Problema 1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas en el vocabulario $\sigma = \{a, f^2, P^1, Q^1, R^2\}$, justificando la respuesta.

(1) $Rxaz$.

(2) $PxQy$.

(3) $Rxf(a, x)$.

(4) $f(a, Ray)$.

(5) $\exists x \forall y (Px \to Rxy)$.

(6) $\forall x (Qx \to Sx)$.

Solución:

$Rxaz$ no es una fórmula, ya que por la definición del vocabulario σ, R debe tener siempre dos argumentos, y en la fórmula aparecen tres argumentos para el predicado R.

$PxQy$ no es una fórmula, ya que una fórmula atómica, en este caso Qy, no puede figurar como argumento de otra fórmula atómica. Los argumentos de una fórmula atómica son siempre términos.

$Rxf(a, x)$ es una fórmula atómica, ya que R es un símbolo de predicado de dos argumentos y $x, f(a, x)$ son términos.

$f(a, Ray)$ no es una fórmula, ya que la expresión comienza por un símbolo de función. Las expresiones que comienzan por símbolos de función sólo pueden ser términos. En este caso, la expresión $f(a, Ray)$ tampoco es un término, ya que Ray no es término.

$\exists x \forall y (Px \to Rxy)$ es una fórmula. Px y Rxy son fórmulas atómicas, ya que P tiene un argumento, R tiene dos argumentos, y x, y son términos al ser variables. Por la regla de la implicación, $Px \to Rxy$ es una fórmula, y ahora aplicando las reglas del para todo y del existe se tiene que $\exists x \forall y (Px \to Rxy)$ es una fórmula.

$\forall x (Qx \to Sx)$ no es una fórmula, ya que el predicado S no está en el vocabulario σ.

Problema 2. Formalizar las siguientes frases:

(1) Ninguna torre se mueve en diagonal.

(2) Toda pieza se mueve en diagonal a no ser que sea una torre o un caballo.

(3) Las piezas blancas sólo comen piezas negras.

(4) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

Para ello, utilizar el siguiente vocabulario:

Px para "x es una pieza",

Tx para "x es una torre",

Cx para "x es un caballo",

Dx para "x se mueve en diagonal",

Bx para "x es blanca",

Nx para "x es negra",

Oxy para "x come a y".

Axy para "x e y están alineadas".

Solución:

Obtenemos las siguientes fórmulas:

(1) $\forall x(Tx \rightarrow \neg Dx)$.

(2) $\forall x((Px \wedge \neg Tx \wedge \neg Cx) \rightarrow Dx)$.

(3) $\forall x((Px \wedge Bx) \rightarrow \forall y(Oxy \rightarrow (Py \wedge Ny))$.

(4) $\forall x \forall y((Tx \wedge Cy \wedge Oxy) \rightarrow Axy)$.

Problema 3. Consideremos el vocabulario $\sigma = \{a, b, f^1, P^1, Q^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $I(a) = 2$, $I(b) = 1$,
- $I(P) = \{1, 4\}$,
- $I(Q) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.
- $I(f(1)) = 2$, $I(f(2)) = 3$, $I(f(3)) = I(f(4)) = 4$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\varphi_1 = Pf(a) \vee Qbb$,
(2) $\varphi_2 = \forall x Qf(x)x$,
(3) $\varphi_3 = \forall x(Px \vee Qxx)$,
(4) $\varphi_4 = \forall x \forall y(Qxy \to Px)$,
(5) $\varphi_5 = \exists x \forall y(\neg Px \wedge Qxy)$.

Solución:
φ_1 es falsa, ya que $\overline{Pf}2 \vee \overline{Q}11 = \overline{P}3 \vee \overline{Q}11 = F \vee F = F$.

φ_2 es verdadera, ya que para cada valor n de x se tiene que $\overline{Qf}(n)n = V$, pues tenemos que $(2, 1) \in I(Q)$, $(3, 2) \in I(Q)$, $(4, 3) \in I(Q)$ y $(4, 4) \in I(Q)$.

