Col·lecció de Problemes

SOLUCIONS

# 1. Mesura i vectors

**1.1**. Com 1 Km = 1000 m i 1 h= 3600 s, la a) queda:

$$1 \quad \mathrm{m/s} \cdot \frac{1 \quad \mathrm{Km}}{1000 \quad \mathrm{m}} \frac{3600 \quad \mathrm{s}}{1 \quad \mathrm{h}} = 3,6 \quad \mathrm{Km/h},$$

i per tant és correcta. La b) també ho és, doncs 1 $\mathrm{m}^3$ equival a 1000 litres (1 litre és 1 $\mathrm{dm}^3 = 10^{-3}\mathrm{m}^3$) i 1 Kg són 1000 grams. La c) és falsa: 1 $\mathrm{m}^2 = 10^4$ $\mathrm{mm}^2$. La d) també és falsa, doncs una micra ($\mu$) es defineix com 1 $\mu m = 10^{-6}$ m$= 10^{-3}$ mm. Finalment, una giga són $10^9$, així que la e) també és verdadera.

**1.2**. $[C] = ML^{-3}$.

**1.3**. a) $C_1$ en m i $C_2$ en m/s; b) $C_1$ en m/s$^2$; c) $C_1$ en m/s$^2$; d) $C_1$ en m i $C_2$ en 1/s; e) $C_1$ en m$^2$/s$^2$ i $C_2$ en 1/s.

**1.4**. El nombre de "xifres significatives" indica el nombre de xifres que té sentit donar del valor d'una magnitud. Si, per exemple, mesurem el costat d'un quadrat amb un regle que precisa fins el milímetre (i mesurem, per exemple, 3, 2 mm), si calculem l'àrea, el nombre de xifres significatives ens dóna el nombre de xifres que té sentit donar amb la mesura que hem fet. En aquest exemple la calculadora ens donarà un àrea 10, 24 mm$^2$, però només té sentit donar 2 xifres, o sigui, 10 mm$^2$. Això és així perquè la precisió de la nostra mesura no pot ser menor que la precisió de le magnitud que estem caculant a partir d'ella. Si haguéssim mesurat una aresta de 3, 1 mm o 3, 3 mm, les àrees serien 9, 6 mm$^2$ i 11 mm$^2$. Si donéssim més decimals, implicaria que coneixem l'aresta amb més precisió del que la coneixem. Si, per exemple, considerem un rectangle, i coneixem un costat amb una precisió de milímetres i l'altre amb menys precisió (per exemple centímetres), el resultat, l'àrea, vindria donada amb la precisió que marca la mesura més basta. En general, en el cas de la multiplicació o la divisió, el nombre de xifres significatives del resultat és el mateix que el que té el factor amb menys xifres significatives.

En aquests exemples, per tant, els resultat són: $0,01$, $0,0003$, $0,0123$, $3,55 \cdot 10^{-7}$, $2,517598$, $13,3$.

**1.5**. $|\vec{v}| = 5$; per exemple, $\vec{u} = (5, 0, 0)$; $\vec{u} = (4, 0, -3)$; $\vec{u} = \frac{1}{5}(-4, 0, 3)$.

**1.6**. $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + \hat{k}$; $\vec{u} = \hat{\jmath}$; 2, −6, 1.

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{41}}; \cos\beta = \frac{-6}{\sqrt{41}}; \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{41}}.$$

**1.7**. $u_x = u_y = 1$.

**1.8**. $\hat{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5, 4, -3)$, $\hat{w} = \sqrt{2}(5, 4, -3)$.

**1.9**. $n = -3, 5.$; no poden ser paral·lels per cap valor d'$n$.

**1.10**. (a) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-3 - 1)\hat{\imath} + (-6 + 2 - 2)\hat{\jmath} + (3 + 4 + 1)\hat{k} = -4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 8\hat{k}$.

