Col·lecció de Problemes

SOLUCIONS

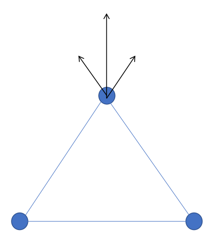
5. Electrostàtica

5.1. La força resultant serà la suma vectorial de la força que fa cadascuna de les dues càrregues de la base. Pel dibuix ja podem veure que la component x es cancel·larà i ens quedarà només la component y:

$$F_y^{TOT} = 2F_y = 2F\cos 30 = 2\kappa\frac{q_1q_2}{l^2} = 0,17 \text{ N}.$$

Per tant, el camp elèctric serà $E_x = 0, E_y = 1,7 \cdot 10^4$ N/C. Pel que fa al potencial, cal sumar els potencials de cada esfera:

$$V = V_1 + V_2 = 2\kappa\frac{q_1q_2}{l} = 6 \cdot 10^4 \text{ v}.$$



5.2. $E = 7,6 \cdot 10^4 \hat{x}$ N/C; $V = 0$.

5.3. El el punt A el potencial serà la suma:

$$V = \kappa\left(\frac{q_1}{OA} + \frac{q_2}{CA}\right).$$

Tenint en compte que la distància CA és $\sqrt{3^2+4^2}$ obtenim $V \approx -33,75$ volts.

Pel que fa al camp elèctric, hem de fer el càlcul vectorialment:

$$E_x = \kappa\frac{q_1}{4^2} - \kappa\frac{q_2}{5^2}\cos\alpha$$

. i com $\cos\alpha$ és 4/5 obtenim que $E_x \approx -5{,}1$ N/C.

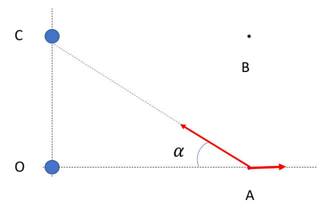
Per la component y només intervé la càrrega que està en C:

$$E_y = \kappa\frac{q_2}{5^2}\sin\alpha \approx 4{,}3 \text{ N/C}.$$

El mòdul serà $|\vec{E}| \approx 6,7$ N/C, i l'angle que fa el camp amb l'eix X és $\approx 130°$ (es pot calcular, per exemple, amb el producte escalar).

Finalment, el treball per portar una càrrega d'un Coulomb des del punt A fins al punt B el calcularem a partir de la diferència de potencial entre els punts:

$$W_{A\to B} = q(V_A - V_B) = q\kappa\left(\frac{q_1}{OB} + \frac{q_2}{CB}\right) \approx 9,45 \text{ joules}$$



5.4. a) 4500 v; b) 0, 013 joules.

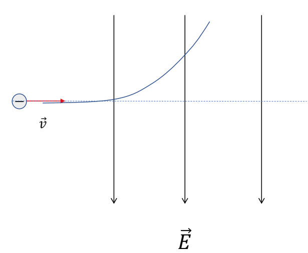
5.5. L'acceleració la trobem a partir de la força:

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m},$$

o sigui $a \approx 1,72 \cdot 10^{16}$ m/s^2. Seguirà una trajectòria parabòlica ascendent, perquè el camp apunta cap a baix i l'electró té càrrega negativa. Suposant que a l'inici està a $y = 0$ la trajectòria vindrà donada per:

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{ax^2}{v_\circ^2} \approx 2,2 \cdot 10^5 x^2.$$

$$x = 2 \cdot 10^5 t$$



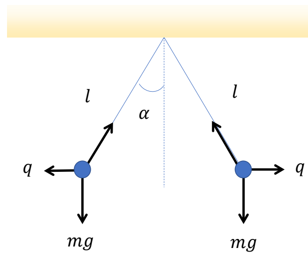
5.6. Cal plantejar l'equilibri de forces per separat en l'eix X i en l'eix Y. Si T és la tensió del fil i F la repulsió coulombiana, les equacions són:

$$F = T \sin 30$$

$$T \cos 30 = mg,$$

per tant la forá coulombiana queda:

$$F = mg \tan 30 = \kappa\frac{q^2}{d^2}.$$



La distància és $2l \sin 30$. Per tant:

$$q \approx 2,5\mu C$$

I la tensió del fil és $\approx 0,11$ N, que augmentarà si anem augmentant la càrrega.

