrt{\alpha_2^2 + s^2 \pi^2}} \right] \right\},$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{s\pi}{\alpha_2}, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2); \quad \omega = \pi c/l; \quad \operatorname{th}(\alpha_2) = K/c_2.$$

3). Для $c_2 = K$ отраженная волна отсутствует, и решение имеет вид:

$$p = p_M.$$

5.2.2. Обобщенная математическая модель пневматической линии

Применение дифференциальных уравнений в частных производных при расчетах пневматических линий не всегда дает более точное решение, чем некоторые упрощенные уравнения, потому что сами уравнения газовой динамики весьма приближенно отражают некоторые физические явления.

Проектировщиков обычно интересует изменения параметров на концах линий, а не распределенность параметров по длине линии.

Рассмотрим метод математического моделирования линии на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных дифференциальным уравнениям в частных производных с точки зрения описания волновых процессов на концах линии, что и является, как правило, необходимым для выполнения практических расчетов.

Этот метод моделирования и расчета может быть рекомендован для расчета колебаний упругих одномерных тел (нитей, тросов, ременных передач, балок и т.п.), поскольку динамика таких объектов описывается тем же классом дифференциальных уравнений в частных производных, что и динамика пневматических линий. По этой же причине изложенный метод может применяться при расчетах электрических линий.

При выводе уравнений динамики линии учтем взаимодействие ранее описанных процессов разгона, изменения количества газа и распределенность параметров (задержку по длине линии, явление гидроудара, колебательные процессы).

Используем общепринятые допущения.

1). Рассматриваем одномерное движение газа (давления p_1 и p_2 распределены по всему сечению линии равномерно).

2). Процессы изменения состояния газа принимаем изотермическими.

3). Течение на концах линии в дросселях считаем квазистатическими, т.е. расходы газа на входе и выходе в переходных процессах

рассчитываем как в установившемся режиме течения.

4). Считаем, что в переходных процессах существует такая же зависимость потерь на трение от числа Рейнольдса, как и при установившемся движении:

$$p_{TP} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Расчетная схема пневматической линии представлена на рис. 5.5.

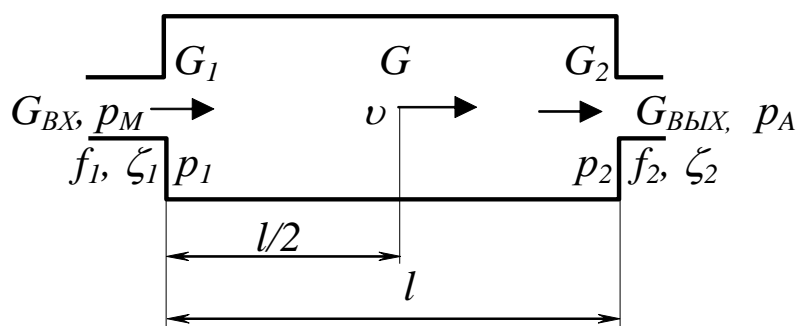


Рис. 5.5. Расчетная схема пневматической линии

Представим процессы в линии следующим образом. В начальный момент времени газ в линии находится в состоянии покоя или движется с постоянной скоростью. В некоторый момент времени давление на входе в линию изменяется. С этого момента в течение времени распространения по линии появившейся волны давления, т.е. при $t < l/c$, за счет изменения расхода газа на входе линии происходит изменение массы газа в линии, а также начинает изменяться скорость движения центра масс газа. Однако давление на конце линии будет по-прежнему оставаться постоянным и равным его начальному значению $p_2 = p_{20}$, так как волна давления не достигла конца линии. Расход и скорость газа на выходе также равны своим начальным значениям. В результате изменения массы газа в линии происходит его сжатие или разрежение, которое в момент времени $t = l/c$ проявится

на конце линии как давление фронта пришедшей волны газа.

Как только волна давления достигает конца линии, давление на конце линии изменяется скачкообразно от начального значения p_{20} до некоторой величины p_2 , после чего происходит дальнейшее непрерывное изменение давления p_2 до установившегося значения. При этом изменяется расход газа через выходное отверстие на конце линии.

Таким образом, уравнение динамики линии запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= p_1 f - p_2^* f - p_{TP} f; \\ p_2^* &= \begin{cases} p_{20}, & t < l/c; \\ p_2, & t \geq l/c. \end{cases} \end{aligned} \right\}. \quad (5.29)$$

На первый взгляд может показаться, что уравнение движения написано неверно, так как газ или жидкость в трубопроводе – это тело переменной массы. Для описания тела переменной массы, как известно, необходимо использовать уравнение Лагранжа. Ошибка таких рассуждений заключается в том, что в данном случае мы рассматривает давления внутри трубопровода, и уравнение движения пишем в каждый момент времени для выделенного объема с постоянной в данный момент времени массой.

Для более строго доказательства этого положения выведем закон движения рабочей среды в трубопроводе, рассматривая движущуюся массу, как тело переменной массы. Для этого рассмотрим другой вариант вывода уравнения движения газа (5.29), который позволяет понять, каким образом проявляется действие струй газа на входе и выходе на динамику движения газа в линии.

Уравнение движения газа в линии получим из уравнения изменения количества движения в дифференциальной форме. Расчетная схема представлена на рис. 5.6.

Газ в линии представляет собой тело переменной массы $m(t)$.

При поступлении и выходе из линии частиц газа элементарной массы dm_1 и dm_2 возникает элементарная реактивная сила, действующая как на основную массу газа, так и на элементарные частицы. Причем, в общем случае $dm_1 \neq dm_2$.

Рассмотрим массу газа $m(t)$ и элементарные частицы массой dm_1 и dm_2 как единую систему (рис. 5.6). В этом случае реактивные силы являются внутренними, и масса системы не изменяется. Тогда к такой системе можно применить теоремы динамики системы постоянной массы.

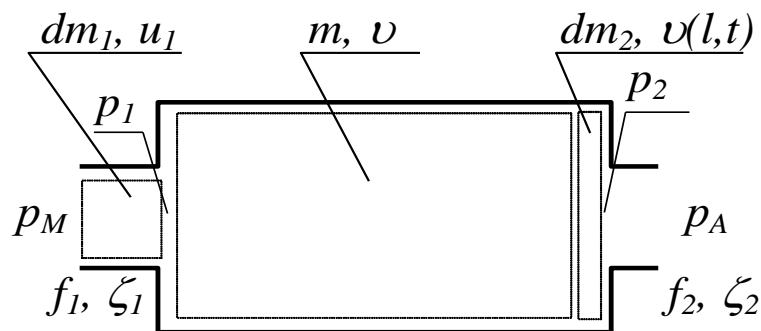


Рис. 5.6, а

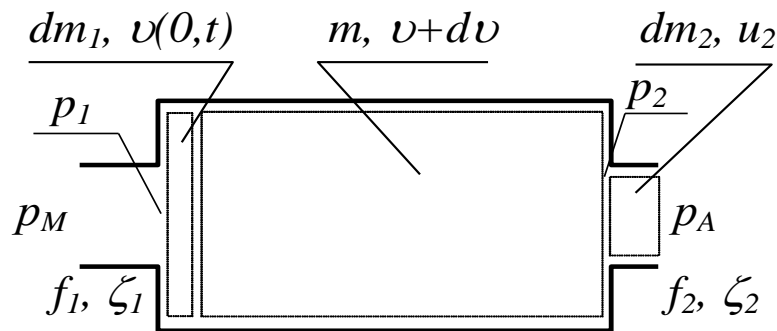


Рис. 5.6, б

Рис.5.6. Расчетная схема линии

Рассмотрим период времени $t < l/c$, т.е. период до прихода фронта волны давления в конец линии. Для этого случая расчетная

схема будет иметь вид, представленный на рис. 5.7.

