LÒGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges de predicats

Exercici 1. Determineu quines de les següents expressions són termes en el vocabulari $\sigma = \{P^2, Q^1, f^1, g^2, h^3, a, b\}$.

1. a, a', c, h, 3, f, $f(a)$, $f(a,b)$, α, x_{120}, z_3.
2. $h(x,b,y)$, $h(x,b)$, $h(a,b)$, $g(a,3)$, $g(b)$, $g(b,b)$, $Q(x)$, Qx, Pax.
3. $g(f(x))$, $g(f(x),a)$, $f(f(c))$, $g(f(x),Pax)$.

Exercici 2. Considereu el següent vocabulari $\sigma = \{R^2, Q^1, f^2, g^1, a, b\}$. Determineu quines de les següents expressions són σ-fórmules i quines són σ-fórmules atòmiques:

(a) $\forall x \forall y Rxy$
(b) $\forall x Px$
(c) Rab
(d) $Qf(a, f(b))$
(e) $\neg Rxy$
(f) $QRxy$
(g) $Rxy \wedge Qg(x)$
(h) $\exists a Qa$
(i) $\forall a Rab$
(j) $Qf(a,b)$
(k) $f(x,t) = g(x) + t$
(l) $Qf(a, Rxy)$
(m) $\forall x (Px \to (Qx \vee Rxy))$
(n) $\forall x \exists y (Qx \to Rxy)$
(o) $\forall x (Qx \to \exists y (Qx \vee Rxy))$
(p) $\forall x \exists y Qy \to Rxy$
(q) $x \to y$
(r) $\forall x (Qg(x) \to (Qx \wedge Rx))$

Exercici 3. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats.
(a) Dues rectes ortogonals tenen un punt en comú.
(b) Si dues rectes són paral·leles, no tenen cap punt en comú.
(c) Per un punt exterior a una recta passa una paral·lela a la recta.

Per això, utilitzeu el següent vocabulari:

Px: "x és un punt"

Rx: "x és una recta",

Txy: "x pertany a y",

Pxy: "x,y són paral.leles",

Oxy: "x,y són ortogonals".

Exercici 4. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats.

(a) El Miquel és un bon professor.

(b) La Laia ha llegit tots els llibres que han escrit els autors de Sant Quirze i de Santa Maria.

(c) Una persona és intel·ligent si la seva mare i el seu pare ho són.

(d) Sense testar-lo, cap programa pot funcionar.

Exercici 5. Donades les fórmules següents:

(a)	$\exists x \forall y Rxy$	(g)	$\forall y(Px \to Rxy)$
(b)	$\forall y(Rxy \land \exists y Py)$	(h)	$\exists x(\exists x Rxy \land \neg Px)$
(c)	$\forall x Px \lor \forall y Rxy$	(i)	$\exists x(Rxx \lor \exists y(Py \land Rxy))$
(d)	$\forall x(Px \to (Qx \lor \forall y \exists x Rxy))$	(j)	$\forall x \exists y(Px \to (Qx \lor Rxy))$
(e)	$\exists x(Px \land \exists y(Qx \lor Rxy))$	(k)	$\forall x \exists y Rxy$

1. Determineu-ne les ocurrències de les variables lliures i de les variables lligades.

2. Determineu-ne les fórmules tancades.

Exercici 6. Sigui $\sigma = \{f^1, g^2, h^2, c, d\}$ i I la interpretació amb domini el conjunt nombres enters, definida com $I(f) =$ la funció successor, $I(g) = *$, $I(h) = +$, $I(c) = 2$ i $I(d) = 3$. Llavors, interpreteu els següents termes en I:

(a) $f(c)$

(b) $f(f(c))$

(c) $g(f(c), f(d))$

(d) $h(f(c), f(d))$

(e) $h(f(f(c)), f(f(f(d))))$

Exercici 7. (a) Considerem el vocabulari $\sigma = \{f^2, P^1, Q^2\}$ y la σ-interpretació I definida per:

- domini de I = els nombres reals,
- $I(f) = \times$,
- $I(P) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,
- $I(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$.

Considerem la fórmula $\varphi = \forall x(Px \to \exists y(\neg Py \wedge Qxf(y, y)))$. Llavors, determineu si $I(\varphi) = V$.

(b) Definim la σ-interpretació I' definida per:

- domini de I' = els nombres reals,
- $I'(f) = \times$,
- $I'(P) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
- $I'(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$.

Aleshores, determineu si $I'(\varphi) = V$.

Exercici 8. Considerem el vocabulari $\sigma = \{a, b, P^1, Q^1, R^2\}$ y la σ-interpretació I definida per:

- domini de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $I(a) = 2$, $I(b) = 5$,
- $I(P) = \{2, 5\}$,
- $I(Q) = \{3, 4, 5\}$,
- $I(R) = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Llavors, avalueu les següents fórmules en interpretar-les en I:

(1) $Pa \wedge \neg Rab$,
(2) $\forall x(Rxx \to Qx)$,
(3) $\forall x(Px \vee Qx \vee Rxx)$,

(4) $\forall x \exists y Rxy$,

(5) $\exists x \forall y (Rxy \vee Ryx)$.

