4. $\mathbb{R}^3$ té com a base $\beta_1 = \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,10)\}$?

Per a que B_1 sigui base, els seus vectors han de ser l. independents i generadors.

Comprovem que siguin l. independents.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Són per tant linealment independents.

són generadors?

SISTEMA DE GENERADORS

Conjunt de vectors que forma tots els vectors de l'espai del que parlem. Seran donc, tants vectors l. indep. entre ells com gran és la dimensió (EX: 3 vectors en dimensió 3) més (opcionalment), altres vectors l. dependents.

Com estem a dimensió 3, i tenim 3 vectors l. ind, aquests són generadors d'$\mathbb{R}^3$, i en són base.

$1\ (1,0,0)$

$1 \cdot V_1 + 2V_2 - 1V_3 = (0,1,-1)$

CANVI DE BASE

8. $u_1 = (0,1,-1)$ $u_2 = (1,2,-1)$ $u_3 = (1,-1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ tenen components:

$u_1 = (1,2,-1)_B$ $u_2 = (1,1,1)_B$ $u_3 = (1,-1,0)_B$.

En la base $B = (v_1, v_2, v_3)$ Trobeu v_1, v_2, v_3.

L'enunciat el que ens diu és:

u_1 és $(1,2,-1)$ en base B i $(0,1,-1)$ en base canònica.

És a dir: $(0,1,-1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) - 1(0,0,1)$

$(1,2,-1) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) - 1(0,0,1)$

$(1,-1,1) = 1(1,0,0) - 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

Per tant en base B

$(0,1,-1) = 1V_1 + 2V_2 - 1V_3$ etc

Per trobar les components veiem que:

$V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$.

Seguim:

$$(0,1,-1) = 1(a_1,b_1,c_1) + 2(a_2,b_2,c_2) - 1(a_3,b_3,c_3) \Rightarrow \begin{cases} 0 = a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 1 = b_1 + 2b_2 - b_3 \\ -1 = c_1 + 2c_2 - c_3 \end{cases}$$

$$(1,2,-1) = 1(a_1,b_1,c_1) + 1(a_2,b_2,c_2) + (a_3,b_3,c_3) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ 2 = b_1 + b_2 + b_3 \\ -1 = c_1 + c_2 + c_3 \end{cases}$$

$$(1,-1,1) = (a_1,b_1,c_1) - (a_2,b_2,c_2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_1 - a_2 \\ -1 = b_1 - b_2 \\ 1 = c_1 - c_2 \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$

$a_3 = 2/5$ $\quad a_2 = -(1 - 2\,{}^2/_5) = -{}^1/5.$ $\quad a_1 = 2/5 - 2(-{}^1/5) = 4/5.$

b_1, b_2, b_3 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$

$b_3 = 1$ $\quad b_2 = -(1 - 2 \cdot 1) = 1$ $\quad b_1 = 1 + 1 - 2 = 0.$

c_1, c_2, c_3 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$c_3 = 2/3$ $\quad c_2 = -(2 + {}^2/_3)/2 = -4/3$ $\quad c_1 = -1 - {}^2/_3 + {}^4/_3 = -{}^1/3$

$V_1 = (4/5,\ 0,\ -{}^1/3)$ $\quad V_2 = (-{}^1/5,\ 1,\ -4/3)$ $\quad V_3 = (2/5,\ 1,\ 2/3).$

LLISTA 4

4.1 Trobeu sistemes d'equacions dels subespais de $\mathbb{R}^4$.

$F = \langle (1,2,3,4), (1,3,1,2) \rangle$

- Hem de trobar el conjunt de vectors que són generats per aquests vectors. Ho podem fer de dues maneres: Fixem-nos que tenim dos vectors generadors i estem a $\mathbb{R}^4$: hi haurà dues variables lliures. En aquest exemple es veu clarament que són LI i no ho demostrarem, però si no és tan obvi sí que ho hem de fer.

① $(x,y,z,t) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,3,1,2)$
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = 3\lambda + \mu \\ t = 4\lambda + 2\mu \end{cases}$$

$\lambda = x - \mu \rightarrow y = 2(x-\mu) + 3\mu$; $y = 2x - 2\mu + 3\mu$;

$y = 2x + \mu$; $\boxed{\mu = y - 2x}$ $\quad \lambda = x - (y - 2x)$; $\boxed{\lambda = 3x - y}$

Variables lliures: z i t.

