Heu d'entregar cada exercici per separat a la tasca corresponent del campus virtual. La data límit per l'entrega és dimarts dia 3 de novembre a les 13 hores. En resoldre els exercicis, expliqueu bé els càlculs que feu i justifiqueu correctament els vostres raonaments.

Exercici 1. Sigui $\mathcal{M}_{2\times 2}$ l'espai vectorial de les matrius de 2 files i 2 columnes amb coeficients reals i T el subconjunt de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ definit per

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \ : \ a+d=0 \right\}.$$

1) Proveu que T és subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

2) Doneu una base de T i completeu-la a base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Solució.

1) Per provar que T és subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, hem de comprovar que compleix les tres propietats de la definició de subespai.

   1) La matriu

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   pertany a T, ja que la suma dels seus elements de la diagonal és 0, per tant $T \neq \emptyset$.

   2) Si les matrius

   $$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

   són de T, es compleix $a+d=0$ i $a'+d'=0$. Ara, tenim

   $$M+M' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

   i $(a+a')+(d+d') = (a+d)+(a'+d') = 0+0 = 0$. Per tant $M+M' \in T$.

   3) Si la matriu

   $$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   pertany a T, es compleix $a+d=0$. Si $x \in \mathbb{R}$, tenim

   $$xM = \begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix}$$

   i $xa+xd = x(a+d) = x0 = 0$. Per tant $xM \in T$.

   Hem provat doncs que T és subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

2) Si M és qualsevol matriu de T, tenim

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per tant, les matrius $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ generen T. Ara

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0.$$

Per tant A_1, A_2, A_3 són linealment independents. Tenim doncs que formen base de T. Si considerem la base (E_1, E_2, E_3, E_4) de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, on

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenim que A_1 té coordenades $(1, 0, 0, -1)$ en aquesta base. Per lema de Steinitz, tenim que (A_1, E_2, E_3, E_4) és base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Com $E_2 = A_2$ i $E_3 = A_3$, tenim que (A_1, A_2, A_3, E_4) és una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ que completa la base de T.

Exercici 2. Proveu que $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1)$ és una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Doneu les coordenades del vector $(1, 1, 1, 1)$ en aquesta base.

Solució. Per demostrar que tres vectors son base hem de demostrar que son linealment independents i que generen l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$.

Comencem per la primera condició. Tres vectors son lineament independents si no existeix cap dependencia lineal entre ells. Ho comprovem intentant reduir pel mètode de Gauss la matriu formada pels quatre vectors.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Al trobar una matriu triangular inferior, sense cap fila de zeros, podem afirmar que no existeix cap dependencia lineal entre els vectors. Per demostrar que els vectors generen $\mathbb{R}^4$ hauriem de poder escriure qualsevol vector com a combinació lineal dels vectors de la base. Podriem resoldre, doncs, el sistema d'equacions resultant de descomposar la equació vectorial seguent:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = \vec{v} \tag{1}$$

On v_i son els vectors de la base i $\vec{v}$ un vector qualsevol de $\mathbb{R}^4$.

No obstant, pel teorema de Steiniz, sabem que si n vectors són base, els podem substituir per un conjunt de n vectors linealment independent. Per tant, donat que tota base de $\mathbb{R}^4$ conté 4 vectors, tot conjunt de 4 vectors linealment independents generen $\mathbb{R}^4$ i formen base.

Passem ara a expresar el vector $(1,1,1,1)$ en la nova base. Per a fer-ho busquem la combinació lineal dels vectors de la base, generant el sistema a partir de la següent equació:

$$(1,1,1,1) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) + \gamma(0,0,1,1) + \delta(1,0,0,-1) \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha+\delta & = & 1 \\ \alpha+\beta & = & 1 \\ \beta+\gamma & = & 1 \\ \gamma-\delta & = & 1 \end{array}\right\}$$

On reduint el primer i el segon parell d'equacions, facilment trobem que $\beta = \delta$ i $\beta = -\delta$ amb el que $\beta = \delta = 0$. Substituint doncs a la primera i tercera equacions tenim que $\alpha = \gamma = 1$.

Així, el vector $(1,1,1,1)$ en la nova base té coordenades $(1,0,1,0)$.

Exercici 3. Proveu l'afirmació següent o doneu-ne un contraexemple: " Sigui E un espai vectorial i siguin u_1, u_2, u_3 vectors de E tals que

(i) $u_1 \neq \vec{0}$,

(ii) $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$,

(iii) $u_3 \notin \langle u_1, u_2 \rangle$.

Aleshores, u_1, u_2, u_3 són linealment independents."

Solució. L'afirmació és certa. Suposem que u_1, u_2, u_3 són vectors de l'espai vectorial E que compleixen (i),(ii) i (iii). Vegem que u_1, u_2, u_3 són linealment independents. Hem de veure que, si $a_1, a_2, a_3 \in R$ i

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = \vec{0} \tag{3}$$

aleshores $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$. Suposem $a_3 \neq 0$. Alehores, de (3), obtenim $u_3 = -(a_1/a_3)u_1 - (a_2/a_3)u_2$, que contradiu (iii). Tenim doncs necessàriament $a_3 = 0$. Aleshores (3) implica

$$a_1u_1 + a_2u_2 = \vec{0}. \tag{4}$$

Suposem $a_2 \neq 0$. Aleshores, de (4), obtenim $u_2 = -(a_1/a_2)u_1$ que contradiu (ii). Tenim doncs $a_2 = 0$. Aleshores (4) implica $a_1u_1 = \vec{0}$, que, com $u_1 \neq \vec{0}$, implica $a_1 = 0$. Hem provat doncs que u_1, u_2, u_3 són linealment independents.

Segon mètode.

Podem aplicar la proposició següent: " Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ és un conjunt de vectors linealment independents i $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}\}$ és un conjunt de vectors linealment dependents, aleshores u_{r+1} és combinació lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_r$ ". El contrarecíproc d'aquesta proposició és: " Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ és un conjunt de vectors linealment independents i u_{r+1} no és combinació lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_r$, aleshores $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}\}$ és un conjunt de vectors linealment independents."

Aplicant aquest segon enunciat, tenim

1. $u_1 \neq \vec{0} \Rightarrow$ el conjunt $\{u_1\}$ és de vectors linealment independents,
2. $\{u_1\}$ independent i $u_2 \notin \langle u_1 \rangle \Rightarrow$ el conjunt $\{u_1, u_2\}$ és de vectors linealment independents,
3. $\{u_1, u_2\}$ independent i $u_3 \notin \langle u_1, u_2 \rangle \Rightarrow$ el conjunt $\{u_1, u_2, u_3\}$ és de vectors linealment independents.