

FONAMENTS MATEMÀTICS D'ELECTRÒNICA DIGITAL

Índex de conceptes

- Àlgebra de Boole: postulats i teoremes
- Funcions de commutació
- Portes lògiques
- Suma de productes i producte de sumes
- Minterms i Maxterms

Matemàtiques bàsiques per al disseny de sistemes digitals

o

Formulisme matemàtic per operar les funcions de commutació



Àlgebra de Boole

- Desenvolupada per Georges Boole al 1847 per problemes de lògica matemàtica
- Claude Shannon al 1939 l'aplica per primer cop a funcions de commutació

DEFINICIONS

- **Variable lògica**: variable que pot assolir únicament dos valors $\{(0,1), (L,H), (F,V)\}$
- **Funció lògica**: funció definida amb variables lògiques el resultat de la qual només pot assolir dos valors $\{(0,1), (L,H), (F,V)\}$
- **Àlgebra**: conjunt d'elements, S , format, com a mínim, per dos elements diferents, amb dues operacions internes, suma (+) i producte (\cdot) (que anomenarem **suma lògica** i **producte lògic**). Els elements satisfan el principi de substitució.

- I. La suma i el producte són operacions internes:
 - Si $a, b \in S$
 - i) $(a+b) \in S$
 - ii) $(a \cdot b) \in S$
- II. Existeix un element neutre per a la suma “0” i un element neutre per al producte “1”, tals que:
 - i) $(a+0) = a$
 - ii) $(a \cdot 1) = a$
- III. Les operacions suma i producte són commutatives:
 - i) $a + b = b + a$
 - ii) $a \cdot b = b \cdot a$
- IV. Cada operació és distributiva respecte l'altra:
 - i) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
 - ii) $a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$
- V. Per a tot element de l'Àlgebra, a , existeix un element, \bar{a} , anomenat complement d' a , tal que:
 - i) $a + \bar{a} = 1$
 - ii) $a \cdot \bar{a} = 0$
- VI. Existeixen almenys dos elements a i b tals que $a \neq b$

Comparació amb l'Àlgebra dels nombres reals

Si comparem aquests postulats amb els que defineixen l'Àlgebra dels nombres reals podem observar que:

- I. La llei associativa no és un postulat de l'Àlgebra de Boole, es pot deduir a partir dels postulats anunciats.
- II. La propietat distributiva de l'operació (+) respecte a l'operació (\cdot) és vàlida en l'Àlgebra de Boole però no en la dels nombres reals
- III. En no haver-hi un element invers additiu o multiplicatiu, no es poden definir les operacions resta lògica i divisió lògica
- IV. El complement d'un element no es pot definir en l'Àlgebra ordinària
- V. Una Àlgebra de Boole pot estar definida per un nombre finit d'elements

Aquí només ens interessa l'exemple més senzill d'Àlgebra de Boole: l'àlgebra de 2 elements $S=\{0,1\}$, amb els operadors: **suma lògica** i **producte lògic** definits com:

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

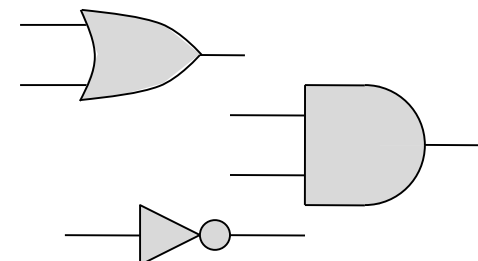
A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Per tal de satisfer el postulat 'v' resulta que: $\overline{0} = 1$ i $\overline{1} = 0$

L'operador **SUMA LÒGICA** rep el nom de funció **OR**

L'operador **PRODUCTE LÒGIC** rep el nom de funció **AND**

L'operador **COMPLEMENT** rep el nom de funció **NOT**



Aquest àlgebra satisfà els següents **teoremes**:

Teorema 0: Dualitat. Cada propietat o teorema deduïble a partir dels postulats de l'Àlgebra de Boole continua sent vàlid si intercanviem entre si els operadors $(+, \cdot)$ i els elements neutres $\{0, 1\}$ (exemple: si es compleix que $a+0=a$, llavors $a \cdot 1=a$)

Teorema 1:

$$(a) x + x = x, (b) x \cdot x = x$$

Demostració:

$$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{(Postulat IIb)} \\ &= (x + x) \cdot (x + \overline{x}) && \text{(Postulat Va)} \\ &= x + (x \cdot \overline{x}) && \text{(Postulat IVb)} \\ &= x + 0 && \text{(Postulat Vb)} \\ &= x && \text{(Postulat IIa)} \end{aligned}$$

Per dualitat resulta $x \cdot x = x$

Teorema 2: (a) $x + 1 = 1$, (b) $x \cdot 0 = 0$

Demostració:

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{(Postulat IIb)} \\ &= (x + 1) \cdot (x + \bar{x}) && \text{(Postulat Va)} \\ &= x + (1 \cdot \bar{x}) && \text{(Postulat IVa)} \\ &= x + \bar{x} && \text{(Postulat IIb)} \\ &= 1 && \text{(Postulat Va)} \end{aligned}$$

Per dualitat resulta $x \cdot 0 = 0$

Teorema 3: (a) $\bar{\bar{x}} = x$

Teorema 4: (a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ Propietat associativa
(b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

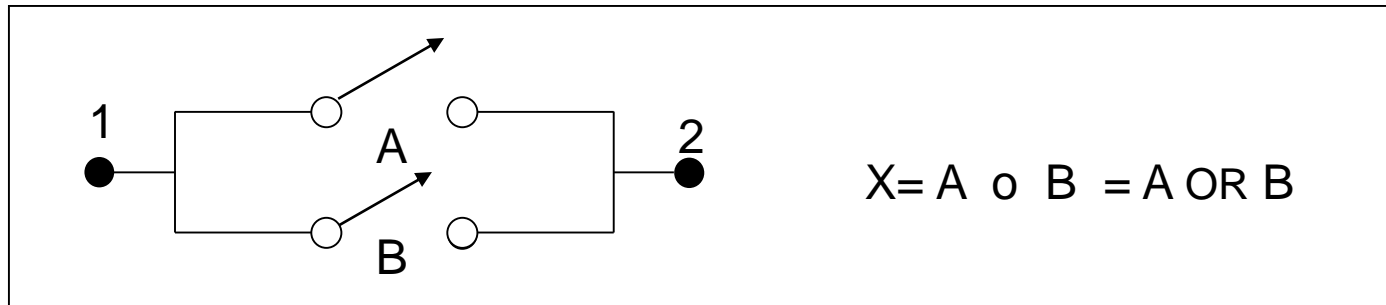
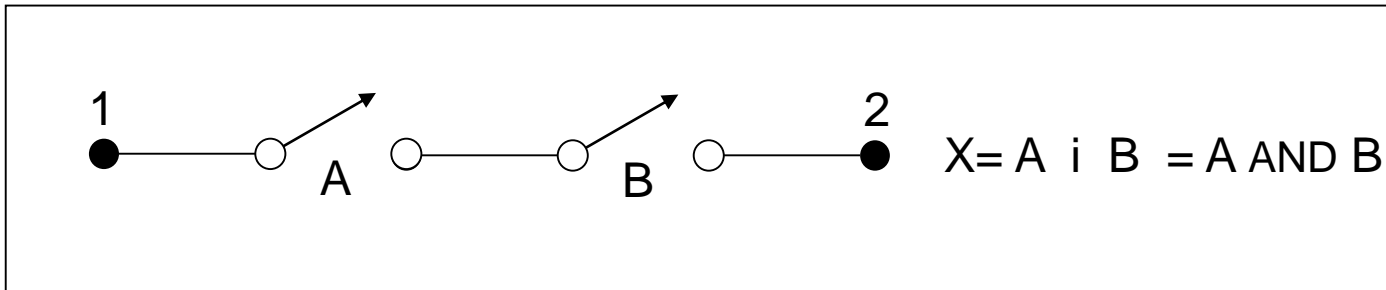
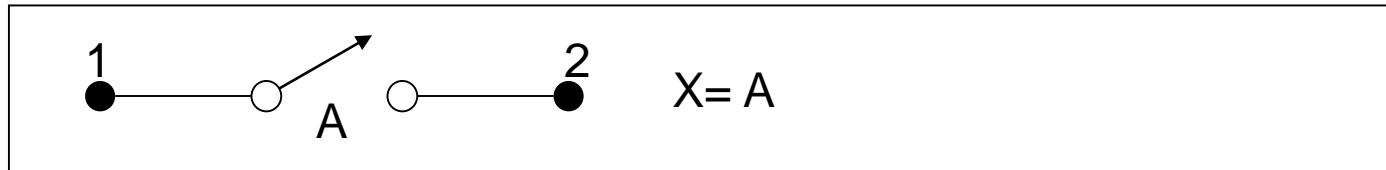
Teorema 5: (a) $\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ De Morgan
(b) $\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$

