Tema 4 **Estructures No Lineals: Arbres**

Sessió Teo 10

Maria Salamó Llorente

Estructura de Dades

Grau en Enginyeria Informàtica

Facultat de Matemàtiques i Informàtica,

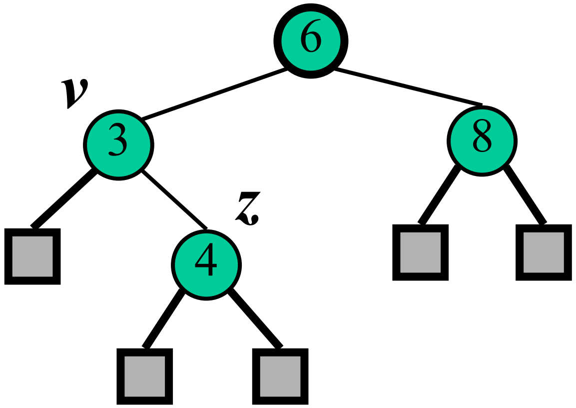
Universitat de Barcelona

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Contingut

UNIVERSITAT DE BARCELONA

4.5 Arbres AVL (Adelson - Velskii i Landis)



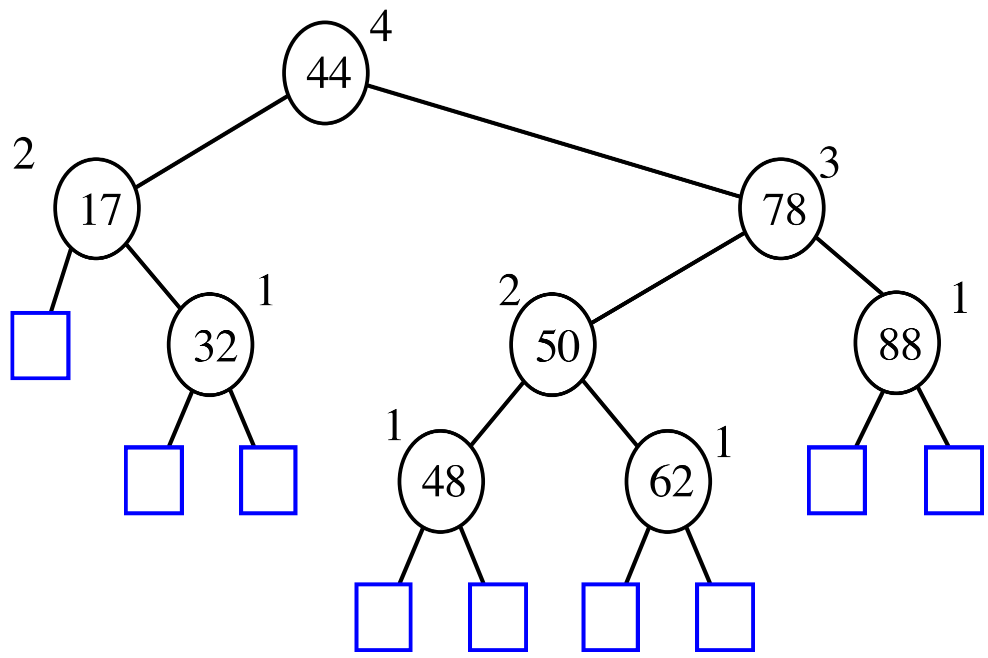
UNIVERSITAT DE BARCELONA

Arbres AVL

- L’eficiència temporal de les operacions d’accés individual als elements d’un arbre depenen exclusivament de la seva alçada
- Un arbre AVL assegura un cost logarítmic ja que redueix el nombre de nivells d’un arbre al mínim possible
- **Els arbres AVL són arbres equilibrats (perfectament balancejats)**

Arbres AVL

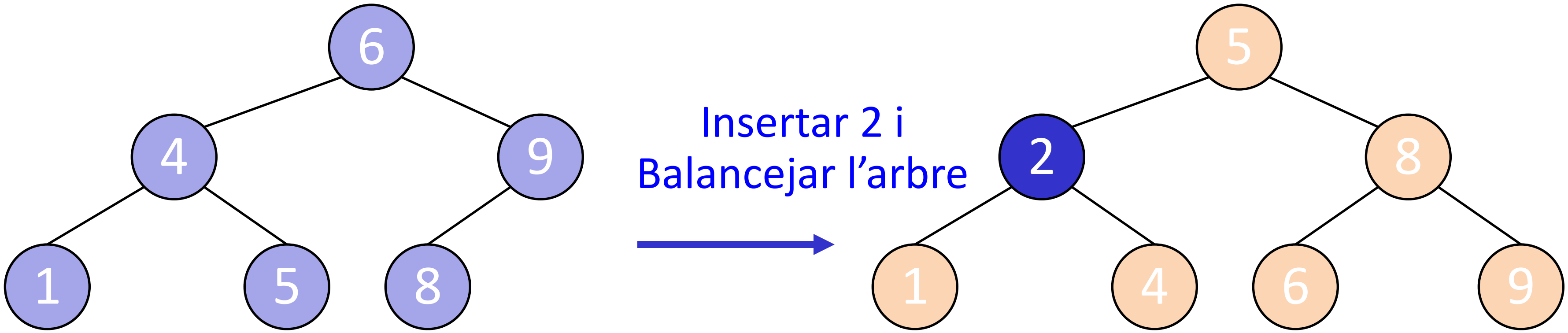
- **Un arbre AVL** és un **arbre de cerca binària** tal que cada node intern v de T, compleix que, les alçades dels fills de v poden diferir com a molt en 1 unitat



Exemple d'un arbre AVL on les alçades estan a cada node

Arbres perfectament balancejats

- Es vol un arbre complet després de cada inserció
- Aquesta operació té una alta complexitat
  - Per exemple, insertar 2 en l'arbre esquerra i després reconstruir-lo a un arbre complet



Arbre balancejat o AVL

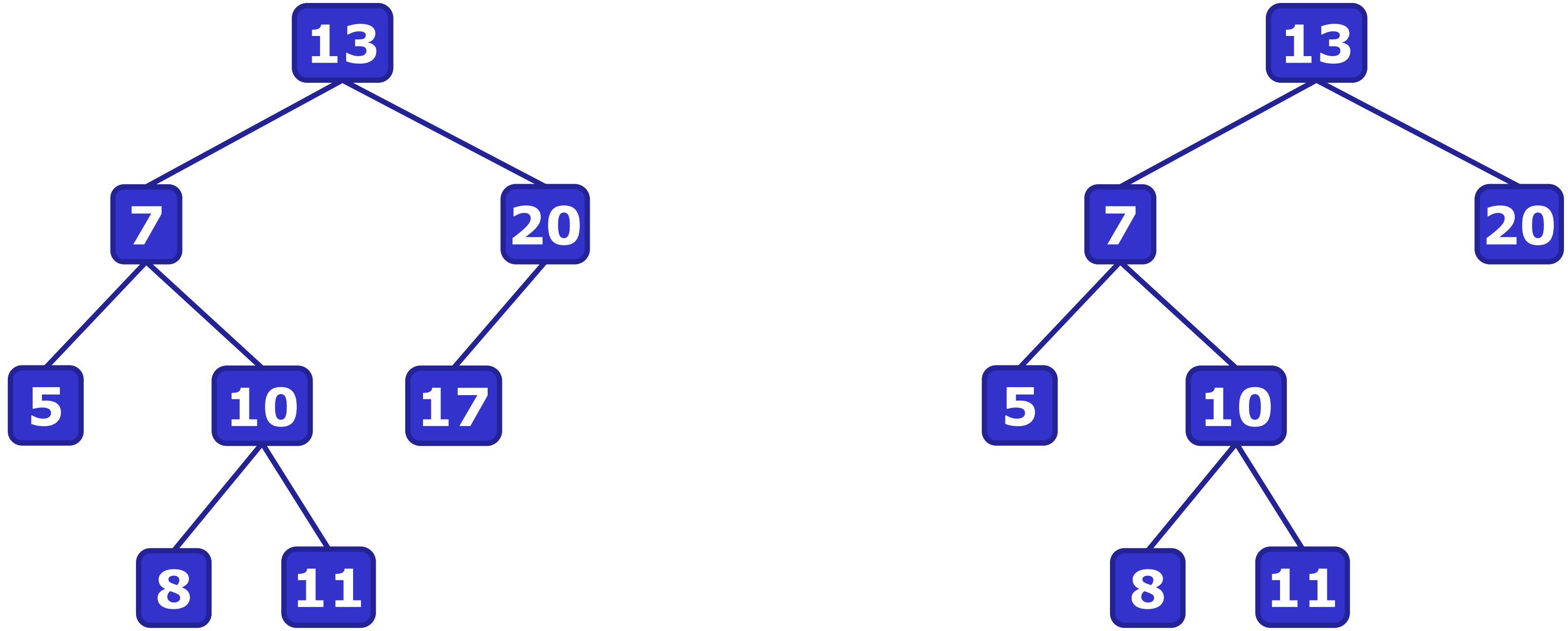
- Els arbres AVL també s'anomen ABB d'alçada balancejada

Factor de Balanç (BF) d'un node:

```
Alçada(subarbre esquerra) - Alçada(subarbre dret)
```

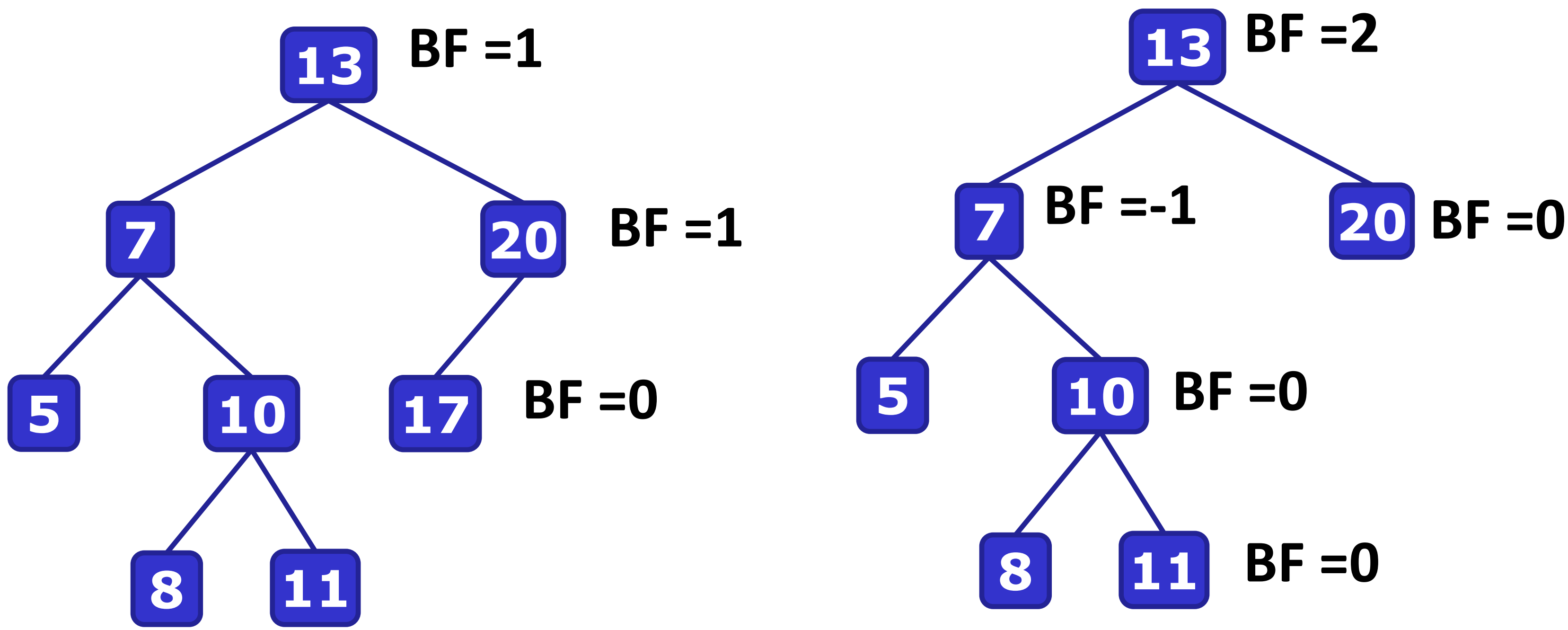
- Un arbre AVL té el factor de balanç calculat en cada node
  - L'alçada del subarbre dret i esquerra només pot diferir en 1
  - **Es guarda l'alçada en cada node**

Són arbres AVL?



Calculeu el factor de balanç dels dos arbres

Són arbres AVL?

