Exercici 33. Sigui $F_n = 2^{2^n} + 1$ el n-èssim nombre de Fermat, on n és un enter no negatiu. Demostreu que

$$F_0F_1...F_{n-1} = F_n - 2,$$

per a tot $n \geq 1$.

Solució 33.
Ho demostrarem per inducció sobre n.
Cas inicial: $n = 1$. $F_1 - 2 = F_0$, trivial, ja que $F_0 = 3$ i $F_1 = 5$.
Suposem $F_{n-1} - 2 = F_0F_1...F_{n-2}$. Provem el cas n:
Per definició, $F_n - 2 \stackrel{?}{=} F_0F_1...F_{n-1}$

$$\begin{gathered}
F_n - 2 = F_0F_1...(F_0F_1...F_{n-2} + 2) \iff \\
F_n - 2 = (F_0F_1...F_{n-2})^2 + 2(F_0F_1...F_{n-2}) \iff \\
F_n = ((F_0F_1...F_{n-2})^2 + 2(F_0F_1...F_{n-2}) + 1 + 1) \iff \\
F_n = (F_{n-1} + 1)^2 + 1 \iff \\
F_n = (2^{2^{n-1}} + 1)^2 + 1 \iff \\
F_n = (2^{2^n}) + 1
\end{gathered}$$