SIST. SEQÜENCIALS SINCRÒNICS: MÀQUINES D'ESTATS FINITS

Índex de conceptes

- **Màquina de Moore**
- **Màquina de Mealy**
- **Diagrama i taula d'estats**
- **Càlcul de lògiques de entrada i sortida**

Aquí treballem amb circuits **seqüencials sincrònics**, on tots els FF estan sincronitzats amb **el mateix senyal de rellotge** (com a millor opció tots els FF són edge-triggered).

Definim **estat** del sistema com **cadascuna de les situacions estables i distingibles en que es pot trobar el sistema**, que depèn de l'estat actual del sistema i de la història passada del sistema (efecte de memòria).

Veurem la metodologia de disseny d'aquests sistemes denominats **màquines d'estats finits**

Sigui un sistema seqüencial binari caracteritzat per:

$X=(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ Entrades del sistema, paraula d'n bits

$Z=(z_0, z_1, ..., z_{m-1})$ Sortides del sistema, paraula d'm bits

i els elements de memòria utilitzats els identificarem com:

$Y=(y_0, y_1, ..., y_{p-1})$ Vector que defineix **l'Estat actual** del sistema, p bits

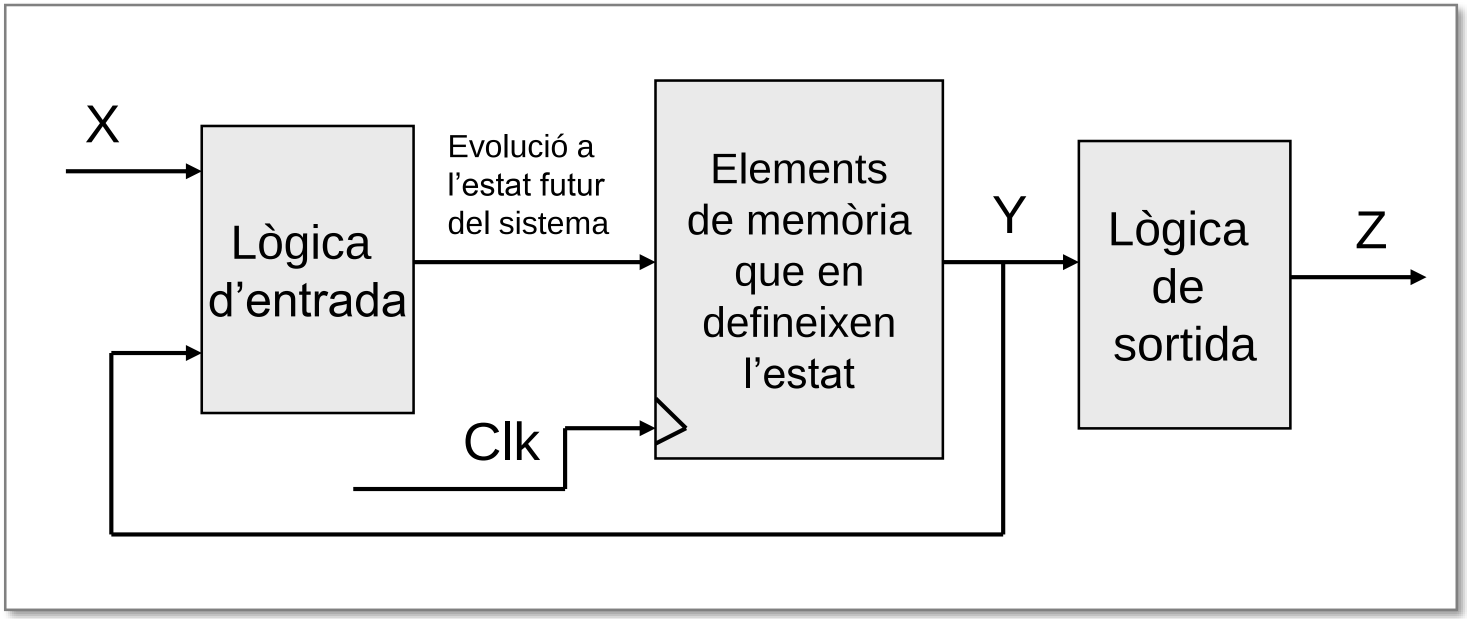
$Y^+=(y_0^+, y_1^+, ..., y_{p-1}^+)$ Vector que defineix **l'Estat futur** del sistema, p bits

