Exercici 24. Una dona va al mercat i un cavall trepitja el seu cistell i li trenca els ous. El cavaller s'ofereix a pagar-li els danys i pregunta quants ous portava. La dona no recorda el nombre exacte, pero sap que en agafar-los de dos en dos li'n sobrava un, el mateix li passava quan els agafava de tres en tres, de quatre en quatre, de cinc en cinc i de sis en sis. En canvi, quan els agafava de set en set, li quedava just. Quants ous portava com a minim? Aquest problema es troba en un text de l'India del segle VI.

Solucio 24

De l'enunciat extraiem que si x, es el nombre de ous tenim que $2|x-1$, $3|x-1$, $4|x-1$, $5|x-1$, $6|x-1$ i $7|x$, i que implica que tenim el seguent sistema de congruencies $x \equiv 1(mod 2)$ $x \equiv 1(mod 3)$ $x \equiv 1(mod 4)$ $x \equiv 1(mod 5)$ $x \equiv 1(mod 6)$ $x \equiv 0(mod 7)$, Solucionarem el seguent sistema de congruencies $x \equiv 1(mod 2)$ $x \equiv 1(mod 3)$ $x \equiv 1(mod 5)$ $x \equiv 0(mod 7)$, al tenir que $2, 3, 5, 7$ son coprimers sabem que existeix una unica solucio mod $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, calculem $n_1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \equiv 1(mod 2)$, clarament per $n_1 = 1$, es compleix que $2|105-1$ per $n_2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \equiv 1(mod 3)$, tenim que $n_2 = 1$, es compleix que $3|70-1$, ara tenim que $n_3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \equiv 1(mod 5)$, solucionarem la seguent equacio $1 = 42x - 5y$ com $42 = 5 \cdot 8 + 2$ i $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 42 \cdot 2 + 5 \cdot 16 = 5 \cdot 16 - 42 \cdot 2$, per tant -2 es l'invers de $42 mod 5$, com l'invers es unic modul 5 tennim que tambe es invers 3, per $n_4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \equiv 1(mod 7)$, per obtenir l'invers solucionem l'equacio $1 = 30x - 7y$, ara com tenim que $30 = 7 \cdot 4 + 2$ i $7 = 2 \cdot 4 - 1$, per tant tenim que $1 = 2 \cdot 4 - 7 = 30 \cdot 4 - 7 \cdot 17$, per tant l'invers de 30 mod 7 es 4, per tant la solucio del segon sistema de congruencies, es $x = 105 \cdot 1 \cdot 1 + 70 \cdot 1 \cdot 1 + 42 \cdot 3 \cdot 1 + 30 \cdot 4 \cdot 0 = 301$, sabem que aquesta solucio es unica modul 210, per tant per qualsevol k, $301 + 210k$, es solucio.

Recordem que voliem solucionar el sistema de conguruencies inicial, per tant, volem que $4|301 + 210k - 1$ i $4|301 + 210k - 1$, notem que per $k = 0$, es compleix, per tant tenim que per $x = 301$, es compleixen les 6 equacions, pero el problema ens demana la menor solucio com taota solucio es modul 210 si hi ha una solucio menor que 301 sera 91, ja que no hi ha menor solucio positiva, i tenim que 4 no divideix 91-1, per tant no soluciona $x \equiv 1(mod 4)$, per tant la dona com a minim portava 301 ous.