1. Calculeu la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt $(a, f(a))$ en els casos següents:

(a) $f(x) = e^{2x} - \log(1 + x^2)$ al punt $a = 0$,

(b) $g(x) = \cos(\sin x)$ al punt $a = 0$,

(c) $h(x) = x^{\sin x}$ al punt $a = \pi/2$.

2. Trobeu m per a que la recta tangent a la gràfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - m}{x}$ en el punt $(1, f(1))$ sigui perpendicular a la recta tangent a la gràfica de $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en el punt $(2, g(2))$.

3. Estudieu, a partir de la definició, l'existència de les derivades de:

(a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en el punt $x = 0$.

(b) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ en el punt $x = 0$.

(c) $f(x) = |x^2 - 1|$ en el punt $x = 1$.

(d) $f(x) = x \cdot |x|$ en el punt $x = 0$.

4. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable a tot $\mathbb{R}$ i siguin $F(x) = f(\sin x)$, $G(x) = \cos f(x)$. Proveu que F i G són funcions derivables en $\mathbb{R}$ i calculeu F' i G' en termes de f'.

5. Estudieu la continuitat i la derivabilitat de la funció següent segons els diferents valors $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } x \leq 0, \\ -x^2 + bx, & \text{si } 0 < x < 1, \\ c, & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Doneu, en cas que existeixi, l'expressió de $f'(x)$.

6. Per a $\alpha \in \mathbb{R}$ sigui la funció $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determineu per a quins valors d'α la funció és contínua.

(b) Determineu per a quins valors d'α la funció és derivable i calculeu la funció derivada.

(c) Determineu per a quins dels valors α trobats a l'apartat anterior la funció f'_α és contínua.

7. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ sigui la funció definida per

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)^n}{x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Per a quins valors de n és derivable f_n? Per a quins valors de n la funció f'_n és contínua?