5.7. $a = 2,1 \cdot 10^{13}$ m/s^2; $t = 5,3$ ns.

5.8. Com és un 'problema unidimensional, treballarem només en l'eix de les x. La relació entre el camp i el potencial és $Edx = -dV$. Per tant:

$$V(x) = -\int_{x_\circ}^{x} dx E(x).$$

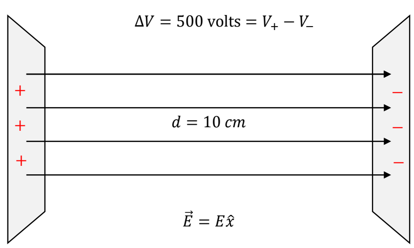
i si el camp és constant:

$$V(x) - V(x_\circ) = -E(x - x_\circ).$$

Aleshores, en el primer cas ($V(0) = 0$) $V(x) = -200x$, i en el segon (V(1)=0) $V(x) = 200 - 200x$.

5.9. El camp elèctric entre les plaques d'un condensador plano-paral·lel es calcula suposant que tenim plaques il·limitades (aproximació acceptable si considerem un punt llunyà a la vora i les dimensions de les plaques són molt majors que la distància entre elles). El camp és:

$$E = \frac{V}{d} = 5000 \quad \text{N/C}.$$



El signe del potencial està definit de manera que una càrrega positiva tendirà a disminuir el seu potencial (la seva energia potencial). Per tant, la placa positiva tindrà el potencial més elevat. El treball el calcularem suposant que la força és constant entre les plaques:

$$W = Fd = Eq_e d = 8 \cdot 10^{-17} \quad \text{joules},$$

on hem fet anar que la càrrega d'un electró és $q_e = 1,6 \quad 10^{-19}$ C. Es defineix la unitat d'energia *electronvolt* com la variació d'energia potencial d'un electró en una variació de potencial d'un volt. O sigui:

$$1 \quad \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \quad \text{joules.}$$

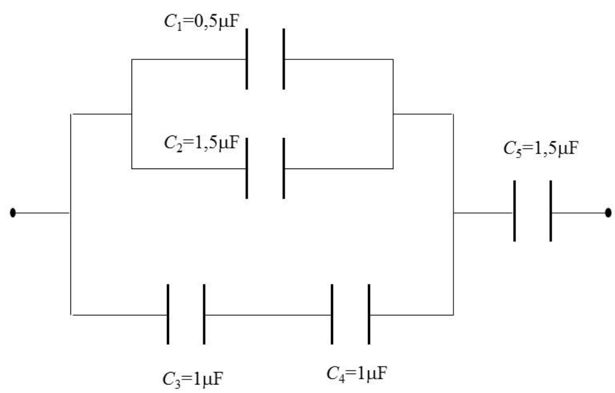
De manera que el treball fet pel condensador és igual a $W = 500$ eV. Aquesta és, amb un signe menys (perquè disminueix), justament la variació de la seva energia potencial, que serà igual a la variació de la seva energia cinètica (amb signe positiu, perquè augmenta). La velocitat és aproximadament $1,3 \cdot 10^7$ m/s, massa propera a la velocitat de la llum com per a que aquest tractament sigui correcte.

5.10. Hem de calcular el condensador equivalent del circuit de la figura. Cal recordar que quan tinguem condensadors en paral·lel:

$$C_{eq} = \sum_i C_i,$$

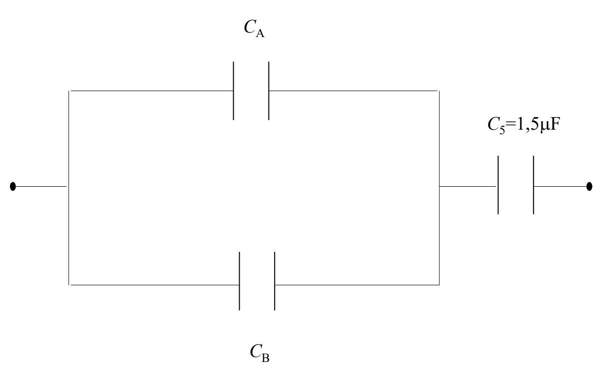
i en sèrie:

$$C_{eq}^{-1} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$



Per a fer-ho, començarem per calcular les capacitats equivalents C_A i C_B, que són:

$$C_A = C_1 + C_2 = 2\mu\text{F}.$$
$$C_B = \left(C_3^{-1} + C_4^{-1}\right)^{-1} = 1,5\mu\text{F}.$$



