Ejercicio 1. Determinar si las siguientes fórmulas son satisfactibles, tautologías o contradicciones.

$\varphi_1 = P \to (Q \to \neg P)$,
$\varphi_2 = (P \to Q) \wedge (P \vee Q)$,
$\varphi_3 = ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R))$,
$\varphi_4 = (P \wedge Q) \to (P \vee Q)$,
$\varphi_5 = ((P \to Q) \to P) \to Q$,
$\varphi_6 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R))$.

Solución:

(a) $\varphi_1 \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \equiv \neg P \vee \neg Q$. Por tanto, ϕ_1 es satisfactible pero no tautología.

$\varphi_2 \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \equiv Q \vee (P \wedge \neg P) \equiv Q \vee F \equiv Q$. Por tanto, ϕ_2 es satisfactible pero no tautología.

φ_3 es tautología. Para comprobarlo, consideremos una σ-interpretación I donde $\sigma = \{P, Q, R\}$. Supongamos que $I((P \wedge Q) \to R)) = V$ y que $I(P) = V$. Tenemos que demostrar que $I(\neg Q \vee R) = V$. Si $I(Q) = F$, se sigue que $I(\neg Q \vee R) = V$. Supongamos entonces que $I(Q) = V$. Como $I((P \wedge Q) \to R)) = V$, $I(P) = V$ e $I(Q) = V$, se tiene que $I(R) = V$, y por tanto $I(\neg Q \vee R) = V$.

$\varphi_4 \equiv \neg P \vee \neg Q \vee P \vee Q$. Como $\neg P \vee P$ es una tautología, ϕ_1 es una tautología.

φ_5 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\phi_2) = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = V$ e $I'(Q) = F$, tenemos que $I'(\phi_2) = ((V \to F) \to V) \to F = (F \to V) \to F = V \to F = F$.

φ_6 es contradicción, ya que $\neg(P \to \neg(Q \vee R)) \equiv P \wedge \neg\neg(Q \vee R) \equiv P \wedge (Q \vee R) \equiv P \wedge (\neg Q \to R)$. Por tanto, tenemos que $\phi_3 \equiv \psi \wedge \neg\psi$ donde $\psi = P \to \neg(Q \vee R)$, y por consiguiente ϕ_3 es insatisfactible.

Exercicio 2. Consideremos las siguientes fórmulas:
$\varphi_1 = (P \to Q) \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q))$,
$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R))$,
$\varphi_3 = (\neg P \to (Q \to (P \wedge R))) \to R$,
$\varphi_4 = ((P \to \neg Q) \wedge (R \to Q)) \to \neg(P \wedge R)$.

Se pide entonces:

(1) Determinar si φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4 son tautologías, satisfactibles o contradicciones.

(2) Calcular formas normales conjuntivas de φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4.

Solución:

(1) La fórmula φ_1 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\varphi_1) = (V \to V) \to (V \to V) = V \to V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = F, I'(Q) = V$, tenemos que $I'(\varphi_1) = (F \to V) \to (V \to F) = V \to F = F$.

La fórmula φ_2 es contradicción, ya que $\neg(P \to \neg(Q \vee R)) \equiv P \wedge \neg\neg(Q \vee R) \equiv P \wedge (Q \vee R) \equiv P \wedge (\neg Q \to R)$. Por tanto, tenemos que $\phi_3 \equiv \psi \wedge \neg\psi$ donde $\psi = P \to \neg(Q \vee R)$, y por consiguiente φ_2 es insatisfactible.

La fórmula φ_3 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = I(R) = V$, tenemos que $I(\varphi_2) = (F \to (V \to V)) \to V = (F \to V) \to V = V \to V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = V, I'(Q) = V, I'(R) = F$, tenemos que $I'(\varphi_3) = (F \to (V \to F)) \to F = (F \to F) \to F = V \to F = F$.

La fórmula φ_4 es tautología. Una forma de demostrarlo es hacer la tabla de verdad de φ_4, y comprobar que la fórmula es siempre verdadera. Y otra manera más directa de demostrarlo es mediante el siguiente razonamiento. Tomemos una interpretación I tal que $I(((P \to \neg Q) \wedge (R \to Q))) = V$. Por tanto, tenemos que $I(P \to \neg Q) = V$ e $I(R \to Q) = V$. Tenemos que demostrar que $I(\neg(P \wedge R)) = V$. Para ello, supongamos por el contrario que $I(\neg(P \wedge R)) = F$. Por tanto, $I(P \wedge R) = V$, y por consiguiente tenemos que $I(P) = I(R) = V$. Ahora, como $I(P) = V$ e $I(P \to \neg Q) = V$, deducimos que $I(\neg Q) = V$. Y como tenemos que $I(R) = V$ e $I(R \to Q) = V$, deducimos que $I(Q) = V$. Como es imposible que $I(Q) = V$ e $I(\neg Q) = V$, deducimos que $I(\neg(P \wedge R)) = V$, que es lo que queríamos demostrar. Pon tanto, φ_4 es tautología.