Teorema 6: (a) $x + x \cdot y = x$ Absorció
(b) $x \cdot (x + y) = x$

L'Àlgebra de Boole s'aplica a les **funcions de commutació** que es poden representar com circuits que contenen *commutadors*, etiquetats amb variables

A=0: Commutador obert
A=1: Commutador tancat

X=0: Circuit obert entre 1 i 2
X=1: Circuit tancat entre 1 i 2



Funció de commutació: aplicació de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$, representada com (4 possibilitats !!!):

1 Expressió algebraica: $F(A,B,C) = A \cdot B + \overline{C}$

2 Taula de veritat: per una funció de n variables tenim una columna amb les 2^n combinacions d'1 i 0 que es poden formar i un altre columna amb el valor de la funció per aquestes entrades).

ABC	F
000	
001	
010	
011	
100	
101	
110	
111	

2^n entrades

valors de la funció

3 Verbalització: expressió lingüística

L'alarma sonarà si no hi ha ningú dins i s'obre una finestra, o si s'engega el detector de fums

Funció = sonar l'alarma

variable A = hi ha algú o ningú

variable B = s'obre o no la finestra

variable C = hi ha fum o no

M'he de posar l'abric si fa fred i estic constipat, o ho diu la meva mare

Funció = posar-se l'abric

variable A = fa fred (o fa fred o no fa fred, no puc dir en fa una mica)

variable B = estic constipat o no

variable C = no diu res la mama o si ho diu

han de poder-se representar com funcions binàries !!

- Una funció de commutació no té una representació algebraica única

$$F(A,B,C) = /C + \overline{(/A+/B+/C)} + (A \cdot B \cdot /C) = A \cdot B + \overline{C}$$

- Dues funcions diferents tenen taules de veritat diferents.
- Per N variables hi ha 2^{2^N} funcions de commutació.
 - Així per a 1 variable tenim 4 funcions possibles
 - Per 2 variables, 16 funcions possibles
 - Per 3 variables, 256 funcions possibles

1 Variable (x)	$F_0(x)$	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Funcions de dues variables (16 possibles)

A B	F ₀ 0	F ₁ AND	F ₂	F ₃ A	F ₄	F ₅ B	F ₆ XOR	F ₇ OR	F ₈ NOR	F ₉ XNOR	F ₁₀ /B	F ₁₁	F ₁₂ /A	F ₁₃	F ₁₄ NAND	F ₁₅ 1
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Funcions més usades:

AND: $F_1(A,B) = A \text{ and } B = A \cdot B = A \& B$

OR: $F_7(A,B) = A \text{ or } B = A + B = A | B$


NAND: $F_{14}(A,B) = /(A \cdot B) = \overline{(A \cdot B)}$

NOR: $F_8(A,B) = /(A + B) = \overline{(A + B)}$

XOR: $F_6(A,B) = A \oplus B$ (or exclusiva) (desigualtat)

XNOR: $F_9(A,B) = /(A \oplus B) = \overline{(A \oplus B)}$ (igualtat)

Totes les funcions poden ser expressades en termes dels operadors AND, OR, i NOT


$$f_2 = A \cdot \bar{B}$$

$$f_4 = \bar{A} \cdot B$$

$$f_{10} = \bar{B}$$

$$f_{11} = A + \bar{B}$$

$$f_{12} = \bar{A}$$

$$f_{13} = \bar{A} + B$$

...

