Dynamické systémy (klasifikace)
Diskrétní dynamické systémy

2007

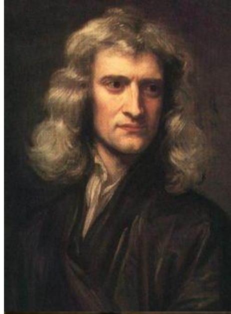
Robert Grepl, grepl@fme.vutbr.cz

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky,
FSI VUT v Brně

mechanika
mechatronika
biomechanika

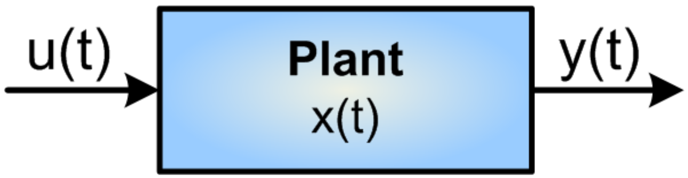
Definice: Dynamický systém

- Newton, Kepler, Tycho de Brahe:
  Jak předpovědět pohyb planet ?
  - *znám-li současnou polohu+rychlost*
  - *mohu určit následující chování*
- Filosofické důsledky:
  - kauzalita (determinismus), „osudové předurčení..."
    Laplace: *Představme si ideální inteligentní bytost, která by znala všechny síly působící v přírodě a polohu všech věcí v daném časovém okamžiku. Pokud by tato bytost byla všechny tyto údaje vyhodnotit a matematicky analyzovat, pak by byla schopna předpovědět pohybový stav a polohu všech těles, od největších až po jednotlivé atomy, znala by všechno. Viděla by minulost i budoucnost světa.*
  - ... ale uvidíme, že je to složitější...
- tyto základní úvahy se týkají deterministických systémů
- **Obecná definice:**
  dynamický systém =
  množina možných stavů + pravidla určující budoucí stav na základě znalosti stavu současného.




Klasifikace DS

- klasifikace DS:
  - **deterministický** - pravidla určují jednoznačně budoucí stav na základě znalosti současného (někdy nazýváme „kauzální“)
  - **stochastický** – budoucí stav určujeme s jistou pravděpodobností
- klasifikace DS podle času:
  - **diskrétní**
  - **spojitý**
- klasifikace DS podle linearity:
  - **lineární**
  - **nelineární**



Pozn.: můžeme tedy mluvit např. o:
lineárním deterministickém systému se spojitým časem

Příklady DS

- **Opakovaný hod kostkou** – stochastický diskrétní systém
- **Mechanický oscilátor** – lineární deterministický systém se spojitým časem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$

- **Exponenciální růst** – lineární deterministický diskrétní systém

$$x_{t+\Delta t} = kx_t$$

$$x(t=0) = x_0$$

RDN
Diskrétní dynamický systém

Robert Grepl
Ústav mechaniky těles, mechatroniky
a biomechaniky, FSI VUT v Brně
e-mail: grepl@fme.vutbr.cz

DDS: definice

- stavy systému jsou dány v diskrétních časových okamžicích – nikoli spojitě
- teorie diskrétních systémů začala vznikat během druhé světové války (RADAR)

Exponenciální růst

$$x_{n+1} = kx_n$$

- lineární deterministický systém s diskrétním časem
- diskrétní systém – příkladem může být např. růst populace při neomezených zdrojích
- charakter exponenciálního růstu mají např.
  - populační modely
  - modely vyčerpávání zásob surovin (ropa)
  - modely růstu znečištění
  - ...

Exponenciální růst – příklad „šachovnice“

- Král chtěl odměnit vynálezce šachu
- ten si přál jedno zrnko rýže na první políčko šachovnice, na každé další pak dvojnásobek
- tedy 1,2,4,8,16,32,64,128,.....
- šachovnice má 64 políček
- .... král se smál...
- .... ale jen chvilku.... pak dal vynálezce popravit...