(b) $\vec{b} \cdot (-2\vec{c}) = (\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \cdot (-2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}) = -4 + 4 = 0$. Són vectors perpendiculars.

(c)

$$\left|(-2\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})\times(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\right| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4-4)\hat{i}+(2-2)\hat{j}+(-4+4)\hat{k} = 0.$$

Són vectors paralels.

(d) Hem vist que $\vec{b}$ i $\vec{c}$ són perpendiculars i $\vec{a}$ i $\vec{c}$ paral·lels. Per tanto $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són perpendiculars. Efectivament:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2+2 = 0.$$

(e) Hem de calcular $\vec{a}\cdot(2\vec{b}\times\vec{c})$. Començarem per:

$$2\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-10)\hat{i}+(4)\hat{j}+(-2)\hat{k} = -10\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k} = 0.$$

Finalment:

$$\vec{a}\cdot(2\vec{b}\times\vec{c}) = 10-8-2 = 0.$$

Com era d'esperar, doncs el vector resultant del producte vectorial entre $\vec{b}$ i $\vec{c}$ és perpendicular a ambdós, i per tant –como hem vist– perpendicular a $\vec{a}$.

**1.11**. $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (u_x+v_x)^2+(u_y+v_y)^2+(u_z+v_z)^2 = \cdots = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

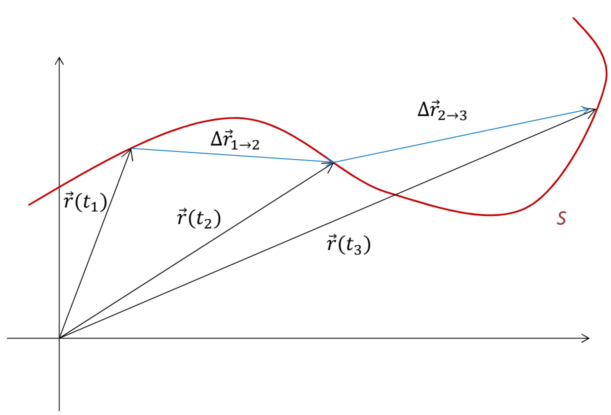
$(|\vec{u}|+|\vec{u}|)^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|$

$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$

**1.12**. (a) $2\sqrt{19}$, (b) 24 (c) $\sqrt{10}$

# 2. Cinemàtica

**2.1**. Veiem a la figura que el vector desplaçament $\Delta\vec{r}(t)$ va d'un punt de la trajectòria a un altre. Sempre és, doncs, una línia recta. Per tant, com la trajectòria pot ser curvilínea (pot ser inclús una línea tancada), el mòdul del vector desplaçament sempre serà igual a menor. Per ser igual, el moviment ha de ser rectilini.

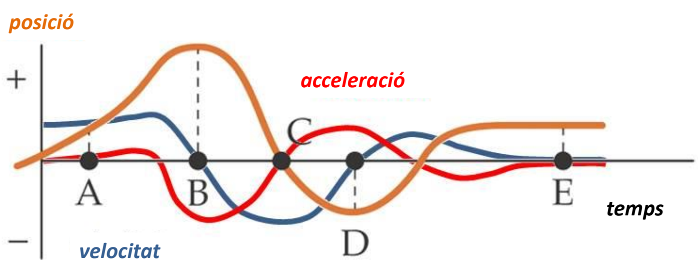


**2.2.** $\vec{v} = 30\hat{i} + (40 - 10t)\hat{j}$; $\vec{a} = -10\hat{j}$.

$$\cos\theta = \frac{t-4}{\sqrt{(t-5)^2 + 2t}}$$

És un tir parabòlica: el moviment en l'eix X és uniforme, i en l'eix Y uniformement accelerat. La velocitat inicial és de 50 m/s i la tangent de l'angle 4/3 ($\alpha \approx 53,2°$).

