LENGUAJES INCONTEXTUALES

Abril y Mayo de 2023

Utilizando los autómatas que estudiamos en el tema anterior, los autómatas finitos, vimos cómo se puede diseñar el analizador léxico de un compilador. Sin embargo, los autómatas finitos no se pueden utilizar para diseñar el analizador sintáctico del compilador. Para ello, nos hace falta utilizar autómatas más complejos, que son los llamados autómatas con pila, los cuales tienen asociada una pila que utilizan como elemento de memoria. Al igual que los autómatas finitos, los autómatas con pila tienen también asociada una cinta de entrada dividida en celdas, en las cuales se registra la palabra de entrada que suministremos al autómata.

Definición de un autómata con pila

Un autómata con pila es una estructura $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ donde:

(1) K es un conjunto finito y no vacío de estados.

(2) Σ es un alfabeto finito, el alfabeto de entrada.

(3) Γ es un alfabeto finito, el alfabeto de la pila.

(4) $q_0 \in K$ es el estado inicial,

(5) $F \subseteq K$ es el conjunto de estados aceptadores (o estados finales),

(6) Δ es un conjunto finito de elementos de la forma $((p, a, b), (q, x))$ donde $p, q \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $b \in \Gamma \cup \{\lambda\}$ y $x \in \Gamma^*$.

Conceptos básicos

Si $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ es un autómata con pila, llamaremos transiciones a los elementos de Δ.

Al empezar el cómputo en un autómata con pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$, estaremos en el estado inicial q_0, tendremos una palabra $x \in \Sigma^*$ en la cinta de entrada y tendremos la pila vacía.

Si en un paso de cómputo de M, queremos aplicar una transición $((p, a, b), (q, x))$ donde $a \in \Sigma$ y $b \in \Gamma$, el símbolo b tiene que estar situado en la cima de la pila. Al aplicar entonces la transición, sucede lo siguiente:

(a) se pasa del estado p al estado q,

(b) se lee el símbolo a de la cinta de entrada,

(c) se reemplaza en la pila el símbolo b por x.

Análogamente, si en un paso de cómputo de M, queremos aplicar una transición $((p, \lambda, b), (q, x))$ donde $b \in \Gamma$, el símbolo b tiene que estar situado en la cima de la pila. Al aplicar entonces la transición, sucede lo siguiente:

(a) se pasa del estado p al estado q,

(b) no se lee ningún símbolo en la cinta de entrada,

(c) se reemplaza en la pila el símbolo b por x.

De manera similar se procede con los demás tipos de transiciones.

Si $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ es un autómata con pila, definimos una configuración de M como una palabra $\alpha p x \in \Gamma^* K \Sigma^*$.

Si en un paso de cómputo la configuración de M es $\alpha p x$, esto significa que el autómata M se encuentra en el estado p, x es la parte de la palabra de entrada que todavía no se ha leído y α es el contenido de la pila.

La noción de configuración nos permite entonces definir la noción de cómputo en un autómata con pila.

Cómputos en autómatas con pila

Supongamos que $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ es un autómata con pila y que $\alpha px, \beta qy$ son configuraciones de M. Entonces:

(1) Decimos que αpx produce βqy en un paso de cómputo, lo que representamos por $\alpha px \vdash_M \beta qy$, si en M podemos pasar de αpx a βqy aplicando una transición de Δ.

(2) Decimos que αpx produce βqy, lo que representamos por $\alpha px \vdash_M^* \beta qy$, si en M podemos pasar de αpx a βqy aplicando un número finito de de transiciones de Δ.

Lenguaje asociado a un autómata con pila

Supongamos que $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ es un autómata con pila.

(1) Una palabra $x \in \Sigma^*$ es reconocida (o aceptada) por M, si existe $q \in F$ tal que $\lambda q_0 x \vdash_M^* \lambda q \lambda$.

(2) Definimos el lenguaje reconocido (o aceptado) por M por

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* : x \text{ es reconocida por } M\}.$$

Por tanto, para que una palabra sea reconocida por un autómata con pila M, tiene que haber un cómputo en el autómata M que lea toda la palabra de entrada de manera que al final del cómputo se llegue a un estado aceptador y la pila quede vacía.

Ejemplo

Consideremos el autómata con pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ donde $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$ y Δ consta de las siguientes transiciones:

1. $((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$.
2. $((q_0, b, \lambda), (q_0, b))$.
3. $((q_0, c, \lambda), (f, \lambda))$.
4. $((f, a, a), (f, \lambda))$.
5. $((f, b, b), (f, \lambda))$.

Tenemos entonces el siguiente cómputo para la entrada $abbcbba$.

Ejemplo

estado	cinta	pila	transición
q_0	abbcbba	λ	–
q_0	bbcbba	a	1
q_0	bcbba	ba	2
q_0	cbba	bba	2
f	bba	bba	3
f	ba	ba	5
f	a	a	5
f	λ	λ	4

Ejemplo

Se observa que el autómata M, cuando está en el estado q_0, mete una a en la pila cada vez que lee una a en la cinta aplicando la transición 1, y mete una b en la pila cada vez que lee una b en la cinta aplicando la transición 2. Y así actúa el autómata hasta que entra una c en la cinta, en cuyo caso pasa al estado aceptador f aplicando la transición 3. Una vez que el autómata está en el estado f, cancela las a's que entren en la cinta con las a's que se encuentran en la pila aplicando la transición 4, y asimismo cancela las b's que entren en la cinta con las b's que se encuentran en la pila aplicando la transición 5. Entonces, para que al final del cómputo la pila quede vacía, ha de suceder que la parte de la entrada que aparezca después de la c en la entrada ha de coincidir con la inversa de la parte de la entrada que aparece antes de la c en la entrada. Por tanto,

$$L(M) = \{xcx^I : x \in \{a, b\}^*\}.$$