- výsledek: 1.8e10 zrnek

Exponenciální růst – závěr

- je to nejjednodušší diskrétní deterministický systém
- aplikace:
  - populační modely
  - ekologie (suroviny,...)
- je zřejmé, že praktická použitelnost je omezená (neomezený stav. prostor)

- co je důležité:
  Člověk NENÍ schopen myslet exponenciálně !!!
  (naše myšlení je lineární)

Populační modely s omezením

$$x_{n+1} = x_n + r x_n \frac{k - x_n}{k}$$

- Verhulst (1838)

k – „kapacita“ systému

r – parametr „množení“ populace

- nelineární deterministický systém s diskr. časem

Chování:

- pro velké *k* a malé *x* se chová podobně jako exponenciální růst
- pro *rozumně* zvolené *r* se populace ustálí na hodnotě *k*

Logistická rovnice – zjednodušený tvar

- pro další zkoumání vezmeme k=1
- zvolíme jeden startovní bod $x_0=0.5$
- budeme měnit r

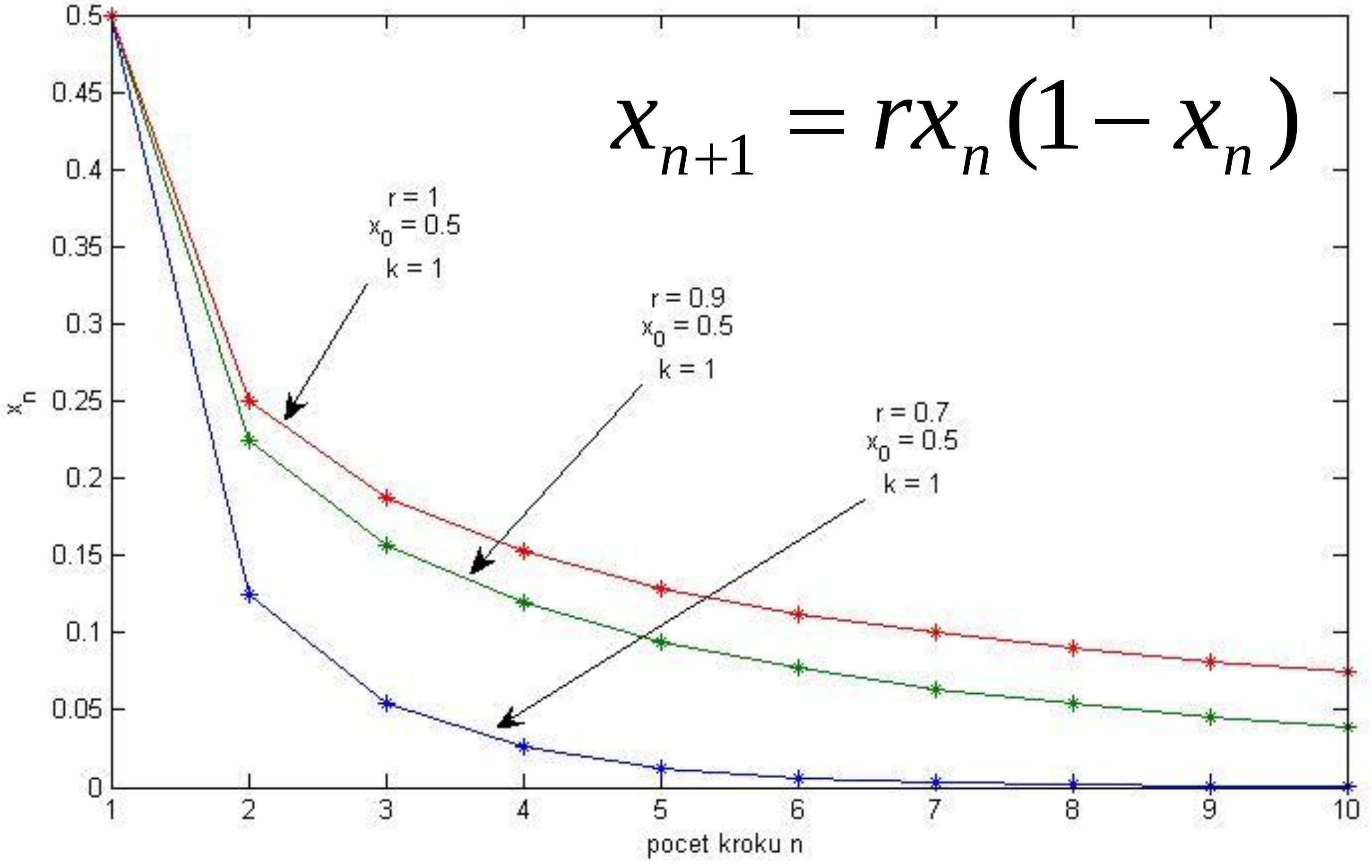
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

- Implementace v Matlabu:

```
kroku = 100
k = 1
x = 0.5
r = 0.5;
X(1)=x;
for i=2:kroku
    x = r*x*(k - x)/k;
    X(i)=x;
end
```

