Pràctica 4

Simulacions de variables aleatòries absolutament contínues conegudes

4.1 Simulacions de variables absolutament contínues conegudes

Com ja hem vist, si volem generar llistes de nombres aleatoris amb distribucions absolutament contínues conegudes, igual que en el cas discret, només cal afegir el prefix r al nom que `R` dóna a la distribució (taula 4.1).

Taula 4.1: Noms en R de distribucions de probabilitat absolutament contínues

Distribució	Sufix del nom	Paràmetres addicionals
beta	`beta`	`shape1, shape2, ncp`
Cauchy	`cauchy`	`location, scale`
Khi quadrat	`chisq`	`df, ncp`
exponencial	`exp`	`rate`
F	`f`	`df1, df1, ncp`
gamma	`gamma`	`shape, scale`
log-normal	`lnorm`	`meanlog, sdlog`
logística	`logis`	`location, scale`
normal	`norm`	`mean, sd`
t de Student	`t`	`df, ncp`
uniforme	`unif`	`min, max`
Weibull	`weibull`	`shape, scale`

Per exemple, si volem simular una mostra de mida 1000 d'una Normal de mitjana 40 i desviació típica 3, utilitzem:

```
x<-rnorm(1000,40,3)
```

Podeu ara comprovar si la mitjana i la desviació corregida s'aproximen a la teòrica.

4.2 Distribucions de probabilitat

Com dibuixem una densitat?

- Si la distribució és coneguda només cal utilitzar el prefix d. Suposem per exemple que volem dibuixar la densitat d'una Normal de mitjana 40 i desviació típica 3:

```
x<-seq(20,60,by=0.05)
y<-dnorm(x,40,3)
plot(x,y, type="l")
```

- Si no és una llei coneguda hem de conèixer la seva densitat. Recordeu que la densitat és la derivada de la funció de distribució. Suposem que volem dibuixar la densitat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}(x+1)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Com que $f(x) = 0$ si $x < 0$ o si $x > 1$, la successió de punts només cal agafar-la entre 0 i 1:

```
x<-seq(0,1,by=0.005)
y<-(3/7)*(x+1)^2
plot(x,y, type="l")
```

Com dibuixem una Funció de distribució?

- Si la distribució és coneguda només cal utilitzar el prefix p. Per exemple, si volem dibuixar la distribució d'una Normal de mitjana 40 i desviació típica 3, les instruccions que hem de seguir són:

```
x<-seq(20,60,by=0.05)
y<-pnorm(x,40,3)
plot(x,y, type="l")
```

- Si no és una llei coneguda hem de conèixer la seva funció de distribució. Recordeu que funció de distribució és la integral de la funció de densitat. Suposem que volem dibuixar la funció de distribució de la llei que té per densitat (4.1). Integrant tenim:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{7}(x+1)^3 - \frac{1}{7} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Per dibuixar la funció de distribució utilitzem:

```
x<-seq(0,1,by=0.05)
y<-(1/7)*(x+1)^3-1/7
plot(x,y, type="l")
```

Com calculem probabilitats?

- Si la distribució és coneguda només cal utilitzar el prefix p. Si X és una Normal de mitjana 40 i desviació típica 3:

$P(X \leq 45)$ es calcula mitjançant `pnorm(45,40,3)`

$P(X = 40)$ aquesta probabilitat sempre és zero ja que X és contínua.

$P(X \geq 35) = 1 - P(X < 35)$ es calcula mitjançant `1-pnorm(35,40,3)`

Si volem trobar y tal que $P(X \leq y) = 0.8$, fem `qnorm(0.8,40,3)`

- Si la distribució no és coneguda, utilitzem la funció de distribució: $F(x) = P(X \leq x)$. Per exemple, si la funció de distribució és (4.2):

  $P(X \leq 0.3)$ es calcula mitjançant `(1/7)*(0.3+1)^3 -1/7`

  $P(X = 0.5)$ aquesta probabilitat és zero

  $P(X \geq 0.8) = 1 - P(X < 0.8)$ es calcula mitjançant `1-(1/7)*(0.8+1)^3+1/7`

4.3 Problemes

1. Dibuixeu la funció de densitat de probabilitat i la funció de distribució de probabilitat d'una llei $U(a, b)$,

   1) Amb $a = 0$ i $b = 1$; 2) Amb $a = -2$ i $b = 2$.

