Pràctica 2: L'ALGORITME D'EUCLIDES

1. Per mitjà de l'algoritme d'Euclides, calcula $\mathrm{mcd}(27, 29)$ i $\mathrm{mcd}(27, 311111019)$. Utilitza per a tal fi la comanda `Mod[m,n]`, que calcula el residu de la divisió entera de m entre n.

2. Implementa una funció `MCD` que, mitjançant l'algoritme d'Euclides, calculi el màxim comú divisor de dos nombres enters. Pots modificar adequadament la funció següent. (Nota que aquesta funció només va bé per a nombres enters positius.)

```
MCD[m_,n_]:= Module[{x,y}, {x,y}={m,n};
While[y>0, {x,y}={y, Mod[x,y]}];
x]
```

3. Ara veurem una versió estesa de l'algoritme d'Euclides, que proporciona una identitat de Bézout. Siguin $m := 92$, $n := 38$, $u := (1, 0, 92)$, i $v := (0, 1, 38)$. El primer pas de l'algoritme d'Euclides canvia (m, n) per $(n, m - 2n)$, on 2 és el quocient de la divisió entera de m entre n. Fes la mateixa transformació amb els vectors u i v. Continua l'algoritme d'Euclides i fes en cada pas les transformacions corresponents sobre els vectors obtinguts. Quan arribis al màxim comú divisor d de m i n, hauràs obtingut un vector (d, a, b) tal que $am + bn = d$.

Defineix, a partir de la següent, una funció `EMCD` que calculi el màxim comú divisor de dos nombres i la identitat de Bézout corresponent.

```
EMCD[m_, n_] := Module[{a, b, g, u, v, w},
{a, b, g, u, v, w} = {1, 0, m, 0, 1, n};
While[w > 0,
q = Quotient[g,w];
{a, b, g, u, v, w} = {u, v, w, a - q u, b - q v, g - q w}];
{g, a, b}]
```

4. Cerca si *Mathematica* té incorporades funcions que calculin el màxim comú divisor de dos nombres i el màxim comú divisor estès. Compara els seus resultats amb els teus. (Pots utilitzar la funció `Timing`.)

5. Programa un experiment per a determinar la freqüència amb què dos nombres enters (m, n) siguin coprimers.

```
n=100
t=Table[GCD[a, b], {a, n}, {b, n}];
t1=Flatten[t];
c=Count[t1,1]
N[c/n^2]
```

L'any 1849, Dirichlet demostrà que aquesta freqüència és $6/\pi^2$. Compara aquest resultat teòric amb el teu resultat experimental.

```
N[6/Pi^2]
```