Exercici 15 Demostreu que si p es un nombre natural primer, aleshores, per a $1 \leq k \leq p-1$, p divideix el nombre combinatori $\frac{p!}{k!(p-k)!}$. Es certa aquesta propietat si p no es primer?

Solucio 15

Suposarem que p no divideix $\frac{p!}{k!(p-k)!}$ i arribarem a una contradiccio, si p no divideix $\frac{p!}{k!(p-k)!}$ tenim que $\exists q, r \in \mathbb{N}$ amb $0 < r < q$ tals que $pq + r = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ si multimpliquem a tots dos costats de la igualtat ens queda $k!(p-k)!pq + k!(p-k)!r = p!$ i per tant $p|k!(p-k)!pq + k!(p-k)!r$ i com $p|k!(p-k)!pq \implies p|k!(p-k)!r$ ara com tenim que p es primer sabem que o be $p|k!$ o be $p|(p-k)!$ o be $p|r$ si $p|k!$ tenim que $p|1$ o $p|2$ o ... $p|k$ i totes aquestes opcions son impossibles al ser $k \neq 0$ i $k < p$. I analogament es procedeix a demostrar que p no pot dividir $(p-k)!$ i per tant ens queda que $p|r \implies \exists c$ tal que $pc = r$, substituint a la diviso natural incial ens queda que $pq + pc = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p(q+c)$ pero aixo implica que $p|\frac{p!}{k!(p-k)!}$, que contradiu la nostra suposcio inicial i per tant $p|\frac{p!}{k!(p-k)!}$. Si p no es primer no es certa agafant com a contraexemple $p = 6$ i $k = 2$ tenim que $\frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$, i clarament 6 no divideix a 15.