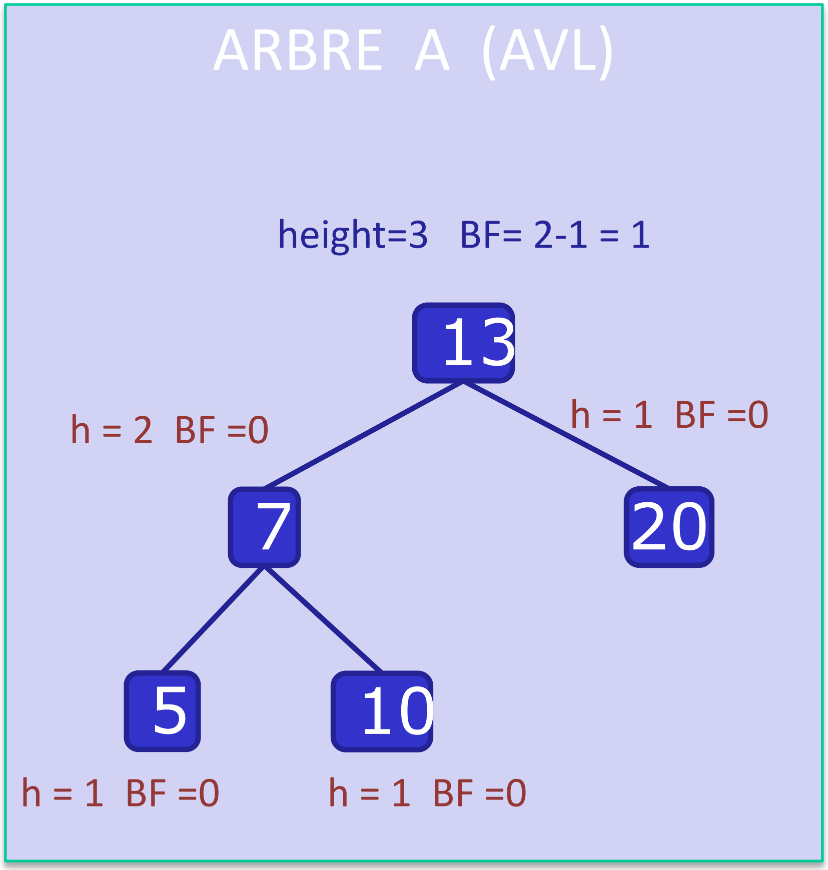


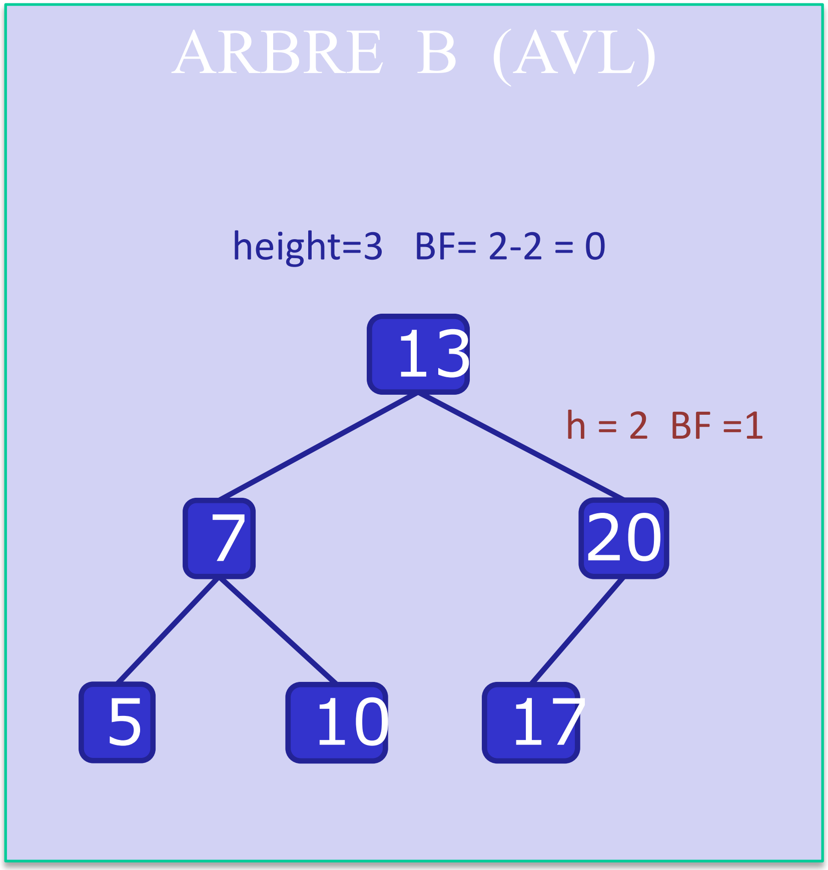
Arbre AVL

No és un arbre AVL

Alçada (Height) d'un node

height d'un node = h
balance factor BF = h_{left}-h_{right}
empty height = 0

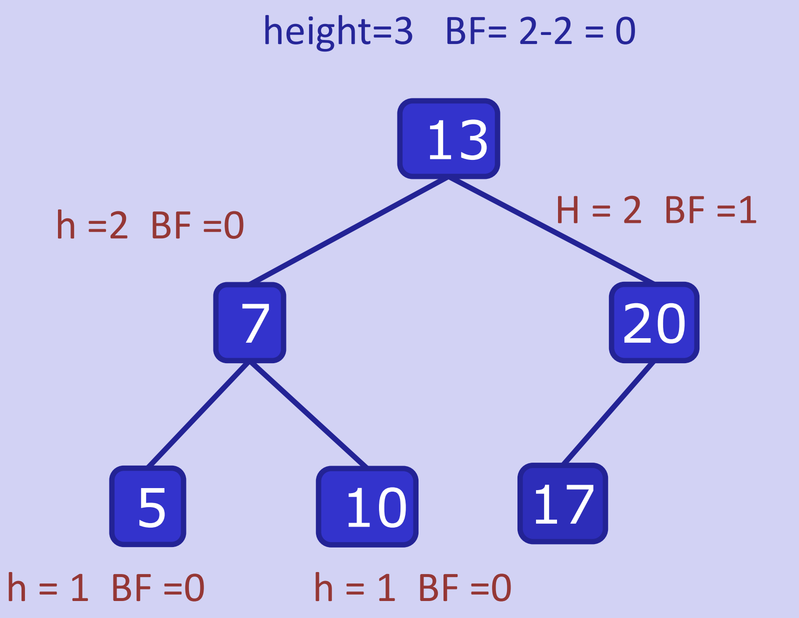




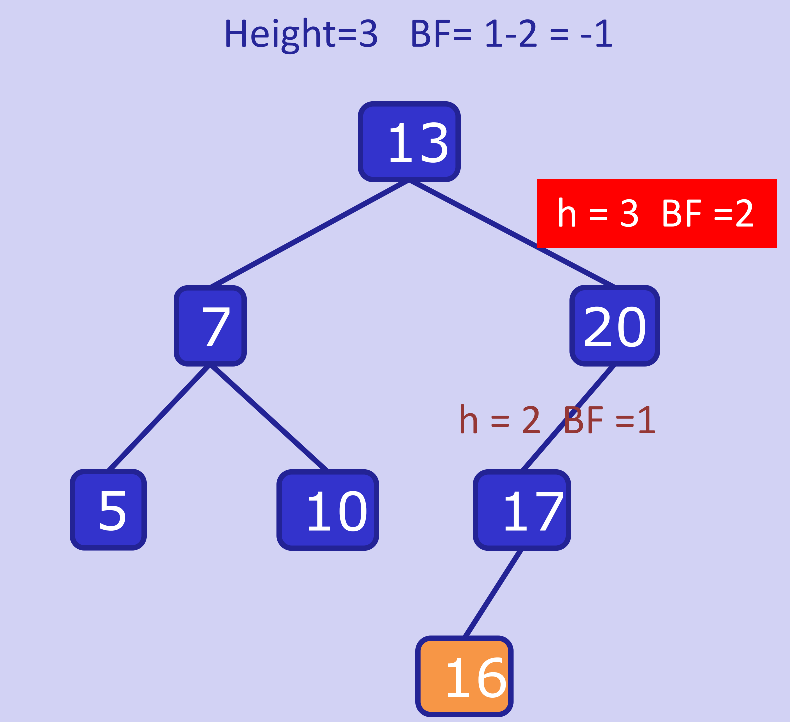
Alçada (Height) d'un node

height d'un node = h
balance factor BF = $h_{left} - h_{right}$
empty height = 0

ARBRE A (AVL)



ARBRE B (AVL)



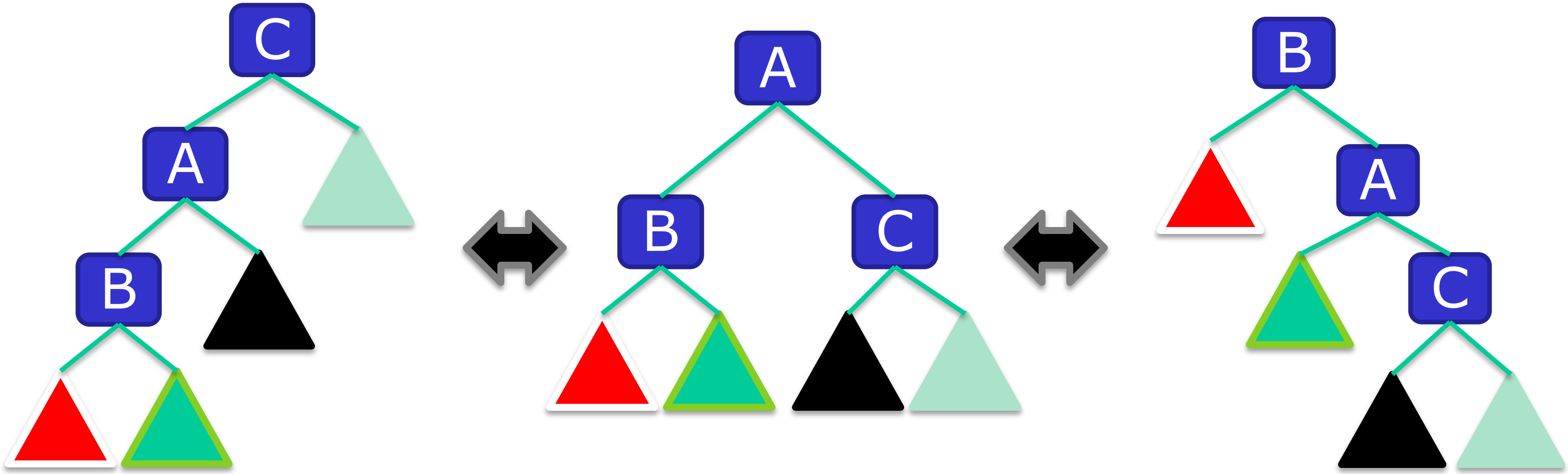
UNIVERSITAT DE BARCELONA

Insertar i rotar arbres AVL

- La inserció d'un element pot causar que el factor de balanç es converteixi en 2 o -2 per algun node
  - Només els nodes des del punt d'inserció fins l'element arrel tenen la possibilitat de canviar la seva alçada
  - Per tant, la inserció **va cap a dalt** fins a l'arrel passant per cada node actualitant la seva alçada
  - Si el nou factor de balanç és 2 o -2, s'ha d'ajustar l'arbre mitjançant **rotacions** del node

Balancejat d'un AVL

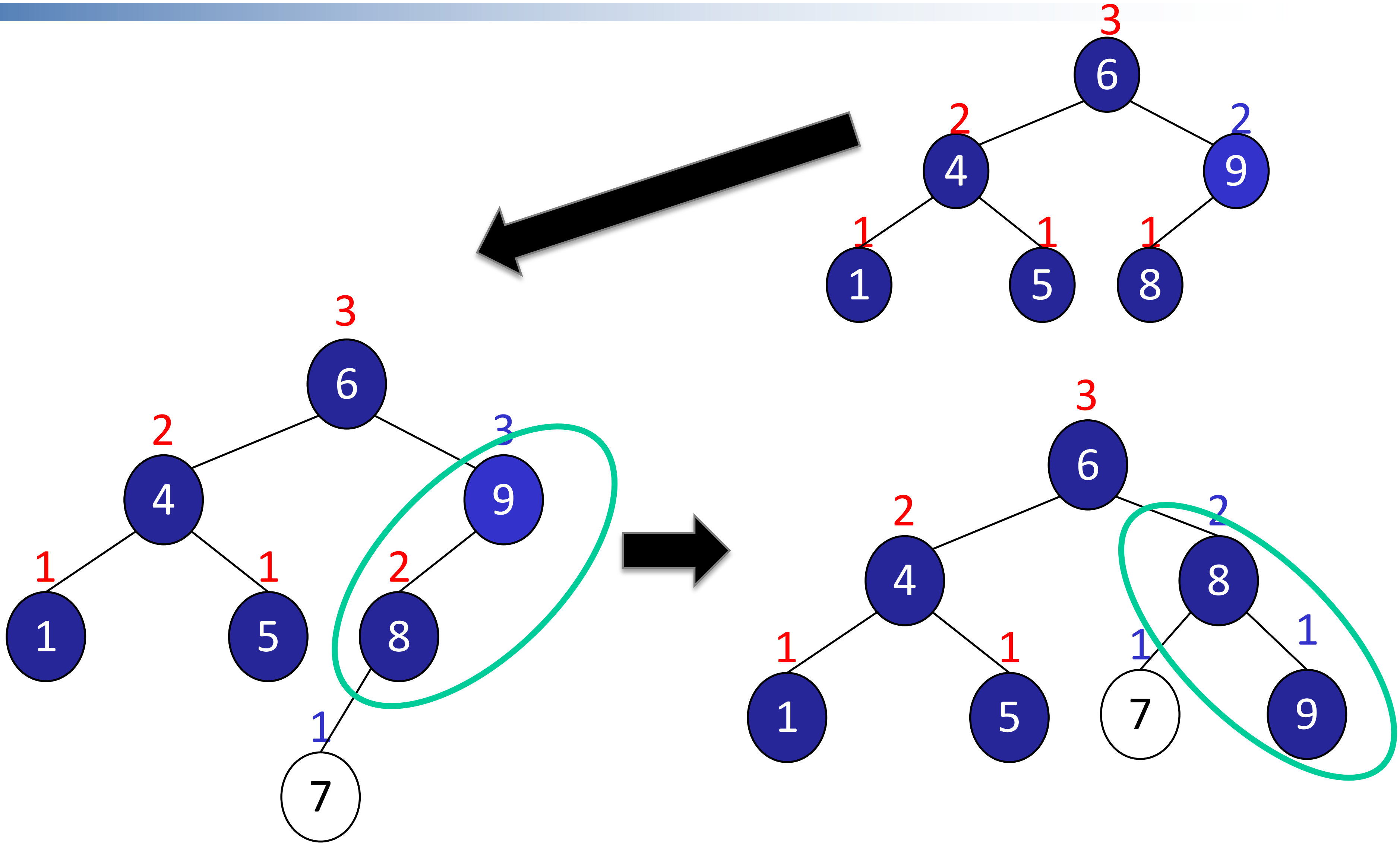
- Si l'arbre binari es converteix en un arbre no balancejat, podem revertir això mitjançant una sèrie de rotacions



Podem veure que amb un recorregut inordre obtenim el mateix resultat

El que significa que **l'ordre dels AVL es manté amb les rotacions**

Rotacions en un arbre AVL



Inserció en arbres AVL

Donat un node α que necessita re-balanceig:
- Hi ha 4 casos:

Casos externs (requereix una **rotació simple**) :

CAS 1. Inserció en **l'arbre esquerra del fill esquerra** de α.

CAS 2. Inserció en **l'arbre dret del fill dret** de α.

Casos Interns (requereix una **rotació doble**) :

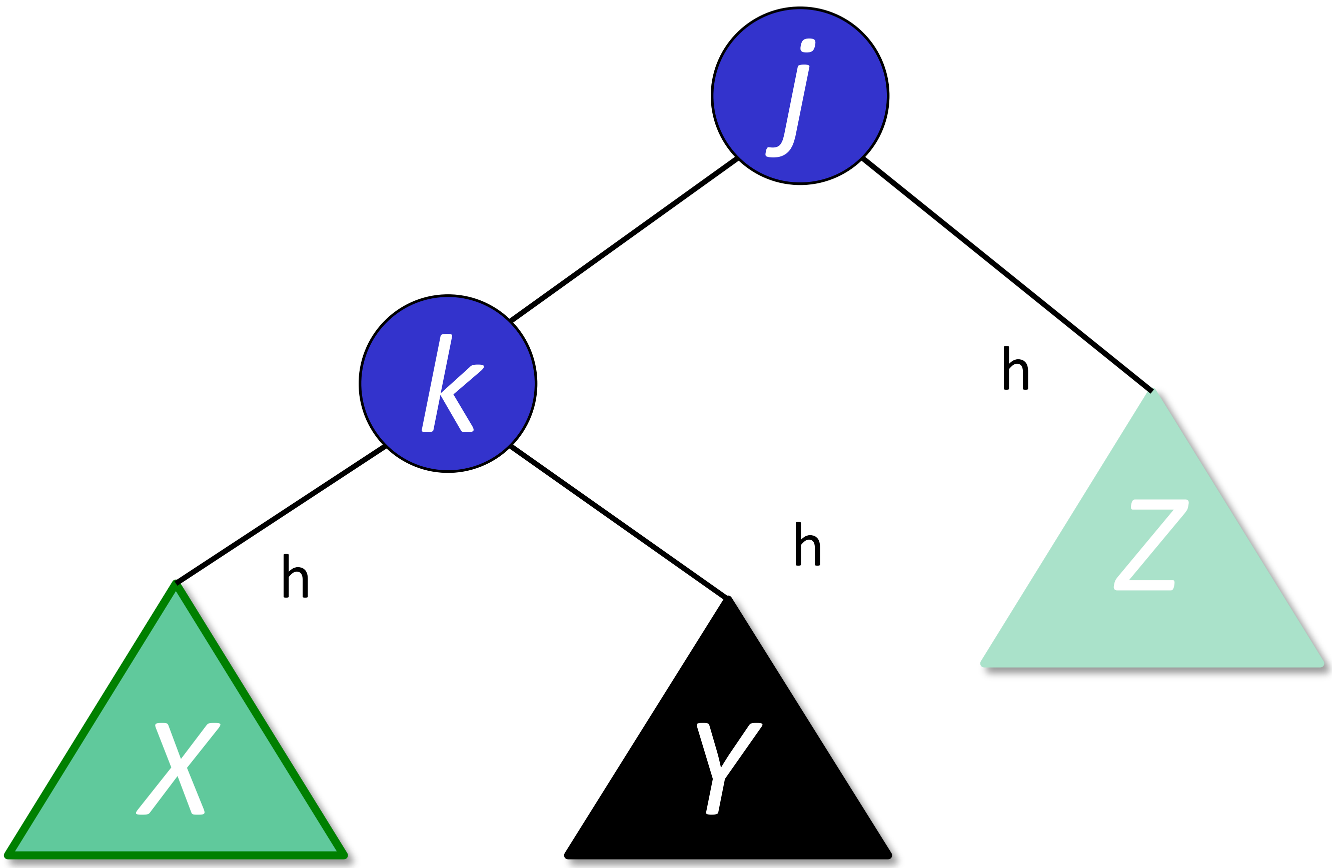
CAS 3. Inserció en **l'arbre dret del fill esquerra** de α.

