Exercici 28.

Calculeu, "a mà", les potències següents: $5^{1020} \pmod{11}$, $6^{40} \pmod{33}$, $7^{135} \pmod{10}$ i $30^{45} \pmod{15}$.

Solució 28.

$5^{1020} \pmod{11}$ o $[5^{1020}]_{11}$

Busquem primer els patrons:

1. $[5^1]_{11} = [5]_{11}$
2. $[5^2]_{11} = [3]_{11}$
3. $[5^3]_{11} = [3 \times 5]_{11} = [4]_{11}$
4. $[5^4]_{11} = [4 \times 5]_{11} = [-2]_{11}$
5. $[5^5]_{11} = [-2 \times 5]_{11} = [1]_{11}$

Observem que cada 5 exponenets es repeteixen els residus. Per tant, fem la divisió de 2010/5 i s'observa què 5|2010.

Com $[2010]_5 = [5]_5 \Rightarrow [5^{1020}]_{11} = [1]_{11}$

Per tant, $5^{1020} \pmod{11} = 1 \pmod{11}$.

$6^{40} \pmod{33}$ o $[6^{40}]_{33}$

Aplicant el teorema xinès del residu podem deduir què:

$[6^{40}]_{33} \Rightarrow [6^{40}]_{11} \wedge [6^{40}]_3 \Rightarrow [6^{40}]_{11} \wedge [0]_3$

Busquem els patrons:

1. $[6^1]_{11} = [6]_{11}$
2. $[6^2]_{11} = [3]_{11}$
3. $[6^3]_{11} = [3 \times 6]_{11} = [-4]_{11}$
4. $[6^4]_{11} = [-4 \times 6]_{11} = [-2]_{11}$
5. $[6^5]_{11} = [-2 \times 6]_{11} = [-1]_{11}$
6. $[6^6]_{11} = [-1 \times 6]_{11} = [5]_{11}$
7. $[6^7]_{11} = [5 \times 6]_{11} = [-3]_{11}$
8. $[6^8]_{11} = [-3 \times 6]_{11} = [4]_{11}$
9. $[6^9]_{11} = [4 \times 6]_{11} = [2]_{11}$
10. $[6^{10}]_{11} = [2 \times 6]_{11} = [1]_{11}$

Observem que cada 10 exponenets es repeteixen els residus. Per tant, fem la divisió de 40/10 i s'observa què 10|40.

Com $[40]_{10} = [10]_{10} \Rightarrow [6^{40}]_{11} = [1]_{11} = [12]_{11}$

Per l'altra banda tenim què $[12]_3 = [0]_3$

Per tant, $6^{40} \pmod{33} = 12 \pmod{33}$.

$7^{135} \pmod{10}$ o $[7^{135}]_{10}$

Aplicant el teorema xinès del residu podem deduir què:

$[7^{135}]_{10} \Rightarrow [7^{135}]_5 \wedge [7^{135}]_2 \Rightarrow [7^{135}]_5 \wedge [1]_2$

Busquem els patrons:

1. $[7^1]_5 = [2]_5$
2. $[7^2]_5 = [4]_5$
3. $[7^3]_5 = [4 \times 2]_5 = [3]_5$
4. $[7^4]_5 = [3 \times 2]_5 = [1]_5$

Observem que cada 4 exponenets es repeteixen els residus. Per tant, fem la divisió de 135/4 i s'observa què $4|135 + 3 \Rightarrow [135]_4 = [3]_4$.

Com $[135]_4 = [3]_4 \Rightarrow [7^{135}]_5 = [3]_5$

Per l'altra banda tenim què $[3]_2 = [1]_2$

Per tant, $7^{135} \pmod{10} = 3 \pmod{10}$.

$30^{45} \pmod{15}$ o $[3^{45}]_{15}$

$[3^{45}]_{15} = [0^{45}]_{15} = [0]_{15}$

Per tant, $30^{45} \pmod{15} = 0 \pmod{15}$.