LENGUAJES DE PROPOSICIONES

Febrero de 2023

Descripción básica

El objeto central de la lógica es el estudio de los razonamientos, es decir, el estudio de los procesos de inferencia que a partir de las premisas permiten obtener conclusiones correctas.

Y en la lógica aplicada a la informática, nos interesamos por los procesos de inferencia que se pueden implementar en un computador.

Entre las principales aplicaciones de la lógica en la informática, podemos citar las siguientes:

Descripción básica

(1) Diseño de SAT-solvers (programas basados en lógica que permiten resolver muchos problemas prácticos).

(2) Verificación de circuitos computacionales.

(3) Verificación de programas.

(4) Programación declarativa.

Descripción básica

Hay lenguajes de programación que están basados en el formalismo de la lógica. Para poder entender programas escritos en estos lenguajes de programación es entonces necesario conocer los conceptos básicos de la lógica.

En primer lugar, estudiaremos los lenguajes lógicos más simples, que son los lenguajes proposicionales.

El concepto de proposición

Por una proposición entendemos una frase declarativa, es decir, una frase de la que tiene sentido decir si es verdadera o falsa.

Las siguienes frases son ejemplos de proposiciones:

(1) 6 es divisor de 18.

(2) $7 > \sqrt{50}$.

(3) Si llueve, las calles se mojan.

(4) Hoy es festivo.

Antes de definir el concepto de lenguaje de proposiciones, recordemos las definiciones de las conectivas lógicas.

Representamos por V y F a los valores de verdad. Es decir, denotamos por V al valor "verdadero" y por F al valor "falso".

(1) Si φ es una proposición, denotamos por $\neg\varphi$ a su negación. Por tanto, tenemos la siguiente tabla de verdad:

φ	$\neg\varphi$
V	F
F	V

(2) Si φ, ψ son proposiciones, su disyunción la denotamos por $\varphi \vee \psi$. Por tanto, tenemos la siguiente tabla de verdad:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(3) Si φ, ψ son proposiciones, su conjunción la denotamos por $\varphi \wedge \psi$. Tenemos entonces la siguiente tabla de verdad:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(4) Si φ, ψ son proposiciones, la proposición $\varphi \rightarrow \psi$ se llama proposición condicional, y se lee "si φ entonces ψ" o "φ implica ψ". La tabla de verdad para esta conectiva lógica es la siguiente:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En una proposición $\varphi \rightarrow \psi$, diremos que φ es el antecedente y ψ el consecuente.

(5) Si φ, ψ son proposiciones, la proposición $\varphi \leftrightarrow \psi$ representa la equivalencia de φ y ψ. La tabla de verdad para esta conectiva es, por tanto, la siguiente:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El concepto de lenguaje de proposiciones

Por un átomo entendemos una frase declarativa que no puede descomponerse en frases más simples. Sea σ un conjunto finito de átomos. Definimos entonces el lenguaje de las σ-fórmulas proposicionales como el conjunto de elementos generados por las siguientes reglas:

(1) Todo elemento de σ es una fórmula.

(2) Si φ es una fórmula, $\neg\varphi$ también lo es.

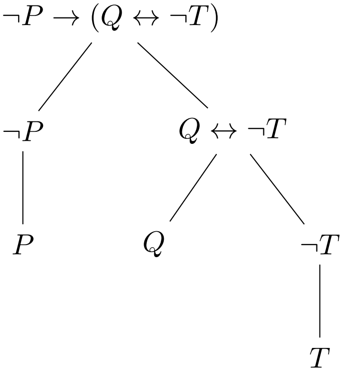
(3) Si φ, ψ son fórmulas, entonces $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son también fórmulas.

Árboles genealógicos

Dada una fórmula de un lenguaje de proposiciones, podemos representar la manera en que la fórmula se ha construido aplicando las reglas anteriores por medio de un árbol, al que llamaremos árbol de generación (o árbol genealógico) de la fórmula.

Por ejemplo, para la fórmula $\neg P \to (Q \leftrightarrow \neg T)$ tenemos el siguiente árbol de generación:

Ejemplo de árbol genealógico



Formalizaciones

Muchas frases declarativas del lenguaje natural se pueden formalizar en lógica de proposiciones. Para ello, se utilizan las siguientes reglas:

Reglas de formalización.

(1) Una frase de la forma "A o B" se representa por $A \vee B$.

(2) Una frase de la forma "A y B" se representa por $A \wedge B$.

