3.4. GRAFS EULERIANS i GRAFS HAMILTONIANS.

Varem iniciar el Tema parlant del problema dels ponts de Könisberg.

Aquest problema s'associa sovint als orígens de la Teoria de grafs. En aquesta part del tema li donarem resposta.

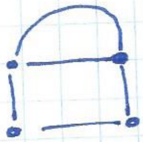
Per això ens cal introduir el concepte de graf Eulerià.

A diferència del que hem fet fins ara, considerem MULTIGRAFS, grafs que no són simples.

Recordem que això vol dir que el Graf pot tenir més d'una aresta entre dos vèrtex.

EXEMPLE:

Graf simple



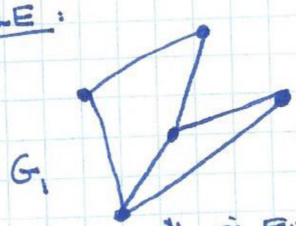
Multigraf.

DEFINICIÓ:

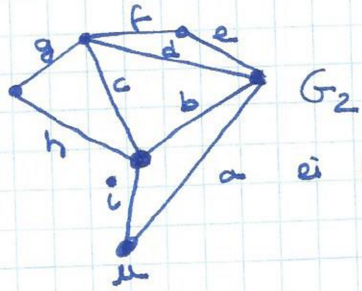
Sigui G un multigraf. Un CIRCUIT EULERIÀ és un circuit (recordem que això vol dir recorregut tancat) que passa un cop i només un per totes les arestes de G.

Diem que el Graf G és EULERIÀ si admet un circuit eulerià.

EXEMPLE:



No és Eulerià



és Eulerià.

- El circuit eulerià comença en u i segueix les arestes en ordre alfabètic.

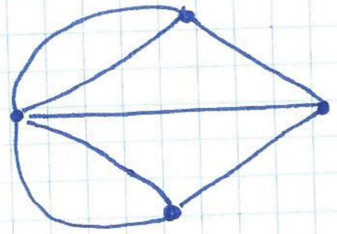
Tenim un criteri que ens permet veure de forma molt fàcil si un graf és Eulerià o no ho és.

TEOREMA
Sigui G un multigraf.

G és EULERIÀ $\Longleftrightarrow$ Tots els vèrtex de G tenen grau parell.

Com a conseqüència d'aquesta caracterització podem resoldre el problema dels ponts de Konisberg. (el problema dels 7 ponts).

El problema dels 7 ponts, en termes de grafs es tradueix en considerar el següent graf:



- Cada vèrtex és una zona de la ciutat i tenim una aresta si tenim un pont.

Aquest graf té vèrtex de grau senar. Per tant no és Eulerià. Això vol dir que no es pot fer un passeig per la ciutat passant per tots els ponts i només una vegada. Per tant el problema dels 7 ponts NO té solució.

NOTA ① Busqueu informació sobre l'algoritme de HIERHOLZER.
Aquest algoritme permet determinar un cicle Eulerià en un graf Eulerià. Ho posarem en pràctica a problemes.

② Hi ha una noció més dèbil que ens portarà a parlar de grafs semi Eulerians. Per a que un multigraf sigui semieulerià només demanem que hi hagi un recorregut EULERIÀ, això vol dir un recorregut que passa per totes les arestes i només un cop.
Un Graf és Semieulerià si i només si el nombre de vèrtex de grau senar és 0 o 2.

En 1886, un matemàtic irlandès, <u>W.R. Hamilton</u> va proposar el següent <u>problema</u>:

- Coloquem 20 ciutats del món en els vèrtex d'un dodecaedre. És possible recorre les 20 ciutats de manera que només es passi una vegada per cada ciutat i es torni a la ciutat d'origen?

Aquest problema ens porta a parlar dels Grafs Hamiltonians.

<u>DEFINICIÓ</u>:

Un <u>cicle o circuit</u> <u>Hamiltonià</u> en un graf G és un camí tancat que passa una única vegada per cada vèrtex (llevat l'origen i el final que coincideixen).

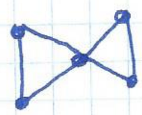
Diem que el <u>graf G és Hamiltonià</u> si conté un cicle Hamiltonià.

<u>EXEMPLE</u>:

(a)

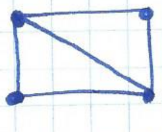
És Eulerià i Hamiltonià.

(b)



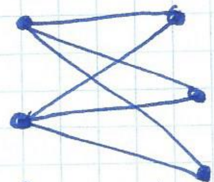
És Eulerià i No és Hamiltonià.

(c)



Es Hamiltonià No Eulerià

(d)



No és ni Eulerià ni Hamiltonià.

El problema de determinar si un graf és Hamiltonià és molt més difícil que el de determinar si és Eulerià.

No tenim criteris que ens permetin veure quan un Graf és Hamiltonià.

Només coneixem condicions suficients però no necessàries. Això vol dir que si es verifiquen les condicions podem dir que és Hamiltonià però si no es verifiquen NO podem dir res.

TEOREMA DE ORE:

Siqui G un graf amb n vèrtex, $n \geq 3$.

Si per tot parell de vèrtex no adjacents u i v es verifica:

$$d(u) + d(v) \geq n$$

aleshores, G és Hamiltonià.

D'aquest teorema es pot deduir:

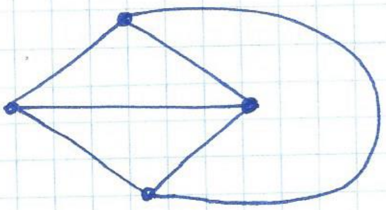
TEOREMA DE DIRAC:

Siqui G un graf amb n vèrtex, $n \geq 3$. Si

$$\min_{v \in V(G)} \{d(v)\} \geq \frac{n}{2}$$

aleshores G és HAMILTONIÀ.

EXEMPLE:



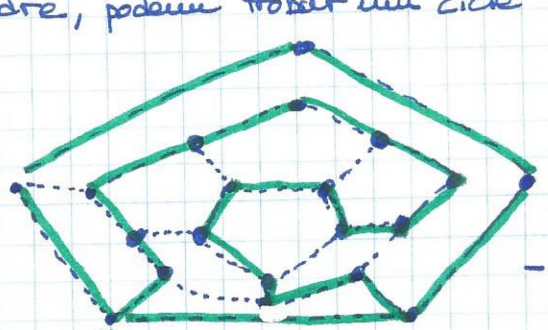
En aquest cas,

$$\min_{v \in V(G)} \{d(v)\} = 3 \geq \frac{4}{2} = 2$$

Per tant G és Hamiltonià.

NOTA: És important recordar que si aquestes condicions NO es verifiquen NO vol dir que G no siqui Hamiltonià. L'únic que ens diu és que no ho sabem.

El problema de Hamilton té solució. Si mirem la representació plana del dodecaedre, podem trobar un cicle Hamiltonià.



- En verd està marcat el cicle Hamiltonià.
- Tots els sòlids platònics donen lloc a grafs Hamiltonians.

Actualment hi ha molts problemes sense resoldre relacionats amb la $\exists$ de cicles: