LLISTA 4. ICD 2020-2021

1. a) $x^4 - 3x - 1$ té almenys dues arrels reals.

$f(x) = x^4 - 3x - 1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ja que és un polinomi

Aplicarem Bolzano (ho podem fer pq f és contínua).

- $f(0) = -1 < 0$
- $f(2) = 2^4 - 3\cdot 2 - 1 = 16 - 6 - 1 = 9 > 0$

$\xRightarrow[\text{Bolzano}]{} \exists\, c_1 \in (0,2)$ t.q. $f(c_1) = 0$.

f: [0,2]->R cont.

- $f(-1) = (-1)^4 - 3\cdot(-1) - 1 = 1 + 3 - 1 = 3 > 0$

$f(0) < 0$

$\xRightarrow[\text{Bolzano}]{} \exists\, c_2 \in (-1,0)$ t.q. $f(c_2) = 0$.

f: [-1,0]->R cont.

Hem vist que $\exists\, c_1 \in (0,2)$ i $c_2 \in (-1,0)$ t.q. $f(c_i) = 0$

$\Rightarrow$ Almenys hi ha dues arrels.

b) $e^x = x^2$ té solució a $(-1,0)$.

$f(x) := e^x - x^2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ja que e^x i x^2 són contínues.

$f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$

$f(0) = e^0 - 0^2 = 1 > 0$

$\xRightarrow[\text{Bolzano (f cont.)}]{} \exists\, c \in (-1,0)$ t.q. $f(c) = 0$

f: [-1,0]->R cont.

$\Rightarrow \exists\, c \in (-1,0)$ t.q. $e^c - c^2 = 0 \iff$

$\exists\, c \in (-1,0)$ t.q. $e^c = c^2$

$\Rightarrow e^x = x^2$ té solució a $(-1,0)$.

#

2. Dem. que $f: [0,1] \to [0,1]$ contínua té un punt fix, i.e. $\exists x \in [0,1]$ t.q. $f(x) = x$

Considerem $g(x) = f(x) - x$. g és contínua a $[0,1]$ ja que f ho és i x també.

Notem que $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$.

Si $f(0) = 0$ alashores ja estem pq $x=0$ seria un punt fix. Sup. $f(0) \neq 0$. Alashores com $f([0,1]) \subset [0,1]$ tenim $f(0) > 0$. Així, $g(0) = f(0) > 0$.

Ara bé, $g(1) = f(1) - 1$.

Com abans, hi ha dos casos:

i) Si $f(1) = 1 \Rightarrow x = 1$ és un punt fix.

ii) Si $f(1) \neq 1 \Rightarrow f(1) \in [0,1)$ i.e. $0 \leq f(1) < 1$

$\Rightarrow \underbrace{f(1) - 1}_{g(1)} < 0$. Així, tenim:

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ cont. a } [0,1] \\ g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists c \in [0,1] \text{ t.q. } \underset{f(c)-c}{g(c)} = 0$$

0<c<1

$\Rightarrow \exists c \in [0,1]$ t.q. $f(c) = c \Rightarrow$

$\Rightarrow c$ és un punt fix.

Casos:

1) f(0)=0. LLavors el punt fix és x=0.

2) f(1)=1. Llavors el punt fix és x=1.

3) f(0) no és 0 i f(1) no és 1. Llavors, x=0 i x=1 NO són punts fixos.

Feu l'argument amb la funció.

3. $\left.\begin{array}{l} f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ contínua} \\ f(2)=2 \\ f(-2)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(f(x))^2=4$ té almenys dues solucions a $[-2,2]$.

Considerem $g(x)=x^2+(f(x))^2-4$ és contínua ($x^2, f(x)^2, 4$ són contínues)

<u>Obs</u>: $g(2)=2^2+(f(2))^2-4=4+4-4=4$

$g(-2)=(-2)^2+(f(-2))^2-4=4+4-4=4$

Farem servir el T$^{\underline{a}}$ Valor mig:

$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ contínua} \\ \forall\ z\in[f(a),f(b)] \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c\in[a,b]: f(c)=z$

Apliquem aquest resultat a la f de l'enunciat amb $z=0\in[f(-2),f(2)]=[-2,2]$ (De fet, això és Bolzano)

$\Longrightarrow \exists\ c\in[-2,2]=[a,b]$ t.q. $f(c)=0$.

