LÒGICA I LLENGUATGES

SOLUCIONS DE PROBLEMES

SETMANA DEL 1 DE MAIG

Exercici 1. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{1\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, 0, \lambda), (q_0, 1))$,

2.$((q_0, 0, \lambda), (q_0, 11))$,

3.$((q_0, \lambda, \lambda), (f, \lambda))$,

4.$((f, 1, 1), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que $\lambda, 011, 00111, 00011111 \in L(M)$.

(b) Demostrar que $0111 \notin L(M)$.

(c) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Solució : (a) Tenim que $\lambda \in L(M)$ per la transició 3.

El següent còmput reconeix 011:
vspace6mm

estat	cinta	pila	transició
q_0	011	λ	–
q_0	11	11	2
f	11	11	3
f	1	1	4
f	λ	λ	4

El següent còmput reconeix 00111.

estat	cinta	pila	transició
q_0	00111	λ	–
q_0	0111	11	2
q_0	111	111	1
f	111	111	3
f	11	11	4
f	1	1	4
f	λ	λ	4

El següent còmput reconeix 00011111.

estat	cinta	pila	transició
q_0	00011111	λ	–
q_0	0011111	11	2
q_0	011111	1111	2
q_0	11111	11111	1
f	11111	11111	3
f	1111	1111	4
f	111	111	4
f	11	11	4
f	1	1	4
f	λ	λ	4

(b) Tenim els següents còmputs per a 0111:

estat	cinta	pila	transició
q_0	0111	λ	–
q_0	111	1	1
f	111	1	3
f	11	λ	4

estat	cinta	pila	transició
q_0	0111	λ	–
q_0	111	11	2
f	111	11	3
f	11	1	4
f	1	λ	4

Com tenim que en cap dels dos còmputs es llegeix tota la paraula d'entrada, 0111 no és reconeguda per M.

(c) $L(M) = \{0^n 1^m : n \leq m \leq 2n\}$.

<u>Exercici 2</u>. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{c\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, a, \lambda), (q_0, c))$,
2.$((q_0, b, \lambda), (q_0, c))$,
3.$((q_0, a, \lambda), (f, \lambda))$,
4.$((f, a, c), (f, \lambda))$,
5.$((f, b, c), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que $baa, bab, baaaa \in L(M)$.

(b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Solució: (a) El següent còmput reconeix baa.

estat	cinta	pila	transició
q_0	baa	λ	–
q_0	aa	c	2
f	a	c	3
f	λ	λ	4

El següent còmput reconeix bab.

estat	cinta	pila	transició
q_0	bab	λ	–
q_0	ab	c	2
f	b	c	3
f	λ	λ	5

I el següent còmput reconeix baaaa.

estat	cinta	pila	transició
q_0	baaaa	λ	–
q_0	aaaa	c	2
q_0	aaa	cc	1
f	aa	cc	3
f	a	c	4
f	λ	λ	4

(b) $L(M) = \{xay : x, y \in \{a, b\}^* \text{ tals que } |x| = |y|\}$.

Exercici 3. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, \lambda, \lambda), (q_1, c))$,

2.$((q_1, a, c), (q_1, ac))$.

3.$((q_1, a, a), (q_1, aa))$.

4.$((q_1, a, b), (q_1, \lambda))$.

5.$((q_1, b, c), (q_1, bc))$.

6.$((q_1, b, b), (q_1, bb))$.

7.$((q_1, b, a), (q_1, \lambda))$.

8.$((q_1, \lambda, c), (q_2, \lambda))$.

Llavors es demana:

(a) Demostrar que $\lambda, aabb, abbbabaa \in L(M)$.

(b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Solució: (a) El següent còmput reconeix λ.

estat	cinta	pila	transició
q_0	λ	λ	–
q_1	λ	c	1
q_2	λ	λ	8

El següent còmput reconeix aabb.

estat	cinta	pila	transició
q_0	aabb	λ	–
q_1	aabb	c	1
q_1	abb	ac	2
q_1	bb	aac	2
q_1	b	ac	7
q_1	λ	c	7
q_2	λ	λ	8

I el següent còmput reconeix abbbabaa.

estat	cinta	pila	transició
q_0	abbbabaa	λ	–
q_1	abbbabaa	c	1
q_1	bbbabaa	ac	2
q_1	bbabaa	c	7
q_1	babaa	bc	5
q_1	abaa	bbc	6
q_1	baa	bc	4
q_1	aa	bbc	6
q_1	a	bc	4
q_1	λ	c	4
q_2	λ	λ	8

Observem que el símbol c es un símbol especial que s'utilitza per a marcar la base de la pila.

(b) $L(M) = \{x \in \{a,b\}^* : n_a(x) = n_b(x)\}$.

Exercici 4. Definir un autòmat amb pila M tal que $L(M) = \{a^i b^j c^k : i = j \vee i = k\}$.

Solució: Definim l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2, q_4\}$ y Δ consta de les següents transicions:

1. $((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$.
2. $((q_0, \lambda, \lambda), (q_1, \lambda))$.
3. $((q_1, b, a), (q_1, \lambda))$.
4. $((q_1, \lambda, \lambda), (q_2, \lambda))$.

5. $((q_2, c, \lambda), (q_2, \lambda))$.
6. $((q_0, \lambda, \lambda), (q_3, \lambda))$.
7. $((q_3, b, \lambda), (q_3, \lambda))$.
8. $((q_3, \lambda, \lambda), (q_4, \lambda))$.
9. $((q_4, c, a), (q_4, \lambda))$.

Tenim que q_2 reconeix $\{a^i b^j c^k : i = j\}$, i q_4 reconeix $\{a^i b^j c^k : i = k\}$.

Exercici 5. Considerem l'autòmat amb pila determinista $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$,
2.$((q_0, b, \lambda), (q_0, b))$,
3.$((q_0, c, \lambda), (f, \lambda))$,
4.$((f, a, a), (f, \lambda))$,
5.$((f, b, b), (f, \lambda))$.

Llavors, simular M mitjançant un programa en JAVA.

Solució: Representem a q_0 per 0 i a f per 1.

```
public boolean simular (String entrada)
{ int q = 0, i = 0;
  boolean b = true;
  char c = entrada.charAt(0);
  Stack ⟨Character⟩ pila = new Stack ⟨Character⟩();
  while ((c != '$') && b)
  { switch(q)
        { case 0:
        if (c == 'a') pila.push('a');
        else if (c == 'b') pila.push('b');
        else if (c == 'c') q = 1;
        else b = false;
        break;
        case 1:
        if ((c == 'a') && pila.peek() == a) pila.pop();
        else if ((c == 'b') && pila.peek() == b) pila.pop();
        else b = false;
        break; }
        c = entrada.charAt(++i); }
  if ((q == 1) && b) return true; else return false; }
```

Exercici 6. Considerem la gramàtica incontextual $G = (V, \Sigma, P, S)$ on $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ i $P = \{S \rightarrow ABC, A \rightarrow 0A1, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow 1B, B \rightarrow 1, C \rightarrow 1C\,0, C \rightarrow \lambda\}$. Llavors, es demana:
(a) Donar derivacions per a les paraules 01110 i 0111100.
(b) Determinar el llenguatge $L(G)$.

Solució: (a) En primer lloc, enumerem les produccions de P:

1. $S \rightarrow ABC$
2. $A \rightarrow 0A1$
3. $A \rightarrow \lambda$
4. $B \rightarrow 1B$
5. $B \rightarrow 1$
6. $C \rightarrow 1C\,0$
7. $C \rightarrow \lambda$

Llavors, tenim les següents derivacions:

$S \Rightarrow^1 ABC \Rightarrow^2 0A1BC \Rightarrow^3 01BC \Rightarrow^5 011C \Rightarrow^6 0111C0 \Rightarrow^7 01110.$

$S \Rightarrow^1 ABC \Rightarrow^2 0A1BC \Rightarrow^3 01BC \Rightarrow^5 011C \Rightarrow^6 0111C0 \Rightarrow^6 01111C00 \Rightarrow^7 0111100.$

(b) Per la definició de llenguatge associat a una gramática, sabem que $L(G) = L(S)$. Llavors, per la regla 1, tenim que $L(G) = L(S) = L(A) \cdot L(B) \cdot L(C)$. Per les regles 2 i 3, tenim que $L(A) = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$. Per les regles 4 i 5, $L(B) = \{1^n : n \geq 1\}$. I per les regles 6 i 7, $L(C) = \{1^n 0^n : n \geq 0\}$. Per tant, $L(G) = \{0^n 1^m 0^k : m > n + k\}$.

Exercici 7. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:
(a) El llenguatge de les paraules de longitut senar en $\{a, b\}^*$ amb a com a símbol central.
(b) El llenguatge de les paraules de longitut parell en $\{a, b\}^*$ amb dos símbols centrals iguals.
(c) El llenguatge de les paraules de longitut senar en $\{a, b\}^*$ que tenen iguales els símbols central, primer i últim.

Solució: (a) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow aSa$
2. $S \rightarrow aSb$
3. $S \rightarrow bSa$

4. $S \to bSb$

5. $S \to a$

(b) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aSa$

2. $S \to aSb$

3. $S \to bSa$

4. $S \to bSb$

5. $S \to aa$

6. $S \to bb$

(c) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aAa$

2. $S \to bBb$

3. $A \to aAa$

4. $A \to aAb$

5. $A \to bAa$

6. $A \to bAb$

7. $A \to a$

8. $B \to aBa$

9. $B \to aBb$

10. $B \to bBa$

11. $B \to bBb$

12. $B \to b$

<u>Exercici 8</u>. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

(a) $\{a^i b^i : i \geq 2\}$.
(b) $\{a^i b^j : i \geq j\}$.
(c) $\{a^i b^j : j \leq i \leq 2j\}$.
(d) $\{a^i b^j c^k : i = k\}$.
(e) $\{a^i b^j c^k : i = j + k\}$.
(f) $\{a^i b^j c^k : j = i + k\}$.

Solució:

(a) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aaTbb$.

2. $T \to aTb$.

3. $T \to \lambda$.

