3.2. TÈCNIQUES PER COMPTAR

Anem a analitzar algunes de les propietats dels cardinals de conjunts finits.

DEF.:
El cardinal d'un conjunt és el nombre d'elements que té un conjunt. Els
└ conjunts finits són els conjunts de cardinal finit.

- En tot el que segueix sempre considerarem conjunts finits.

PROPIETAT 1:
Siguin A i B conjunts finits. Aleshores,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En particular si $A \cap B = \phi$, $|A \cup B| = |A| + |B|$

NOTACIÓ:
Donat A un conjunt, denotem per $|A|$ o per $\# A$ el seu cardinal.

PROPIETAT 2:

Si $A \subseteq B$ aleshores, $|A| \leq |B|$.

PROPIETAT 3: (REGLA DEL PRODUCTE)

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

En altres paraules, si la primera posició té n possibles valors i la segona m possibles valors, aleshores tenim $m \cdot n$ possibles parelles.
└

Aquestes propietats es poden fàcilment generalitzar:

PRINCIPI D'INCLUSIÓ/EXCLUSIÓ.

Siguin $A_1 \text{——} A_m$ conjunts finits. Aleshores:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \cdot \alpha_j$$ on α_j = Suma cardinals de totes les possibles interseccions de j conjunts

En particular,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

└.

PRINCIPI DEL COMPLEMENTARI

Si $A \subseteq B$ denotem per $B \setminus A$ el conjunt d'elements de B que no estan en A.

Aleshores:

$$|B| = |B \setminus A| + |A|$$

PRINCIPI DEL PRODUCTE

Si $A_1 \ldots A_m$ són conjunts finits. Aleshores

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

EXEMPLE:

Quants divisors té el nombre 60.000?

Observem que $60.000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4$. Per tant, si $m \mid 60.000 \Rightarrow$

m serà de la forma

$$m = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \quad \text{on} \quad 0 \le \alpha \le 5,\ 0 \le \beta \le 1,\ 0 \le \gamma \le 4.$$

Per tant

$$|\{\text{Divisors de } 60.000\}| = \left|\left\{(\alpha,\beta,\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le \alpha \le 5 \\ 0 \le \beta \le 1 \end{array} \ 0 \le \gamma \le 4\right\}\right|$$

$$= 6 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{60}$$

DEFINICIÓ:

El concepte de Probabilitat (simple) es defineix com el següent:

$$P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos possibles}} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Tots els casos}}.$$

EXEMPLE:

Quina probabilitat hi ha de que entre 50 persones, almenys 2 tinguin la mateixa data de naixement (mateix dia i mes)

366 dates possibles

$$\text{Casos Possibles} = |\{\text{Dates de naixement de 50 persones}\}| = 366 \cdot 366 \cdot \cdots \cdot 366 = 366^{50}$$

$$\text{Casos Favorables} = |\text{Tots els possibles}| - |\{\text{Cap coincidència}\}| =$$

$$= 366^{50} - \underset{\text{una data}}{366} \cdot 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot 317$$

Per tant,

$$P = \frac{366^{50} - 366 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 317}{366^{50}} \approx 1 - 0'02 \approx 0'97$$

ALTÍSSIMA

EXEMPLE :

Quants nombres enters entre 1 i 100 NO són divisibles ni per 2 ni per 5.

Anomenem

$A = \{$ Enters entre 1 i 100 no divisibles ni per 2 ni per 5 $\}$

$A_2 = \{$ Enters entre 1 i 100 divisibles per 2 $\}$

$A_5 = \{$ Enters entre 1 i 100 divisibles per 5 $\}$.

Observem que

$|A| = 100 - |\{$ Enters entre 1 i 100 divisibles per 2 $\underline{o}$ per 5 $\}|$

$= 100 - |A_2 \cup A_5|$

$= 100 - \left[|A_2| + |A_5| - |A_2 \cap A_5| \right]$

$= 100 - |A_2| - |A_5| + |A_2 \cap A_5|$

i $A_2 \cap A_5 = \{$ Enters entre 1 i 100 divisibles per 10 $\}$.