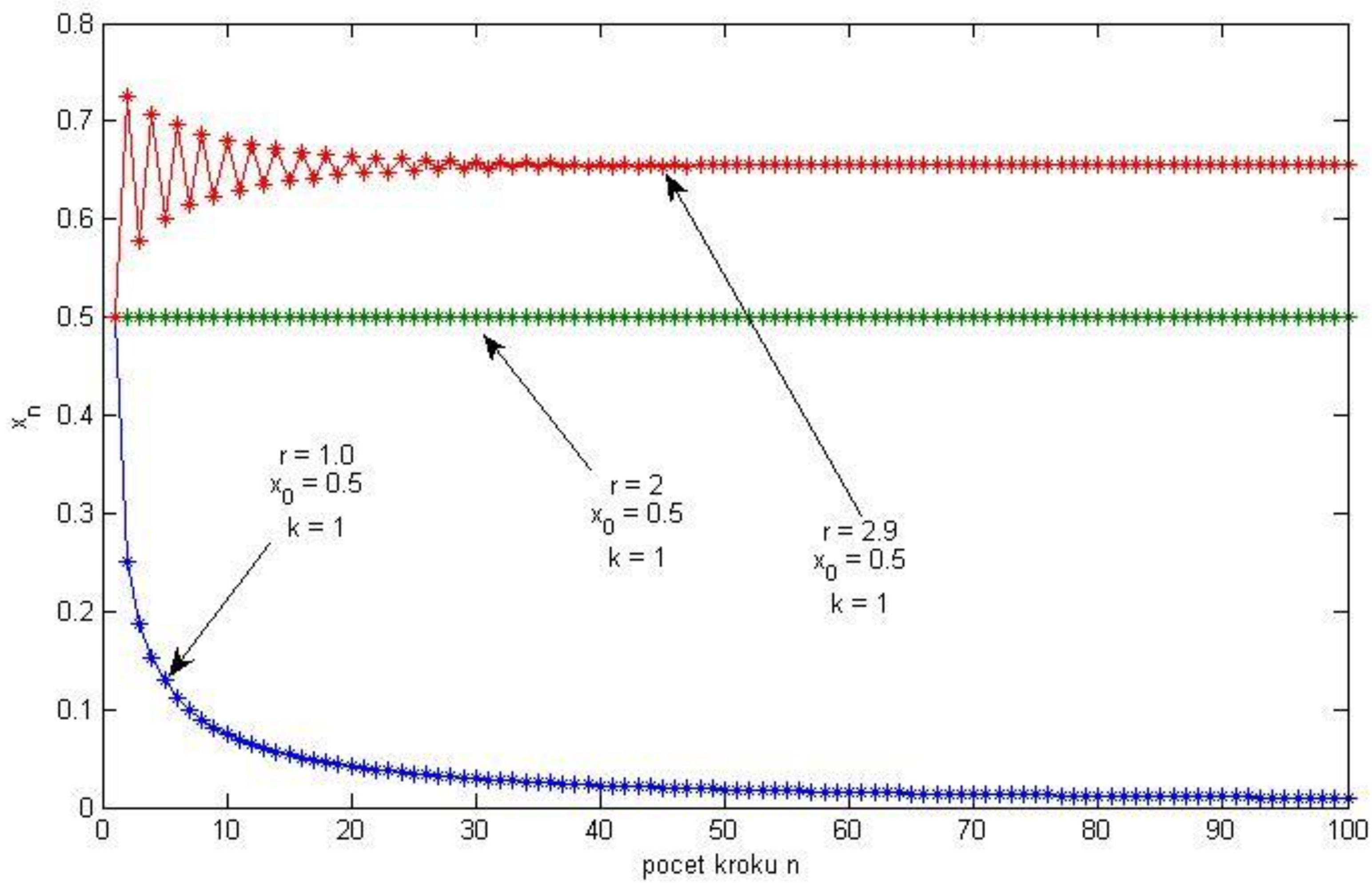
Logistická rovnice – *r = (0-1)*

- pro *r = (0-1)* konverguje k 0

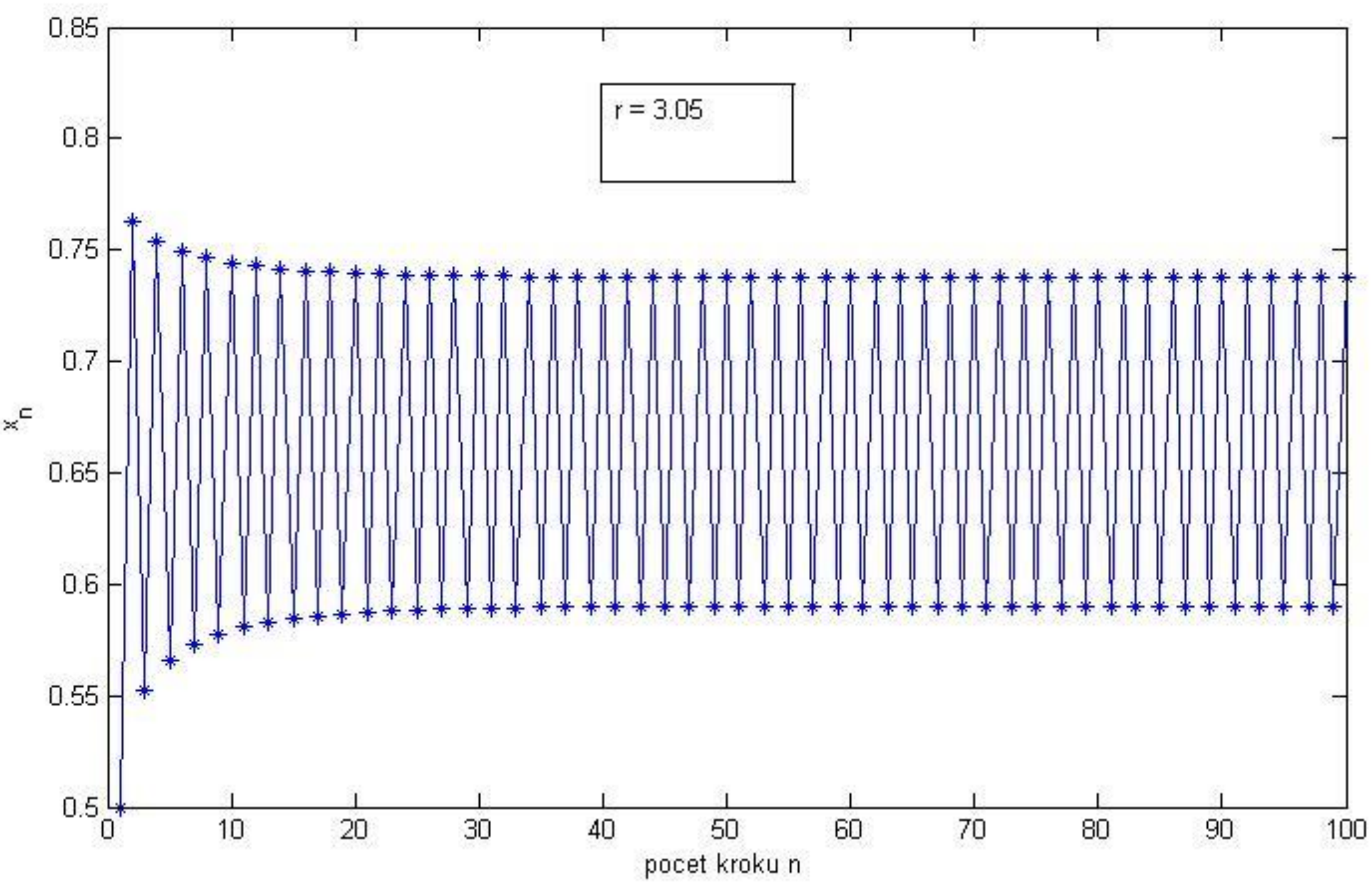


Logistická rovnice – *r* = *(1-3)*

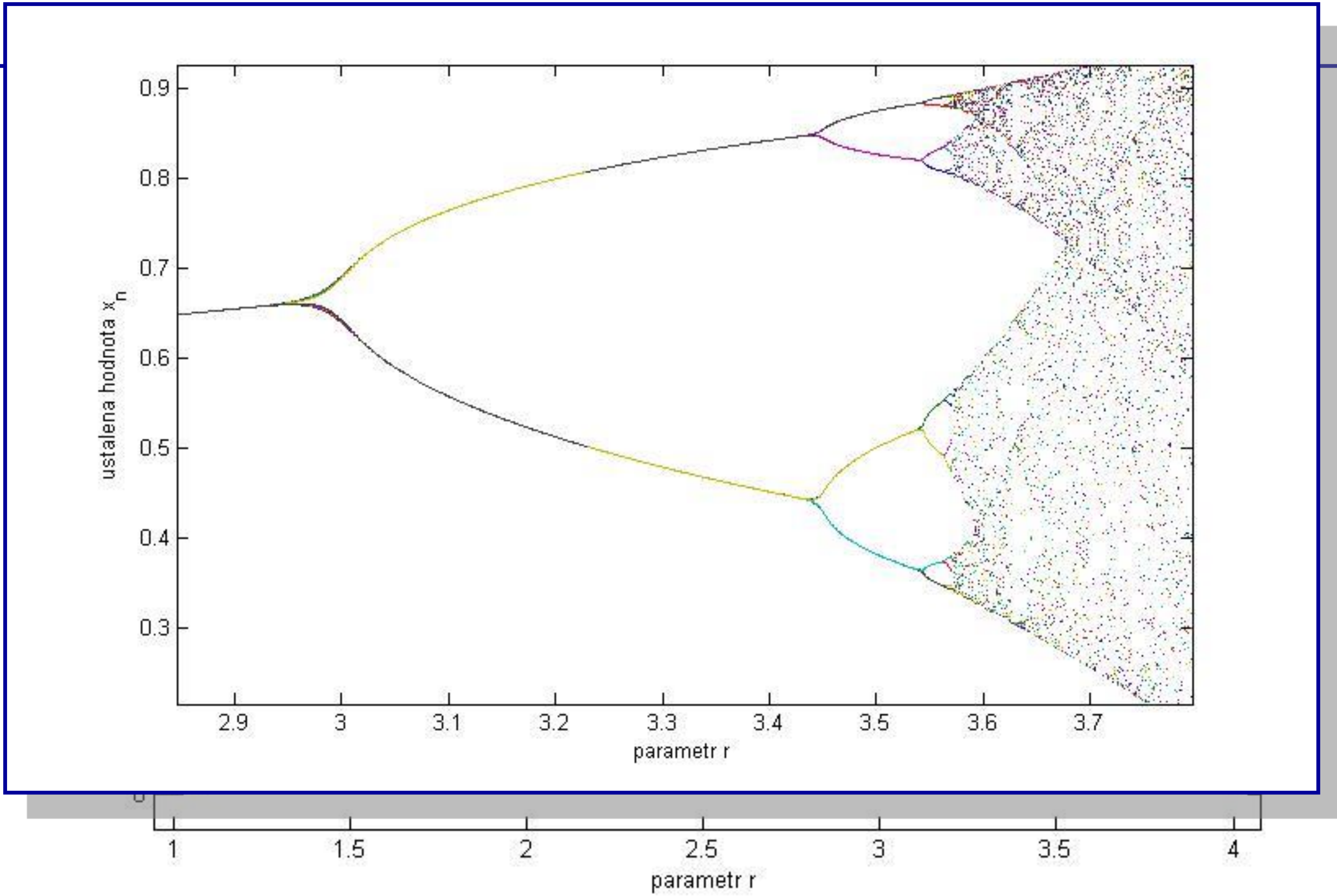
- pro *r* = *(1-3)* se hodnota ustálí na $\dfrac{r-1}{r}$



Logistická rovnice – *r* = *3.05*



Logistická rovnice – r = (3-4)



Možnosti chování deterministických systémů

- **divergence** – stav systému se vzdálí z počátečních podm. do nekonečna (diverguje)
  exponenciální růst
- **stabilní rovnovážná poloha** – systém se po jisté přechodové době ustálí v rovnovážné poloze
  konvergence populačního modelu k jedné hodnotě
- **periodické chování –** systém se po jisté době ustálí na periodické trajektorii
- **deterministický chaos –** paradoxní situace: deterministický systém produkuje *dlouhodobě* nepředvídatelné chování, které se pozorovateli jeví jako chaotické (náhodné)
  populační model pro r = (3.... – 4)