De fet $c\neq -2$ i 2 ja que $\left\{\begin{array}{l} f(-2)=-2\neq 0 \\ f(2)=2\neq 0 \end{array}\right.$

Per tant, $\exists\ c\in(-2,2)$ t.q. $f(c)=0$.

Ara apliquem Bolzano a $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$ contínua.

i) $\left.\begin{array}{l} g(-2)=4>0 \\ g(c)=c^2+\underset{0}{\underbrace{(f(c))^2}}-4=c^2-4\underset{\uparrow}{<}0 \end{array}\right\} \underset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists\ x_1 \in(-2,c)$ t.q. $g(x_1)=0$

g cont en [-2,c]

$-2<c<2 \Longrightarrow c^2<4$

ii) $\left.\begin{array}{l} g(2)=4>0 \\ g(c)=c^2-4\underset{\uparrow}{<}0 \end{array}\right\} \underset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists\ x_2\in(c,2)$ t.q. $g(x_2)=0$

$-2<c<2$

g cont. en [c,2]

$\Longrightarrow \exists$ almenys dues arrels $x_1,x_2\in[-2,2]$

(de fet $x_1\in(-2,c)$ i $x_2\in(c,2)$)

$\#$.

4. $\left.\begin{array}{l} f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ contínua} \\ \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}_{(*)} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ és acotada.

$(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0$ t.q. $\forall x > K \quad |f(x)| < \varepsilon$.

Fixem $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists K = K(\varepsilon) > 0$ t.q. $\forall x > K \quad |f(x)| < 1$

i.e. $\underline{|f(x)| < 1 \quad \forall x \in [K, +\infty)}$. (1)

x està en (k,+inf)

Ara bé, a l'interval $[0, K]$, f és contínua

$\underset{\text{T}^{\text{a}}\text{ Weierstraß}}{\Longrightarrow}$ f és acotada a $[0,K]$ i.e. $\underbrace{|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,K]}_{(2)}$

Prenent, $C = \max(1, M)$, tenim:

$$|f(x)| \leq C \qquad \forall x \in [0,+\infty)$$

ja que si $\left| \begin{array}{l} x \in [0,K] \underset{(2)}{\Rightarrow} |f(x)| \leq M \leq C \\ x \in [K,+\infty) \underset{(1)}{\Rightarrow} |f(x)| < 1 \leq C \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $\underline{f \text{ és acotada}}$

#.

5. $e^x + \sin x = \pi$

(a) Dem que té una única solució positiva ($x_0>0$).

$f(x) = e^x + \sin x - \pi$ contínua a $\mathbb{R}$ (e^x, $\sin x$ i π ho són)

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 + \sin 0 - \pi = 1 + 0 - \pi = 1-\pi < 0 \\ f(\pi) = e^\pi + \sin\pi - \pi = e^\pi + 0 - \pi = e^\pi - \pi > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\underset{\substack{\text{Bolzano} \\ f \text{ cont.}}}{\Longrightarrow} \exists\, x_0 \in (0,\pi)$ t.q. $f(x_0) = 0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 > 0$ (almenys un) que és solució de l'eq.