φ_3 es verdadera, ya que para $x = 1$ tenemos que $\overline{P}1 = V$, para $x = 2$ tenemos que $\overline{Q}22 = V$, para $x = 3$ tenemos que $\overline{Q}33 = V$, y para $x = 4$ tenemos que $\overline{P}4 = V$.

φ_4 es falsa, ya que tomando $x = 2$ e $y = 3$ tenemos que $\overline{Q}23 \to \overline{P}2 = V \to F = F$.

φ_5 es falsa, ya que no existe ningún valor de x que haga cierta la fórmula $\forall y(\neg Px \wedge Qxy)$. Pues, si $x = 1$ tenemos que $\neg\overline{P}1 = F$, y por tanto la conjunción $\neg\overline{P}1 \wedge \overline{Q}1y$ es falsa para todo valor de y. Si $x = 2$ tenemos que $\overline{Q}24 = F$. Si $x = 3$ tenemos que $\overline{Q}34 = F$. Y si $x = 4$ tenemos que $\neg\overline{P}4 = F$, y por tanto la conjunción $\neg\overline{P}4 \wedge \overline{Q}4y$ es falsa para todo valor de y.

Problema 4. Consideremos el vocabulario $\sigma = \{a, b, P^1, Q^1, R^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $I(a) = 2$, $I(b) = 5$,
- $I(P) = \{2, 5\}$,
- $I(Q) = \{3, 4, 5\}$,
- $I(R) = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $Pa \wedge \neg Rab$,
(2) $\forall x(Rxx \to Qx)$,
(3) $\forall x(Px \vee Qx \vee Rxx)$,
(4) $\forall x \exists y Rxy$,
(5) $\exists x \forall y(Rxy \vee Ryx)$.

Solución:

(1) Es verdadera, ya que $\overline{P}\overline{a} \wedge \neg \overline{R}\overline{a}\overline{b} = \overline{P}2 \wedge \neg \overline{R}25 = V \wedge V = V$.

(2) Es falsa, ya que no es verdad que para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\overline{R}nn = V$ implica que $\overline{Q}n = V$. Por ejemplo, tomando $n = 1$, tenemos que $\overline{R}11 = V$ pero $\overline{Q}1 = F$.

(3) Es verdadera. La fórmula expresa que para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\overline{P}n = V$ o $\overline{Q}n = V$ o $\overline{R}nn = V$. Tenemos que $\overline{R}11 = V$, $\overline{P}2 = V$, y para $n \in \{3, 4, 5\}$ $\overline{Q}n = V$.

(4) Es verdadera. La fórmula expresa que para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ existe un $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $\overline{R}nm = V$. Y tenemos que $\overline{R}11 = V$, $\overline{R}22 = V$, $\overline{R}34 = V$, $\overline{R}43 = V$ y $\overline{R}55 = V$.

(5) Es falsa. La fórmula expresa que existe un $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que para todo $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\overline{R}nm = V$ o $\overline{R}mn = V$. Para $n = 1$ tomamos $m = 2$ y tenemos entonces que $\overline{R}12 = F$ y $\overline{R}21 = F$. Para $n = 2$ tomamos $m = 1$, y tenemos entonces que $\overline{R}21 = F$ y $\overline{R}12 = F$. Para $n = 3$ tomamos $m = 1$, y tenemos que $\overline{R}31 = F$ y $\overline{R}13 = F$. Para $n = 4$ tomamos de nuevo $m = 1$, y tenemos que $\overline{R}41 = F$ y $\overline{R}14 = F$. Y para $n = 5$ tomamos $m = 2$, y tenemos que $\overline{R}52 = F$ y $\overline{R}25 = F$.

