Problema 1 *Resoleu el sistema de congruències*

$$\begin{cases} x \equiv 1\,(mod\ 5) \\ x \equiv 3\,(mod\ 8) \\ x \equiv 3\,(mod\ 12) \end{cases}$$

Solució 1

Primer de tot obvservem que $5, 8, 12$ no són coprimers dos a dos, i per a poder aplicar el Teorema Xinès del Residu és necessari que ho siguin.

Per tant, podem treballar amb el sistema i obtenim

$$\begin{cases} x \equiv 1\,(\text{mod } 5) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 8) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 12) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1\,(\text{mod } 5) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 4) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 2) \implies x \equiv 1\,(\text{mod } 2) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 4) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 3) \implies x \equiv 0\,(\text{mod } 3) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1\,(\text{mod } 5) \\ x \equiv 3\,(\text{mod } 4) \\ x \equiv 0\,(\text{mod } 3) \end{cases}$$

i com ara tenim $5, 4, 3$ que són coprimers 2 a 2, ja podem aplicar el Teorema Xinès.

Tenim que

$$\begin{array}{ccc} c_1 = 1 & c_2 = 3 & c_3 = 0 \\ m_1 = 5 & m_2 = 4 & m_3 = 3 \\ M_1 = 12 & M_2 = 15 & M_3 = 20 \end{array}$$

i calculant l'invers $M_i n_i \equiv 1\,(\text{mod } m_i)$ amb la Identitat de Bézout obtenim que

$$n_1 = 3 \quad n_2 = 3 \quad n_3 = 2$$

Per tant, ja podem aplicar la fórmula que diu que

$$x = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot M_i \cdot c_i$$

i obtenim

$$x = 3 \cdot 12 \cdot 1 + 3 \cdot 15 \cdot 3 + 2 \cdot 20 \cdot 0 = 171$$

Per tant, tenim que la solució al sistema de congruències es

$$x \equiv 171\,(\text{mod } 5 \cdot 4 \cdot 3) \implies x \equiv 171\,(\text{mod } 60) \implies x \equiv 51\,(\text{mod } 60)$$

Conclusió: El nombre x que estavem buscant era $x = 51 + 60k : k \in \mathbb{Z}$.

■