(b) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aS$

2. $S \to aSb$

3. $S \to \lambda$

(c) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aSb$

2. $S \to aaSb$

3. $S \to \lambda$

(d) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aSc$

2. $S \to B$

3. $B \to bB$

4. $B \to \lambda$

(e) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aSc$

2. $S \to X$

3. $X \to aXb$

4. $X \to \lambda$

(f) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to XY$

2. $X \to aXb$

3. $X \to \lambda$

4. $Y \to bYc$

5. $Y \to \lambda$

1-8 solucions al campus.

LOGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges incontextuals

Exercici 1. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{1\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, 0, \lambda), (q_0, 1))$,

2.$((q_0, 0, \lambda), (q_0, 11))$,

3.$((q_0, \lambda, \lambda), (f, \lambda))$,

4.$((f, 1, 1), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que $\lambda, 011, 00111, 00011111 \in L(M)$.

(b) Demostrar que $0111 \notin L(M)$.

(c) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Exercici 2. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{c\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, a, \lambda), (q_0, c))$,

2.$((q_0, b, \lambda), (q_0, c))$,

3.$((q_0, a, \lambda), (f, \lambda))$,

4.$((f, a, c), (f, \lambda))$,

5.$((f, b, c), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que $baa, bab, baaaa \in L(M)$.

(b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Exercici 3. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, \lambda, \lambda), (q_1, c))$,

2.$((q_1, a, c), (q_1, ac))$.
3.$((q_1, a, a), (q_1, aa))$.
4.$((q_1, a, b), (q_1, \lambda))$.
5.$((q_1, b, c), (q_1, bc))$.
6.$((q_1, b, b), (q_1, bb))$.
7.$((q_1, b, a), (q_1, \lambda))$.
8.$((q_1, \lambda, c), (q_2, \lambda))$.

Llavors es demana:

(a) Demostrar que $\lambda, aabb, abbbabaa \in L(M)$.

(b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Exercici 4. Definir un autòmat amb pila M tal que $L(M) = \{a^i b^j c^k : i = j \vee i = k\}$.

Exercici 5. Considerem l'autòmat amb pila determinista $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$,
2.$((q_0, b, \lambda), (q_0, b))$,
3.$((q_0, c, \lambda), (f, \lambda))$,
4.$((f, a, a), (f, \lambda))$,
5.$((f, b, b), (f, \lambda))$.

Llavors, simular M mitjançant un programa en JAVA.

Exercici 6. Considerem la gramàtica incontextual $G = (V, \Sigma, P, S)$ on $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ i $P = \{S \to ABC, A \to 0A1, A \to \lambda, B \to 1B, B \to 1, C \to 1C\,0, C \to \lambda\}$. Llavors, es demana:

(a) Donar derivacions per a les paraules 01110 i 0111100.

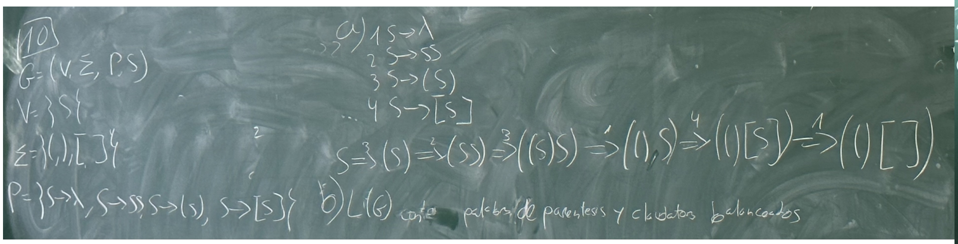
(b) Determinar el llenguatge $L(G)$.

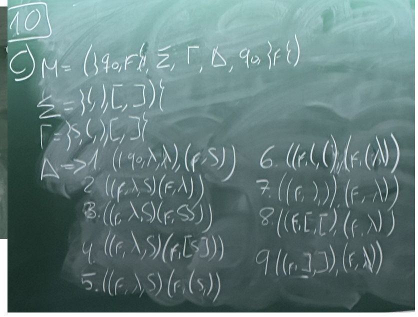
Exercici 7. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

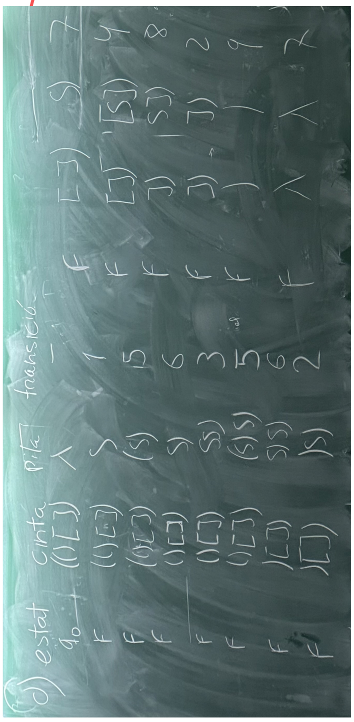
(a) El llenguatge de les paraules de longitut senar en $\{a, b\}^*$ amb a com a símbol central.

(b) El llenguatge de les paraules de longitut parell en $\{a, b\}^*$ amb dos símbols centrals iguals.

(c) El llenguatge de les paraules de longitut senar en $\{a, b\}^*$ que tenen iguales els símbols central, primer i últim.







Exercici 8. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

(a) $\{a^i b^i : i \geq 2\}$.

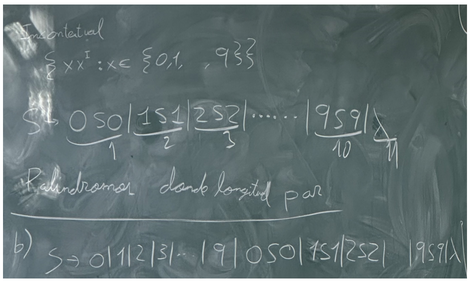
(b) $\{a^i b^j : i \geq j\}$.

(c) $\{a^i b^j : j \leq i \leq 2j\}$.

(d) $\{a^i b^j c^k : i = k\}$.

(e) $\{a^i b^j c^k : i = j + k\}$.

(f) $\{a^i b^j c^k : j = i + k\}$.



Exercici 9. (a) Definir una gramàtica incontextual que generi el llenguatge $\{xx^I : x \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*\}$.

(b) Definir una gramàtica incontextual que generi el llenguatge $\{x \in \{0, 1, \ldots, 9\}^* : x = x^I\}$.

Exercici 10. Considerem la gramàtica incontextual $G = (V, \Sigma, P, S)$ on $V = \{S\}$, $\Sigma = \{(,), [,]\}$ i $P = \{S \to \lambda, S \to SS, S \to (S), S \to [S]\}$. Llavors, es demana:

(a) Donar una derivación en la gramàtica per a la paraula (( )[ ]).

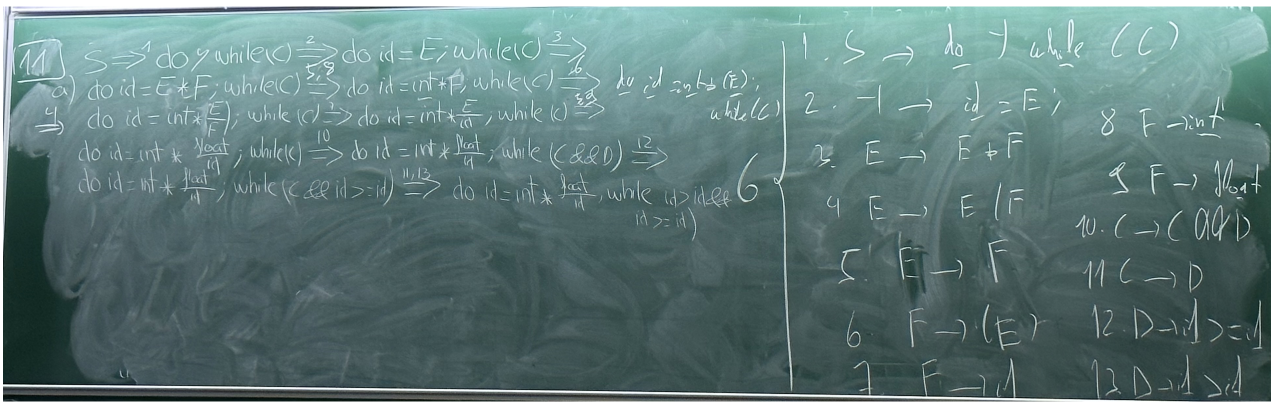
(b) Determinar el llenguatge $L(G)$.

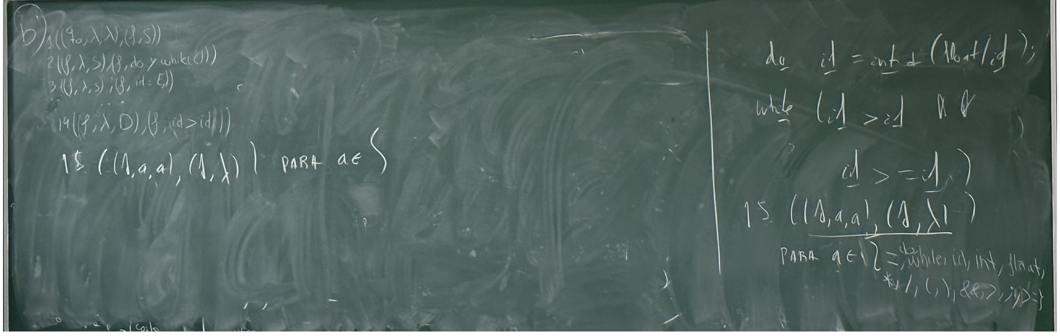
(c) Utilitzant l'algorisme vist a classe, simular la gramàtica G mitjançant un autòmat amb pila.

(d) Donar un còmput en l'autòmat de l'apartat (c) que reconegui la paraula (( )[ ]).

Exercici 11. La següent gramàtica incontextual G genera una classe d'instruccions repetitivas de JAVA.