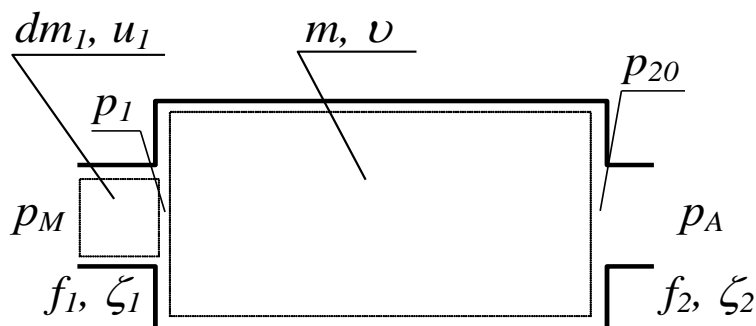


Рис. 5.7, а

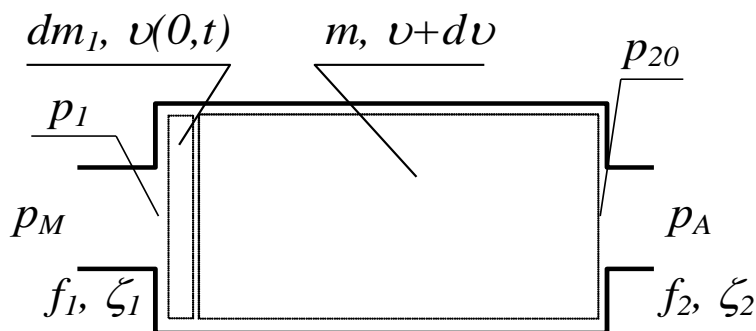


Рис. 5.7, б

Рис.5.7. Расчетная схема линии

Пусть в некоторый момент времени t (рис. 5.6,а) объем газа в линии массой m движется с некоторой средней по длине линии скоростью v , частицы газа массой dm_1 перед входом в линию движутся со скоростью u_1 . Частицы газа перед выходом неподвижны. Давление в конце линии равно начальному давлению p_{20} .

В момент времени $(t + dt)$ (рис. 5.7, б) средняя скорость газа массой m изменяется и становится равной $(v + dv)$. При этом поступившие в линию частицы массой dm_1 движутся со скоростью $v(0, t)$.

Таким образом, количество движения системы K в момент времени t :

$$K(t) = mv + u_1 dm_1 ,$$

в момент времени $t + dt$:

$$K(t+dt) = m(v + dv) + v(0,t) dm_1.$$

Найдем изменение количества движения за время dt :

$$\begin{aligned} dK &= m(v + dv) + v(0,t)dm_1 - [mv + u_1dm_1] = \\ &= mdv + v(0,t)dm_1 - u_1dm_1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

В соответствии с теоремой об изменении количества движения можем записать:

$$\frac{dK}{dt} = \sum P^e, \quad (5.31)$$

где P^e - равнодействующая всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой системе.

Найдем равнодействующую всех сил (рис. 5.7), действующую на систему из двух масс dm_1 и m :

$$P^e = p_1(f - f_1) + p_M f - p_{20}f - p_{TP}f. \quad (5.32)$$

Подставляя полученные выражения dK (5.30) и равнодействующей P^e (5.32) в уравнение изменения количества движения (5.31), после дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + v(o,t) \frac{dm_1}{dt} - v(l,t) \frac{dm_2}{dt} - u_1 \frac{dm_1}{dt} + u_2 \frac{dm_2}{dt} = \\ p_M f_1 + p_1(f - f_1) - p_{20}f - p_{TP}f. \end{aligned}$$

Имея в виду, что $dm_1/dt = G_{ex}$, полученное уравнение запишем в следующем виде:

$$m \frac{dv}{dt} = p_1 f - p_{20}f - p_{TP}f + \{(p_M - p_1)f_1 - G_{\dot{a}\dot{o}}[v(o,t) - u_1]\}. \quad (5.33)$$

Покажем, что слагаемое в фигурных скобках равно нулю, т.е.:

$$(p_M - p_1)f_1 - G_{ex} [v(0,t) - u_1] = 0.$$

Выразим слагаемое $G_{ex} [v(0,t) - u_1]$, которое представляет собой реактивную силу, через давления на концах линии p_1 . Для этого запишем уравнение изменения количества движения для частиц газа, поступающих в линию:

$$\frac{dK_1}{dt} = (p_M - p_1)f_1.$$

Имея в виду, что $dK_1 = dm_1[v(o,t) - u_1]$, найдем

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{dm_1}{dt} [v(o,t) - u_1] = G_{ao} [v(o,t) - u_1] = (p_M - p_1)f_1. \quad (5.34)$$

С учетом (5.34) убедимся, что слагаемое в фигурных скобках в уравнении (5.33) обращается в ноль:

$$\{(p_M - p_1)f_1 - G_{ex} [v(0,t) - u_1]\} = \{(p_M - p_1)f_1 - (p_M - p_1)f_1\} = 0.$$

Таким образом, как следует из выражения (5.33) с учетом (5.34), уравнение движения газа в линии до момента прихода фронта волны давления в конец линии будет иметь вид, аналогичный уравнению (5.29):

$$m \frac{dv}{dt} = p_1 f - p_{20} f - p_{TP} f. \quad (5.35)$$

Рассмотрим период времени $t \geq l/c$, когда после прихода фронта волны давления на конце линии появляется давление p_2 , в результате чего начинается истечение газа из линии (рис. 5.6).

Пусть в момент времени t (рис. 5.6,а) газ в линии массой m движется со средней по длине линии скоростью v . При этом скорости движения газа $v(0,t)$ у входа и $v(l,t)$ у выхода внутри линии будут отличаться от средней скорости. В этот момент времени частицы газа массой dm_1 перед входом в линию движутся со скоростью u_1 . Частицы газа массой dm_2 , которые в последующий момент времени выйдут из линии, движутся со скоростью $v(l,t)$.

В момент времени $(t + dt)$ (рис. 5.6,б) средняя скорость газа массой m изменяется и становится равной $(v + dv)$, а частицы газа на выходе массой dm_2 отсоединяются и начинают двигаться со скоростью u_2 . При этом поступившие в линию частицы массой dm_1 движутся со скоростью $v(0,t)$.

