Entrega 28/12

Noah Márquez Vara
Grup TF

67

(b) D en $\mathbb{N}$, $nDm \iff n|m$, $n,m \in \mathbb{N}$.

- Reflexiva: Sí, perquè $n|n$.
- Simètrica: No, perquè per exemple $1|2$ però $2 \nmid 1$ (no divideix).
- Transitiva: Sí, ja que si tenim tres nombres $n,m,p \in \mathbb{N}$ tals que $n|m$ i $m|p \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k,l \in \mathbb{N}$ (n, m, p ho són) tals que $m = k\cdot n$, $p = l\cdot m$ $\Rightarrow p = l\cdot m = lkn \Rightarrow n|p \Rightarrow nDp$ ✓

- Antisimètrica: Sí, si tenim $n|m$ i $m|n \Rightarrow \exists k,l \in \mathbb{N}$ tals que $m = k\cdot n$, $n = l\cdot m$ $\Rightarrow m = k\cdot n = k\cdot l m \Rightarrow$

$\Rightarrow k\cdot l = 1 \Rightarrow k = l = 1 \Rightarrow m = n$ ✓

- Ordre (no estricte): satisfà R, T, A.
- No és un ordre total, per ser total hauria de ser que qualsevol parella de naturals hauria d'estar relacionada en un sentit o en l'altre. Per exemple, $4 \nmid 6$, $6 \nmid 4$. $\Rightarrow$ No total.

(d) $\otimes$ en $\mathcal{P}(A)$, A un conjunt qualsevol, $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ així: $X \otimes Y \iff X \cap Y \neq \emptyset$.

- Reflexiva: Sí, ja que $X \cap X \neq \emptyset$ (l'intersecció d'un conjunt X amb ell mateix és el propi X).
- Simètrica: Sí, ja que si $X \cap Y \in \otimes$, llavors $Y \cap X \in \otimes$; és a dir, si tenim $X \otimes Y$ es compleix $\iff$ que $X \cap Y \neq \emptyset$ i per la propietat commutativa, la intersecció de dos conjunts X i Y és igual a la intersecció dels conjunts Y i X, per tant: $Y \otimes X$ ✓. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$
- Transitiva: No, hauríem de tenir $X, Y, T \in \mathcal{P}(A)$ tals que si $X \otimes Y$ i $Y \otimes T$, llavors $X \otimes T$. La relació es compleix en $X \otimes Y$ si i només si $X \cap Y \neq \emptyset$ i en $Y \otimes T$ és compleix $\iff Y \cap T \neq \emptyset$. Però la intersecció $X \cap Y$ i $Y \cap T$ no s'han de tenir necessàriament (complir-se per tal de que $X \otimes T$).

Exemple: $A = \{1,2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. (amb $X = \{1\}$, $T = \{2\}$, $Y = \{1,2\}$)

$X \otimes Y$ ✓ $\Rightarrow (X \cap Y = \{1\} \neq \emptyset)$

$Y \otimes T$ ✓ $\Rightarrow (Y \cap T = \{2\} \neq \emptyset)$

$X \otimes T$ ✗ $\Rightarrow (X \cap T = \emptyset)$.

- Antisimètrica: No, hauríem de tenir que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ si $X \otimes Y$ i $Y \otimes X$, llavors $X = Y$. Hem vist en l'apartat de la simetria que això no és necessàriament així. Si fossin simètrica i antisimètrica ~~alhora~~ alhora, les úniques possibles relacions serien d'un element amb ell mateix i hem vist que això no succeix.

No és relació d'equivalència, ni ordre, ni ordre total.

(f) T en $\mathbb{Q}^+$ per $aTb \iff q < s$ o $(q = s$ i $p \le r)$, p/q expressió irreduïble d'a i r/s expressió irreduïble de b.

- **Reflexiva:** Sí, ja que $\forall a \in \mathbb{Q}^+$, aTa ✓.
  - ex: $a = \frac{1}{2}\frac{(p,r)}{(q,s)}$ $\quad q \not< s$ però sí que $q = s$ i $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $p \le r$ ✓ $\underline{\underline{aTa}}$

- **Simètrica:** No., ~~...~~ volem veure que $\forall a,b \in \mathbb{Q}^+$, $aTb \to bTa$.
  - ex: $a = 1/2 \to p/q = 1/2$; aTb: $b = 6/4 \to r/s = 3/2$ $\Big\}$ $q \not< s$ però $q = s$ i $p \le r$ ✓ $\quad \underline{\underline{aTb \checkmark \ (1/2 \, T \, 6/4)}}$
  - bTa: $b = 6/4 \to p/q = 3/2$; $a = 1/2 \to r/s = 1/2$ $\Big\}$ $q \not< s$ però $q = s$ i $p \not\le r$ ✗ $\underline{\underline{bTa \text{ ✗}}}$

- **Transitiva:** Sí, hem de veure que $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}^+$ si aTb i bTc, llavors aTc $(q < z$ o $(q = z \wedge p \le v))$.
  - Si aTb: $\to q < s$ ó $q = s \wedge p \le r$
  - Si bTc: $\to s < z$ ó $s = z \wedge r \le v$ on $\frac{v}{z}$. És l'expressió irreduïble de c.

