Exercici 17.

Resoleu el sistema de congruències

$$x \equiv 1(mod 6), x \equiv 2(mod 7), x \equiv 3(mod 17);$$

doneu-ne la solució positiva més petita.

Solució 17.

Veiem primerament que $mcd(n_i, n_j) = 1 \ \forall i \neq j$: $mcd(6,7) = 1$, $mcd(6,17) = 1$ i $mcd(7,17) = 1$. Així el sistema tindrà solució.

Busquem ara els s_i tals que $s_i \cdot \frac{n}{n_i} \equiv 1(mod\ n_i)$ on $n = 6 \cdot 7 \cdot 17 = 714$.

$$119 \cdot s_1 \equiv 1(mod 6) \longrightarrow s_1 \equiv 5 mod(6)$$
$$102 \cdot s_2 \equiv 1(mod 7) \longrightarrow s_2 \equiv 2 mod(7)$$
$$42 \cdot s_3 \equiv 1(mod 17) \longrightarrow s_3 \equiv 15 mod(17)$$

(Els resultats de s_i s'han trobat buscant la inversa de 119, 102 i 42 ens els seus mòduls corresponent tal com es va veure a classe utilitzant l'identitat de Bézout.) Tenim ja doncs una solució:

$$b_1 \cdot s_1 \cdot \frac{n}{n_1} + b_2 \cdot s_2 \cdot \frac{n}{n_2} + b_3 \cdot s_3 \cdot \frac{n}{n_3}$$
$$1 \cdot 5 \cdot \frac{714}{6} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{714}{7} + 3 \cdot 15 \cdot \frac{714}{17} = 2893$$

Per trobar la solució més petita veiem que $2893 \equiv 37(mod 714)$, que implica que $x \equiv 37(mod 174)$, és a dir $x = 37 + 714k$. Si volem la x positiva més petita, veiem que la tenim per $k = 0$ i així $x = 37$.