Ejercicio 6. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ números enteros tales que $a > 0, b > 0$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$.

(a) Demuestra que si $ab = c^2$, para algún número entero c, entonces existen x , y $\in \mathbb{Z}$ tales que $a = x^2, b = y^2$, y $\text{mcd}(x, y) = 1$.

(b) Da un ejemplo que enseña que en el caso en que no sea $\text{mcd}(a, b) = 1$, se puede tener una igualdad de la forma $ab = c^2$, con $c \in \mathbb{Z}$, pero a y b no cuadrados.

Solución 6.

(a) Sea $c > 0$ un entero tal que $ab = c^2$. Si c = 1 entonces $ab = 1$ y $a = b = 1 = 1^2$. Supongamos ahora que $c > 1$.

Sea $c = p_1^{q_1} * ... * p_n^{q_n}$ la factorización en números primos de c, siendo $p_1, ..., p_2$ primos distintos entre sí y $q_1, ..., q_n \in \mathbb{N}$. Entonces $c^2 = p_1^{2q_1} * ... * p_n^{2q_n}$ es la factorización en factores primos de c^2. Luego, $c^2 = ab = p_1^{2q_1} * ... * p_n^{2q_n}$.

Como $a|c^2$ y $b|c^2$ se sigue que $a = p_1^{s_1} * ... * p_n^{s_n}$ y $b = p_1^{t_1} * ... * p_n^{t_n}$, donde $0 \leqslant s_i \leqslant 2q_i$ y $0 \leqslant t_i \leqslant 2q_i$, con $i = 1, ..., n$.

Tenemos entonces que $c^2 = ab = p_1^{s_1+t_1} * ... * p_n^{s_n+t_n}$, y como la factorización en primos es única para cada número deducimos que $s_i + t_i = 2q_i$, $i = 1, .., n$.

Ahora bien, por la hipótesis de que $\text{mcd}(a, b) = 1$ tenemos que no puede haber ningún i tal que $s_i > 0$ y $t_i > 0$. Luego, para cada i tenemos que o bien $s_1 = 0$ y $t_i = 2q_i$, o bien $s_1 = 2q_i$ y $t_i = 0$. Como consecuencia, todos los s_i y t_i son pares, y tanto a como b son cuadrados perfectos, siendo $x^2 = p_1^{s_1} * ... * p_n^{s_n}$ e $y^2 = p_1^{t_1} * ... * p_n^{t_n}$. Además, como x^2 e y^2 no tienen ningún factor en común se tiene que $\text{mcd}(x, y) = 1$

(b) Un ejemplo podría ser a = 2 y b = 18, donde $\text{mcd}(2, 8) = 2$, y por tanto distinto de 1. Como vemos el producto de ab da como resultado a un cuadrado perfecto $ab = 36$, y sin embargo ni a ni b son cuadrados perfectos.