1. Considera les següents frases.

(a) $4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$.

(b) $x > 2 \Leftrightarrow x > 3$.

(c) $8 \Leftrightarrow x > 5$.

(d) existeix un nombre natural més petit que 8.

(e) existeix un nombre natural y tal que $y < 8$.

(f) existeix un nombre natural m tal que $m < 8$.

(g) existeix un nombre natural tal que $m < 8$.

(h) existeix y tal que $y < 8$.

Tenen sentit, aquestes frases? Estan ben escrites? Quines són vertaderes i quines són falses?

2. Sigui a un nombre natural. Considera les següents frases.

(a) a és parell $\Leftrightarrow$ $a = 2k$.

(b) a és parell $\Leftrightarrow$ existeix $a = 2k$.

(c) a és parell $\Leftrightarrow$ existeix un nombre natural $a = 2k$.

(d) a és parell $\Leftrightarrow$ existeix un nombre natural k $a = 2k$.

(e) a és parell $\Leftrightarrow$ existeix un nombre natural k tal que $a = 2k$.

(f) a és parell $\Leftrightarrow$ existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k$.

Tenen sentit, aquestes frases? Estan ben escrites?

3. Defineix correctament els següents conceptes, on n i m són nombres naturals i a un nombre real.

(a) n és parell.

(b) n és senar (imparell).

(c) a és racional.

(d) $|a|$. Dóna una definició que serveixi tant en el domini dels nombres reals com en el domini dels nombres sencers.

(e) 5 és divisor de n.

(f) n és divisor de 5.

(g) n és múltiple de 5.

(h) n és divisor de m.

4. Escriu la negació de les següents afirmacions.

(a) $3 > x$.

(b) $8 \leqslant n$.

(c) Existeix un nombre natural a tal que $a > 2$.

(d) Tot nombre primer és imparell.

(e) 5 és divisor de n.

(f) x o y és irracional.

(g) Si n és un nombre enter aleshores és racional.

(h) Per qualsevol nombre natural n, si existeix un natural $k > 1$ tal que n^k és senar, aleshores n és senar.

5. Considera les tres proposicions següents

P : $0 = 1$.

Q : Tot nombre natural és igual a la suma de dos quadrats.

R : En tot triangle rectangle, si a, b són els catets i c és la hipotenusa, $a^2 + b^2 = c^2$.

Podem afirmar que alguna de les següents proposicions és vertadera ?

(a) $P \to P$

(b) $R \to P$

(c) $P \to Q$

(d) $(P \vee Q) \wedge R$

(e) $P \to R$

(f) $(P \wedge Q) \vee R$

6. Demostra que les següents parelles d'enunciats són equivalents.

(a) P i $P \vee (P \wedge Q)$

(b) P i $P \wedge (P \vee Q)$

(c) $P \leftrightarrow Q$ i $(P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$

(d) $P \to (R \wedge S)$ i $(P \to R) \wedge (P \to S)$

(e) $P \to (R \vee S)$ i $(P \wedge \neg R) \to S$

(f) $(P \vee R) \to Q$ i $(P \to Q) \wedge (R \to Q)$

(g) $(P \wedge R) \to Q$ i $(P \to Q) \vee (R \to Q)$

(h) $(P \wedge R) \to Q$ i $P \to (R \to Q)$

7. Investiga si les següents fórmules són tautologies, contradiccions, o ni una cosa ni l'altra.

(a) $\big((A \to C) \wedge (B \to C)\big) \to \big((A \vee B) \to C\big)$

(b) $\big((A \to (B \to C)\big) \to \big((A \wedge B) \to C)\big)$

(c) $A \wedge (B \vee \neg A)$

(d) $\big(A \to (B \to C)\big) \wedge \neg\big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

(E1) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	(commutativa de la conjunció)
(E2) $P \vee Q \equiv Q \vee P$	(commutativa de la disjunció)
(E3) $\big(P \wedge (Q \wedge R)\big) \equiv \big((P \wedge Q) \wedge R\big)$	(associativa de la conjunció)
(E4) $\big(P \vee (Q \vee R)\big) \equiv \big((P \vee Q) \vee R\big)$	(associativa de la disjunció)
(E5) $\neg\neg P \equiv P$	(doble negació)
(E6) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	(negació d'una conjunció) (llei de De Morgan)
(E7) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	(negació d'una disjunció) (llei de De Morgan)
(E8) $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	(definibilitat del condicional)
(E9) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	(definibilitat del bicondicional)

Taula 1: Taula amb algunes equivalències proposicionals bàsiques

8. Utilitzant les equivalències donades a la Taula 1, justifica l'equivalència entre les fórmules següents.

- **(a)** $A \vee B$ i $\neg(\neg A \wedge \neg B)$,
- **(b)** $\neg(A \to B)$ i $A \wedge \neg B$,
- **(c)** $A \to B$ i $\neg B \to \neg A$,
- **(d)** $A \leftrightarrow (\neg B)$ i $\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg B \wedge \neg A)$,
- **(e)** $\neg\big((A \wedge B) \to (A \vee B)\big)$ i $\neg(A \vee \neg A) \wedge B \wedge \neg B$,
- **(f)** $\neg\Big(\big((A \to C) \wedge (B \to C)\big) \to \big((A \vee B) \to C\big)\Big)$ i $\neg C \wedge (A \to C) \wedge (A \vee B) \wedge (B \to C)$.

9. Demostra que si $a, b, c \in \mathbb{N}$ i $a|b$ i $a|c$, aleshores $a^2|bc$.
Indicació: $x|y$ és la notació de x *és divisor de* y.

