Exercici 11. Calculeu totes les solucions enteres de les equacions

(a) $111x + 81y + 45z = 15$,

(b) $21x + 49y + 105z = 147$,

(c) $6x + 10y + 9z = 3$,

(d) $165x + 60y + 105z + 30t = 225$.

Solucio 11

(a) Tenim que $\mathrm{mcd}(111, 81) = \mathrm{mcd}(81, 30) = \mathrm{mcd}(30, 21) = \mathrm{mcd}(21, 9) = \mathrm{mcd}(9, 3) = \mathrm{mcd}(3, 0) = 3$, per tant solcionarem $3t + 45z = 15$, i per $t = 1$ i $z = 0$, tenim que $3t + 45z = 3$ i per tal que complir la equacio tenim que $t = 5 + k_1 15$ i $z = -k_1$ i tenim que $111x + 81y = 3t$, desfent l'algorisme d'Euclides tenim que $3 = 21 - 9 \cdot 2 = 21 - (30 - 21) \cdot 2 = 21 \cdot 3 - 30 \cdot 2 = (81 - 30 \cdot 2) \cdot 3 - 30 \cdot 2 = 81 \cdot 3 - 30 \cdot 8 = 81 \cdot 3 - (111 - 81) \cdot 8 = 81 \cdot 11 - 111 \cdot 8$. i per tant

$$x = -8t + 27k_2 = -40 - 120k_1 + 27k_2 \text{ i } y = 11t - 37k_2 = 55 + 165k_1 - 37k_2 \text{ i } z = -k_1$$

.

(b) Tenim que tenim que $\mathrm{mcd}(49, 21) = \mathrm{mcd}(21, 7) = 7$, per tant solucionarem la seguent equacio $7t + 105z = 147$, i tenim que $7 \cdot (1) + 105 \cdot (0) = 7$, i per tant $t = 21 + 15k_1$ i $z = -k_1$, i tenim que $21x' + 49y' = 7$ facilment podem veure que per $x' = -2$ i $y' = 1$ es compleix la igualtat $x = -2t + 7k_2$ i $y = t - 3k_2 \implies$

$$x = -2t + 7k_2 = -42 - 30k_1 + 7k_2 \text{ i } y = t - 3k_2 = 21 + 15k_1 - 3k_2 \text{ i } z = -k_1$$

(c) Tenim que una solucio seria $x = -1$ i $y = 0$ i $z = 1$ calcular la resta seria de forma analoga als dos apartats anteriors.

(d) Tenim que $\mathrm{mcd}(165, 60, 30)$ tenim que el conjunt dels divisors de 30 es $\{30, 15, 10, 5, 3, 2, 1\}$ i el maxim que divideix tots els els nombres es 15 i per tant $\mathrm{mcd}(165, 60, 105) = 15$. tenim que $15w_1 + 30t = 225$ i tenim que $15 \cdot 1 + 30 \cdot 0 = 15$, $w_1 = 15 + 2k_1$ i $t = -k_1$ i $\mathrm{mcd}(165, 60) = 15$ i $15w_2 + 105z = 15$ i $w_2 = w_1 + 7k_2$ i $z = -k_2$ i $165x + 60y = 15w_2$ i $x = -w_2 + 4k_3$ i $y = 3w_2 - 11k_3$ i per tant

$$x = -15 - 2k_1 - 7k_2 + 4k_3, y = 45 + 6k_1 + 21k_2 - 11k_3, z = -k_2, t = -k_1$$