## Capítol 5

1

# Zeros de funcions

# Zeros de funcions

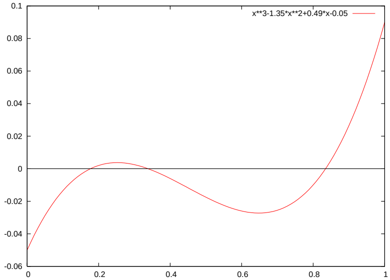


## Introducció

Es volen calcular solucions d'equacions del tipus:

$$f(x) = 0 \ .$$

Les solucions s'anomenen els zeros de $f$. Quan $f$ és un polinomi s'anomenen també arrels de $f$. Es considera primer el cas d'una sola equació en una variable.




$$f(x) = x^3 - 1.35\ x^2 + 0.49\ x - 0.05$$

# Zeros de funcions



## Estratègia

1. **Localització**: Buscar on es troben els zeros.
2. **Separació**: Determinar dominis que continguin un únic zero.
3. **Aproximació**: Calcular successions d'aproximacions que convergeixin cap als zeros.

# Mètode de bisecció



## El teorema de Bolzano (I)

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua amb $f(a)f(b) < 0$. Llavors, existeix $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

**Demostració pel mètode de bisecció**

0) Es parteix de l'interval $[a_0, b_0] = [a, b]$, $i = 0$.
1) Per a cada interval $[a_i, b_i]$ amb $f(a_i)f(b_i) < 0$ es considera l'abcissa mitjana $c_{i+1} = (a_i + b_i)/2$.
2)
   - Si $f(c_{i+1}) = 0$, $\alpha = c_{i+1}$ i s'atura el procés.
   - Si $f(a_i)f(c_{i+1}) < 0$, es pren el nou interval $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [a_i, c_{i+1}]$.
   - Sinó, $f(c_{i+1})f(b_i) < 0$, es pren el nou interval $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [c_{i+1}, b_i]$.
3) $i = i + 1$ i es repeteixen 1) i 2).

# Mètode de bisecció



## El teorema de Bolzano (i II)

El procés s'atura quan s'ha trobat un zero $\alpha$.
Mentre no s'atura el procés, es construeix una successió d'intervals encaixats

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_i, b_i] \supset \ldots,$$

la longitud dels quals tendeix cap a zero. Per tant, existeix $\alpha$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i = \alpha\ .$$

Com que $f$ és contínua,

$$\lim_{i\to\infty} f(a_i) = \lim_{i\to\infty} f(b_i) = f(\alpha)\ .$$

Com $f(a_i)f(b_i) < 0$ per a tot $i$, tenim

$$0 \geq \lim_{i\to\infty} f(a_i)f(b_i) = f(\alpha)^2.$$

Això només és possible si $f(\alpha) = 0$.

# Mètode de bisecció



## Teorema de Rolle

**Teorema de Rolle.**
Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i derivable en $(a, b)$ amb $f(a) = f(b)$. Llavors, existeix $\beta \in (a, b)$ tal que $f'(\beta) = 0$.

**Corol·lari (Bolzano + Rolle).**
Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i derivable en $(a, b)$ amb $f(a)f(b) < 0$ i tal que $f'(x) \neq 0$ per a tot $x \in (a, b)$. Llavors, existeix un únic $\alpha \in (a, b)$ per al qual $f(\alpha) = 0$.

# Mètode de bisecció



## Comentaris finals

- El Teorema de Bolzano és una eina per **localitzar** zeros de funcions contínues. Ens diu que hi ha zeros en un cert interval, però no quants.
- El Teorema de Bolzano amb el Teorema de Rolle, permeten demostrar que hi ha una única solució en un cert interval si es compleixen les hipòtesis: canvi de signe de la funció i no anul·lació de la derivada.
- La demostració del Teorema de Bolzano dóna un mètode de càlcul d'un zero de la funció: el **mètode de bisecció**.
- Des del punt de vista teòric, el procés de bisecció pot ser infinit.
- Des del punt de vista numèric, pararem el procés quan $f(c_i)$ o $b_i - a_i$ siguin prou petits, per sota d'una certa **tolerància**.
- El mètode de bisecció és sempre **convergent** si es parteix d'un interval $[a, b]$ per al qual $f(a)f(b) < 0$.

# Mètode de bisecció



Exemple: Zeros de la funció $f(x) = \exp(x - 0.5) - 2x + 0.35$.