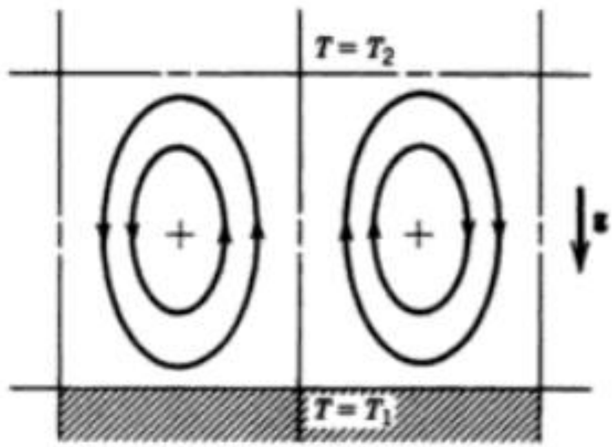
Lorenzův atraktor

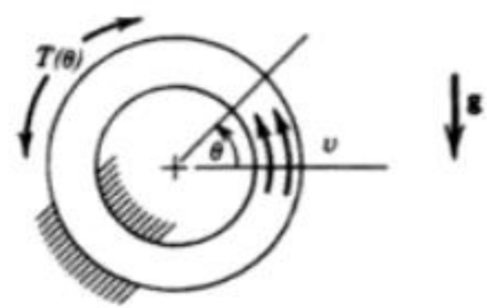
- Edward Lorenz 1963
- modelování atmosféry
- hranatá krabice s plynem, zdroj tepla dole
- konvekce – plyn vytvoří válec
- zjednodušený model
- parametry
  - delta – Prandtlovo číslo (poměr viskozity a tepelné vodivosti)
  - r – rozdíl mezi teplotou horní a dolní strany systému
  - b – poměr šířky a výšky bedny s plynem
- proměnné
  - x – rychlost rotace válce
  - y – rozdíl teplot mezi protějšími stranami válce
  - z – odchylka teploty od střední čáry

$$\dot{x} = \delta(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

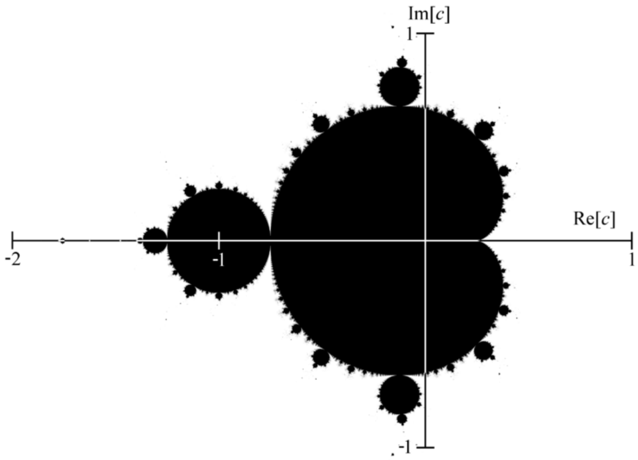




Deterministický chaos

- deterministický (kauzální) systém produkuje chování, které se pozorovateli jeví jako náhodné (!!!!!!)
- stabilita ve velkém, nestabilita v malém (konečný fázový objem)
- **Motýlí efekt**
  E.N.Lorenz: *„Zamávání motýlím křídlem nad Brazílií může způsobit tornádo nad Texasem."*
- **Počasí** – příklad dlouhodobě nepredikovatelného systému – mez předpověditelnosti:
  - v 70.letech 3,5 dne
  - dnes je asi 7dní
  - teoretické maximum: asi 3-4 týdny
- další aspekty a souvislosti:
  - fraktály
  - Mandelbrotova množina
  - ...