Al tenir un nombre finit de variables, tenim un nombre finit d'estats**, p variables d'estat** implica **2^p estats** màxims possibles pel sistema $\Rightarrow$ **màquina d'estats finits**

L'estructura d'una màquina d'estats finits pot assolir una de dues tipologies: **Moore o Mealy**

Tipus de Màquines d'estats finits

Màquina de Moore



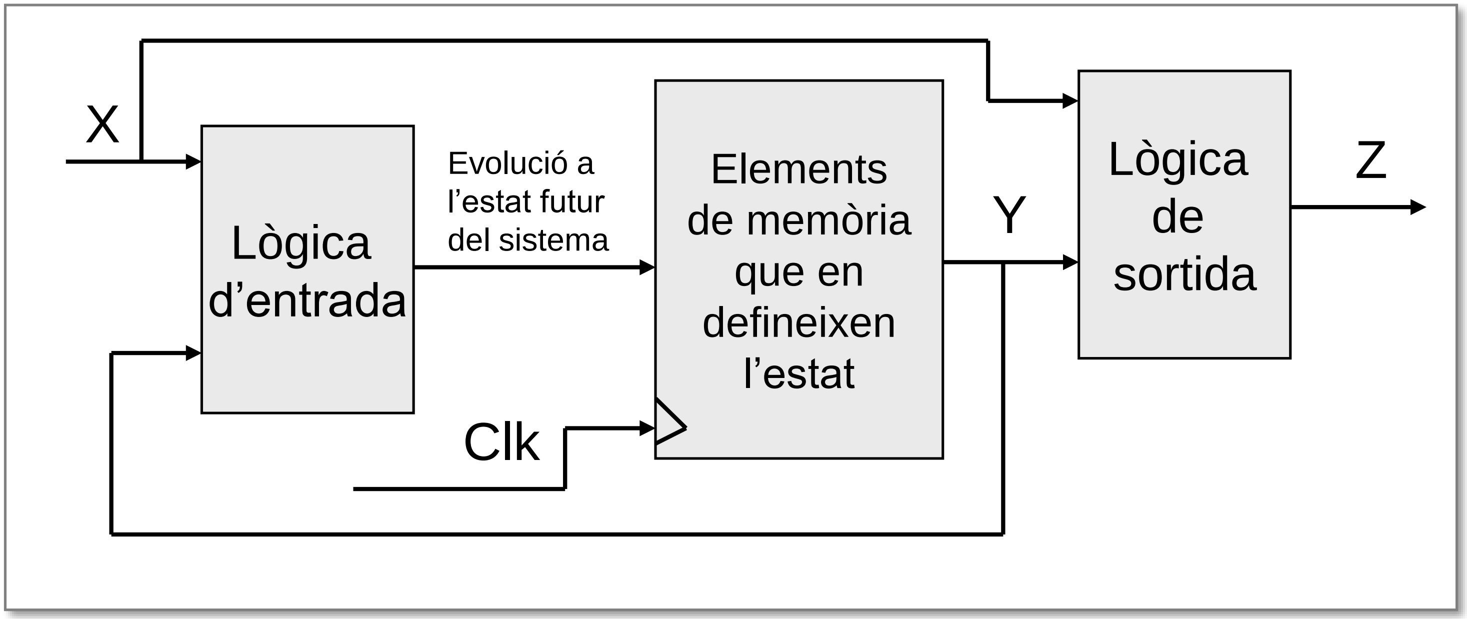
$$Y^{+} = h(X, Y)$$

$$Z = g(Y)$$

- La sortida només depèn de l'estat actual del sistema.
- La sortida a la màquina de Moore és sincrònica amb el rellotge.