Ara calculem la capacitat equivalent de A i B,

$$C_{AB} = C_A + C_B = 2,5\mu\text{F}.$$

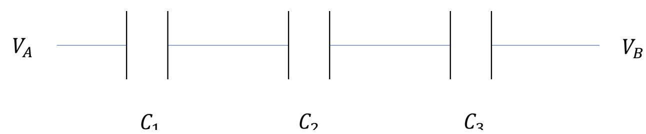
I, finalment, ens queden dos condensadors en série:

$$C_{eq} = \left(C_{AB}^{-1} + C_5^{-1}\right)^{-1} \approx 0,9 \quad \mu F.$$

5.11. Considerem els condensadors de la figura, amb $C_1 = 2\mu$F,$C_2 = 5\mu$F i $C_3 = 6\mu$F. D'altra banda $V_B - V_A = 1000$ volts. Aleshores, la capacitat equivalent no és més que la suma de les inverses:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

O sigui $C_{eq} = 1,15\mu$F.



Per calcular la càrrega hem de recordar que:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Així que la càrrega total és:

$$Q = C_{eq}V_{AB} = 1150\mu\text{C}.$$

I com estan en sèrie, aquesta serà la càrrega a tots ells. El que variarà serà la tensió entre els seus borns:

$$V_1 = 577 \text{ v}, V_2 = 231 \text{ v}, V_3 = 192 \text{ v}.$$

Finalment, l'energia elèctrica emmagatzemada U ve donada per:

$$U = \frac{1}{2}QV = 0,577 \text{ joules}.$$

5.12. El treball el fa el camp creat per l'esfera, que és (a l'exterior):

$$E = \kappa\frac{Q}{r^2},$$

que li correspon un potencial:

$$V = \kappa\frac{Q}{r}.$$

El treball fet per portar una càrrega q de A ($x_A = 50$ cm) fins a B ($x_A = 120$ cm) serà igual a menys la variació d'energia potencial:

$$W_{A\to B} = q(V_A - V_B) \approx 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ joules}.$$

5.13. Sabem que la relació entre el potencial creat per una esfera carregada a una distància r és:

$$V_r = \kappa\frac{Q}{r},$$

i el potencial d'una esfera:

$$V = \kappa \frac{Q}{R}.$$

Per tant:

$$R = \frac{L}{10} = 10 \quad \text{cm}.$$

La càrrega la cacularem a partir de la densitat:

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = 10^{-4} \quad \mu\text{C}.$$

El potencial és:

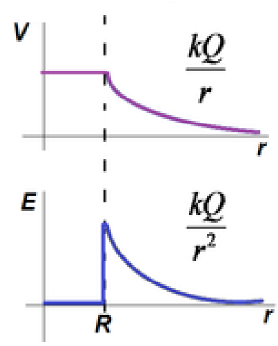
$$V = \kappa \frac{Q}{R} == 9 \quad \text{v}.$$

El camp elèctric just a la superfície el podem calcular fent:

$$E = \kappa \frac{Q}{R^2} = 90 \quad \text{N/C}.$$

I, finalment, el camp elèctric a l'interior d'un conductor en equilibri electrostàtic és sempre zero. Per justificar-ho, podem fer anar, per exemple, el teorema de Gauss, perquè les càrregues es situen a la superfície:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}.$$



5.14. a) $Q'_1 \approx 16,67$ μC, $Q'_2 \approx 3,33$ μC. b)$\sigma_1 \approx 133$ μ C/m^2, $\sigma_2 \approx 663$ μC/m^2

5.15. $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$, que és la mateixa proporció que pels camps elèctrics $\frac{E_1^S}{E_2^S} = \frac{R_2}{R_1}$.