Mandelbrotova množina



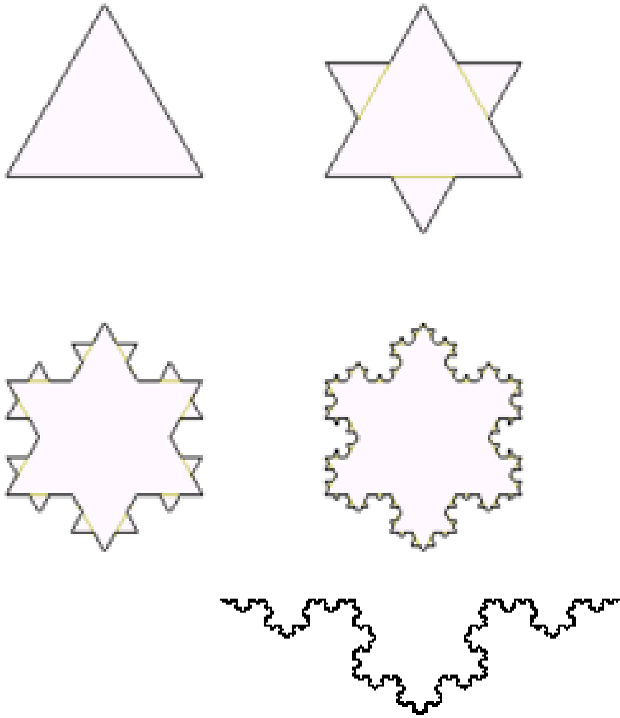
- diskrétní systém

$$z_0 = 0; \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c\,.$$

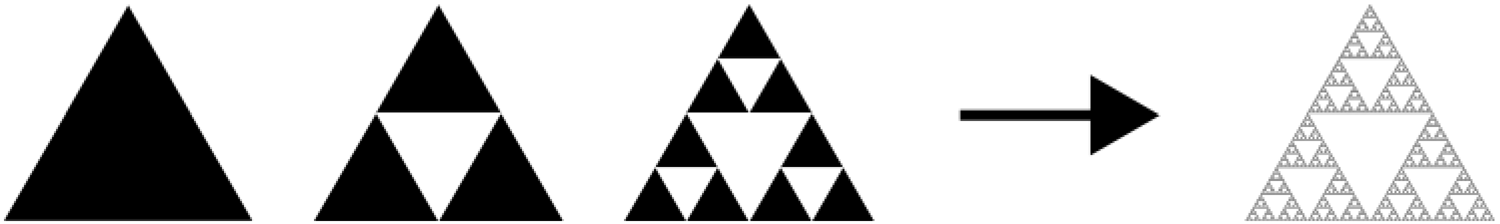
  - kde c je komplexní číslo
- c je prvkem množiny pokud je limita posloupnosti konečná nebo neexistuje
- lze dokázat, že pokud |c|>2, pak není prvkem množiny
- nejjednodušší zobrazení =
  - černá – je prvkem množiny
  - bílá – není
- barevné = barva určuje počet kroků do $|z_n|>2$

Fraktály

- „jak moc daný objekt vyplňuje prostor“
- Kochové vločka
  (čára nekonečné délky na konečné ploše)
  - D = 1,2619



- Sierpinského trojúhelník
  - D = 1,585



Populační dyn.: dva druhy na jednom teritoriu

- dva druhy s počtem *x* a *y*
- nezávisle by se jejich populace vyvíjely podle Verhulst:

$$x_{n+1} = x_n + r_1 x_n \frac{k_1 - x_n}{k_1}$$

$$y_{n+1} = y_n + r_2 y_n \frac{k_2 - y_n}{k_2}$$

Populační dyn.: dva druhy na jednom teritoriu

- pokud se vzájemně ovlivňují (Lotka-Volterra model):

$$x_{n+1} = x_n + r_1 x_n \frac{k_1 - x_n}{k_1} + a y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + r_2 y_n \frac{k_2 - y_n}{k_2} + b x_n$$

- možnosti:
  - soutěž $a < 0 \wedge b < 0$
  - spolupráce $a > 0 \wedge b > 0$
  - *x* je predátor, *y* kořist $a > 0 \wedge b < 0$