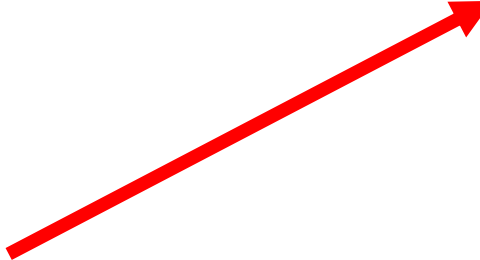
$$f_6 = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

$$f_9 = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Conjunt complet d'operadors:

conjunt d'operadors amb els quals es pot especificar qualsevol funció de commutació.

1. AND, OR, NOT
2. NAND
3. NOR

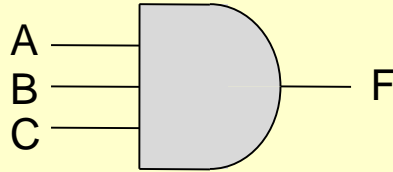


Portes lògiques digitals: Circuits electrònics que realitzen les funcions bàsiques AND, OR, NAND, NOR, XOR, NOT, ...

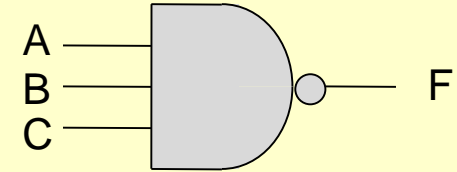
Tenen diversos terminals d'entrada i un de sortida.

Aquests terminals poden assolir un dels dos valors específics 0 o 1.