(2) Tenemos que $\varphi_1 \equiv \neg(P \to Q) \vee ((P \vee Q) \to (P \wedge Q)) \equiv \neg(P \to Q) \vee (\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv (\neg Q \wedge (\neg P \vee P)) \vee (P \wedge Q) \equiv (\neg Q \wedge V) \vee (P \wedge Q) \equiv \neg Q \vee (P \wedge Q) \equiv (\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee Q)$ $\equiv (\neg Q \vee P) \wedge V \equiv \neg Q \vee P$.

Como φ_2 es contradicción, tenemos que $\varphi_2 \equiv P \wedge \neg P$.

Tenemos que $\varphi_3 \equiv \neg((\neg P \to (Q \to (P \wedge R)))) \vee R \equiv (\neg P \wedge \neg(Q \to (P \wedge R))) \vee R \equiv \neg P \wedge (Q \wedge \neg(P \wedge R)) \vee R \equiv \neg P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee R$ $\equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (R \vee \neg P \vee \neg R) \equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge V \equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q)$.

Y como φ_4 es tautología, tenemos que $\varphi_4 \equiv P \vee \neg P$.

Ejercicio 3. Poner las siguientes fórmulas en forma normal conjuntiva:

$\varphi_1 = (P \wedge \neg Q) \vee R$,
$\varphi_2 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R)$,
$\varphi_3 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P)$,
$\varphi_4 = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q)$.

Solución:

$\varphi_1 = (P \wedge \neg Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$,

$\varphi_2 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R) \equiv P \vee (\neg R \vee Q) \vee (\neg(\neg S \wedge \neg P) \vee \neg R) \equiv (P \vee \neg R \vee Q) \vee (S \vee P \vee \neg R) \equiv P \vee \neg R \vee Q \vee S$,

$\varphi_3 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P) \equiv (P \leftrightarrow R) \vee (\neg Q \vee P) \equiv ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \vee (\neg Q \vee P) \equiv (\neg P \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P \vee \neg Q \vee P) \equiv \neg R \vee P \vee \neg Q$,

$\varphi_4 = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q) \equiv (\neg(P \vee Q) \vee R) \vee (\neg T \vee Q) \equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \vee (\neg T \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \vee \neg T \vee Q) \equiv (\neg P \vee R \vee \neg T \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R \vee \neg T \vee Q) \equiv \neg P \vee R \vee \neg T \vee Q$.

Ejercicio 4. En una empresa de artes gráficas se quiere pintar un mapa de n países con 4 colores de manera que no haya dos países vecinos que tengan el mismo color. Formalizar entonces este problema mediante una fórmula en forma normal conjuntiva para que pueda ser resuelto por un SAT-solver.

Solución:

Para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 4$ consideramos la proposición Pij que significa que al país i le asignamos el color j.

(1) A cada país se le asigna un color.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ ponemos la cláusula

$Pi1 \vee Pi2 \vee Pi3 \vee Pi4$.

(2) A ningún país se le asigna más de un color.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $j, j' \in \{1, \ldots, 4\}$ con $j \neq j'$ añadimos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(3) A dos países vecinos no se les asigna el mismo color.

Para cada par de países $i, i' \in \{1, \ldots, n\}$ tales que i, i' son países vecinos y para cada color $j \in \{1, \ldots, 4\}$ añadimos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pi'j$.

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

Ejercicio 5. Consideremos el siguiente problema. Un consejo comarcal de una región quiere asignar una frecuencia de radio, de un total de 12 frecuencias disponibles, a la emisora municipal de cada uno de los 30 pueblos de la comarca. Para evitar que haya interferencias, se exige que dos pueblos situados a menos de 20 kilómetros de distancia emitan en distinta frecuencia. Disponemos de una tabla que contiene las distancias entre cada par de pueblos de la comarca. El problema consiste en asignar las frecuencias de radio a las emisoras de los pueblos de la comarca.

Se pide entonces representar el problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \ldots, 30\}$ y $j \in \{1, \ldots, 12\}$, considerar la proposición Pij que significa que "al pueblo i se le asigna la frecuencia j".

Solución: Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) Cada pueblo tiene asignada una frecuencia.

Para todo $i \leq 30$ ponemos la cláusula

$Pi1 \vee Pi2 \vee \ldots \vee Pi12$.

(2) Ningún grupo pueblo tiene asignada más de una frecuencia.

Para todo $i \leq 30$ y para todo $j, j' \leq 12$ con $j < j'$, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(3) Pueblos distintos situados a menos de 20 km tienen frecuencias distintas.

Para todo $i, i' \leq 30$ con $i < i'$ y para todo $j \leq 12$, si los pueblos i, i' están a menos de 20 km de distancia, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pi'j$.

La fórmula buscada es, entonces, la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

Ejercicio 6. Consideremos el siguiente problema. Una academia de idiomas tiene cuatro horas lectivas cada día laborable, es decir 20 horas semanales de clase numeradas de 1 a 20. Además, la academia tiene 10 grupos de estudiantes y 10 profesores. Para cada grupo j (con $j \leq 10$) disponemos de la lista L_j de horas semanales en las que tiene clase el grupo j. Y para cada profesor i (con $i \leq 10$) tenemos una lista R_i, que contiene las horas semanales en las que no puede dar clase el profesor i. Deseamos saber si es posible hacer los horarios de manera que se asigne a cada grupo un solo profesor y a cada profesor un solo grupo, respetando las restricciones de los profesores. Representar entonces este problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \ldots, 10\}$ y $j \in \{1, \ldots, 10\}$, considerar la proposición Pij que significa que "el profesor i da clase al grupo j".

