Ejercicio 9. Demuestra que, para todo número entero k, los números 6k - 1, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 5 son primos entre sí dos a dos; es decir, que para $a, b \in \{6k-1, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+5\}$, $a \neq b$, es $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Solución 9. Sea k un entero, supongamos que $\text{mcd}(6k+m, 6k+n) = d$, para $m, n \in \{-1, 1, 2, 3, 5\}$ y $m \neq n$. Entonces por propiedades de la divisibilidad tenemos $d|(6k+n) - (6k+m) = n - m$.

Asumiendo ahora que $n > m$, obtenemos que $n - m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Luego, deducimos que $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Veamos pues que $2 \nmid d, 3 \nmid d$, y por consiguiente $4 \nmid d, 6 \nmid d$ y d = 1.

Si d fuera divisible por 2, entonces $2|m$ y $2|n$, pero no hay m, n $\in \{-1, 1, 2, 3, 5\}$ tales que satisfagan esta condición, es decir, cuya diferencia es múltiplo de 2 y además uno de ellos también lo es; esto se debe a que solo hay un número par en el conjunto $\{-1, 1, 2, 3, 5\}$, y las únicas combinaciones posibles para que $2|d$ son del tipo $5-1, 5+1, 1+1, ...$, esto es, diferencia de impares, que obviamente no son divisibles por 2. Análogamente, si $3|d$, entonces $3|m$ y $3|n$, pero no hay parejas m y n que cumplan simultáneamente esa condición. Como $2 \nmid d, 3 \nmid d$, entonces $4 \nmid d, 6 \nmid d$ y solo nos queda la posibilidad d = 1.
Por tanto, $\text{mcd}(a, b) = 1$ para $a, b \in \{6k-1, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+5\}$, $a \neq b$.