Es té $f'(x) = \exp(x - 0.5) - 2$, així doncs la funció té un únic extrem local a $x_m = \log(2) + .5 \simeq 1.19315$. Més precisament:

- la funció és estrictament decreixent a $(-\infty, x_m)$;
- la funció és estrictament creixent a $(x_m, +\infty)$;
- $x_m$ és un mínim global, i a més $f(x_m) = 1.35 - 2\ \log(2) \simeq -0.0362944 < 0$.

Com que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

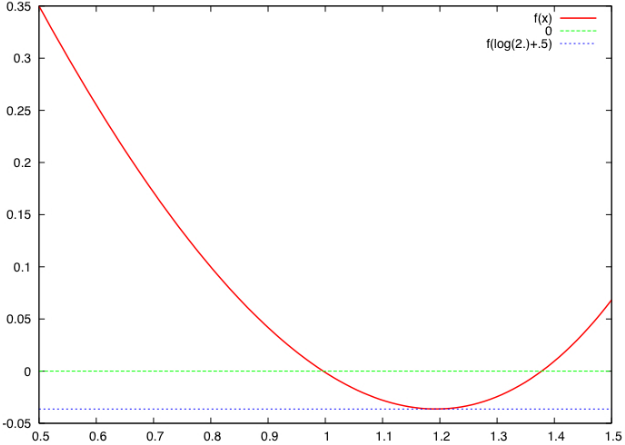
- $f$ té un únic zero $\alpha_1$ a l'interval $(-\infty, x_m)$;
- $f$ té un únic zero $\alpha_2$ a l'interval $(x_m, +\infty)$;
- Els únics zeros de $f$ són $\alpha_1$ i $\alpha_2$.

# Mètode de bisecció



Exemple: Zeros de la funció $f(x) = \exp(x - 0.5) - 2x + 0.35$.

Representació gràfica:



# Mètode de bisecció



Exemple: Zeros de la funció $f(x) = \exp(x - 0.5) - 2x + 0.35$.

**Càlcul d'$\alpha_1$** (amb 8 dígits): $\alpha_1 = 0.99639033$

| $n$ | $a_i$ | $b_i$ | $b_i - a_i$ | $f(a_i)$ | $f(b_i)$ | $c_{i+1}$ | $f(c_{i+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.950000000 | 1.050000000 | 1.0e-01 | 1.8e-02 | -1.7e-02 | 1.000000000 | -1.3e-03 |
| 1 | 0.950000000 | 1.000000000 | 5.0e-02 | 1.8e-02 | -1.3e-03 | 0.975000000 | 8.0e-03 |
| 2 | 0.975000000 | 1.000000000 | 2.5e-02 | 8.0e-03 | -1.3e-03 | 0.987500000 | 3.2e-03 |
| 3 | 0.987500000 | 1.000000000 | 1.2e-02 | 3.2e-03 | -1.3e-03 | 0.993750000 | 9.5e-04 |
| 4 | 0.993750000 | 1.000000000 | 6.2e-03 | 9.5e-04 | -1.3e-03 | 0.996875000 | -1.7e-04 |
| 5 | 0.993750000 | 0.996875000 | 3.1e-03 | 9.5e-04 | -1.7e-04 | 0.995312500 | 3.9e-04 |
| 6 | 0.995312500 | 0.996875000 | 1.6e-03 | 3.9e-04 | -1.7e-04 | 0.996093750 | 1.1e-04 |
| 7 | 0.996093750 | 0.996875000 | 7.8e-04 | 1.1e-04 | -1.7e-04 | 0.996484375 | -3.4e-05 |
| 8 | 0.996093750 | 0.996484375 | 3.9e-04 | 1.1e-04 | -3.4e-05 | 0.996289063 | 3.6e-05 |
| 9 | 0.996289063 | 0.996484375 | 2.0e-04 | 3.6e-05 | -3.4e-05 | 0.996386719 | 1.3e-06 |
| 10 | 0.996386719 | 0.996484375 | 9.8e-05 | 1.3e-06 | -3.4e-05 | 0.996435547 | -1.6e-05 |
| 11 | 0.996386719 | 0.996435547 | 4.9e-05 | 1.3e-06 | -1.6e-05 | 0.996411133 | -7.4e-06 |
| 12 | 0.996386719 | 0.996411133 | 2.4e-05 | 1.3e-06 | -7.4e-06 | 0.996398926 | -3.1e-06 |
| 13 | 0.996386719 | 0.996398926 | 1.2e-05 | 1.3e-06 | -3.1e-06 | 0.996392822 | -8.9e-07 |
| 14 | 0.996386719 | 0.996392822 | 6.1e-06 | 1.3e-06 | -8.9e-07 | 0.996389771 | 2.0e-07 |
| 15 | 0.996389771 | 0.996392822 | 3.1e-06 | 2.0e-07 | -8.9e-07 | 0.996391296 | -3.5e-07 |
| 16 | 0.996389771 | 0.996391296 | 1.5e-06 | 2.0e-07 | -3.5e-07 | 0.996390533 | -7.3e-08 |
| 17 | 0.996389771 | 0.996390533 | 7.6e-07 | 2.0e-07 | -7.3e-08 | 0.996390152 | 6.3e-08 |
| 18 | 0.996390152 | 0.996390533 | 3.8e-07 | 6.3e-08 | -7.3e-08 | 0.996390343 | -5.3e-09 |
| 19 | 0.996390152 | 0.996390343 | 1.9e-07 | 6.3e-08 | -5.3e-09 | 0.996390247 | 2.9e-08 |
| 20 | 0.996390247 | 0.996390343 | 9.5e-08 | 2.9e-08 | -5.3e-09 | 0.996390295 | 1.2e-08 |
| 21 | 0.996390295 | 0.996390343 | 4.8e-08 | 1.2e-08 | -5.3e-09 | 0.996390319 | 3.2e-09 |
| 22 | 0.996390319 | 0.996390343 | 2.4e-08 | 3.2e-09 | -5.3e-09 | 0.996390331 | -1.0e-09 |
| 23 | 0.996390319 | 0.996390331 | 1.2e-08 | 3.2e-09 | -1.0e-09 | 0.996390325 | 1.1e-09 |
| 24 | 0.996390325 | 0.996390331 | 6.0e-09 | 1.1e-09 | -1.0e-09 | 0.996390328 | 1.1e-09 |

