**Exercici 15 (Demostració).**

Demostrar:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

**Solució 15.**
El producte i la suma als complexos ve definides per:

$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Sigui $z = a + bi$, la clase $\overline{z} = a - bi$ com a proposició.

(a) Sigui $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 - b_2)i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) Lema: Sigui $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
Sigui $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Aplicant el lema podem saber què:
$\overline{z^{n-1} \cdot z} = \overline{z^{n-1}} \cdot \overline{z} = \overline{z^{n-2} \cdot z} \cdot \overline{z} = \overline{z^{n-2}} \cdot \overline{z}^2 = \cdots\cdots\cdots\cdots = \overline{z^1} \cdot \overline{z}^{n-1} = \overline{z}^n$
Si repetim el procediment n-1 vegades cada volta traent un exponent i al final ens quedarà demostrat la igualtat.