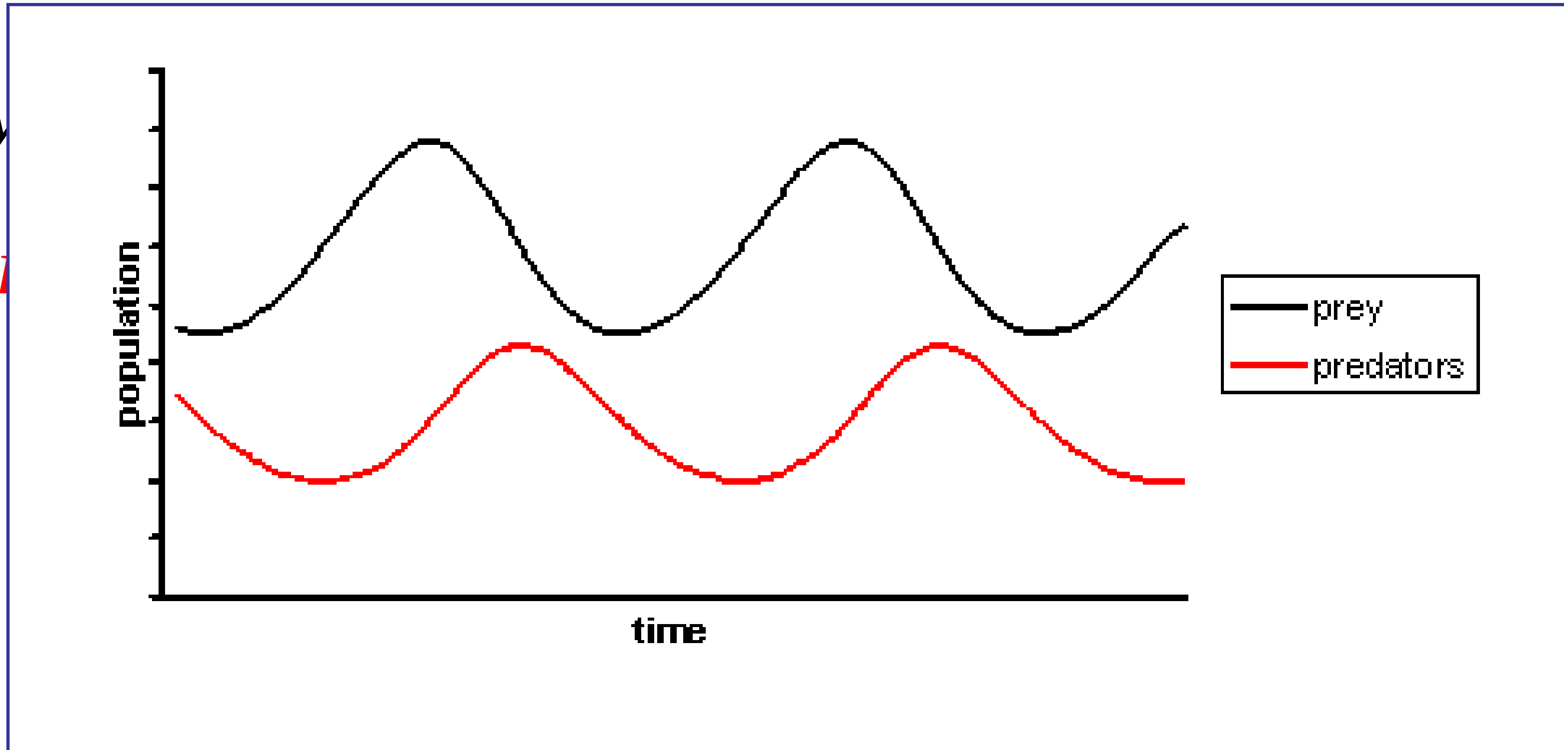
Populační dyn.: predátor – kořist

- uvažujeme-li pro predátora $k_1 = \infty$ (nepotřebuje zdroje prostředí)
- pak můžeme názorněji přepsat:

$$x_{n+1} = x_n - r_1 x_n + a y_n$$

y

r_1, r



Diskrétní stochastický systém: příklad

- mám **speciální** košík s bílými a černými kuličkami
- mám vytaženou 1 černou a 1 bílou kuličku
- **pravděpodobnost vytažení č/b kuličky je úměrná počtu aktuálně vytažených**

$$p_b = \frac{n_b}{n_b + n_č}$$

Diskrétní stochastický systém: příklad

- aplikace, „filosofický důsledek“:
  - Např. úspěch firmy na trhu, získání segmentu trhu,....
    (př. kazety VHS vs. betamax)

Buněčný automat (cellular automaton)

- vícerozměrný DDS
- GOL (**Game of Life**) – J.H.Conway (1970)
  - 2D grid (tedy každá buňka má 8 sousedů)
  - pravidla S23/B3 (Survival / Born)
    - pokud je buňka mrtvá a má 3 a více sousedů, pak v příštím kroků oživne
    - pokud má buňka 2 nebo 3 sousedy a je živá, pak zůstává živá
    - jinak buňka umírá nebo zůstává mrtvá (osamění, přemnožení)
  - (existují i jiná pravidla)
  - diskrétní deterministický systém

Buněčný automat – motivace

- ukázka systému, který při extrémně jednoduchých pravidlech může produkovat složité (nepredikovatelné) chování
- stabilní chování vs. deterministický chaos
- simulace sociálních systémů (segregace ve městech), biologických systémů,...

Závěr

- co to je „dynamický systém"
- diskrétní DS
  - definice
  - simulace
  - exponenciální růst
  - logistická rovnice
- i velmi jednoduchý diskrétní systém může produkovat velmi složité chování
- různé typy chování DDS
- lze aplikovat i na DS se **spojitým** časem
- Doporučená literatura:
  - Meadows et al.: *Limity růstu*
  - Donella a Dennis Meadows, J. Randers: *Překročení mezí*
  - James Gleick: *Chaos: vznik nové vědy*
- Použitá literatura
  - F. C. Moon Chaotic and fractal dynamics (books.google)