Exercici 17. Sigui $n > 1$ un nombre natural i p el menor nombre natural primer que divideix n. Demostreu que si $p^3 > n$, llavors n és primer (i $p = n$) o bé $\frac{n}{p}$ és primer.

Solució 17. Ho resoldré per casos:

(a) Si n és primer , com p és el menor natural primer divisor de $n \Rightarrow n = p$.

(b) En cas contrari, si n no és primer, aleshores existeix $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = pq$, i $q \neq \pm 1$, vull veure que q és primer.
Ho faré per reducció a l'absurd, suposo que q no és primer i per tant $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{-1, 1\}$ tal que $q = q_1 q_2$, d'on tenim dues possibilitats: O bé $q_1 \leq q_2$, o bé $q_2 \leq q_1$.
En el primer cas ($q_1 \leq q_2$), tenim que $q = q_1 q_2 \geq q_1^2$, amb el qual $n = pq_1 q_2 \geq pq_1^2$ i com $q_1 | q$, aleshores $q_1 | n$ d'on $n \geq pq_1^2 \geq p^3$, el que contradiu l'enunciat !!
L'altre cas ($q_2 \leq q_1$), és anàleg a aquest.
I per tant, $q = \frac{n}{p}$, és primer.