CAS 4. Inserció en **l'arbre esquerra del fill dret** de α.

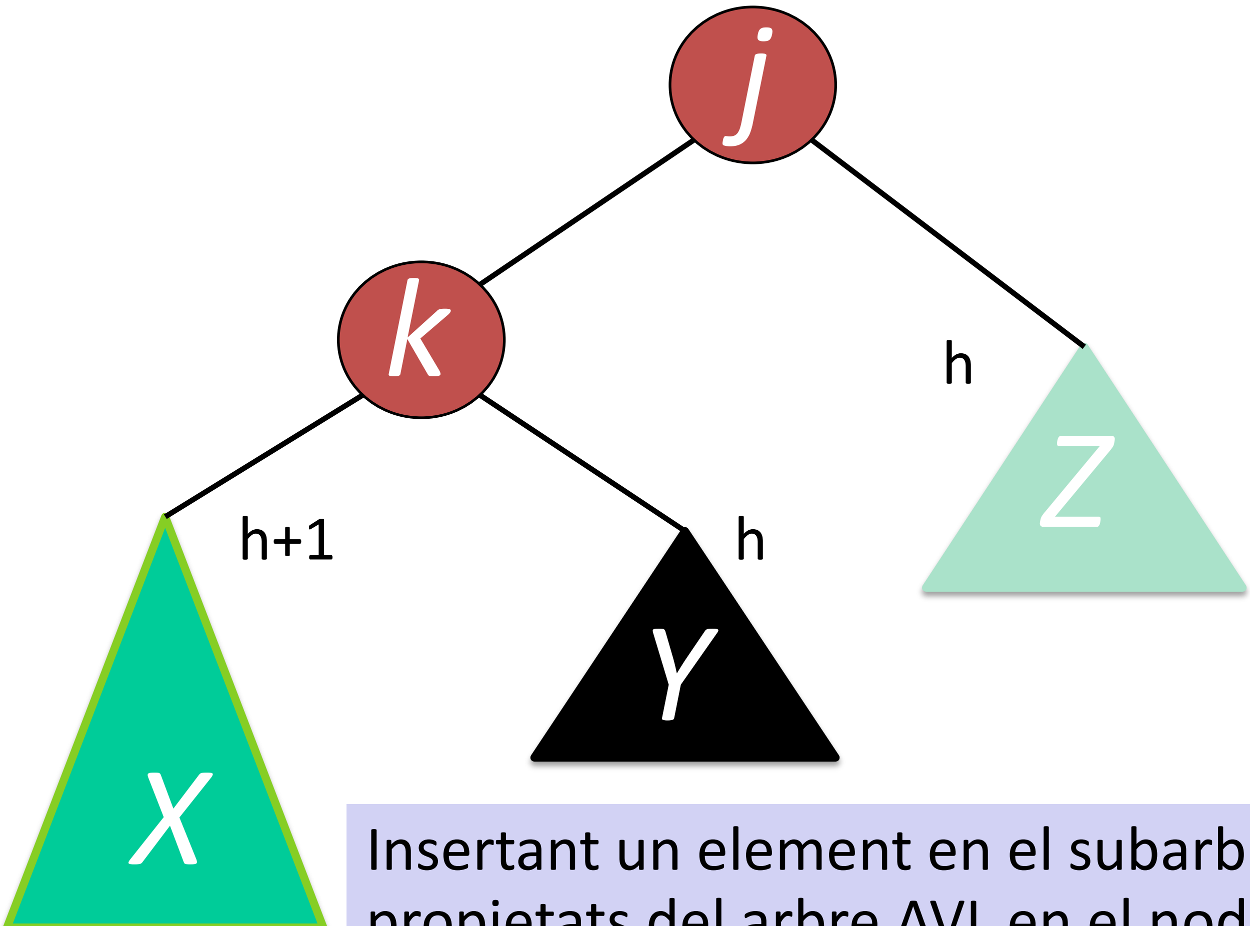
El re-balanceig es fa mitjançant 4 algorismes de rotació diferents

Inserció en un AVL : **Cas extern**

Considerem un arbre AVL

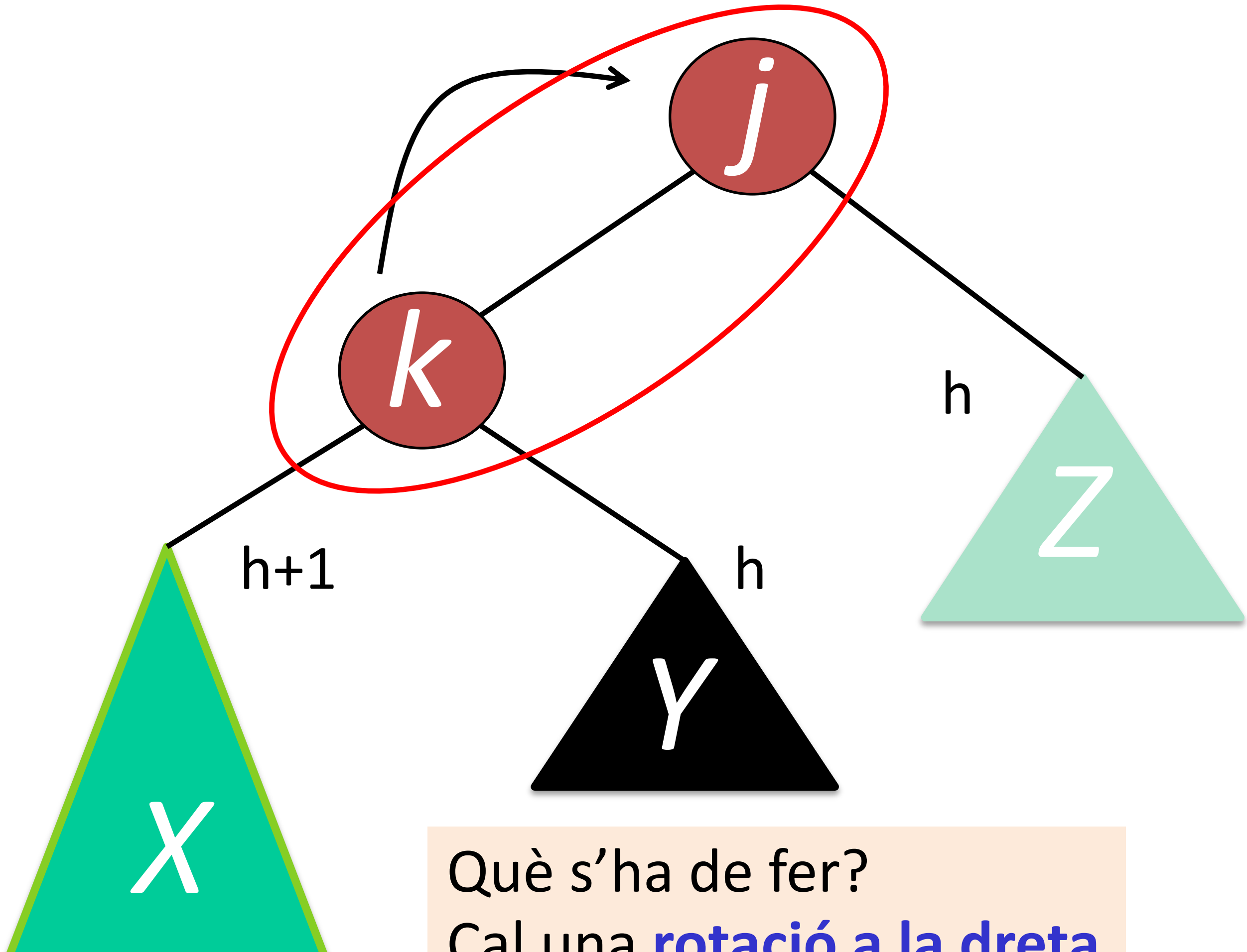


Inserció en un AVL : Cas extern



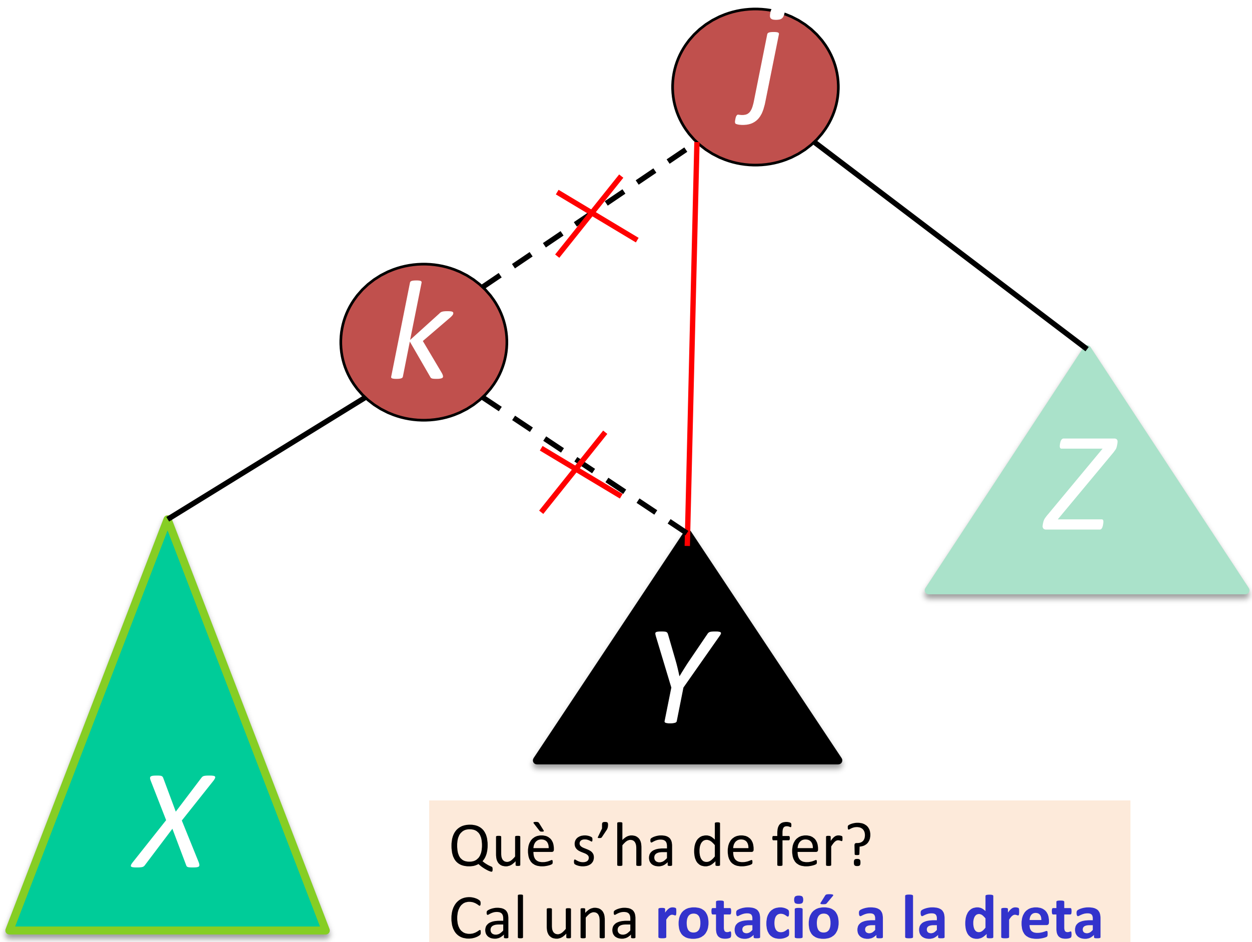
Insertant un element en el subarbre **X** destruim les propietats del arbre AVL en el node **j**

