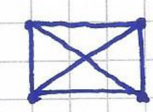
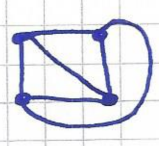
3.5. GRAFS PLANARS I COLORACIONS.

Recordeu que vàrem dir que un graf G és planar si admet un dibuix tal que les arestes només es creuen en els vèrtex.

EX:



→ és planar perquè el podem dibuixar



Obviament saber si un graf és planar o no, no pot dependre únicament de si sabem fer el dibuix o no.

En molts context és important saber si un graf és planar o no.

EXEMPLES:

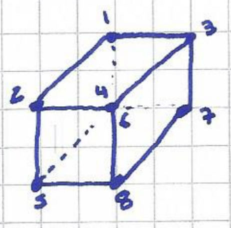
(a) Connexions en les cases: cal saber si puc fer la instal·lació de llum, gas i aigua adequadament.

(b) Minimitzar encreuaments no necessaris en transport subterrani.

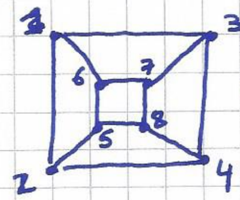
(c) Disseny de components de circuits.

EXEMPLE:

El Graf associat als vèrtex i arestes d'un cub:



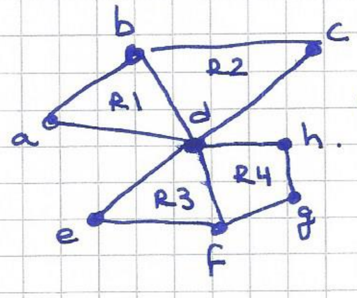
és planar



Q_3

DEFINICIÓ: Un Graf planar divideix l'espai (el pla) en el que anomenem REGIONS. Totes les regions són delimitades per arestes menys una que és la exterior.

EX:



R5 → Aquest Graf té 5 regions.

Aprofitem aquest exemple per observar que el nº de vèrtex és 8, el nombre d'arestes és 11 i que

$$5 = 11 - 8 + 2$$

Això no és una curiositat sinó que és un fet comú en tots els grafs planars.

TEOREMA (FÒRMULA D'EULER).

Sigui G un graf planar simple connex. Denotem per $|V|$ el nombre de vèrtex, per $|E|$ el nombre d'arestes i per R el nombre de regions. Aleshores,

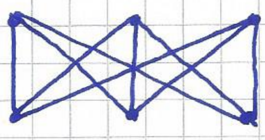
$$R = |E| - |V| + 2.$$

EXEMPLE: El graf Q_3 de l'exemple anterior té 6 regions, 8 vèrtex i 12 arestes:

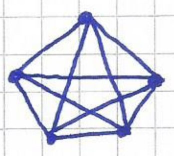
$$6 = 12 - 8 + 2$$

L.

Imaginem que considerem els següents grafs,



$K_{3,3}$



K_5

Són planars?

Avui en dia, no es té cap resultat que ens permeti dir exactament quan un graf és planar o no. Tenim certes caracteritzacions.

TEOREMA:

Sigui G un graf planar connex amb $|V| \geq 3$. Aleshores,

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$ ($|V|$ = nº de vèrtex i $|E|$ = nº d'arestes)

DEMO:

Donada una regió R, denotem per deg(R) el nombre d'arestes que són adjacents a la regió.

És clar que per tota regió R, $deg(R) \geq 3$

D'altra banda tota aresta està en 2 regions. Per tant si $R_1 \dots R_r$ són les regions de G,

$$2 \cdot |E| = \sum_{i=1}^{r} deg(R_i) \geq 3 \cdot r$$

La Fòrmula de Euler ens diu que $r = |E| - |V| + 2$, per tant

$$3(|E| - |V| + 2) \leq 2 \cdot |E| \Rightarrow \boxed{|E| \leq 3 \cdot |V| - 6}$$ ■

ALERTA:

Si un graf no verifica $|E| \leq 3|V|-6$, podem dir que NO és planar.