Tipus de Màquines d'estats finits

Màquina de Mealy



$$Y^+ = h(X, Y)$$

$$Z = g(X, Y)$$

- La sortida depèn de l'estat actual del sistema i de les entrades.
- La sortida canvia tan bon punt canvia l'entrada.

Les **dues màquines poden realitzar la mateixa funció**, però la màquina de Mealy *generalment* és més senzilla que la màquina de Moore en quant a número d'estats.

	AVANTATGES	**INCONVENIENTS**
MÀQUINA DE MOORE	Sortides sincronitzades	Menys flexibilitat Més estats
MÀQUINA DE MEALY	Menys estats	Sortides no sincronitzades

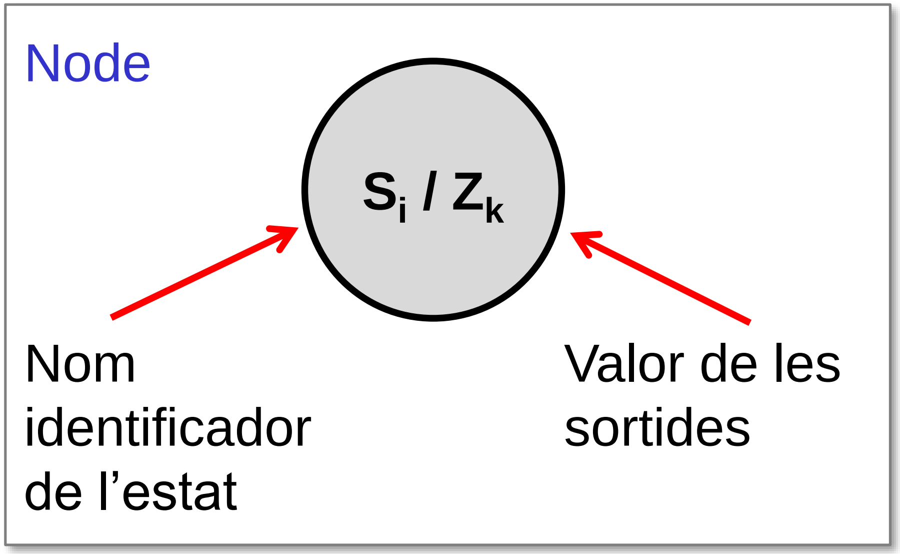
Les màquines d'estat es poden descriure gràficament mitjançant un **diagrama d'estat** o mitjançant una **taula d'estats** i ambdues descripcions són equivalents.

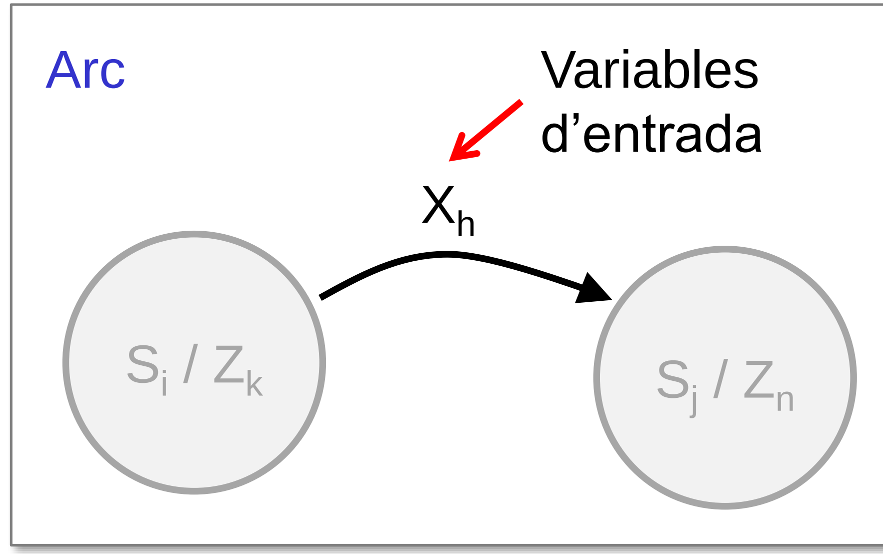
El **diagrama d'estat** és un graf format per arcs i nodes que representa el sistema (cal distingir entre estat del sistema i sortida del sistema).