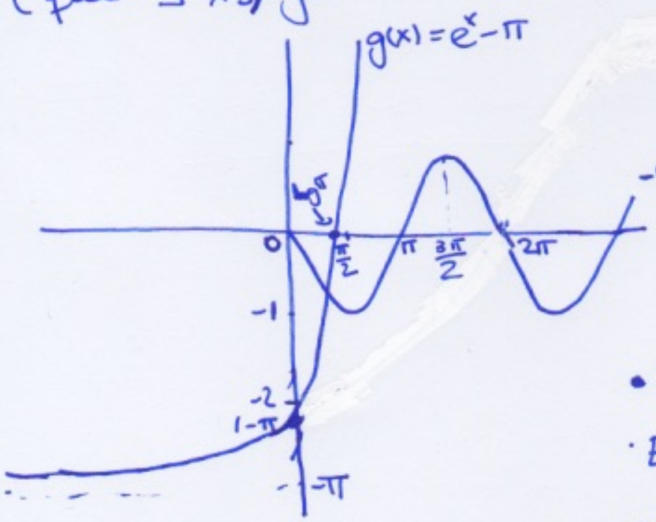
Ara hem de veure que no poden haver-hi + solucions.

~~Suposem que $\exists\, x_1, x_2 > 0$ t.q. $f(x_1) = f(x_2) = 0$~~

Considerem $\begin{array}{l} g(x) = e^x - \pi \\ h(x) = -\sin x \end{array} \Rightarrow \{ f(x) = 0 \iff g(x) = h(x)$

Per tant, hem de veure que $\exists!\, x_0 > 0$ t.q. $g(x_0) = h(x_0)$

(que $\exists\, x_0 > 0$ ja ho hem vist).



Obs: · g és creixent (pq e^x ho és)

· $|h(x)| \leq 1$

· $g(\log\pi) = e^{\log\pi} - \pi = \pi - \pi = 0$

• En $[0, \pi/2]$, $h(x)$ decreix

· En $[\pi/2, \pi]$, $h(x) < 0$

• $g(\pi/2) = e^{\pi/2} - \pi > 1 \underset{\substack{g \text{ creix} \\ \text{en } \mathbb{R}}}{\Longrightarrow} \forall x > \frac{\pi}{2}$, $g(x) \geq g(\frac{\pi}{2}) > 1$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall x > \frac{\pi}{2},\ g(x) > 1 \\ \qquad\qquad\quad h(x) < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No es poden tallar.

• En $[0, \pi/2]$, h decreix i g creix,

$\Rightarrow$ com a molt es tallaran una vegada (i ho fan per Bolzano).

Així, hem vist que si $x>0 \Rightarrow \exists!$ solució de $f(x)=0$.

Ara bé, si $x<0 \Rightarrow f(x) = \underbrace{e^x}_{\wedge 1} + \underbrace{\sin x}_{\leq 1} - \pi < 1+1-\pi = 2-\pi < 0$

$\Rightarrow f$ mai serà 0 a $x<0$.

$\Longrightarrow \exists!\ x_0>0$ t.q. $f(x_0)=0$

#.

b) Pels càlculs anteriors:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1-\pi < 0 \\ f(\log\pi) = e^{\log\pi} + \sin(\log\pi) - \pi = \pi - \pi + \sin(\log\pi) \\ \quad = \sin(\underbrace{\log\pi}_{\in [0,\pi/2]}) > 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{Bolz.} \\ f \text{ cont.}}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists\ c \in (0, \underbrace{\log\pi}_{\approx 1{,}14})\ \text{t.q. } f(c)=0$$

Ara provariem amb els intervals $[0, \frac{\log\pi}{2}]$ i $[\frac{\log\pi}{2}, \log\pi]$ i així aniríem acotant l'interval a on tenim la sol. fins a aconseguir un de longitud menor que 1.

Aquí és + fàcil, per exemple:

$$\left.\begin{array}{l} f(1/2) = e^{1/2} + \sin(1/2) - \pi < 0 \\ f(\log\pi) > 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{Bolz.} \\ f \text{ cont.}}}{\Longrightarrow} \exists\ c \in \overbrace{(1/2, \log\pi)}^{\text{longitud} < 1} \text{ t.q. } f(c)=0$$

#.

6. $\left.\begin{array}{l} f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ contínua} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ és acotada

Té f necessàriament màx. abs. en $(0,1]$?

