1. u_1, u_2, u_3, u_4 vectors tals que les ternes:

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}$$

són de vectors l. independents.

Podem demostrar que u_1, u_2, u_3, u_4 són l. independents?

A primera vista em sembla que és cert, i ho intento doncs, demostrar.

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_4 u_4 = 0 \Longleftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$

$\gamma_1 u_1 + \gamma_3 u_3 + \gamma_4 u_4 = 0 \Longleftrightarrow \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$

$\delta_2 u_2 + \delta_3 u_3 + \delta_4 u_4 = 0 \Longleftrightarrow \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$

Per a que u_1, u_2, u_3, u_4 siguin linealment independents,

$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

Si $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} 0 + a_4 \cdot u_4 = 0 \Longrightarrow a_4 = 0 \Longrightarrow u_1, u_2, u_3, u_4$ l. ind.

perquè hem vist que
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

Veiem que té sentit, ja que u_4 no era combinació lineal ni de u_1, u_2 ni u_3, ja que era independ d'ells en els diversos casos.

2. Doneu una base i la dimensió de:

a) L'espai de les matrius amb dues files i tres columnes.

Si és una matriu amb dues files i tres columnes té doncs
3 vectors de dues components cada un
L'espai té doncs la forma:

$\langle (a,b), (c,d), (e,f) \rangle$

La base ha d'estar formada per vectors linealment indep.
i generadors.

LLISTA 3

15 . X . 2015

Bases de $\mathbb{R}^3$ $\quad B_1 = ((1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0))$

$B_2 = ((2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1))$.

Componentes en base B_1 del vector que en base B_2 tiene {componentes / coordenadas} $(3,-2,2)$

$v=(3,-2,2)_{B_2} \Rightarrow v = 3(2,1,1)+(-2)(1,1,1)+2(1,-1,1) = (6,-1,3)$

Para encontrar las componentes en base B1 del vector v, podemos resolver un sistema de equaciones $(6,-1,3) = x(1,0,1)+y(-1,1,1)+z(1,-1,0)$ o hacerlo de la siguiente manera.

v_1:	1 0 1	$v'_1 = v_1$	1 0 1	$v_1'' = v_1'$	1 0 1
v_2	-1 1 1	$v'_2 = v_2 + v_1$	0 1 2	$v_2'' = v_2'$	0 1 2
v_3	1 -1 0	$v'_3 = v_3 - v_1$	0 -1 -1	$v_3'' = v_3' + v_2'$	0 0 1
v	6 -1 3	$v' = v - 6v_1$	0 -1 3	$v'' = v' + v_2'$	0 0 -1

$0 = v'' + v_3'' = v' + v_2' + v_3' + v_2'$;

$0 = v - 6v_1 + v_2 + v_1 + v_3 - v_1 + v_2 + v_1$;

$v = 5v_1 - 2v_2 - v_3$

$v = 5(1,0,1) - 2(-1,1,1) - (1,-1,0)$

7. E B: e_1, e_2, e_3 base de E.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e_1 \\ u_2 &= e_1 - e_2 \\ u_3 &= e_1 - e_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u_1 &= (1,0,0)_B \\ u_2 &= (1,-1,0)_B \\ u_3 &= (1,0,-1)_B \end{aligned}$$

$0 = a u_1 + b u_2 + c u_3 = a e_1 + b e_1 - b e_2 + c e_1 - c e_3 =$

$= (a+b+c)e_1 - b e_2 - c e_3 \Rightarrow \left.\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}\right\} a=b=c=0.$

$\omega_1 = 6e_1 - 2e_2 - 3e_3$ ¿componentes en base u_1, u_2, u_3?

$\omega_1 = a u_1 + b u_2 + c u_3$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Resolvemos el sistema de equaciones.

[és el mateix que $(6,-2,3)$]

Sino, hacemos

$e_1 = u_1$

$e_2 = e_1 - u_2 = u_1 - u_2$ $\qquad \omega_1 = 6u_1 - 2(u_1 - u_2) - 3(u_1 - u_3) = u_1 + 2u_2 + 3u_3$

$e_3 = e_1 - u_3 = u_1 - u_3$

3.9. $B = (u_1, u_2, u_3)$ base de $\mathbb{R}^3$

$u_1 = (1,2,3)$ $\quad w = (1,1,1) = (1,1,1)_B \iff (1,1,1) = (1,2,3) + (4,5,6) + u_3$;

$u_2 = (4,5,6)$ $\quad u_3 = (-4,-6,-8)$.

$u_3 = ?$ $\quad$ Si u_1, u_2, u_3 no forman un conjunto de vectores independientes, no formaran base. Debemos comprobar si la forman o no:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -6 & -8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Son dependientes, por tanto no forman base.

$$\mathbb{R}^4 \begin{cases} x - 2y + z - t = 0. \\ 2x - 5y - z - t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 0 - y \underbrace{-3z + t}_{} = 0 \end{cases}$$

tomamos variables libres z i t

$(\ , \ , 1, 0) \rightarrow$ ho apliquem a les equacions $\rightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -y - 3 = 0 \end{cases}$ $\quad (-7, -3, 1, 0)$

$(\ , \ , 0, 1) \rightarrow$ $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ -y + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad (3, 1, 0, 1)$

independència garantitzada per aquesta part

$$\mathbb{R}^4 \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - 4y - z - t = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ \underbrace{\quad -3z + t}_{} = 0. \end{cases}$$

tomamos variables libres y i t

$(\ , 1, \ , 0) \longrightarrow \begin{cases} x - 2 + z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$ $\quad (2, 1, 0, 0)$

aplicamos a las equaciones

$(\ , 0, \ , 1) \longrightarrow \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ -3z + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad (2/3, 0, 1/3, 1)$.

$\mathbb{R}^4 \quad x - 2y + z - t = 0.$

$(\ , 1, 0, 0)$ $\quad (2, 1, 0, 0)$

$(\ , 0, 1, 0) \longrightarrow (-1, 0, 1, 0)$

$(\ , 0, 0, 1)$ $\quad (1, 0, 0, 1)$