Exercici 6. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$ nombres enters tals que $a > 0, b > 0$ i $mcd(a,b) = 1$.

(a) Demostreu que si $ab = c^2$, per a algun nombre enter c, llavors existeixen $x, y \in \mathbb{Z}$ tals que $a = x^2, b = y^2,\ i\ mcd(x,y) = 1$.

(b) Doneu un exemple que ensenyi que en el cas en què no sigui $mcd(a,b) = 1$, es pot tenir una igualtat de la forma $ab = c^2$, amb $c \in \mathbb{Z}$, però a i b no quadrats.

Solució 6.

(a) Sigui $a = a_1 \cdot a_2 ... a_r$ i $b = b_1 \cdot b_2 ... b_k$, $a_i \neq a_j$, $\forall i, j, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k$.
$c^2 = a \cdot b = a_1 \cdot a_2 ... a_r \cdot b_1 \cdot b_2 ... b_k \Rightarrow c = \sqrt{a_1 \cdot a_2 ... a_r \cdot b_1 \cdot b_2 ... b_k}$,
$c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b = t^2, t \in \mathbb{Z}. c = \sqrt{t^2} \iff$

$$\iff \begin{cases} a = b \Rightarrow t^2 = a \cdot b, \text{però } mcd(a,b) = 1 \Rightarrow a \neq b. \\ a = x^2, b = y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 \cdot y^2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$c = x \cdot y$, i $mcd(x,y) = 1$ ja que $mcd(x^2, y^2) = mcd(a,b) = 1$ (Si el quadrat dels nombres és coprimer, les seves arrels també són coprimeres).

(b) Sigui $a = 2^2 \cdot 3$, i $b = 5^2 \cdot 3 \Rightarrow mcd(a,b) = 3$, i $a \cdot b = (2 \cdot 5 \cdot 3)^2 = c^2$.