

TEMA 3: Interpolació

Problema 15 Donada la taula de valors següent de la funció f :

x_k	3.2	2.7	1
$f(x_k)$	22.0	17.8	14.2

- (a) Trobeu el polinomi interpolador $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ a la taula, resolent el sistema lineal que compleixen els seus coeficients.
- (b) Trobeu el polinomi interpolador a la taula, usant el mètode de les diferències dividides i calculant amb tres dígits fraccionaris.
- (c) Trobeu el polinomi interpolador si s'afegeix la dada $f(4.8) = 38.3$ a la taula anterior.

Problema 16 Aproximeu $\ln(0.6)$ fent servir:

- (a) El polinomi interpolador a la taula següent de $f(x) = \ln(x)$:

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

- (b) El desenvolupament de Taylor de $f(x) = \ln(x)$ al voltant d' $x_0 = 0.5$ fins al terme de la tercera derivada.

En cada cas, fiteu els errors comesos.

Problema 17 Es vol construir una taula de valors de la funció $f(x) = e^{-x} - x$ en punts equidistants dins l'interval $[0, 1]$, $x_k = \frac{k}{m}$ per a $k = 0, 1, \dots, m$. Es pretén usar aquesta taula per aproximar la funció f mitjançant interpolació lineal: donat $z \in [0, 1]$, $f(z)$ s'aproxima per $p_1(z)$, on p_1 és el polinomi interpolador de grau 1 a f en les dues abscisses de la taula més properes a z .

Trobeu el mínim valor de m que ens assegura que l'error d'interpolació sigui menor que 10^{-8} per a qualsevol $z \in [0, 1]$.

Problema 18 Es considera una funció f de classe C^1 a l'interval $[a, b]$ amb $f'(x) \neq 0$, i suposem que existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Per trobar-ne una aproximació es trien n punts diferents $x_0 < \dots < x_{n-1}$ dins $[a, b]$ i es defineixen $y_k = f(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, m$).

- (a) Justifiqueu que, si el polinomi $Q(y)$ interpola (y_k, x_k) per a $k = 0, 1, \dots, n-1$, llavors $Q(0)$ aproxima c .
- (b) Tenint en compte l'apartat anterior, aproximeu la solució de l'equació $e^{-x} - x = 0$ a partir de la taula:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
$e^{-x} - x$	0.441	0.270	0.107	-0.051

Problema 19 Trobeu un polinomi de grau 4 que interpoli els valors indicats en la taula següent:

x	0	1	2
$f(x)$	2	-4	44
$f'(x)$	-9	4	

Trobeu ara un polinomi de grau 5 que interpoli els valors anteriors i $f(3) = 2$.

Problema 20 Construïu l'spline cúbic natural per a la funció $f(x) = x \ln x$ en els nodes $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $x_3 = 2.5$. Useu-lo per aproximar $f(1.35)$ i $f(2.15)$, i compareu el resultat amb els valors exactes.