Exercici 9. Per a cadascuna de les equacions diofantines següents, doneu la solució (x,y) tal que x pren el menor valor positiu (i no nul) possible:

(a) 119x + 84y = 7,

(b) 119x + 84y = 21,

(c) 104x + 143y = 13.

Solució 9.

(a) $119x + 84y = 7$
$mcd(119, 84) = mcd(84, 35) = mcd(35, 14) = mcd(14, 7) = mcd(7, 0) = 7$, i $7|7$
$\Rightarrow$ Té solució.

Per la identitat de Bézout podem obtenir la solució de la equació, ja que aquesta ens diu: $119\lambda + 84\mu = mcd(119, 84)$.

	1	2	2	2
119	84	35	14	7
35	14	7	0	

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -7\\ -12 & 17\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda = 5$, $\mu = -7$.
Una solució particular és $(x_0, y_0) = (5, -7)$. La solució general és:

$$(x, y) = (5 + t \cdot \tfrac{84}{mcd(119,84)}, -7 - t \cdot \tfrac{119}{mcd(119,84)}), \forall t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{(x, y) = (5 + 12t, -7 - 17t)}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

La solució més petita positiva per x és, doncs, quan $t = 0 \Rightarrow (x, y) = (5, -7)$.

(b) $119x + 84y = 21$
$mcd(119, 84) = mcd(84, 35) = mcd(35, 14) = mcd(14, 7) = mcd(7, 0) = 7$, i $7|21$
$\Rightarrow$ Té solució.

Per la identitat de Bézout podem obtenir la solució de la equació, ja que aquesta ens diu: $119\lambda + 84\mu = mcd(119, 84)$.

	1	2	2	2
119	84	35	14	7
35	14	7	0	

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -12 & 17\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\lambda = 5$, $\mu = -7$.
Una solució particular és $(x_0, y_0) = (5\cdot 3, -7\cdot 3)$, ja que $21 = 7\cdot 3$. La solució general és:

$$(x, y) = (5\cdot 3 + t\cdot \tfrac{84}{mcd(119,84)}, -7\cdot 3 - t\cdot \tfrac{119}{mcd(119,84)}), \forall t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{(x, y) = (15 + 12t, -21 - 17t)}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

La solució més petita positiva per x és, doncs, quan $t = -1 \Rightarrow (x, y) = (3, -4)$.

(c) $104x + 143y = 213$
$mcd(104, 143) = mcd(143, 104) = mcd(104, 103) = mcd(39, 26) = mcd(26, 13) = mcd(13, 0) = 13$, i $13|13$

$\Rightarrow$ Té solució.

Per la identitat de Bézout podem obtenir la solució de la equació, ja que aquesta ens diu: $104\lambda + 143\mu = mcd(104, 143)$.

	0	1	2	1	2
104	143	104	39	26	13
104	39	26	13	0	

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 11 & -8\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\lambda = -4$, $\mu = 3$.
Una solució particular és $(x_0, y_0) = (-4, 3)$. La solució general és:

$$(x, y) = (-4 + t\cdot \tfrac{143}{mcd(104,143)}, 3 - t\cdot \tfrac{104}{mcd(104,143)}), \forall t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{(x, y) = (-4 + 11t, 3 - 8t)}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

La solució més petita positiva per x és, doncs, quan $t = 1 \Rightarrow (x, y) = (7, -5)$.