Найдем количество движения системы K в момент времени t :

$$K(t) = mv + v(l,t) dm_2 + u_1 dm_1.$$

В момент времени $t + dt$ количество движения станет равным:

$$K(t+dt) = m(v + dv) + v(0,t) dm_1 + u_2 dm_2.$$

Определим изменение количества движения рассматриваемой системы $dK = K(t+dt) - K(t)$ за время dt :

$$dK = m(v + dv) + v(0,t)dm_1 + u_2dm_2 - [mv + v(l,t)dm_2 + u_1dm_1] = m dv + v(0,t)dm_1 - v(l,t)dm_2 - u_1dm_1 + u_2dm_2. \quad (5.36)$$

Найдем равнодействующая всех сил (рис. 5.6), действующую на систему из трех масс dm_1 , m и dm_2 :

$$P^e = p_1(f - f_1) + p_m f_1 - p_2(f - f_2) - p_A f_2 - p_{Tf} f. \quad (5.37)$$

Подставляя (5.36) и (5.37) в уравнение изменения количества движения (5.31), получим:

$$m \frac{dv}{dt} + v(o,t) \frac{dm_1}{dt} - v(l,t) \frac{dm_2}{dt} - u_1 \frac{dm_1}{dt} + u_2 \frac{dm_2}{dt} = p_1(f - f_1) + p_M f_1 - p_2(f - f_2) - p_A f_2 - p_{TP} f.$$

Полученное уравнение запишем в следующем виде, подставив значения $dm_1/dt = G_{ex}$ и $dm_2/dt = G_{blx}$:

$$m \frac{dv}{dt} = p_1 f - p_2 f - p_{TP} f + \{(p_M - p_1) f_1 + (p_2 - p_A) f_2 - G_{ex} [v(o,t) - u_1] - G_{blx} [u_2 - v(l,t)]\}. \quad (5.38)$$

Покажем, что слагаемое в фигурных скобках равно нулю, т.е.:

$$\{(p_M - p_1) f_1 + (p_2 - p_A) f_2 - G_{ex} [v(o,t) - u_1] - G_{blx} [u_2 - v(l,t)]\} = 0.$$

Определим слагаемые $G_{ex} [v(o,t) - u_1]$ и $G_{blx} [u_2 - v(l,t)]$ из уравнений изменения количества движения для частиц газа, поступающих в линию и выходящих из нее:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= \frac{dm_1}{dt} [v(o,t) - u_1] = G_{ex} [v(o,t) - u_1] = (p_M - p_1) f_1; \\ \frac{dK_2}{dt} &= \frac{dm_2}{dt} [u_2 - v(l,t)] = G_{blx} [u_2 - v(l,t)] = (p_2 - p_A) f_2. \end{aligned}$$

С учетом полученных зависимостей слагаемое в фигурных скобках в уравнении (5.38) обращается в ноль:

$$\{(p_M - p_1) f_1 + (p_2 - p_A) f_2 - G_{ex} [v(o,t) - u_1] - G_{blx} [u_2 - v(l,t)]\} = 0.$$

Окончательно уравнение движения газа в линии для момента времени $t \geq l/c$ будет иметь следующий вид:

$$m \frac{dv}{dt} = p_1 f - p_2 f - p_{TP} f. \quad (5.39)$$

В результате для всего периода времени $t \geq 0$ из (5.35) и (5.39) получим:

$$m \frac{dv}{dt} = p_1 f - p_2^* f - p_{TP} f;$$

$$p_2^* = \begin{cases} p_{20}, & t < l/c; \\ p_2, & t \geq l/c. \end{cases}$$

Таким образом, рассматривая газ, как тело переменной массы, получили уравнения, полностью совпадающие с уравнениями (5.29):

Продолжим вывод уравнений, описывающих движение газа по линии.

Найдем массу газа внутри ЛС из уравнения изменения количества газа в линии:

$$\frac{dm}{dt} = G_{BX} - G_{BIX}. \quad (5.40)$$

Определим давление P_l . Для этого напишем уравнение изменения массы m_l в левой половине линии:

$$\frac{dm_l}{dt} = G_1 - G, \quad (5.41)$$

где G – средний по длине линии расход.

Определим массу газа:

$$m_l = \rho_l V_l,$$

где $V_l = fl/2$ – объем половины линии.

Выразим плотность ρ_l через давление p_l из уравнения состояния Клапейрона-Менделеева

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT}. \quad (5.42)$$

Тогда

$$m_1 = \frac{p_1}{RT} V_1 = \frac{p_1}{2RT} lf \quad (5.43)$$

Подставляя (5.43) в (5.41), после преобразований получим уравнение изменения давления в начале линии:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{2RT}{fl} (G_1 - G). \quad (5.44)$$

Найдем зависимости для вычисления расходов G_l и G . Из уравнения неразрывности потока имеем:

$$G_l = G_{BX}, \quad (5.45)$$

где G_{BX} - расход на входе в ЛС, который определяется в зависимости от характера течения по известным формулам.

Расход G выразим через скорость движения всей массы газа следующим образом:

$$G = \rho v f,$$

где v и ρ – средние по длине скорость и плотность газа.

Преобразуем это уравнение, выразив его через текущее значение массы газа m внутри линии:

$$G = \rho f v = \rho f l \frac{1}{l} v = \frac{m}{l} v. \quad (5.46)$$

Окончательно уравнение (5.44) с учетом (5.45) и (5.46) будет

иметь вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{2RT}{fl} \left(G_{BX} - \frac{m}{l} v \right). \quad (5.47)$$

Аналогично найдем зависимость для расчета давления P_2 .

Уравнение изменения массы во второй половине линии будет иметь вид:

$$\frac{dm_2}{dt} = G - G_2,$$

где m_2 - текущее значение массы газа во второй половине объема линии.

На основе этого уравнения аналогично ранее выполненным подстановкам (5.42), (5.43) и (5.46) и имея в виду, что $G_2 = G_{ВЫХ}$, получим следующее уравнение изменения давления газа P_2 :

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{2RT}{fl} \left(\frac{m}{l} v - G_{ВЫХ} \right). \quad (5.48)$$

Потери давления на трение по длине найдем из известного уравнения:

$$p_{TP} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} \text{sign}(v),$$

где ρ - средняя по длине линии плотность газа, которую определим из уравнения:

$$\rho = \frac{m}{lf}. \quad (5.49)$$

С учетом (5.49) уравнение для определения потерь давления на трение будет иметь вид:

$$p_{TP} = \lambda \frac{l}{d} \frac{mv^2}{2lf} \text{sign}(v). \quad (5.50)$$

Таким образом, обобщенная математическая модель пневматической линии, описывающая переходные процессы на ее концах, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= p_1 f - p_2^* f - p_{TP} f, \\ p_2^* &= \begin{cases} p_{20}; & t < l/c \\ p_2; & t \geq l/c, \end{cases} \\ \frac{dm}{dt} &= G_{\text{ex}} - G_{\text{вых}}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{2RT}{fl} (G_{\text{ex}} - \frac{m}{l} v), \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{2RT}{fl} (\frac{m}{l} v - G_{\text{вых}}), \\ p_{TP} &= \lambda \frac{l}{d} \frac{mv^2}{2fl} \text{sign}(v). \end{aligned} \right\}, \quad (5.51)$$

где выражения для расчета G_{ex} , $G_{\text{вых}}$ и λ зависят от того, ламинарное или турбулентное течение в линии и дросселях.

