LLISTA 9

EXERCICI 1

Per quins paràmetres les matrius tenen inversa i calcular-les:

El que fa es calcular els determinants i, quan no són zero, escriure la inversa amb la fórmula següent:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{|A|}_{\text{det}}} \underbrace{(A^*)}_{\text{adjunts}}{}^{T}} \rightarrow \text{transposada}$$

Escriure les solucions:

a) Quan $ad - bc \neq 0$ $\quad \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

b) Quan $2abc \neq 0$ $\quad \frac{1}{2abc}\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$

c) $-abc + abc = 0 \rightarrow$ No té inversa independentment dels valors

d) Aquesta és més difícil calcular el determinant i llavors, molt intel·ligentment, ho fa per adjunts (no dobidem canviar el signe!). De manera que queda:

↓ aquí ja ho ha fet!

$$|\text{determ}| = (3-a)\begin{vmatrix} 3 & a & a \\ a & 3 & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} + (3-a)\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & 3 & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

Resultat: si $a \neq 3$ i $a \neq -3$ $\quad$ det $\neq 0 \Rightarrow$ TÉ INVERSA

si $a = 3$ o $a = -3$, det $= 0 \Rightarrow$ NO EN TÉ

EXERCICI 2

a) Per fer-ho, calcula el determinant de la matriu, i li queda així

$$|A| = (1+a)\,a^3\,(a-1)$$

→ si $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \rightarrow$ det $A \neq 0 \rightarrow$ Rang $A = 3$

→ si $a = 0$ o $a = 1$ o $a = -1 \Rightarrow$ det $A = 0 \Rightarrow$ rang $A \leq 2$

I ho separem per casos per veure-ho bé

$\underline{a=0}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{a=1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\underline{a=-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En els tres casos veiem que rang $A = 2$.

b) com que és una matriu gran, ho fa per adjunts però de la primera columna

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + b \cdot 1 = b + 1$$

! Recordatori

En les matrius diagonals, el determinant és el producte dels elements de la diagonal.

si $b = -1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 5$

si $b = -1 \Rightarrow$ rang $A = 4$

↳ abans ja hem trobat 2 adjunts que tenien $\det \neq 0$

EXERCICI 3

(Només està fet el 1r)

Mirem la matriu de coeficients, que l'anomenarem la matriu A calculem el determinant de A i ens surt zero. Si ens fixem, veiem que rang $A = 2$
$\Rightarrow$ un vector és combinació lineal de dues columnes.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ \underbrace{1 \quad 1}_{\text{L.I}} & & -1 \end{pmatrix}$$

Per tal que el sistema sigui compatible, rang $A' = 2$.

La matriu ampliada l'escrivim de la següent manera

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

El que farem serà calcular el determinant i anul·lar-lo per tal de garantir el rang $A' = 2$

$$\det A' = -c - b + 2a = 0$$

$\hookrightarrow 2a = b + c$

Tenim un sistema C.I amb 1 grau de llibertat

La solució la traiem del sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= \tfrac{1}{2}(b+c) \\ 5x + 3y + 3z &= b \end{aligned}\right\}$$