Exercici 31. Els enters de la forma $M_n := .2^n - 1$ s'anomenen *nombres de Mersenne.* Un primer de Mersenne és un nombre de Mersenne, que a més a més, és primer. Demostreu que si M_p és primer,aleshores p és primer.

Solució 31.
Usarem el següent lema per resoldre aquest exercici:
Lema: $n = rs$. Suposem que s és senar (aquesta suposició no varia el resultat).
$(2^r \pm 1)|(2^{rs} \pm 1)$

Demostració: $m = (2^r \pm 1) \Rightarrow 2^r \equiv \mp 1 (\text{mod m}) \Rightarrow 2^{r^s} \equiv \mp 1 (\text{mod m}) \Rightarrow m|(2^{rs} \pm 1)$. □

Suposem que $2^n - 1$ és primer, però n no. Si $n = kl$ amb $2 \leq k$, $l < n$, llavors
$(2^k - 1)|(2^n - 1) \Rightarrow 2^n - 1$ no és primer ja que és divsible per $2^k - 1 \neq 1 \neq 2^n - 1$.