а) Математическая модель линии

при турбулентном течении газа в дросселях и в линии

Для определения расходов G_{BX} и $G_{\text{ВЫХ}}$ можно использовать известные формулы.

Рассмотрим наполнение линии при изотермическом течении. Тогда расход выразим следующим уравнением:

$$G_{\text{ex}} = \frac{f_1}{\sqrt{RT\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2}. \quad (5.52)$$

При истечении газа из линии имеем:

$$G_{\text{вых}} = \frac{f_2}{\sqrt{RT\zeta_2}} \sqrt{p_2^2 - p_A^2} . \quad (5.53)$$

Подставляя (5.52) и (5.53) в уравнения (5.51), получим математическую модель типовой линии при турбулентном течении газа в дросселях и в самой линии:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= p_1 f - p_2^* f - p_{TP} f; \\ p_2^* &= \begin{cases} p_{20}; & t < l / c \\ p_2; & t \geq l / c \end{cases} \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{RT}} \left(\frac{f_1}{\sqrt{\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{f_2}{\sqrt{\zeta_2}} \sqrt{p_2^{2*} - p_A^2} \right); \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{2RT}{fl} \left(\frac{f_1}{\sqrt{RT\zeta_1}} \sqrt{p_M^2 - p_1^2} - \frac{m}{l} v \right); \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{2RT}{fl} \left(\frac{m}{l} v - \frac{f_2}{\sqrt{RT\zeta_2}} \sqrt{p_2^{2*} - p_A^2} \right); \\ p_{TP} &= \lambda \frac{l}{d} \frac{mv^2}{2fl} \text{sign}(v) \\ \lambda &= \frac{0,3164}{\sqrt{\text{Re}}} \\ \text{Re} &= \frac{vd}{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

б). Моделирование процессов в пневматических линиях
с ламинарным течением газа

Массовый расход на входе G_{BX} для ламинарного режима течения определяется по формуле:

$$G_{BX} = c_1(p_M - p_1) \quad (5.55)$$

где c_1 - коэффициент пропорциональности расходной характеристики ламинарного дросселя или соответствующий коэффициент линеаризованной характеристики турбулентного дросселя.

Для ламинарного дросселя в виде цилиндрического канала длиной l_1 круглого сечения с площадью проходного сечения f_1 коэффициент c_1 вычисляется по формуле (5.15):

$$c_1 = \frac{f_1^2}{8\pi\eta l_1}.$$

Расход на выходе в случае ламинарного режима течения определяется по формуле:

$$G_{ВЫХ} = c_2(p_2 - p_A). \quad (5.56)$$

Выражение для вычисления потерь на трение P_{TP} при ламинарном течении газа имеет вид (5.7):

$$P_{TP} = \frac{8\pi\eta\rho l v}{f} \text{sign}(v).$$

Подставляя (5.55), (5.56) и (5.7) в исходную систему (5.51) и имея в виду, что для ламинарного течения $dm/dt = 0$ и $m = \rho l f$, получим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую переходные процессы в линии при ламинарном течении газа в дросселях и самой линии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{p_1 f - p_2^* - p_{TP}}{\rho l}; \\ p_2^* &= \begin{cases} p_{20}; & t < l/c \\ p_2; & t \geq l/c \end{cases} \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{2RT}{fl} [c_1(p_M - p_1) - \rho f v], \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{2RT}{fl} [\rho f v - c_2(p_2 - p_A)], \\ p_{TP} &= \frac{8\pi g \rho l v}{f} \text{sign}(v). \end{aligned} \right\}. \quad (5.57)$$

Найдем величину установившегося давления в конце пневматической линии. При установившемся течении газа можем записать $\frac{dv}{dt} = 0$, $\frac{dp_1}{dt} = 0$, $\frac{dp_2}{dt} = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений (5.58) становится системой алгебраических уравнений и принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{1y} f - p_{2y} - p_{TP}}{\rho l} &= 0; \\ c_1(p_M - p_{1y}) - \rho f v_y &= 0, \\ \rho f v_y - c_2(p_{2y} - p_A) &= 0, \\ p_{TP} &= \frac{8\pi g \rho l v_y}{f}. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему относительно давления p_{2y} на выходе из линии, получим:

$$p_{2y} = p_A + \frac{p_M - p_A}{\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{f^2 + 8\pi g l c_2}{f^2} \right)}.$$

Полученное решение полностью совпадает с решением системы дифференциальных уравнений в частных производных (5.28), полученное в работе /1/.

6. ВЫБОР ДИАМЕТРОВ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Одной из задач проектирования пневмосистем является выбор диаметров линий, при которых обеспечивается максимальное их быстродействие.

Эта задача наиболее актуальна при автоматизации процессов контроля и измерения; при разработках пневматических систем управления для управления быстродействующими процессами; при проектировании приводных устройств на базе пневматических моторов, позиционных и следящих пневмоприводов.

С увеличением диаметра линии возрастает и заполняемый объем линий, что затягивает переходный процесс. Однако, с другой стороны, при увеличении диаметра линии уменьшается ее сопротивление, поэтому переходный процесс будет проходить более интенсивно.

Следовательно, существует оптимальное значение диаметра линии, при котором переходный процесс проходит за минимальное время.

6.1. РАСЧЕТ ДИАМЕТРОВ ЛИНИЙ СВЯЗИ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Максимальное быстродействие будет достигнуто, если в момент прихода фронта волны давления на конец линии его величина будет иметь максимальное значение.

Расчет диаметров линий пневматических систем управления для турбулентного течения газа в линии

Рассмотрим движение газа до момента прихода волны давления на конец ЛС, т.е. для интервала $t = 0 \div l/c$. Определим условия, при которых за это время величина фронта давления будет иметь макси-

мальное значение.

Скорость нарастания давления в конце линии определим из уравнения (5.38):

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{2RT}{fl}(\rho f v - G_{bIX}).$$

На интервале $t < l/c$ имеем $G_{bIX} = 0$. Тогда:

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{2RT}{l} \rho v.$$

До момента времени $t = l/c$ давление в конце линии p_2 равно давлению p_A на выходе линии. Поэтому в этом уравнении давление p_2 представляет собой некоторое условное давление, которое «проявится» на конце линии только через время $t = l/c$, равное времени прохождения волны давления, т.е. времени прохождения звука по линии.

Из полученного уравнения следует, что скорость нарастания условного давления определяется скоростью газа. Поэтому критерием достижения максимальной величины давления фронта волны в линии может служить обеспечение в любой момент времени максимальной скорости газа v .