- Cada node indica un estat del sistema.
- Cada arc indica les transicions entre estats del sistema depenen dels valors de les entrades.

La **taula d'estats** indica el nombre d'estats, el valor de les sortides i l'evolució cap a estat futur en funció de les entrades

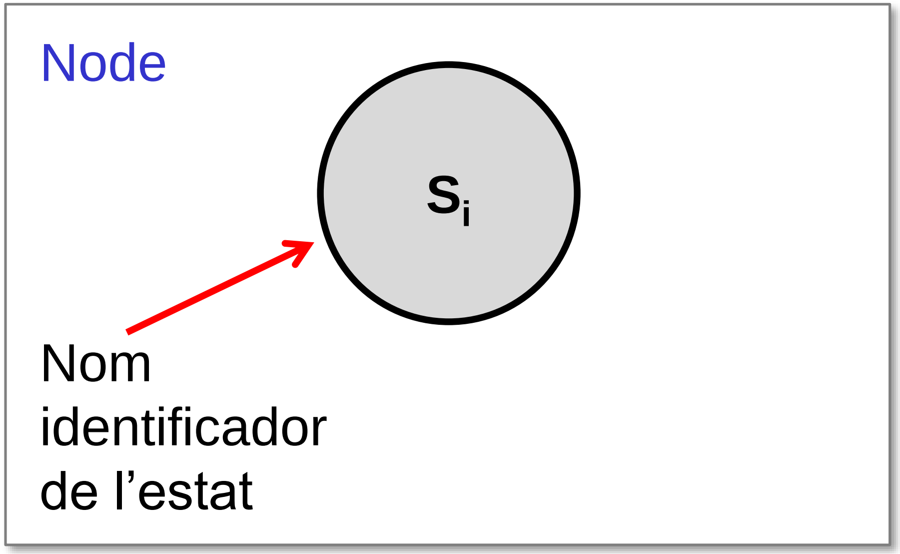
Descripció de les màquines d'estat: Moore