1. $S \to \underline{do}\, Y\, \underline{while}\, (C)$
2. $Y \to \underline{id} = E;$
3. $E \to E * F$
4. $E \to E/F$
5. $E \to F$
6. $F \to (E)$
7. $F \to \underline{id}$
8. $F \to \underline{int}$
9. $F \to \underline{float}$





10. $C \to C$ && D

11. $C \to D$

12. $D \to \underline{id} >= \underline{id}$

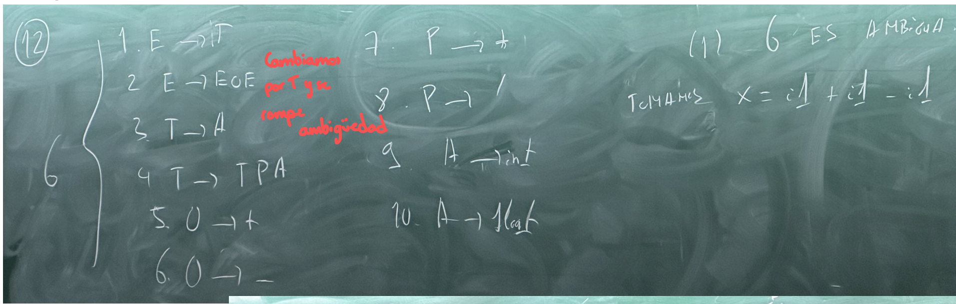
13. $D \to \underline{id} > \underline{id}$

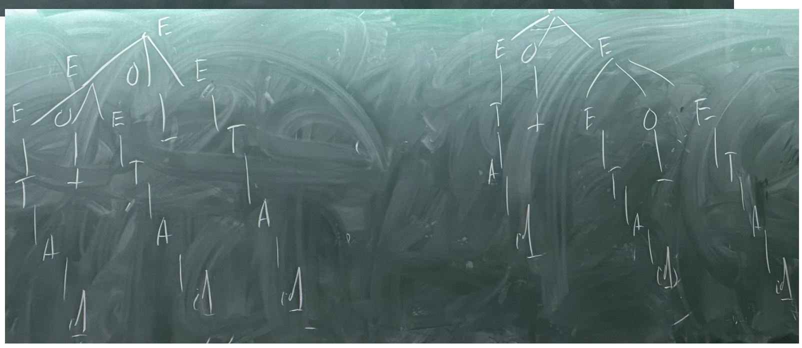
previous page

(a) Donar una derivació en G per a la paraula
$\underline{do}\ \underline{id} = \underline{int} * (\underline{float} \,/\, \underline{id})\,;\ \underline{while}\ (\underline{id} > \underline{id}$ && $\underline{id} >= \underline{id})$
(b) Utilitzant l'algorisme vist a classe, simular la gramàtica G mitjançant un autòmat amb pila.

<u>Exercici 12</u>. Considerem la següent gramàtica incontextual G per a dissenyar una calculadora de dígits decimals, on E és el símbol inicial.

1. $E \to T$
2. $E \to EOE$
3. $T \to A$
4. $T \to TPA$
5. $O \to +$
6. $O \to -$
7. $P \to *$
8. $P \to /$
9. $A \to \underline{int}$
10. $A \to \underline{float}$

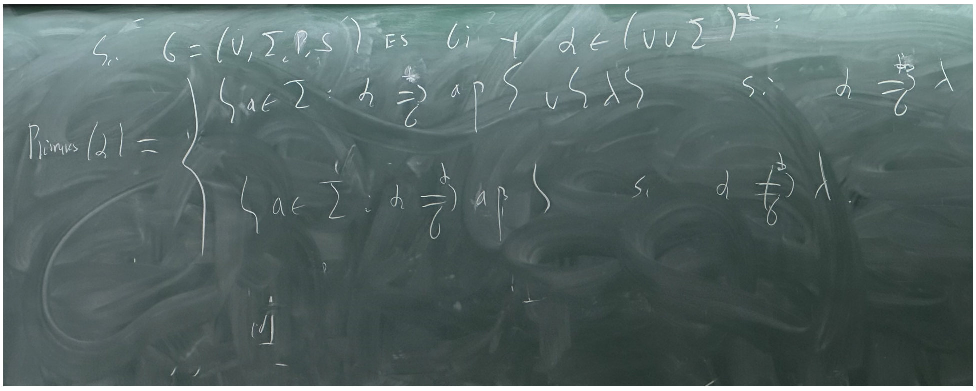


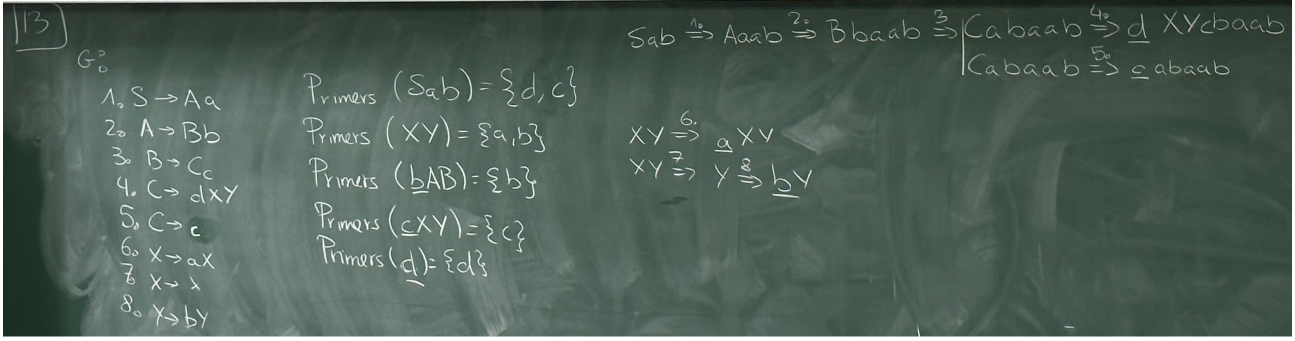


Llavors, es demana:
(a) Demostrar que G és ambigua.
(b) Donar una gramàtica equivalent a G que no sigui ambigua.

<u>Exercici 13</u>. Considerem la següent gramàtica incontextual:

1. $S \to aSA$
2. $S \to \lambda$
3. $A \to bB$
4. $B \to cbB$





5. $B \to \lambda$

Llavors, es demana:

(a) Obtenir els conjunts de Primers i Següents de les variables de la gramàtica.

(b) Determinar si la gramàtica és LL(1).

Exercici 14. Considerem la següent gramàtica per generar instruccions condicionals:

$S \to I \mid t$

$I \to \underline{if}\,(E)\,S\,R$

$R \to \underline{else}\ S \mid \lambda$

$E \to 0 \mid 1$

Llavors, es demana:

(a) Obtenir els conjunts de Primers i Següents de les variables de la gramàtica

(b) Determinar si la gramàtica és LL(1).

Exercici 15. Considerem la gramàtica incontextual de l'Exercici 9. Llavors, es demana:

(a) Explicar per què G no és LL(1).

(b) Aplicar las reglas de factorització i recursió per transformar la gramàtica G en una gramàtica LL(1).

(c) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (b).

Exercici 16. Considerem la següent gramàtica incontextual G per a generar una classe d'instruccions de JAVA.

1. $S \to \{L\}$
2. $S \to \underline{id}\ =\ E$
3. $L \to S\,;\,L$
4. $L \to S$
5. $E \to E + T$
6. $E \to E - T$
7. $E \to T$
8. $T \to \underline{id}$
9. $T \to \underline{int}$

10. $T \to \underline{float}$

Llavors es demana:

(a) Donar una derivació en G que generi la paraula

$\{\underline{id} = \underline{id} + \underline{int}\,;\, \{\underline{id} = \underline{int} - \underline{float}\,;\, \underline{id} = \underline{id}\}\}$

(b) Demostrar que G no es LL(1).

(c) Aplicar les regles de factorització i recursió a G.

(d) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (c).

Exercici 17. Considerem la següent gramàtica incontextual:

$S \to \underline{id} = C \mid \underline{if}\ (C)\ S \mid \underline{while}\ (C)\ S \mid \{L\}.$

$L \to S \mid L\ ;\ S.$

$C \to \underline{id}\ ==\ \underline{id} \mid \underline{id}\ != \ \underline{id} \mid C\ \&\&\ \underline{id}.$

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que la gramàtica no és LL(1).

(b) Obtenir una gramàtica equivalent LL(1).

(c) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (b).

Problema 1. Consideremos las siguientes gramáticas incontextuales G_1 y G_2. La gramática G_1 está definida por las siguientes producciones:

1. $S \longrightarrow 0S1S$.
2. $S \longrightarrow 1S0S$.
3. $S \longrightarrow \lambda$.

Y la gramática G_2 está definida por las producciones siguientes:

1. $S \longrightarrow 0$.
2. $S \longrightarrow S0$.
3. $S \longrightarrow 1SS$.
4. $S \longrightarrow SS1$.
5. $S \longrightarrow S1S$.

Se pide entonces:

(a) Dar una derivación en G_1 que genere la palabra 1010 y una derivación en G_2 que genere la palabra 10010.

(b) Determinar si G_1,G_2 son ambiguas, razonando la respuesta.

(c) Describir los lenguajes $L(G_1)$ y $L(G_2)$.

(d) Aplicando el método visto en clase, construir el autómata con pila equivalente a G_2.

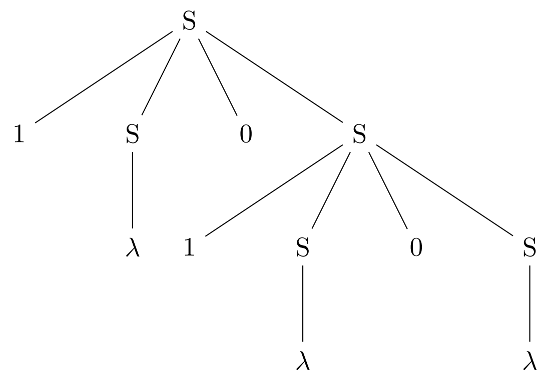
(e) Dar un cómputo en el autómata construido en (d) que reconozca la palabra 10010.