**2.3.** El més allunyat de l'origen és el punt B, dons té l'abscisa més gran. El mòbil està en repòs en els instants en què la derivada és igual a zero, o sigui: B, D i E; a B i D només està en repòs un instant (canvi de signe de la derivada), però a E es queda en repòs un interval de temps. S'allunya de l'origen quan la derivada és positiva, o sigui, als punts A i C. La mínima velocitat es dóna a C, doncs en aquest punt la derivada de la funció es fa mínima. Finalment, l'acceleració és positica a D i A, i la velocitat negatica a C. L'acceleració s'anul·la a C i E. Aquí hem dibuixat les derivades aproximades:




**2.4.** (a) El vector desplaçament entre els instants $t = 2$ i $t = 4s$ serà:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t=4) - \vec{r}(t=2) = 24\hat{i} + 2\hat{j}.$$

(b) La velocitat mitjana entred aquests instants:

$$\vec{v}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 12\hat{i} + \hat{j} \quad |\vec{v}_M| = \sqrt{145} \approx 12\ m/s.$$

La velocidad instantània:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 4t\hat{i} + \hat{j}.$$

I en els instants $t = 2$ i $t = 4s$:

$$\vec{v}(2) = 8\hat{i} + \hat{j} \qquad |v(\vec{2})| = \sqrt{65} \approx 8\ m/s.$$
$$\vec{v}(4) = 16\hat{i} + \hat{j} \qquad |v(\vec{4})| = \sqrt{257} \approx 16\ m/s.$$

(d) $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = 4\hat{i}$.

(e) Finalment, el vector acceleració instantània és:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 4\hat{i}.$$

**2.5.** $|\vec{a}_n| = 4\ \mathrm{m/s^2}$ y $|\vec{a}_t| = 4\sqrt{3}\ \mathrm{m/s^2}$.

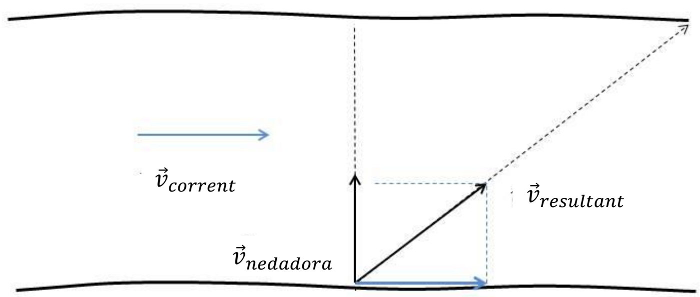
**2.6.** No xocarà, es pararà quan hagi recorregut $d = 22,5$ m.

**2.7**. En les dues direccions, $x$ i $y$ tenim un moviment rectilini uniforme. Per creuar el riu triga:

$$t = \frac{l}{v_n},$$

on $l$ és l'amplada del riu. Això dóna un temps de $t = 50$ s. En aquest temps el corrent ha arrossegat la nedadora $x = 40$ m. Per tant, la velocitat del corrent és:

$$v_c = \frac{x}{t} = 0,8 \quad \text{m/s}.$$




Respecte la vora la velocitat és:

$$\vec{v}_{res} = 0,8\hat{\imath} + 1,6\hat{\jmath}$$

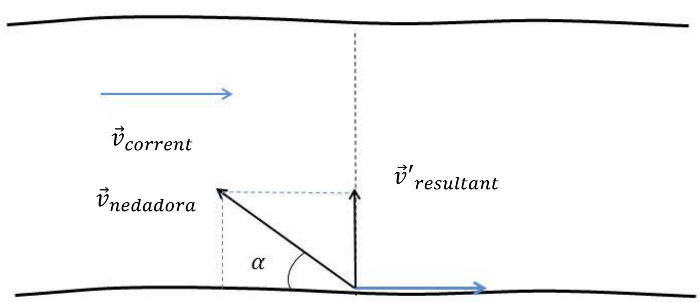
en m/s. $|\vec{v}| \cong 1,8$ m/s. Per arribar al punt oposat tindria que nedar una mica a contracorrent:

$$\vec{v'}_n = -0,8\hat{\imath} + 1,6\hat{\jmath}.$$

L'angle d'aquest vector amb la vora és:

$$\tan\alpha = \frac{1,6}{0,8} = 2,$$

que correspon a 63°.