Таким образом, необходимо найти зависимость скорости движения газа от параметров линии и газа и определить значения параметров, при которых скорость газа будет максимальной.

Уравнение движения газа в ЛС для $t < l/c$ имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = p_1 f - p_2 f - p_{TP} f. \quad (6.1)$$

Выразим давление p_1 через скорость газа.

Запишем уравнение для определения расхода в начале линии (2.14) в следующем виде:

$$G_1 = \frac{f_1}{\sqrt{RT\zeta_1}} \sqrt{(p_M + p_1)} \sqrt{(p_M - p_1)}.$$

Упростим полученное уравнение:

$$G_1 = \frac{f_1}{\sqrt{RT\zeta_1}} \sqrt{(p_M + p_a)} \sqrt{(p_M - p_1)}.$$

Правомерность такой записи для давлений промышленной сети не более 0,5 МПа подтверждается хорошим совпадением результатов расчетов расхода G_1 по обеим формулам (рис. 6.1).

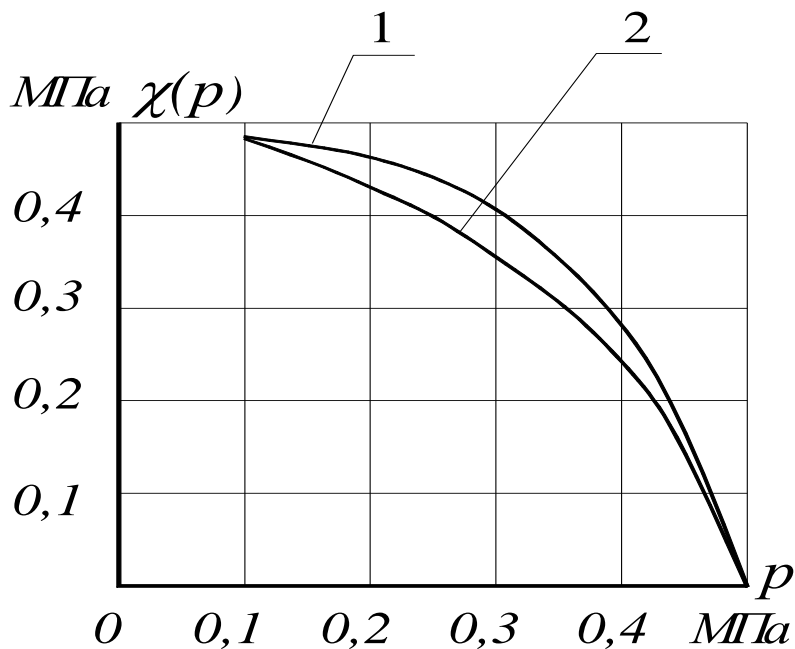


Рис. 6.1. К выбору расчетной зависимости

Кривые 1 и 2 представляют собой соответственно графики функций

$$\chi_1(p) = \sqrt{(p_M + p_1)} \sqrt{(p_M - p_1)}.$$

и

$$\chi_2(p) = \sqrt{(p_M + p_A)} \sqrt{(p_M - p_1)}.$$

Обозначим:

$$\frac{1}{\sqrt{RT\xi_1}} \sqrt{(p_M + p_A)} = \mu_1$$

Тогда уравнение для определения G_I будет иметь вид:

$$G_I = \mu_1 f_1 \sqrt{(p_M - p_1)}. \quad (6.2)$$

С другой стороны, расход в начале линии можем представить следующим образом /1/:

$$G_I = 2\rho f v \quad (6.3)$$

Решая совместно (6.2) и (6.3), получим:

$$p_1 = p_M - \frac{4\rho^2}{\mu_1^2} \left[\frac{f}{f_1} \right]^2 v^2. \quad (6.4)$$

Выразим диаметр d трубопровода через величину его сечения:

$$d = 2\sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

Тогда уравнение (6.4) для определения p_{TP} будет иметь вид:

$$p_{TP} = \frac{\lambda l \rho}{4} \sqrt{\frac{\pi}{f}} v^2. \quad (6.5)$$

Подставляя полученные выражения для p_1 , p_{TP} из уравнений (6.4) и (6.5) в (6.1), запишем уравнение изменения скорости газа в следующем виде:

$$\rho l \frac{dv}{dt} + \left[\frac{4\rho^2 f^2}{f_1^2 \mu_1^2} + \frac{\lambda l \rho}{4} \sqrt{\frac{\pi}{f}} \right] v^2 = (p_M - p_{20}).$$

Полученное уравнение по форме напоминает уравнение движения тела в вязкой среде, сила сопротивления в которой зависит от ко-

эффициента демпфирования при переменной ν^2 . Следовательно, максимальное быстродействие при передаче пневматического сигнала может быть достигнуто при минимальном значении коэффициента демпфирования:

$$\beta = \frac{4\rho^2 f^2}{f_1^2 \mu_1^2} + \frac{\lambda \rho l}{4} \sqrt{\frac{\pi}{f}}.$$

Значение β , при котором коэффициент демпфирования принимает минимальное значение, найдем из условия нахождения экстремумов функций:

$$\frac{d\beta}{df} = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получим:

$$\frac{d\beta}{df} = \frac{8\rho^2 f}{f_1^2 \mu_1^2} - \frac{\rho l \lambda \sqrt{\pi}}{8f \sqrt{f}} = 0, \quad (6.6)$$

откуда найдем площадь проходного сечения f ЛС:

$$f = \left[\frac{\lambda l f_1^2 \mu_1^2 \sqrt{\pi}}{64\rho} \right]^{\frac{2}{5}}. \quad (6.7)$$

Отсюда, имея в виду, что $f = \pi d^2/4$, находим величину диаметра ЛС:

$$d = \sqrt[5]{\frac{\lambda l f_1^2 \mu_1^2}{2\rho \pi^2}}.$$

Принимая плотность газа равной плотности при начальных условиях, в соответствии с уравнением состояния получим $\rho RT = p_A$. Тогда, подставляя ранее полученное значение

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{p_M + p_A}{RT \zeta_1}},$$

после преобразований окончательно получим:

$$d = \sqrt[5]{\frac{\lambda f_1^2 (p_M + p_A)}{2 \zeta_1 p_A \pi^2}}. \quad (6.8)$$

Докажем, что полученное сечение линии соответствует минимальному значению коэффициента β , т.е., максимальной величине скорости газа, а, следовательно, и максимальному давлению на конце линии. Для этого требуется доказать, что в точке экстремума вторая производная больше нуля, т.е. $d^2\beta/df^2 > 0$.

Дифференцируя вторично выражение (6.6), получим:

$$\frac{d^2\beta}{df^2} = \frac{8\rho^2}{f_1^2 \mu_1^2} + \frac{3\rho l \lambda \sqrt{\pi}}{16 f^2 \sqrt{f}}.$$

Очевидно, что при любых значениях параметров $d^2\beta/df^2 > 0$.

