Exercici 23.

(a) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

(b) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9\}$.

(c) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$.

Solució 20.

(a) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

Renombrem la variable a com a x.

Tenint en compte aquestes implicacions:

$$
\begin{gathered}
1.\ x \equiv 0 \pmod 7 \\
2.\ x \equiv 3 \pmod 7 \\
3.\ x \equiv 6 \pmod 7 \\
4.\ x \equiv 9 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 7 \\
5.\ x \equiv 12 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod 7 \\
6.\ x \equiv 15 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 7 \\
7.\ x \equiv 18 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 7
\end{gathered}
$$

Farem una demostració per casos:

Sigui $z \in \mathbb{Z}$

Si $x = 7z \Rightarrow x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z$

Si $x = 7z + 1 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 15 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 2) + 15$

Si $x = 7z + 2 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 9 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 1) + 9$

Si $x = 7z + 3 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z + 3$

Si $x = 7z + 4 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 18 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 2) + 18$

Si $x = 7z + 5 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 12 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 1) + 12$

Si $x = 7z + 6 \Rightarrow x \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z + 6$

Hem demostrat l'enunciat tenint en compte què tot nombre enter es pot descompondre de forma única en $7z + r$ on $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9\}$.

Renombrem la variable a com a x.

Tenint en compte aquestes implicacions:

1. $x \equiv 0 \pmod 7$
2. $x \equiv 3 \pmod 7$
3. $x \equiv 6 \pmod 7$
4. $x \equiv 9 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 7$
5. $x \equiv -3 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 7$
6. $x \equiv -6 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 7$
7. $x \equiv -9 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod 7$

Farem una demostració per casos:

Sigui $z \in \mathbb{Z}$

Si $x = 7z \Rightarrow x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z$

Si $x = 7z + 1 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv -6 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z + 1) - 6$

Si $x = 7z + 2 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 9 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 1) + 9$

Si $x = 7z + 3 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z + 3$

Si $x = 7z + 4 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv -3 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z + 1) - 3$

Si $x = 7z + 5 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv -9 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z + 2) - 9$

Si $x = 7z + 6 \Rightarrow x \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z + 6$

Hem demostrat l'enunciat tenint en compte què tot nombre enter es pot descompondre de forma única en $7z + r$ on $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(c) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$.

Renombrem la variable a com a x.

Tenint en compte aquestes implicacions:

$$1.\ x \equiv 0 \pmod 7$$
$$2.\ x \equiv 3 \pmod 7$$
$$3.\ x \equiv 9 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 7$$
$$4.\ x \equiv 27 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 6 \pmod 7$$
$$5.\ x \equiv 81 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 7$$
$$6.\ x \equiv 243 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod 7$$
$$7.\ x \equiv 729 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 7$$

Farem una demostració per casos:

Sigui $z \in \mathbb{Z}$

Si $x = 7z \Rightarrow x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z$

Si $x = 7z + 1 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 729 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 104) + 729$

Si $x = 7z + 2 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 9 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 1) + 9$

Si $x = 7z + 3 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow x = 7z + 3$

Si $x = 7z + 4 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 81 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 11) + 81$

Si $x = 7z + 5 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 243 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 34) + 243$

Si $x = 7z + 6 \Rightarrow x \equiv 27 \pmod 7 \Rightarrow x = 7(z - 3) + 27$

Hem demostrat l'enunciat tenint en compte què tot nombre enter es pot descompondre de forma única en $7z + r$ on $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.