Problema 1 *Calculeu les solucions enteres de l'equació*

$$165x + 60y + 105z + 30t = 225$$

Solució 1

Primer de tot cal calcular el $d = mcd\,(165, 60, 105, 30)$.

$$d = mcd\,(165, 60, 105, 30) = mcd\,(15, 105, 30) = mcd\,(15, 30) = 15$$

i com que $15|225$, l'equació té solucions.

- **Solucions de t.**

  Sigui $d_1 = mcd\,(165, 60, 105) = mcd\,(15, 105) = 15$. Volem trobar les solucións $t, \phi_1 \in \mathbb{Z}$ de l'equació $15\phi_1 + 30t = 225$.

  Aplicant la Identitat de Bézout obtenim que

  $$15 \cdot 15 + 30 \cdot 0 = 225$$

  per tant,

  $$\begin{cases} \phi_1 = 15 + 2 \cdot k_1 \\ t = -k_1 \end{cases} \qquad k_1 \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

- **Solucions de z**

  Sigui $d_2 = mcd\,(165, 60) = 15$. Volem trobar totes les solucions $z, \phi_2 \in \mathbb{Z}$ de l'equació $15\phi_2 + 105z = 15\phi_1$.

  Utilitzant l'Identitat de Bezóut tenim que

  $$15 \cdot 1 + 105 \cdot 0 = 15$$

  però com que volem $15\phi_1$ en comptes de 15. Hem de multiplicar cada terme per ϕ_1. D'aquesta manera obtenim

  $$15 \cdot \phi_1 + 105 \cdot 0 = 15 \cdot \phi_1$$

  aleshores,

  $$\begin{cases} \phi_2 = \phi_1 + 7 \cdot k_2 \\ z = -k_2 \end{cases} \qquad k_2 \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

- **Solucions de x, y**

  Per últim, podem trobar les solucions de $x, y \in \mathbb{Z}$ utilitzant l'equació $165x + 60y = 15\phi_2$.

  Utilitzant l'Identitat de Bezóut obtenim

  $$165 \cdot (-1) + 60 \cdot 3 = 15$$

  però com que volem $15\phi_2$ en comptes de 15. Hem de multiplicar cada terme per ϕ_2. D'aquesta manera obtenim

  $$165 \cdot (-\phi_2) + 60 \cdot (3 \cdot \phi_2) = 15\phi_2$$

  aleshores,

  $$\begin{cases} x = -\phi_2 + 4 \cdot k_3 \\ y = 3 \cdot \phi_2 - 11 \cdot k_3 \end{cases} \qquad k_3 \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Com que ens interessa tenir-ho tot en funció del parámetres $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, hem de treballar amb $(1), (2), (3)$ per tal d'aïllar x, y, z, t.

$$\begin{cases} x = 4 \cdot k_3 - 7 \cdot k_2 - 2 \cdot k_1 - 15 \\ y = -11 \cdot k_3 + 21 \cdot k_2 + 6 \cdot k_1 + 45 \\ z = -k_2 \\ t = -k_1 \end{cases} \tag{4}$$

Demostració:

Per a demostrar que (4) és el conjunt de solucions de l'equació $165x + 60y + 105z + 30t = 225$ val amb substituir en x, y, z, t l'expressió obtinguda en (4) i obtenir 225.

$$\begin{aligned} 225 &= 165x + 60y + 105z + 30t \\ &= 165(4k_3 - 7k_2 - 2k_1 - 15) + 60(-11k_3 + 21k_2 + 6k_1 + 45) + 105(-k_2) + 30(-k_1) \\ &= 660k_3 - 1155k_2 - 330k_1 - 2475 - 660k_3 + 1260k_2 + 360k_1 + 2700 - 105k_2 - 30k_1 \\ &= (660 - 660)k_3 + (-1155 + 1260 - 105)k_2 + (-330 + 360 - 30)k_1 + (-2475 + 2700) \\ &= 0k_3 + 0k_2 + 0k_1 + 225 \\ &= 225 \end{aligned}$$

$\blacksquare$