Exercicis 13, 14

13. Trobeu totes les arrels i les multiplicitats corresponents dels polinomis següents i; per a cadascun d'ells, escriviu el conjunt d'arrels racionals, el conjunt d'arrels reals no racionals, i el conjunt de les arrels complexes.

(a) $q_1 = 2x^3 - 4x^4 + x^5$.

(b) $q_2 = 2 - 8x + 11x^2 - 6x^3 + x^4$.

(c) $q_3 = -2x + 2x^2 + 5x^3 - 3x^4 - 3x^5 + x^6$.

14. Proporcioneu les descomposicions de tots els polinomis de l'enunciat de l'exercici anterior com a producte de polinomis irreductibles en $\mathbb{C}[x]$, en $\mathbb{R}[x]$ i en $\mathbb{Q}[x]$.

(a) $q_1 = 2x^3 - 4x^4 + x^5 = x^3(2 - 4x + x^2) = x^3(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))$.

Per tal de fer la descomposició, primer he tret factor comú i, després he resolt l'equació de segon grau que ve a continuació,

$$2 - 4x + x^2 = 0 \longrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

- Conjunt d'arrels racionals: $\{0\}$. El 0 té multiplicitat 3.
- Conjunt d'arrels no racionals: $\{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$. Les dues arrels tenen multiplicitat 1.
- Conjunt d'arrels complexes: $\{0, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$. El 0 té multiplicitat 3, les altres dues arrels tenen multiplicitat 1.
- Descomposició en $\mathbb{C}[x]$: $q_1 = x^3(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))$.
- Descomposició en $\mathbb{R}[x]$: $q_1 = x^3(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))$.
- Descomposició en $\mathbb{Q}[x]$: $q_1 = x^3(2 - 4x + x^2)$.

(b) $q_2 = 2 - 8x + 11x^2 - 6x^3 + x^4 = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 6x - 2) = (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = (x-1)^2(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))$.

Per tal de fer la descomposició, he trobat les arrels mitjançant el teorema del residu i, després he fet Ruffini per resoldre les divisions.

$q_2(1) = 2 - 8 + 11 - 6 + 1 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 11 & -8 & 2 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

Sigui $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$, $f(1) = 1 - 5 + 6 - 2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 6 & -2 \\ 1 & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 0 \end{array}$$

- Conjunt d'arrels racionals: $\{1\}$. L'1 té multiplicitat 2.
- Conjunt d'arrels no racionals: $\{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$. Les dues arrels tenen multiplicitat 1.

- Conjunt d'arrels complexes: $\{1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$. L'1 té multiplicitat 2, les altres dues arrels tenen multiplicitat 1.
- Descomposició en $\mathbb{C}[x]$: $q_2 = (x-1)^2(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))$.
- Descomposició en $\mathbb{R}[x]$: $q_2 = (x-1)^2(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))$.
- Descomposició en $\mathbb{Q}[x]$: $q_2 = (x-1)^2(x^2-4x+2))$.

(c) $q_3 = -2x+2x^2+5x^3-3x^4-3x^5+x^6 = x(-2+2x+5x^2-3x^3-3x^4+x^5) = x(x-1)(x^4-2x^3-5x^2+2) = x(x-1)(x+1)(x^3-3x^2-2x+2) = x(x-1)(x+1)^2(x^2-4x+2) = x(x-1)(x+1)^2(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))$.

Per tal de fer la descomposició, en primer lloc, he tret factor comú. Després he trobat les arrels mitjançant el teorema del residu i, després he fet Ruffini per resoldre les divisions.

$q_3(1) = -2+2+5-3-3+1 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -3 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & -5 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Sigui $f(x) = x^4-2x^3-5x^2+2$, $f(-1) = 1+2-5+2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Sigui $g(x) = x^3-3x^2-2x+2$, $g(-1) = -1-3+2+2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & & -1 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 0 \end{array}$$

- Conjunt d'arrels racionals: $\{-1, 0, 1\}$. El -1 té multiplicitat 2, el 0 i l'1 tenen multiplicitat 1.
- Conjunt d'arrels no racionals: $\{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$. Les dues arrels tenen multiplicitat 1.
- Conjunt d'arrels complexes: $\{-1, 0, 2+\sqrt{2}, 1, 2-\sqrt{2}\}$. El -1 té multiplicitat 2, les altres quatre arrels tenen multiplicitat 1.
- Descomposició en $\mathbb{C}[x]$: $q_3 = x(x-1)(x+1)^2(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))$.
- Descomposició en $\mathbb{R}[x]$: $q_3 = x(x-1)(x+1)^2(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))$.
- Descomposició en $\mathbb{Q}[x]$: $q_2 = x(x-1)(x+1)^2(x^2-4x+2)$.