Exercici 9. Considerem la següent taula:

	1	2	
	3	4	
			5

Considerem el vocabulari $\sigma = \{E^2, F^2\}$ y la σ-interpretació I definida de la següent manera:

- domini de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $I(E) = \{(x, y) : x$ està per sobre de y a la taula (no necessàriament a la mateixa columna) $\}$
- $I(F) = \{(x, y) : x \neq y$ i x, y són a la mateixa fila de la taula $\}$

Llavors, avalueu les següents fórmules en interpretar-les en I:

(1) $\exists x \forall y Exy$

(2) $\forall x \exists y Eyx$

(3) $\exists x \forall y \neg Fyx$

(4) $\exists x \exists y \exists z (Fxy \wedge Exz)$

(5) $\exists x \forall y (\neg Exy \wedge \neg Fxy)$

Exercici 10. Sigui $\sigma = \{P^1, Q^1, R^2\}$. Determineu si els següents parells de fórmules són lògicament equivalents:

1. $\neg \forall x (Px \to Qx)$, $\exists x (Px \wedge \neg Qx)$.
2. $\varphi_1 = \forall x (Px \vee Qx)$, $\varphi_2 = \forall x Px \vee \forall x Qx$.
3. $\varphi_1 = \neg \exists x \forall y Rxy$, $\varphi_2 = \forall x \exists y \neg Rxy$.
4. $\varphi_1 = \neg \exists x \forall y (Px \wedge \neg Rxy)$, $\varphi_2 = \forall x \exists y (Px \to Rxy)$.
5. $\varphi_1 = \forall x (Px \to Qc)$, $\varphi_2 = (\forall x Px) \to Qc$.

6. $\varphi_1 = \exists x(Px \to Qx)$, $\varphi_2 = \exists x Px \to \forall x Qx$.

Exercici 11. Calculeu formes clausals de les següents fórmules:

(a) $\exists x Px \wedge \neg\exists x \forall y Rxy$,

(b) $\exists x \forall y Rxy \to \exists y \forall x Rxy$,

(c) $\forall x(\forall y(Py \to Qxy) \to \forall y Qyx)$,

(d) $\forall y(\neg Py \to \forall y \exists x Qyx)$,

(e) $\exists x \forall y(\forall z(Pyz \vee Sxy) \to \forall u Qyu)$.

Exercici 12. Fent servir l'algorisme d'unificació, determineu si els següents parells d'àtoms són unificables:

(1) Pa, Pb

(2) Qax, Qxx

(3) $Raxf(x), Rayy$

(4) $Rxyz, Ruh(v,v)u$

(5) $Ravf(v), Rauu$

(6) $Rh(x,x)g(y)z, Rh(a,v)g(b)f(w)$

(7) $Rvvz, Ruh(u,u)x$

Exercici 13. Determineu els resolvents de les següents clàusules;

$\varphi_1 = \neg Pxyu \vee \neg Pyzv \vee \neg Pxvw \vee Puzw$,

$\varphi_2 = Pg(x,y)xy$.

Exercici 14. Demostrar per resolució que la clàusula buida $\square$ es dedueix de les següents clàusules:

$\varphi_1 = Pxf(x)b$,

$\varphi_2 = \neg Qx \vee \neg Qy \vee \neg Pxf(y)z \vee Qz$,

$\varphi_3 = Qa$,

$\varphi_4 = \neg Qb$.

Exercici 15. Demostrar per resolució que la clàusula buida $\square$ es dedueix de les següents clàusules:

$\varphi_1 = Paz$,

$\varphi_2 = \neg Pf(f(a))a$,
$\varphi_3 = \neg Pxg(y) \vee Pf(x)y$.

Exercici 16. Considerem les següents fórmules:
$\varphi_1 = \forall x \forall y((Px \wedge Syc) \to Rxy)$,
$\varphi_2 = \exists x(Sxc \wedge \neg Rbx)$,
$\varphi = \neg Pb$.

Llavors, es demana;

(a) Calcular formes clausals de φ_1 i φ_2.

(b) Demostrar per resolució que φ és conseqüència lògica de φ_1 i φ_2.

Exercici 17. Considerem les següents fórmules:
$\varphi_1 = \forall x \exists y(Bx \to Ty)$,
$\varphi_2 = \exists x Bx$,
$\varphi_3 = \neg\exists x(Tx \wedge Cx)$,
$\varphi = \exists x \neg Cx$.

(1) Calculeu formes clausals de φ_1, φ_2 i φ_3.

(2) Demostrar per resolució que φ és conseqüència lògica de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Exercici 18. Considerem la fórmula $\varphi = (\exists x(Px \wedge Qx) \wedge \forall x(Px \to Rx)) \to \exists x(Qx \wedge Rx)$. Llavors, es demana:

(a) Calcular una forma clausal de $\neg\varphi$,

(b) Fent servir l'algorisme de resolució, demostrar que φ és una tautologia.