# Mètode de Newton–Raphson



## Idea analítica

Es vol millorar el mètode de bisecció per tal de trobar zeros de forma més eficient numèricament.

Se suposa $f$ és derivable i sigui $\alpha$ el zero de $f$ a calcular i $x_0$ una aproximació inicial: $x_0 \approx \alpha$.
El mètode de Newton–Raphson construeix una successió d'aproximacions $x_k$ a partir de $x_0$ de la manera següent.
Coneguda l'aproximació $x_k$, es considera el polinomi de Taylor de grau 1 (la recta tangent) a $x_k$:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \ ,$$

i es pren l'aproximació següent $x_{k+1}$ on s'anul·la aquest polinomi:

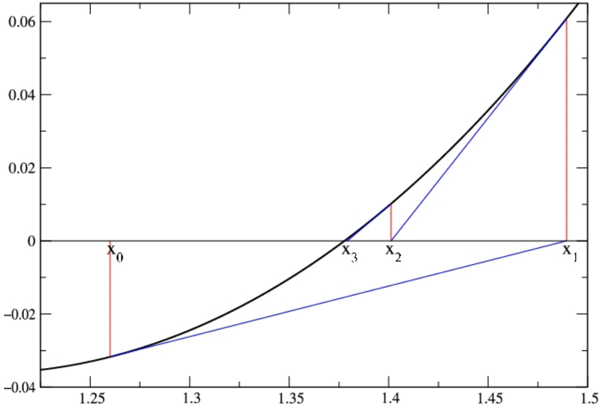
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k \geq 0) \ ,$$

suposant que no s'anul·li la derivada en $x_k$.

# Mètode de Newton–Raphson



## Representació gràfica



# Mètode de Newton–Raphson



## Comentaris

- El mètode de Newton–Raphson no és sempre convergent. El **Teorema de Newton-Kantorovich** assegura que:
  - la successió convergeix a un zero $\alpha$ de $f$ si $x_0$ és prou a prop d'$\alpha$,
  - la convergència és molt ràpida: genèricament, quadràtica.
- Criteri(s) d'aturada: Quan $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ o bé $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$, on $\delta > 0, \varepsilon > 0$ són les toleràncies donades. Ambdós criteris poden tenir problemes...
- El mètode es pot generalitzar fàcilment per resoldre sistemes d'equacions no lineals. I ho farem més endavant !

# Mètode de Newton–Raphson



Exemple: Zeros de la funció $f(x) = \exp(x - 0.5) - 2x + 0.35$.