Li costarà més si tarda el mateix que abans perquè la seva velocitat (en mòdul) és major.

**2.8**. Sí, arriba a temps perquè tarda $6 + 6 = 12$ min.

**2.9**.
- $y_m = \frac{(v_o \sin\alpha)^2}{2g} \approx 64$ m.
- Sí. $\alpha = \pi/2$ dona l'altura més gran $y'_m \approx 128$ m.

- $\vec{v} = (v_\circ \cos\alpha, v_\circ \sin\alpha - 5g) \approx (35{,}4, -13{,}6)$ m/s, $|\vec{v}| \approx 38$ m/s.
- $$|\vec{a}_t| = \frac{\vec{a}\vec{v}}{|\vec{v}|} \approx 3,5 \text{ m/s}^2$$
$$|\vec{a}_n| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_n|} \approx 9,2 \text{ m/s}^2$$

**2.10**. Tocarà al terra a 20 m de distància de la paret.

**2.11**. $T = 14$ s y $v = 1,8$ m/s. I si està a 3 m $T = 14$ s y $v = 1,3$ m/s

**2.12**. a) $v = 20,7$ m/s, b) $l = 224$ Km, c) $\approx 238000$ voltes d) $a_n = 2857$ m/s$^2$, e) Les aspes.

**2.13**. L'equació del moviment que ens dónen és la d'un moviment harmònic simple d'amplitud $A = 7$ cm i freqüència angular $\omega = 6\pi$ s$^{-1}$. La freqüència es troba a partir de la freqüència angular:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3 \quad \text{s}^{-1}.$$

El periode:

$$T = \frac{1}{f} = 0,3 \quad \text{s}.$$

L'amplitud, com hem dit, és $A = 7$ cm. El primer instant en què la partícula està a la posició d'equilibri és el primer valor de $t$ per al que el cosinus es fa zero:

$$\cos 6\pi t = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\pi t = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t = 0,08 \quad \text{s}.$$

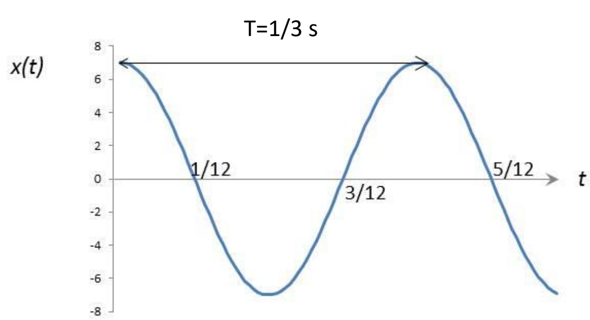
Per saber en quin sentit es mou a $t = 0,08$ s calcularem la velocitat que té. L'equació de la velocitat la obtenim derivant l'equació de la posició:

$$v = -42(\text{cm/s})\pi \sin 6\pi t.$$

I la velocitat en l'instant $t = 0,08$ s serà:

$$v = -42\pi \quad \text{cm/s},$$

que és la mínima. Això vol dir que s'allunya del punt d'equilibri. Com la posició i la velocitat van desfassades $\pi/2$ podríem haver deduït que quan la posició és zero la velocitat serà o màxima o mínima. Al gràfic veiem que quan la posició és zero el cos es segueix movent cap a les $x$'s negatives; per això té la velocitat negativa.




En aquest moment hauran recorregut una distància $A$, o sigui, 7 cm.

**2.14**. a) Gràfica de un cosinus, com la de l'exercici anterior (canviant els nombres), b) En valor absolut: $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 10$ cm, $d_3 = 17$ cm i $d_4 = 20$ cm.

