10

El el que segueix, $\mathbb{R}[X]_n$ denota l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i grau no superior a n.

10.1 Determina si són lineals les aplicacions $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donades per les regles

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (z-x, x-y, y-z) \\ g(x,y,z) &= (z-x-1, x+y, y-z) \\ h(x,y,z) &= (zx, xy, yz). \end{aligned}$$

Escriu-ne la matriu relativa a la base canònica en cas afirmatiu.

10.2 Es consideren espais vectorials E, amb base e_1, e_2, e_3, i F, amb base v_1, v_2, v_3, v_4. Escriu la matriu, relativa a aquestes bases, de l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow F$$

que compleix

$$\begin{aligned} f(e_1) &= v_1 - v_2 + v_3 \\ f(e_2) &= 2v_1 + v_2 - v_4 \\ f(e_3) &= 3v_2 - 2v_3 - v_4. \end{aligned}$$

Determina la imatge de $w = e_1 + 3e_2 + 2e_3$ i tots els vectors que tenen la mateixa imatge que w.

10.3 Es considera un espai vectorial E, amb base e_1, e_2, e_3, i l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que compleix $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ i $f(e_3) = 0$. Escriu-ne la matriu relativa a la base citada. Demostra que $f^3 = 0$.

10.4 Es considera un espai vectorial E, amb base e_1, e_2, e_3, i l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que compleix

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_3) &= 3e_1 - 2e_2 - 6e_3. \end{aligned}$$

Escriu-ne la matriu relativa a la base citada. Determina els vectors $v \in E$ que compleixen $f^2(v) = f(v)$.

10.5 Demostra que l'aplicació derivació

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{R}[X]_3 &\longrightarrow \mathbb{R}[X]_3 \\ P(X) &\longrightarrow dP(X)/dX \end{aligned}$$

és lineal, calcula'n la matriu relativa a la base $1, X, X^2, X^3$, així com les matrius, relatives a la mateixa base, de ∂^2 i ∂^3.

10.1. Determina si són lineals les aplicacions $f, g, h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escriu-ne la matriu canònica en cas afirmatiu

$f(x,y,z) = (z-x,\ x-y,\ y-z)$ és una aplicació lineal

Suma
$$f(x,y,z) = (z-x,\ x-y,\ y-z)$$
$$f(x',y',z') = (z'-x',\ x'-y',\ y'-z')$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) + f(x',y',z') &= (z-x,\ x-y,\ y-z) + (z'-x',\ x'-y',\ y'-z') = \\ &= (z-x+z'-x',\ x-y+x'-y',\ y-z+y'-z') = \\ &= (z+z'-x-x',\ x+x'-y-y',\ y+y'-z-z') = \\ &= f(x+x',\ y+y',\ z+z') \end{aligned}$$

Producte per escalars
$$\begin{aligned} af(x,y,z) &= a(z-x,\ x-y,\ y-z) = (a(z-x),\ a(x-y),\ a(y-z)) = \\ &= (az-ax,\ ax-ay,\ ay-az) = f(ax,ay,az) = f(a(x,y,z)) \end{aligned}$$

Matriu associada a l'aplicació lineal f

$$\left(f(1,0,0) \;\vdots\; f(0,1,0) \;\vdots\; f(0,0,1) \right)$$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (-1,\ 0,\ 1) \\ f(0,1,0) &= (0,\ -1,\ 1) \\ f(0,0,1) &= (1,\ 0,\ -1) \end{aligned} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$g(x,y,z) = (z-x-1,\ x+y,\ y-z)$ no és una aplicació lineal $g(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$

- si $g(0) \neq 0$ podem afirmar que no és una aplicació lineal
- si $g(0) = 0$ pot ser una aplicació lineal o no ser-ho

$h(x,y,z) = (zx,\ xy,\ yz)$

- dem amb contraexemple
  - sigui $(x,y,z) = (1,1,1)$, $a = 2$

$$h(1,1,1) + h(1,1,1) = (1,1,1) + (1,1,1) = (2,2,2) = (1+1, 1+1, 1+1) = h(1+1,\ 1+1,\ 1+1)$$

$$2(h(1,1,1)) = (2,2,2) \neq h(2(1,1,1)) = h(2,2,2) = h(4,4,4)$$

- dem més general.
  Falla en el producte per escalars.

