TEMA 2 : RECURRÈNCIES

En molts tipus de problemes, en biologia, processat de senyal, etc... apareixen successions numèriques

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$$

en les que el valor de x_m es pot calcular a partir de termes anteriors a partir d'una certa relació entre ells, a partir d'una certa equació.

EXEMPLE

(a) $X_m = 5 \cdot X_{m-1}$

(b) Progressions aritmètiques o progressions geomètriques.

(c) La successió $\{F_m\}_{m\geq 0}$ definida per $F_0 = 0$, $F_1 = 1$;

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \quad \text{si } m \geq 2. \qquad \text{(SUCCESSIÓ de FIBONACCI)}$$

L.

Per exemple en (a) ens aniria bé conèixer un polinomi en funció de m, $g(m)$ que ens permetés calcular $X_m = g(m)$ sense haver de calcular els termes anteriors (si hem preguntem què val X_{50} no té sentit que hagi de calcular $X_1 \ldots X_{49}$ per tenir X_{50})

En aquest cas és fàcil. Si ens diuen per exemple que $x_0 = 1$, tindrem

$X_1 = 5$, $X_2 = 5 \cdot 5$, $X_3 = 5 \cdot 5^2$, etc....

: és clar que $X_m = 5^m$. Per tant en aquest cas la funció en m que busquem és $g(m) = 5^m$ que ens permet calcular qualsevol terme directament.

PREGUNTA

Sabem trobar una funció en m, $g(m)$ que hem permeti calcular $F_m = g(m)$ de l'exemple (c), que hem permeti determinar qualsevol terme de la suc de Fibonacci sense haver de calcular els anteriors ?

Em aquest tema aprendrem a buscar aquesta funció $g(m)$ però no només per la suc. de Fibonacci sinó per moltes altres.

DEFINICIÓ:

Sigui $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una successió de nombres. Diem que verifiquen una RECURRÈNCIA (o que tenim una recurrència) si

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_d x_{n-d} + f(n)$$

és a dir si el terme n-èssim, x_n, s'expressa com a combinació lineal de termes anteriors i un polinomi en n, $f(n)$.

Diem que la recurrència és HOMOGÈNIA si $f(n)=0$, és a dir x_n només depèn de termes anteriors.

EXEMPLE (a) Fibonacci és una recurrència homogènia.

(b) $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ és Homogènia

(c) $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} + n^2+1$ no és Homogènia.

(d) $x_n = x_{n-2} + 5$ no és Homogènia.

DEFINICIÓ: Considerem la recurrència $x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_d x_{n-d} + f(n)$

Una solució general de la recurrència és una funció en n, $g(n)$, tal que conegut els valors inicials $x_0 - x_{d-1}$ ens permet calcular $x_n = g(n)$.

Una solució particular $h(n)$ de la recurrència és una expressió en n que verifica la equació de recurrència. Això vol dir

$$h(n) = a_1 \cdot h(n-1) + \cdots + a_d h(n-d) + f(n)$$

L.

El que farem és aprendre a determinar la Solució General d'una recurrència, és a dir la funció $g(n)$ que ens permet calcular el terme n-èssim en funció de n.

DEFINICIÓ:

Donada la recurrència $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_d x_{n-d}$

definim el POLINOMI CARACTERÍSTIC de la recurrència com

$$p(t) := t^d - a_1 t^{d-1} - a_2 t^{d-2} \cdots - a_{d-1} t - a_d$$

NOTA: Nosaltres NOMÉS estudiem recurrències en les que el polinomi característic descomposa en factors lineals.

Començarem estudiant les recurrències Homogènies per després estudiar les NO homogènies.

SOLUCIÓ GENERAL DE RECURRÈNCIES HOMOGÈNIES.

La nostra recurrència és de la forma:

$$x_m = a_1 x_{m-1} + a_2 x_{m-2} + \cdots + a_d x_{m-d}$$

Considerem el polinomi característic i el descomponem en factors lineals

$$p(t) = t^d - a_1 t^{d-1} - a_2 t^{d-2} \quad - a_d = (t-\alpha_1)^{m_1} (t-\alpha_2)^{m_2} \cdots\cdots (t-\alpha_s)^{m_s}.$$

Aleshores el Terme General o Solució general de la recurrència és:

$$\boxed{g(m) = p_1(m)\cdot(\alpha_1)^m + p_2(m)\cdot(\alpha_2)^m + \cdots + p_s(m)\cdot(\alpha_s)^m \quad (*)}$$

on $p_i(m)$ és un polinomi en m de grau $m_i - 1$, és a dir

$$p_i(m) = c_0^i + c_1^i m + c_2^i m^2 + \cdots + c_{m_i-1}^i \cdot m^i \quad , \; c_j^i \text{ constants.}$$

(*) Ens dóna la solució general a la recurrència. Si ens donen les CONDICIONS INICIALS, és a dir, ens diuen què valen els d primers termes de la recurrència podrem determinar el valor de les constants c_j^i. Veurem mitjançant exemples com es fa.

