LÒGICA I LLENGUATGES

CURSO 2022-23

PRIMERA PRUEBA PARCIAL DE PROBLEMAS

(a) Consideremos las siguientes fórmulas:
$\varphi_1 = (P \to Q) \to (Q \to P)$,
$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \vee R)) \vee (P \wedge (\neg R \to Q))$,
$\varphi_3 = (P \vee Q \vee \neg R) \to ((\neg P \vee \neg Q) \to \neg R)$,
$\varphi_4 = \neg(P \leftrightarrow Q) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)$.

Se pide entonces:

(1) Determinar si φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4 son tautologías, satisfactibles o contradicciones.

(2) Calcular formas normales conjuntivas de φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4.

(6 puntos)

(b) Consideremos el siguiente problema. Tenemos 10 tareas (numeradas por $1, \dots, 10$) y tenemos 10 personas para llevarlas a cabo (numeradas también por $1, \dots, 10$). Para cada tarea t tenemos la lista L_t de las personas que pueden realizar la tarea t. Queremos saber si es posible formar un equipo de 7 personas de manera que para cada tarea haya al menos una persona en el equipo que la sepa realizar. Se pide entonces formalizar este problema mediante una fórmula en forma normal conjuntiva para que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \dots, 7\}$ y $j \in \{1, \dots, 10\}$, considerar la proposición Pij que significa que "el miembro i-ésimo del equipo es la persona j".

(4 puntos)

Solución:

(a)(1) La fórmula φ_1 es satisfactible, pero no es tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\varphi_1) = (V \to V) \to (V \to V) = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = F$ e $I'(Q) = V$, tenemos $I'(\varphi_1) = (F \to V) \to (V \to F) = V \to F = F$.

La fórmula φ_2 es tautología, ya que $\neg(P \to \neg(Q \vee R)) \equiv P \wedge (Q \vee R) \equiv$

$P \wedge (R \vee Q) \equiv P \wedge (\neg R \to P)$. Así pues, φ_2 es de la forma $\psi \vee \neg\psi$, por lo cual es una tautología.

La fórmula φ_3 es satisfactible pero no es tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = I(R) = V$, tenemos que $I(\varphi_3) = (V \vee V \vee F) \to ((F \vee F) \to F) = V \to V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = F$, $I'(Q) = V$ e $I'(R) = V$, tenemos $I'(\varphi_3) = (F \vee V \vee F) \to ((V \vee F) \to F) = V \to (V \to F) = V \to F = F$.

La fórmula φ_4 es satisfactible pero no es tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = I(R) = V$, tenemos que $I(\varphi_4) = \neg(V \leftrightarrow V) \vee (F \vee F \vee V) = F \vee V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = V$, $I'(Q) = V$ e $I'(R) = F$, tenemos $I'(\varphi_4) = \neg(V \leftrightarrow V) \vee (F \vee F \vee F) = F \vee F = F$.

(a)(2) Tenemos que $\varphi_1 = (P \to Q) \to (Q \to P) \equiv \neg(P \to Q) \vee (Q \to P) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee P) \equiv (P \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg Q \vee P) \equiv (P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P) \equiv P \vee \neg Q$.

Por tanto, $P \vee \neg Q$ es una forma normal conjuntiva de φ_1.

Como φ_2 es una tautología, tenemos que $\varphi_2 \equiv P \vee \neg P$.

Por otra parte, tenemos que $\varphi_3 = (P \vee Q \vee \neg R) \to ((\neg P \vee \neg Q) \to \neg R) \equiv \neg(P \vee Q \vee \neg R) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \to \neg R) \equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee ((P \wedge Q) \vee \neg R) \equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee \neg R \vee (P \wedge Q) \equiv ((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q) \equiv ((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge V) \vee (P \wedge Q) \equiv ((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q) \equiv ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge Q)) \wedge ((\neg Q \vee \neg R) \vee (P \wedge Q)) \equiv (\neg P \vee \neg R \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee Q) \equiv V \wedge (\neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P) \wedge V \equiv (\neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P)$.

Por tanto, $(\neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P)$ es una forma normal conjuntiva de φ_3.

Por último, tenemos que $\varphi_4 = \neg(P \leftrightarrow Q) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv \neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv ((P \vee Q) \wedge V \wedge V \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv (P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg P \vee \neg Q \vee R) \equiv V \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R) \equiv \neg Q \vee \neg P \vee R$.

Por tanto, $\neg Q \vee \neg P \vee R$ es una forma normal conjuntiva de φ_4.

(b) Tenemos que formalizar las siguientes condiciones:

(1) Cada miembro del equipo corresponde a una persona de la lista.

Para cada $i \in \{1, \ldots, 7\}$ ponemos la cláusula

$$Pi1 \vee Pi2 \vee \ldots \vee Pi10.$$

(2) Cada miembro del equipo corresponde a una única persona.

Para cada $i \in \{1, \ldots, 7\}$ y para cada $j, j' \in \{1, \ldots, 10\}$ con $j \neq j'$, ponemos la cláusula

$$\neg Pij \vee \neg Pij'.$$

(3) Dos miembros del equipo no pueden ser la misma persona.

Para cada $j \in \{1, \ldots, 10\}$ y para cada $i, i' \in \{1, \ldots, 7\}$ con $i \neq i'$, ponemos la cláusula

$$\neg Pij \vee \neg Pi'j.$$

(4) Para cada tarea hay alguna persona en el equipo que la sabe realizar.

Para cada $t \in \{1, \ldots, 10\}$, si $L_t = \{j_1, \ldots, j_r\}$, ponemos la cláusula

$$P1j_1 \vee \ldots \vee P1j_r \vee P2j_1 \vee \ldots \vee P2j_r \vee \ldots \vee P7j_1 \vee \ldots \vee P7j_r.$$

La FNC requerida es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2), (3) y (4).