$z = 3(3x-y) + (y-2x)$; $z = 9x - 3y + y - 2x$

$t = 4(3x-y) + 2(y-2x)$; $t = 12x - 4y + 2y - 4x$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 7x - 2y \\ t &= 8x - 2y \end{aligned}}$$

② $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & y-2x & z-3x & t-4x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & (z-3x)+2(y-2x) & (t-4x)+2(y-2x) \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & z+2y-7x & t+2y-8x \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} z + 2y - 7x &= 0 \\ t + 2y - 8x &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} z &= 7x - 2y \\ t &= 8x - 2y \end{aligned}}$$

4.4 Doneu una base del subespai de $\mathbb{R}^4$ que té equacions:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z - t &= 0 \\ 2x - 5y - z - t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Escollim quines volem que siguin les nostres variables lliures ($\mathbb{R}^4$ i 2 eq $\Rightarrow$ 2 VLL)

Diem F al subespai de $\mathbb{R}^4$. ⟶ VLL

$F = \langle (-7,-3,1,0), (3,1,0,1) \rangle$ Veiem el valor de x i y en funció de z i t.

Comprovem-ho: $(-7)-2(-3)+1-0=0$ ✓ $\quad 3-2(1)+0-1=0$ ✓

$2(-7)-5(-3)-1-0=0$ ✓ $\quad 2(3)-5(1)-0-1=0$ ✓

4.2.a Trobeu els valors de a i b per tal que el subespai $F=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$, generat per

$v_1=(1,2,3,4)\quad v_2=(1,2,1,1)\quad v_3=(a,b,2,3)$

tingui dim 2. (Ens trobem a un espai vectorial E, representats els vectors d'aquest per les seves components relatives a una base e_1, e_2, e_3, e_4.

$$\underbrace{4}_{\dim E} = \underbrace{2}_{\dim F} + \underbrace{2}_{n^o eq}$$

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ a & b & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1-a & 2-b & 1 & 1 \end{pmatrix}$ si $\begin{cases} 1=1-a \\ 2=2-b \end{cases}$, aleshores la tercera i segona fila són iguals, per tant la dimensió és 2.

② $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja que és CL dels altres dos vectors.

⊛ $\boxed{a=b=0}$

$a=\lambda+\mu$

$b=2\lambda+2\mu$

$2=3\lambda+\mu \longrightarrow 2-3\lambda=\mu$

$3=4\lambda+\mu \longrightarrow 3-4\mu=\mu$

$\}\ 2-3\lambda=3-4\lambda;\ 2-3=-4\lambda+3\lambda;$

$\lambda=1\quad \mu=-1$ ⊛

4.2.b Escolliu una base de F i amplieu-la a una base B de E.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$ ✓

Cal comprovar que siguin LI ⇒ base ✓

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t+y-2y & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, l'equació de F és

$$\boxed{x-2y+z=0}$$

$\boxed{G}$ Veiem que els dos vectors són LI i per tant ja són base. La dimensió de G és 2. Anem a trobar les equacions.

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,0,-1,2) + \mu(0,3,2,-3) \qquad \begin{array}{ll} x=\lambda & z=-\lambda+2\mu \\ y=3\mu & t=2\lambda-3\mu \end{array}$$

$$z = -x + 2\left(\frac{y}{3}\right) \rightarrow \boxed{z = x + \frac{2}{3}y}$$

$$t = 2x - 3\left(\frac{y}{3}\right) \rightarrow \boxed{t = 2x - y}$$

* dues VLL

hauria de ser − però el profe ho ha posat així.

Són les eq. de G. Efectivament:

$$\underbrace{\mathbb{R}^4}_{\dim E} = \underbrace{2}_{\dim F} + \underbrace{2}_{n^o\, eq.}$$

$\boxed{F+G}$

↳ són els vectors que estan formats per la suma d'un vector de F i un vector de G. Per tant, hauran de ser generats per ambdues bases de F i de G. Ajuntem respectives bases i mirem la dimensió del subespai F+G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(F+G) = 4$

Grassman

$$\underbrace{\dim F+G}_{4} + \underbrace{\dim F\cap G}_{\text{Ha de ser } 1} = \underbrace{\dim F}_{3} + \underbrace{\dim G}_{2}$$

$\boxed{F\cap G}$ Els vectors que pertanyen a $F\cap G$ estan tant a F com a G. Això vol dir que han de complir les equacions dels dos subespais.

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ x-\frac{2}{3}y+3z=0 \\ 2x-y-t=0 \end{array}\right\} \dots \begin{array}{l} y=0 \\ x=-z \\ t=-2z \end{array} \qquad F\cap G = \langle(-1,0,1,2)\rangle$$

4.13 Troben quines condicions ha de complir un vector $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ per tal que

$$\mathbb{R}^3 = \langle(1,2,0),(1,0,-1)\rangle \oplus \langle(a,b,c)\rangle$$

4.2.c Determineu les components dels vectors e_1, e_2, e_3, e_4 en la base β de l'apartat anterior.

