

Matemàtica Discreta

Curs 2021/2022

Llista 2 - Recurències

1.

- (a) Una *progressió aritmètica de diferència d* és una successió $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que, per cada $n \in \mathbb{N}$, es verifica $a_{n+1} = a_n + d$. Busca el terme general de la successió.
- (b) Una *progressió geomètrica de raó r* és una successió $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que, per a cada $n \in \mathbb{N}$, es verifica $a_{n+1} = ra_n$. Busca el terme general de la successió.
- (c) Explica la llegenda que quan un rei va preguntar al inventor del joc dels escacs què volia de recompensa pel seu invent, aquest va demanar el blat necessari per col·locar un gra de blat en la primera casella del taulell d'escacs, dos grans per la segona, 4 per la tercera, 8 per la quarta i així fins a la casella 64. El rei es va quedar sorprès per la modèstia de la petició i la va acceptar de seguida. Si 1000 grans de blat pesen 32 grams, quants kilograms de blat es necessiten per a pagar al inventor dels escacs? Si la producció anual de blat d'aquell país és d' un milió de tones anuals i augmenta un 1,5 % anual, quants anys trigarà el rei a poder pagar?

2. Considerem la funció recurrent f definida per: $f(1) = 1$, $f(2n) = 4f(n)$ i $f(2n+1) = 4f(n) + 4n + 1$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

i) Calcula $f(n)$ per a $n = 2, 4, 5, 7$.

ii) Demuestra que $f(n) = n^2$ per a tot $n \geq 1$.

3. Comprova que $a_n = n^2 + 2n + 3$ és solució de la equació recurrent

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 4n^2 + 10.$$

Mira si hi ha una solució de l'equació

$$a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 6n^2 - 28n + 18$$

de la forma $a_n = An^2 + Bn + C$.

4. Resol les recurrències següents:

i) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$; $a_0 = a_1 = 1$.

ii) $a_n = a_{n-2}$; $a_0 = a_1 = 1$.

iii) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $a_0 = a_1 = 2$.

iv) $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

v) $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$; $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

vi) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

5. Resol les recurrències següents:

i) $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 1$; $a_0 = 1, a_1 = 0$.

ii) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 4n^2 + 10$; $a_0 = a_1 = 1$.

iii) $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 6n^2 - 28n + 18$; $a_0 = 0, a_1 = 0$.

iv) $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 8n - 14$; $a_0 = 1, a_1 = 2$.

v) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n$; $a_0 = a_1 = 0$

(vi) $x_n = 3x_{n-1} - 4x_{n-3} - 2n^2 + 1$.

6. Troba el terme general de la recurrència:

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3} - 4n$$

amb les condicions inicials $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ i $a_2 = 7$.

7. Troba el terme general de les recurrències:

$$a_n = a_{n-2} - 2a_{n-3} + 2n^2 - 4n.$$

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3} + 4n^2 - 4n + 2.$$