Следовательно, в точке экстремума функция принимает минимальное значение. Таким образом, значение f , вычисляемое по формуле (6.7), соответствует площади сечения, при которой обеспечивается максимальное быстродействие линии.

Расчет диаметров линий пневматических систем управления для ламинарного течения газа в линии

Уравнение движения газа вместо системы (5.57) для ламинарного течения можно представить в следующем виде [1/]:

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{2f}{c_1 l} + \frac{8\pi\eta}{f} \right] v = \frac{p_M - p_{20}}{\rho l}. \quad (6.9)$$

Из этого уравнения следует, что максимальное быстродействие линии будет обеспечено при минимальном значении коэффициента вязкого трения при скорости v . Обозначим этот коэффициент

$$\beta = \frac{2f}{c_1 l} + \frac{8\pi\vartheta}{f}. \quad (6.10)$$

Для определения диаметра линии, при котором достигается минимальное значение коэффициента β , найдем производную $d\beta/df$, приравняем ее к нулю и покажем, что при полученном значении f коэффициент принимает минимальное значение.

Дифференцируя выражение (6.10), получим:

$$\frac{d\beta}{df} = \frac{2}{c_1 l} - \frac{8\pi\vartheta}{f^2} = 0. \quad (6.11)$$

Тогда:

$$f = \sqrt{4\pi\vartheta l c_1}. \quad (6.12)$$

Отсюда, имея в виду, что $f = \pi d^2/4$, находим величину диаметра, при котором обеспечивается максимальное быстродействие при передаче пневматического сигнала по линии:

$$d = \sqrt{\frac{64\vartheta l c_1}{\pi}}. \quad (6.13)$$

Докажем, что найденное значение f соответствует минимальному коэффициенту демпфирования, а, следовательно, максимальной величине давления в конце линии. Для этого убедимся, что вторая производная

$$\frac{d^2\beta}{df^2} > 0.$$

Дифференцируя (6.11), получим:

$$\frac{d^2\beta}{df^2} = \frac{16\pi\vartheta}{f^3} > 0.$$

Следовательно, в точке экстремума функция $\beta = \varphi(f)$ принимает минимальное значение, что соответствует минимальному значению коэффициента демпфирования β .

6.2. РАСЧЕТ ДИАМЕТРОВ ТРУБОПРОВОДОВ ПНЕВМОПРИВОДОВ

В первом приближении диаметр трубопровода пневмопривода можно выбрать из условия обеспечения заданной скорости движения исполнительного органа. Рассмотрим вывод уравнений для выбора диаметра трубопровода пневмоцилиндра. Если принять, что массовый расход G_{TP} через трубопровод и расход в полости пневмоцилиндра G_{II} равны, т.е. $G_{TP} = G_{II}$, то можем записать следующее приближенное уравнение:

$$\rho f_{\varepsilon} v_{TP} = \rho F v_{II} ,$$

где ρ – среднее значение плотности газа, $f_{\varepsilon} = \frac{f}{\sqrt{\zeta}}$ – эффективная площадь проходного сечения трубопровода, f – фактическая площадь трубопровода, ζ – коэффициент сопротивления трубопровода, F – площадь поршня, v_{TP} – скорость газа в трубопроводе, v_{II} – скорость газа в полости пневмоцилиндра (скорость поршня).

Отсюда, принимая величину средней плотности газа в трубопроводе и в полости одинаковой, найдем площадь проходного сечения трубопровода:

$$f = F \frac{v_{II}}{v_{TP}} \sqrt{\zeta} \quad (6.14)$$

Выразим величину площади трубопровода f и площади поршня F через их диаметры d и D :

$$f = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{и} \quad F = \frac{\pi D^2}{4} .$$

Подставляя значения площадей в (6.14), найдем внутренний диаметр d трубопровода:

$$d = D \sqrt{\frac{v_{\Pi}}{v_{TP}}} \sqrt{\zeta} .$$

Таким образом, задаваясь значением скорости движения поршня и допустимым значением скорости газа в трубопроводе можно определить диаметр трубопровода для конкретного пневмоцилиндра.

Очевидно, что этот расчет является достаточно приближенным, т.к. не учитывает сопротивления линии, различие в плотностях газа в линии и полостях пневмоцилиндра, режимы течения.

Найдем зависимость для определения более точного значения эффективной площади трубопровода с учетом происходящих газодинамических процессов. Выполним расчет эффективной площади трубопровода из условия обеспечения заданной установившейся скорости движения поршня.

Для этого воспользуемся зависимостью (4.12), которая связывает конструктивные параметры пневмопривода с величиной установившейся скорости:

$$v_y = 0,9 \frac{f \sqrt{RT_M}}{F \sqrt{\zeta}} .$$

Отсюда, выразив площади трубопровода и поршня через их диаметры, получим следующую зависимость для вычисления внутреннего диаметра трубопровода:

$$d = D \sqrt{\frac{v_y \sqrt{\zeta}}{0,9 \sqrt{RT_M}}} .$$

Полученная зависимость позволяет получить более точное значение диаметра трубопровода. Окончательный выбор диаметров трубопроводов выполняется по результатам динамического анализа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример составления программы расчета пневмопривода

Рассмотрим пример построения программы расчета переходного процесса в пневмоприводе с торможением путем подачи противодействия в выхлопную полость. Программа написана на основе языка программирования MathCAD. Полный текст программы представлен на стр. 116 – 118.

В программе фигурными скобками и выносными линиями с номерами отмечены основные этапы составления программы. Рассмотрим подробнее последовательность составления программы в соответствии с обозначенной в программе нумерацией.

1. В начале программы задают шаг интегрирования, значения конструктивных параметров, параметров нагрузки, параметров газа, а также производят необходимые арифметические расчеты.

2. Далее создается массив, включающий определяемые переменные. В каждую строку этого массива MathCAD занесет численные значения внутреннего массива (п. 9), которые заносятся во внутренний массив на каждом шаге интегрирования. В результате размер массива (количество ячеек) будет зависеть от шага интегрирования и времени переходного процесса. Размер массивов MathCAD формирует автоматически.

В данном примере создается массив со следующими текущими значениями переменных: P_1 – давление газа в полости нагнетания, P_2 – давление газа в выхлопной полости, ddx – ускорение привода, t – время переходного процесса, V – скорость пневмопривода, x – координата перемещения пневмопривода. В дальнейшем этот массив в нашем случае используется для построения графиков переходных процессов.

3. Вычисления (решение дифференциальных уравнений) выполняются в программном модуле, который отделяется от массива вертикальной линией.

4. Расчет в программном модуле начинается с присвоения всем переменным их начальных значений. В программном модуле начальным давлению в полости нагнетания P_1 и выхлопной полости P_2 присваиваются соответственно значения атмосферного P_A и магистрального P_M давлений: $P_1 \leftarrow P_A$ и $P_2 \leftarrow P_M$. Остальным параметрам присваиваются числовые начальные значения (в данном случае – нулевые): $x \leftarrow 0$, $dx \leftarrow 0$, $ddx \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$, $j \leftarrow 0$ (j – номер ячейки в каждой строке массива). Числовые значения атмосферного P_A и магистрального P_M давлений заданы в начале программы вне программного модуля (см. п. 1).

