

Exercici 16.

- (b) Calculeu nombres enters r, s, t tals que $17r + 51s + 45t = 1$ o be demostreu que no existeixen.

Solució 16.

- (b) Primer de tot podem assegurar que és possible calcular enters tals que $17r + 51s + 45t = 1$, ja que aquests existeixen degut a que $\text{mcd}(17, 51, 45) = 1$:

$$\begin{aligned}\text{Divisors de 17: } & 17 \text{ i } 1 \text{ (primer)} \\ 17 & \nmid 45 \Rightarrow \text{mcd}(17, 51, 45) = 1 \\ \text{mcd}(51, 45) &= \text{mcd}(45, 6) = \\ &= \text{mcd}(6, 3) = \text{mcd}(3, 0) = 3\end{aligned}$$

I ara tornant sobre els passos de l'algorisme d'Euclides, tenim que:

$$\begin{aligned}3 &= 45 - 6 \cdot 7 = 45 - (51 - 45) \cdot 7 = 45 \cdot 8 - 51 \cdot 7, \\ \text{mcd}(17, 3) &= 1 \exists x, r \in \mathbb{Z} \text{ tals que } 3x + 17r = 1\end{aligned}$$

Si agafem $r = -1$ i $x = 6$ es compleix la igualtat, per tant hem obtingut els enters que ens demanaven:

$$\begin{aligned}r &= -1, s = -42, t = 48 \\ 17 \cdot (-1) + 51 \cdot (-42) + 45 \cdot 48 &= \\ -17 - 2142 + 2160 &= 1\end{aligned}$$