Exercici 11. Calculeu totes les solucions enteres de les equacions:

(a) 111x + 81y + 45z = 15,

(b) 21x + 49y + 105z = 147,

(c) 6x + 10y + 9z = 3,

(d) 165x + 60y + 105z + 30t = 225.

Solució 11.

(a) $111x + 81y + 45z = 15$,
$mcd(111, 81, 45) =$

$$\begin{cases} mcd(111, 81) = mcd(81, 30) = mcd(30, 21) = mcd(21, 9) = mcd(9, 3) = mcd(3, 0) = 3 \\ mcd(111, 45) = mcd(45, 21) = mcd(21, 3) = mcd(21, 3) = mcd(3, 0) = 3 \end{cases}$$

$mcd(111, 81, 45) = 3$, i $3|15 \Rightarrow$ Té solució.

$$mcd(111, 81) = 3 \Rightarrow 3w = 111x + 81y \qquad (1)$$

Substituïm i obtenim la equació $3w + 45z = 15 \Rightarrow w + 15z = 5$. Per Bézout, una solució és: $(w_0, z_0) = (1 \cdot 15, 0)$. La solució general ve donada per:

$$(w, z) = (5 + 15k_1, -k_1)$$

Ara substituïm a (1). Ens queda:

$$111x + 81y = 3w \Rightarrow 37x + 27y = w \Rightarrow 37x + 27y = 5 + 15k_1$$

Resolem la equació diofantina $37x+27y = 1$, i per Bézout, obtenim una solució particular (x_0, y_0) = (-8, 11). La solució general serà:

$$(x, y) = ((-8) \cdot w + 27k_2,\ 11 \cdot w - 37k_2)$$

Ara substituint obtenim el resultat de les 3 variables:

$$\begin{cases} x = -40 - 120k_1 + 27k_2 \\ y = 55 + 165k_1 - 37k_2 \\ z = -k_1 \end{cases}$$

$$k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$$

(b) $21x + 49y + 105z = 147$,
$mcd(21, 49, 105) =$

$$\begin{cases} mcd(105, 49) = mcd(49, 7) = mcd(7, 0) = 7 \\ mcd(49, 21) = mcd(21, 7) = mcd(7, 0) = 7 \end{cases}$$

$mcd(21, 49, 105) = 7$, i $7|147 \Rightarrow$ Té solució.

$$mcd(21, 49) = 7 \Rightarrow 7w = 21x + 48y \qquad (2)$$

Substituïm i obtenim la equació $7w + 105z = 147 \Rightarrow w + 15z = 21$. Per Bézout, una solució és: $(w_0, z_0) = (1 \cdot 21, 0)$. La solució general ve donada per:

$$(w, z) = (21 + 15k_1, -k_1)$$

Ara substituïm a (2). Ens queda:

$$21x + 49y = 7w \Rightarrow 3x + 7y = w \Rightarrow 3x + 7y = 21 + 15k_1$$

Resolem la equació diofantina $3x + 7y = 1$, i per Bézout, obtenim una solució particular $(x_0, y_0) =$ (-2, 1). La solució general serà:

$$(x, y) = ((-2) \cdot w + 7k_2,\ 1 \cdot w - 3k_2)$$

Ara substituint obtenim el resultat de les 3 variables:

$$\begin{cases} x = -42 - 30k_1 + 7k_2 \\ y = 21 + 15k_1 - 3k_2 \\ z = -k_1 \end{cases}$$

$$k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$$

(c) $6x + 10y + 9z = 3$,
$mcd(6, 10, 9) =$

$$\begin{cases} mcd(10, 6) = mcd(6, 4) = mcd(4, 2) = mcd(2, 0) = 2 \\ mcd(10, 9) = mcd(9, 1) = mcd(1, 0) = 1 \\ mcd(9, 6) = mcd(3, 0) = 3 \end{cases}$$

$mcd(6, 10, 9) = 1$, i $1|3 \Rightarrow$ Té solució.

$$mcd(6, 10) = 2 \Rightarrow 2w = 6x + 10y \qquad (3)$$

Substituïm i obtenim la equació $2w + 9z = 3$. Per Bézout, una solució és: $(w_0, z_0) = (-4 \cdot 3, 1 \cdot 3) = (-12, 3)$. La solució general ve donada per:

$$(w, z) = (-12 + 9k_1, 3 - 2k_1)$$

Ara substituïm a (3). Ens queda:

$$6x + 10y = 2w \Rightarrow 3x + 5y = w \Rightarrow 3x + 5y = -12 + 9k_1$$

Resolem la equació diofantina $3x + 5y = 1$, i per Bézout, obtenim una solució particular $(x_0, y_0) =$ (-3, 2). La solució general serà:

$$(x, y) = ((-3) \cdot w + 5k_2,\, 2 \cdot w - k_2)$$

Ara substituint obtenim el resultat de les 3 variables:

$$\begin{cases} x = 36 - 24k_1 + 5k_2 \\ y = -24 + 18k_1 - 3k_2 \\ z = 3 - 2k_1 \end{cases}$$

$$k_1,\, k_2 \in \mathbb{Z}$$

(d) $165x + 60y + 105z + 30t = 225$,
$mcd(165, 60, 105, 30) =$

$$\begin{cases} mcd(165, 60) = mcd(60, 45) = mcd(45, 15) = mcd(15, 0) = 15 \\ mcd(165, 105) = mcd(105, 60) = mcd(60, 45) = mcd(45, 15) = mcd(15, 0) = 15 \\ mcd(165, 30) = mcd(30, 15) = mcd(15, 0) = 15 \\ mcd(105, 30) = mcd(30, 15) = mcd(15, 0) = 15 \\ mcd(105, 60) = mcd(60, 45) = mcd(45, 15) = mcd(15, 0) = 15 \end{cases}$$

$mcd(165, 60, 105, 30) = 15$, i $15|225 \Rightarrow$ Té solució.

$$mcd(165, 60) = 15 \Rightarrow 15w = 165x + 60y \qquad (4)$$

Substituïm i obtenim la equació $15w + 105z + 30t = 225$. Tornem a substituir i obtenim:

$$mcd(15, 105) = 15 \Rightarrow 15v = 15w + 105z \qquad (5)$$

Substituïm i obtenim la equació $15v + 30t + 30t = 225$. Per Bézout, una solució és: $(v_0, t_0) = (15, 0)$. La solució general ve donada per:

$$(v, t) = (15 + 2k_1, -k_1)$$

Ara substituïm a (5). Ens queda:

$$15w + 30z = 15v \Rightarrow w + 2z = v \Rightarrow w + 2z = 15 + 2k_1$$

Resolem la equació diofantina $w + 2z = 1$, i per Bézout, obtenim la solució general:

$$(w, z) = (15 + 2k_1 + 7k_2,\, -k_2)$$

Ara substituïm a (4). Ens queda:

$$165x + 60y = 1w \Rightarrow 11x + 4y = w \Rightarrow 11x + 4y = 15 + 2k_1 + 7k_2$$

Resolem la equació diofantina $11x + 4y = 1$, i per Bézout, obtenim la solució general:

$$(x, y) = ((-1) \cdot w + 4k_3,\ 3 \cdot (-11k_3))$$

Ara substituint obtenim el resultat de les 4 variables:

$$\begin{cases} x = -15 - 2k_1 - 7k_2 + 4k_3 \\ y = 45 + 6k_1 + 21k_2 - 11k_3 \\ z = -k_2 \\ t = -k_1 \end{cases}$$

$$k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}$$