  Casos:
  - Si $q < s$ i $s < z \Rightarrow q < z \Rightarrow aTc$ ✓
  - Si $q < s$ i $s = z \wedge r \le v \Rightarrow q < z \Rightarrow aTc$ ✓
  - Si $q = s \wedge p \le r$ i $s < z \Rightarrow q < z \Rightarrow aTc$ ✓
  - Si $q = s \wedge p \le r$ i $s = z \wedge r \le v \Rightarrow q = z \wedge p \le v \Rightarrow aTc$ ✓

  - ex: $a = \frac{1}{2}$, $b = 6/4$, $c = 4/12$
    - aTb $\to a = 1/2 \to p/q = 1/2$; $\to b = 6/4 \to r/s = 3/2$ $\Big\}$ $q \not< s$ però $q = s$ i $p \le r$ ✓ $\underline{\underline{aTb}}$
    - bTc $\to b = 6/4 \to r/s = 3/2$; $\to c = 4/12 \to v/z = 1/3$ $\Big\}$ $s < z \Rightarrow \underline{\underline{bTc}}$ ✓
    - aTc $\to a = 1/2 \to p/q = 1/2$; $\to c = 4/12 \to v/z = 1/3$ $\Big\}$ $q < z \Rightarrow \underline{\underline{aTc \checkmark}}$

- **Antisimètrica:** Sí, hem de veure que $\forall a,b \in \mathbb{Q}^+$: $aTb \wedge bTa \Rightarrow a = b$.
  - Si aTb: $q < s$ ó $q = s \wedge p \le r$
  - Si bTa: $s < q$ ó $s = q \wedge r \le p$

  $\Big\}$ Veiem que l'única possibilitat de satisfer $aTb \wedge bTa$ és que $\underline{\underline{a = b.}}$

- Ordre (no estricte): satisfà R, T, A.
- Ordre total ja que qualsevol parella $\mathbb{Q}^+$ es pot relacionar en un sentit o en l'altre.

71. Conjunt A de les circumferències de pla $\mathbb{R}^2$, relació binària R: $C_1 R C_2 \iff C_1$ i C_2 tenen el mateix centre.

(a) R relació d'equivalència en A (R, T, S).

- Reflexiva: Sí, tot element (circumferència) està relacionada amb ella mateixa (tenen el mateix centre).

  $C_1 R C_1$

- Simètrica: Sí, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$, $C_1 R C_2 \to C_2 R C_1$.

  → Si tenim $C_1 R C_2$ val dir que C_1 i C_2 tenen el mateix centre, per tant també es compleix $C_2 R C_1$.

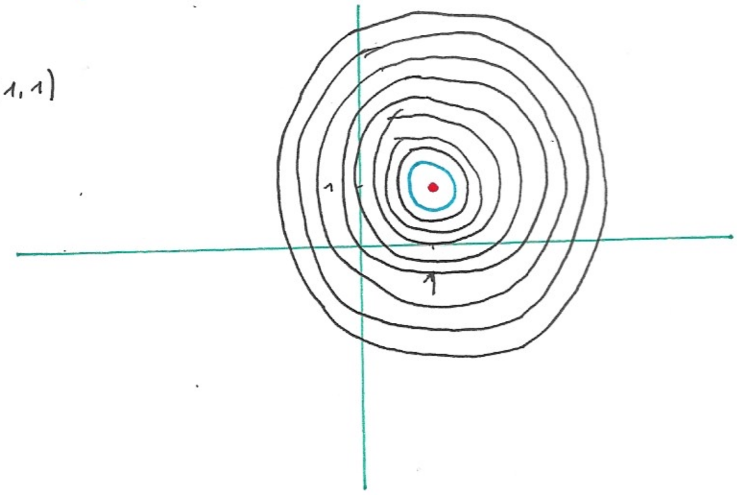
- Transitiva: Sí, $\forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^2$, $C_1 R C_2$ i $C_2 R C_3 \Rightarrow C_1 R C_3$.

  → Si $C_1 R C_2$: C_1 té el mateix centre que C_2.
  → Si $C_2 R C_3$: C_2 té el mateix centre que C_3.
  } C_1, C_2, C_3 tenen el mateix centre ⇒ R és transitiva.

⇒ És una relació d'equivalència.

(b) Dibuixa una circumferència a l'atzar, i dibuixa la seva classe d'equivalència.

Circumferència centrada en (1, 1)



$\overline{C_1}$ en negre.
C_1 en blau.
• centre.

(c) Element més senzill dins de cada classe d'equivalència.

L'element més 'senzill' dins de cada classe d'equivalència el voldríem escollir com a un element que ens permeti uns càlculs més 'senzills' i alhora que ens faci de referència; per això jo agafaria la circumferència de radi 1 centrada a cadascun dels punts del pla, és a dir, per a cada classe la circumferència que correspon a cada punt del pla.

