TEMA 3: COMBINATÒRIA

Introducció

La combinatòria és l'art de comptar, és a dir de calcular de forma intel·ligent cardinals de conjunts i de determinar els elements d'un conjunt descrit per alguna propietat.

Aquesta disciplina clàssica ara té més importància amb l'aparició dels ordenadors per varis motius: per exemple en l'estudi d'algoritmes o anàlisi de programes, el càlcul del nombre d'operacions, unitats de memòria que es necessiten, estudi de la complexitat etc....

Volem saber comptar i a poder ser fer-ho de forma "intel·ligent".

EXEMPLE 1

En una competició d'escacs amb 64 participants que es juga pel sistema d'eliminació (a cada partida el guanyador passa a la següent fase i el que perd queda eliminat), quantes partides cal fer per determinar el guanyador?

1a forma:

- Comencem amb 32 partides
- Després farem 16 partides
- Després farem 8 partides, 4 partides, 2 partides i la final.

En total hauríem fet $32+16+8+4+2+1 = \underline{\underline{63}}$

2a Forma:

- Cada partida permet eliminar 1 jugador. Comencem amb 64 i volem acabar només amb 1, el guanyador. Per tant

$$\text{El n° de partides és } 64-1 = \underline{\underline{63}}$$

Aquesta 2a forma ens ho permet calcular de forma molt directa, inclús per nombres molt més grans.

EXEMPLE 2:

Entre ~~15~~ 14 persones s'han d'escollir a 2 per a que ens representin en una comissió. De quantes formes podem escollir-les?

Tenim 14 persones que les enumerem de 1 a 14

$$\{p1, p2, \dots, p14\}$$

Cal veure quants subconjunts de 2 persones podem fer

$\{ \underbrace{\_\_}_{\text{14 possibilitats}} , \underbrace{\_\_}_{\text{13 possibilitats}} \}$ però escollir $\{p1, p7\}$ és igual que $\{p7, p1\}$

Per tant en tenim

$$\frac{14 \times 13}{2}$$

També ho podem veure fent-ho de forma ordenada:

$\{p1, p2\}$ $\{p1, p3\}, \dots, \{p1, p14\}$ $\rightsquigarrow$ 13 parelles.

$\{p2, p3\}$ $\{p2, p4\} \dots, \{p2, p14\}$ $\rightsquigarrow$ 12 parelles.

Per tant serà

$$13 + 12 + 11 + \dots + 2 + 1 = \frac{14 \times 13}{2}$$

$\llcorner$.

En aquest tema intentarem aprendre a comptar de la forma més pragmàtica possible.

TEMA 3: COMBINATÒRIA

3.1. PERMUTACIONS:

Les permutacions són un objecte combinatori amb una estructura rica que mereix ser estudiada amb una mica de detall.

Podríem dir que una permutació σ de n elements consisteix en especificar un ordre en el conjunt $X=\{1,\dots,n\}$. De forma més formal:

DEFINICIÓ:

Una permutació σ de n elements és una aplicació bijectiva (això és injectiva i exhaustiva)

$$\sigma: \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$$
$$i \longrightarrow \sigma(i)$$

Recordem que bijectiva vol dir que $\forall j \in \{1\dots n\}$, $\exists\, i \in \{1,\dots n\}$ tal que $\sigma(i)=j$ i que si $\sigma(l)=\sigma(m)$ aleshores $l=m$.

NOTACIÓ

Normalment denotem per $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ a una permutació σ.

Denotem per S_n al conjunt de totes les permutacions de n elements. Observem que

$$\#S_n = |S_n| = n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

EXEMPLE

ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ és una permutació de 4 elements

$$\sigma: \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$$
$$1 \longrightarrow 2$$
$$2 \longrightarrow 1$$
$$3 \longrightarrow 4$$
$$4 \longrightarrow 3$$

ⓑ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$ no és una permutació perquè $\sigma(2)=\sigma(4)=3$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n\end{pmatrix}$ és una permutació i li diem IDENTITAT. (La denotem Id)

DEFINICIÓ

Diem que $i \in \{1,\dots,n\}$ es queda fix per la permutació $\sigma \in S_n$ si $\sigma(i)=i$.