Problema 5. Consideremos la siguiente tabla:

	1	2	
	3	4	
			5

Consideramos ahora el vocabulario $\sigma = \{E^2, F^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente manera:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $I(E) = \{(x, y) : x$ está más arriba que y en la tabla (no necesariamente en la misma columna) $\}$
- $I(F) = \{(x, y) : x \neq y$ y x, y están en la misma fila de la tabla $\}$

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\exists x \forall y Exy$

(2) $\forall x \exists y Eyx$

(3) $\exists x \forall y \neg Fyx$

(4) $\exists x \exists y \exists z (Fxy \wedge Exz)$

(5) $\exists x \forall y (\neg Exy \wedge \neg Fxy)$

Solución:

(1) es falsa, ya que en la tabla no hay ningún número que esté más arriba que todos los demás números.

(2) es falsa, ya que si $x = 1$, en la tabla no hay ningún número más arriba que el 1.

(3) es verdadera, ya que tomando $x = 5$ tenemos que para todo $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 5 e y no están en la misma fila si $y \neq 5$.

(4) es verdadera, ya que tomando $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, se tiene que x, y están en la misma fila y x está más arriba que z.

(5) es verdadera, ya que tomando $x = 5$ tenemos que para todo $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 5 no está más arriba que y, y 5 e y no están en la misma fila si $y \neq 5$.

Problema 6. Determinar, razonando la respuesta, si los siguientes pares de fórmulas son lógicamente equivalentes:

(1) $\phi_1 = \forall x(Px \vee Qx)$, $\phi_2 = \forall x Px \vee \forall x Qx$.

(2) $\phi_1 = \neg\exists x \forall y Rxy$, $\phi_2 = \forall x \exists y \neg Rxy$.

(3) $\phi_1 = \neg\exists x \forall y(Px \wedge \neg Rxy)$, $\phi_2 = \forall x \exists y(Px \to Rxy)$.

(4) $\phi_1 = \forall x(Px \to Qc)$, $\phi_2 = (\forall x Px) \to Qc$.

Solución:

(1) Las fórmulas no son lógicamente equivalentes. Para comprobarlo, definimos la siguiente interpretación I:

- dominio de $I = \{0, 1\}$,
- $I(P) = \{0\}$,
- $I(Q) = \{1\}$.

Se tiene entonces que $I(\phi_1) = V$, pero $I(\phi_2) = F$.

(2) Las fórmulas son lógicamente equivalentes, pues $\neg\exists x \forall y Rxy \equiv \forall x \neg\forall y Rxy \equiv \forall x \exists y \neg Rxy$.

(3) Las fórmulas son lógicamente equivalentes, pues $\neg\exists x \forall y(Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \neg\forall y(Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \exists y \neg(Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \exists y(\neg Px \vee Rxy) \equiv \forall x \exists y(Px \to Rxy)$.

(4) Las fórmulas no son lógicamente equivalentes. Para comprobarlo, definimos la siguiente interpretación I:

- dominio de $I = \{0, 1\}$,
- $I(c) = 0$,
- $I(P) = \{0\}$,
- $I(Q) = \{1\}$.

Se tiene entonces que $I(\forall x(Px \to Qc)) = F$, ya que tomando $x = 0$ tenemos que $\overline{P}0 = V$ pero $\overline{Q}\overline{c} = \overline{Q}0 = F$. Y por otra parte, tenemos que $I((\forall x Px) \to Qc) = V$, ya que $I(\forall x Px) = F$.

Problema 7. Utilizando el algoritmo de unificación, determinar si los siguientes pares de átomos son unificables:

(1) Pa, Pb

(2) Qax, Qxx

(3) $Qxf(a), Qyy$

(4) $Qg(b)z, Qyf(y)$

(5) $Raxf(x), Rayy$

(6) $Rxyz, Ruh(v, v)u$

(7) $Rxxz, Ruh(u, u)v$

Solución:

1. No son unificables, porque no podemos unificar dos constantes diferentes.

2. Unificables por $\lambda = \{x = a\}$.

3. Unificables por $\lambda = \{x = f(a), y = f(a)\}$.

4. Unificables por $\{y = g(b), z = f(g(b))\}$.

5. No son unificable. En primer lugar, ponemos $P = [Raxf(x) = Rayy]$ y $\lambda = \emptyset$. Ahora, remplazamos el contenido de la pila por $P = [x = y, f(x) = y]$ y sacamos de ella $x = y$, definiendo $\lambda = \{x = y\}$. Cambiamos el contenido de la pila, sustituyendo x por y dentro de ella. Obtenemos entonces $P = [f(y) = y]$. Ahora, observamos que no podemos unificar y con $f(y)$, ya que y es una variable que aparece en $f(y)$. Por tanto, el algoritmo da fallo.

6. Unificables por $\lambda = \{x = u, y = h(v, v), z = u\}$.

7. No son unificables. Inicialmente, $P = [Rxxz = Ruh(u, u)v]$ y $\lambda = \emptyset$. Ahora, reemplazamos el contenido de la pila por $P = [x = u, x = h(u, u), z = v]$. Sacamos $x = u$ de la pila y ponemos $\lambda = \{x = u\}$. Cambiamos la pila por $P = \{u = h(u, u), z = v\}$. Observamos que no podemos unificar u con $h(u, u)$, ya que u aparece en $h(u, u)$. Por tanto, el algoritmo da fallo.

Problema 8. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\Box$ se deduce de las siguientes cláusulas:

$\varphi_1 = Pxf(x)b$,

$\varphi_2 = \neg Qx \vee \neg Qy \vee \neg Pxf(y)z \vee Qz$,

$\varphi_3 = Qa$,

$\varphi_4 = \neg Qb$.

Solución: Tenemos la siguiente prueba por resolución:

1	$Pxf(x)b$	input
2	$\neg Qx \vee \neg Qy \vee \neg Pxf(y)z \vee Qz$	input
3	Qa	input
4	$\neg Qb$	input
5	$\neg Qx \vee \neg Qy \vee \neg Pxf(y)b$	$(2,4)$ tomando $\{z = b\}$
6	$\neg Qy \vee \neg Paf(y)b$	$(3,5)$ tomando $\{x = a\}$
7	$\neg Paf(a)b$	$(3,6)$ tomando $\{y = a\}$
8	$\Box$	$(1,7)$ tomando $\{x = a\}$

Problema 9. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\Box$ se deduce del conjunto de cláusulas $\{Paz, \neg Pf(f(a))a, \neg Pxg(y) \vee Pf(x)y\}$.

Solución: Tenemos la siguiente deducción por resolución:

1. Paz input
2. $\neg Pf(f(a))a$ input
3. $\neg Pxg(y) \vee Pf(x)y$ input
4. $\neg Pf(a)g(a)$ (2,3) tomando $\{x = f(a), y = a\}$
5. $\neg Pag(g(a))$ (3,4) tomando $\{x = a, y = g(a)\}$
6. $\Box$ (6,8) tomando $\{z = g(g(a))\}$

Problema 10. Calcular los resolventes de las dos siguientes cláusulas:

$\varphi_1 = \neg Pxy \vee \neg Pf(x)x \vee \neg Pf(a)h(u,b) \vee Qxu,$

$\varphi_2 = Pvv \vee \neg Qf(a)b.$

Solución:

Distinguimos los siguientes casos:

Caso 1. Elegimos en φ_1 el literal $\neg Pxy$ y en φ_2 el literal Pvv.

Aplicando el algoritmo de unificación, vemos que el conjunto $\{Pxy, Pvv\}$ es unificable por $\{v = x, y = x\}$. Por tanto, obtenemos el resolvente:

$$\neg Pf(x)x \vee \neg Pf(a)h(u,b) \vee Qxu \vee \neg Qf(a)b.$$

Caso 2. Elegimos en φ_1 el literal $\neg Pf(x)x$ y en φ_2 el literal Pvv.

