Exercici 17 Siguin $n > 1$ un nombre natural i p el menor nombre natural primer que divideix n. Demostreu que si $p^3 > n$, llavors n es primer (i $p = n$) o be n/p es primer.

Solucio 17

Procedirem per contrareciproc, per tant suposem que no es compleix la seguent proposicio: n es primer (i $p = n$) o be n/p es primer $\implies$ n no es primer (o $n \neq p$) i n/p tampoc. Per tant com estem suposant que n/p no es primer $\exists\ k \in \mathbb{N}$. amb $1 < k < n/p$ tal que $k|(n/p)$ i aixo implica que $\exists\ l \in \mathbb{N}$ tal que $kl = \frac{n}{p}$ multipicant a tots dos costats de la igualtat per p ens queda que $pkl = n$, i tenim que $1 < l$ ja que si $l = 1$ aleshores $k = n/p$, cosa que ja sabem que es impossible. Ara siguin $q_1 \cdot ... \cdot q_s$ i $r_1 \cdot ... \cdot r_n$, les descomposicons de k, l respectivament. Tenim que $p \leq q_i$, $i = 1, ..., s$ i $p \leq r_j$, $j = 1, ..., n$. Ja que si un r_j o q_i fos menor estricte que p, aleshores no es compliria la premisa de l'enunciat de p ser el menor divisor primer de n , per tant tenim que $p^s \leq q_1 \cdot ... \cdot q_s$ $p^n \leq r_1 \cdot ... \cdot r_n$.

Aleshores tenint en compte $n = klp$ ens queda que $n \geq pp^s p^n = p^{1+s+n} \geq p^3$, ara la segona desigualtat es compleix ja que $s > 0$ i $n > 0$, i aixo es cert ja que com hem vist anteriorment $k, l > 1$ i per tant admenten una descomposico en almenys un primer, ara notem que el que hem deduit , ($n \geq p^3$), es just el contrari que la hipotesi de la proposicio ($p^3 > n$), per tant queda demostrat l'enunciat.