Es parteix d'$x_0 = 0.95$ i s'obtenen els iterats següents amb els valors corresponents de la funció i de la derivada (pendent de la tangent) i la diferència amb l'iterat anterior:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | $\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.95000000000 | $1.8312185490e-02$ | $-4.3168781451e-01$ | |
| 1 | 0.99241997313 | $1.4312185890e-03$ | $-3.6372883516e-01$ | $0.4e-01$ |
| 2 | 0.99635482363 | $1.2683863782e-05$ | $-3.5727766888e-01$ | $0.4e-02$ |
| 3 | 0.99639032504 | $1.0352153579e-09$ | $-3.5721934888e-01$ | $0.4e-04$ |
| 4 | 0.99639032794 | $1.1102230246e-16$ | $-3.5721934412e-01$ | $0.3e-08$ |

La columna de diferències $\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ mostra que el nombre de dígits correctes es duplica aproximadament a cada pas. Aquest fet és conseqüència de la convergència quadràtica del mètode de Newton–Raphson.

# Mètode de la secant



## Idea analítica

Es vol millorar el mètode de bisecció per tal de trobar zeros de forma més eficient numèricament, sense haver de calcular derivades i així baixar costos computacionals.

Siguin $\alpha$ el zero de $f$ que es vol calcular i $x_0$, $x_1$ dues aproximacions: $x_0, x_1 \approx \alpha$.
El mètode de la secant construeix una successió d'aproximacions $x_k$ a partir de $x_0, x_1$ de la manera següent:
Conegudes les aproximacions $x_{k-1}$ $x_k$, es troba el polinomi d'interpolació de grau 1 (la recta secant) :

$$f(x) \approx f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) \ .$$

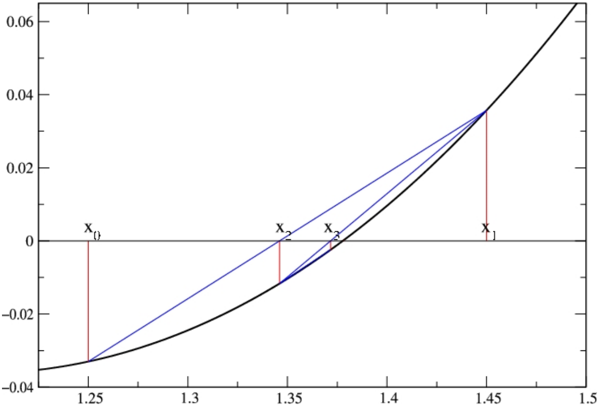
i la nova aproximació on s'anul·la aquest polinomi:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \ \ (k \geq 1) \ .$$

# Mètode de la secant



## Representació gràfica



# Mètode de la secant



## Comentaris

- El mètode de la secant no és sempre convergent.
- En cas de convengència, aquest sol ser ràpida però no tant ràpida com la del mètode de Newton.
- Criteri(s) d'aturada: Quan $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ o bé $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$, on $\delta > 0, \varepsilon > 0$ són les toleràncies que estem disposats a acceptar. Ambdós criteris tenen problemes...
- El mètode es pot generalitzar fàcilment per resoldre sistemes d'equacions (mètodes quasi-Newton).

# Mètode de la secant



## Exemple: Zeros de la funció $f(x) = \exp(x - 0.5) - 2x + 0.35$.

Es parteix d'$x_0 = 0.95$, $x_1 = 1.05$ i s'obtenen els iterats següents dels mètodes de la secant i de Newton–Raphson amb els valors corresponents de la funció i de la diferència dividida / derivada (pendent de la secant / tangent) i la diferència amb l'iterat anterior:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_k, x_{k-1}]$ | $\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $9.5000000000e-01$ | $+1.8312185490e-02$ | | |
| 1 | $1.0500000000e+00$ | $-1.6746982133e-02$ | $-3.5059167623e-01$ | $0.1e+00$ |
| 2 | $1.0022322312e+00$ | $-2.0587539114e-03$ | $-3.0749244921e-01$ | $0.5e-01$ |
| 3 | $9.9553693212e-01$ | $+3.0544752958e-04$ | $-3.5311364194e-01$ | $0.7e-02$ |
| 4 | $9.9640194410e-01$ | $-4.1494063644e-06$ | $-3.5791057710e-01$ | $0.9e-03$ |
| 5 | $9.9639035069e-01$ | $-8.1245864481e-09$ | $-3.5720978398e-01$ | $0.2e-04$ |
| 6 | $9.9639032794e-01$ | $+2.1704860131e-13$ | $-3.5721932772e-01$ | $0.3e-07$ |
| 7 | $9.9639032794e-01$ | $+2.1704860131e-13$ | $-3.5721932772e-01$ | $0.0$ |

Mètode de la secant

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | $\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.95000000000 | $1.8312185490e-02$ | $-4.3168781451e-01$ | |
| 1 | 0.99241997313 | $1.4312185890e-03$ | $-3.6372883516e-01$ | $0.4e-01$ |
| 2 | 0.99635482363 | $1.2683863782e-05$ | $-3.5727766888e-01$ | $0.4e-02$ |
| 3 | 0.99639032504 | $1.0352153579e-09$ | $-3.5721934888e-01$ | $0.4e-04$ |
| 4 | 0.99639032794 | $1.1102230246e-16$ | $-3.5721934412e-01$ | $0.3e-08$ |

