Exercici 25.

Demostreu que $3^n + 2 \cdot 17^n$ no és un quadrat perfecte per a cap valor de $n \in Z_{>0}$. (Pista: podeu considerar congruències mòdul 16).

Solució 25.

LEMA 1: Sigui x un quadrat perfecte, ha de cumplir $x \equiv 0 \pmod 8$ o $x \equiv 1 \pmod 8$ o $x \equiv 4 \pmod 8$

DEMOSTRACIÓ:
Sigui x un nombre enter:
Si $x \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 8$
Si $x \equiv \pm 1 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 8$
Si $x \equiv \pm 2 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 8$
Si $x \equiv \pm 3 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 8$
Si $x \equiv 4 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 8$

LEMA 2: Sigui x un quadrat perfecte, ha de cumplir $x \equiv 0 \pmod 3$ o $x \equiv 1 \pmod 3$

DEMOSTRACIÓ:
Sigui x un nombre enter:
Si $x \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 3$
Si $x \equiv \pm 1 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 3$

Suposem que existeix un x de la forma $3^n + 2 \cdot 17^n$ tal que sigui un quadrat perfecte.

Tenint en compte que $17 \equiv 2 \pmod 3$
$\Rightarrow [3^n + 2 \cdot 17^n]_3 = [2 \cdot 2^n]_3 = [2^{n+1}]_3 = [(-1)^{n+1}]_3$
Aplicant el lema 2 $\Rightarrow (-1)^{n+1} = 1 \Rightarrow$ n és senar.

Tenint en compte que $17 \equiv 1 \pmod 8$, $3 \equiv 3 \pmod 8$ i $9 \equiv 1 \pmod 8$
Com havien deduit n és senar, per tant, $n = 2z + 1$ per a un $z \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow [3^{2z+1} + 2 \cdot 17^{2z+1}]_8 = [9^z \cdot 3 + 2 \cdot 1^{2z+1}]_8 = [1^z \cdot 3 + 2 \cdot 1^{2z+1}]_8 = [5]_8$

Per tant, hem arribat a una contradicció ja què per a tot n senar $n \equiv 5 \pmod 8$ i per a que sigui un quadrat perfecte ha de complir el lema 1.
Com hem arribat una contradicció, no existeix cap arrel quadrat de la forma donada.

ALTERNATIVA:

Una alternativa seria demostrar l'altre cas amb congruència 8:

Si n és parell $n = 2z$ per a un $z \in \mathbb{Z}$.

Tenint en compte que $17 \equiv 1 \pmod 8$ i $9 \equiv 1 \pmod 8$
$\Rightarrow [3^{2z} + 2 \cdot 17^{2z}]_8 = [9^z \cdot 3 + 2 \cdot 1^{2z+1}]_8 = [1^z + 2 \cdot 1^{2z+1}]_8 = [3]_8$

Arribariem a contradicció amb el lema 1.