Com $100 \,\underline{|2}$, $0)\ 50$ $\Rightarrow |A_2| = 50$ i $100 = 10 \times 10 \Rightarrow |A_2 \cap A_5| = 10$.

$100 \,\underline{|5}$, $0)\ 20$ $\Rightarrow |A_5| = 20$

Finalment, $|A| = 100 - 50 - 20 + 10 = \underline{40}$ (Ho podem comprovar "a mà").

EXEMPLE :

En un cert alfabet hi ha 29 consonants i 5 vocals.

Quantes paraules de 5 lletres podem fer?

$34^5 = |A \times A \times A \times A \times A|$ on A és el cj de lletres.

Quantes paraules de 5 lletres podem fer que acabin en vocal?

$34^4 \times 5 = |A \times A \times A \times A \times V|$ on A és el cj de lletres
V és el cj de vocals.

3.3. COM COMPTEM CERTES ELECCIONS: Nº DE CASOS.

Tenim n objectes i en volem escollir r

QUESTIÓ: De quantes formes ho podem fer en funció de les condicions que ens diguin.

Cas 1: IMPORTA L'ORDRE.

Quan diem que ens importa l'ordre és que per nosaltres escollir $a_1 \ldots a_r$ és diferent que escollir $a_r a_1 a_2 \ldots a_{r-1}$ per exemple.

Per exemple, si 3 nois poden tenir 3 medalles (or, plata i bronze) no és el mateix que el noi A tingui bronze que tingui or o plata.

A. Puc repetir objectes

Escollim r objectes $\rightsquigarrow$ volem determinar una r. tupla.

$$(\text{lloc } 1, \text{lloc } 2, \ldots, \text{lloc } r)$$

Al lloc 1 hi podem anar n objectes. Com puc repetir en el lloc 2 també, etc....

Per tant, si m'importa l'ordre i puc repetir objectes, puc fer-ho de

$$\boxed{n^r \text{ maneres diferents.}}$$

B. No puc repetir objectes

Com abans

$$(\text{lloc } 1, \text{lloc } 2, \ldots, \text{lloc } r).$$

Al lloc 1 puc posar n objectes diferents. Un cop en fixo 1, al lloc 2 només puc triar entre $n-1$, en el lloc 3 entre $n-2$, etc.....

Per tant en aquest cas,

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

on recordem que

$$a! := a \cdot (a-1)(a-2) \cdots 2 \cdot 1. \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

EXEMPLES:

① Quantes xifres de 4 dígits podem fer amb el 3, 2, 4, 5, 8 i 7

$$6^4$$

② Si hi ha 10 candidats de quantes formes podem triar president, secretari i tresorer si una persona només pot tenir un càrreg.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$$

③ Quantes paraules de 5 lletres podem fer amb S, P, Q, R, B, A, E, I en els següents casos

ⓐ Puc tenir lletres repetides:

$$8^5$$

ⓑ Totes les lletres han de ser diferents

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!}$$

ⓒ Totes les lletres diferents i ha d'acabar amb vocal i només pot tenir una vocal:

$$\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{consonants}} \cdot 3 \rightarrow \text{les 3 vocals.}$$

Cas 2: No ens importa l'ordre

A. No puc repetir objectes

- Partim del cas en que ens importava l'ordre. Ara qualsevol permutació d'una de les eleccions ens dóna el mateix. Per exemple

ANB és el mateix que ABN o NBA

Per tant de les $\frac{m!}{(m-r)!}$ casos, cada factorització dels r elements ens dóna el mateix resultat. Per tant en aquest cas tenim:

$$\boxed{\frac{m!}{(m-r)!\,r!}}$$

DEFINICIÓ: Es defineix el nombre combinatori

$$\binom{m}{r} := \frac{m!}{r!(m-r)!} = \text{nº de formes que tinc d'agafar } r \text{ objectes entre } m.$$

B. Si podem repetir objectes

En aquest cas és $\binom{n+r-1}{r}$

EXEMPLES:

(a) De quantes formes puc repartir 10 boles en 15 caixes si en cada caixa només pot anar una bola i totes les boles són iguals.

– De 15 caixes escolleixo 10 $\rightsquigarrow \binom{15}{10}$; a cada caixa escollida poso una bola.