Mètode de Newton–Raphson

# Mètode de la secant



## Un petit retoc: mètode de regula–falsi

El mètode de regula–falsi és una modificació del mètode de la secant. La idea és que per determinar $x_{k+1}$ s'escullen dos valors $y_{k-1}$ i $y_k$ d'entre $x_{k-2}$, $x_{k-1}$, $x_k$ de tal forma que

$$f(y_{k-1})f(y_k) < 0 \ ,$$

i llavors trobar $x_{k+1}$ amb la iteració de la secant:

$$x_{k+1} = y_k - \frac{(y_k - y_{k-1})f(y_k)}{f(y_k) - f(y_{k-1})} \quad (k \geq 1) \ .$$

En l'exemple considerat:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $1.432010128061e+00$ | $6.881970372366e-02$ | $6.7e-02$ |
| 2 | $1.409141217694e+00$ | $2.376789622296e-02$ | $2.3e-02$ |
| 3 | $1.401530517672e+00$ | $7.992164458057e-03$ | $7.6e-03$ |
| 4 | $1.399003443180e+00$ | $2.663381473994e-03$ | $2.5e-03$ |
| 5 | $1.398164846707e+00$ | $8.849132431339e-04$ | $8.3e-04$ |
| 6 | $1.397886612738e+00$ | $2.937213346103e-04$ | $2.8e-04$ |
| 7 | $1.397794304106e+00$ | $9.746007082023e-05$ | $9.2e-05$ |
| ... | ... | ... | ... |
| 24 | $1.397748475959e+00$ | $6.962208587424e-13$ | $6.6e-13$ |

# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Plantejament

Es vol trobar solucions de les equacions d'una forma alternativa: com a punts fixos de funcions d'iteració $g$: $x = g(x)$.

Una solució de l'equació $x = \ cosx$ es pot entendre com un zero de la funció $f(x) = x - \cos x$ o com la solució de l'equació

$$x = g(x) = \cos x \ .$$

La segona interpretació convida a aplicar el mètode iteratiu següent a partir d'una aproximació inicial $x_0$ donada:

$$x_{k+1} = g(x_k) = \cos x_k \ ,$$

per trobar un punt fix de la funció d'iteració $g(x) = \cos x$.

El mètode de Newton–Raphson per resoldre $f(x) = x - \cos x$, és també un mètode d'iteració simple amb la funció d'iteració

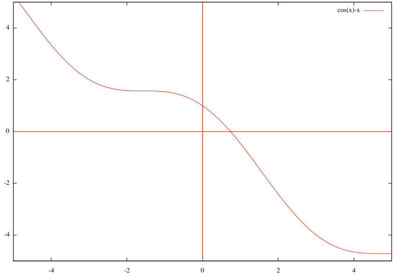
$$g(x) = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}$$

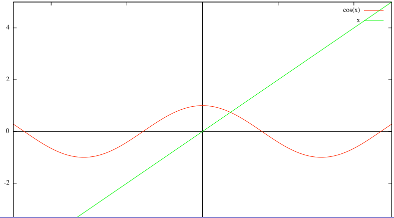
.

# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Representació gràfica



# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Condicions de convergència: Teorema del punt fix

**Teorema del punt fix**: Sigui $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ una funció contínua, derivable en $(a, b)$ amb

$$|g'(x)| \leq \lambda < 1 \quad \forall x \in (a, b) \ .$$

(a) Existeix un únic punt fix $\alpha \in [a, b]$ de $g$: $g(\alpha) = \alpha$.
(b) Si $x_0 \in [a, b]$, la successió definida per $x_{k+1} = g(x_k)$ $(k \geq 0)$ convergeix a $\alpha$.
(c) Els errors dels $x_k$ com a aproximacions d'$\alpha$ compleixen:

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1| \ , \qquad |x_k - \alpha| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_k - x_{k-1}|.$$

# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Comportament dels errors

- La relació

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_0 - x_1|$$

permet una estimació a priori del número d'iterats.