Però si un graf verifica $|E| \leq 3|V|-6$ NO vol dir que sigui planar.

EX: K_5 té $|V|=5$, $|E|=10 \Rightarrow$ NO és planar.

$K_{3,3}$ té $|V|=6$, $|E|=9$ per tant satisfà la desigualtat però no podem dir que sigui planar.

COROLARI:

Un Graf simple connex planar amb $|V| \geq 3$ té un vèrtex de grau 5 o menys.

Demo: Suposem que tots els vèrtex tenen grau més gran o igual a 6.

Això vol dir que $2 \cdot |E| \geq 6 \cdot |V|$.

Però com el graf és planar, tindríem

$6|V| \leq 2|E| \leq 6 \cdot |V| - 12$!! i és una contradicció !!

TEOREMA:

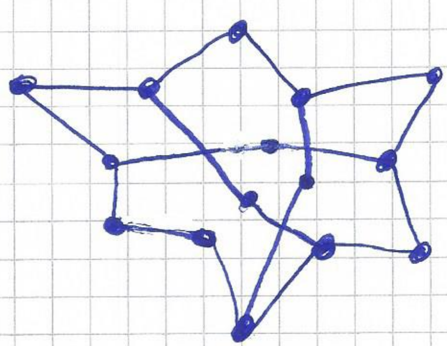
Si G és un graf simple, connex, planar amb $|V| \geq 3$ i sense circuits de longitud 3,

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

L.

Aquest Teorema ja ens permet veure que $K_{3,3}$ No és planar.

Això però no descarta o no ens permet dir si aquest és planar o no:



L,,

El darrer aspecte que volem tractar dels grafs aquest curs és el que anomenem COLORACIONS.

- El problema de coloració de grafs va aparèixer en el segle XIX:

• Suposem que tenim un mapa i volem pintar els països amb colors de tal forma que si dos països comparteixen una frontera aleshores tenen colors diferents.

• Quants colors necessitem? Ho podem fer només amb 4 colors?

- Em 1879, Kempe va demostrar que amb 4 colors n'hi havia prou, però en 1890, Heawood va trobar un error en la demostració.

- Durant molts anys aquest problema s'ha conegut sota el nom de la CONJECTURA DELS 4-COLORS i és un dels problemes en matemàtica discreta més importants del segle XX.

• Finalment, Appel, Haken y Koch en 1977 utilitzant unes 1200 hores de computació van demostrar que és possible pintar qualsevol mapa només amb 4 colors.

• La idea és reduir la demostració a haver de comprovar només "unes quantes configuracions".

• Appel, Haken y Koch ho van reduir a 1936 configuracions i són les que van comprovar al ordinador.

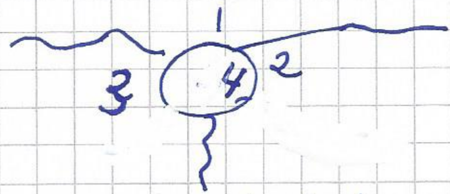
• És el primer cop en la història que un problema es considera resolt, llevat que la resolució depengui d'hores de computació.

• És la primera demostració que s'accepta NON-COMPUTER FREE.

• El 1996 es va simplificar la demostració i ja "només" depen de la comprovació de 633 configuracions.

- Es evident que amb 3 colors és impossible.

EX: - Poso un nº diferent per cada color diferent



⤳ és impossible colorejar només amb 3 colors.

- Que 5 colors eren suficients s'havia demostrat feia temps.

Anem a veure com plantegem el problema en termes de grafs.

- Cada país serà un vèrtex i la frontera una aresta.

DEFINICIÓ:
Sigui $G=(V,E)$ un graf. Una COLORACIÓ de G és una funció

$$c: V \longrightarrow \mathbb{N}$$

tal que si $xy \in E$ (xy és una aresta de G) aleshores $c(x) \neq c(y)$.