# 3. Lleis de Newton

**3.1**. $\vec{a} = (4, -2)$ m/s$^2$. Tota l'acceleració és tangencial.

**3.2**. (a) $a = 0,7$ m/s$^2$; (b) $t = 7,5$ s; (c) $d = 20$ m; (d) Se seguirà movent a velocitat constant (e) No es mou, $F_R = 3,8$ N.

**3.3**. a) $F_R = 15$ N (no es mou); b) Al principi $F_R = 16$ N, i un cop està en moviment $F_R = 12$ N.

**3.4**. a) $T_1 = 417$ N; b) $T_2 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}T_1 \approx 305$ N; $T_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}T_1 \approx 216N$.

**3.5**. $5,2$ m/s$^2$.

**3.6**. a) $0,3$ i $0,2$ b) 49 N.

**3.7**. Es mou cap a l'esquerra:

$$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} g \approx 1,5 \mathrm{m/s}^2 \qquad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\sin\alpha + 1) \approx 34 \text{ N.}$$

Si el coeficient és igual a $0,23$ o major, el sistema no es mourà:

$$\mu = \tan\alpha - \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{\cos\alpha}$$

**3.8**. a) 15 Kg b)$1,96$ m/s$^2$.

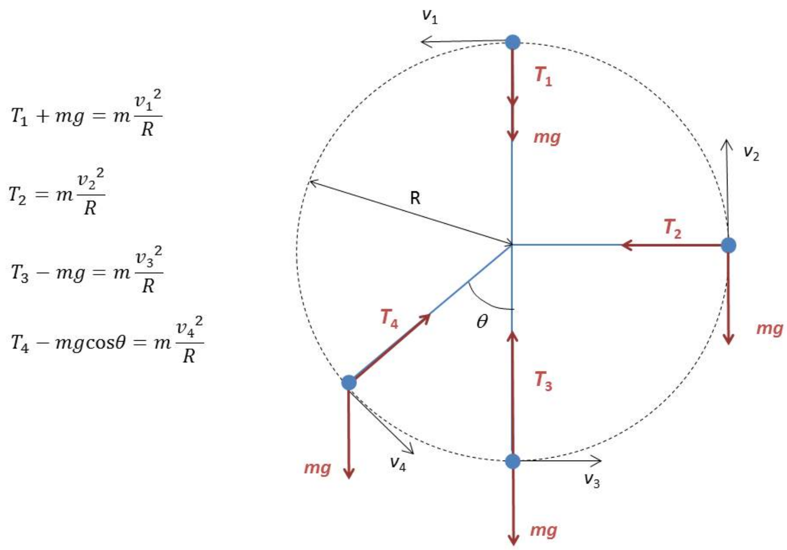
**3.9**. En el punt més alt l'esquema de forces serà:

$$T + mg = F_C = m\frac{v^2}{R},$$

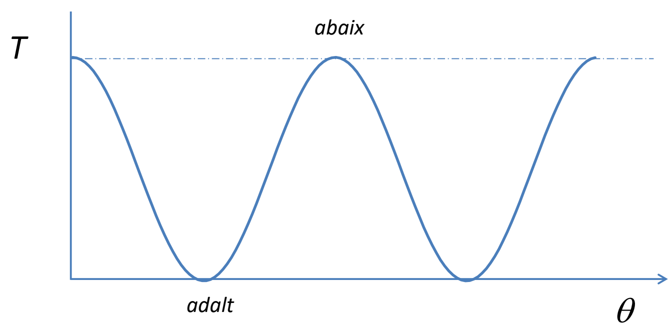
on $T$ és la tensió de la corda, $m$ la massa ($m = 3$ Kg), $g$ l'acceleració de la gravetat, $F_C$ la forá centrípeta, $v$ la velocitat del cos, i $R$ és la longitud de la corda ($R = 0,6$ m). La velocitat mínima serà aquella per a la que no hi ha tensió:

$$v_{min} = \sqrt{Rg} = 2,42 \quad \mathrm{m/s}.$$

Si la velocitat supera aquest valor la corda estarà tensionada, i podrem augmentar-la fins que la corda no resisteixi més (no pugui fer tanta tensió) i es trenqui. Si la velocitat és inferior, com $a_n$ igualment val $mv^2/R$, $R$ disminuirà, doncs la velocitat és inferior a la màxima, de manera que en el punt més alt (o abans) el cos deixarà de tenir una trajectòria circular i farà una espécie de paràbola.