EXEMPLE 1 (FIBONACCI)

La successió de Fibonacci es $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$. Per tant el polinomi característic és

$$p(t) = t^2 - t - 1 = \left(t - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$ → Tenim 2 arrels de multiplicitat 1

⟹ la solució general és:

$$g(m) = c_0 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + c_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

Com coneixem les condicions inicials: $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ podem calcular c_0 i c_1

$$0 = F_0 = g(0) = c_0 + c_1$$

$$1 = F_1 = g(1) = c_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$ ⇝ Resolent el sistema: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Per tant, la solució general és

$$g(m) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

EXEMPLE 2: Volem calcular la solució general de la recurrència:

$$x_n = 4x_{n-1} + 3x_{n-2} - 18x_{n-3}$$

amb les condicions inicials $x_0 = 2$, $x_1 = -2$ i $x_2 = -5$

Calculem el polinomi característic

$$p(t) = t^3 - 4t^2 - 3t + 18 = (t-3)^2(t+2)$$

Per tant la solució general és de la forma:

$$g(n) = \underbrace{(c_0 + c_1 n)}_{\text{pol de grau 1 en } n}(3)^n + \underbrace{d_0}_{\text{pol de grau 0 en } n}(-2)^n$$

Amb les condicions inicials calculem c_0 c_1 i d_0:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= x_0 = g(0) = c_0 + d_0 \\ -2 &= x_1 = g(1) = (c_0 + c_1)\cdot 3 - 2d_0 \\ -5 &= x_2 = g(2) = (c_0 + 2c_1)9 + 4d_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{resolem el sistema } c_0 = 1,\ c_1 = -1,\ d_0 = 1$$

Per tant, la solució general és:

$$\boxed{g(n) = (1-n)(3)^n + (-2)^n}$$

EXEMPLE 3: Trobar el terme general de la recurrència:

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$$

El polinomi característic és: $p(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

Per tant la solució general o terme general és:

$$g(n) = (c_0 + c_1 n)(2)^n.$$

Si ens haguéssin dit com eren els primers termes podríem calcular c_0 i c_1.

SOLUCIÓ GENERAL DE LES RECURRÈNCIES NO HOMOGÈNIES.

La nostra recurrència és de la forma:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_d x_{n-d} + f(n) \quad \text{on } f(n) \neq 0. \qquad (*)$$

Per a calcular el Terme general fem els següents passos:

① Calculem el Terme general de la homogènia associada:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_d x_{n-d}$$

Anomenem $g(n)$ a aquest terme.

② Busquem z_n una solució particular

③ El terme general de la recurrència no homogènia és:

$$h(n) = g(n) + z_n$$

Els passos ① i ③ els sabem fer. Només ens queda saber fer el ②.

Com calcular una solució particular

- Si $f(n)$ és una constant, $z_n = \alpha n + \beta$ un polinomi de grau ≤ 1. Per calcular α i β imposem que z_n verifiqui la recurrència, això vol dir que el terme n-èssim verifiqui $(*)$.

- Si $f(n)$ és un polinomi de grau ℓ provem amb ~~z_n~~

$$z_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \dots + \alpha_\ell n^\ell$$

un polinomi de grau ℓ. Com en el cas anterior imposem que verifiqui la recurrència $(*)$ i calculem el valor de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell$.

Si no trobéssim solució caldria provar amb un polinomi en n de grau més gran.

NOTA:

Al imposar que z_n sigui solució de $(*)$ ens queda una igualtat entre polinomis en n. Cal igualar coef de grau 0 de un costat amb coef de grau 0 de l'altre, part lineal de un costat amb part lineal de l'altre, així successivament.

Recordem que 2 polinomis $p(n)$ i $q(n)$ són iguals si tenen tots els coeficients iguals.

EXEMPLE Calcular la solució general o terme general de la recurrència:

$$x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2} + 4n^2 + 10. \qquad (*)$$

És una no homogènia.

Primer estudiem la homogènia associada: $x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}$

Té polinomi característic $p(t) = t^2+2t+1 = (t+1)^2$. Per tant la sol general de la homogènia associada és:

$$g(n) = (c_0+c_1 n)(-1)^n.$$

Ara busquem una solució particular. Com el terme no homogeni $f(n)=4n^2+10$ és un polinomi de grau 2, busquem una solució particular de la forma $\boxed{z_n = \alpha n^2+\beta n+\gamma}$

Imposem que sigui solució. Això vol dir que verifica $(*)$ és a dir

$$4n^2+10 = x_n+2x_{n-1}+x_{n-2}$$

Substituïm

$$4n^2+10 = (\alpha n^2+\beta n+\gamma)+2\left(\alpha(n-1)^2+\beta(n-1)+\gamma\right)+\alpha(n-2)^2+\beta(n-2)+\gamma$$

$$4n^2+10 = \alpha n^2+\beta n+\gamma+2\left(\alpha(n^2-2n+1)+\beta(n-1)+\gamma\right)+\alpha\left(n^2-4n+4\right)+\beta(n-2)+\gamma$$

Ara igualem coeficient a coeficient. Comencem per la part de grau 2.

$$4 = \alpha+2\alpha+\alpha \Rightarrow 4\alpha=4 \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Ara igualem la part de grau 1:

$$0=\beta-4\alpha+2\beta-4\alpha+\beta \Rightarrow 4\beta=8\alpha \Rightarrow \boxed{\beta=2}$$

Finalment igualem la part de grau 0:

$$10=\gamma+2\alpha-2\beta+2\gamma+4\alpha-2\beta+\gamma \Rightarrow 4\gamma=10-6\alpha+4\beta=10-6+8=12 \Rightarrow \gamma=3$$

Per tant, la solució particular és:

$$z_n = n^2+2n+3$$

Per tant la solució general de la recurrència no homogènia és:

$$h(n) = (c_0+c_1 n)(-1)^n + n^2+2n+3.$$

NOTA Si ens haguéssin donat condicions inicials, podríem calcular c_0 i c_1. Si no ens les donen ho deixem així.