En altres paraules, si x i y són vèrtex adjacents $\Rightarrow c(x) \neq c(y)$.

Es defineix el NOMBRE CROMÀTIC $\chi(G)$ de G com el menor enter $m \in \mathbb{N}$ tal que existeix una coloració

$$c: V \longrightarrow \mathbb{N}$$

tal que $\forall x \in V$, $c(x) \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

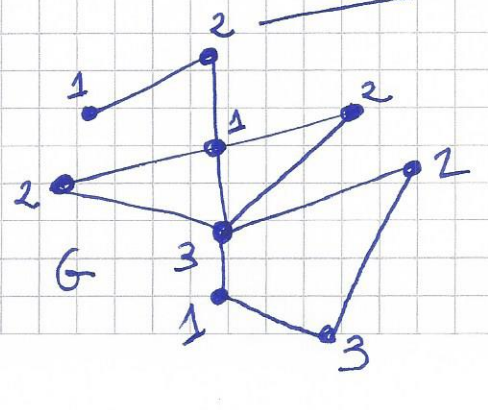
CONJECTURA/PROBLEMA dels 4 COLORS.

Si G és un Graf Pla connex $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$.

L.

La coloració de grafs és molt útil per exemple alhora de planificar activitats, distribuir franges horàries, etc...

EXEMPLE:



Els valors són els colors que assigno a cada vèrtex. Hi ha altres coloracions però necessito almenys 3 colors.

$\chi(G) \leq 3$.

i $\nexists$ una coloració amb 2 colors

$\Rightarrow \chi(G) = 3$.

EXEMPLE

Hem de programar 6 conferències d'una hora de durada cadascuna:

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6$.

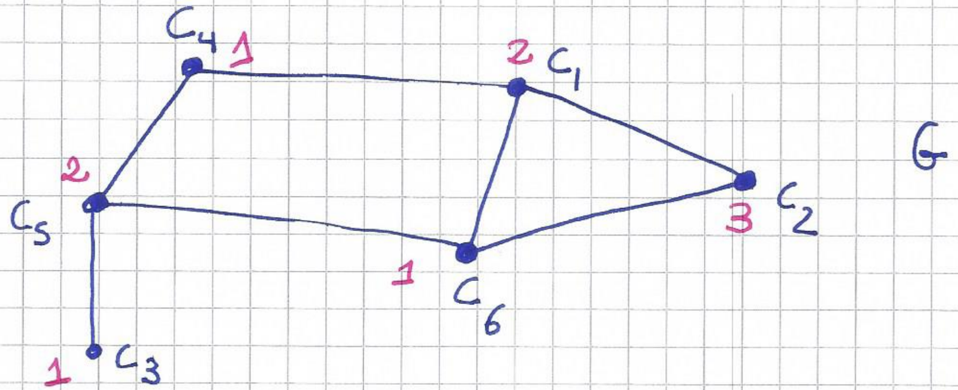
- Hi ha persones que volen anar a la C_1 i a la C_2. Persones que volen anar a la C_1 i C_4, altes volen anar a la C_3 i C_5, a la C_2 i C_6, a la C_4 i C_5, a la C_5 i C_6 i a la C_1 i C_6.

Quantes hores són necessàries per tal de programar totes les conferències i que tothom pugui anar a la que vol?

L

Obviament en 6 hores es pot fer. Anem a veure si en menys també.

- Considerem el graf que té per vèrtex les conferències.
- C_i i C_j són adjacents si hi ha més d'una persona que va a les 2 conferències



Ara coloregem el graf $\Rightarrow$ $\chi(G)=3$ $\Rightarrow$ Ho podem programar en 3 hores.

NOTA: En general, determinar el nombre cromàtic d'un graf és un problema complex, molt difícil.

L.