4.1 Trobeu sistemes d'equacions dels subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = < (1,2,3,4),(1,3,1,2) >$$
$$H = < (1,2,3,4),(1,2,1,2) > .$$

4.2 Representem els vectors d'un espai vectorial E per les seves coordenades relatives a una base e_1, e_2, e_3, e_4.

(i) Trobeu valors de a i b per tal que el subespai $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, generat per

$$v_1 = (1,2,3,4),\ v_2 = (1,2,1,1),\ v_3 = (a,b,2,3)$$

tingui dimensió 2.

(ii) Escolliu una base de F i amplieu-la a una base $\mathfrak{B}$ de E.

(iii) Determineu les coordenades dels vectors e_1, e_2, e_3, e_4 en la base $\mathfrak{B}$ de l'apartat anterior.

4.3 Determineu la dimensió, una base i equacions dels subespais generats per les següents famílies de vectors de $\mathbb{R}^n$:

$$A = \{(1,3,2),\ (1,0,-1)\ (2,-3,5)\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$B = \{(0,2,-1),(4,3,-2),(4,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$C = \{(1,2,1,3),(2,1,4,3),(1,3,2,1)\} \subset \mathbb{R}^4,$$

4.4 Doneu una base del subespai de $\mathbb{R}^4$ que té equacions

$$x - 2y + z - t = 0$$
$$2x - 5y - z - t = 0.$$

El mateix pel subespai d'equacions

$$x - 2y + z - t = 0$$
$$2x - 4y - z - t = 0$$

4.5 Calculeu la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^n$ generat pels vectors $u_1 = (1,1,0,\dots,0)$, $u_2 = (0,1,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $u_{n-1} = (0,0,\dots,1,1)$, $u_n = (1,0,\dots,0,1)$.

4.6 Fixada una base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ d'un espai vectorial E

(i) Demostreu que $G = \{(x,y,z,t)_{\mathfrak{B}} \in E \mid x+y = z+t = 0\}$ és un subespai vectorial de E; calculeu-ne la dimensió i una base.

(ii) Sigui F el subespai vectorial de E generat per $v_1 = (1,1,0,0)_{\mathfrak{B}}$, $v_2 = (1,0,1,0)_{\mathfrak{B}}$ i $v_3 = (1,0,0,1)_{\mathfrak{B}}$; trobeu-ne equacions i una base.

4.7 Sigui E un espai vectorial. Sigui F un subespai vectorial de E amb base $(v_1, \dots, v_r)$. Sigui G un subespai vectorial de E amb equacions $f_1 = 0, \dots, f_s = 0$. Proveu que $F \subset G$ si, i només si, $v_1, \dots, v_r$ són solucions del sistema d'equacions $f_1 = 0, \dots, f_s = 0$.

4.8 Sigui E un espai vectorial de dimensió n. Sigui F un subespai vectorial de E amb equacions $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$, sigui G un subespai vectorial de E amb equacions $g_1 = 0, \ldots, g_s = 0$. Proveu que $F \subset G$ si, i només si, el sistema d'equacions $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0, g_1 = 0, \ldots, g_s = 0$ té rang r.

4.9 Calculeu les dimensions i bases de $G + F$ i de $G \cap F$, on F i G són els subespais de l'exercici 4.6.

4.10 Considerem el subespai F de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 2, 2, 6)$, $(0, 2, 4, 4)$ i el subespai G generat per $(1, 0, -1, 2)$, $(2, 3, 0, 1)$. Determineu les dimensions, una base i equacions dels subespais F, G, $F + G$, $F \cap G$.

4.11 Considereu els següents subespais de $\mathbb{R}^4$:

$$F := \langle (1,0,1,0),\, (0,2,1,0) \rangle, \quad G = \{(x,y,z,t)\,;\, x - z = y = 0\}.$$

Trobeu dimensions, bases i equacions implícites dels subespais F, G, $F \cap G$ i $F + G$.

4.12 Considerem el següents vectors de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{array}{lll} u_1 := (1,1,0,0,0,0), & u_2 := (1,0,1,0,0,0), & u_3 := (1,0,0,1,0,0), \\ v_1 := (0,1,1,0,0,0), & v_2 := (0,1,0,1,0,0), & v_3 := (0,1,0,0,1,0), \\ w_1 := (0,0,1,1,0,0), & w_2 := (0,0,1,0,1,0), & w_3 := (0,0,1,0,0,1). \end{array}$$

Siguin

$$F := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad G := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad H := \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Trobeu bases de $(F \cap G) + H$, de $(F \cap H) + G$ i de $(H \cap G) + F$.

4.13 Considerem a $\mathbb{R}^4$ els subespais vectorials donats per

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0,\, y + z + t = 0,\, x + 2z + t = 0\}, \\ F_a &= \langle\, (1,1,2,1),\, (0,2,0,1),\, (-1,3,a,1)\, \rangle. \end{aligned}$$

(i) Trobeu bases de cada un d'ells, segons els valors del paràmetre a.

(ii) Trobeu equacions per F_a, segons els valors de a.

(iii) Trobeu els subespais $H \cap F_a$ i $H + F_a$ en cada cas. Doneu-los per equacions implícites i determineu bases de cada un d'ells.

4.14 En un espai vectorial de dimensió quatre, representats els seus vectors per les seves coordenades en una base prèviament fixada, es consideren els subespais:

$$\begin{aligned} F &=< (1,-3,2,4), (2,0,1,2) > \\ G &=< (3,1,1,2), (1,-1,1,2), (1,3,-1,2) > \\ H &=< (2,0,1,2), (1,-1,1,2), (1,3,0,2) > \end{aligned}$$

i el subespai T d'equacions

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2z - t &= 0 \\ x - y - t &= 0. \end{aligned}$$

Determineu quines inclusions hi ha entre ells.

4.15 Trobeu quines condicions ha de complir un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ per tal que

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1, 2, 0),\ (1, 0, -1) \rangle \oplus \langle (a, b, c) \rangle.$$

4.16 Considerem, per a cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunt de vectors $E_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax - y + z = 0\}$.

(i) Demostreu que, per a tot a, E_a és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determineu per a quins valors de a es compleix $\mathbb{R}^3 = E_a \oplus \langle (1, 1, 1) \rangle$.

4.17 Considerem els següents vectors de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 0, 1, 0),\ v_2 = (1, 0, 0, 0),\ v_3 = (1, 0, -1, 1),\ v_4 = (2, 0, 0, 1).$$

Comproveu quines de les sumes

$$\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_3, v_4 \rangle,\ \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_4 \rangle,\ \langle v_1, v_4 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$$

són sumes directes i quines no.

4.18 Considerem el subespai F de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1, -1, 2, 3), (2, 1, -3, 0), (3, 3, -8, -3)$. Doneu dos complementaris diferents de F en $\mathbb{R}^4$.

4.19 Considerem els subespais de $\mathbb{R}^4$, $F =< (1, 2, -2, -1)$ i G amb equació $2x+y+2z = 0$. Comproveu que $F \subset G$ i doneu un complementari de F en G.

4.20 Siguin F, G i H tres subespais vectorials d'un espai vectorial E.

(i) Determineu $\dim(F + G + H)$ en funció de $\dim F, \dim G, \dim H, \dim((F + G) \cap H)$ i $\dim(F \cap G)$.

(ii) Siguin $(u_1, \ldots, u_r), (v_1, \ldots, v_s), (w_1, \ldots, w_t)$ bases de F, G i H, respectivament. Proveu que $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t)$ és base de $F+G+H$ si, i només si $(F+G)\cap H = \{\vec{0}\}$ i $F\cap G = \{\vec{0}\}$.