8.1 Descomponeu en producte de transposicions les permutacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

i doneu-ne els signes.

8.2 Calculeu els determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

8.3 Calculeu el determinant de la matriu $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb $a^i_j = \min\{i, j\}$.

8.4 Resoleu l'equació

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

8.5 Calculeu el determinant següent, per a $n \geq 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-3 & 2n-2 \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

8.6 Sigui

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Proveu que $\det A_n = b^{n-1}(na+b)$.

8.7 Determinant de Vandermonde. Demostreu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

Indicació: Resteu a cada fila l'anterior multiplicada per a_1. El determinant que queda és igual al producte $(a_2 - a_1)\cdots(a_n - a_1)$ per un determinant de Vandermonde $(n-1)\times(n-1)$.

8.8 Considerem una matriu A, 4×4, amb columnes A_1, A_2, A_3, A_4.

1) Calculeu $\det(A_4, A_3, A_2, A_1) - \det(A_3, A_1, A_4, A_2)$ en funció de $\det A$.

2) Proveu que si $A' = (A_1, A_2, A_3, A_4')$ és una matriu amb les tres primeres columnes iguals a les de A, aleshores $\det A' = \det A$ si, i només si, $A_1, A_2, A_3, A_4 - A_4'$ són linealment dependents.