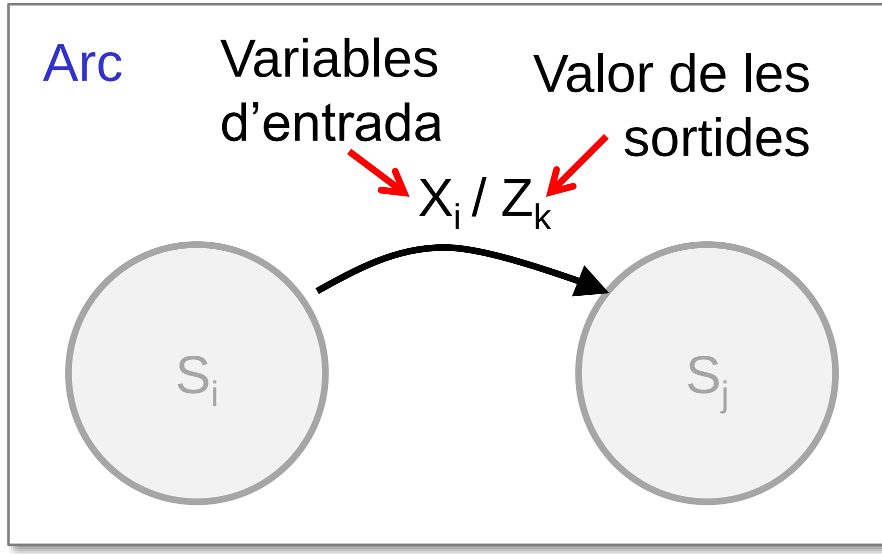




Estat actual Y	Estat futur Y^+ per cada combinació de valor de les entrades X_i (*exemple amb 2 entrades X_1X_0*)				Sortides Z		
	X_1X_0=00	X_1X_0=01	X_1X_0=10	X_1X_0=11	Z0	Z1	...
S0	S3	S2	S1	S1	0	1	...
S1	S1	S3	S3	S2	1	0	...
...	....	...	...	...	...	...	...

Descripció de les màquines d'estat: Mealy

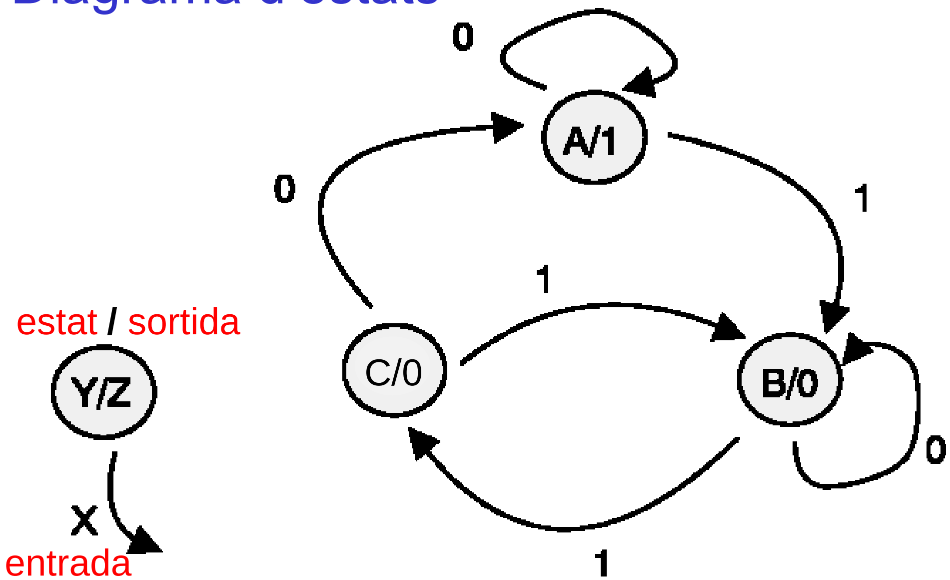




Estat actual Y	Estat futur Y^+ / Sortides Z per cada combinació de valor de les entrades X_i (*exemple amb 2 entrades X_1X_0*) X_1X_0=00	X_1X_0=01	X_1X_0=10	X_1X_0=11
S0	S3 / Z0	S2 / Z1	S1 / Z0	S1 / Z0
S1	S1 / Z0	S3 / Z2	S3 / Z0	S2 / Z1
...	....	...	...	...