En este caso, el conjunto $\{Pf(x)x, Pvv\}$ no es unificable, ya que aplicando el algoritmo de unificación, emparejaríamos v con $f(x)$, obteniendo el conjunto $\{Pf(x)x, Pf(x)f(x)\}$. Pero este último conjunto no se puede unificar, ya que x no puede emparejar con $f(x)$. Recordar que en cada paso del algoritmo de unificación se empareja una variable z con un término t de manera que la variable z no aparece en el término t. Por consiguiente, no hay resolvente en este caso.

Caso 3. Elegimos en φ_1 el literal $\neg Pf(a)h(u,b)$ y en φ_2 el literal Pvv.

En este caso, el conjunto $\{Pf(a)h(u,b), Pvv\}$ no es unificable, ya que aplicando el algoritmo de unificación, emparejaríamos v con $f(a)$, obteniendo el conjunto $\{Pf(a)h(u,b), Pf(a)f(a)\}$. Pero este último conjunto no se puede unificar, ya que $h(u,b)$ no unifica con $f(a)$, por ser términos con diferentes operadores. Por tanto, no hay resolvente en este caso.

Caso 4. Elegimos en φ_1 el literal Qxu y en φ_2 el literal $\neg Qf(a)b$.

Aplicando el algoritmo de unificación, vemos que el conjunto $\{Qxu, Qf(a)b\}$ es unificable por $\{x = f(a), u = b\}$. Por tanto, obtenemos el resolvente:

$$\neg Pf(a)y \vee \neg Pf(f(a))f(a) \vee \neg Pf(a)h(b,b) \vee Pvv.$$

Problema 11. Consideremos las siguientes fórmulas:
$\varphi_1 = \forall x \exists y (Bx \to Ty)$,
$\varphi_2 = \exists x Bx$,
$\varphi_3 = \neg \exists x (Tx \wedge Cx)$,
$\varphi = \exists x \neg Cx$.
Demostrar por resolución que φ es consecuencia lógica de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Solución: En primer lugar, tenemos que calcular formes clausales $(\varphi_1)^{cl}$, $(\varphi_2)^{cl}$, $(\varphi_3)^{cl}$ y $(\neg\varphi)^{cl}$ de φ_1, φ_2, φ_3 i $\neg\varphi$ respectivamente. Tenemos entonces:
$(\varphi_1)^{cl} = \forall x(\neg Bx \vee Tf(x))$,
$(\varphi_2)^{cl} = Ba$,
$(\varphi_3)^{cl} = \forall x(\neg Tx \vee \neg Cx)$,
$(\neg\varphi)^{cl} = \forall x Cx$.

A continuación, hemos de considerar las cláusulas que aparecen en los núcleos de las formas clausales anteriores:
(a) $\neg Bx \vee Tf(x)$.
(b) Ba.
(c) $\neg Tx \vee \neg Cx$.
(b) Cx.

Recordemos que cuando se aplica el algoritmo de resolució, tenemos que renombrar las variables que se repiten en las cláusulas. Entonces, reemplazamos $\neg Tx \vee \neg Cx$ por $\neg Ty \vee \neg Cy$, y reemplazamos Cx por Cz. Por tanto, tenemos las siguientes entradas para la resolución:
1. $\neg Bx \vee Tf(x)$.
2. Ba.
3. $\neg Ty \vee \neg Cy$
4. Cz.

Resolviendo 1 y 2, obtenemos:
5. $Tf(a)$.

A continuación, resolviendo 3 y 5, obtenemos:
6. $\neg Cf(a)$.

Finalmente, resolviendo 4 y 6, obtenemos:
7. $\square$.

Problema 12. Consideremos la fórmula $\varphi = \exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy$. Se pide entonces:

(a) Calcular una forma clausal de $\neg\varphi$,

(b) Utilizando el algoritmo de resolución, demostrar que φ es una tautología.

