1. Calculeu els següents límits (si existeixen) utilitzant la regla de L'Hôpital:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\log(1+x))^x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

2. Sigui $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció derivable tal que $|g'(x)|<1$, per a tot $x\in\mathbb{R}$. Demostreu que la funció $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida per $f(x)=x+g(x)$, és injectiva.

3. La funció $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ pren el mateix valor a cadascun dels extrems de l'interval $[0,4]$, tot i que la derivada no s'anul·la a cap punt intermig. Perquè no contradiu això el teorema de Rolle?

4. Proveu que l'equació $x^3-3x+k=0$, per $k\in\mathbb{R}$, té com a molt una solució en $[-1,1]$. Per a quins valors de k hi ha exactament una solució?

5. Demostreu que l'equació $x^2=x\sin(x)+\cos(x)$ té exactament dues arrels reals i que aquestes es troben a l'interval $[-\pi,\pi]$.

6. Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció dues vegades derivable tal que : $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=1$ i, per a tot $x\in\mathbb{R}$, es satisfà $f''(x)<0$. Demostreu que l'equació $f(x)-e^x=0$ té exactament dues solucions en $\mathbb{R}$.

7. Demostreu que per a tots $a,b\in\mathbb{R}$ es compleix $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$.

8. Sigui $f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua, derivable a $(0,+\infty)$, amb $f(0)=0$ i $f'(x)$ creixent. Demostreu que la funció $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ és creixent.

9. Proveu que les equacions següents tenen una única solució:

(a) $x+\log x=0$ (b) $2^{-x}-x=0$ (c) $e^x-x-1=0$.