5. После ввода начальных значений записывается логическое условие, которое дает команду на прекращение расчетов. В данном примере логическим условием является ограничение расчета переходного процесса по времени: $\text{while } t \leq 2.5$, т. е. расчет будет выполняться до тех пор, пока время переходного процесса не станет большим, чем 2,5 с.

6. Далее создается внутренний программный модуль.

7. Расчеты во внутреннем модуле начинаются с заполнения нулевых ячеек ($j = 0$) в каждой строке внутреннего массива, который стоит в конце программы (п. 9). Параметры этого массива для удобства обозначим аналогично обозначениям внешнего массива с добавлением в каждой строке одной буквы (можно ввести любые другие обозначения).

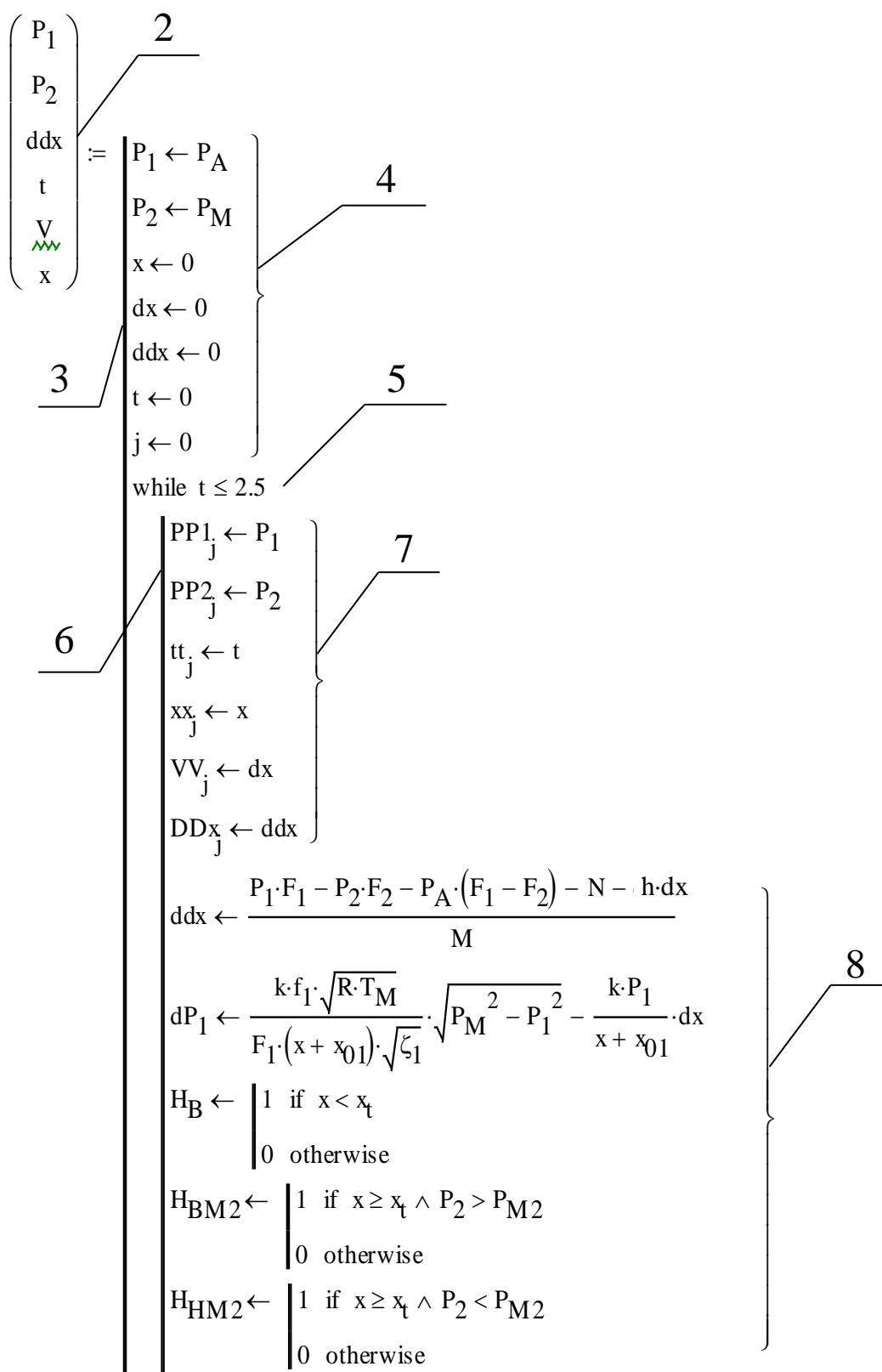
8. Во внутреннем программном модуле происходит решение уравнений математической модели привода, т. е. производятся расчеты всех переменных на каждом шаге интегрирования. В данном случае численное интегрирование выполняется по методу Эйлера, который отличается простотой и наглядностью и дает полное представление о физических процессах, т. к. по своей сути отражает известные физические законы.

9. Все получаемые в результате расчетов значения переменных заносятся во внутренний массив. Этот массив должен содержать такое же количество строк, как и внешний массив (п. 2). Все числовые значения внутреннего массива переносятся в соответствующие строки внешнего массива.

Программа расчета переходного процесса в пневмоприводе

$dt := 0.001$ – шаг интегрирования $R := 287$ – газовая постоянная $T_M := 290$ – температура газа в магистрали $k := 1.4$ – показатель адиабаты для воздуха $P_A := 98000$ – атмосферное давление $P_M := 500000$ – давление магистрали $P_{M2} := 320000$ – противодействие $S := 0.6$ – длина хода пневмоцилиндра $M := 10$ – масса подвижных частей $N := 30$ – статическая нагрузка $x_{01} := 0.08$ – приведенная координата $x_{02} := 0.08$ – приведенная координата $D_1 := 0.06$ – диаметр поршня $D_2 := 0.02$ – диаметр штока $D_L := 0.008$ – диаметр трубопровода $h := 300$ – коэффициент вязкого трения поршня $\zeta_1 := 65$ – коэффициент сопротивления подводящей линии $\zeta_2 := 100$ – коэффициент сопротивления выхлопной линии $\zeta_{2B} := 2000$ – коэффициент сопротивления выхлопной линии <div style="padding-left: 100px;">при торможении</div> $\zeta_{2H} := 67$ – коэффициент сопротивления линии противодействия <div style="padding-left: 100px;">ления</div> $x_t := 0.91 \cdot S$ – координата начала торможения $F_1 := \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2$ – площадь поршня $F_2 := \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - D_2^2)$ – полезная площадь поршня в штоковой по- <div style="padding-left: 100px;">лости</div> $f_1 := \frac{\pi}{4} \cdot D_L^2$ – площадь сечения подводящей линии $f_2 := \frac{\pi}{4} \cdot D_L^2$ – площадь сечения отводящей линии	<div style="font-size: 4em; line-height: 1;">}</div> <div style="text-align: center; margin-top: -10px;">1</div>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Продолжение программы расчета
переходного процесса в пневмоприводе