Inserció en un AVL : **Cas extern**



Què s'ha de fer?
Cal una **rotació a la dreta**

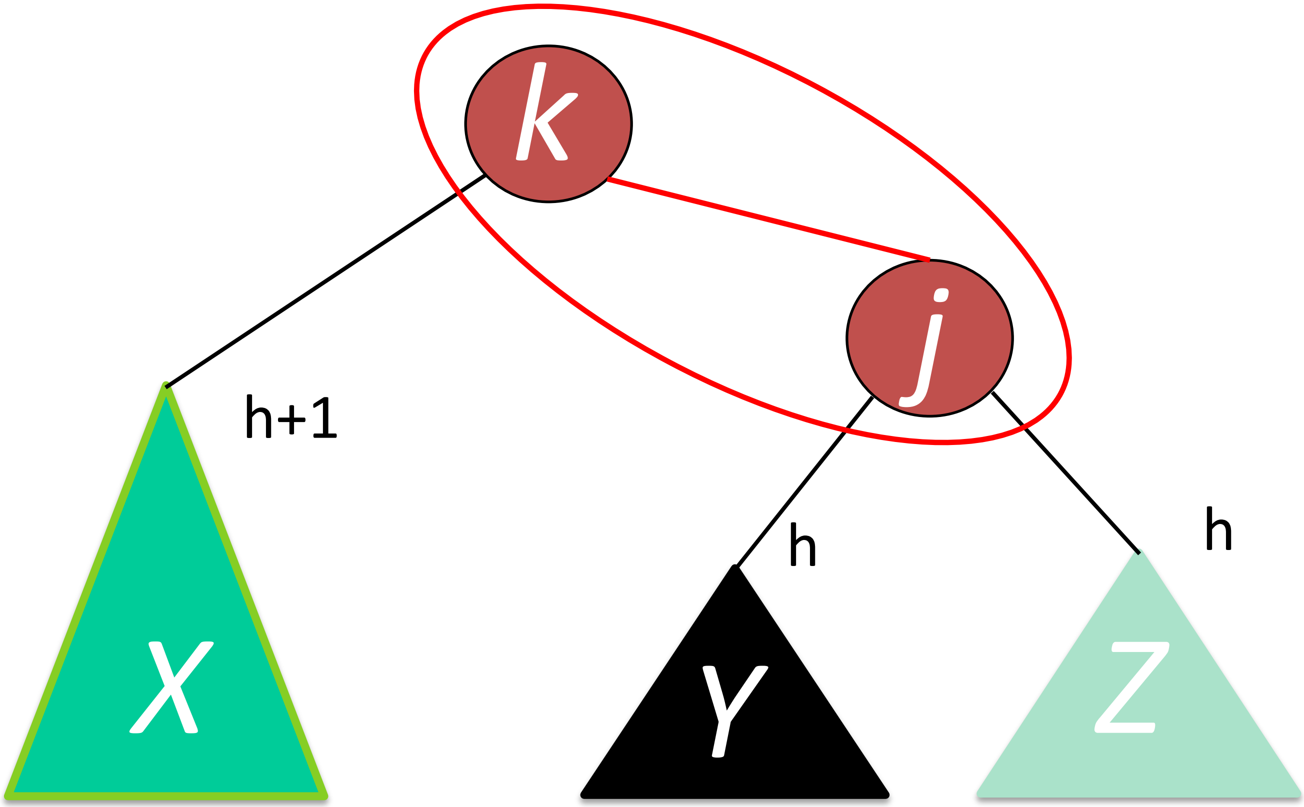
Rotació dreta simple



Què s'ha de fer?
Cal una **rotació a la dreta**

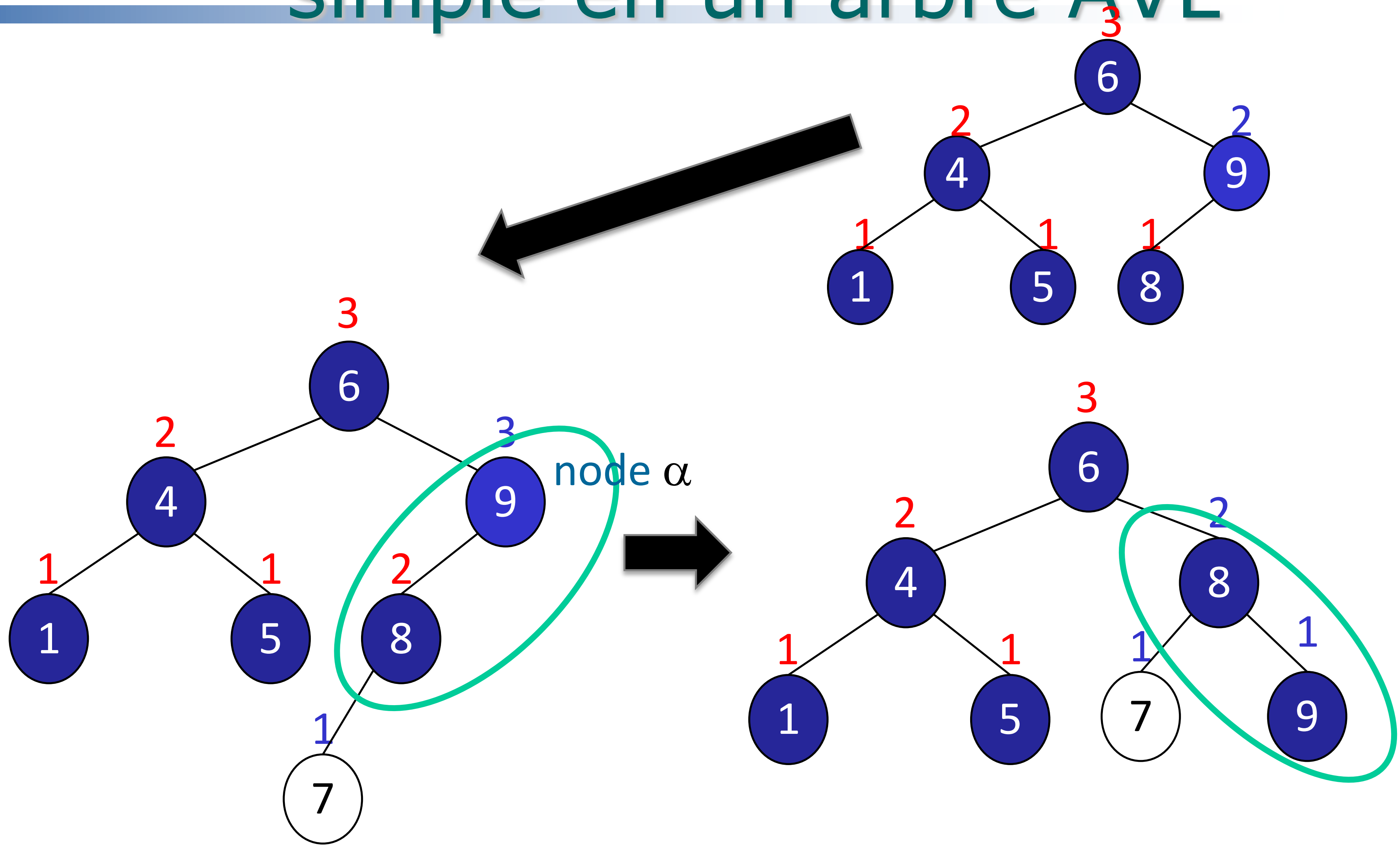
UNIVERSITAT DE BARCELONA

Cas extern completat!!

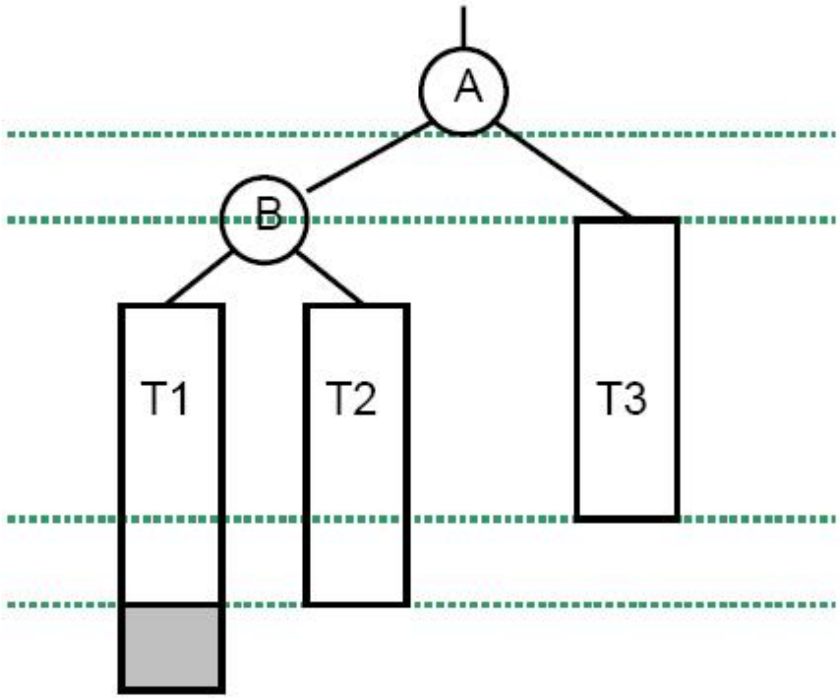


“Rotació dreta” realitzada!
(“Rotació esquerra” és un cas simètric)
Les propietats de l’arbre AVL s’han restaurat

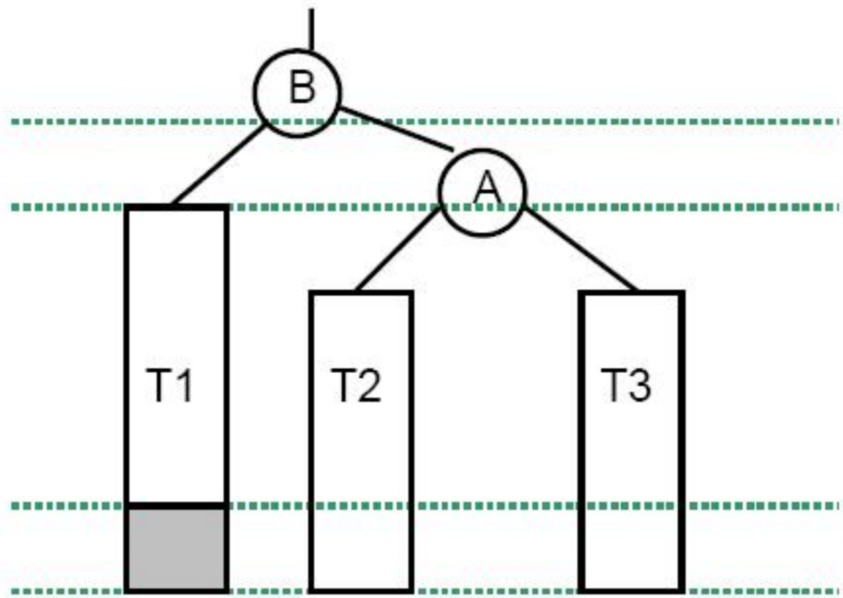
Exemple rotació a la dreta simple en un arbre AVL