També ens podem dibuixar la tensió de la corda en funció de l'angle, suposant que la velocitat de gir sigui constant:




De manera que el punt més desfavorable, on caurà l'aigua si la galleda no va suficientment ràpid, serà el punt superior.

**3.10**. En l'esquema de l'exercici anterior podem veure com, si la velocitat de rotació és uniforme, el punt en que la tensió és major és l'inferior, perqué el pes s'ha de contrarrestar. També ho podem veure escrivint:

$$T = m\,\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right).$$

La tensió serà màxima per el màxim valor del cosinus, és a dir, quan valgui 1 ($\theta = 0$). Així que si en aquest punt la tensió no supera els 10 N, no els superarà a la resta del recorregut. Per tant:

$$m\frac{v^2}{R} = T_{màx} - mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{RT}{m} - gR} = 6,2 \quad \mathrm{m/s}.$$

**3.11**. $r = \frac{m_2}{m_1}\frac{T^2}{4\pi^2}g$. Si hi hagués fregament entre $m_1$ i la taula, acabaria parant.

**3.12**. (a) $F = 0,23$ N. (b) $\Delta\, t = 1,8$ s.

**3.13**. $\kappa = 98$ N/m. Sí, el movimient serà harmònic, i de periode $T = 0,63$ s. L'equació del moviment és $y(t) = y_o - 3\cos(9,9t)$ [en cm], amb $y_o = -\frac{mg}{\kappa} = 10$ cm.

# 4. Treball i energia

**4.1**. Adquiriran la mateixa energía cinètica, però el cotxe adquirirà més moment i el gra més velocitat. La segona llei és $F = \frac{dp}{dt}$

**4.2**. a) 240 joules, b) $-178,4$ joules, c) $63,6$ joules.

**4.3**. a) 10800 joules, b) 2700 joules, c) 43200 joules, d) $-10800$ joules.

**4.4**. a) $W_R = -588$ joules $W_P = 0$; b) $W_R = -509$ joules $W_P = -1960$ joules.

**4.5**. L'energia potencial de l'aigua que cau (en valor mig) en un segon és:

$$E_P = mgh = 1,4 \cdot 10^6 \cdot 9,8 \cdot 128 = 1760 \cdot 10^3 \quad \text{Kjoule},$$

si considerem que a $h = 0$ l'energia potencial és zero (cosa que sempre podem fer, doncs el que ens importa és la variació d'energia potencial a la caiguda). Si la meitat d'aquesta energia es convertís en energia elèctrica tindríem:

$$E_{elec} = 878 \cdot 10^3 \quad \text{Kjoule/s} = 878 \cdot 10^3 \quad \text{Kwatt}$$

La força gravitatòria ha fet el treball. Quan l'aigua entra en contacte amb les pales de la turbina, el que provoca el moviment és la força de contacte.

**4.6**. Quan un motor treballa a velocitat constant la potència la podem calcular com:

$$P = F \cdot v.$$

En aquest cas la força és el pes màxim, $(1200 + 800)g$. Per tant:

$$P = 45000 \quad \text{watts}$$

**4.7**. En un dia es consumeixen $10^7$ litres d'aigua ($= 10^7$ Kg d'aigua). Si els dipòsits estan a 100 m d'altura respecte del riu la variació de l'energia potencial corresponent és:

$$\Delta E_P = mg\Delta h = 10^7 \cdot 9,8 \cdot 100 = 9,8 \cdot 10^9 \quad \text{joules.}$$

La potència ve donada pel quocient entre aquesta energia i el temps que es triga a elevar l'aigua (12 h= 43200 s):

$$P = \frac{\Delta E_P}{\Delta t} = 227 \quad \text{Kwatt.}$$

Que, atès que 1 CV (cavall de vapor)=735 watt, és el mateix que 309 CV.

