1. Proveu a partir de la definició de límit d'una successió:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{4n+3} = \dfrac{3}{4}$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $(y_n)_n$ és una successió acotada aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n x_n y_n = 0$

2. Si $a \in (0, \frac{1}{2})$, es defineix $x_1 = a$ i $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}(1 - x_n)$, per a cada $n \geq 1$.

(a) Proveu que la successió $(x_n)_n$ és monòtona i acotada, i calculeu el seu límit.

(b) Calculeu $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ i $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

3. Es defineix la successió $(x_n)_n$ de manera inductiva com $x_1 = a > 0$ i

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1.$$

És $(x_n)_n$ convergent ?

4. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} \right).$$

5. Es defineix la successió $(x_n)_n$ de manera inductiva com $x_1 = 2$ i

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

(a) Proveu que $x_n > 0$ i que també $x_n^2 \geq 2$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demostreu que $(x_n)_n$ és monòtona.

(c) És $(x_n)_n$ convergent ? En cas que ho sigui, calculeu-ne el límit.

6. Calculeu

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n^n)}{\log(n!)}$.

7. Calculeu els límits:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^2 + 3^4 + \cdots + (n+1)^{2n}}{2^1 + 5^2 + \cdots + (n^2+1)^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2)\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+4]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.