Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Prova 2 (GRUP MB). Curs 2020-2021

1. Siguin $\{a_n, n \geq 1\}$ i $\{b_n, n \geq 1\}$ dues successions convergents amb $\lim_n a_n = a$ i $\lim_n b_n = b$, respectivament. Proveu

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

2. Proveu a partir de la definició de límit d'una successió que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^3 + 4}{-3n^3 + 6} \right) = -\frac{5}{3}.$$

3. Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^2 + 7^4 + \cdots + (2n+3)^{2n}}{11 + 29^2 + \cdots + (4n^2 + 6n + 1)^n}.$$

1) tenim que

$\lim_n a_n = a \iff \forall \varepsilon' > 0\ \exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0$, $|a_n - a| < \varepsilon'$,

$\lim_n b_n = b \iff \forall \varepsilon'' > 0\ \exists \hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \hat{n}_0$, $|b_n - b| < \varepsilon''$.

Aleshores, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = \max(\hat{n}_0, \tilde{n}_0) \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq n_0$

$$|a_n - b_n - (a-b)| = |a_n - a - (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon'',$$

i agafant $\varepsilon' = \varepsilon/2$ i $\varepsilon'' = \varepsilon/2$ acabem la prova.

2) Hem de veure que $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{5n^3+4}{-3n^3+6} - \left(-\frac{5}{3}\right) \right| < \varepsilon.$$

Operem

$$\left| \frac{5n^3+4}{-3n^3+6} + \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{\cancel{15n^3} + 12 - \cancel{15n^3} + 30}{3(-3n^3+6)} \right|$$

$$\underset{\text{si } n \geq 2}{=} \frac{14}{3n^3-6} \quad \text{i vull}$$

$$\frac{14}{3n^3-6} < \varepsilon .$$

Així

$$\frac{1}{3}\left(\frac{14}{\varepsilon}+6\right) < n^3$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{14}{\varepsilon}+6\right)}$$

Per tant si

$$n_0 = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{14}{\varepsilon}+6\right)}\right] + 1$$

ja ho tenim.

(3) Estudiem primer $\lim_n \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}$

$$\lim_n \frac{(2n+3)^{2n}}{(4n^2+6n+1)^n} = \lim_n \left(\frac{4n^2+12n+9}{4n^2+6n+1}\right)^n$$

$$= \lim_n \left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+6n+1}{6n+8}}\right)^{\frac{4n^2+6n+1}{6n+8}\cdot\frac{6n+8}{4n^2+6n+1}\cdot n}$$

$$= e^{3/2}.$$