Solución:
(a) Tenemos:

$\neg\varphi \equiv \exists x \forall y Rxy \wedge \neg\forall y \exists x Rxy \equiv \exists x \forall y Rxy \wedge \exists y \neg\exists x Rxy \equiv \exists x \forall y Rxy \wedge \exists y \forall x \neg Rxy \equiv \exists x \forall y Rxy \wedge \exists u \forall v \neg Rvu$. Reemplazamos la variable x por la constante a y la variable u por la constante b. Obtenemos entonces:

$\forall y Ray \wedge \forall v \neg Rvb \equiv \forall y \forall v (Ray \wedge \neg Rvb)$.

Por tanto, la fórmula $\forall y \forall v (Ray \wedge \neg Rvb)$ es una forma clausal de $\neg\varphi$.

(b) El núcleo de la forma clausal del apartado (a) consta de las cláusulas Ray y $\neg Rvb$. Por tanto, las entradas para la resolución son:

1. Ray.

2. $\neg Rvb$.

Vemos que los átomos Ray, Rvb son unificables por $\{v = a, y = b\}$. Entonces, resolviendo 1 y 2, obtenemos

3. $\square$.

Así pues, hemos demostrado por resolución que φ es una tautología.

Problema 3. Consideremos el vocabulario $\sigma = \{f^1, P^1, Q^1, R^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $I(P) = \{2, 3, 4\}$,
- $I(Q) = \{3, 4\}$,
- $I(R) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$,
- $I(f)(1) = 1, I(f)(2) = 1, I(f)(3) = 3, I(f)(4) = 3$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\exists x \neg Rxx$,

(2) $\forall x(Qx \to Pf(x))$,

(3) $\forall x \forall y(Rxy \to Rf(x)f(y))$,

(4) $\exists x \forall y Rxy$,

(5) $\forall x \exists y(Px \to Rxy)$.

Solución:

(1) es verdadera, pues para $x = 3$ tenemos que $\overline{R}33 = F$.

(2) es verdadera, ya que tenemos que $\overline{Q}n = V$ si y sólo si $n = 3$ o $n = 4$. Y para $n = 3$, tenemos que $\overline{Q}3 \to \overline{P}3 = V \to V = V$, y para $n = 4$, tenemos que $\overline{Q}4 \to \overline{P}3 = V \to V = V$.

(3) es falsa, pues si tomamos $x = 3$, $y = 4$, tenemos que $\overline{R}34 \to \overline{R}33 = V \to F = F$.

(4) es falsa, pues no hay ningún valor de x en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ que haga cierta la fórmula $\forall y Rxy$. Para ello, comprobamos que para cada valor de x en el dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ hay un valor de y en ese dominio que hace falsa la fórmula Rxy. Entonces, si $x = 1$, tomamos $y = 3$. Si $x = 2$, tomamos $y = 3$. Si $x = 3$, tomamos $y = 1$. Y si $x = 4$, tomamos $y = 1$.

(5) es verdadera, ya que todos los valores posibles de x en $\{1, 2, 3, 4\}$ hacen verdadera a la fórmula $\exists y(Px \to Rxy)$. Lo demostramos considerando

todos los valores n de x y encontrando en cada caso un valor m de y tal que $(\overline{P}n \to \overline{R}nm) = V$. Si $x = 1$, tomamos un y cualquiera (por ejemplo $y = 1$) pues al tener $\overline{P}1 = F$ el condicional ya es verdadero. Si $x = 2$, tomamos $y = 1$, y vemos que $\overline{P}2 = V$ y $\overline{R}21 = V$. Si $x = 3$, tomamos $y = 4$, y vemos que $\overline{P}3 = V$ y $\overline{R}34 = V$. Y si $x = 4$, tomamos $y = 3$, y vemos que $\overline{P}4 = V$ y $\overline{R}43 = V$.