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \iff \forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0$ t.q. $0<x<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

Per exemple, sigui $\varepsilon=1 \Rightarrow \exists \delta>0$ t.q. $0<x<\delta$, $|f(x)-1|<1$

i.e. si $0<x<\delta$, $-1<f(x)-1<1$

$\iff 0<f(x)<2$

$\iff |f(x)|<2$

Ara bé, $f_{|[\delta,1]} : [\delta,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ contínua

$\underset{\text{T}^{\text{a}}\text{ Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists M$ t.q. $|f(x)|\leq M \;\; \forall x\in[\delta,1]$.

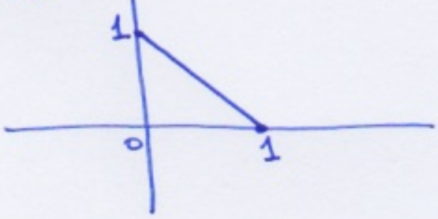
Així, $|f(x)| \leq \begin{cases} 2, & 0<x<\delta \\ M, & \delta\leq x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow |f(x)|\leq \max(2,M) \;\; \forall x\in(0,1]$

$\Rightarrow f$ acotada.

f <u>no</u> té necessàriament màx. abs. en $(0,1]$.

Per exemple: $f(x)=1-x$ contínua a $(0,1]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$



7. $f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ cont. no acotada ni inf. ni sup.

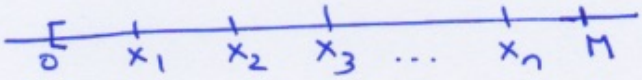
$\Longrightarrow$ i) f s'anul·la en infinits punts.

ii) No és cert per funcions $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ amb mateixes condicions.

i) Sup. que $\exists$ un nombre finit de punts on f s'anul·la

i.e., $f(x_1)=f(x_2)=\dots=f(x_n)=0$, $0\le x_1<x_2<\dots<x_n$

i no n'hi han + (i.e. $\nexists\, x>x_n$ t.q. $f(x)=0$).



Considerem $M>x_n \Rightarrow [0,+\infty)=\underbrace{[0,M]}_{\text{interval tancat i acotat}}\cup(M,+\infty)$

$f:\underbrace{[0,M]}_{\text{tancat i acotat}}\longrightarrow\mathbb{R}$ cont. $\xRightarrow[\text{T}^{\text{a}}\text{ Weiers.}]{}$ f acotada i.e. $\exists\, A,B$ t.q. $A\le f(x)\le B \quad \forall x\in[0,M]$. (podem sup. $A<0$ i $B>0$).

però f a $[0,+\infty)$ no està acotada ~~sup~~.

$\Longrightarrow$ f no està acotada a $(M,+\infty)$

i.e. $\forall K>0 \;\exists z_1\in(M,+\infty)\;\; f(z_1)>K$

$\forall \tilde{K}<0 \;\exists z_2\in(M,+\infty)\;\; f(z_2)<\tilde{K}$

Triem $K=2B>0$, $\tilde{K}=2A<0 \Rightarrow$

f en [z_1,z_2] és continua

$\Rightarrow \exists\; z_1\in(M,+\infty)$ t.q. $f(z_1)>K=2B>0$

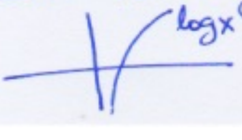
$\exists\; z_2\in(M,+\infty)$ t.q. $f(z_2)<\tilde{K}=2A<0$ $\xRightarrow[\text{Bolz.}]{f\text{ cont.}}$

$\Rightarrow \exists\, c\in(z_1,z_2)$ t.q. $f(c)=0$ (sup. $z_1<z_2$ sinó es fa anàlog.).

Ara, $z_1>M \Rightarrow c>M$ i és un zero de f.

$\Longrightarrow$ Hem trobat un zero $c>x_n$. Contradicció!!!

ii) Fals, contraexemple $f(x)=\log x$, $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ cont. no acotada ni inf. ni sup. i f només té un zero en $x=1$!!!



#.