   I per a una variable aleatòria $X \sim U(0, 1)$ calculeu les probabilitats següents:

   a) $P(X = 0.5)$, b) $P(X \leq 0.7)$, c) $P(X < 0.7)$,
   d) $P(X \geq 0.2)$, e) $P(X \leq 0)$, f) $P(X \leq 1)$.

2. Donada una llei de probabilitat definida a l'interval $[0, 1]$, amb funció de distribució de probabilitat

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0, \\ x^\alpha, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

   Dibuixeu aquesta funció, per $\alpha = 0.5$ i $\alpha = 1.5$.

   En aquests dos mateixos casos, calculeu i dibuixeu la funció de densitat de probabilitat i calculeu les probabilitats següents:

   a) $P(X = 0.5)$, b) $P(X \leq 0.7)$, c) $P(X < 0.7)$,
   d) $P(X \geq 0.2)$, e) $P(X \leq 0)$, f) $P(X \leq 1)$.

3. Dibuixeu la funció de densitat de probabilitat i la funció de distribució de probabilitat d'una llei $exp(\lambda)$ amb diferents valors del paràmetre, per exemple, $\lambda = 1$, $\lambda = 4$, $\lambda = 6$, $\lambda = 10$, $\lambda = 20$.

   I per a una variable aleatòria X amb llei $exp(3)$ calculeu:

   a) $P(X = 5)$, b) $P(X \leq 3)$, c) $P(X < 3)$, d) $P(X \geq 6)$.

4. Sigui X una variable aleatòria amb llei $N(\mu, \sigma^2)$, on $\mu = 3$, $\sigma^2 = 1.5$. Calculeu les probabilitats següents:

   a) $P(X = 5)$, b) $P(X \leq 3)$, c) $P(X \leq 2)$,
   d) $P(X \geq 4)$, e) $P(2.5 < X < 3.5)$, f) $P(X \geq 6)$.

5. Els coeficients d'intel·ligència d'un grup d'adults entre 20 i 34 anys tenen una distribució aproximadament normal de mitjana $\mu = 110$ i desviació típica $\sigma = 25$.

   a) Quin percentatge de persones entre 20 i 34 anys té coeficient més gran que 100?
   b) Quin percentatge de persones entre 20 i 34 anys té coeficient més petit que 150?
   c) Quin coeficient mínim tenen els adults entre 20 i 34 anys situats en el 25% que han obtingut millors resultats?

6. El temps de funcionament d'una bombeta segueix una distribució exponencial de mitjana 2000 hores. Quina probabilitat hi ha que després de 3000 hores segueixi funcionant? Quina és la probabilitat que s'espatlli abans de 2000 hores?

7. La vida mitjana d'un cert tipus de motor petit és de 10 anys, amb una desviació típica de 2 anys. El fabricant canvia de forma gratuïta tots els motors que es descomponguin, sempre que estiguin dins el període de garantia. Si suposem que el temps de vida d'aquest tipus de motor es distribueix segons una llei normal i que el fabricant només pensa canviar el 3% dels motors que fallin, quin temps de garantia haurà d'estipular?

8. Un repartidor ha de lliurar un paquet a les 10h del matí. A causa del trànsit, el temps que tarda en recorre el trajecte oscil·la entre 35 i 45 minuts. Suposem que el temps del recorregut segueix una llei uniforme. A quina hora ha d'iniciar el recorregut per a que arribi puntual (a les 10h o abans) amb probabilitat 0.8?

9. El temps de reparació d'una màquina segueix una distribució $gamma(5, 2)$. El cost de la reparació és de 500 euros l'hora més el desplaçament de 300 euros. Quina és la probabilitat de que el cost de la reparació no superi els 2000 euros?

10. Una empresa utilitza una màquina per omplir les ampolles d'un refresc. Es suposa que les ampolles contenen 300 ml. En realitat, el contingut de les ampolles varia segons una distribució normal de mitjana $\mu = 298$ ml i desviació típica $\sigma = 3$ ml.

    a) Quina és la probabilitat que una ampolla contingui menys de 295 ml?

    b) Quina és la probabilitat que la mitjana dels continguts d'un paquet de 6 ampolles sigui menor que 295 ml?