(b) El mateix amb boles diferents, cada factorització de les boles hauria donaria resultats diferents per tant,

$$\binom{15}{10}\cdot 10! = \frac{15!}{5!}$$

(c) Quants resultats puc tenir si llenço 3 daus idèntics simultàniament

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3}$$

(d) De quantes formes puc escollir 4 lletres del conjunt $X=\{a,b,c\}$ sabent que puc escollir una mateixa lletra vàries vegades

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$$

(e) Tinc 2 porters i 30 jugadors de camp. Quantes alineacions diferents puc fer (si el porter necessàriament juga de porter).

$$2\cdot\binom{30}{10}$$

El Quim és un jugador de camp. Quantes alineacions tenen al Quim com a jugador

$$2\cdot\binom{30}{10} - 2\cdot\binom{29}{9}$$

(tots menys les q no tenen al Quim).

(f) Tenim les lletres A E X Y A T E A P Q. Quantes paraules podem fer de 10 lletres

$$\frac{10!}{3!\,2!}$$

→ permutacions de les 10 lletres.

"Empaquetem" les repeticions.

PROPIETATS DELS NOMBRES COMBINATORIS

Hem definit el nombre combinatori

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

La primera propietat és:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

donat que $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$.

Altres propietats:

(a) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

(b) Per $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

(c) La propietat anterior ens permet escriure el Triangle de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \to n=0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \to n=1. \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

⋮ etc...

(les entrades són $\binom{n}{r}$)

(d) $$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

NOTA: Feu servir aquesta última propietat per calcular 2^n.

EXEMPLES FINALS

① Quants resultats diferents pot haver a la loteria 6/49 (De 49 xifres en treus 6).

– No podem repetir i no ens importa l'ordre

$$\binom{49}{6}$$

② Quants resultats diferents obtenim si tirem 11 daus simultaneament:
(1 dau té 6 cares).

– Tinc 6 objectes i n'agafo 11 amb repetició i no ens importa l'ordre:

$$\binom{6+11-1}{11} = \binom{16}{11}$$

③ De quantes formes puc omplir una bossa amb 50 lacasitos si tinc lacasitos de 7 colors diferents

$$\binom{7+50-1}{50} = \binom{56}{50}$$

④ De quantes formes es poden seure 10 persones diferents en un banc si al banc hi caben 4 persones:

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{6!}$$

⑤ En una classe de 20 alumnes s'han de repartir 3 premis. De quantes formes ho podem fer:

ⓐ Si els premis són iguals:

$$\binom{20}{3}$$

ⓑ Si els premis són diferents

$$\binom{20}{3}\cdot 3! = \frac{20!}{17!} = 20\cdot 19\cdot 18.$$

⑥ Col·loquem 5 homes i 4 dones en una fila de forma que les dones ocupen un lloc parell. De quantes formes ho puc fer?

s p s p s p s p s $\qquad 4!\cdot 5!$

(7) Quants nombres de 4 dígits es poden fer amb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

(a) Si podem repetir

(b) No podem repetir

(c) Ha de ser divisible per 5

(a) Si podem repetir i com ens importa l'ordre:

$$9^4$$

(b) Com no podem repetir i ens importa l'ordre:

$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = \frac{9!}{5!}$$

(c) Si és divisible per 5 → Acaba en 5.

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ 5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{8^3}}$$

(8) Quantes paraules de 10 lletres puc formar amb:

A E X Y A I P E A R

(a) <u>Sense cap condicions:</u>

$$\frac{10!}{3!\,2!}$$

(b) <u>les A's han d'anar juntes</u>

$$\frac{8!}{2!}$$

(c) <u>la Paraula acaba amb EE</u>

$$\frac{8!}{3!}$$

(d) <u>No podem haver 2 consonants juntes</u>

- Fixo la posició de les vocals $\times V \times V \times V \times V \times V \times V \times$
- Tinc 7 forats per posar les consonants.

$$\binom{7}{4}\cdot 4!\cdot\frac{6!}{3!\,2!} \longrightarrow \text{permuto les vocals.}$$

↳ les puc permutar.

↓ col·loco consonants.