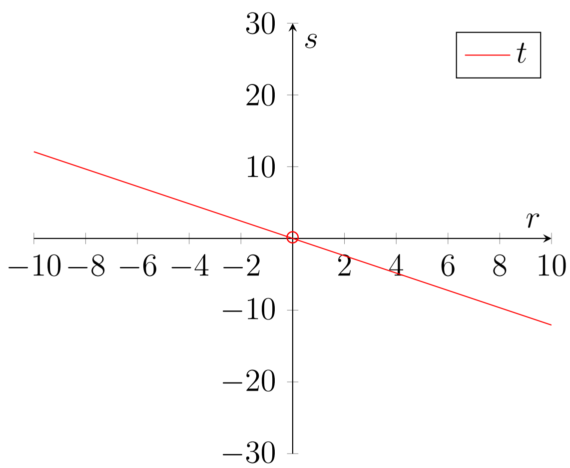
Exercici 1.4.

- *Trobeu el màxim comú divisor $d > 0$ de la parella de nombres enters $a = 2795$ i $b = 2314$.*
- *Trobeu nombres enters r, s tals que $d = ra + sb$.*
- *Feu el mateix per a la parella $a = 2842$, $b = 3567$.*

Resolució. Apliquem un procediment totalment anàleg a l'exercici anterior:

$$\begin{array}{r|l} 2795 & 2314 \\ \hline -2314 & 1 \\ 481 & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|l} 2314 & 481 \\ \hline -1924 & 4 \\ 390 & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|l} 481 & 390 \\ \hline -390 & 1 \\ 91 & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|l} 390 & 91 \\ \hline -360 & 4 \\ 26 & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|l} 91 & 26 \\ \hline -78 & 3 \\ 13 & \end{array}$$
$$\Longrightarrow \begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ \hline -26 & 2 \\ 0 & \end{array} \Longrightarrow d = \operatorname{mcd}(2795, 2314) = 13 > 0. \quad (1.4.1)$$

Resolem l'apartat (b). Tenim que $2795r + 2314s = 13$, és a dir, una equació lineal de dues incògnites. La seva solució, doncs, és una recta t de $\mathbb{R}^2$ i volem trobar $(x, y) \in t \mid (x, y) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus (0, 0))$. Aïllant s, tenim:



Amb la identitat de Bezout podem, doncs, trobar aquests $x, y \in \mathbb{Z}$. Recordem que és el que se'ns demana a l'enunciat:

Proposició 1.4.1 (Identitat de Bezout)**.** *Si $d = (a, b)$, llavors $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \mid d = ax_0 + by_0$. d és combinació lineal entera d'a, b.*

$$13 = 91 - 26 \cdot 3 \xrightarrow{26=390-91\cdot 4} -390 \cdot 3 + 91 \cdot 13 \xrightarrow[390=2314-481\cdot 4]{91=481-390} -2314 \cdot 16 + 481 \cdot 77 \xrightarrow{481=2795-2314}$$
$$2795 \cdot \mathbf{77} + 2314 \cdot \mathbf{-93} \Longrightarrow r = 77,\ s = -93. \quad (1.4.2)$$

Resolem (c) directament. Calculem $\operatorname{mcd}(2842, 3567)$ amb l'algorisme d'Euclides. Com a resultat, tenim $\operatorname{mcd}(2842, 3567) = 29$.

$$29 = 667 - 58 \cdot 11 \xrightarrow{58=725-667} -725 \cdot 11 + 667 \cdot 12 \xrightarrow{667=2842-723\cdot 3} -725 \cdot 46 + 2842 \cdot 12 \xrightarrow{725=3567-2842}$$
$$3567 \cdot (-47) + 2842 \cdot 59 \Longrightarrow r = -47,\ s = 59. \quad (1.4.3)$$

$\blacksquare$