CAS 1: Rotació simple a la dreta en un arbre AVL

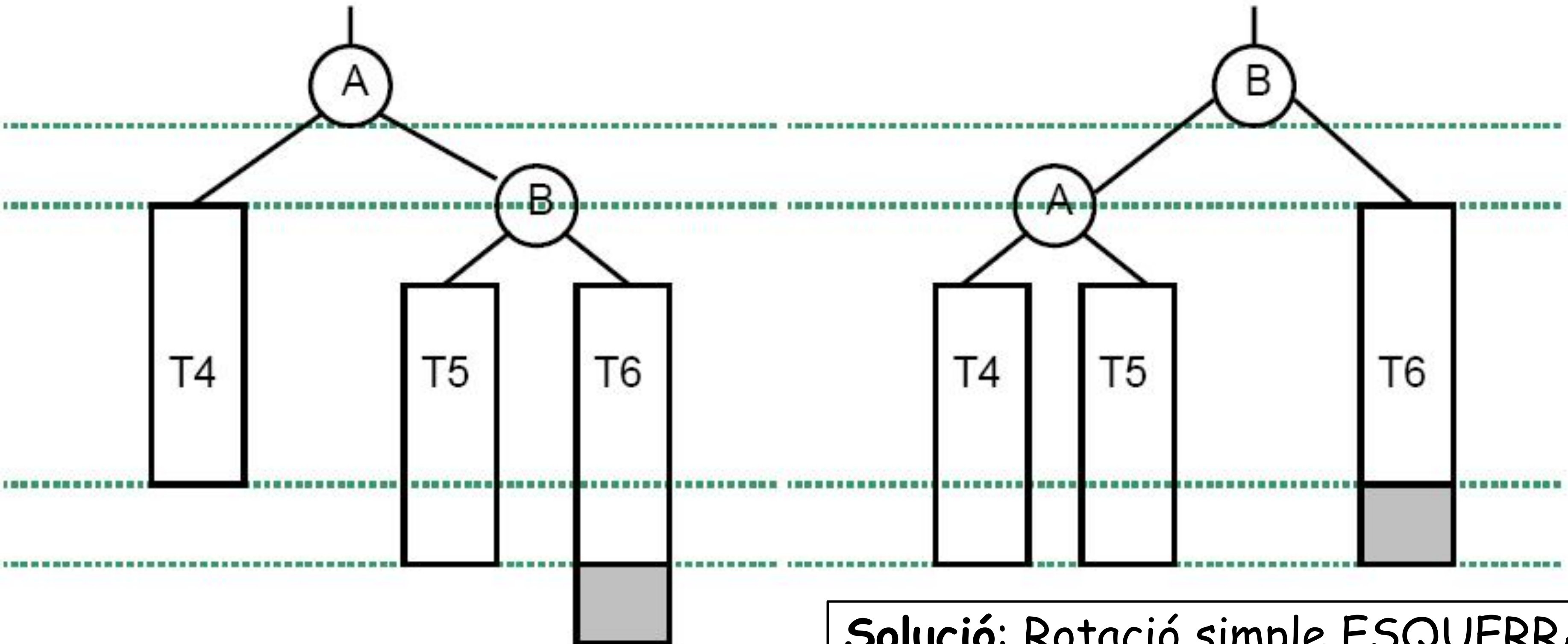


CAS 1: Esquerra- Esquerra



Solució: Rotació simple DRETA

Cas 2: Rotació simple a l'esquerra en un arbre AVL

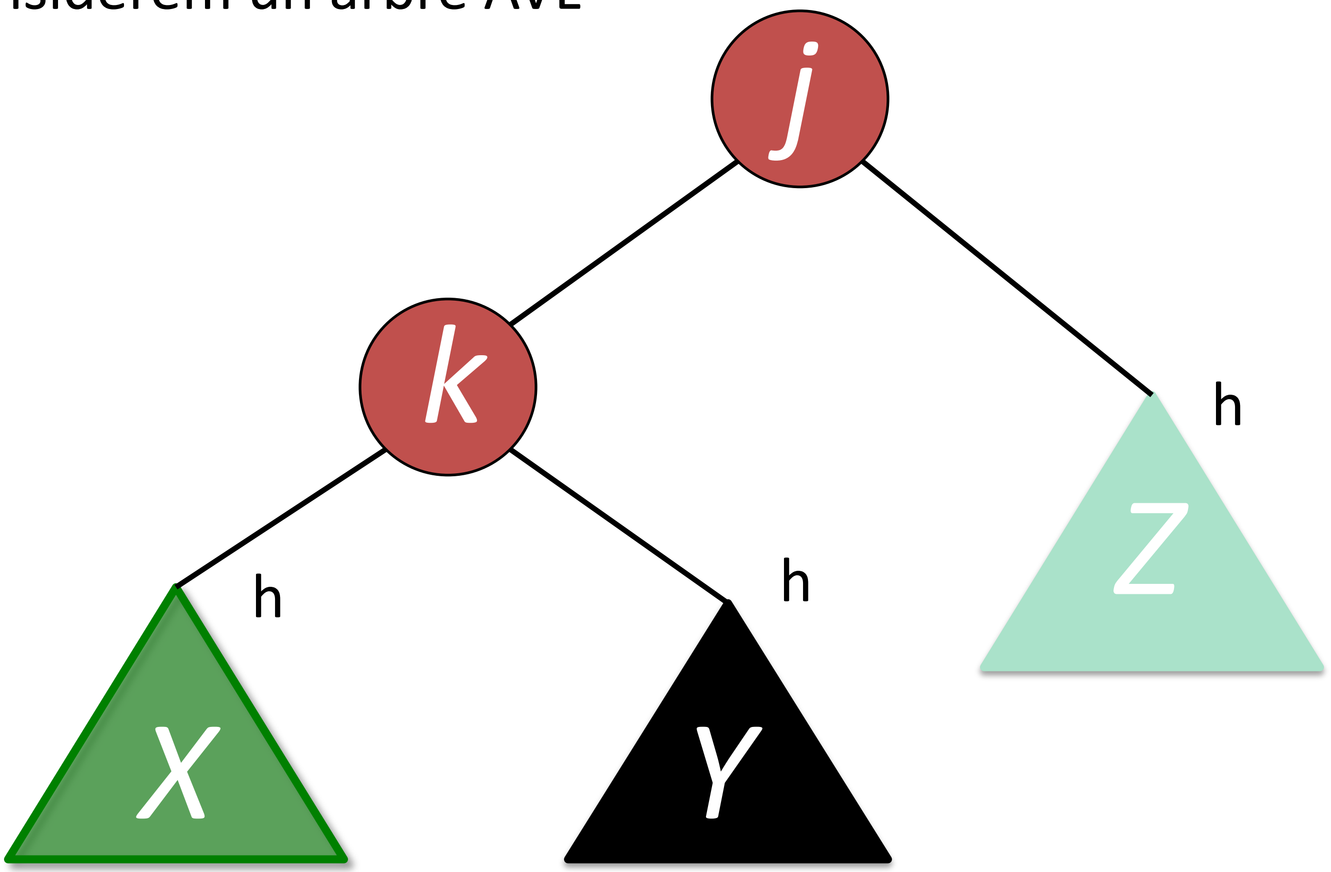


CAS 2: Dreta - Dreta

Solució: Rotació simple ESQUERRA

Inserció en un AVL : Cas intern

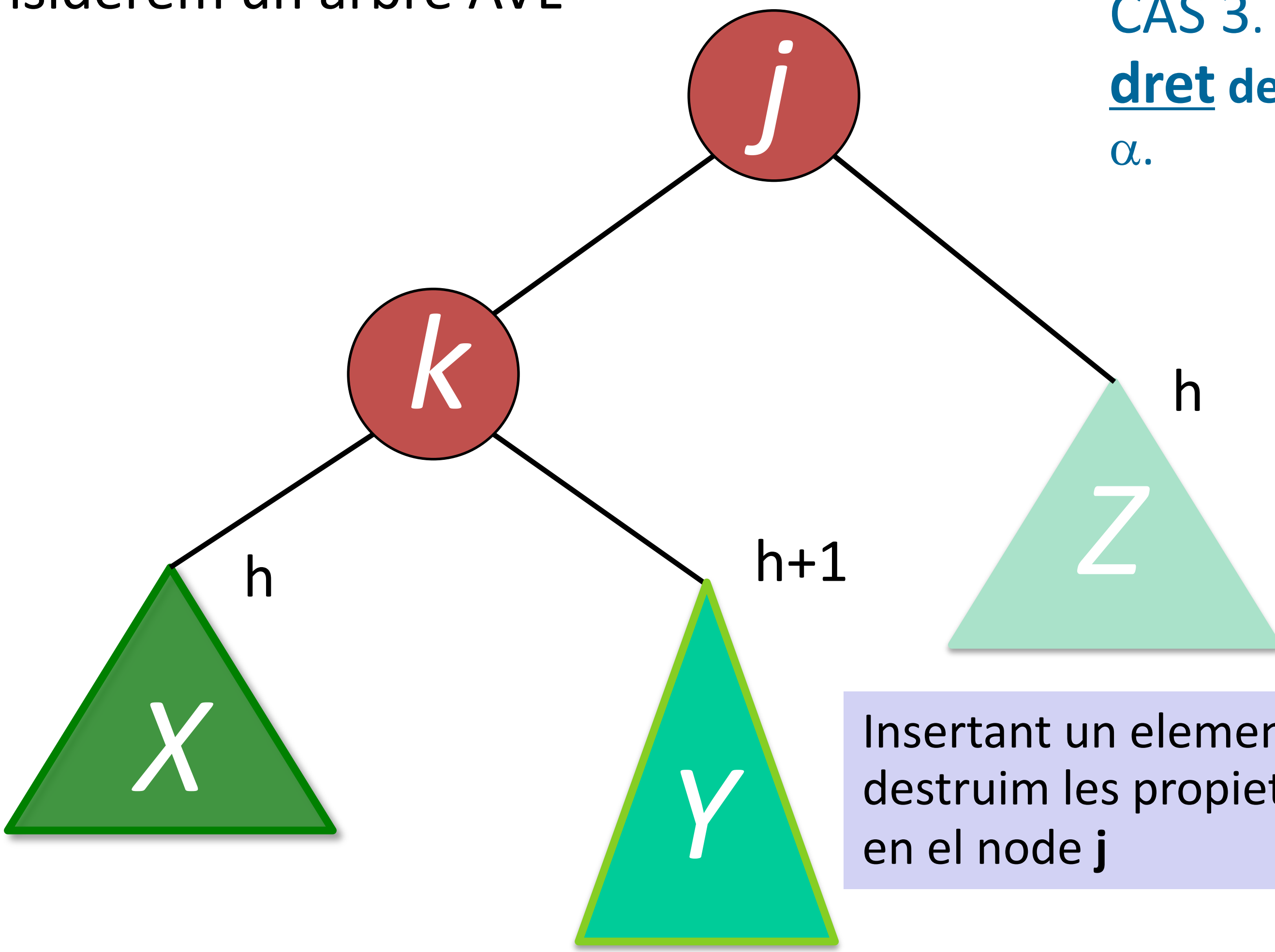
Considerem un arbre AVL



Inserció en un AVL : Cas intern

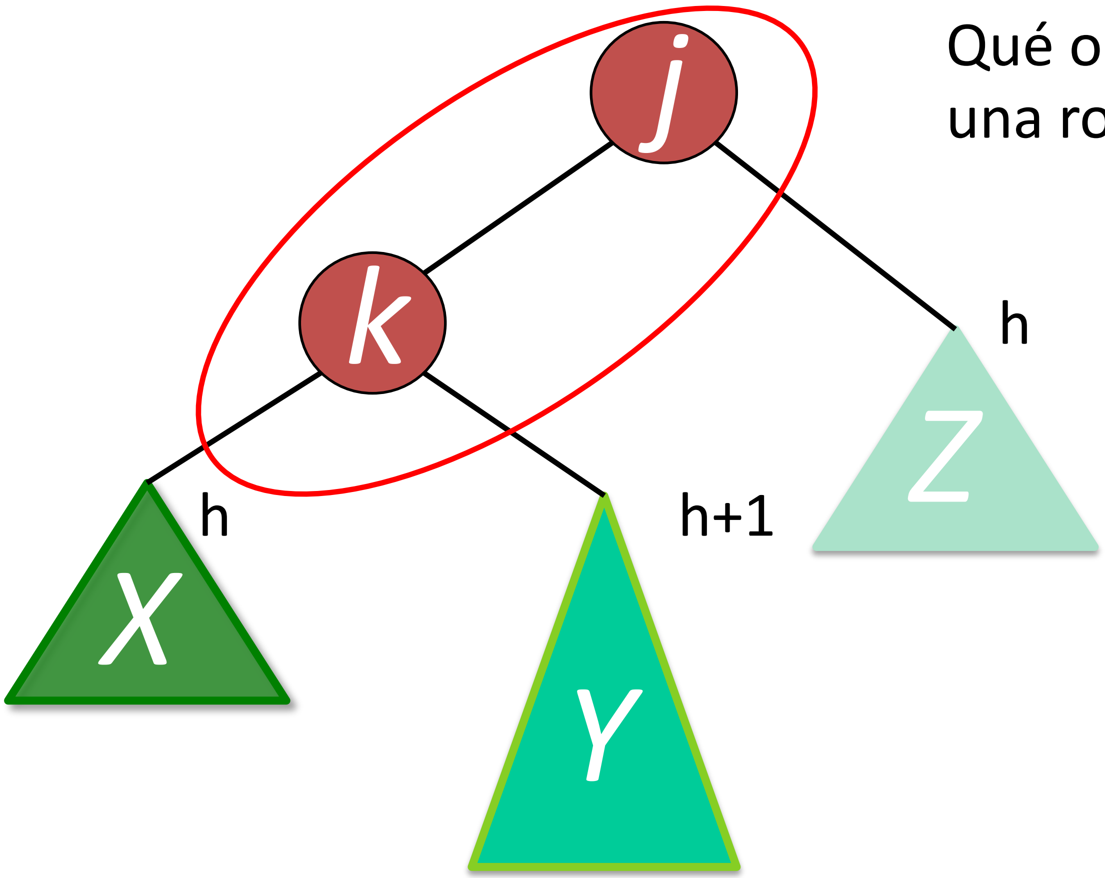
Considerem un arbre AVL

CAS 3. Inserció en **l'arbre <u>dret</u> del fill <u>esquerra</u>** de α.



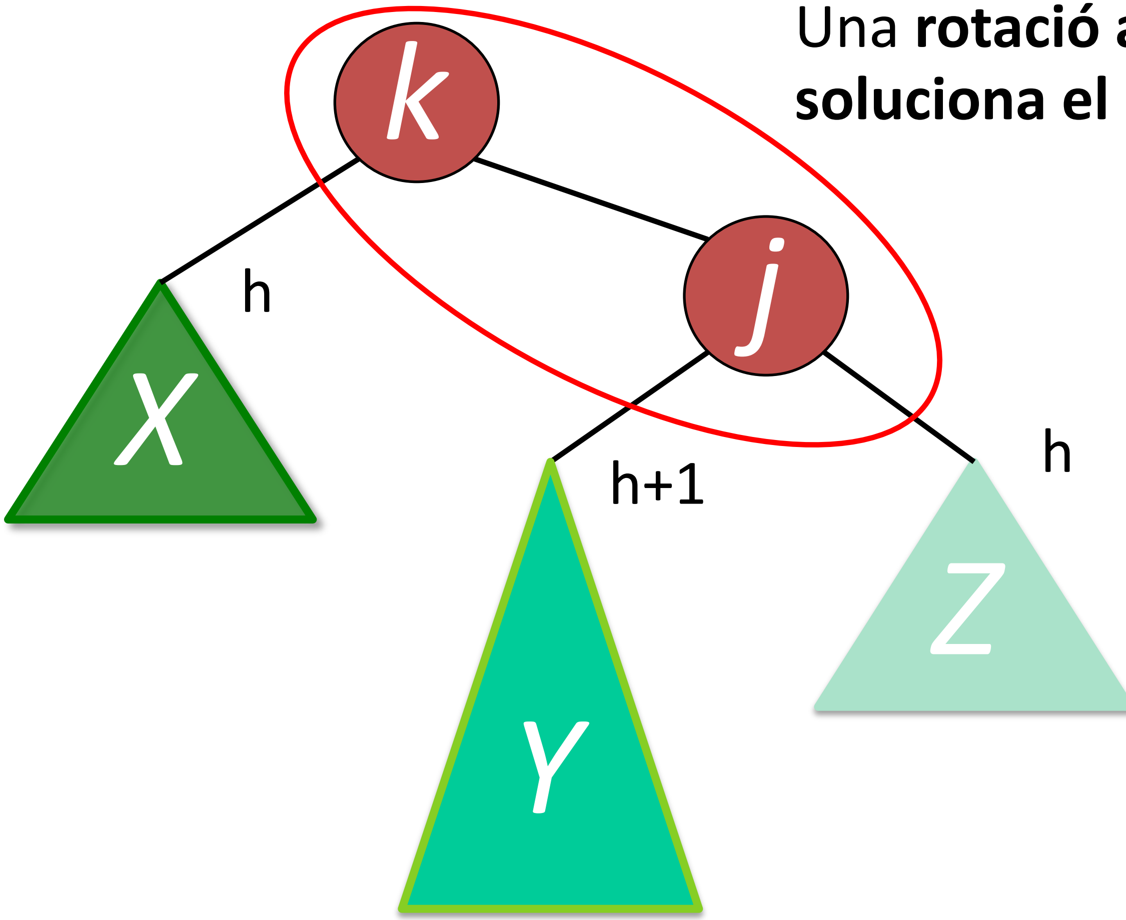
Insertant un element en el subarbre **Y** destruim les propietats de l'arbre AVL en el node **j**

Inserció en un AVL : Cas intern



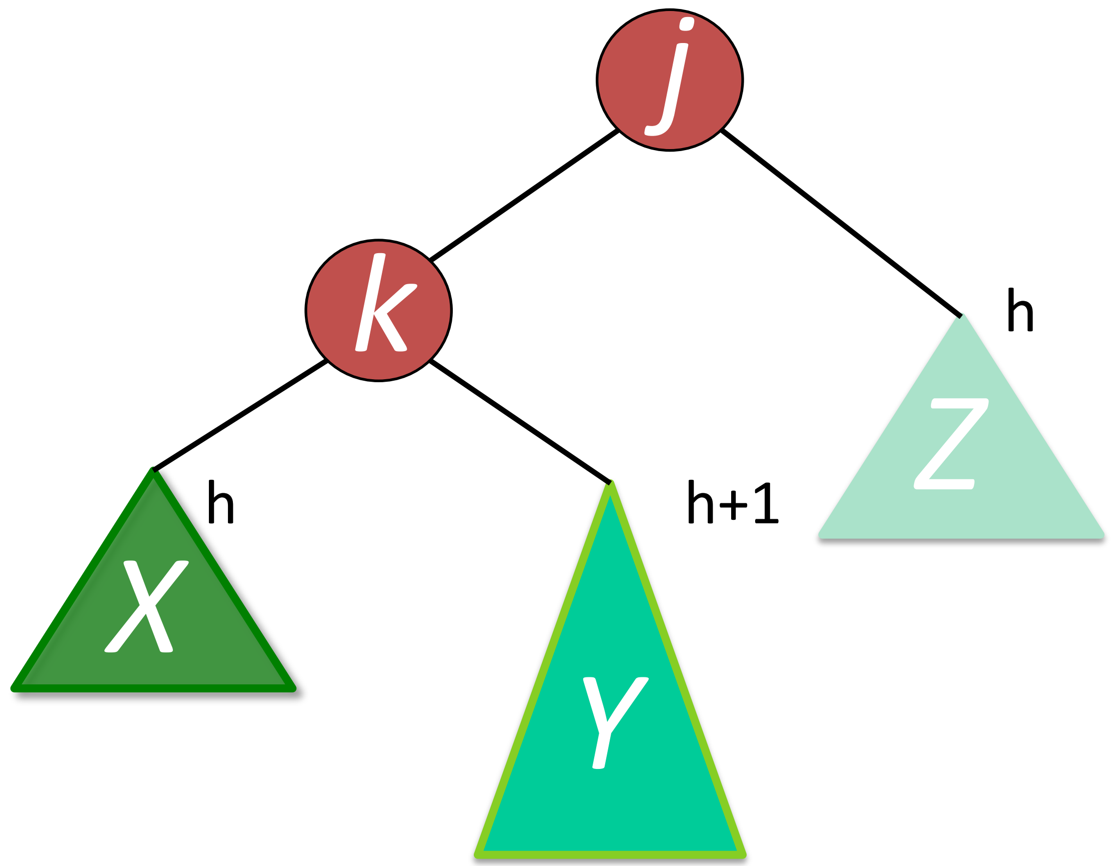
Qué ocorre si fem una rotació a la dreta?

Inserció en un AVL : Cas intern



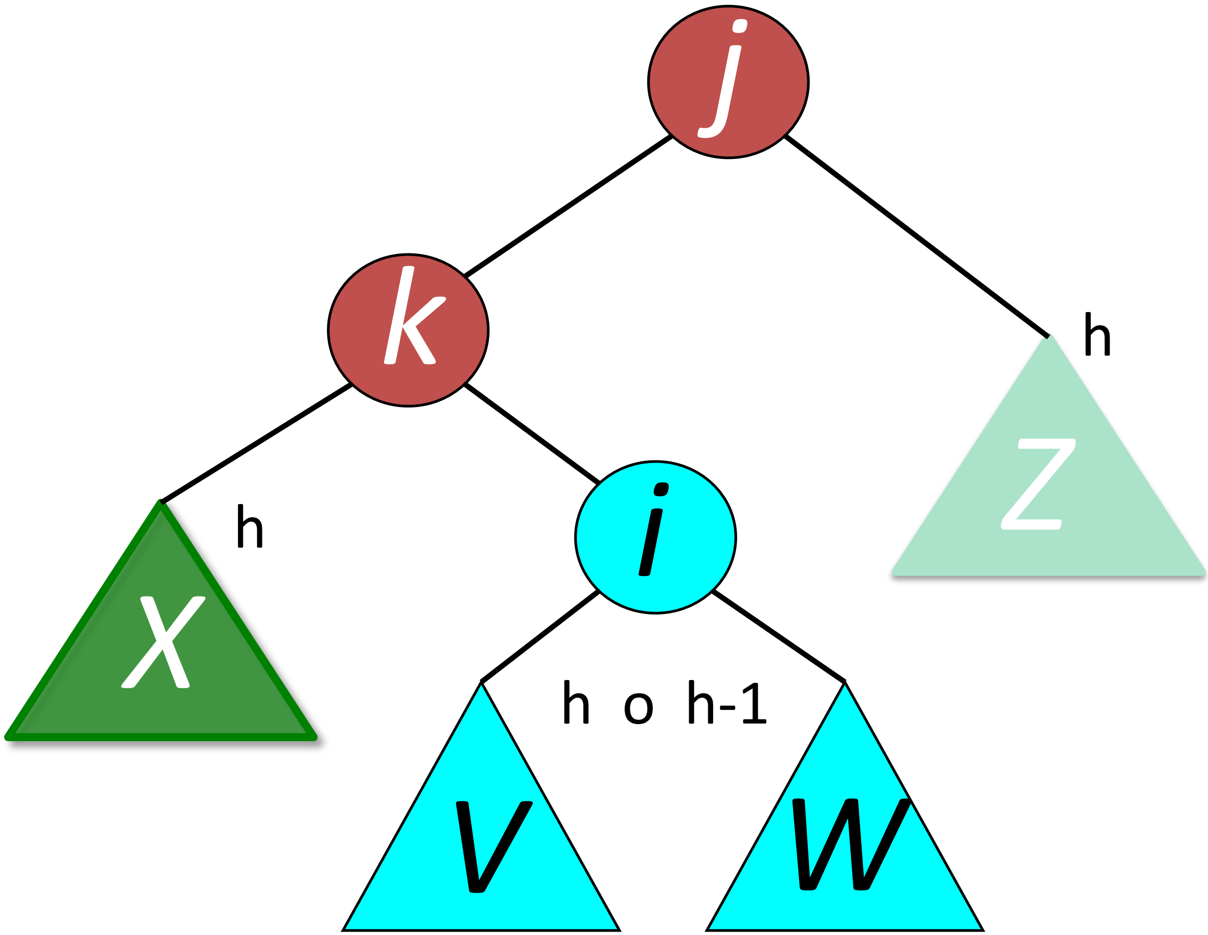
Una **rotació a la dreta no soluciona el desbalanceig**