La base és $\beta = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (1,2,3,4), (1,2,1,1) \rangle$

Hem de veure les components d'e_3 i d'e_4, ja que e_1 i e_2 ja tenen les components com a tal. $((1,0,0,0), (0,1,0,0))$

Per tant:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_3} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

(x,y,z,t) són les components d'e_3 en base β.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

(x',y',z',t') són les components d'e_4 en la base β.

Fent els càlculs, tenim que:

$e_1 = (1,0,0,0)_\beta$ $\quad e_2 = (0,1,0,0)_\beta$ $\quad e_3 = (-3,-6,-1,4)_\beta$ $\quad e_4 = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}, -3)_\beta$

4.8 $F = \langle (1,2,3,4), (2,2,2,6), (0,2,4,4) \rangle$ en $\mathbb{R}^4$.

$G = \langle (1,0,-1,2), (2,3,0,1) \rangle$

Determineu les dimensions, una base i equacions de $\begin{cases} F+G \\ F\cap G \\ G \\ F \end{cases}$

$\boxed{F}$ Cal comprovar si el sistema generador que ens han donat és base, és a dir, si els vectors que el formen són LI

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&6\\0&2&4&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-4&-2\\0&2&4&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$F = \langle (1,2,3,4), (0,1,2,1), (0,0,0,1) \rangle$ $\quad \dim F = 3$

Ara anem a trobar les equacions. Estem a $\mathbb{R}^4$, $\dim F = 3$.

$4 - 3 = 1$, hem de trobar una equació.

Anomenarem $\begin{cases} F \subset \mathbb{R}^3 \text{ tal que } F = \langle (1,2,0), (1,0,-1) \rangle \\ G \subset \mathbb{R}^3 \text{ tal que } G = \langle (a,b,c) \rangle \end{cases}$

$F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$.

Com que estem en $\mathbb{R}^3$ i $\dim F = 2$, $\dim G$ ha de ser 1 per tal d'estar en suma directa.

$$(x,y,z) = \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,-1) \quad \left.\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda \\ z = -\mu \end{cases}\right\} \; x = \frac{y}{2} - z$$

$2x = y - 2z$; $\boxed{2x - y + 2z = 0}$ Equació de F.

$$(x,y,z) = \lambda(a,b,c). \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = \lambda c \end{cases}$$

$2 \cdot \lambda a - \lambda b + 2 \cdot \lambda c \neq 0$ per tal que cap vector (a,b,c) no de la forma $(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in G$ pertanyi a F i per tant $F \cap G = \{0\}$.

4.14 Considerem per a cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunt de vectors

$E_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax - y + z = 0\}$.

4.14.i Demostreu que $\forall a$, E_a és un subespai de $\mathbb{R}^3$.

<u>OI</u> $u, v \in E_a \overset{?}{\Rightarrow} u + v \in E_a$

$$\left.\begin{array}{l} u \in E_a \Rightarrow u = \{(x,y,z) : ax - y + z = 0 \\ v \in E_a \Rightarrow v = \{(x,y,z) : ax' - y' + z' = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(u+v) = (ax + ax') - (y + y') \\ + (z + z') = 0 \end{array} \quad *$$

$*$ $(ax - y + z) + (ax' - y' + z') = 0 \Rightarrow u + v \in G$

<u>DE</u> $\lambda \in \mathbb{R}, u \in E_a \overset{?}{\Rightarrow} \lambda u \in E_a$

$u \in E_a \rightarrow u = \{(x,y,z) : ax - y + z = 0\}$

$\lambda u = \{\lambda(x,y,z) : (\lambda ax - \lambda y + \lambda z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda ax - \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda(ax - y + z) = 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \lambda u \in E_a$

4.14.ii Per a quins valors de a es compleix $\mathbb{R}^3 = E_a \oplus \langle(1,1,1)\rangle$

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,1) \quad \begin{cases} x = \lambda 1 \\ y = \lambda 1 \\ z = \lambda 1 \end{cases}$$

ja que si $a=0$ aleshores es compleix $0=0$

$$\underbrace{a(\lambda 1)-(\lambda 1)+(\lambda 1) = 0}_{\text{Per } \boxed{a \neq 0}} \quad \mathbb{R}^3 = E_a \oplus \langle(1,1,1)\rangle$$

ATENCIÓ

El 4.13 i 4.14 els he fet jo i no sé si estan bé. SORRY.