## 3.2. REPRESENTACIÓ MATRICIAL D'UN GRAF.

Sabim't enlloc de treballar directament amb el Graf, ens va bé treballar amb el que anomenem la seva matriu d'adjacències.

**DEFINICIÓ:**

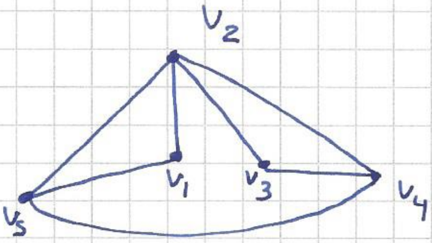
Sigui $G$ un graf amb conjunt de vèrtex $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

La matriu d'ADJACÈNCIES és una matriu quadrada $n \times n$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida per

$$A = (a_{ij}) \quad \text{on} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ i } v_j \text{ són adjacents} \\ 0 & \text{cas contrari.} \end{cases}$$

**EXEMPLE:**

$G$




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**OBS**: 1) Com no permetem loops, a la diagonal sempre tenim 0's.

2) Per definició la matriu d'adjacències sempre és Simètrica

**DEFINICIÓ:**

Sigui $G$ un graf amb conjunt de vèrtex $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i conjunt d'arestes

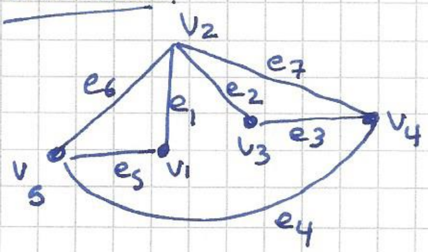
$$E = \{e_1, \ldots, e_m\}.$$

La matriu d'INCIDÈNCIA és la matriu de $n$ files i $m$ columnes definida per

$$B = (b^i_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{on} \quad b^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si el vèrtex } v_i \text{ està en la aresta } e_j \\ 0 & \text{cas contrari} \end{cases}$$

→ de vegades diem que $v_i$ és incident amb $e_j$

**EXEMPLE:**




$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**OBS**: → el nº de 1's a cada fila és el deg del vèrtex.

Quan estudiem grafs sovint extreiem la informació a partir de la matriu d'adjacències o d'incidència.

Ara veurem un exemple. Per això ens cal introduir una definició que també farem servir més endavant.

<u>DEFINICIÓ</u>: Siqui $G=(V,E)$ un graf. , $V=\{v_1 \dots v_n\}$

1) Anomenem <u>RECORREGUT de longitud $\ell$</u> a una seqüència de vèrtex

$$v_{i_0}, v_{i_2}, \dots, v_{i_\ell}$$

tals que $v_{i_j} v_{i_{j+1}}$ és una aresta de $G$ i $v_{i_j} v_{i_{j+1}} \neq v_{i_k} v_{i_{k+1}}$ si $j \neq k$

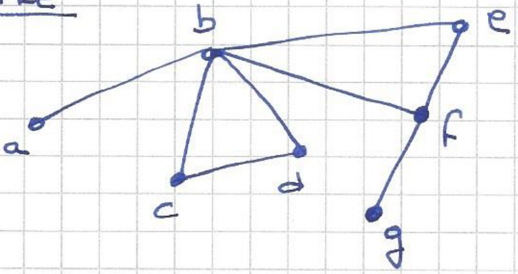
(de moment permetem repetir arestes)

2) Un <u>CIRCUIT</u> és un recorregut tancat (això és $v_{i_0} = v_{i_\ell}$, és a dir que comencem i acabem al mateix vèrtex).

3) Si no repetim cap vèrtex (llevat el primer i l'últim si és tancat) diem que és un <u>CAMÍ</u>.

4) Anomenem <u>CICLE</u> a un camí tancat.

<u>EXEMPLE</u>




a – b – d – c és un recorregut de longitud 3

a – b – f és un recorregut de long 2

a – b – e – f – b és un recorregut de longitud 4 però NO és un camí.

b – d – c – b és un camí Tancat, un cicle.

b – f – g és un camí.

b – e – f – b – d – c – b és un circuit però NO és un cicle.

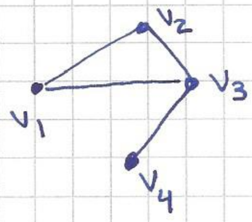
<u>TEOREMA</u>: Siqui $G$ un Graf i $A$ la matriu de adjacències. Aleshores, per $k \geq 1$

$$(A^k)_{ij} = \text{nº de recorreguts entre } v_i \text{ i } v_j \text{ de longitud } k.$$

$\shortparallel$

Entrada $i,j$ de la matriu $A^k$

EXEMPLE




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tinc 2 formes d'anar de $v_1$ a $v_1$ per recorregut de longitud 2.
1 " " $v_1$ a $v_2$ " " " "
1 " " $v_1$ a $v_3$ " " " "
1 " " $v_1$ a $v_4$ " " " "

$\Rightarrow$ la primera columna de $A^2$ és $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Comproveu vosaltres la resta d'entrades.