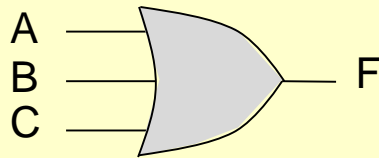
Porta AND: $F=A \cdot B \cdot C$



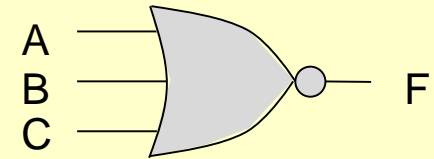
Porta NAND: $F=\neg(A \cdot B \cdot C)$



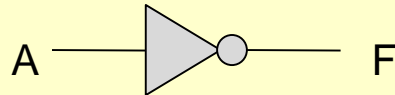
Porta OR: $F=A+B+C$



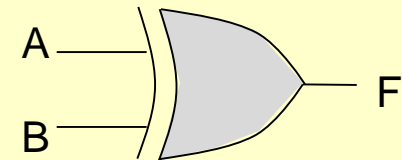
Porta NOR: $F=\neg(A+B+C)$



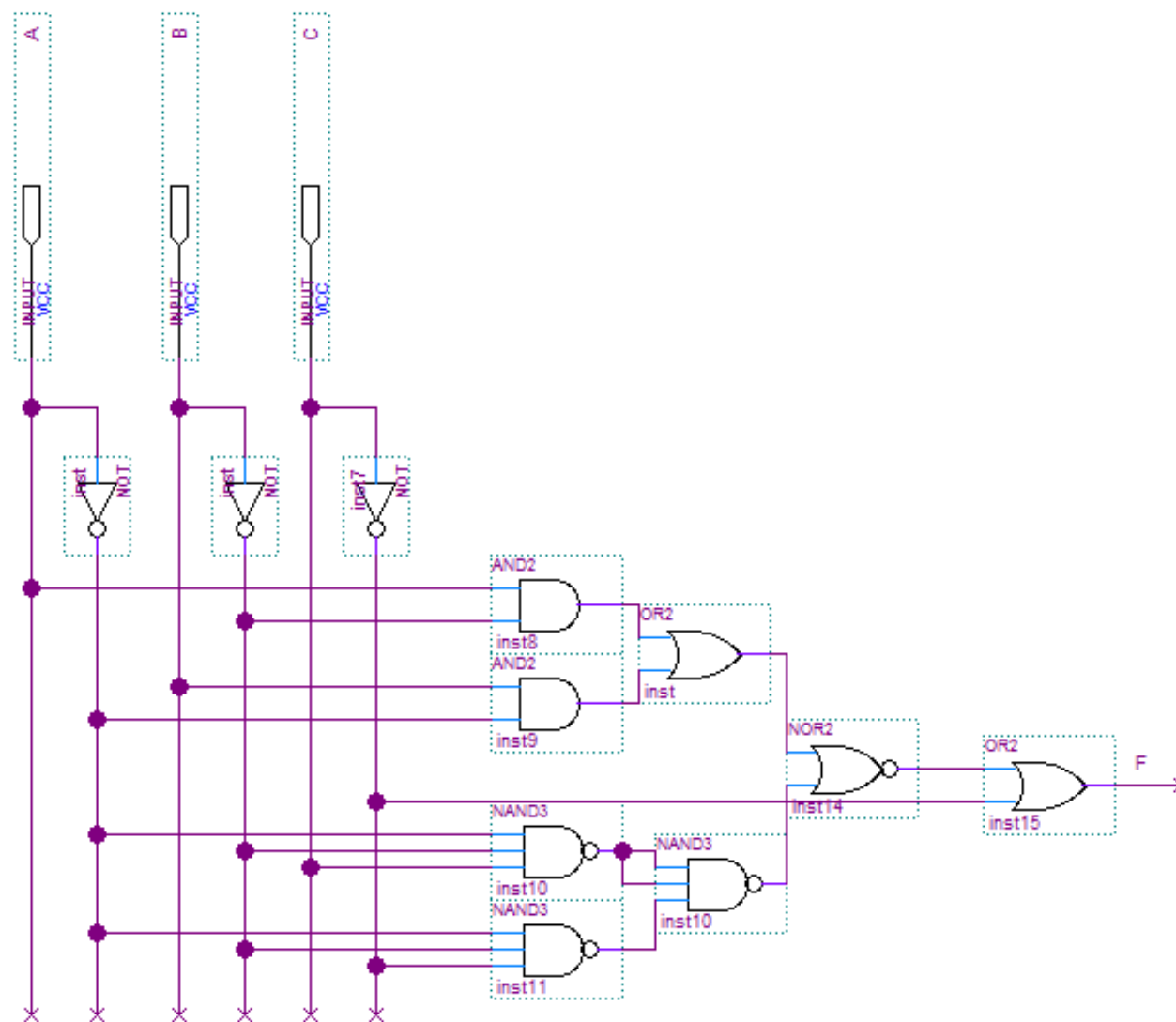
INVERSOR: $F=\neg A$



Porta XOR: $F=(A \oplus B)$



4 Exemple gràfic de funció de commutació



Forma estàndard de les funcions lògiques

Literal: variable lògica o el seu complement ($A, \bar{A}, B, \bar{B}, \dots$)

Terme producte: una sèrie de literals relacionats per l'operador lògic AND ($A \cdot \bar{B} \cdot C, \bar{A} \cdot D, \bar{A} \cdot B \cdot \bar{F}, \dots$).

Terme suma: una sèrie de literals relacionats per l'operador lògic OR ($A + \bar{B} + C, \bar{A} + D, \bar{A} + B + \bar{F}, \dots$).

Terme normal o canònic: terme producte o suma que conté **totes les variables** de la funció un sol cop.

Termes adjacents: termes canònics entre els quals només varia el valor d'una variable ($\bar{A} + B + \bar{C}$ i $A + B + \bar{C}$, o, $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ i $A \cdot B \cdot \bar{C}$).

