Exercici 11 d.

Calculeu totes les solucions enteres de la equació:

$$165x + 60y + 105z + 30t = 225$$

Solució 11 d.

Calculem inicialment el $mcd(165, 60, 105, 30)$. Primer, calcularem el $mcd(165, 60) = d$ amb l'algorisme d'Euclides, després el $mcd(d, 105) = f$ i el $mcd(f, 30)$, que serà el màxim comú divisor de tots quatre nombres:

$$165 = 60 \times 2 + 45$$

$$60 = 45 \times 1 + 15$$

$$45 = 15 \times 3 + 0$$

$mcd(165, 60) = 15$

$$105 = 15 \times 7 + 0$$

$mcd(165, 60, 105) = 15$

$$30 = 15 \times 2 + 0$$

$mcd(165, 60, 105, 30) = 15$

Com $mcd(165, 60, 105) = 15$, podem suposar $165x + 60y + 105z = 15w_1$. Resolem doncs primer $15w_1 + 30t = 225$, que té com a una clara solució $w_1 = 15$ i $t = 0$ (si no fos tant clar de veure, es podrien calcular primer els coeficients de Bézout entre 15 i 30). Així doncs, el conjunt de solucions de w_1 i t són:

$$w_1 = w_{10} + \frac{b}{d} \times k_1 = 15 + 2 \times k_1$$

$$t = t_0 - \frac{a}{d} \times k_1 = 0 - 1 \times k_1$$

Com $mcd(165, 60) = 15$, podem suposar $165x + 60y = 15w_2$. Resolem doncs ara $15w_2 + 105z = 15w_1$, que té com a una clara solució $w_2 = w_1$ i $z = 0$. Així doncs, el conjunt de solucions de w_2 i z són:

$$w_2 = w_{20} + \frac{b}{d} \times k_2 = w_1 + 7 \times k_2$$

$$z = z_0 - \frac{a}{d} \times k_2 = 0 - 1 \times k_2$$

Ens falta resoldre $165x + 60y = 15w_2$, i veiem que una possible solució seria $x = -w_2$ i $y = 3 \times w_2$. Així doncs, el conjunt de solucions de x i y són:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \times k_3 = -w_2 + 4 \times k_3$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d} \times k_3 = 3 \times w_2 - 11 \times k_3$$

Substituïnt w_2 i després w_1 trobarem les solucions de x i y:

$$x = -w_2 + 4 \times k_3 = -(w_1 + 7 \times k_2) + 4 \times k_3 = -((15 + 2 \times k_1) + 7 \times k_2) + 4 \times k_3$$

$$y = 3 \times w_2 - 11 \times k_3 = 3 \times (w_1 + 7 \times k_2) - 11 \times k_3 = 3 \times ((15 + 2 \times k_1) + 7 \times k_2) - 11 \times k_3$$

En resum:

$x = -15 - 2 \times k_1 - 7 \times k_2 + 4 \times k_3$
$y = 45 + 6 \times k_1 + 21 \times k_2 - 11 \times k_3$
$z = -k_2$
$t = -k_1$

on $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$