Problema 4. Consideremos el vocabulario $\sigma = \{c, f^1, P^1, Q^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
- $I(P)n = V \iff n$ es par,
- $I(Q)nm = V \iff n$ es múltiplo de m,
- $I(f)(n) = 11 - n$ para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
- $I(c) = 3$,
- $I(v) = 5$ para cada variable v.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $\exists x Qxf(x)$,
(2) $\exists x(Px \wedge Qxy)$,
(3) $\forall x(Qxc \rightarrow Px)$,
(4) $\exists x \forall y Qxy$,
(5) $\forall x(Pf(x) \rightarrow \exists y(Py \wedge Qyx))$.

Solución:

(1) es verdadera, ya que tomando $n = 10$, tenemos que $\overline{Q}10\overline{f}(10) = \overline{Q}10\,1 = V$.

(2) es verdadera. En esta ocasión, debemos interpretar la variable y por $I(y) = 5$, ya que y está libre en la fórmula. Se tiene entonces que la fórmula es cierta en I, ya que tomando $n = 10$ tenemos que $\overline{P}10 = V$ y $\overline{Q}10\,5 = V$.

(3) es falsa, porque no es verdad que para todo $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ se tenga que $\overline{Q}n3 = V$ implica que $\overline{P}n = V$, ya que tomando $n = 9$ tenemos que $\overline{Q}9\,3 = V$ pero $\overline{P}9 = F$.

(4) es falsa, ya que no es verdad que existe $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tal que para todo $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ se tenga que $\overline{Q}nm = V$. Si $n < 10$ tenemos que $\overline{Q}n\,10 = F$, y si $n = 10$ tenemos que $\overline{Q}10\,3 = F$.

(5) es falsa, ya que no es verdad que para todo $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ se tenga que $\overline{P}\,\overline{f}(n) = V$ implica que existe $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tal que $\overline{P}m = V$ y $\overline{Q}mn = V$. Para comprobarlo, tomamos $n = 9$. Se tiene entonces que $\overline{P}\,\overline{f}(n) = \overline{P}2 = V$ y no existe $m \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tal que m es par y m es múltiplo de 9.

Problema 10. Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1 = \forall x(Bx \to Tf(x))$,

$\varphi_2 = \exists x Bx$,

$\varphi_3 = \neg\exists x(Tx \wedge Cx)$,

$\varphi = \exists x \neg Cx$.

Demostrar por resolución que φ es consecuencia lógica de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Solución: En primer lugar, tenemos que calcular formes clausales $(\varphi_1)^{cl}$, $(\varphi_2)^{cl}$, $(\varphi_3)^{cl}$ y $(\neg\varphi)^{cl}$ de φ_1, φ_2, φ_3 i $\neg\varphi$ respectivamente. Tenemos entonces:

$(\varphi_1)^{cl} = \forall x(\neg Bx \vee Tf(x))$,
$(\varphi_2)^{cl} = Ba$,
$(\varphi_3)^{cl} = \forall x(\neg Tx \vee \neg Cx)$,
$(\neg\varphi)^{cl} = \forall x Cx$.

A continuación, hemos de considerar las cláusulas que aparecen en los núcleos de las formas clausales anteriores:

(a) $\neg Bx \vee Tf(x)$.

(b) Ba.

(c) $\neg Tx \vee \neg Cx$.

(b) Cx.

Recordemos que cuando se aplica el algoritmo de resolució, tenemos que renombrar las variables que se repiten en las cláusulas. Entonces, reemplazamos $\neg Tx \vee \neg Cx$ por $\neg Ty \vee \neg Cy$, y reemplazamos Cx por Cz. Por tanto, tenemos las siguientes entradas para la resolución:

1. $\neg Bx \vee Tf(x)$.
2. Ba.
3. $\neg Ty \vee \neg Cy$
4. Cz.

Resolviendo 1 y 2, obtenemos:

5. $Tf(a)$.

A continuación, resolviendo 3 y 5, obtenemos:

6. $\neg Cf(a)$.

Finalmente, resolviendo 4 y 6, obtenemos:

7. $\square$.