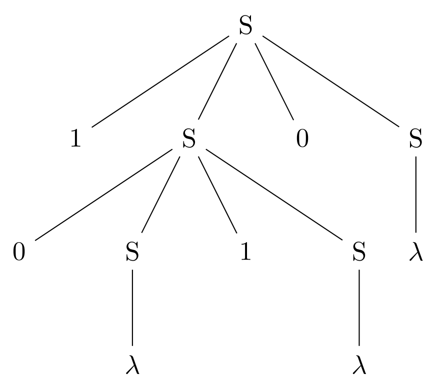
Solución:

(a) $S \Rightarrow^2 1S0S \Rightarrow^1 10S1S0S \Rightarrow^3 10S1S0 \Rightarrow^3 10S10 \Rightarrow^3 1010$

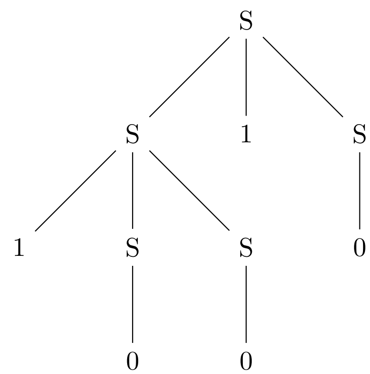
$S \Rightarrow^3 1SS \Rightarrow^4 1SS1S \Rightarrow^1 10S1S \Rightarrow^1 1001S \Rightarrow^1 10010$

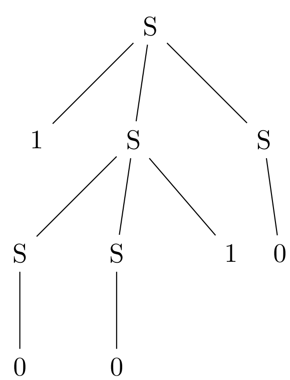
(b) Las gramáticas G_1 y G_2 son ambiguas, porque cada una de las dos palabras consideradas en el apartado (a) tiene dos áboles de derivación. La palabra 1010 tiene los dos siguientes árboles de derivación en G_1:





Y la palabra 10010 tiene los dos siguientes árboles de derivación en G_2:





(c) Tenemos que $L(G_1) = \{x \in \{0,1\}^* : n_0(x) = n_1(x)\}$ y $L(G_2) = \{x \in \{0,1\}^* : n_0(x) > n_1(x)\}$.

(d) $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$, donde el conjunto de los estados es $K = \{q_0, f\}$, el vocabulario de la cinta es $\Sigma = \{0, 1\}$, el vocabulario de la pila es $\Gamma = \{0, 1, S\}$, el estado inicial es q_0, el único estado aceptador es f y Δ está formado por las siguientes transiciones:

1. $((q_0, \lambda, \lambda), (f, S))$.
2. $((f, \lambda, S), (f, 0))$.
3. $((f, \lambda, S), (f, S0))$.
4. $((f, \lambda, S), (f, 1SS))$.
5. $((f, \lambda, S), (f, SS1))$.
6. $((f, \lambda, S), (f, S1S))$.
7. $((f, 0, 0), (f, \lambda))$.
8. $((f, 1, 1), (f, \lambda))$.

(e) Cómputo de M que reconoce la palabra 10010:

estado	cinta	pila	transición
q_0	10010	λ	–
f	10010	S	1
f	10010	$1SS$	4
f	0010	SS	8
f	0010	$0S$	2
f	010	S	7
f	010	$S1S$	6
f	010	$01S$	2
f	10	$1S$	7
f	0	S	8
f	0	0	2
f	λ	λ	7

Problema 2. Consideremos la siguiente gramática incontextual G para diseñar una calculadora de dígitos decimales, donde E es el símbolo inicial.

1. $E \longrightarrow T$
2. $E \longrightarrow EOE$
3. $T \longrightarrow A$
4. $T \longrightarrow TPA$
5. $O \longrightarrow +$
6. $O \longrightarrow -$
7. $P \longrightarrow *$
8. $P \longrightarrow /$
9. $A \longrightarrow \underline{int}$
10. $A \longrightarrow \underline{float}$

Se pide entonces:

(a) Demostrar que G es ambigua.

(b) Escribir una gramática equivalente a G que no sea ambigua.

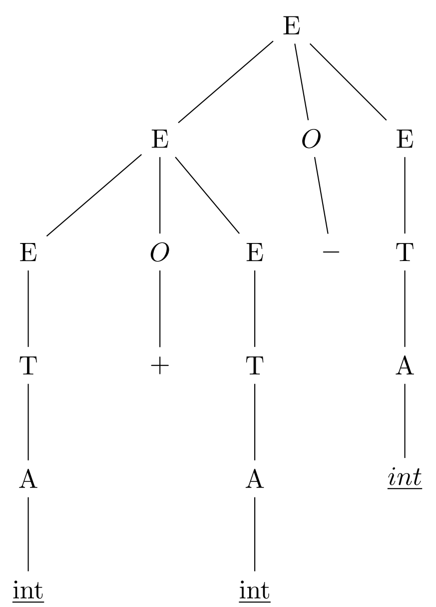
(c) Aplicando el método visto en clase, construir el autómata con pila equivalente a la gramática del apartado (b).

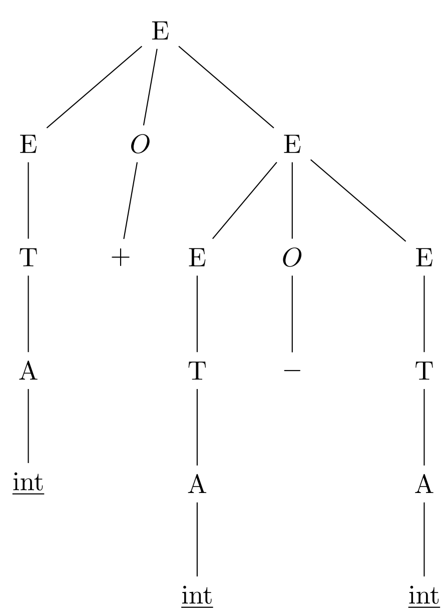
(d) Aplicar las reglas de factorización y recursión a la gramática G para obtener una gramática LL(1) equivalente.

(e) Construir la tabla de análisis de la gramática obtenida en (d).

Solución:

(a) Para demostrar que G es ambigua, consideremos la palabra $x = \underline{int} + \underline{int} - \underline{int}$. La palabra x tiene entonces los dos siguientes árboles de derivación:


E
E O E
E O E − T
T + T A
A A int
int int


E
E O E
T + E O E
A T − T
int A A
int int

(b) La gramática G es ambigua, porque en la parte derecha de la producción 2 de G aparece la variable E repetida. Para eliminar entonces la ambigüedad de G reemplazamos una de las dos apariciones de la variable E en la parte derecha de la producción 2 por la variable T (evitando de esta forma la repetición de variables). Obtenemos la siguiente gramática G':

1. $E \longrightarrow T$
2. $E \longrightarrow TOE$
3. $T \longrightarrow A$
4. $T \longrightarrow TPA$
5. $O \longrightarrow +$
6. $O \longrightarrow -$
7. $P \longrightarrow *$
8. $P \longrightarrow /$
9. $A \longrightarrow \underline{int}$
10. $A \longrightarrow \underline{float}$

En G', la variable E genera de manera unívoca una suma/resta de términos y la variable T genera también de manera unívoca un producto/división de factores, que pueden ser o bien números enteros (tipo $\underline{int}$) o bien números decimales (tipo $\underline{float}$). Por tanto, G' no es ambigua.

(c) $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$, donde el conjunto de los estados es $K = \{q_0, f\}$, el vocabulario de la cinta es $\Sigma = \{+, -, *, /, \underline{int}, \underline{float}\}$, el vocabulario de la pila es $\Gamma = \{+, -, *, /, \underline{int}, \underline{float}, E, T, A, O, P\}$, el estado inicial es q_0, el único estado aceptador es f y Δ está formado por las siguientes transiciones:

1. $((q_0, \lambda, \lambda), (f, S))$.
2. $((f, \lambda, E), (f, T))$.
3. $((f, \lambda, E), (f, TOE))$.
4. $((f, \lambda, T), (f, A))$.
5. $((f, \lambda, T), (f, TPA))$.
6. $((f, \lambda, O), (f, +))$.
7. $((f, \lambda, O), (f, -))$.

8. $((f, \lambda, P), (f, *))$.
9. $((f, \lambda, P), (f, /))$.
10. $((f, \lambda, A), (f, \underline{int}))$.
11. $((f, \lambda, A), (f, \underline{float}))$.
12. $((f, +, +), (f, \lambda))$.
13. $((f, -, -), (f, \lambda))$.
14. $((f, *, *), (f, \lambda))$.
15. $((f, /, /), (f, \lambda))$.
16. $((f, \underline{int}, \underline{int}), (f, \lambda))$.
17. $((f, \underline{float}, \underline{float}), (f, \lambda))$.

(d) Aplicando la regla de factorización, reemplazamos las producciones $E \longrightarrow T$ y $E \longrightarrow TOE$ por las producciones $E \longrightarrow TX$, $X \longrightarrow \lambda$ y $X \longrightarrow OE$. Y aplicando la la regla de recursión, reemplazamos las producciones $T \longrightarrow A$ y $T \longrightarrow TPA$ por las producciones $T \longrightarrow AY$, $Y \longrightarrow PAY$ e $Y \longrightarrow \lambda$.

Por tanto, obtenemos la siguiente gramática $G^{''}$ equivalente a G':

1. $E \longrightarrow TX$
2. $X \longrightarrow \lambda$
3. $X \longrightarrow OE$
4. $T \longrightarrow AY$
5. $Y \longrightarrow PAY$
6. $Y \longrightarrow \lambda$
7. $O \longrightarrow +$
8. $O \longrightarrow -$
9. $P \longrightarrow *$
10. $P \longrightarrow /$
11. $A \longrightarrow \underline{int}$
12. $A \longrightarrow \underline{float}$

(e) La tabla de análisis de G'' es la siguiente:

TABLA	$+$	$-$	$*$	$/$	int	float
E					1	1
X	3	3				
T					4	4
Y	6	6	5	5		
O	7	8				
P			9	10		
A					11	12

Obsérvese que Siguientes$(X) = \emptyset$. Por tanto, la producción 2 no aparece en la tabla de análisis.