(d) Dona una bona representació del conjunt quocient (circumferència de $\mathbb{R}^2/R$).

$$\text{Circumferència de } \frac{\mathbb{R}^2}{R} = \{ \overline{(x,y)} : x, y \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = 1 \}.$$

Hem fet ús de la equació de la circumferència centrada en (a,b) : $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$, on r és el radi que tal i com hem dit a l'apartat (c), agafem 1.

76 $\sim$ relació en $\mathbb{R}$ definida per: $a \sim b \iff a = b$ o $(|a|-2)\cdot(|b|-2) > 0$.

(a) $\sim$ és relació d'equivalència.

- Reflexiva: Si, tot element de $\mathbb{R}$ està relacionat amb si mateix. $\Rightarrow a = a$, $a \sim a$ ✓

- Simètrica: Si, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \sim b \to b \sim a$.

  1. Si $a \sim b \Rightarrow a = b$ ó $(|a|-2)\cdot(|b|-2) > 0$
  2. Si $b \sim a \Rightarrow b = a$ ó $(|b|-2)\cdot(|a|-2) > 0$

  } Veiem com $\sim$ és simètrica.

- Transitiva: Si, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \sim b$ i $b \sim c$, llavors $a \sim c$. ($a = c$ ó $(|a|-2)\cdot(|c|-2) > 0$)

  (*)

  Casos:
  - $a = b$ i $b = c \Rightarrow a = c \Rightarrow a \sim c$
  - $a = b$ i $(|b|-2)\cdot(|c|-2) > 0 \Rightarrow (|a|-2)\cdot(|c|-2) > 0 \Rightarrow a \sim c$
  - $(|a|-2)\cdot(|b|-2) > 0$ i $b = c \Rightarrow (|a|-2)(|c|-2) > 0 \Rightarrow a \sim c$
  - $(|a|-2)(|b|-2) > 0$ i $(|b|-2)(|c|-2) > 0 \Rightarrow (|a|-2)\cdot(|c|-2) > 0 \Rightarrow a \sim c$

  (*) . Si $a \sim b \Rightarrow a = b$ ó $(|a|-2)\cdot(|b|-2) > 0$

  . Si $b \sim c \Rightarrow b = c$ ó $(|b|-2)\cdot(|c|-2) > 0$

(b) Troba $\overline{-1}$, $\overline{2}$ i $\overline{-3}$.

- $\overline{-1} = \{b \in \mathbb{R} : b \sim -1\} = \{b \in \mathbb{R} : b = -1$ ó $(|b|-2)\cdot(|-1|-2) > 0\} =$

  $= \{b \in \mathbb{R} : b = -1$ ó $(|b|-2)\cdot(1-2) > 0\} =$

  $= \{b \in \mathbb{R} : b = -1$ ó $(|b|-2)\cdot(-1) > 0\} =$

  $= \{b \in \mathbb{R} : b = -1$ ó $b \in \mathbb{R}_{<2}\}$.

- $\overline{2} = \{b \in \mathbb{R} : b \sim 2\} = \{b \in \mathbb{R} : b = 2$ ó $(|b|-2)\cdot\underbrace{(|2|-2)}_{0} > 0\} = \{b \in \mathbb{R} : b = 2\}$

- $\overline{-3} = \{b \in \mathbb{R} : b \sim -3\} = \{b \in \mathbb{R} : b = -3$ ó $(|b|-2)\cdot(|-3|-2) > 0\} =$

  $= \{b \in \mathbb{R} : b = -3$ ó $(|b|-2)\cdot\underbrace{(3-2)}_{1} > 0\} =$

  $= \{b \in \mathbb{R} : b = -3$ ó $(|b|-2) > 0\} =$

  $= \{b \in \mathbb{R} : b = -3$ ó $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}\}$

(c) Dóna la partició associada a $\sim$.

$\mathbb{R}/\sim \; = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{-3}, \overline{-2}\}$

$\overline{1} = \{b \in \mathbb{R} : b \in (-2,2)\}$

$\overline{2} = \{b \in \mathbb{R} : b = 2\}$

$\overline{-2} = \{b \in \mathbb{R} : b = -2\}$

$\overline{-3} = \{b \in \mathbb{R} : b \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}\}$.

Hem de veure que $\mathbb{R}/\sim \; = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/\sim \; \subseteq \mathbb{R}$: $\quad x$ (element arbitrari) $\in \mathbb{R}/\sim$:

$\Rightarrow x \in \overline{1} \vee x \in \overline{2} \vee x \in \overline{-2} \vee x \in \overline{-3} \iff x \in (-2,2) \vee x = 2 \vee x = -2 \vee$

$x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty) \iff x \in ((-\infty,2) \cup (2,\infty) \cup (-2,2) \cup \{-2\} \cup \{2\}) \iff x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}/\sim$: $\quad x$ (element arbitrari) $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Es pot escriure $\mathbb{R}$ com la unió d'intervals, quan aquests incloguin tots els $\mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R} \iff x \in ((-\infty,-2) \cup (2,\infty)) \vee x \in (-2,2) \vee x = -2 \vee x = 2 \iff$

$\iff x \in \overline{3} \vee x \in \overline{-2} \vee x \in \overline{2} \vee x \in \overline{1} \iff x \in \mathbb{R}/\sim$

$\blacksquare$