Продолжение программы расчета
переходного процесса в пневмоприводе

$$dP_2 \leftarrow H_B \cdot \frac{-k \cdot f_2 \cdot \sqrt{R \cdot T_M} \cdot \left(\frac{P_2}{P_M} \right)^{\frac{k-1}{2 \cdot k}} \cdot \sqrt{P_2^2 - P_A^2}}{F_2 \cdot (S - x + x_{02}) \cdot \sqrt{\zeta_2}} \dots$$

$$+ H_{HM2} \frac{k \cdot f_2 \cdot \sqrt{R \cdot T_M}}{F_2 \cdot (S - x + x_{02}) \cdot \sqrt{\zeta_{2H}}} \cdot \sqrt{P_{M2}^2 - P_2^2} \dots$$

$$+ -H_{BM2} \frac{k \cdot f_2 \cdot \sqrt{R \cdot T_M} \cdot \left(\frac{P_2}{P_M} \right)^{\frac{k-1}{2 \cdot k}} \cdot \sqrt{P_2^2 - P_{M2}^2}}{F_2 \cdot (S - x + x_{02}) \cdot \sqrt{\zeta_{2B}}} + \frac{k \cdot P_2}{S - x + x_{02}} \cdot dx$$

$$dx \leftarrow dx + ddx \cdot dt$$

$$x \leftarrow x + dx \cdot dt$$

$$P_1 \leftarrow P_1 + dP_1 \cdot dt$$

$$P_2 \leftarrow P_2 + dP_2 \cdot dt$$

$$t \leftarrow t + dt$$

$$j \leftarrow j + 1$$

$$ddx \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \vee x \geq S \\ ddx & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$dx \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \vee x \geq S \\ dx & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ S & \text{if } x \geq S \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_1 \leftarrow \begin{cases} P_M & \text{if } P_1 \geq P_M \\ P_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_2 \leftarrow \begin{cases} P_A & \text{if } P_A \geq P_2 \\ P_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

8

(PP1
PP2
DDx
tt
VV
xx)

9

На основании данных внешнего массива (п. 2) MathCAD позволяет построить графики изменения параметров, входящих в этот массив.

На рис. П1 изображены графики изменения параметров пневмопривода при торможении путем подачи противодавления в выхлопную полость.

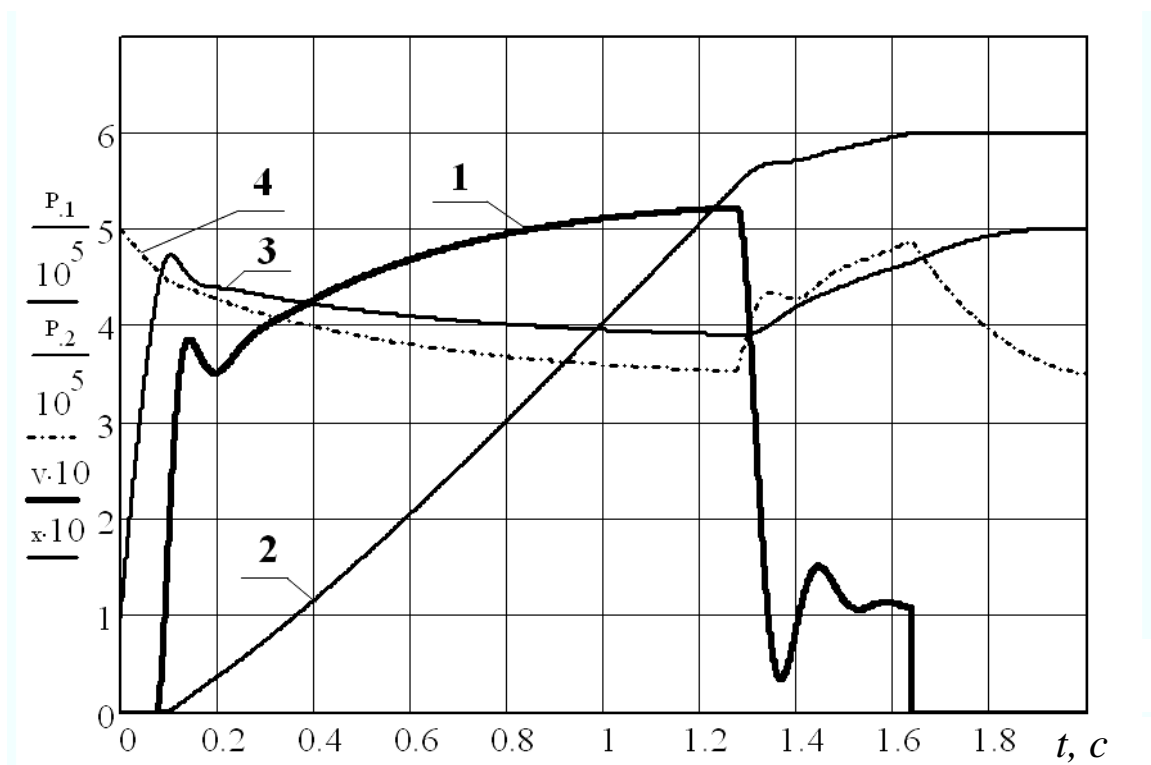


Рис. П1. График изменения скорости движения (1), координаты (2) и давлений в полости нагнетания (3) и выхлопной полости (4)

Из рисунка видно, что при достижении приводом координаты начала торможения $x_t = 0.91S = 0,546 \text{ м}$ (в момент времени $t \approx 1,3 \text{ с}$) происходит повышение давления в выхлопной полости (кривая 4). В результате скорость привода уменьшается до некоторой минимальной величины (кривая 1). Одновременно за счет снижения скорости давление в полости нагнетания повышается (кривая 3).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Донской А.С. Обобщенные математические модели элементов пневмосистем. – СПб.: СПГУТД, 2001. – 215 с.
2. Наземцев А.С. Гидравлические и пневматические системы. Часть 1. Пневматические приводы и средства автоматизации: Учебное пособие. – М.: ФОРУМ, 2007. – 240 с.
3. Погорелов В.И. Газодинамические расчеты пневматических приводов. - Л.: Машиностроение, 1971. - 182 с.
4. Герц Е.В., Крейнин Г.В. Расчет пневмоприводов. Справочное пособие. - М.: Машиностроение, 1975.
5. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. - М.: Недра, 1975. - 296 с.

Донской Анатолий Сергеевич

Математическое моделирование процессов в пневматических приводах

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 11.02.09. Формат Печать 60×90/16. Печать цифровая
Усл. печ. л. 7,25. Уч.-изд. л. 7,25. Тираж 3. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором
в цифровом типографском центре Издательства Политехнического университета:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Тел. (812) 540-40-14
Тел./факс: (812) 927-57-56