Y de las derivaciones

$$E \Rightarrow^1 TX \Rightarrow^3 TOE \Rightarrow^4 AYOE \Rightarrow^7 AY + E,$$

$$E \Rightarrow^1 TX \Rightarrow^3 TOE \Rightarrow^4 AYOE \Rightarrow^8 AY - E$$

se deduce que $+, - \in$ Siguientes(Y) y, por tanto, la producción 6 pertenece a TABLA$(Y, +)$ y a TABLA$(Y, -)$.

Problema 3. La siguiente gramática incontextual G genera una clase de declaraciones de JAVA.

1. $S \longrightarrow ES$
2. $S \longrightarrow E$
3. $E \longrightarrow TF;$
4. $T \longrightarrow \underline{int}$
5. $T \longrightarrow \underline{int}\,[\,]$
6. $T \longrightarrow \underline{float}$
7. $T \longrightarrow \underline{float}\,[\,]$
8. $F \longrightarrow F\,,\,\underline{id}$
9. $F \longrightarrow \underline{id}$

Se pide entonces:

(a) Dar una derivación en G para la palabra

$\underline{int}\;\;\underline{id}\;,\;\underline{id}\;;\;\underline{float}\,[\,]\;\;\underline{id}\;;$

(b) Siguiendo el método visto en clase, construir el autómata con pila M asociado a G.

(c) Dar un cómputo en M que reconozca la palabra

$\underline{int}\,\underline{id}\,;\underline{float}\,[\,]\;\;\underline{id};$

(d) Explicar por qué G no es una gramática LL(1).

(e) Aplicar las reglas de factorización y recursión para a la gramática G.

(f) Construir la tabla de análisis de la gramática obtenida en (e).

Solución:

(a) $S \Rightarrow^1 ES \Rightarrow^2 EE \Rightarrow^3 TF;E \Rightarrow^3 TF;TF; \Rightarrow^4 \underline{int}\,F;TF; \Rightarrow^8 \underline{int}\,F,\underline{id};TF; \Rightarrow^9 \underline{int}\,\underline{id},\underline{id};TF; \Rightarrow^7 \underline{int}\,\underline{id},\underline{id};\underline{float}\,[\,]F; \Rightarrow^9 \underline{int}\,\underline{id},\underline{id};\;\underline{float}\,[\,]\,\underline{id};$

(b) $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$, donde el conjunto de los estados es $K = \{q_0, f\}$, el vocabulario de la cinta es $\Sigma = \{\underline{id}, \underline{int}, \underline{float}, ;\,, ,\,, [,]\}$, el vocabulario de la pila es $\Gamma = \Sigma \cup V$ siendo $V = \{S, E, T, F\}$, el estado inicial es q_0, el único estado aceptador es f y Δ está formado por las siguientes transiciones:

1. $((q_0, \lambda, \lambda), (f, S))$.

2. $((f, \lambda, S), (f, ES))$.
3. $((f, \lambda, S), (f, E))$.
4. $((f, \lambda, E), (f, TF;))$.
5. $((f, \lambda, T), (f, \underline{int}))$.
6. $((f, \lambda, T), (f, \underline{int}[\,]))$.
7. $((f, \lambda, T), (f, \underline{float}))$.
8. $((f, \lambda, T), (f, \underline{float}[\,]))$.
9. $((f, \lambda, F), (f, F\ ,\ \underline{id}))$.
10. $((f, \lambda, F), (f, \underline{id}))$.
11. $((f, \underline{id}, \underline{id}), (f, \lambda))$.
12. $((f, \underline{int}, \underline{int}), (f, \lambda))$.
13. $((f, \underline{float}, \underline{float}), (f, \lambda))$.
14. $((f, ;, ;), (f, \lambda))$.
15. $((f, ,, ,), (f, \lambda))$.
16. $((f, [, [), (f, \lambda))$.
17. $((f,],]), (f, \lambda))$.

(c) Cómputo que reconoce $\underline{int}\ \underline{id}\,;\underline{float}\ [\,]\ \ \underline{id};$

estado	cinta	pila	transición
q_0	$\underline{int}\,\underline{id}\,;\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	λ	–
f	$\underline{int}\,\underline{id}\,;\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	S	1
f	$\underline{int}\,\underline{id}\,;\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	ES	2
f	$\underline{int}\,\underline{id}\,;\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$TF;S$	4
f	$\underline{int}\,\underline{id}\,;\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$\underline{int}\,F;S$	5
f	$\underline{id};\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$F;S$	12
f	$\underline{id};\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$\underline{id};S$	10
f	$;\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$;S$	11
f	$\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	S	14
f	$\underline{float}\,[\,]\ \underline{id};$	E	3
f	$\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$TF;$	4
f	$\underline{float}\,[\,]\ \underline{id}\,;$	$\underline{float}\,[\,]F;$	8
f	$[\,]\ \underline{id}\,;$	$[\,]F;$	13
f	$]\ \underline{id}\,;$	$]F;$	16
f	$\underline{id}\,;$	$F;$	17
f	$\underline{id}\,;$	$\underline{id}\,;$	10
f	$;$	$;$	11
f	λ	λ	14

(d) La gramática G no es LL(1), porque hay conflictos al construir su tabla de análisis. Por ejemplo, las producciones $1, 2 \in \text{TABLA}(S, \underline{int})$, ya que $\underline{int} \in \text{Primeros}(E)$. Además, también tenemos que $1, 2 \in \text{TABLA}(S, \underline{float})$, $4, 5 \in \text{TABLA}(T, \underline{int})$, $6, 7 \in \text{TABLA}(T, \underline{float})$ y $8, 9 \in \text{TABLA}(F, \underline{id})$.

(e) Aplicando la regla de factorización, reemplazamos las producciones $S \longrightarrow ES$, $S \longrightarrow E$ por las producciones $S \longrightarrow ES'$, $S' \longrightarrow S$, $S' \longrightarrow \lambda$. Aplicando otra vez la regla de factorización, reemplazamos las producciones $T \longrightarrow \underline{int}$, $T \longrightarrow \underline{int}\,[\,]$ por las producciones $T \longrightarrow \underline{int}\,T'$, $T' \longrightarrow \lambda$, $T' \longrightarrow [\,]$. Y aplicando de nuevo la regla de factorización, reemplazamos las producciones $T \longrightarrow \underline{float}$, $T \longrightarrow \underline{float}\,[\,]$ por las producciones $T \longrightarrow \underline{float}\,T''$, $T'' \longrightarrow \lambda$, $T'' \longrightarrow [\,]$. Por último, aplicando la regla de recursión, reemplazamos las producciones $F \longrightarrow F, \underline{id}$, $F \longrightarrow \underline{id}$ por las producciones $F \longrightarrow \underline{id}\,F'$, $F' \longrightarrow, \underline{id}\,F'$, $F' \longrightarrow \lambda$.

Se observa que las variables T' y T'' son equivalentes, ya que generan el mismo lenguaje, el formado por las palabras λ y $[\,]$. Por tanto, podemos identificar las dos variables, y utilizar únicamente una de ellas, por ejemplo la variable T'. Obtenemos entonces la siguiente gramática G' equivalente a G:

1. $S \longrightarrow ES'$
2. $S' \longrightarrow S$

3. $S' \longrightarrow \lambda$
4. $E \longrightarrow TF;$
5. $T \longrightarrow \underline{int}\, T'$
6. $T' \longrightarrow \lambda$
7. $T' \longrightarrow [\,]$
8. $T \longrightarrow \underline{float}\, T'$
9. $F \longrightarrow \underline{id}\, F'$
10. $F' \longrightarrow , \underline{id}\, F'$
11. $F' \longrightarrow \lambda$

(f) La tabla de análisis de G' es la siguiente:

TABLA	$\underline{\text{id}}$	$\underline{\text{int}}$	$\underline{\text{float}}$	;	,	[	]
S		1	1				
S'		2	2				
E		4	4				
T		5	8				
T'	6					7	
F	9						
F'				11	10		

Como Siguientes$(S') = \emptyset$, la producción 3 no aparece en la tabla de análisis.

Obsérvese que de la derivación

$S \Rightarrow^1 ES' \Rightarrow^4 TF;S' \Rightarrow^5 \underline{int}\, T'F;S' \Rightarrow^9 \underline{int}\, T'\underline{id}\, F';S'$

se deduce que $\underline{id} \in$ Siguientes(T') y, por tanto, la producción $6 \in$ TABLA$(T', \underline{id})$.

Y de la derivación

$S \Rightarrow^1 ES' \Rightarrow^4 TF;S' \Rightarrow^9 T\underline{id}\, F';S'$

se deduce que $; \in$ Siguientes(F') y, por tanto, la producción 11 pertenece a TABLA$(F', ;)$.

Problema 4. La siguiente gramática incontextual G genera una clase de instrucciones de Java.

1. $S \longrightarrow \underline{while}\,(C)\,S$
2. $S \longrightarrow \underline{id} \,=\, E;$
3. $E \longrightarrow E + T$
4. $E \longrightarrow E - T$
5. $E \longrightarrow T$
6. $T \longrightarrow \underline{id}$
7. $T \longrightarrow \underline{int}$
8. $T \longrightarrow \underline{float}$
9. $C \longrightarrow E \,==\, E$
10. $C \longrightarrow E \,!=\, E$
11. $C \longrightarrow E \,<=\, E$
12. $C \longrightarrow E \,<\, E$

Se pide entonces:

(a) Dar una derivación en G para la palabra

$\underline{while}\,(\underline{id} \,<\, \underline{id} \,+\, \underline{int})\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id};$

(b) Siguiendo el método visto en clase, construir el autómata con pila M asociado a G.

(c) Dar un cómputo en M que reconozca la palabra

$\underline{while}\,(\underline{id} \,!=\, \underline{id})\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$

(d) Explicar por qué G no es una gramática LL(1).