10. Sigui n un nombre natural.

- **(a)** Demostra de forma directa que n^3 és múltiple de 3, si n és múltiple de 3.
- **(b)** Demostra de forma directa i pel contrarecíproc que si n^3 és múltiple de 3, aleshores n és múltiple de 3.

Observa que has demostrat que n^3 és múltiple de 3 *si i només si* n és múltiple de 3.

11. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$. Demostra que si $a < b$, aleshores $\dfrac{a+b}{2} < b$.

12. Demostra o refuta cadascun dels enunciats següents:

(a) Tot nombre natural múltiple de 2 és múltiple de 4.

(b) En tot triangle els dos angles aguts són iguals.

(c) Tot nombre real x satisfà $x^2 + 2 > 5$.

13. Sigui a un nombre real positiu. Demostra de forma directa i pel contrarecíproc que si $a < 1$, aleshores $a^2 < a$.

14. Sigui n un nombre natural més gran que 1. Demostra per reducció a l'absurd o pel contrarecíproc que si per tot m tal que $1 < m \leqslant \sqrt{n}$, m no divideix n, aleshores n és primer.

15. Recorda la definició de $|a|$ que has donat al problema 3. Demostra:

(a) $a \leqslant |a|$, per a tot $a \in \mathbb{R}$.

(b) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, per a tots $a, b \in \mathbb{R}$.

16. Demostra, usant el mètode de raonament per casos, que per tots els $a, b \in \mathbb{R}$,

(a) $|a| = |-a|$.

(b) $|a|^2 = a^2$.

17. Demostra que no existeixen enters n, m, k tals que $4m + 6n = 9^k$.

18. Demostra que el producte d'un racional diferent de 0 per un irracional és irracional.

19. Demostra que per a tot sencer n, $n^3 + n$ és parell.

20. Demostra que per a tot sencer a, un dels nombres a, $a + 2$, $a + 4$ és múltiple de 3.

21. Demostra o refuta les següents afirmacions:

(a) Per tot nombre natural n, existeix un nombre natural m tal que $n \geqslant m$.

(b) Existeix un nombre natural m tal que per tot nombre natural n, $n \geqslant m$.

(c) Per tot nombre natural m, existeix un nombre natural n tal que $n \geqslant m$.

(d) Existeix un nombre natural n tal que per tot nombre natural m, $n \geqslant m$.

22. Siguin a, b nombres reals amb $a < b$. Demostra que existeix un únic nombre real c tal que $a < c < b$ i $|a - c| = \frac{|b-c|}{2}$.

23. Demostra les següents propietats:

(a) Existeix un únic nombre real x tal que per a tot real y, $xy + x - 4 = 4y$.

(b) Per a cada real x existeix un únic real y tal que $x^2 y = x - y$.

24. Examina la següent *fal·làcia*, comprovant cadascun dels passos.

(a) Considerem l'equació $\dfrac{x+5}{x-7}-5=\dfrac{4x-40}{13-x}$, amb $x \neq 7, 13$.

(b) Operant en el terme de l'esquerra, es pot comprovar que $\dfrac{x+5}{x-7}-5=\dfrac{4x-40}{7-x}$.

(c) De (a) i (b) es dedueix que $\dfrac{4x-40}{7-x}=\dfrac{4x-40}{13-x}$.

(d) Atès que els numeradors són iguals, els denominadors també ho han de ser.

Per tant, de (c) es dedueix que $7-x=13-x$.

(e) De (d) es dedueix clarament que $7=13$. Absurd!

En algun dels passos (b)–(e) hi ha d'haver un error. Quin és ? Per què ?

Atenció: No es demana que "corregeixis" el raonament, ja que si porta a un absurd segur que no es pot arreglar! Només has de dir on hi ha l'error, en què consisteix, i per què és un error.

Nota: ***A continuació tots els problemes s'han de fer per inducció.***

25. Per tot $n \geqslant 1$, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

26. Per tot $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

27. Per tot $n \geqslant 0$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$.

28. Per tot $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

29. Per a tot $n \geqslant 2$, si $a_1, \ldots, a_n$ són nombres reals estrictament entre 0 i 1, aleshores

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1-a_1-\cdots-a_n.$$

30. Definim recursivament una successió $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ de la següent manera: $x_1 := 1$ i, per a $n \geqslant 1$, $x_{n+1} := \sqrt{x_n+5}$. Demostra que per a tot $n \geqslant 2$ es compleix que $2 < x_n < 3$.

31. Per tot $n \geqslant 0$, el nombre $5^{2n}+7$ és múltiple de 8.

32. Sigui n un nombre imparell positiu. Aleshores n^2-1 és divisible per 4.

33. Per a tot natural $n \geqslant 1$, $\dfrac{n}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n^3}{6} \in \mathbb{N}$.

34. Una oficina de correus només té segells de 5 i de 9 cèntims d'euro. Es tracta de demostrar que qualsevol carta que necessiti 35 cèntims o més es podrà franquejar usant només segells d'aquests dos tipus.

(a) Formula el que volem demostrar com una propietat matemàtica dels naturals.

(b) Demostra aquesta propietat per inducció, usant també un raonament per casos.

35. Sigui $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ la successió definida recursivament de la següent manera:

$$x_1 := 1\,, \quad x_2 := 2\,, \quad \text{i, per } n \geqslant 3\,, \quad x_n := 3x_{n-1} - 2x_{n-2}\,.$$

(a) Calcula els valors de x_n per a valors petits de n i conjectura una fórmula general per a x_n en funció de n.

(b) Usant inducció completa, demostra que la teva conjectura és veritat per a tot $n \geqslant 1$.