5.1 Siguin F, G i H subespais d'un espai vectorial E. Demostreu o doneu contraexemples de cada una de les següents afirmacions:

(i) $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

(ii) $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.

(iii) $\dim (F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) - \dim(F \cap G \cap H)$.

5.2 Demostreu que un espai vectorial de dimensió cinc no pot ser suma de dos subespais de dimensió dos. Demostreu que en un espai vectorial de dimensió cinc dos subespais de dimensió tres sempre tenen un vector no nul en comú.

5.3 Demostreu que si F i G son subespais d'un espai vectorial E, $\dim F = 1$ i $F \not\subset G$, llavors $\dim(F + G) = \dim G + 1$.

5.4 Demostreu que si F i G son subespais d'un espai vectorial E de dimensió n, $\dim G = n-1$ i $F \not\subset G$, llavors $\dim(F \cap G) = \dim F - 1$.

5.5 Siguin F, G subespais de dimensió dos d'un espai E , $F \neq G$. Demostreu que una i només una de ses següents alternatives es certa:

(a) $\dim F \cap G = 1$ i $\dim(F + G) = 3$.

(b) $\dim F \cap G = 0$ i $\dim(F + G) = 4$.

Doneu exemples de subespais de $\mathbb{R}^4$ en les condicions (a) i (b).

5.6 Si F, G són subespais de dimensió dos d'un espai E de dimensió quatre, $F \neq G$, demostreu que $\dim F \cap G = 1$ o $E = F \oplus G$.

5.7 Demostreu que vectors $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ són independents si y només si

$$\dim < u_1, \dots, u_r > = r$$
$$\dim < v_1, \dots, v_s > = s$$

i $< u_1, \dots, u_r > \cap < v_1, \dots, v_s > = \{\vec{0}\}$.

5.8 Siguin F, G subespais d'un espai E, $u_1, \dots, u_r$ una base de F i $v_1, \dots, v_s$ una base de G. Demostreu que els vectors $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$, són base de E si y només si

$$F \oplus G = E.$$