Exercici 15. Sigui p un polinomi de coeficients reals i sigui z un nombre complex. Demostreu que $p(z) = 0$ si, i nomes si, $p(\bar{z}) = 0$.

Solucio 15.

Provarem una implicacio ja que per la altra, podem fer servir que $\bar{\bar{z}} = z$. I farem servir les seguents propietats del nombres complexos:

Sigui $a \in R$ $\bar{a} = a$.

Siguin $v, w \in C$ $\overline{v + w} = \bar{v} + \bar{w}$

Sigui $z \in C$ $\bar{z^n} = \bar{z}^n$

Tenim que sigui $f = a_n x^n + \cdots + a_0$, tal que $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = 0$, tenim que $\bar{0} = 0$ i $f\bar{(}z) = 0$, aplicant les propietats donades anteriorment ens queda que $0 = \overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = \bar{a_n} \bar{x}^n + \cdots + \bar{a_0}$, ara com els coeficients del polinomi son reals, tenim que $0 = a_n \bar{x}^n + \cdots + a_0$, i per tantel poinomi que ens queda es $f(\bar{z})$, i ens queda que es igual a 0.