(3) Una frase de la forma "si A entonces B" (es decir, es suficiente que se cumpla A para que se cumpla B) se representa por $A \to B$.

(4) Una frase de la forma "B sólo si A" (es decir, es necesario que se cumpla la condición A para que se cumpla la condición B) se representa por $B \to A$.

(5) Una frase de la forma "A si y sólo si B" se representa por $A \leftrightarrow B$.

Ejemplo

Consideremos la frase:

"LLoverá, si hay nubes".

Átomos:

$L =$ lloverá,
$N =$ hay nubes.

La frase se formaliza por $N \to L$. Se observa que la frase es falsa.

Ejemplo

Consideremos la frase:

"LLoverá, sólo si hay nubes".

Átomos:

$L =$ lloverá,
$N =$ hay nubes.

La frase se formaliza por $L \to N$. Se observa que la frase es verdadera.

Ejemplo

Consideremos la frase:

"Hay que ser hábil y tener suerte para ganar".

Átomos:

$H =$ ser hábil,
$S =$ tener suerte,
$G =$ ganar.

La frase se formaliza por $G \to (H \wedge S)$.

Interpretaciones

Si σ un conjunto finito de átomos, definimos una σ-interpretación como una asignación de los valores de verdad a los elementos de σ.

Para evaluar una fórmula φ en una interpretación I, se sustituye cada átomo A que aparezca en φ por $I(A)$ (es decir, por el valor de verdad asociado a A).

Representamos por $I(\varphi)$ al resultado de evaluar φ en I.

Ejemplo

Consideremos $\sigma = \{P, Q, R\}$. Definimos la interpretación I por $I(P) = F$, $I(Q) = F$ e $I(R) = V$. Consideremos la fórmula $\varphi = (P \leftrightarrow Q) \wedge R$. Entonces,

$$I(\varphi) = (F \leftrightarrow F) \wedge V = V \wedge V = V.$$

Tautologías, contradicciones y fórmulas satisfactibles

(1) Una fórmula φ es una tautología, si φ es cierta en todas las interpretaciones.

(2) Una fórmula φ es satisfactible, si φ es cierta en alguna interpretación.

(3) Una fórmula φ es una contradicción (o una fórmula insatisfactible), si φ es falsa en todas las interpretaciones.

Construyendo la tabla de verdad de una fórmula, se puede saber si la fórmula es tautología, satisfactible o contradicción.

Ejemplos

La fórmula $P \vee \neg P$ es una tautología.

La fórmula $P \wedge \neg P$ es una contradicción.

La fórmula $P \to \neg P$ es satisfactible pero no tautología, ya que si P es verdad la fórmula es falsa, y si P es falso la fórmula es verdadera.

La fórmula $((P \to Q) \wedge P) \to Q$ es una tautología.

La fórmula $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$ es una contradicción, ya que ninguna interpretación satisface la fórmula.

Decimos que dos fórmulas φ, ψ son lógicamente equivalentes, si para toda interpretación I, tenemos que $I(\varphi) = I(\psi)$.

Si φ, ψ son lógicamente equivalentes, escribiremos $\varphi \equiv \psi$.

Las siguientes equivalencias lógicas se comprueban mediante tablas de verdad.

Tabla de equivalencias lógicas

(1) $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

(2) $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

(3) $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$.

(4) $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$, $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$.

(5) $\varphi \vee V \equiv V$, $\varphi \vee F \equiv \varphi$, $\varphi \wedge V \equiv \varphi$, $\varphi \wedge F \equiv F$.

(6) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.

(7) $(\varphi \vee \psi) \wedge \varphi \equiv \varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi \equiv \varphi$,

(8) $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$.

(9) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

(10) $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

(11) $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$.

Observaciones

A las reglas 1 y 2 de la tabla anterior se las llama regla de la implicación y regla de la equivalencia. La regla 3 es la ley conmutativa. La regla 4 es la ley asociativa. La regla 5 es la ley de identidad. La regla 6 es la ley distributiva. La regla 7 es la ley de absorción. Y las reglas 8-11 son las reglas de la negación.

Demostración de la equivalencia 11

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \to \psi)$	$\neg\psi$	$\varphi \land \neg\psi$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Se observa que las fórmulas $\neg(\varphi \to \psi)$ y $\varphi \land \neg\psi$ tienen la misma tabla de verdad. Por tanto, $\neg(\varphi \to \psi)$ y $\varphi \land \neg\psi$ son equivalentes.