- La fita

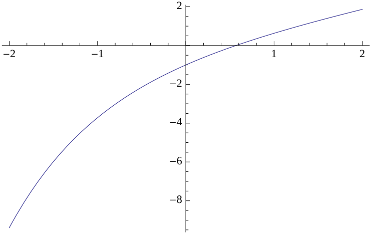
$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_k - x_{k-1}|$$

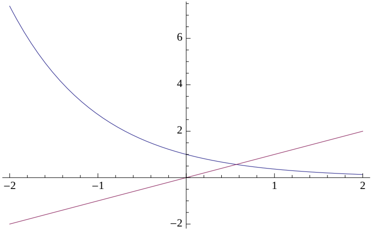
dóna sentit a usar $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, com a criteri de truncament.

# Mètodes iteratius per a punts fixos



Exemple: Zero de $f(x) = x - e^{-x}$ - Punt fix de $g(x) = e^{-x}$




$f(x) = x - e^{-x}$

$\{g(x) = e^{-x}, x\}$

# Mètodes iteratius per a punts fixos



Exemple: Zero de $f(x) = x - e^{-x}$ - Punt fix de $g(x) = e^{-x}$

Aplicació del teorema del punt fix:

- $g : [0.2, 1] \mapsto [0.2, 1]$ ja que $g(0.2) \approx 0.819$, $g(1) \approx 0.368$ i $g$ estrictament decreixent: $g'(x) = -e^{-x} < 0$ per a tot $x \in [0.2, 1]$.
- $|g'(x)| < 0.82 = \lambda < 1$ per a tot $x \in [0.2, 1]$.
- $g$ té doncs un únic punt fix a l'interval $[0.2, 1]$ (equivalentment $f$ té un únic zero a $[0.2, 1]$).
- El mètode d'iteració simple $x_0 \in [0.2, 1], x_{k+1} = e^{-x}$ és convergent.

Usant $x_0 = 0.5$, es vol una aproximació amb un error més petit que $10^{-8}$. Amb $n$ iteracions, resulta:

$$\frac{0.82^n}{0.18}|0.5 - 0.60653| < 10^{-8} .$$

Llavors $n > 90$ iteracions són suficients.

# Mètodes iteratius per a punts fixos



Exemple: Zero de $f(x) = x - e^{-x}$ - Punt fix de $g(x) = e^{-x}$

Resultats d'aplicació del mètode iteratiu $x_0 = 0.5$, $x_{k+1} = e^{-x_k}$:

| $k$ | $x_k$ | $\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | $5.00000000e-01$ | |
| 1 | $6.06530660e-01$ | $1.06530660e-01$ |
| 2 | $5.45239212e-01$ | $6.12914478e-02$ |
| 3 | $5.79703095e-01$ | $3.44638830e-02$ |
| ... | ... | ... |
| 10 | $5.66907213e-01$ | $6.52421327e-04$ |
| ... | ... | ... |
| 20 | $5.67142478e-01$ | $2.24611113e-06$ |
| ... | ... | ... |
| 30 | $5.67143288e-01$ | $7.73319819e-09$ |

S'ha obtingut el punt fix amb un error inferior a $10^{-8}$ amb només 30 iterats (no els 90 teòrics), això és degut a què s'han utilitzat fites del valor absolut la derivada a tot l'interval $[0.2, 1]$. L'estimació del nombre d'iterats millora si es fa servir un interval de definició de $g$ més petit.

# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Exemple: Zero de $f(x) = x - e^{-x}$ - Punt fix de $h(x) = -\ln x$

Resultats d'aplicació del mètode iteratiu $x_0 = 0.55$, $x_{k+1} = -\ln x_k$:

| $k$ | $x_k$ | $k$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.55 | 5 | 0.895394 |
| 1 | 0.597837 | 6 | 0.110492 |
| 2 | 0.514437 | 7 | 2.202816 |
| 3 | 0.664682 | 8 | –0.789737 |
| 4 | 0.408447 | | |

El mètode no convergeix prenent $x_0$ proper a la solució $\alpha$ atès que $|h'(\alpha)| \approx 1/0.55 \approx 2 > 1$.

# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Ordre de convergència

Es considera un mètode iteratiu $g$: $x_0$ , $x_{k+1} = g(x_k)$ convergent a un punt fix $\alpha$ de $g$ i la successió dels errors absoluts: $e_k = x_k - \alpha$. Si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C \neq 0 \ ,$$

es diu que el mètod iteratiu té ordre de convergència $p$ amb coeficient asimptòtic de l'error $C$.

