LENGUAJES DE PROPOSICIONES

Por una *proposición* entendemos una frase declarativa, es decir, una frase de la que tiene sentido decir si es verdadera o falsa. Las siguientes frases son ejemplos de proposiciones:

(1) $7 > \sqrt{50}$.

(2) Si los precios suben, los ciudadanos dejan de ahorrar.

(3) Hoy es festivo.

Por un *átomo* entendemos una frase declarativa que no puede descomponerse en frases más simples. Por ejemplo, las frases (1) y (3) son átomos, mientras que la frase (2) no lo es.

Antes de definir el concepto de lenguaje de proposiciones, recordemos las definiciones de las conectivas lógicas. Representamos por V y F a los valores de verdad. Es decir, denotamos por V al valor "verdadero" y por F al valor "falso".

(1) Si ϕ es una proposición, denotamos por $\neg\phi$ a su negación. Por tanto, tenemos la siguiente tabla de verdad:

ϕ	$\neg\phi$
V	F
F	V

(2) Si ϕ, ψ son proposiciones, su disyunción la denotamos por $\phi \vee \psi$. Por tanto, tenemos la siguiente tabla de verdad:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(3) Si ϕ, ψ son proposiciones, su conjunción la denotamos por $\phi \wedge \psi$. Tenemos entonces la siguiente tabla de verdad:

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(4) Si ϕ, ψ son proposiciones, la proposición $\phi \rightarrow \psi$ se llama proposición condicional. La tabla de verdad para esta conectiva lógica es la siguiente:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(5) Si ϕ, ψ son proposiciones, la proposición $\phi \leftrightarrow \psi$ representa la equivalencia de ϕ y ψ. La tabla de verdad para esta conectiva es, por tanto, la siguiente:

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Sea σ un conjunto finito de átomos. Definimos entonces el *lenguaje de las σ-fórmulas proposicionales* como el conjunto de elementos generados por las siguientes reglas:

(1) Todo elemento de σ es una fórmula.

(2) Si ϕ es una fórmula, $\neg\phi$ también lo es.

(3) Si ϕ, ψ son fórmulas, entonces $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$ son también fórmulas.

A fin de evitar la proliferación de paréntesis, suprimiremos los paréntesis en las fórmulas siempre que no haya ambigüedad en la manera en que se ha construido la fórmula.

Muchas frases declarativas del lenguaje natural se pueden formalizar en lógica de proposiciones. Para ello, se utilizan las siguientes reglas:

Reglas de formalización.

(1) ϕ o ψ se representa por $\phi \vee \psi$.

(2) ϕ y ψ se representa por $\phi \wedge \psi$.

(3) Si ϕ entonces ψ (es decir, la condición ϕ implica la condición ψ) se representa por $\phi \to \psi$.

(4) ψ sólo si ϕ (es decir, es necesario que se cumpla la condición ϕ para que se cumpla la condición ψ) se representa por $\psi \to \phi$.

(5) ϕ si y sólo si ψ se representa por $\phi \leftrightarrow \psi$.

Por ejemplo, consideremos la siguiente frase:

"Cuando es fiesta y los comercios están autorizados a abrir, las ventas son abundantes si no llueve".

Tenemos los siguientes átomos:

$F =$ es fiesta,
$C =$ los comercios están autorizados a abrir,
$V =$ las ventas son abundantes,
$L =$ llueve.

La frase se puede formalizar entonces por $(F \wedge C) \to (\neg L \to V)$.