Aquestes termes són bàsics per fer simplificacions de funcions.

Suma de productes: tota funció lògica es pot expressar com a suma de termes producte (SOP).

$$f(A, B, C, D) = (A \cdot C + B) \cdot (C \cdot D + \overline{D})$$

$$f = A \cdot C \cdot C \cdot D + A \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot D + B \cdot \overline{D} = A \cdot C + B \cdot C \cdot D + B \cdot \overline{D}$$

Producte de sumes: tota funció lògica es pot expressar com a producte de termes suma (POS).

$$f = (A + B) \cdot (C + B) \cdot (C + \overline{D})$$

La implementació de qualsevol funció lògica sempre es pot fer a **dos nivells** com a suma de termes producte (**SOP**) o com a producte de termes suma (**POS**).

Suma estàndard de productes: suma de termes producte on tots són canònics.

$$f = A \cdot C + B \cdot C \cdot D + B \cdot \bar{D} = A \cdot C \cdot (B + \bar{B}) \cdot (D + \bar{D}) + B \cdot C \cdot D \cdot (A + \bar{A}) + B \cdot \bar{D} \cdot (A + \bar{A}) \cdot (C + \bar{C}) =$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

$$+ \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

$$f = A \cdot B \cdot C \cdot D + \textcircled{A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D} + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

Producte estàndard de sumes: producte de termes suma on tots són canònics.

$$f = (A + B + C + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) \cdot (A + B + C + \bar{D}) \cdot \textcircled{(A + B + \bar{C} + \bar{D})} \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot$$

$$(\bar{A} + B + C + \bar{D}) \cdot (A + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})$$

Qualsevol funció de commutació de n variables es pot expressar com a suma estàndard de productes o com a producte estàndard de sumes.

Taula de veritat

A B C D	f
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	1
0 1 0 1	0
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

Minterm: terme producte canònic que dona un 1 lògic a la funció representada com a suma de productes.

Maxterm: terme suma canònica que dona un 0 lògic a la funció expressada com a producte de sumes.

MINTERMS

$m_{000} = m_0$	000	$\bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_0$
$m_{001} = m_1$	001	$\bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1 \cdot X_0$
$m_{010} = m_2$	010	$\bar{X}_2 \cdot X_1 \cdot \bar{X}_0$
$m_{011} = m_3$	011	$\bar{X}_2 \cdot X_1 \cdot X_0$
$m_{100} = m_4$	100	$X_2 \cdot \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_0$
$m_{101} = m_5$	101	$X_2 \cdot \bar{X}_1 \cdot X_0$
$m_{110} = m_6$	110	$X_2 \cdot X_1 \cdot \bar{X}_0$
$m_{111} = m_7$	111	$X_2 \cdot X_1 \cdot X_0$

Combinació que dóna un 1 en S.O.P.

MAXTERMS

$M_{111} = M_7$	111	$\bar{X}_2 + \bar{X}_1 + \bar{X}_0$
$M_{110} = M_6$	110	$\bar{X}_2 + \bar{X}_1 + X_0$
$M_{101} = M_5$	101	$\bar{X}_2 + X_1 + \bar{X}_0$
$M_{100} = M_4$	100	$\bar{X}_2 + X_1 + X_0$
$M_{011} = M_3$	011	$X_2 + \bar{X}_1 + \bar{X}_0$
$M_{010} = M_2$	010	$X_2 + \bar{X}_1 + X_0$
$M_{001} = M_1$	001	$X_2 + X_1 + \bar{X}_0$
$M_{000} = M_0$	000	$X_2 + X_1 + X_0$

Combinació que dóna un 0 en P.O.S.