**4.8**. $\cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{2Rg} \Rightarrow \alpha \approx 45°$.

**4.9**. La variació d'energia potencial a una altura de $3,2$ m és:

$$\Delta E_P = mg \cdot 3,2 \approx 627,2 \quad \text{joules.}$$

L'energia cinètica final és:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \approx 16,9 \quad \text{joules.}$$

Per tant, l'energia mecànica perduda per fregament serà:

$$627,2 - 16,9 \approx 610 \quad \text{joules.}$$

Per a calcular el coeficient de fregament hem de posar en relació el treball fet pel fregament ($F_R$) amb aquesta energia perduda. El treball és:

$$W_{F_R} = F_R d.$$

On $d$ és la longitud per on llisca la nena pel tobogan (on actua el fregament). Per geometria:

$$\sin\alpha = \frac{h}{d},$$

on $\alpha$ és l'angle d'inclinació del tobogan (20°). D'altra banda, podem veure en el dibuix que la força de fregament és:

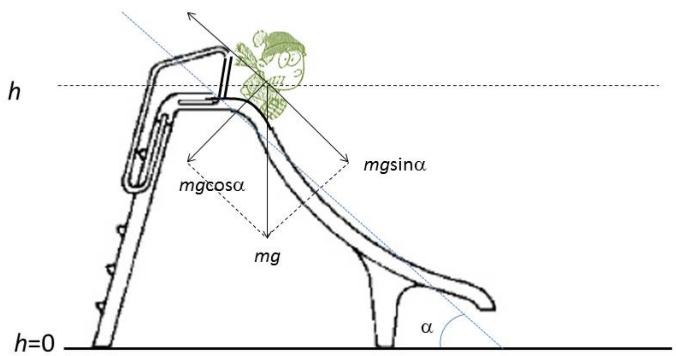
$$F_R = \mu mg\cos\alpha.$$

De forma que finalment podem escriure:

$$\mu = \frac{W_{F_R}}{mgd\cos\alpha} = \frac{W_{F_R}}{mgh}\tan\alpha.$$

Substituint els valors corresponents (tots són coneguts) ens queda:

$$\mu \approx 0,35.$$




**4.10**. $x = \left(\frac{2mgh}{\kappa}\right)^{1/2} \approx 2,8$ cm, $v = 2,8$ m/s.

**4.11**. (a) $v = 35,5$ m/s. (b) $W = 630$ joules

**4.12**. L'equació de la trajectòria d'un moviment harmònic simple és:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

i la velocitat:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

L'energia cinètica és:

$$E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2,$$

i la potencial:

$$E_P(t) = \frac{1}{2}\kappa x^2,$$

on la constant recuperadora $\kappa$ es relaciona amb la freqüència angular com segueix:

$$m\omega^2 = \kappa.$$

Per trobar l'elongació a la qual s'igualen energia cinètica i potencial les igualem:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow \cos^2(\omega t + \varphi) = \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Els quadrats de les funcions sinus i cosinus s'igualen en els angles (en radians):

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$$

i el seu valor és:

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cdots
\end{gathered}$$

De manera que l'elongació –en valor absolut– en aquests punts és:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}A.$$

En l'exemple de l'exercici anterior el valor numèric és $x = 0,042$ m i $E_C = E_P \approx 315$ joules.

**4.13**. $\frac{W_2}{W_1} = 3$.

**4.14**. a)$E = \frac{3}{4}\frac{mv_o^2}{2}$, b) $\mu_c = \frac{3}{16\pi}\frac{v_o^2}{rg}$, c) Se pararà abans de donar la segona volta.