Solucions segona prova parcial

1 Consideramos el vocabulario $\sigma = \{P^1, Q^2, f^1\}$ y la interpretación con dominio $\{1,2,3,4\}$ definida por:

$$I(P) = \{1,2\} \text{ y } I(Q) = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,1)\}$$
$$I(f(1)) = 2, I(f(2)) = 3, I(f(3)) = 4, I(f(4)) = 1$$

Determinar si las siguientes fórmulas son ciertas o falsas en I.

(a) $\exists x(Px \to \exists yQyx)$

(b) $\forall x\forall y(Qxy \to Px)$

(c) $\forall x\exists y(Qxy \vee \neg Px)$

(d) $\forall x\forall y(Qxy \to Qf(x)y)$

(e) $\forall x(Pf(x) \to Qxf(x))$

(a) $\exists x(Px \to \exists yQyx)$ és cert, ja que per a $x = 1$ i $y = 4$, $\overline{P1} = V$ i $\overline{Q41} = V$. Per tant,

$$\overline{P1} \to \overline{Q41} = V \to V = V$$

(b) $\forall x\forall y(Qxy \to Px)$ és fals, ja que per a $x = 3$ i $y = 2$, $\overline{Q32} = V$ però $\overline{P3} = F$. Per tant,

$$\overline{Q32} \to \overline{P3} = V \to F = F$$

(c) $\forall x\exists y(Qxy \vee \neg Px)$ és cert. Ho comprovem per a totes les x:

- $x = 1$: per a $y = 2$, $\overline{Q12} \vee \neg\overline{P1} = V \vee F = V$.
- $x = 2$: per a $y = 2$, $\overline{Q22} \vee \neg\overline{P2} = V \vee F = V$.
- $x = 3$: per a $y = 2$, $\overline{Q32} \vee \neg\overline{P3} = V \vee V = V$.
- $x = 4$: per a $y = 1$, $\overline{Q41} \vee \neg\overline{P4} = V \vee V = V$.

(d) $\forall x\forall y(Qxy \to Qf(x)y)$ és fals ja que per a $x = 3$ i $y = 2$, $\overline{Q32} = V$ però $\overline{Qf(3)2} = \overline{Q42} = F$. Per tant,

$$\overline{Q32} \to \overline{Qf(3)2} = V \to F = F$$

(e) $\forall x(Pf(x) \to Qxf(x))$ és cert. Ho comprovem per a totes les x:

- $x = 1$: $\overline{Pf(1)} = \overline{P2} = V$ i $\overline{Q1f(1)} = \overline{Q12} = V$. Per tant, $V \to V = V$.
- $x = 2$: $\overline{Pf(2)} = \overline{P3} = F$ i $\overline{Q2f(3)} = \overline{Q23} = F$. Per tant, $F \to F = V$.
- $x = 3$: $\overline{Pf(3)} = \overline{P4} = F$ i $\overline{Q3f(3)} = \overline{Q34} = V$. Per tant, $F \to F = V$.
- $x = 4$: $\overline{Pf(4)} = \overline{P1} = V$ i $\overline{Q4f(4)} = \overline{Q41} = V$. Per tant, $V \to V = V$.

2 Consideramos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x(Px \to Qx)\\ \varphi_2 &= \forall x(\exists y(Ry \wedge Syx) \to \neg Qx)\\ \varphi_3 &= Ra\\ \varphi &= \neg\exists x(Px \wedge Sax)\end{aligned}$$

(a) Calcular formas clausales de φ_1, φ_2 y φ_3.

(b) Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica de φ_1, φ_2, y φ_3.

(a) Primer desenvolupem utilitzant equivalències.

$$\begin{aligned}\forall x(Px \to Qx) &\equiv \forall x(\neg Px \vee Qx)\\ \forall x(\exists y(Ry \wedge Syx) \to \neg Qx) &\equiv \forall x(\neg\exists y(Ry \wedge Syx) \vee \neg Qx)\\ &\equiv \forall x(\forall y(\neg Ry \vee \neg Syx) \vee \neg Qx)\\ &\equiv \forall x\forall y(\neg Ry \vee \neg Syx \vee \neg Qx)\end{aligned}$$

Les formes clausals són:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{cl} &= \forall x(\neg Px \vee Qx)\\ \varphi_2^{cl} &= \forall x\forall y(\neg Ry \vee \neg Syx \vee \neg Qx)\\ \varphi_3^{cl} &= Ra\end{aligned}$$

(b) Per demostrar per resolució que la fórmula φ és conseqüència lògica de φ_1, φ_2 i φ_3 necessitem escriure en forma clausal també la fórmula $\neg\varphi$. Tenim que $\neg\varphi \equiv \exists x(Px \wedge Sax)$. Per tant, una forma clausal de $\neg\varphi$ és $Pb \wedge Sab$. Aquesta fórmula consta de dues clàusules, per tant constarà com a dues entrades diferents en l'algoritme de resolució.

Ara escrivim les entrades per l'algoritme de resolució agafant només els nuclis de les formes clausals de φ_1, φ_2, φ_3 i $\neg\varphi$, canviant el nom de les variables si és necessari.

1. $\neg Px \vee Qx$
2. $\neg Ry \vee \neg Syz \vee \neg Qz$
3. Ra
4. Pb
5. Sab

Els àtoms Qx i $\neg Qz$ són unificables per $\{x = z\}$. Resolent 1 i 2 obtenim

6. $\neg Pz \vee \neg Ry \vee \neg Syz$

Ara, els àtoms $\neg Ry$ i Ra són unificables per $\{y = a\}$. Resolent 3 i 6 obtenim

7. $\neg Pz \vee \neg Saz$

Finalment, els àtoms $\neg Pz$ i Pb són unificables per $\{z = b\}$. Resolent 4 i 7 obtenim

8. $\neg Sab$

I ja podem deduïr la clàusula buida resolent 4 i 8

9. $\square$

Així doncs, hem demostrat que la fórmula φ és conseqüència lògica de φ_1, φ_2 i φ_3.