Exemple de **Màquina de Moore** de 3 estats amb 1 entrada X i 1 sortida Z

Diagrama d'estats



Taula d'estats

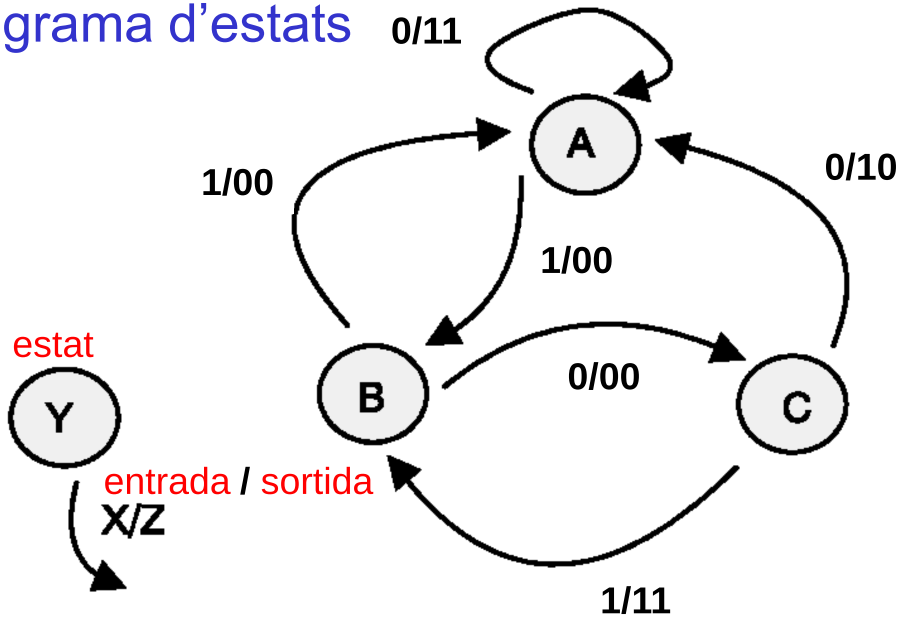
Estat Actual Y	Estat futur Y^+		Variables de Sortida
	X=0	X=1	Z
A	A	B	1
B	B	C	0
C	A	B	0

En la màquina de Moore les sortides depenen exclusivament de l'estat del sistema. Per tant, *les sortides s'han d'associar directament als nodes*.

En els circuits de Moore les sortides commuten de manera sincrònica amb el rellotge.

Exemple de **Màquina de Mealy** de 3 estats amb 1 entrada X i 2 sortides Z1 i Z0

Diagrama d'estats



Taula d'estats

Estat Actual Y	Estat futur Y^+ / Sortides Z	
	X=0	X=1
A	A/11	B/00
B	C/00	A/00
C	A/10	B/11

En la màquina de Mealy les sortides depenen de l'estat del sistema i de les entrades. Per tant, *les sortides s'han d'associar als arcs*.

En els circuits de Mealy les sortides commuten tant bon punt canvien les variables d'entrada, és a dir, de manera asíncrona amb el rellotge.

Síntesi de màquines d'estat

1. Definició d'entrades i sortides de la màquina (a vegades explícit al enunciat).
2. Definició dels estats de la màquina.
3. Diagrama d'estats.
4. Taula d'estats (surt directament del diagrama d'estats).
5. Minimització del diagrama d'estats (no es demanarà).
6. Assignació d'estats (número de FF que cal utilitzar). Si tenim 'r' estats ens caldran 'p' FF tal que: $2^{p-1} < r \leq 2^p$. Aquesta assignació no afecta a la funcionalitat del sistema i serà arbitraria.
7. Generación de la taula de transicions.
8. Elecció del tipus de FF (escollirem tipus D activats per flanc).
9. Completar la taula de transicions i càlcul de les funcions d'excitació de les entrades dels FF i de les sortides de la màquina.
10. Esquema lògic del circuit.