Se suposa ara que $g$ és prou diferenciable i que $\alpha$ és un punt fix d'ordre $p$,

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0 \ , \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0 \ .$$

El desenvolupament de Taylor de $g$ fins a ordre $p$ dóna el comportament asimptòtic dels errors:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = g(x_k) - g(\alpha) = \frac{g^{(p)}(\xi)}{p!} e_k^p \ , \quad \xi \in < x_k, \alpha >$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!} \equiv C > 0.$$

El mètode té ordre de convergència $p$ amb coeficient asimptòtic $\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

# Mètodes iteratius per a punts fixos



## Ordre de convergència

Es considera un mètode iteratiu amb la funció d'iteració $g$: $x_0$ , $x_{k+1} = g(x_k)$ i un punt fix $\alpha$ de $g$.

- Si $|g'(\alpha)| > 1$, no és convergent
- Si $|g'(\alpha)| < 1$, és localment convergent.
- Si $0 < |g'(\alpha)| < 1$, té ordre de convergència 1 (**convergència lineal**).
- Si $g'(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ i $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, té ordre de convergència $p$.

Quan se cerca un zero simple $\alpha$ de $f$ ($f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$):

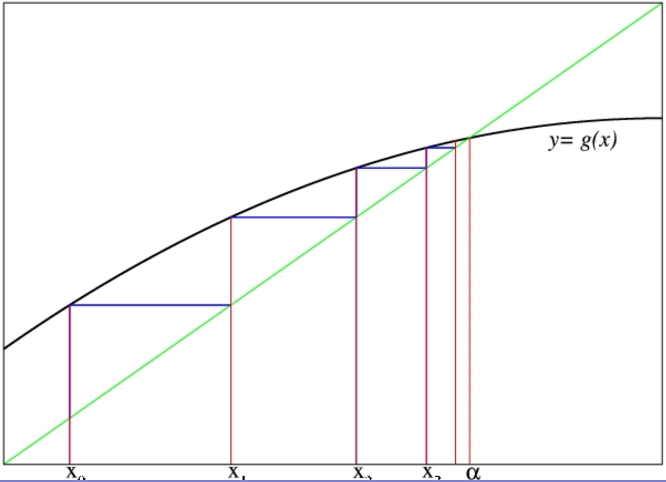
- el mètode de Newton té ordre de convergència d'almenys 2 (**convergència quadràtica**);
- el mètode de la secant té ordre de convergència d'almenys $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ (**superlineal**).