(e) Aplicar las reglas de factorización y recursión a la gramática G.

(f) Construir la tabla de análisis de la gramática obtenida en (e).

Solución:

(a) $S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^2 \underline{while}\,(C)\,\underline{id} \,=\, E; \Rightarrow^3 \underline{while}\,(C)\,\underline{id} \,=\, E + T; \Rightarrow^6$ $\underline{while}\,(C)\,\underline{id} \,=\, E + \underline{id}; \Rightarrow^4 \underline{while}\,(C)\,\underline{id} \,=\, E - T + \underline{id}; \Rightarrow^8 \underline{while}\,(C)\,\underline{id} \,=\, E -$

$\underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^5 \underline{while}\,(C)\,\underline{id} = T - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^6 \underline{while}\,(C)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^{12} \underline{while}\,(E < E)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^5 \underline{while}\,(T < E)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^6 \underline{while}\,(\underline{id} < E)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^3 \underline{while}\,(\underline{id} < E + T)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^5 \underline{while}\,(\underline{id} < T + T)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^6 \underline{while}\,(\underline{id} < \underline{id} + T)\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id}; \Rightarrow^7 \underline{while}\,(\underline{id} < \underline{id} + \underline{int})\,\underline{id} = \underline{id} - \underline{float} + \underline{id};$

(b) Tenemos que $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$, donde el conjunto de los estados es $K = \{q_0, f\}$, el vocabulario de la cinta es $\Sigma = \{\underline{while}, \underline{id}, \underline{int}, \underline{float}, =, ;, +, -, (,), ==, !=, <, <=\}$, el vocabulario de la pila es $\Gamma = \Sigma \cup V$ siendo $V = \{S, E, T, C\}$, el estado inicial es q_0, el único estado aceptador es f y Δ está formado por las siguientes transiciones:

1. $((q_0, \lambda, \lambda), (f, S))$.
2. $((f, \lambda, S), (f, \underline{while}\,(C)\,S))$.
3. $((f, \lambda, S), (f, \underline{id} = E;))$.
4. $((f, \lambda, E), (f, E + T))$.
5. $((f, \lambda, E), (f, E - T))$.
6. $((f, \lambda, E), (f, T))$.
7. $((f, \lambda, T), (f, \underline{id}))$.
8. $((f, \lambda, T), (f, \underline{int}))$.
9. $((f, \lambda, T), (f, \underline{float}))$.
10. $((f, \lambda, C), (f, E == E))$.
11. $((f, \lambda, C), (f, E\,!= E))$.
12. $((f, \lambda, C), (f, E <= E))$.
13. $((f, \lambda, C), (f, E < E))$.
14. $((f, \underline{while}, \underline{while}), (f, \lambda))$.
15. $((f, \underline{id}, \underline{id}), (f, \lambda))$.
16. $((f, \underline{int}, \underline{int}), (f, \lambda))$.
17. $((f, \underline{float}, \underline{float}), (f, \lambda))$.
18. $((f, =, =), (f, \lambda))$.
19. $((f, ;, ;), (f, \lambda))$.
20. $((f, +, +), (f, \lambda))$.

21. $((f, -, -), (f, \lambda))$.
22. $((f, (, (), (f, \lambda))$.
23. $((f,),)), (f, \lambda))$.
24. $((f, ==, ==), (f, \lambda))$.
25. $((f, !=, !=), (f, \lambda))$.
26. $((f, <, <), (f, \lambda))$.
27. $((f, <=, <=), (f, \lambda))$.

(c) Cómputo que reconoce $\underline{while}\,(\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$

estado	cinta	pila	transición
q_0	$\underline{while}\,(\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	λ	–
f	$\underline{while}\,(\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	S	1
f	$\underline{while}\,(\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{while}(C)S$	2
f	$(\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$(C)S$	14
f	$\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$C)S$	22
f	$\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$E! = E)S$	11
f	$\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$T! = E)S$	6
f	$\underline{id}\;!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id}! = E)S$	7
f	$!=\;\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$! = E)S$	15
f	$\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$E)S$	25
f	$\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$T)S$	6
f	$\underline{id})\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id})S$	7
f	$)\;\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$)S$	15
f	$\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	S	23
f	$\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} = E;$	3
f	$= \underline{id} - \underline{int};$	$= E;$	15
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$E;$	18
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$E - T;$	5
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$T - T;$	6
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} - T;$	7
f	$-\underline{int};$	$-T;$	15
f	$\underline{int};$	$T;$	21
f	$\underline{int};$	$\underline{int};$	8
f	$;$	$;$	16
f	λ	λ	19

(d) La gramática G no es LL(1), porque hay conflictos al construir su tabla de análisis. Por ejemplo, las producciones $3, 4 \in$ TABLA$[E, \underline{id}]$, ya que $\underline{id} \in$ Primeros(E) = Primeros$(E + T)$ = Primeros$(E - T)$.

(e) Aplicando la regla de recursión, reemplazamos las producciones $E \longrightarrow E+T$, $E \longrightarrow E-T$ y $E \longrightarrow T$ por las producciones $E \longrightarrow TE'$, $E' \longrightarrow +TE'$, $E' \longrightarrow -TE'$ y $E' \longrightarrow \lambda$. Y aplicando la regla de factorización, reemplazamos las producciones $C \longrightarrow E == E$, $C \longrightarrow E\,!= E$, $C \longrightarrow E <= E$ y $C \longrightarrow E < E$ por las producciones $C \longrightarrow EC'$, $C' \longrightarrow == E$, $C' \longrightarrow != E$, $C' \longrightarrow <= E$, $C' \longrightarrow < E$.

Por tanto, obtenemos la siguiente gramática G' equivalente a G:

1. $S \longrightarrow \underline{while}\,(C)\,S$
2. $S \longrightarrow \underline{id} = E;$
3. $E \longrightarrow TE'$
4. $E' \longrightarrow +TE'$
5. $E' \longrightarrow -TE'$
6. $E' \longrightarrow \lambda$
7. $T \longrightarrow \underline{id}$
8. $T \longrightarrow \underline{int}$
9. $T \longrightarrow \underline{float}$
10. $C \longrightarrow EC'$
11. $C' \longrightarrow == E$
12. $C' \longrightarrow != E$
13. $C' \longrightarrow <= E$
14. $C' \longrightarrow < E$

(f) La tabla de análisis de G' es la siguiente:

TABLA	while	id	int	float	=	;	+	−	(	)	==	!=	<=	<
S	1	2												
E		3	3	3										
E'						6	4	5		6	6	6	6	6
T		7	8	9										
C		10	10	10										
C'											11	12	13	14

Obsérvese que de la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^2 \underline{while}\,(C)\,\underline{id}\ =\ E; \Rightarrow^3 \underline{while}\,(C)\,\underline{id}\ =\ TE';$

se deduce que $; \in$ Siguientes(E') y, por tanto, la producción $6 \in$ TABLA$[E', ;]$.

De la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^{10} \underline{while}\,(EC')\,S \Rightarrow^{11} \underline{while}\,(E == E)\,S \Rightarrow^3 \underline{while}\,(E == TE')\,S$

se deduce que $) \in$ Siguientes(E') y, por tanto, la producción $6 \in$ TABLA$[E',)]$.

Por otra parte, de la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^{10} \underline{while}\,(EC')\,S \Rightarrow^3 \underline{while}\,(TE'C')\,S \Rightarrow^{11} \underline{while}\,(TE' == E)\,S$

se deduce que $== \in$ Siguientes(E') y, por tanto, tenemos que la producción $6 \in$ TABLA$[E', ==]$.

De la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^{10} \underline{while}\,(EC')\,S \Rightarrow^3 \underline{while}\,(TE'C')\,S \Rightarrow^{12} \underline{while}\,(TE' != E)\,S$

se deduce que $! = \in$ Siguientes(E') y, por tanto, tenemos que la producción $6 \in$ TABLA$[E', ! =]$.

De la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^{10} \underline{while}\,(EC')\,S \Rightarrow^3 \underline{while}\,(TE'C')\,S \Rightarrow^{13} \underline{while}\,(TE' <= E)\,S$

se deduce que $<= \in$ Siguientes(E') y, por tanto, tenemos que la producción $6 \in$ TABLA$[E', <=]$.

Y de la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{while}\,(C)\,S \Rightarrow^{10} \underline{while}\,(EC')\,S \Rightarrow^3 \underline{while}\,(TE'C')\,S \Rightarrow^{14} \underline{while}\,(TE' < E)\,S$

se deduce que $< \in$ Siguientes(E') y, por consiguiente, la producción $6 \in$ TABLA$[E', <]$.

Problema 5. La siguiente gramática incontextual G genera una clase de instrucciones de Java.

1. $S \longrightarrow \underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int}; C; X)\,Y$
2. $X \longrightarrow \underline{id}\ ++$
3. $X \longrightarrow \underline{id}\ --$
4. $Y \longrightarrow$ id $=$ E;
5. $E \longrightarrow E + T$
6. $E \longrightarrow E - T$
7. $E \longrightarrow T$
8. $T \longrightarrow \underline{id}$
9. $T \longrightarrow \underline{int}$
10. $C \longrightarrow E < E$
11. $C \longrightarrow E <= E$

Se pide entonces:

(a) Dar una derivación en G para la palabra

$\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{id} + \underline{int};\ \underline{id} ++)\ \underline{id} = \underline{id} + \underline{id} - \underline{int};$

(b) Siguiendo el método visto en clase, construir el autómata con pila M asociado a G.

(c) Dar un cómputo en M que reconozca la palabra

$\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} ++)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$

(d) Explicar por qué G no es una gramática LL(1).

(e) Aplicar las reglas de factorización y recursión para transformar la gramática G en una gramática LL(1).

(f) Construir la tabla de análisis de la gramática obtenida en (e).

