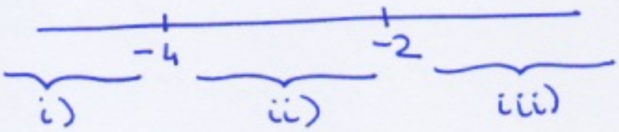
LAB. 1. ICD 2020-2021

1.

a) $|x+2| + |x+4| \leq 6$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases} \qquad |x+4| = \begin{cases} x+4, & x \geq -4 \\ -x-4, & x < -4 \end{cases}$$



Distingirem tres casos.

Cas i) : $x < -4$

$|x+2| + |x+4| \leq 6 \iff -x-2 + (-x-4) \leq 6$

$\iff -2x - 6 \leq 6 \iff 2x \geq -12 \iff x \geq -6$

Sol: $-6 \leq x < -4$

Cas ii) : $-4 \leq x < -2$

$|x+2| + |x+4| \leq 6 \iff -x-2+x+4 \leq 6 \iff 2 \leq 6$ cert.

Sol ii) : $-4 \leq x < -2$

Cas iii) : $x \geq -2$

$|x+2| + |x+4| \leq 6 \iff x+2+x+4 \leq 6 \iff 2x+6 \leq 6$

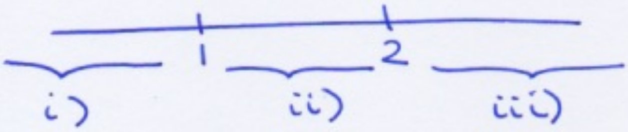
$\iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0$

Sol iii) : $-2 \leq x \leq 0$

Sol a): $[-6,-4) \cup [-4,-2) \cup [-2,0] = \boxed{[-6,0]}$

b) $|x-1|\,|x-2| < 2$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$



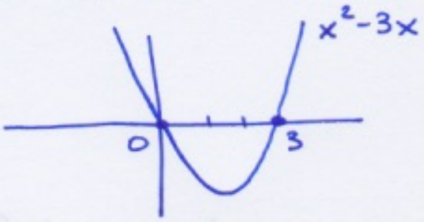
Com abans, distingirem tres casos.

Cas i) : $x<1$:

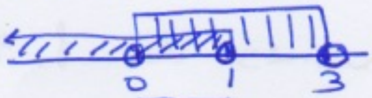
$|x-1||x-2|<2 \iff (1-x)(2-x)<2 \iff$

$\iff 2-x-2x+x^2<2 \iff x^2-3x<0 \iff x(x-3)<0$

$\iff x\in(0,3)$



Sol cas i):



$\hookrightarrow \underline{0<x<1}$

Cas ii) $1\le x<2$:

$|x-1||x-2|<2 \iff (x-1)(2-x)<2 \iff$

$\iff 2x-x^2-2+x<2 \iff x^2-3x+4>0$

$x^2-3x+4=0 \iff x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot4}}{2}$ $\nexists \Rightarrow$ la paràbola és positiva o negativa sempre.

Notem que la paràbola és sempre positiva ($x=0\to 0^2-3\cdot0+4=4>0$ i no té zeros).

$\Rightarrow x^2-3x+4>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

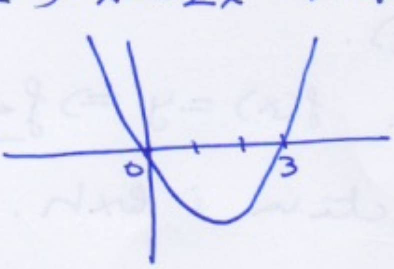
$\Rightarrow$ Sol ii) : $\underline{1\le x<2}$

Cas iii) $x\ge 2$:

$|x-1||x-2|<2 \iff (x-1)(x-2)<2 \iff$

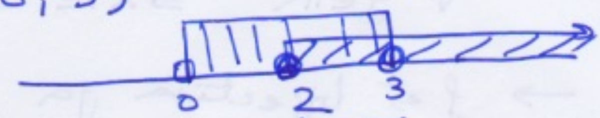
$\iff x^2-2x-x+2<2 \iff x^2-3x<0$

$x^2-3x = x(x-3)$



$\iff x\in(0,3)$

Sol cas iii) :