Suma estàndard de productes: suma de termes producte on tots són canònics.

$$f = A \cdot C + B \cdot C \cdot D + B \cdot \bar{D} = A \cdot C \cdot (B + \bar{B}) \cdot (D + \bar{D}) + B \cdot C \cdot D \cdot (A + \bar{A}) + B \cdot \bar{D} \cdot (A + \bar{A}) \cdot (C + \bar{C}) =$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

$$+ \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

$$f = A \cdot B \cdot C \cdot D + \textcircled{A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D} + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

Producte estàndard de sumes: producte de termes suma on tots són canònics.

$$f = (A + B + C + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) \cdot (A + B + C + \bar{D}) \cdot \textcircled{(A + B + \bar{C} + \bar{D})} \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot$$

$$(\bar{A} + B + C + \bar{D}) \cdot (A + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})$$

$$f(A, B, C, D) = \Sigma_m(4, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15)$$

$$\Pi_M(0, 1, 2, 3, 5, 8, 9, 13)$$

Taula de veritat

A B C D	f
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	1
0 1 0 1	0
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

A B C	f	
0 0 0	1	
0 0 1	0	
0 1 0	0	
0 1 1	0	
1 0 0	1	
1 0 1	1	
1 1 0	0	
1 1 1	1	

Exemple: tenim un problema verbalitzat que hem passat a la següent taula de la veritat:

Les funcions representades com a suma de productes i com a producte de sumes són **complementàries**, els nombres que apareixen a la llista de minterms són els que falten a la llista de maxterms.

$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C =$$

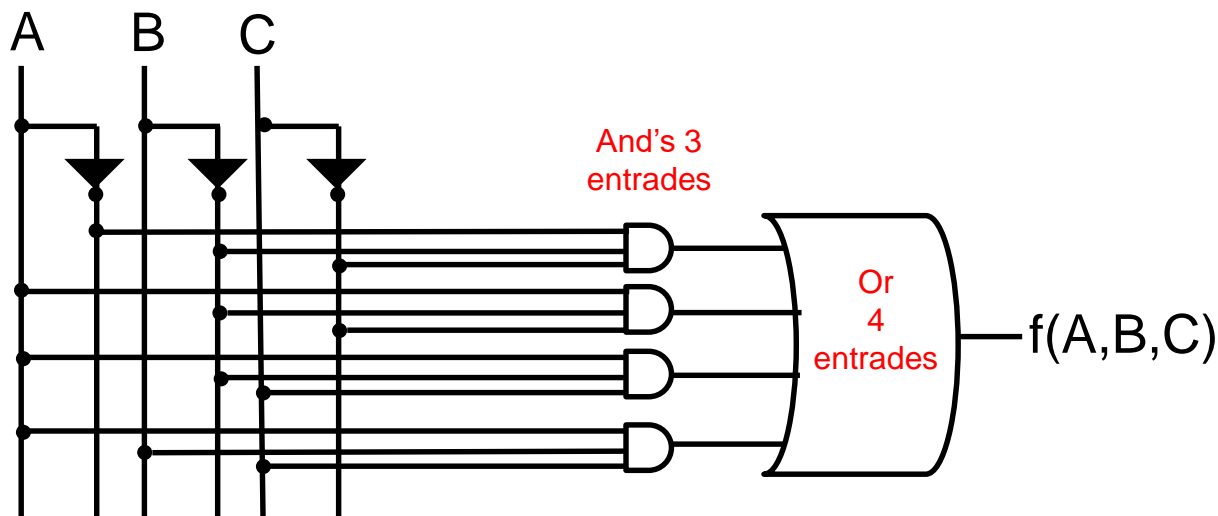
0 0 0	1 0 0	1 0 1	1 1 1
0	4	5	7

$$= \sum m(0, 4, 5, 7)$$

$$f = (A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) =$$

0 1 0	0 1 1	0 0 1	1 1 0
2	3	1	6

$$= \prod M(1, 2, 3, 6)$$



$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C =$$

000	100	101	111
0	4	5	7

$$= \sum m(0, 4, 5, 7)$$

$$f = (A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) =$$

010	011	001	110
2	3	1	6

$$= \prod M(1, 2, 3, 6)$$

Les funcions representades com a suma de productes i com a producte de sumes són **complementàries**, els nombres que apareixen a la llista de minterms són els que falten a la llista de maxterms.