LÒGICA I LLENGUATGES

CURSO 2021-22

SEGUNDA PRUEBA PARCIAL (Grupo A)

(a) Consideremos el vocabulario $\sigma = \{f^1, P^2, Q^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3\}$,
- $I(f)(1) = 2$, $I(f)(2) = 3$, $I(f)(3) = 1$,
- $I(P) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$,
- $I(Q) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\forall x P x f(x)$,

(2) $\exists x Q x f(x)$,

(3) $\exists x \exists y(\neg Pxy \wedge \neg Qxy)$,

(4) $\forall x \forall y(Pxy \rightarrow Pf(x)f(y))$,

(5) $\forall y \exists x Pf(x)y \rightarrow \exists x \forall y Pf(x)y$

(7,5 puntos)

(b) Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\square$ se deduce de las siguientes cláusulas:

$\varphi_1 = \neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qx$,

$\varphi_2 = \neg Pa \vee \neg Qb$,

$\varphi_3 = Py$.

(2,5 puntos)

Solución: (a) (1) es falsa y ello se puede comprobar tomando $x = 3$. Se tiene que $I(f)(3) = 1$ y $(3, 1) \notin I(P)$. Por tanto, $\overline{P}\, 3 \overline{f}(3) = F$.

(2) es falsa, ya que para $x = 1$ tenemos que $(1, 2) \notin I(Q)$, para $x = 2$ tenemos que $(2, 3) \notin I(Q)$, y para $x = 3$ tenemos que $(3, 1) \notin I(Q)$

(3) es verdadera, lo cual se comprueba con $x = 3$ e $y = 1$. Como $(3, 1) \notin I(P)$ y $(3, 1) \notin I(Q)$, se tiene que la fórmula es cierta.

(4) es falsa y ello se puede comprobar tomando $x = 2$ e $y = 2$. Se tiene que $(2,2) \in I(P)$, $I(f)(2) = 3$ y $(3,3) \notin I(P)$. Por tanto $\overline{P}22 = V$ y $\overline{P}\,\overline{f}(2)\overline{f}(2) = F$, de lo cual se obtiene que $(\overline{P}22 \to \overline{P}\,\overline{f}(2)\overline{f}(2)) = F$.

(5) es verdadera ya que $\exists x \forall y P f(x) y$ es verdadera. Esto último lo podemos justificar con $x = 1$. Tenemos que $\overline{f}(1) = 2$ y podemos comprobar que para cada valor n de y vamos a tener que $\overline{P}2n = V$, pues $(2,1) \in I(P)$, $(2,2) \in I(P)$ y $(2,3) \in I(P)$. Por tanto, para cada valor n de y se tiene $\overline{P}\,\overline{f}(1)n$.

(b) Tenemos los siguientes inputs:

1. $\neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qx$.
2. $\neg Pa \vee \neg Qb$.
3. Py.

Resolviendo (1) y (2), obtenemos:

4. $\neg Pb \vee \neg Pf(a) \vee \neg Pa$ (tomando $\{x = b\}$).

Resolviendo ahora (3) y (4), obtenemos:

5. $\neg Pf(a) \vee \neg Pa$ (tomando $\{y = b\}$).

Resolviendo entonces (3) y (5), obtenemos:

6. $\neg Pa$ (tomando $\{y = f(a)\}$).

Por último, resolviendo (3) y (6), obtenemos:

7. $\Box$ (tomando $\{y = a\}$).