LENGUAJES DE PREDICADOS

Marzo de 2023

Introducción

Empezaremos a estudiar los lenguajes de predicados, que son lenguajes lógicos que tienen una capacidad de expresión mayor que los lenguajes de proposiciones.

Hay lenguajes de programación que están basados en el formalismo de la lógica. Y el más importante de ellos, el lenguaje Prolog, está basado en la lógica de predicados. Para poder entender programas en Prolog y poder iniciarse en la programación en dicho lenguaje, es entonces necesario conocer previamente los lenguajes de predicados.

Concepto de predicado

Intuitivamente, un predicado es una expresión formal cuyo tipo de datos es booleano.
Las siguientes expresiones son ejemplos de predicados:

(1) $x + y = 2$.

(2) $x + y \leq z$.

(3) Existe un entero $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $A[i] > 100$, donde A es un vector de longitud k que tenemos declarado en un programa.

Antes de definir el concepto de lenguaje de predicados, vamos a describir los tipos de símbolos que aparecen en dichos lenguajes.

Símbolos de los lenguajes de predicados

(1) Variables.

$$u, v, x, y, z, u_0, v_0, x_0, y_0, z_0, u_1, v_1, x_1, y_1, z_1, \ldots, u_n, v_n, x_n, y_n, z_n, \ldots$$

(2) Símbolos de constante.

$$a, b, c, d, e, a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n, e_n \ldots$$

(3) Símbolos de operador (o de función).

$$f, g, h, f_0, g_0, h_0, f_1, g_1, h_1 \ldots, f_n, g_n, h_n, \ldots$$

(4) Símbolos de predicado (o de relación).

$$A, B, \ldots, Z, A_0, B_0 \ldots, Z_0, A_1, B_1, \ldots, Z_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots, Z_n, \ldots.$$

Símbolos de los lenguajes de predicados

(5) Las conectivas lógicas.

$$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \ .$$

(6) Los cuantificadores.

$$\exists$$
$$\forall$$

(7) Símbolos auxiliares.

$$($$
$$)$$
$$,$$

Símbolos de los lenguajes de predicados

Los símbolos de función y de predicado tienen asociado un número entero positivo que indica su número de argumentos (aridad). Si f (R) es un símbolo de función (respectivamente de predicado) de n argumentos, escribiremos f^n(respectivamente R^n).

Llamaremos vocabulario a un conjunto finito de símbolos de constante, de operador y de predicado.

El concepto de lenguaje de predicados se define con respecto a un vocabulario. Previamente, necesitamos definir el concepto de término. Intuitivamente, los términos nos permitirán describir elementos del dominio que estemos considerando.

Definición de término

Si σ es un vocabulario, definimos el conjunto de los σ-términos como el conjunto de elementos generado por las siguientes reglas:

(T1) Toda variable es un término.

(T2) Todo símbolo de constante de σ es un término.

(T3) Si f es un símbolo de función de n argumentos de σ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

Por ejemplo, si $\sigma = \{c, f^2, R^2\}$, los elementos $x_3, c, f(c, x_3), f(x_2, f(c, x_3))$ son términos. Sin embargo, $f(c)$ no es término, ya que f es un símbolo de función de dos argumentos. Y la expresión Rcv_2 tampoco es un término, ya que por las reglas (T1), (T2), (T3) de construcción de los términos, no es posible que un símbolo de predicado aparezca en un término.

Definición de átomo

Si σ es un vocabulario, llamaremos átomo (o fórmula atómica) a una expresión de la forma $Rt_1 \dots t_n$ donde R es un símbolo de relación de n argumentos de σ y $t_1, \dots, t_n$ son términos.

Por ejemplo, si $\sigma = \{c, f^2, R^2\}$, los elementos $Rcx_1, Rx_5f(c, x_3), Rf(c, v_3)c$ son átomos.

Definición de lenguaje de predicados

Si σ es un vocabulario, definimos el conjunto de las σ-fórmulas como el conjunto de elementos generado por las siguientes reglas:

(F1) Todo átomo es una fórmula.

(F2) Si ϕ es una fórmula, $\neg\phi$ también lo es.

(F3) Si ϕ, ψ son fórmulas, entonces $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$ son también fórmulas.

(F4) Si ϕ es una fórmula y x es una variable, entonces $\exists x\phi$, $\forall x\phi$ son fórmulas.

Al conjunto de fórmulas generadas por las reglas (F1)-(F4) se le llama lenguaje de predicados.

Reglas de formalización

Para poder representar propiedades formales o situaciones del lenguaje natural en lógica de predicados, deberemos utilizar las siguientes reglas:

(1) Todo A es B se representa por $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$.

(2) Ningún A es B se representa por $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$.

(3) Algún A es B se representa por $\exists x(Ax \wedge Bx)$.

(4) Algún A no es B se representa por $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"A todos los esquiadores les gusta la nieve"

Átomos:

Ex $=$ x es esquiador,

Nx $=$ a x le gusta la nieve.

La frase se puede formalizar entonces por $\forall x(Ex \to Nx)$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"A ningún montañero le gusta la lluvia."

Átomos:

$Mx = x$ es montañero,

$Lx =$ a x le gusta la lluvia.

La frase se puede formalizar entonces por $\forall x(Mx \to \neg Lx)$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"Todos los bancos tiene clientes descontentos."

Átomos:

$Bx = x$ es un banco,

$Cxy = x$ es cliente de y,

$Dx = x$ está descontento

La frase se puede formalizar entonces por
$\forall x(Bx \to \exists z(Czx \wedge Dz))$.