TEMA 3: GRAFS:

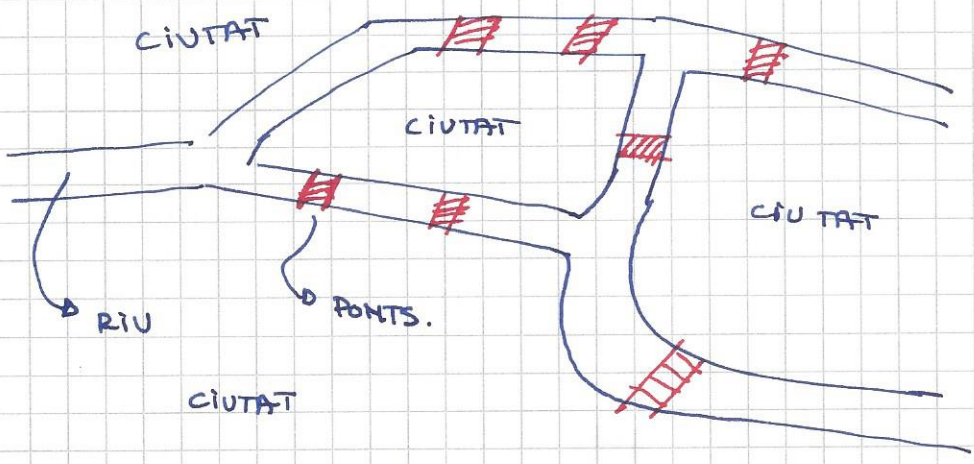
Els grafs són un dels objectes importants dins de la Matemàtica Discreta.

El seu ús ens permet estudiar estructures de llocs web, fer anàlisi de xarxes, estudiar molècules o fer estudis sociològics, entre altres.

Euler fou el matemàtic que va iniciar l'estudi sistemàtic dels Grafs. Euler va iniciar la Teoria de Grafs intentant resoldre el PROBLEMA dels SET PONTS DE KÖNIGSBERG:

PROBLEMA DELS 7 PONTS DE KÖNIGSBERG:

La ciutat de Königsberg està atravessada per un riu que forma dues grans illes. La ciutat té 7 ponts que permeten passar d'una banda a l'altra. El riu i els ponts tenen la següent forma:



PROBLEMA: És possible recórrer els set ponts de manera que només es passi per cadascún d'ells un sol cop?

Euler per resoldre aquest problema va desenvolupar tots els fonaments de la Teoria de Grafs.

Guió del Tema:

- 3.1. Definicions bàsiques i Isomorfisme.
- 3.2. Representació Matricial d'un Graf.
- 3.3. Tipus de Grafs i alguns invariants.
- 3.4. Camins. Grafs Eulerians i Grafs Hamiltonians.
- 3.5. Coloracions i Planaritat.

3.1. DEFINICIONS BÀSIQUES I ISOMORFISME:

Comencem donant la definició de Graf.

DEF.:

Un GRAF és un parell $G = (V, E)$ format per dos conjunts finits:

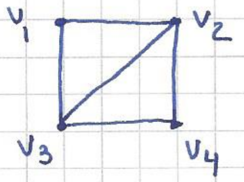
$V = \{v_1 - v_n\}$ i és el que anomenem conjunt de vèrtex.

$A = \{\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_3}, v_{i_4}\}, \dots, \{v_{i_s}, v_{i_{s+1}}\}\}$ és el conjunt d'arestes.

Formalment una aresta és un parell de vèrtex però sempre representem els vèrtex per punts i una aresta és una línea que conecta 2 vèrtex.

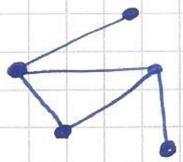
EXEMPLE

① $G = (V, A)$ on $V = \{v_1 v_2 v_3 v_4\}$ i $A = \{\{v_1 v_2\}, \{v_1 v_3\}, \{v_2 v_4\}, \{v_3 v_4\} \{v_2 v_3\}\}$



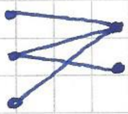
↝ així és com representem el Graf.

②



→ El Graf té 5 vèrtex i 5 arestes.

③

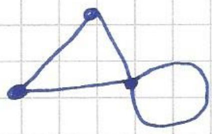


5 vèrtex
4 arestes

④ En una empresa amb ordinadors conectats, els ordinadors serien els vèrtex i tenim una aresta si els dos ordinadors estan conectats.

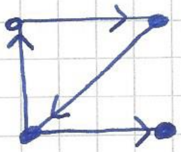
⑤ Si tenim un conjunt de pàgines web, cada pàgina és un vèrtex i tenim una aresta si una web linka a una altra.

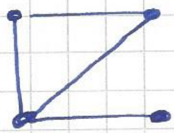
NOTA 1) Nosaltres NO permetem LOOPS: arestes de surten i arriben al mateix vèrtex



2) Per nosaltres les arestes no tenen sentit. Quan s'orienten les arestes parlem de Grafs dirigits. Nosaltres en general NO treballem amb grafs dirigits

EXEMPLE:

$G_1 =$ 

$G_2 =$ 

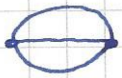
G_1 és un Graf dirigit i en canvi G_2 no ho és.

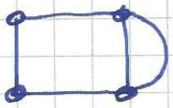
DEFINICIÓ: Sigui G un graf.

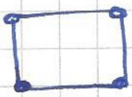
Diem que G és un Multigraf si entre dos vèrtex tenim més d'una aresta, és a dir permetem que hi hagi arestes múltiples.

Si no permetem arestes múltiples diem que el graf és Simple.

NOTA: Si no diem el contrari, els grafs que considerem són simples.