Solución:

(a) $S \Rightarrow^1 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y \Rightarrow^{10} \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; E < E; X)Y \Rightarrow^7 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; T < E; X)Y \Rightarrow^8 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < E; X)Y \Rightarrow^5 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} <$

$E + T; X)Y \Rightarrow^7 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < T + T; X)Y \Rightarrow^8 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + T; X)Y \Rightarrow^9 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; X)Y \Rightarrow^2 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)Y \Rightarrow^4 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = E; \Rightarrow^6 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = E - T; \Rightarrow^5 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = E + T - T; \Rightarrow^7 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = T + T - T; \Rightarrow^8 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = \underline{id} + T - T; \Rightarrow^8 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = \underline{id} + \underline{id} - T; \Rightarrow^9 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; \underline{id} < \underline{id} + \underline{int}; \underline{id} + +)\underline{id} = \underline{id} + \underline{id} - \underline{int};$

(b) $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$, donde el conjunto de los estados es $K = \{q_0, f\}$, el vocabulario de la cinta es

$$\Sigma = \{\underline{for}, \underline{id}, \underline{int}, +, -, <, =, ;,), (, ++, --, <=\}$$

el vocabulario de la pila es $\Gamma = \Sigma \cup V$ siendo $V = \{S, X, Y, E, T, C\}$, el estado inicial es q_0, el único estado aceptador es f y Δ está formado por las siguientes transiciones:

1. $((q_0, \lambda, \lambda), (f, S))$.
2. $((f, \lambda, S), (f, \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y))$.
3. $((f, \lambda, X), (f, \underline{id} + +))$.
4. $((f, \lambda, X), (f, \underline{id} - -))$.
5. $((f, \lambda, Y), (f, \underline{id} = E;))$.
6. $((f, \lambda, E), (f, E + T))$.
7. $((f, \lambda, E), (f, E - T))$.
8. $((f, \lambda, E), (f, T))$.
9. $((f, \lambda, T), (f, \underline{id}))$.
10. $((f, \lambda, T), (f, \underline{int}))$.
11. $((f, \lambda, C), (f, E < E))$.
12. $((f, \lambda, C), (f, E <= E))$.
13. $((f, (, (), (f, \lambda))$.
14. $((f,),)), (f, \lambda))$.
15. $((f, \underline{for}, \underline{for}), (f, \lambda))$.
16. $((f, \underline{id}, \underline{id}), (f, \lambda))$.
17. $((f, \underline{int}, \underline{int}), (f, \lambda))$.

18. $((f, +, +), (f, \lambda))$.
19. $((f, -, -), (f, \lambda))$.
20. $((f, =, =), (f, \lambda))$.
21. $((f, <, <), (f, \lambda))$.
22. $((f, ;, ;), (f, \lambda))$.
23. $((f, ++, ++), (f, \lambda))$.
24. $((f, --, --), (f, \lambda))$.
25. $((f, <=, <=), (f, \lambda))$.

(c) Cómputo que reconoce $\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id}++)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$

estado	cinta	pila	transición
q_0	$\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	λ	–
f	$\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	S	1
f	$\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y$	2
f	$(\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y$	15
f	$\underline{id} = \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y$	13
f	$= \underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$= \underline{int}; C; X)Y$	16
f	$\underline{int};\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{int}; C; X)Y$	20
f	$;\ \underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$; C; X)Y$	17
f	$\underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$C; X)Y$	22
f	$\underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$E < E; X)Y$	11
f	$\underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$T < E; X)Y$	8
f	$\underline{id} < \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} < E; X)Y$	9
f	$< \underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$< E; X)Y$	16
f	$\underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$E; X)Y$	21
f	$\underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$T; X)Y$	8
f	$\underline{int};\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{int}; X)Y$	10
f	$;\ \underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$; X)Y$	17
f	$\underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$X)Y$	22
f	$\underline{id} + +)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} + +)Y$	3
f	$++)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$++)Y$	16
f	$)\ \underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$)Y$	23
f	$\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	Y	14
f	$\underline{id} = \underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} = E;$	5
f	$= \underline{id} - \underline{int};$	$= E;$	16
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$E;$	20
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$E - T;$	7
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$T - T;$	8
f	$\underline{id} - \underline{int};$	$\underline{id} - T;$	9
f	$-\underline{int};$	$-T;$	16
f	$\underline{int};$	$T;$	19
f	$\underline{int};$	$\underline{int};$	10
f	$;$	$;$	17
f	λ	λ	22

(d) La gramática G no es LL(1), porque hay conflictos al construir su tabla de análisis. Por ejemplo, las producciones $2, 3 \in$ TABLA$(X, \underline{id})$, ya que $\underline{id} \in$ Primeros(X).

(e) Aplicando la regla de factorización, reemplazamos las producciones $X \longrightarrow \underline{id}{+}{+}$, $X \longrightarrow \underline{id}{-}{-}$ por las producciones $X \longrightarrow \underline{id}X'$, $X' \longrightarrow {+}{+}$, $X' \longrightarrow {-}{-}$. Aplicando la regla de recursión, reemplazamos las producciones $E \longrightarrow E + T$, $E \longrightarrow E - T$, $E \longrightarrow T$ por las producciones $E \longrightarrow TE'$, $E' \longrightarrow +TE'$, $E' \longrightarrow -TE'$, $E' \longrightarrow \lambda$. Finalmente, aplicando la regla de factorización, reemplazamos las producciones $C \longrightarrow E < E$, $C \longrightarrow E <= E$ por las producciones $C \longrightarrow EC'$, $C' \longrightarrow < E$, $C' \longrightarrow <= E$.

La gramática G' obtenida con estas transformaciones tiene las siguientes reglas:

1. $S \longrightarrow \underline{for}\,(\underline{id} = \underline{int}; C; X)\,Y$
2. $X \longrightarrow \underline{id}X'$
3. $X' \longrightarrow {+}{+}$
4. $X' \longrightarrow {-}{-}$
5. $Y \longrightarrow$ $\underline{\text{id}}$ = E;
6. $E \longrightarrow TE'$
7. $E' \longrightarrow +TE'$
8. $E' \longrightarrow -TE'$
9. $E' \longrightarrow \lambda$
10. $T \longrightarrow \underline{id}$
11. $T \longrightarrow \underline{int}$
12. $C \longrightarrow EC'$
13. $C' \longrightarrow < E$
14. $C' \longrightarrow <= E$

(f) La tabla de análisis de G' es la siguiente:

TABLA	$\underline{\text{for}}$	$\underline{\text{id}}$	$\underline{\text{int}}$	$+$	$-$	$++$	$--$	;	$=$	$<$	$<=$	(	)
S	1												
X		2											
X'						3	4						
Y		5											
E		6	6										
E'				7	8			9		9	9		
T		10	11										
C		12	12										
C'										13	14		

Obsérvese que de la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y \Rightarrow^5 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)\underline{id} = E; \Rightarrow^6 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)\underline{id} = TE';$

se deduce que $; \in$ Siguientes(E') y, por tanto, la producción $9 \in$ TABLA(E', ;).

Por otra parte, de la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y \Rightarrow^{12} \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; EC'; X)Y \Rightarrow^6 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; TE'C'; X)Y \Rightarrow^{13} \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; TE' < E; X)Y$

deducimos que el símbolo $< \in$ Siguientes(E') y, por tanto, la producción $9 \in$ TABLA($E', <$).

Y de la derivación

$S \Rightarrow^1 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; C; X)Y \Rightarrow^{12} \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; EC'; X)Y \Rightarrow^6 \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; TE'C'; X)Y \Rightarrow^{14} \underline{for}(\underline{id} = \underline{int}; TE' <= E; X)Y$

deducimos que el símbolo $<= \in$ Siguientes(E') y, por tanto, la producción $9 \in$ TABLA($E', <=$).

15) Considerem la següent gramàtica incontextual G:

$$G \begin{cases} 1.\ S \to aSA \\ 2.\ S \to \lambda \\ 3.\ A \to bB \\ 4.\ B \to cbB \\ 5.\ B \to \lambda \end{cases}$$

a) obtenir els primers i següents

(a) Primers (S) = {a, λ},

Primers (A) = {b}

Primers (B) = {c, λ)

Següents (S) = {b}

$S \overset{1}{\Rightarrow} aSA \overset{3}{\Rightarrow} aSbB$

Següents (A) = {b}

$S \overset{1}{\Rightarrow} aSA \Rightarrow aaSAA \overset{3}{\Rightarrow} aaSAbB$

Següents (B) = {b}

$S \overset{1}{\Rightarrow} aSA \overset{1}{\Rightarrow} aaSAA \overset{3\times 2}{\Longrightarrow} aaSbBbB$

b) Determinar si G és LL(1)

TABLA	a	b	c
S	1	2	
A		3	
B		5	4

→ Sí

16) Considerem la següent gramàtica per generar instruccions condicionals

$$G = \begin{cases} 1.\ S \to I \\ 2.\ S \to t \\ 3.\ I \to if(E)SR \\ 4.\ R \to else\ S \\ 5.\ R \to \lambda \\ 6.\ E \to 0 \\ 7.\ E \to 1 \end{cases}$$

a) obtenir els primers i següents

Primers (S) = {if, +}

Primers (I) = {if}

Primers (R) = {else, λ}

Primers (E) = {0, 1}

Següents (S) = {else} → $S \overset{1}{\Rightarrow} I \overset{3}{\Rightarrow} if(E)SR \overset{4}{\Rightarrow} if(E)S\,else\,S$

Següents (I) = {else} → $S \overset{1}{\Rightarrow} I \overset{3}{\Rightarrow} if(E)SR \overset{1}{\Rightarrow} if(E)IR \overset{4}{\Rightarrow} if(E)I\,else\,S$

Següents (R) = {else} → $S \overset{1}{\Rightarrow} I \overset{3}{\Rightarrow} if(E)SR \overset{1}{\Rightarrow} if(E)IR \overset{3}{\Rightarrow} if(E)if(E)SRR \overset{4}{\Rightarrow} if(E)if(E)SR\,else\,R$

Següents (E) = {) } → $S \overset{1}{\Rightarrow} I \overset{3}{\Rightarrow} if(E)SR$

b)

TAULA	if	else	+	0	1	(	)
S	1		2				
I	3						
R		4,5					
E				6	7		

→ 1 ∈ taula [S, if] perquè if ∈ Primers(I)