Solución: Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) Cada grupo tiene asignado un profesor.

Para todo $j \leq 10$ ponemos la cláusula

$P1j \vee P2j \vee \ldots \vee P10j.$

(2) Ningún grupo tiene asignado más de un profesor.

Para todo $j \leq 10$ y para todo $i, i' \leq 10$ con $i \neq i'$, ponemos la cláusula

$\neg(Pij \wedge Pi'j) \equiv \neg Pij \vee \neg Pi'j.$

(3) Ningún profesor da clase a más de un grupo.

Para todo $i \leq 10$ y para todo $j, j' \leq 10$ con $j \neq j'$, ponemos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'.$

(4) Se respetan las restricciones de los profesores.

Para todo $i \leq 10$ y para todo $j \leq 10$, si $R_i \cap L_j \neq \emptyset$ ponemos la cláusula

$\neg Pij.$

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2), (3) y (4).

Ejercicio 7. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\square$ se deduce del conjunto de cláusulas $\{P \vee Q \vee \neg R, \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q\}$.

Solución:

Tenemos la siguiente prueba por resolución:

1. $P \vee Q \vee \neg R$ entrada
2. $\neg P$ entrada
3. $P \vee Q \vee R$ entrada
4. $P \vee \neg Q$ entrada
5. $P \vee Q$ (1,3)
6. P (4,5)
7. $\square$ (2,6)

Ejercicio 8. Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ donde:

$\varphi_1 = \neg E \rightarrow (\neg O \vee (L \wedge R))$,

$\varphi_2 = \neg E$,

$\varphi_3 = O$,

$\varphi = L$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi\}$ es insatisfactible. En primer lugar, hemos de encontrar una forma normal conjuntiva de φ_1. Tenemos que $\varphi_1 \equiv E \vee (\neg O \vee (L \wedge R)) \equiv (E \vee \neg O \vee L) \wedge (E \vee \neg O \vee R)$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1. $E \vee \neg O \vee L$ input
2. $E \vee \neg O \vee R$ input
3. $\neg E$ input
4. O input
5. $\neg L$ input
6. $\neg O \vee L$ (1,3)
7. L (4,6)
8. $\square$ (5,7)

Ejercicio 9. Demostrar por resolución que la fórmula $P \to Q$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{T \to Q, \neg R \to \neg S, P \to U, \neg T \to \neg R, U \to S\}$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas

$$\{T \to Q, \neg R \to \neg S, P \to U, \neg T \to \neg R, U \to S, \neg(P \to Q)\}$$

es insatisfactible. En primer lugar, hemos de poner las fórmulas del conjunto anterior en forma normal conjuntiva. Tenemos que $T \to Q \equiv \neg T \vee Q$, $\neg R \to \neg S \equiv R \vee \neg S$, $P \to U \equiv \neg P \vee U$, $\neg T \to \neg R \equiv T \vee \neg R$, $U \to S \equiv \neg U \vee S$ y $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución.

1. $\neg T \vee Q$ input
2. $R \vee \neg S$ input
3. $\neg P \vee U$ input
4. $T \vee \neg R$ input
5. $\neg U \vee S$ input
6. P input
7. $\neg Q$ input
8. U (3,6)
9. $\neg T$ (1,7)
10. $\neg R$ (4,9)
11. $\neg S$ (2,10)
12. $\neg U$ (5,11)
13. $\square$ (8,12)

Ejercicio 10. Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ donde
$\varphi_1 = A \to \neg B \vee C$,
$\varphi_2 = A \to \neg B \vee D$,
$\varphi_3 = \neg G \to \neg E \vee \neg F$,
$\varphi_4 = \neg H \to \neg G \vee \neg D$,
$\varphi_5 = A \wedge B \wedge F \wedge E$ y
$\varphi = H$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \neg\varphi\}$ es insatisfactible. En primer lugar, hemos de computar formas normales conjuntivas de las fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Tenemos que $\varphi_1 \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$, $\varphi_2 \equiv \neg A \vee \neg B \vee D$, $\varphi_3 \equiv G \vee \neg E \vee \neg F$ y $\varphi_4 \equiv H \vee \neg G \vee \neg D$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1.	$\neg A \vee \neg B \vee C$	input
2.	$\neg A \vee \neg B \vee D$	input
3.	$G \vee \neg E \vee \neg F$	input
4.	$H \vee \neg G \vee \neg D$	input
5.	A	input
6.	B	input
7.	F	input
8.	E	input
9.	$\neg H$	input
10.	$\neg B \vee D$	(2,5)
11.	D	(6,10)
12.	$G \vee \neg F$	(3,8)
13.	G	(7,12)

14. $H \vee \neg D$ (4,13)

15. H (11,14)

16. $\square$ (9,15)