# Apèndix: Gràfics sobre la teoria general de la iteració simple

# Mètodes iteratius per a punts fixos



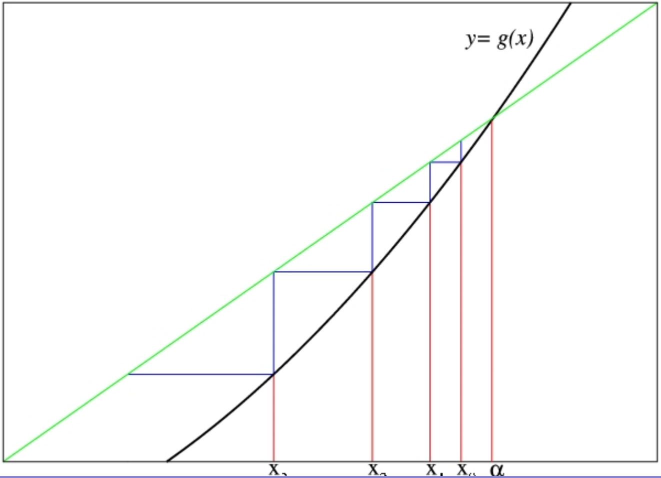
## Escala convergent



# Mètodes iteratius per a punts fixos



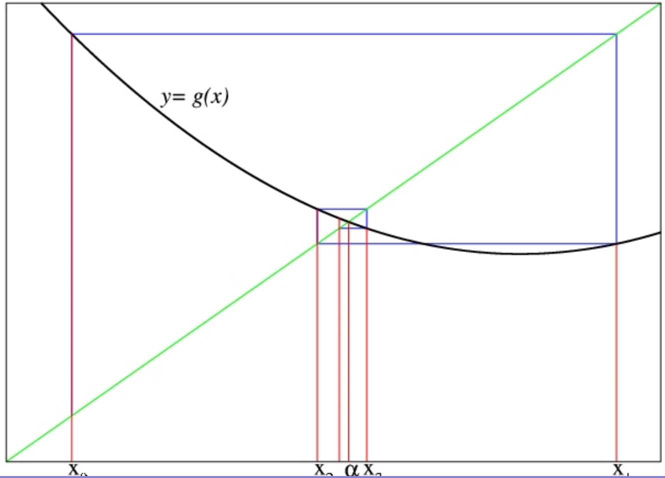
## Escala divergent



# Mètodes iteratius per a punts fixos

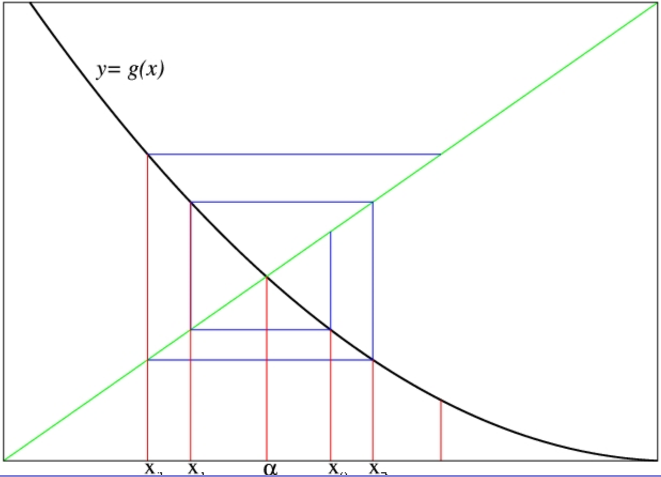


## Teranyina convergent



# Mètodes iteratius per a punts fixos


## Teranyina divergent



# Resolució de sistemes no lineals



## Sistemes d'equacions no lineals al pla

Els sistemes d'equacions lineals: $Ax - b = 0$ amb una matriu $A$ quadrada poden tenir solucions (compatibles), que poden ser úniques (determinats) o infinites (indeterminats), o no tenir-ne (incompatibles).

En el cas de sistemes d'equacions no lineals la situació és diferent: el número i localització de solucions no admet restriccions.
Per a sistemes no lineals d'equacions en el pla, és bo tenir present la interpretació geomètrica següent:

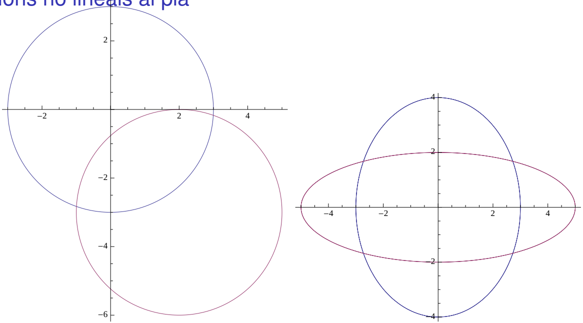
L'equació f(x,y)=0 és una corba al pla x-y

Per tant, la resolució de sistemes d'equacions no lineals (dues variables) es pot mirar com estudi de la intersecció de corbes del pla.

# Resolució de sistemes no lineals



## Sistemes d'equacions no lineals al pla




$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

# Resolució de sistemes no lineals



## Sistemes d'equacions no lineals al pla

Volem resoldre el sistema d'equacions no lineals general en el pla $x_1 - x_2$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Amb la notació

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},$$

el sistema inicial (1) s'expresa com $f(x) = 0$.

# Resolució de sistemes no lineals



## Sistemes d'equacions no lineals al pla

El mètode de Newton per a funcions d'una variable cerca $\alpha$ tal que $f(\alpha) = 0$ per un mètode iteratiu basat en anul·lar l'aproximació de Taylor de primer ordre de $f$ en l'iterat $x_k$

$$f(x) \simeq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

per trobar l'iterat següent:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

on se suposa que la derivada de $f$ no s'anul·la en $x_k$: $f'(x_k) \neq 0$.

# Resolució de sistemes no lineals



## Sistemes d'equacions no lineals al pla

Es fa servir mateix argument per al cas de més variables i s'il·lustra en el cas de dues.
Ara se cerca $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ amb els iterats $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \in \mathbb{R}^2$.
L'iterat $k+1$ es troba anul·lant l'aproximació de Taylor de primer ordre en l'iterat $k$:

$$f(x) \simeq f(x^{(k)}) + Df(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0 \qquad (2)$$

on la matriu jacobiana, se suposa regular, amb determinant no nul:

$$Df(x^{(k)}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \det Df(x^{(k)}) \neq 0$$

Si s'aïlla $x$ de l'equació (2) s'obté

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(Df(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

# Resolució de sistemes no lineals



## Sistemes d'equacions no lineals al pla

Sembla que la fórmula de per obtenir $x^{(k+1)}$ a partir de $x^{(k)}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(Df(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

requereixi de calcular la matriu inversa a cada iteració

$$\left(Df(x^{(k)})\right)^{-1}$$

per trobar

$$\Delta x^{(k)} := \left(Df(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

Però $\Delta x^{(k)}$ és millor obtenir-la com a solució del sistema lineal d'equacions:

$$Df(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = f(x^{(k)}). \tag{3}$$