Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Prova 3 (GRUP TG). Curs 2020-2021

1. Sigui $D \subset \mathbb{R}$ i $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sigui $a \in D$ pel que existeixen els límits
$$\lim_{x \to a} f(x) = l_f \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = l_g.$$
Aleshores proveu que
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = l_f + l_g.$$

2. Considereu la successió definida de manera recurrent:
$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{4a_n^2}{1 + 4a_n^2}, n \geq 1.$$
   (a) Proveu que és monòtona.
   (b) És convergent? En cas afirmatiu, quin és el límit?

3. Calculeu els límits:
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{\sqrt{2x+5} - \sqrt{-x-1}} \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + \ln(x^2 - 2) + 4x^2}{3\sqrt[3]{x^8}}.$$

4. Determineu per a quins valors $a, b \in \mathbb{R}$ és contínua la funció
$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} \sin(2x) & \text{si } x < 0 \\ |x - 3| + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ bx \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) & \text{si } x \geq 3\ . \end{cases}$$
Calculeu amb aquests valors d'a i b els límits:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(2) $a_1 = 2$, $a_2 = \dfrac{4 \cdot 4}{1 + 4 \cdot 4} = \dfrac{16}{17}$.

a) Si és monòtona serà decreixent perquè $a_1 \geq a_2$.

Anem a comprovar que $a_n \geq a_{n+1}$.

Efectivament

$$a_n \geq a_{n+1} = \frac{4a_n^2}{1+4a_n^2},$$

ja que $a_n > 0$ i

$$1 + 4a_n^2 \geq 4a_n$$
$$\Updownarrow$$
$$(1-2a_n)^2 \geq 0.$$

b) Tenim una successió decreixent i acotada inferiorment ja que $a_n \geq 0$ sempre, aleshores és convergent.

Com que $\lim_n a_n = l$,

$$\lim_n \frac{4a_n^2}{1+4a_n^2} = \frac{4l^2}{1+4l^2}$$

obtenim

$$l = \frac{4l^2}{1+4l^2},$$

i d'aquí $\boxed{l = 1/2}$.

(3)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+x^2-2x}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{-x-1}} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{-x-1}\right)}{2x+5-(-x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x\cancel{(x+2)}(x-1)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{-x-1}\right)}{3\cancel{(x+2)}} = \frac{(-2)(-3)(1+1)}{3}$$

$$= 4.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x+\ln(x^2-2)+4x^2}{3\sqrt[3]{x^8}} \underset{\substack{e^x\to 0\\ x\to-\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-2)+4x^2}{3x^{8/3}}$$

Una vegada sabem que $e^x \to 0$ quan $x\to -\infty$ podem fer el límit quan $x \to +\infty$ perquè totes les x's estan elevades a un parell.

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-2)}{3x^{8/3}} + \frac{4x^2}{3x^{8/3}} = 0,$$

perquè per x prou gran

$$0 \leq \frac{\ln(x^2-2)}{3x^{8/3}} \leq \frac{\ln x^2}{3x^{8/3}} = \frac{2\ln x}{3x^{8/3}},$$

i aquest quocient convergeix a 0 per teoria.

(4) Als intervals $(-\infty, 0)$, $(0,3)$ i $(3,+\infty)$ les funcions són contínues. Estudiem els punts $x=0$ i $x=3$.

A $x=0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x}\sin(2x) = \lim_{y\to 0^-} 2a\cdot\frac{\sin(2x)}{2x} = 2a,$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} |x-3|+1 = 4,$$

i així $\boxed{a=2}$.

A $x=3$,

$$\lim_{x\to 3^-} |x-3|+1 = 1,$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^+} bx \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 3b\ln\frac{10}{9},$$

i així $3b\cdot\ln\frac{10}{9} = 1 \longrightarrow \boxed{b = \frac{1}{(\ln\frac{10}{9})3}}$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{a}{x}\cdot\sin(2x) = 0 \quad \text{perquè } |\sin x| \leq 1.$$

$$\lim_{x\to +\infty} bx\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = 0.$$