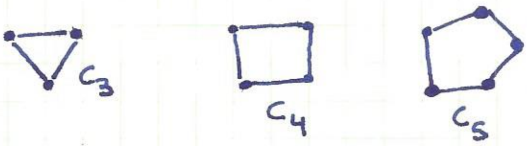
3.3. TIPUS DE GRAFS i ALGUNS INVARIANTS.

A continuació definirem alguns tipus de Grafs.

DEFINICIÓ:
Diem que un Graf és un CICLE si tots els vèrtex són de grau 2.

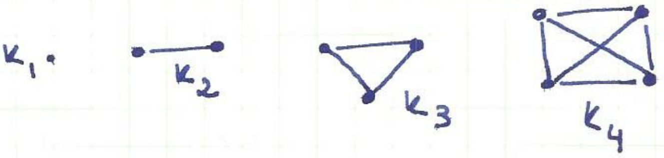
EX.:



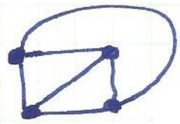
etc....

DEFINICIÓ:
Diem que un Graf és COMPLERT si per dos vèrtex qualssevols hi tenim una aresta, és a dir si tots els vèrtex estan conectats tots amb tots. Normalment denotem per K_n el Graf complert de n vèrtex.

EX:



K_4 també el podem dibuixar com

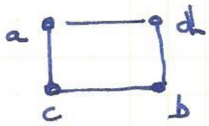


etc....

OBS: Un graf complert de n vèrtex té $\binom{n}{2}$ arestes.

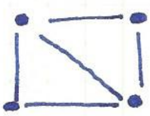
DEFINICIÓ: Diem que un Graf $G=(V,E)$ és BIPARTIT si V descompon com a unió de dos conjunts $V=V_1 \cup V_2$ amb $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ de forma que tota aresta de G conecta un vèrtex de V_1 amb un de V_2. (No tenim cap aresta entre 2 vèrtex de V_1 ni entre 2 vèrtex de V_2)

EXEMPLE: (a)



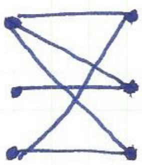
és Bipartit $V=\{a b c d\} = \{a b\} \cup \{c d\}$

(b)



No és bipartit

(c)



és Bipartit.

(d)

No és Bipartit.

DEFINICIÓ: Un Graf Bipartit $G=(V,E)$ és COMPLERT si té totes les arestes possibles, això vol dir que si $V=V_1 \cup V_2$, $\forall\, v \in V_1$ i $\forall\, w \in V_2$ tenim la aresta que uneix v i w.

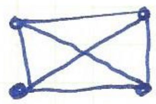
EX.

és Bipartit complert

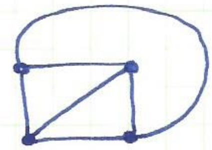
és Bipartit no complert.

DEFINICIÓ: Un Graf G és PLA o PLANAR si admet una representació tal que les arestes no es tallen.

EX:



és pla per que es podem representar



En canvi

no és planar.

OBS: Que no ho sapiguem dibuixar a priori no vol dir que no sigui pla. Més endavant i donada la seva importància estudiarem i caracteritzarem els grafs plans.

NOTACIÓ: Si G és Bipartit complert amb $V = V_1 \cup V_2$, $\#V_1 = p$, $\#V_2 = q$, normalment el denotem per $K_{p,q}$. El nombre d'arestes de $K_{p,q} = p \cdot q$.

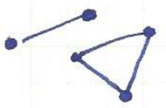
OBS: Un Graf és complert bipartit si i només si els vèrtex es poden ordenar de tal forma que la matriu d'adjacència té la següent forma:

$$\begin{array}{c} \quad p \qquad\qquad q \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

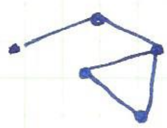
De vegades ens cal treballar amb certs invariants numèrics dels grafs.

DEFINICIÓ:
Diem que un graf és CONEX si donats dos vèrtex qualssevol es poden unir mitjançant un camí.

EX.:



No és conex



és conex.

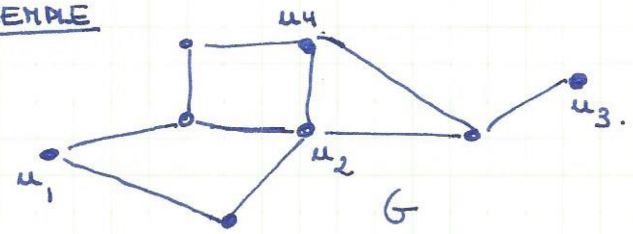
DEF: Sigui G un graf conex, u, v dos vèrtex de G. Es defineix la distància entre u i v per

$$d(u,v) := \text{longitud mínima d'un camí entre } u \text{ i } v.$$

Es defineix el DIÀMETRE de G com el la major de les distàncies entre vèrtex de G:

$$\mathrm{diam}(G) = D(G) = \max_{u,v\in V(G)} = \{d(u,v)\}.$$

EXEMPLE



$d(u_2,u_4) = 1$

$d(u_1,u_4) = 3$

$D(G) = 4$

DEFINICIÓ: Sigui $G = (V,E)$ un graf conex. Definim la EXCENTRICITAT d'un vèrtex $v \in V$ com

$$e(v) := \max_{u\in V} \{d(u,v)\}$$

(màx. de les distàncies entre v i qualsevol vèrtex).

I definim el RADI de G com

$$r(G) = \min_{u\in G} \{e(u)\}.$$

Definim el CENTRE d'un Graf G com el conjunt de vèrtex amb excentricitat mínima:

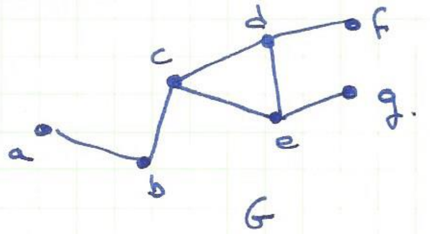
$$Z(G) := \{u \in V \mid e(u) = r(G)\}$$

Definim la PERIFÈRIA de G com el conjunt de vèrtex que tenen excentricitat màxima.

$$P(G) := \{u \in V \mid e(u) = D(G)\}.$$

EXEMPLE :

(a)



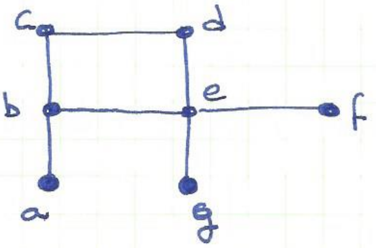
$e(a) = 4$ $\quad$ $e(d) = 3$

$e(c) = 2$

$D(G) = 4$ $\quad$ $Z(G) = \{c\}$

$r(G) = 2$ $\quad$ $P(G) = \{a, f, g\}$

(b)



$e(f) = 3$ $\quad$ $e(g) = 3.$

$e(b) = 2$

$r(G) = 2$ $\quad$ $Z(G) = \{b, d, e\}$

$D(G) = 3$ $\quad$ $P(G) = \{f, g\}$

Per finalitzar aquesta part us recomano que busqueu informació sobre

- SIX DEGREES OF KAVIN BACON.
- SIX DEGREES OF SEPARATION.

La conclusió que arribaren és que el "món" és molt més "petit" del que pensem.