Ejercicio 9. Para cada una de las ecuaciones diofánticas siguientes, da la solución (x, y) tal que x tome el menor valor positivo y no nulo posible:

(a) $119x + 84y = 7$

(b) 119x + 84y = 21

(c) 104x + 143y = 13

Solución 9. Para resolver estas ecuaciones diofánticas aplicaremos el siguiente teorema: Consideremos la ecuación ax + by = c donde x, y son incógnitas, $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0$ y sea $d = \text{mcd}(a, b)$. Entonces la ecuación tiene solución si y solo si $d = \text{mcd}(a, b)|c$. Además, si (x_0, y_0) es una solución de la ecuación, entonces el conjunto de soluciones es

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{d}k \\ y &= y_0 - \frac{a}{d}k \end{aligned}\right\}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(a) $119x + 84y = 7$

$mcd(119, 84) = 7|7$ y por tanto la ecuación tiene solución. Ahora, vamos a hallar una identidad de Bezout entre 119 y 84.

$$\begin{aligned} 119 &= 84 * 1 + 35 \\ 84 &= 35 * 2 + 14 \\ 35 &= 14 * 2 + 7 \end{aligned}$$

Despejando 7 de la última igualdad y sustituyendo por las igualdades correspondientes tenemos:

$7 = 35 - 14 * 2 = 35 - (84 - 35 * 2) * 2 = 35 * 5 - 84 * 2 = (119 - 84) * 5 - 84 * 2 = 119 * 5 - 84 * 7 = 5 * 119 + (-7) * 84$

Llegamos entonces a que $x_0 = 5$ e $y_0 = -7$ es una solución entera de la ecuación anterior. Como x_0 es positivo y además de todos los enteros positivos, el menor de ellos, ya que el valor anterior a él sería -7. Así, (5, -7) es una solución válida de la ecuación.

(b) 119x + 84y = 21 Veamos que esta ecuación posee solución: Como vimos en el apartado anterior $mcd(119, 84) = 7$, que divide a 21 y por tanto la ecuación tiene solución.

Ahora bien, podemos calcular la solución partir de la identidad de Bezout hallada en el apartado anterior, esto es, $7 = 5 * 119 + (-7) * 84$. Para ello, multiplicamos la expresión por 3 con el fin de obtener 21:

$21 = 15 * 119 + (-21) * 84$. Sin embargo, esta vez x_0 no es el menor entero positivo posible, ya que $x = 15 + \frac{84}{7} * -1 = 3$ es menor que 15 y además positivo. Así, x = 3; e $y = -21 - \frac{119}{7} * -1 = -4$. Luego, la solución válida es (3, -4).

(c) 104x + 143y = 13

Veamos si la ecuación tiene solución: $\mathrm{mcd}(104, 143) = 13|13$. Luego tiene solución.

Aplicando el mismo procedimiento que en el apartado a, hallamos una identidad de Bezout entre 104 y 143.

$$\begin{aligned} 143 &= 104 * 1 + 39 \\ 104 &= 39 * 2 + 26 \\ 39 &= 26 * 1 + 13 \end{aligned}$$

Despejando 13 de la última igualdad y sustituyendo por las igualdades correspondientes tenemos: $13 = 39 - 26 = 39 - (104 - 39 * 2) = 39 * 3 - 104 = (143 - 104) * 3 - 104 = 143 * 3 - 104 * 4 = (-4) * 104 + 3 * 143$. Pero $x_0 = -4$ es negativo, por lo que tenemos que busca otra solución donde x sea positiva. Pues bien,$x = -4 + \frac{143}{13} * 1 = 7$es el primer entero positivo solución de la ecuación. Hallemos ahora y, $y = 3 - \frac{104}{13} = -5$ y por consiguiente (7, -5) es solución válida de la ecuación.