Inserció en un AVL : Cas intern



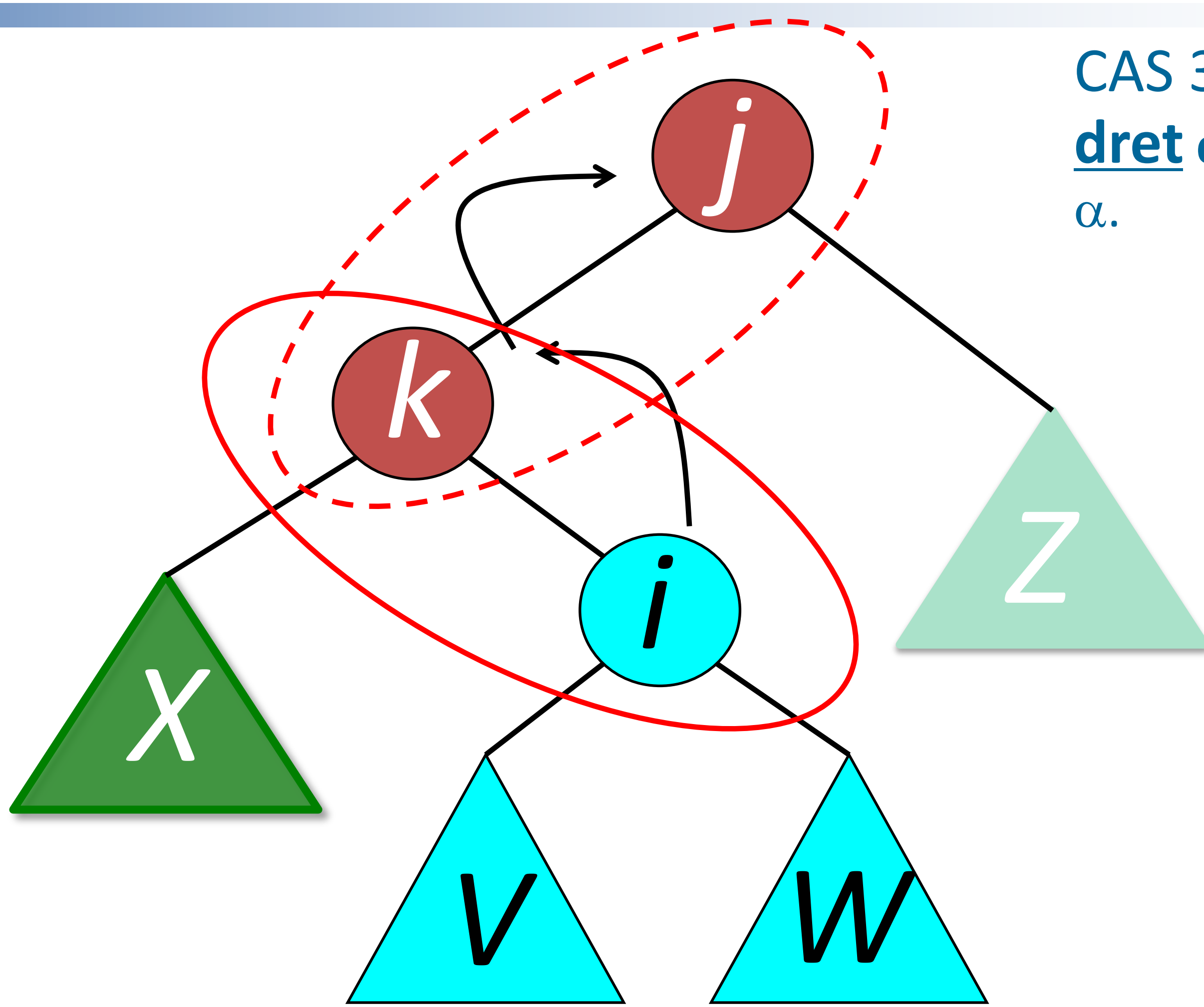
Considerem l'estructura definida pel subarbre Y

Inserció en un AVL : Cas intern



Y == al node i més els subarbres V i W

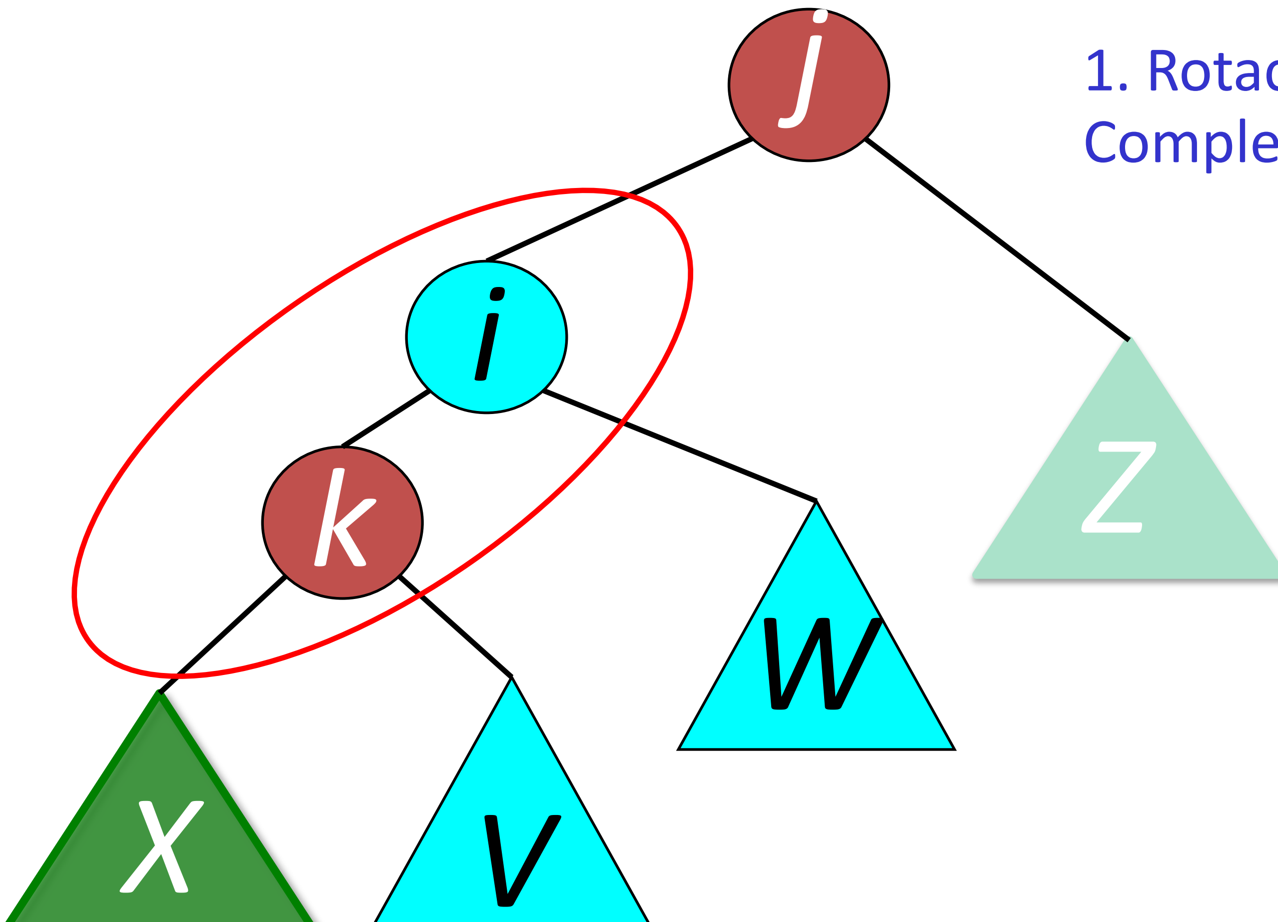
Inserció en un AVL : Cas intern



CAS 3. Inserció en **l'arbre** **dret** **del fill** **esquerra** de α.

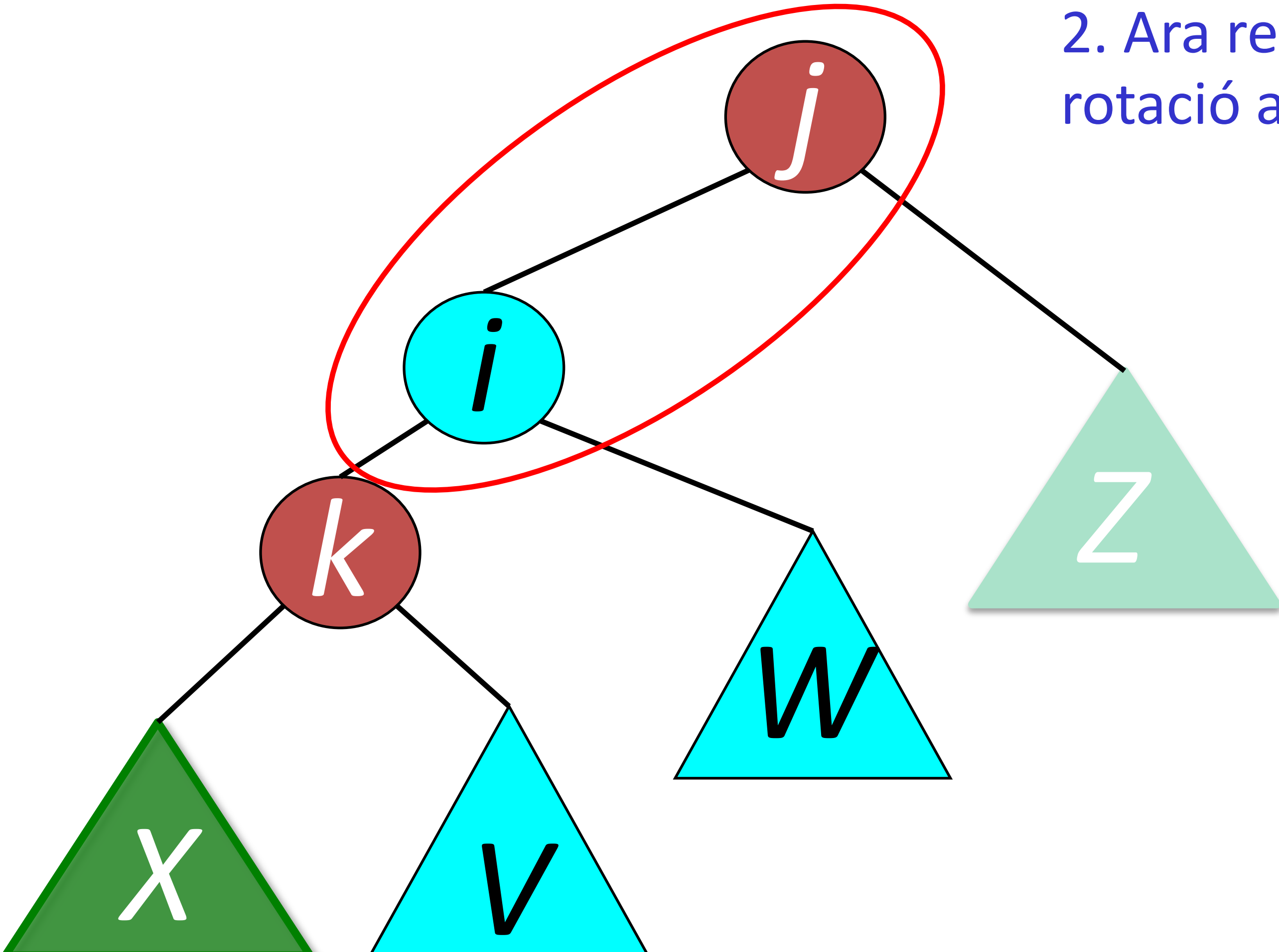
Anem a fer una **DOBLE** **rotació esquerra-dreta (primer a l'esquerra i com a segon pas a la dreta)**