$u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u) = f(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z) &= (\lambda^2 zx,\ \lambda^2 xy,\ \lambda^2 yz) = \lambda^2 (zx, xy, yz) = \\ &= \lambda^2 (f(x,y,z)) = \lambda^2 f(u) \neq \lambda f(u) \end{aligned}$$

10.5. Demostra que l'aplicació derivació

$$\partial: \mathbb{R}[x]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[x_3]$$

$$P(x) \rightarrow dP(x)/dx$$

és lineal.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad \partial(P(x)) = 3ax^2 + 2bx + c$
$Q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ $\quad \partial(Q(x)) = 3a'x^2 + 2b'x + c'$

$\partial(P(x)) + \partial(Q(x)) = (3ax^2 + bx + c) + (3a'x^2 + 2b'x + c') = (3ax^2 + 3a'x^2,$ →

→ $2bx + 2b'x,\ c + c') = \partial(P(x) + Q(x))$

$\lambda\, \partial P(x) = \lambda 3 \cdot ax^2 + \lambda 2bx + \lambda c = \partial(\lambda ax^3 + \lambda bx^2 + \lambda cx + \lambda d) = \partial(\lambda(Px))$

Calcule'n la matriu relativa a la base $1, x, x^2, x^3$, així com les matrius ∂^2 i ∂^3

$c = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\partial(1) = 0 = (0,0,0,0)_c$
$\partial(x) = 1 = (1,0,0,0)_c$
$\partial(x^2) = 2x = (0,2,0,0)_c$
$\partial(x^3) = 3x^2 = (0,0,3,0)_c$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\partial^2 \rightarrow$ $\partial^2(1) = \partial(0) = 0$
$\partial^2(x) = \partial(1) = 0$
$\partial^2(x^2) = \partial\, 2x = 2$
$\partial^3(x^3) = \partial(3x^2) = 6x$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$\partial^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

10.6. Demostra que l'aplicació

$$\mathbb{R}[x]_3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}[x]_3$$
$$P(x) \to xP'(x) - 2P \quad \text{és lineal}$$

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \xrightarrow{f} (3x^2 + 2x + 1)x - 2(x^3 + x^2 + x + 1) = -2x^3 + x^2 + x$
$Q(x) = x'^3 + x'^2 + x' + 1 \xrightarrow{f} -2x'^3 + x'^2 + x'$

$f(P(x) + Q(x)) = f(x^3 + x^2 + x + 1 + x'^3 + x'^2 + x' + 1) = f(x^3 + x'^3 + x^2 + x'^2 + x + x' + 2) =$
$= -2x^3 - 2x'^3 + x^2 + x'^2 + x + x' = f(P(x)) + f(Q(x))$

$a\,f(P(x)) = a(-2x^3 + x^2 + x) = -2ax^3 + ax^2 + ax = f(a\,P(x))$

Matriu en base $1, x, x^2, x^3$

$(1,0,0,0) = 1 \to -2 = (-2,0,0,0)$
$(0,1,0,0) = x \to -x = (0,-1,0,0)$
$(0,0,1,0) = x^2 \to 0 = (0,0,0,0)$
$(0,0,0,1) = x^3 \to x^3 = (0,0,0,1)$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resoldre l'equació diferencial $xP' - 2x = x^3$

buscar tots els polinomis la imatge dels quals sigui x^3

$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$ solució $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i resoldre el sistema d'equacions lineal

$-2a_0 = 0$
$-a_1 = 0 \quad \to \quad (0, 0, t, 1)$
$a_3 = 1$

(valor arbitrari per a_2)

Polinomis de la forma: $tx^2 + x^3$