EXEMPLE: ①  és un multigraf.

②  és un multigraf.

③  és simple.

DEF: Sigui G un graf.

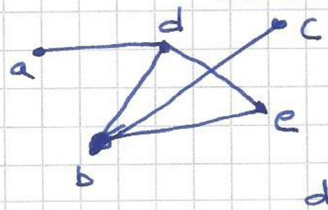
(a) Diem que 2 vèrtex de G són ADJACENTS si estan units per una aresta.

(b) Si v és un vèrtex de G definim el GRAU de v com el nombre de vèrtex adjacents a v:

$$d(v) = \#\{\text{vèrtex de } G \text{ adjacents a } v\}.$$

Sempre suposarem que $d(v) \geq 1$, o sigui que per un vèrtex almenys passa una aresta.

EXEMPLE:



a i e no són adjacents.
d i b són adjacents.

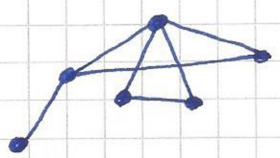
$d(e) = 2$

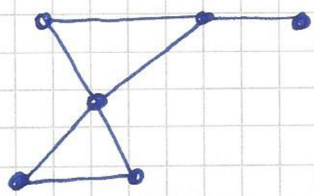
$d(b) = d(d) = 3$

L'important d'un Graf no és el dibuix, ni òbviament el nom dels vèrtex.

L'important és el nº d'arestes, el nº de vèrtex i com estan col·locades les arestes.

EX:





⇝ podem dir que aquests dos grafs són "iguals"

⟶ això ens porta a la següent definició.

DEFINICIÓ: Siguin $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafs.

Diem que G_1 i G_2 són **ISOMORFS** si existeix una aplicació bijectiva

$$f: V_1 \longrightarrow V_2$$

de manera que es preserva la adjacència. Això vol dir que si

$$\underset{\text{és una aresta}}{\{u, v\} \in E_1} \iff \underset{\text{és una aresta.}}{\{f(u), f(v)\} \in E_2}$$

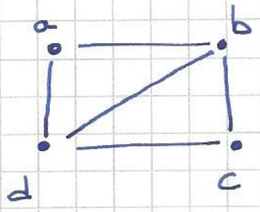
En particular, $\forall\, v \in V_1$ (això és per tot vèrtex de G_1),

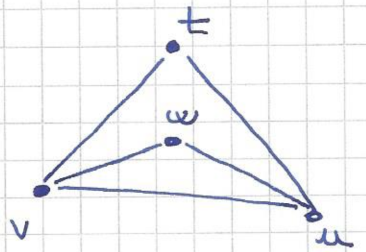
$$\deg(v) = \deg(f(v)).$$

EXEMPLE:

1

G_1





G_2

Intentem definir un isomorfisme entre G_1 i G_2.

G_1 té 2 vèrtex de grau 3, el d i el b. G_2 té 2 vèrtex de grau 3, el v i el u.

- Podem provar de definir

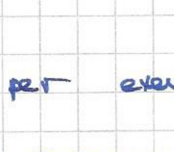
$$f(d) = v$$
$$f(b) = u.$$

- a és adjacent a d $\Rightarrow$ $f(a)$ ha de ser adjacent a $f(d) = v$
  a té grau 2 $\Rightarrow$ $f(a)$ té grau 2
  $\Big\}$ $\Rightarrow$ $f(a)$ pot ser t o w.

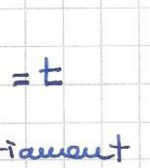
- Triem per exemple $f(a) = t$
- Pel mateix raonament necessàriament $f(c) = w$.

Per tant un possible isomorfisme és:
$$\begin{aligned} f: V_1 &\longrightarrow V_2 \\ a &\longrightarrow t \\ b &\longrightarrow u \\ c &\longrightarrow w \\ d &\longrightarrow v \end{aligned}$$

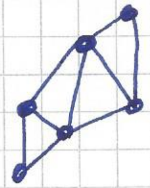
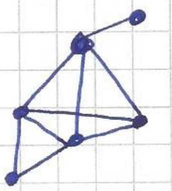
2 G_1:



G_2:



Tenen el mateix nº d'arestes i vèrtex però no són isomorfs perquè a té grau 4 i G_1 no té cap vèrtex de grau 4.

3  i  no són isomorfs.

PROPIETAT: Sigui $G=(V,E)$ un graf (simple). Aleshores,

$$\sum_{u\in V} deg(u) = 2\cdot \# E$$

És a dir, la suma de tots els graus és 2 vegades el nº d'arestes.

Demo: Al sumar tots els graus, cada aresta la comptem dos cops.

Com a conseqüència tenim:

- En tot graf, el nº de vèrtex amb grau senar és parell.

En efecte,

$$\underbrace{2\cdot\# E}_{\text{valor parell}} = \sum_{\substack{v\in V\\ \text{de grau parell}}} deg(v) + \underbrace{\sum_{\substack{u\in V\\ \text{de grau senar}}} deg(u)}_{\text{això ha de ser parell}}$$

$\Rightarrow$ El nº de vèrtex de grau senar ha de ser parell.

Propietat:

En tot graf sempre hi ha dos vèrtex amb el mateix grau.

Demo:

Suposem que tenim n vèrtex $\{v_1 — v_n\}$. Els valors dels graus, són enters que estan en

$$\{0,1,2,\dots,n-1\}.$$

Hem suposat que per tot vèrtex sempre passa 1 aresta $\Rightarrow d(v_i)\neq 0$.

$\Rightarrow$ Tenim n vèrtex : $n-1$ possibles valors $\Rightarrow \exists i\neq j$ tq $d(v_i)=d(v_j)$ ∎.