2 ∈ Taula [S, +] perquè "+" Primers

17) Considerem la Gramàtica de l'ex 11 →

G
1. S → do Y while (c)
2. Y → id = E
3. E → E * F
4. E → E / F
5. E → F
6. F → (E)
7. F → id
8. F → int
9. F → float
10. C → C && D
11. C → D
12. D → id >= id
13. D → id > id

a) Explicar perquè G no és LL(1) → no és LL(1) perquè té produccions amb recursió a l'esquerra com ara E → E×F ; E → E/F

b) Reglas de factorització i recursió per transformar G en una LL(1)

1. S → do Y while (C)
2. Y → id = E
3. E → FE'
4. E' → * FE'
5. E' → /FE'
6. E' → λ
7. F → (E)
8. F → id
9. F → int
10. F → float.
11. C → DC
12. C' → && D C'
13. C' → λ
14. D → id D'
15. D' → >= id
16. D' → > id

Aplicando la R.e. a 10, 11 en G

Aplicando la R.F. a 12, 13 en G

3, 4 ∈ TABLA [E,)]
3, 4 ∈ TABLA [E, id]

G:
10. C → C && D
11. C → D
12. D → id >= id
13. D → id > id

TABLA	do	id	=	*	/	int	float	>=	>	while	(	)	;	&&
S	1									9				
Y		2												
E		3				3	3				3			
E'				4	5									
F'		9				9	10					6	6	
C'		11									7			
C'		13												
D		14												
								15	16			13		12

$S \overset{1}{\Rightarrow}$ do Y while (C) $\overset{2}{\Rightarrow}$ do id = E ; while (C) $\overset{3}{\Rightarrow}$ do id = FE' ; while (c) $\overset{7}{\Rightarrow}$

do id = (E) E' ; while (c) $\overset{3}{\Rightarrow}$ do id = (FE') ; while (c)

$S \overset{1}{\Rightarrow}$ do y while (c) $\overset{11}{\Rightarrow}$ do Y while (DC')

18) Considerem la següent G incontextual per a generar una classe d'instruccions de JAVA

1. $S \to \{L\}$
2. $S \to id = E$
3. $L \to S ; L$
4. $L \to S$
5. $E \to E + T$
6. $E \to E - T$
7. $E \to T$
8. $T \to id$
9. $T \to int$
10. $T \to float$

a) Una derivació en G que generi la paraula

$\{id = id + int ; \{id = int - float ; id = id\}\}$

$S \overset{1}{\Rightarrow} \{L\} \overset{3}{\Rightarrow} \{S, L\} \overset{2}{\Rightarrow} \{id = E, L\} \overset{5}{\Rightarrow} \{d = E + T ; S\} \overset{9}{\Rightarrow} \{id = E + int ; S\}$
$\overset{7}{\Rightarrow} \{id = T + int , S\} \overset{8}{\Rightarrow} id = id + int , S\} \overset{1}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{L\}\} \overset{3}{\Rightarrow}$
$\overset{3}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{S ; L\} \overset{2}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{id = E ; L\}\} \overset{6}{\Rightarrow}$
$\overset{6}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{id = E - T ; L\}\} \overset{10}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{id = E - float ; L\}\}$
$\overset{7,8}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{id = id - float ; S\}\} \overset{2}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{id = int -$
$float ; id = E\}\} \overset{7,8}{\Rightarrow} \{id = id + int ; \{id = id - float ; id = id\}\}$

b) Demostrar que G no és LL(1) → 5, 6, 7 ∈ tabla[E, id]

c) Aplicar regles de factorització i recursió a G

1. $S \to \{L\}$
2. $S \to id = E$
3. $L \to S L'$
4. $L' \to ; L'$
5. $L' \to \lambda$
6. $E \to T E'$
7. $E' \to + E'$
8. $E' \to - E'$
9. $E' \to \lambda$
10. $T \to id$
11. $T \to int$
12. $T \to float$

d) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en c

TABLA	id	int	float	{	}	;	+	-	=
S	2			1					
L	3			3					
L'					5	4			
E	6	6	6						
E'					9	9	7	8	
T	10	11	12						

$S \overset{1}{\Rightarrow} \{L\} \overset{3}{\Rightarrow} \{S L'\}$
$S \overset{1}{\Rightarrow} \{L\} \overset{3}{\Rightarrow} \{S L'\} \overset{5}{\Rightarrow} \{S\} \overset{2}{\Rightarrow} \{id = E\} \overset{6}{\Rightarrow} \{id = T E'\}$
$S \overset{1}{\Rightarrow} \{L\} \overset{3}{\Rightarrow} \{S L'\} \overset{4}{\Rightarrow} \{S ; L\} \overset{2}{\Rightarrow} \{id = E ; L\} \overset{6}{\Rightarrow} \{id = T E' ; L\}$

LOGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges incontextuals

Exercici 14. Considerem la següent gramàtica incontextual:

1. $S \to A$
2. $A \to aBb$
3. $A \to cBd$
4. $B \to XY$
5. $X \to eX$
6. $X \to \lambda$
7. $Y \to fY$
8. $Y \to \lambda$

(a) Calculeu els conjunts de Primers i Següents de les variables de la gramàtica.

(b) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica.

Solució: (a) Tenim:

Primers(S) = Primers(A) = $\{a, c\}$,
Primers(B) = $\{e, f, \lambda\}$,
Primers(X) = $\{e, \lambda\}$,
Primers(Y) = $\{f, \lambda\}$,
Següents(S) = $\emptyset$,
Següents(A) = $\emptyset$,
Següents(B) = $\{b, d\}$,
Següents(X) = $\{b, d, f\}$,
Següents(Y) = $\{b, d\}$.

De l'apartat (a), obtenim directament la següent taula d'anàlisi :

TAULA	a	b	c	d	e	f
S	1		1			
A	2		3			
B		4		4	4	4
X		6		6	5	6
Y		8		8		7

Com la taula d'anàlisi de la gramàtica no té conflictes, la gramàtica és LL(1).

Exercici 19. Considerem la següent gramàtica incontextual:

$S \to \underline{id} = C \mid \underline{if}\ (C)\ S \mid \underline{while}\,(C)\,S \mid \{L\}.$

$L \to S \mid L\ ;\ S.$

$C \to \underline{id}\ \ ==\ \ \underline{id} \mid \underline{id}\,! =\ \underline{id} \mid C\ \&\&\ \underline{id}.$

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que la gramàtica no és LL(1).

(b) Obtenir una gramàtica equivalent LL(1).

(c) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (b).

Solució: (a) S'observa que hi ha conflictes en construir la taula d'anàlisi de la gramàtica. Per exemple, les produccions $C \to \underline{id} == \underline{id}$ i $C \to \underline{id}\ ! = \underline{id}$ pertanyen a TABLA$(C, \underline{id})$. Per tant, la gramàtica no és LL(1).

(b) Per a transformar la gramàtica G en LL(1), hem d'aplicar les regles de factorizació i recursión que hem vist en teoria. En primer lloc, aplicant la regla de recursió, reemplacem les produccions

$L \to S \mid L\ ;\ S$

per

$L \to SL',\ L' \to\ ;\ SL' \mid \lambda.$

A continuació, aplicant la regla de factorizació, reemplacem les produccions

$C \to \underline{id} == \underline{id} \mid \underline{id}\ ! = \underline{id}$

per

$C \to \underline{id}\,C',\ C' \to == \underline{id} \mid\ ! = \underline{id}.$

Finalment, aplicant la regla de recursió, reemplacem les produccions

$C \to \underline{id}\,C' \mid C\ \&\&\ \underline{id}$

per

$C \to \underline{id}\,C'C'',\ C'' \to \&\&\ \underline{id}\,C'' \mid \lambda.$

Llavors, obtenim la següent gramàtica LL(1) G' equivalent a G:

1. $S \to \underline{id} = C$

2. $S \to \underline{if}\ (C)\ S$

3. $S \to \underline{while}\,(C)\,S$

4. $S \to \{L\}$

5. $L \to SL'$

6. $L' \to ;SL'$

7. $L' \to \lambda$

8. $C \to \underline{id}\,C'\ C''$

9. $C' \to ==\ \underline{id}$

10. $C' \to\ !=\ \underline{id}$

11. $C'' \to\ \&\&\ \underline{id}\,C''$

12. $C'' \to \lambda$

(c) Tenim que el conjunt Primers(S) està compost per $\underline{id}$, $\underline{if}$, $\underline{while}$ i {. Tenim que } es l'únic símbol que està en Següents(L'), i que el conjunt Següents(C'') està compost per els símbols), } i ;. Per a això, obsérvem que de la derivació

$S \Rightarrow^4 \{L\} \Rightarrow^5 \{SL'\}$

es dedueix que $\{\in$ Següents(L').

De la derivació

$S \Rightarrow^2 \underline{if}(C)S \Rightarrow^8 \underline{if}(\underline{id}\,C'\,C'')S$

es dedueix que $(\in$ Següents(C'').

De la derivació

$S \Rightarrow^4 \{L\} \Rightarrow^5 \{SL'\} \Rightarrow^7 \{S\} \Rightarrow^1 \{\underline{id} = C\} \Rightarrow^8 \{\underline{id} = \underline{id}\,C'\,C''\}$

es dedueix que $\{\in$ Següents(C'').

I de la derivació

$S \Rightarrow^4 \{L\} \Rightarrow^5 \{SL'\} \Rightarrow^6 \{S;SL'\} \Rightarrow^1 \{\underline{id} = C;SL'\} \Rightarrow^8 \{\underline{id} = \underline{id}\,C'\,C'';SL'\}$

es dedueix que $;\in$ Següents(C'').

Por tant, la taula d'análisi que s'obté per a G' es la següent:

TAULA	id	if	while	{	}	(	)	;	&&	=	==	! =
S	1	2	3	4								
L	5	5	5	5								
L’					7			6				
C	8											
C’											9	10
C”					12		12	12	11			

Com la taula d’anàlisi de G' no té conflictes, G' és LL(1).