EXEMPLE:

La permutació $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5\end{pmatrix} \in S_5$ deixa fixos el 2 i el 5.

DEFINICIÓ:

Donades dues permutacions $\sigma, \alpha \in S_n$ denotem per $\sigma\alpha \in S_n$ la seva composició com aplicacions:

$$\sigma \circ \alpha = \sigma\alpha : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$
$$i \longrightarrow \sigma(\alpha(i))$$

($\sigma\circ\alpha$ és la COMPOSICIÓ)

EXEMPLE:

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ i $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\alpha\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

OBS:

De l'exemple anterior ja observem que en general la composició NO és CONMUTATIVA.

Això és, en general $\sigma\alpha \neq \alpha\sigma$.

PROPOSICIÓ:

Donades σ, α i $\beta \in S_n$, es verifica:

ⓐ $\sigma(\alpha\beta) = (\sigma\alpha)\beta$

ⓑ $\sigma \circ Id = Id \circ \sigma = \sigma$

ⓒ Per tot $\sigma \in S_n$, existeix σ^{-1} tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id \in S_n$

σ^{-1} és el que anomenem la INVERSA de σ.

Com calculem la inversa de σ:

- Ordenem les columnes de σ per tal de que la 2a fila sigui $1\,2 \dots n$.
- Intercanviem les 2 files
- El resultat és σ^{-1}.

EXEMPLE:

$\underline{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}}$

Comprovem que efectivament $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$

DEFINICIÓ:

Una permutació és un CICLE si permuta de forma cíclica els elements d'un subconjunt $\{i_1, \dots i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ i deixa fixos els altres:

$$\sigma(i_j) = i_{j+1} \quad j < k \quad \sigma(i_k) = i_1$$

Els cicles es denoten per $(i_1\, i_2 \dots i_k)$. Dos cicles són disjunts si mouen nombres diferents. La longitud del cicle és k (el nº d'index que mou).

EXEMPLE: ⓐ $\sigma = (1\,4\,6\,7)$ és un cicle de S_7, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ Té longitud 4

ⓑ $\sigma_1 = (2\,6\,7)$ i $\sigma_2 = (1\,4\,5)$ són dos cicles disjunts de S_7 de longitud 3.

OBSERVACIÓ: Si σ i α són cicles disjunts de S_n, aleshores commuten:

$$\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma$$

(Penseu per què !!!)

DEFINICIÓ:

Anomenem TRANSPOSICIÓ a tot cicle de longitud 2.

PROPOSICIÓ:

ⓐ Tota permutació descomposa de forma única, llevat ordre, en composició de cicles disjunts

ⓑ Tota permutació descomposa, no de forma única, en composició de Transposicions. El que és únic és la paritat del nombre de transposicions que es necessiten en la descomposició.

DEFINICIÓ:

Una permutació és Parella (o de signe positiu) si descompon en nombre parell de transposicions. És Senar (o de signe negatiu) si descompon en nombre senar de transposicions.

EXEMPLE

ⓐ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,4) \circ (2\,5) = (1\,3)(3\,4)(2\,5) \Rightarrow$ és senar

ⓑ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1\,5\,6\,2\,3\,4) = (1\,5)(5\,6)(6\,2)(2\,3)(3\,4) \Rightarrow$ és senar

ⓒ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,4) \Rightarrow$ és parell.

ⓓ $(1,2) \in S_3$ es pot descomposar de 2 formes:

$(1,2) = (1,2) \circ (1\,3)(1\,3) \to$ és Senar.

PROBLEMA:

Considerem el següent taulell de fitxes

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	∅

→ Buida

Les peces només es poden moure si una casella adjacent està lliure.

Per exemple en el 1r moviment pot baixar el 12 o el 14 desplaçar-se →.

<u>És possible conseguir una configuració com la anterior però amb la darrera fila ordenada?</u>

<u>És a dir</u>

13	14	15	∅

(14 i 15 intercanviats).

<u>Té solució aquest problema?</u>