Rotació Doble: Primera rotació



1. Rotació Esquerra Completada

Rotació Doble: Segona rotació

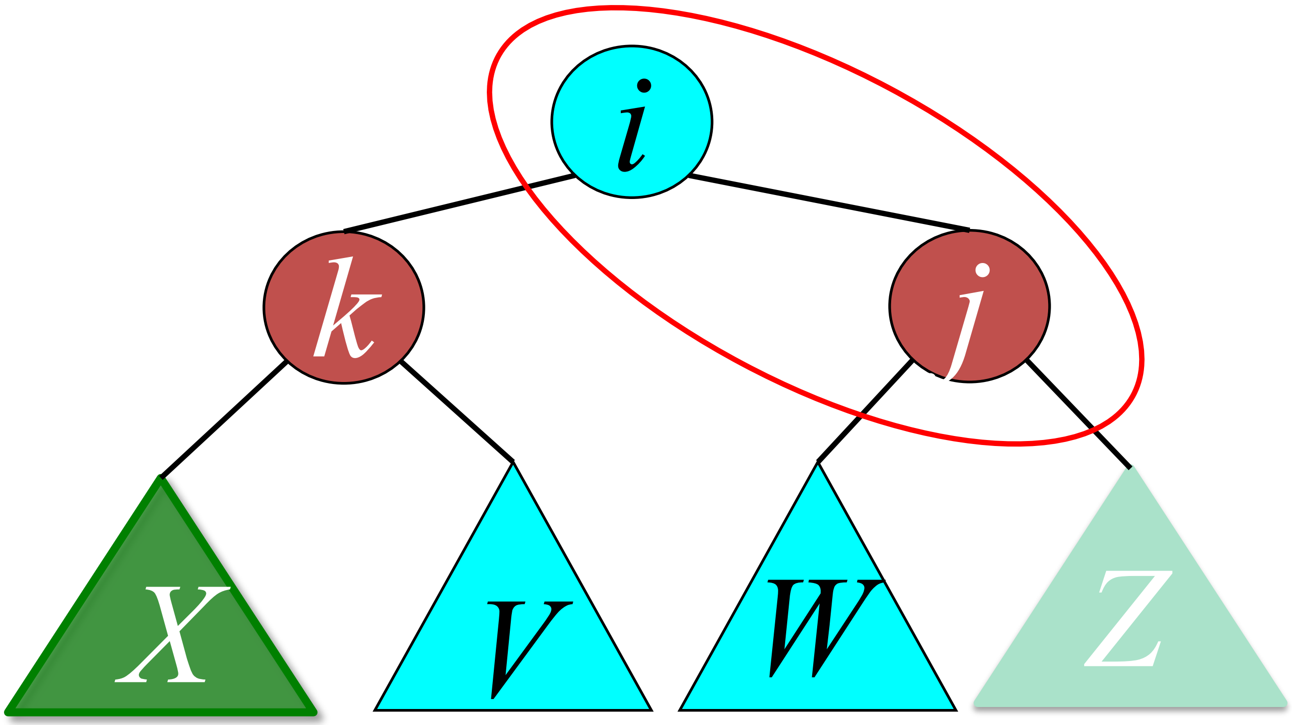


2. Ara realitzem una rotació a la dreta

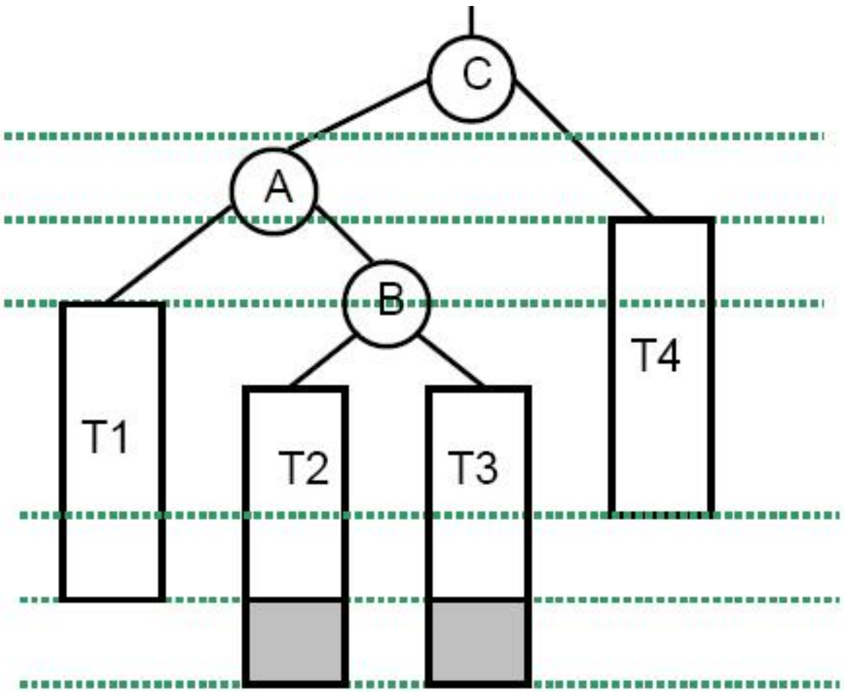
Rotació Doble: Segona rotació

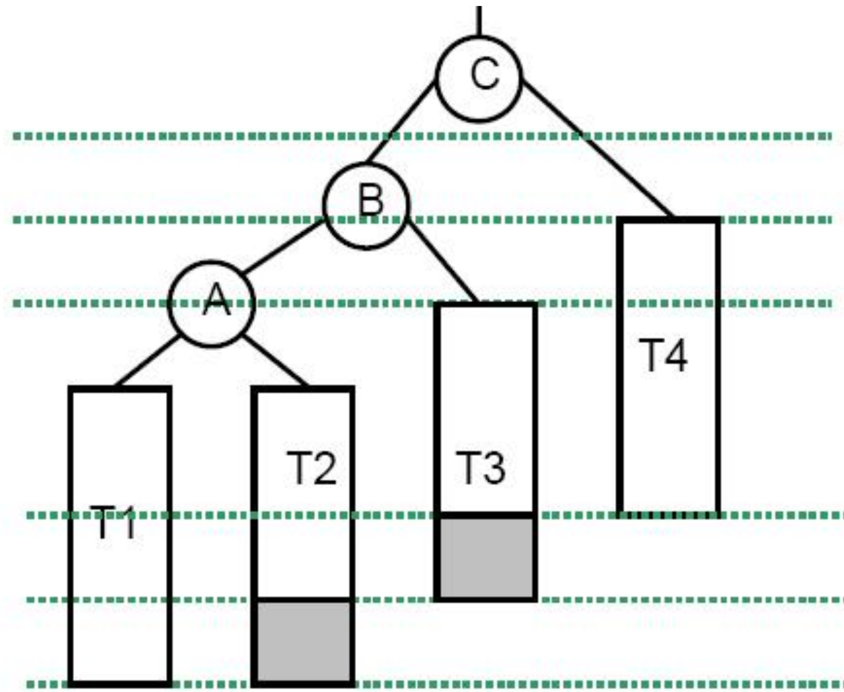
2. Rotació dreta completada

Arbre balancejat recuperat



Cas 3: Rotació doble



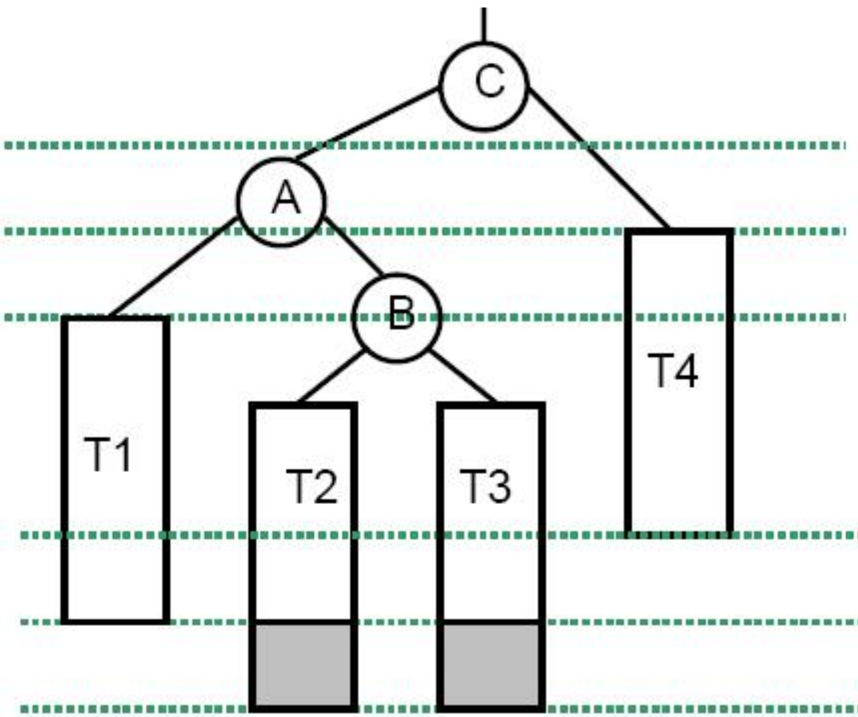


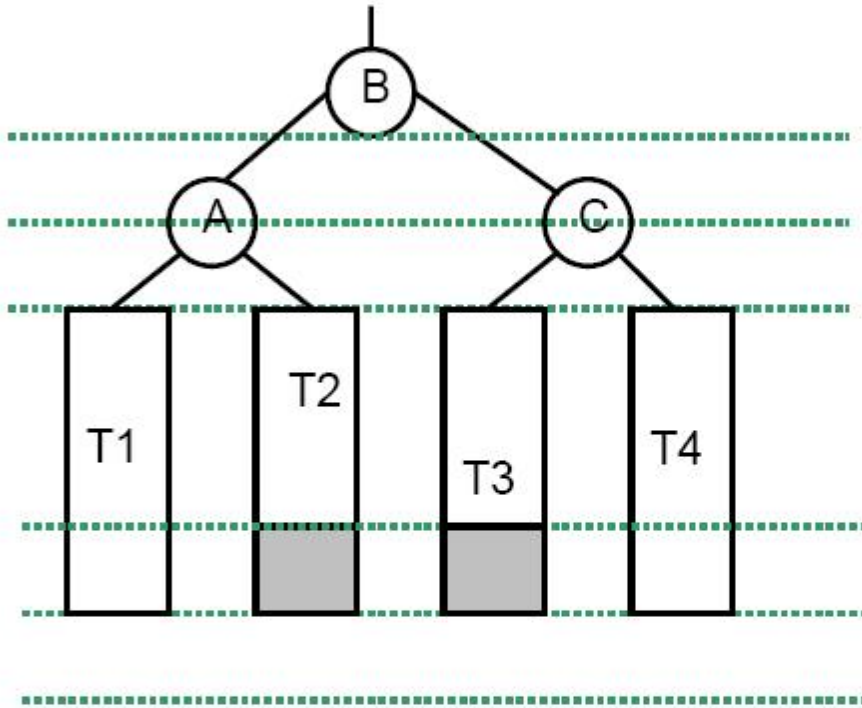
CAS 3: Esquerra- Dreta

Solució: Rotació doble

PAS 1: "rotació a l'esquerra"

Cas 3: Rotació doble



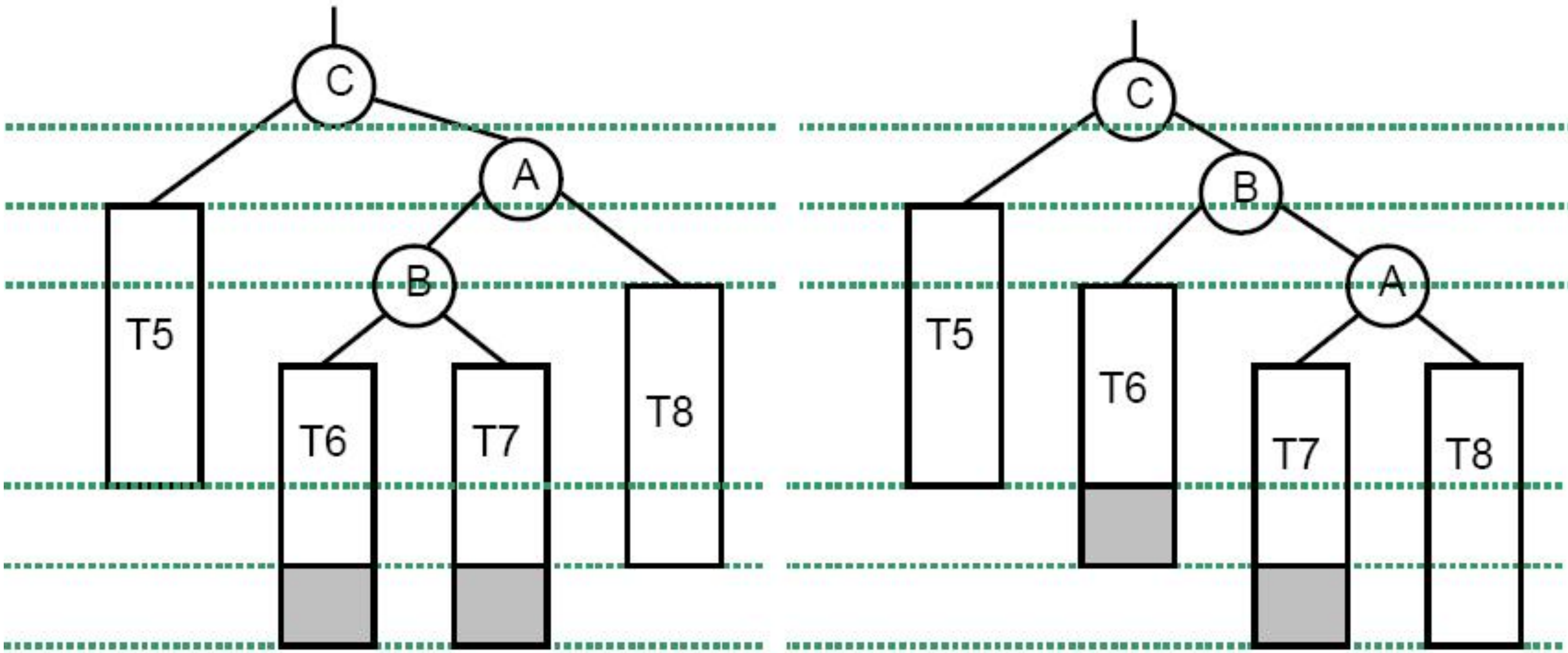


CAS 3: Esquerra- Dreta

Solució: Rotació doble

PAS 2: "rotació a la dreta"

Cas 4: Rotació doble

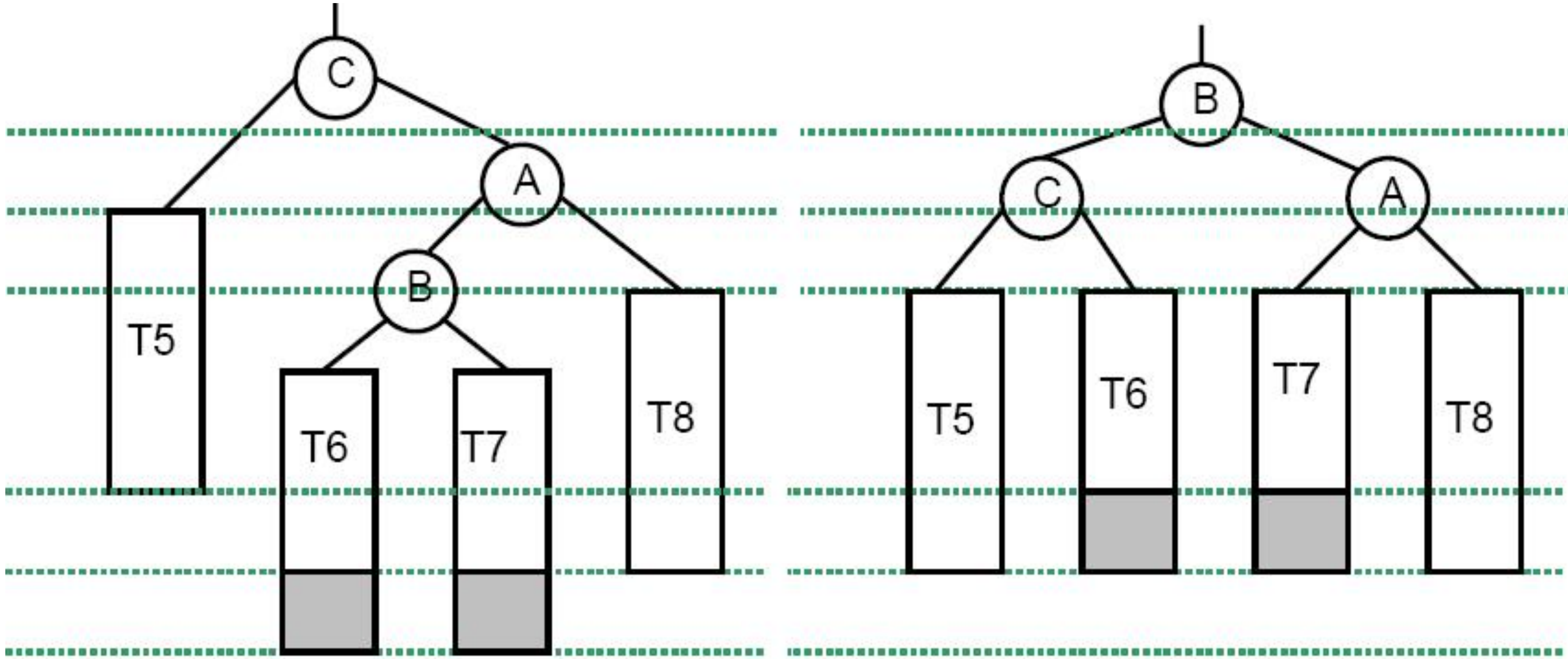


CAS 4: Dreta - Esquerra

Solució: Rotació doble

PAS 1: "rotació a la dreta"

Cas 4: Rotació doble



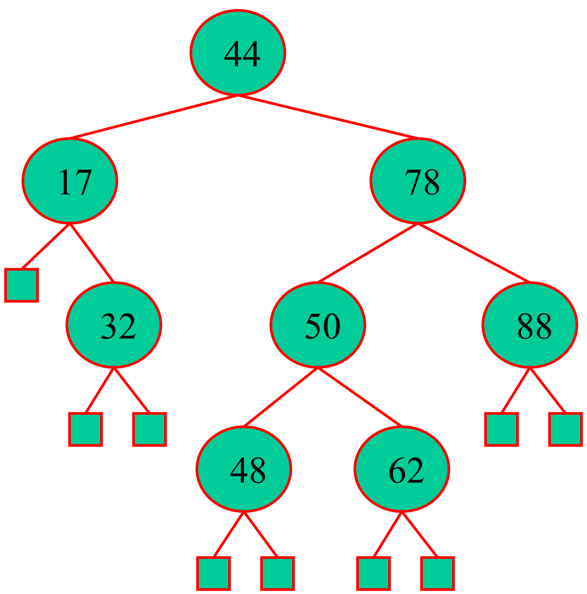
CAS 4: Dreta - Esquerra

Solució: Rotació doble

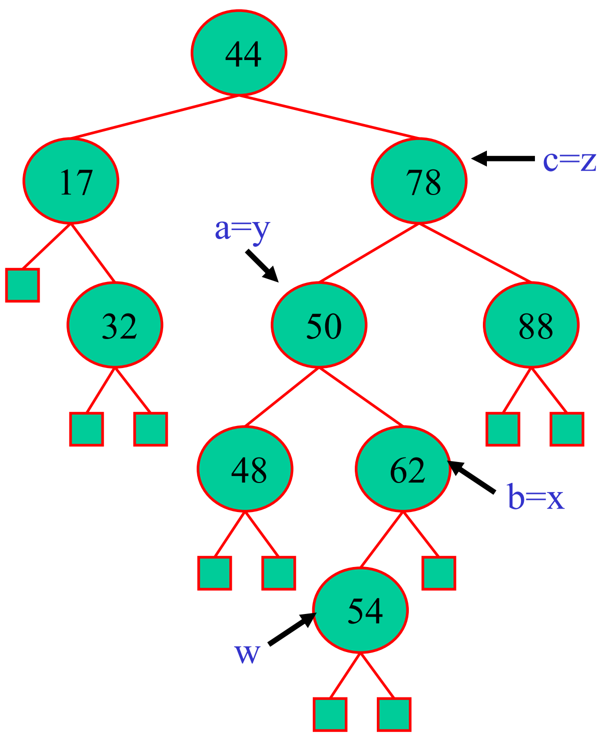
PAS 2: "rotació a la l'esquerra"