$\hookrightarrow \underline{2\le x<3}$

$\boxed{\text{Sol b)}: (0,1)\cup[2,3)}$

2. $f(x) = 2-3x$

$g(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$

$h(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$

a) Dominis de f, g, h.

f és un polinomi $\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$.

g és quocient de polinomis $\Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \setminus \{$zeros del denominador$\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{x=2\} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

h és quocient de funcions amb domini $\mathbb{R}$

$\Rightarrow D(h) = \mathbb{R}\setminus\{$zeros del denominador$\}$

$= \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

b) f, g i h inj, exh, bij?

$f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, és a dir, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow f$ inj.? $f(x) = f(y) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2-3x = 2-3y \Leftrightarrow -3x = -3y \Leftrightarrow x = y$ ✓

$\Rightarrow$ <u>f és injectiva.</u>

$\rightarrow f$ exh.? $f(x) = y \Leftrightarrow 2-3x = y \Leftrightarrow 2-y = 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2-y}{3} = f^{-1}(y)$.

$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x := \dfrac{2-y}{3} \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = y \Rightarrow$ <u>f és exh.</u>

$\rightarrow f$ és bijectiva ja que és injectiva i exh.

$g: \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow g$ injectiva? Obs: $g(x) = \dfrac{4}{2-x} - 1$

$g(x) = g(y) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$

$g(x) = g(y) \Leftrightarrow \dfrac{4}{2-x} - 1 = \dfrac{4}{2-y} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{2-x} = \dfrac{4}{2-y}$

$\Leftrightarrow 2-y = 2-x \Leftrightarrow x = y$ ✓

$\Rightarrow$ <u>g és injectiva</u>

$\rightarrow$ g és exhaustiva? Hem de veure si $\forall y \in \mathbb{R}$

$\exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ t.q. $g(x) = y$.

g <u>no</u> és exhaustiva, per exemple si considerem

$y = -1 \in \mathbb{R}$, aleshores $\nexists\, x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ t.q. $g(x) = -1$.

En efecte, $g(x) = -1 \iff \dfrac{2+x}{2-x} = -1 \iff 2+x = -(2-x)$

$\iff 2 + x = x - 2 \iff 2 = -2$!!! No pot ser.

$\rightarrow$ g no és bijectiva ja que no és exhaustiva.

$h : \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ h injectiva? $h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$?

$h(x) = h(y) \iff \dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1-|y|} \iff 1 - |y| = 1 - |x|$

$\iff |y| = |x| \not\Rightarrow x = y$ ja que $|x| = |-x|$.

Per exemple, $x = 2$ i $y = -2 \Rightarrow h(x) = h(y)$

ja que $|2| = |-2|$ però $2 \neq -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ h no és injectiva.

$\rightarrow$ h exhaustiva?

Obs: $h(x) \neq 0$. Per tant, h no pot ser exhaustiva ja que $\nexists\, x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ t.q. $h(x) = 0$.

$\rightarrow$ h no és bijectiva ja que no és exhaustiva.

(c) Recorreguts i inverses de les funcions injectives.

- $f(x) = 2-3x \quad , D(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = y = 2-3x \iff y-2 = -3x \iff$$
$$\iff 3x = 2-y \iff x = \boxed{\frac{2-y}{3} = f^{-1}(y)}$$

Domini $\mathbb{R}$

Així, <u>recorregut d'f és $\mathbb{R}$</u>.

- $g(x) = \dfrac{2+x}{2-x} = \dfrac{4}{2-x} - 1$. Domini $(g) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$g(x) = y \iff \frac{4}{2-x} - 1 = y \iff \frac{4}{2-x} = y+1$$
$$\iff 4 = (y+1)(2-x) = 2y - xy + 2 - x = 2y+2-x(y+1)$$
$$\iff x(y+1) = 2y-2 \underset{\text{si } y\neq -1}{\iff} x = \frac{2y-2}{y+1}$$

Pertant, $\boxed{g^{-1}(y) = \dfrac{2(y-1)}{y+1}}$ definida a $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Així, recorregut g és $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

#