Matemàtica Discreta

Primavera 2022

Llista 1 - Aritmètica entera y modular

1. Determineu el *mcd* de les següents parelles de nombres: (45, 75), (252, 198), (162, 222), (666, 1414), (721, 448) i (19187, 208635). En cada cas escriviu la identitat de Bézout.

2. Calculeu el mcm de 721 i 448 i de 19187 i 208635.
(Recordeu que $\mathrm{mcm}(a, b)\mathrm{mcd}(a, b) = ab$.)

3. Donats $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimers, demostreu que el *mcd* de $a + b$ i $a^2 + b^2$ és 2 si a i b son senars i 1 en cas contrari.

4. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$ nombres enters.

(a) Proveu que si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, llavors $\mathrm{mcd}(a^n, b^n) = 1$, per a tot nombre natural n.

(b) Proveu que si $\mathrm{mcd}(a, b) = d$, llavors $\mathrm{mcd}(a^n, b^n) = d^n$, per a tot nombre natural n.

5. Hem instal.lat Linux en dues particions diferents: hda1 i hda2. Cada cert nombre de cops que engeguem l'ordinador es comproven aquestes particions. La partició hda1 es comprova cada 37 vegades i la hda2 cada 20. Demostreu que algun cop es comproven ambdues particions simultàneament. Calculeu la freqüència en que es comproven simultàneament.

6. Busqueu nombres m, n tals que $1185m + 990n = 60$.

7. El Dr. Fliess (conegut per la seva relació amb S. Freud) explica, en el seu llibre *Der Ablauf des Lebens: Grundlegung zur exakten Biologie* que la vida humana està governada per un cicle masculí de 23 dies i un cicle femení de 28. Aquest és l' origen de la teoria dels bioritmes. Concretament, Fliess explica en el seu llibre com molts moments crítics de la vida d'una persona es poden explicar sumant o restant un nombre enter de cicles femenins i masculins. Demostreu que, en el moment en que el propi Fliess va morir, el nombre de cabells que tenia en el cap era suma o resta d'un múltiple de 23 i un múltiple de 28, confirmant així la seva teoria.

8. La conjetura de Goldbach afirma que tot nombre parell mejor que 2 es pot expressar com a suma de dos nombres primers. Per exemple: $4 = 2{+}2$, $6 = 3{+}3$, $10 = 3{+}7 = 5{+}5$, $24 = 5{+}19 = 7{+}17 = 11{+}13$. Comprova la conjectura per als nombres 50, 98, 100 i 144. Fes un programa en el llenguatge que preferiu que comprovi la conjectura per tots els nombres menors que 2000000.

9. Construïu les taules de sumar i de multiplicar de $\mathbb{Z}/8$.

10. Determineu quins elemenst són invertibles i quins divisors de 0 a $\mathbb{Z}/8$, $\mathbb{Z}/12$, $\mathbb{Z}/13$ y $\mathbb{Z}/25$.

11. Demostreu que un nombre és divisible per tres si, i només si, la suma dels seus dígits en base decimal es múltiple de 3.

12. Sigui n un nombre natural sigui $(x_k x_{k-1} \ldots x_0)_{10}$ la seva representació en base 10. Sigui $\theta(n) = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$. Demostreu que

$$n \equiv \theta(n) \mod 9.$$

13. La coneguda "prova del 9" es fonamenta en la propietat $\theta(xy) \equiv xy \equiv \theta(x)\theta(y)$, conseqüència del problema anterior. Utilitzeu aquest fet per demostrar que dos dels següents productes són incorrectes.

1. $5362 \times 15749 = 84646138$
2. $8483 \times 1542 = 13172786$
3. $9000 \times 1836 = 90.$

14. Calculeu mòdul 43 les potencies de 2 següents: 2^{32}, 2^{43}, 2^{200}.

15. Resoleu les equacions següents:

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 5 \pmod 7), & 103x &\equiv 444 \pmod{999},\\ 3x &\equiv 6 \pmod 9, & 980x &\equiv 1500 \pmod{1600},\\ 19x &\equiv 30 \pmod{40}, & 128x &\equiv 833 \pmod{1001},\\ 9x &\equiv 5 \pmod{25}, & 987x &\equiv 610 \pmod{1597}. \end{aligned}$$

16. Trobeu una solució del sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

a $\mathbb{Z}/7$. Existeix alguna solució a $\mathbb{Z}/3$?

17. Resoleu l'equació $x^2 - 3x - 3 = 0$ a $\mathbb{Z}/7$.

18. Busqueu un nombre enter C no divisible per 11 i tal que la sucessió de nombres $a_n = C^n$ verifiqui l'equació

$$a_n \equiv a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{mód } 11.$$

19. Busqueu el darrer dígit en base 10 de 7^{1000}.

20. Calculeu $11^{289} \quad \text{mód } 360$ i $7^{418} \quad \text{mód } 120$

21. Resoleu

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 12 \pmod{13}, & 4x &\equiv 7 \pmod{15},\\ 7x &\equiv 3 \pmod{11}, & 3x &\equiv 5 \pmod{16},\\ 5x &\equiv 3 \pmod{14}, \end{aligned}$$

22. Calculeu $\varphi(2018)$, $\varphi(2019)$, $\varphi(2020)$, $\varphi(2021)$ y $\varphi(2022)$.

23. Busqueu una solució del sistema

$$\begin{cases} 10x \equiv 2 & \text{mód } 4 \\ 3x \equiv 1 & \text{mód } 5 \\ x \equiv 2 & \text{mód } 3 \end{cases}$$

24. Per a fer el recompte de tropes després d'una batalla, els generals xinesos distribuïen els soldats en files de diferent longitut i comptaven la quantitat de soldats restants a cada distribució. A partir d' aquest residuos calculaven el total. Un general tenia 1200 soldats en iniciar una batalla. Una vegada finalitzada, li sobraven 3 soldats si feia files de 5, sobraven 3 si eren de 6, sobrava 1 si les files eren de 7 i cap si eren de 11. Quants soldats van sobreviure a la batalla?

25. Un pastor té un cert nombre d' ovelles. Ens ha dit que si les compta de 2 en 2 sobra una, si las compta de 3 en 3 sobren 2, si les compta de 4 en 4 sobran 3, si ho fa de 5 en 5 en sobren 4, si ho fa de 6 en 6 en sobren 5 i si les compta de 7 en 7 n'hi sobren 6, però no té més de 500 ovelles. Quantes ovelles té el pastor?

26. Codifiqueu el missatge

cautela ens persegueixen

fent servir el xifrat afí $C \equiv 7P + 10 \pmod{26}$

27. Decodificar el missatge

prqvuv xtl fj sfjtu fu x of xtofmpl

que ha estat codificat fent sevir el cifrat afí $C \equiv 17P + 15 \pmod{26}$.

28. S'interseca el missatge xifrat

wambdahndvnmnzomov ndkmerndpu

que va ser xifrat utilitzant el codi afí en l'alfabet de 27 letres (La A a Z de 0 a 25, i l' espai en blanc 26). Sabem que la primera lletra és la j, i que la segona és o. Determineu la clau del xifrat i llegiu el missatge.