Exemple rotació doble

- La inserció es fa igual que al BST
- Sempre s'expandeix un node extern
- Cada cop que s'insereix un element s'ha d'actualitzar el BF
- Exemple: inserim el 54



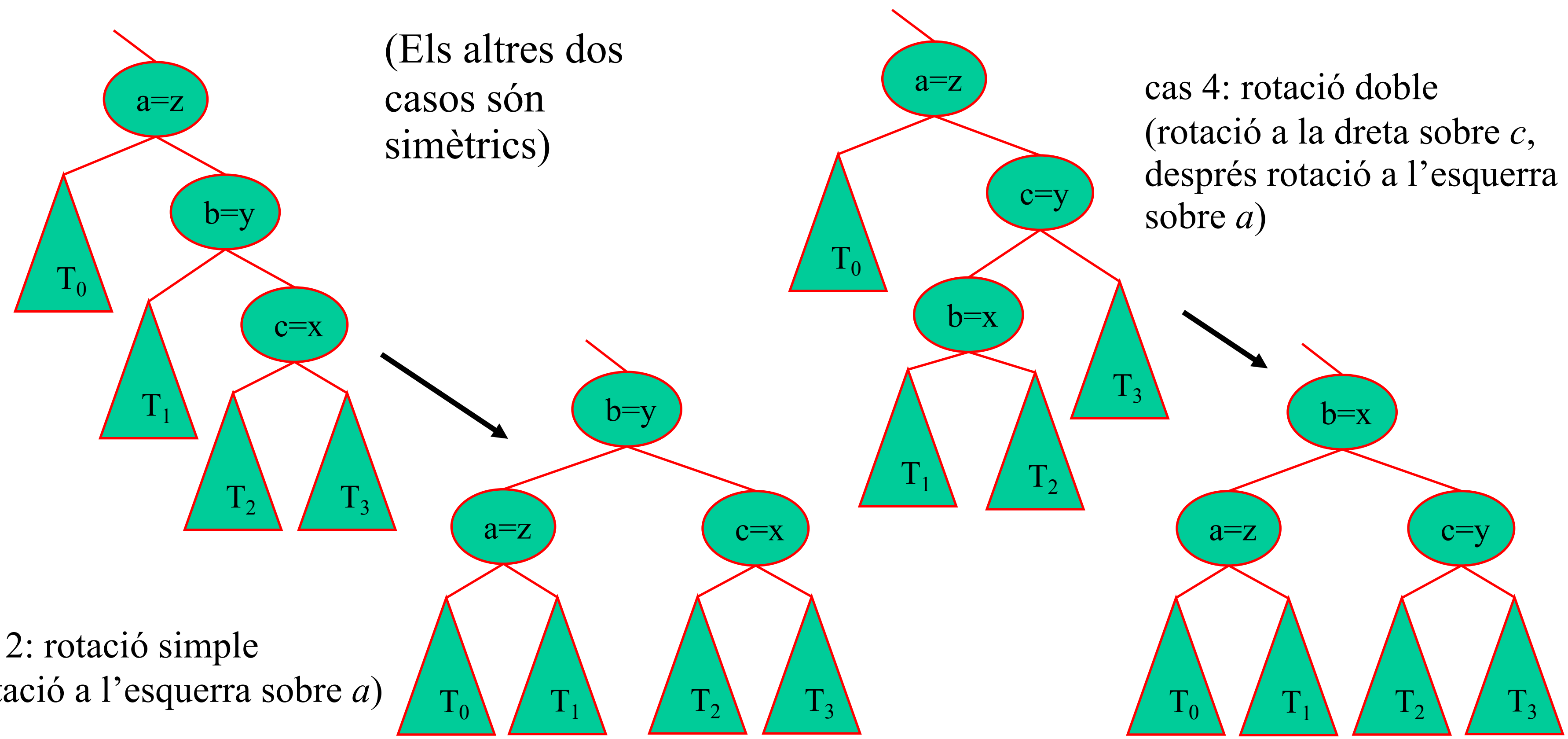
Abans d'inserir



Després d'inserir

Resum reestructuració dels trinodes en un AVL

- Assumim (a,b,c) són un llistat en inordre de x, y, z
- Executar les rotacions necessaries per fer que b sigui el node **més al dalt** de l'arbre

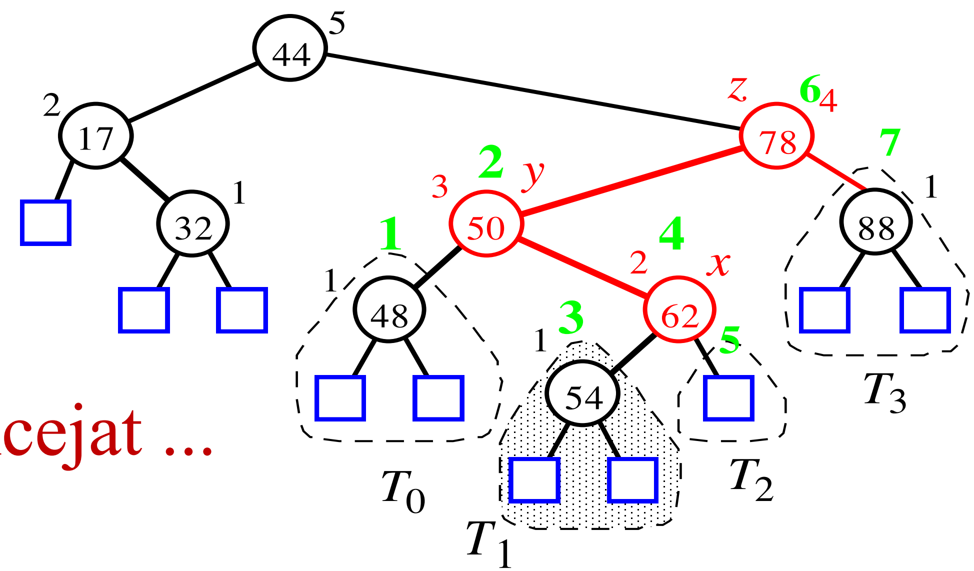


(Els altres dos casos són simètrics)

cas 2: rotació simple (rotació a l'esquerra sobre *a*)

cas 4: rotació doble (rotació a la dreta sobre *c*, després rotació a l'esquerra sobre *a*)

Exemple rotació doble (continuació)



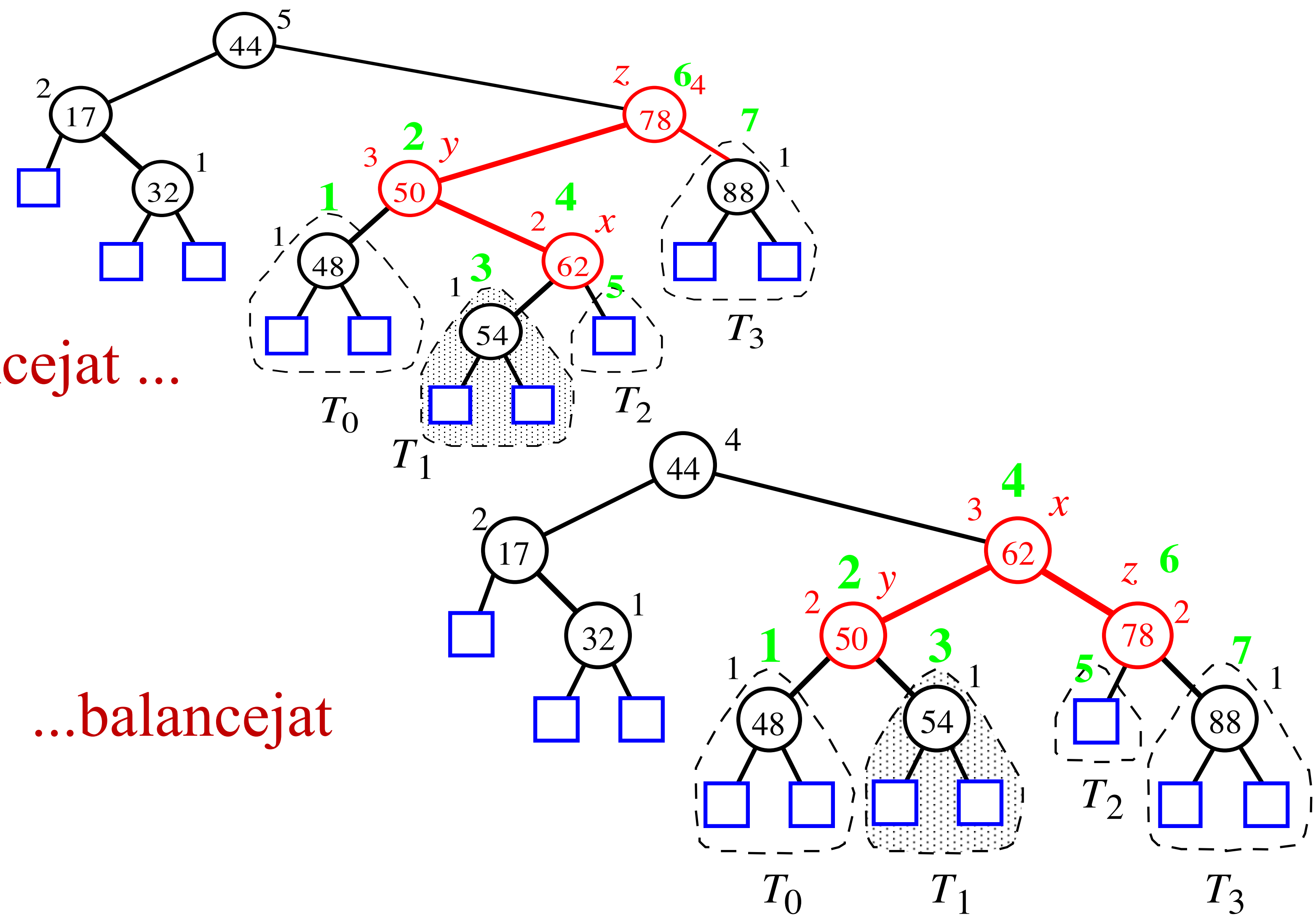
desbalancejat ...

Pinteu al costat el dibuix balancejat →

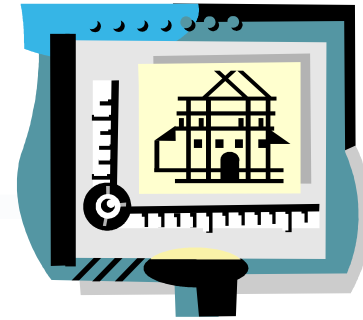
Exemple rotació doble (continuació)

desbalancejat ...

...balancejat



Arbre AVL: Rendiment

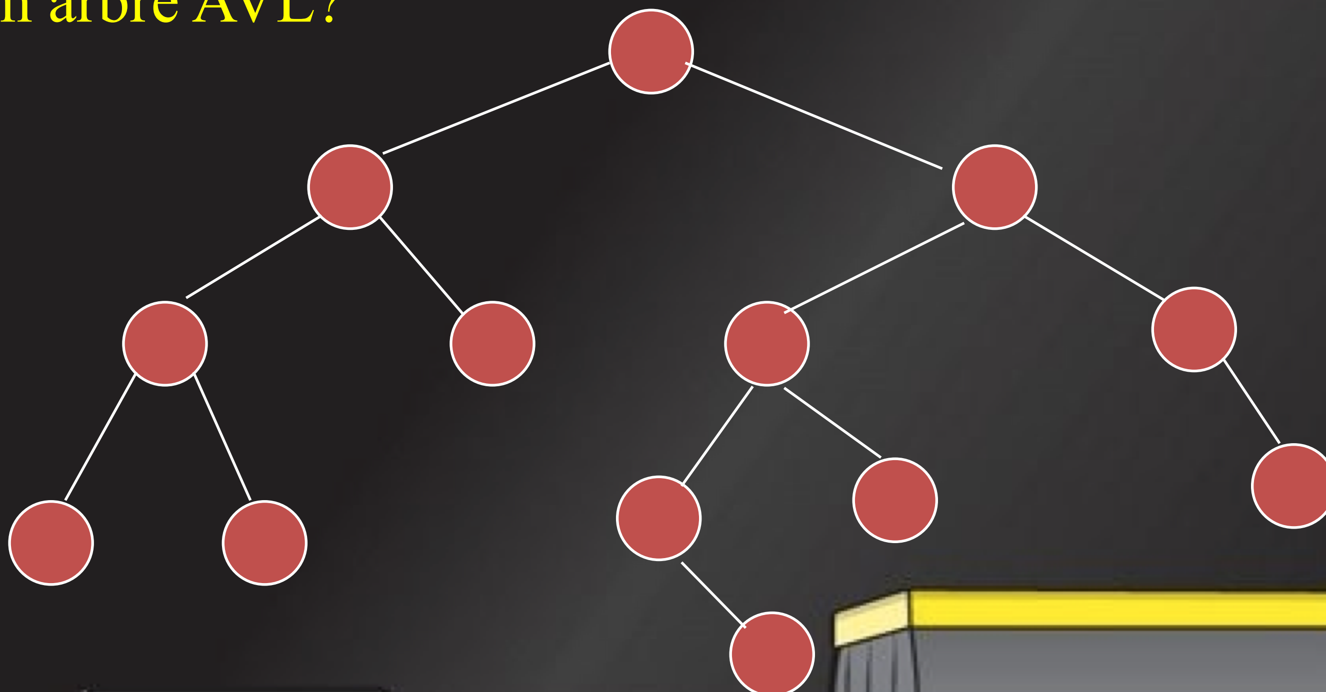


- Una reestructuració simple costa, O(1) en temps
  - Usant un arbre binari amb encadenaments
- Search costa O(log n) en temps
  - L’alçada de l’arbre és O(log n), no necessita reestructurar
- Insert costa O(log n) en temps
  - La cerca inicial és de O(log n)
  - Reestructurar cap a dalt de l’arbre, mantenint les alçades té un cost de O(log n)
- Remove costa O(log n) en temps
  - La cerca inicial és de O(log n)
  - Reestructurar cap a dalt de l’arbre, mantenint les alçades té un cost de O(log n)

Exercici 1

Quin és el factor de balanç en cada node?

És un arbre AVL?



UNIVERSITAT DE BARCELONA

Exercici 2: Construcció d'un arbre AVL

Quin arbre obtenim al crear un AVL amb els següents nodes?

I. 8, 9, 10, 2, 1, 5, 3, 6, 4, 7, 11, 12
II. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8

Feu l'exercici i comproveu la solució a:

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Tema 4 **Estructures no lineals: Arbres**

Maria Salamó Llorente

Estructura de Dades

Enginyeria Informàtica

Facultat de Matemàtiques i Informàtica,

Universitat de Barcelona