Síntesi d'una màquina de Moore

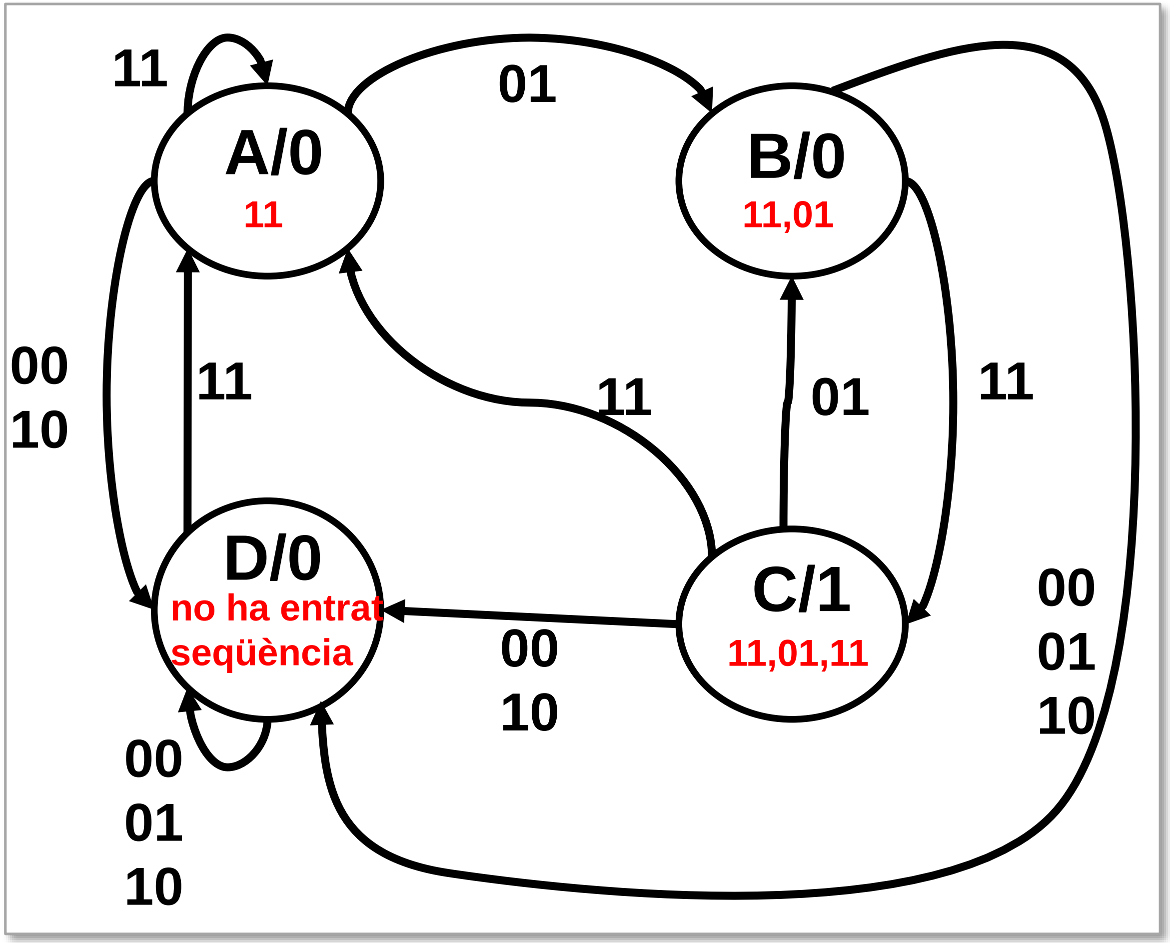
Exemple 1

Dissenyeu un circuit amb dues entrades, X_1 i X_0, i una sortida, Z, tal que Z=1 quan en els últims 3 polsos de rellotges ha entrat la seqüència X_1X_0= 11,01,11. Pot existir solapament de seqüències, és a dir, que l'11 final d'una seqüència es pot utilitzar com a inici de la seqüència següent.

1. Definició d'entrades i sortides.
   - dues entrades X_1 i X_0
   - una sortida Z que val 1 quan detecta 11,01,11

2. Definició dels estats. Hi ha 4 estats diferents:

A: on ha entrat 11, però amb sortida 0
B: on ha entrat 11,01, amb sortida 0.
C: on ha entrat 11,01,11, amb sortida 1
D: on no ha entrat cap terme de la seqüència, amb sortida 0.



3. Diagrama d'estats

4. Taula d'estats

Estat actual Y	Estat Futur Y^+				Sortida Z
	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0	
	00	01	10	11	
A	D	B	D	A	0
B	D	D	D	C	0
C	D	B	D	A	1
D	D	D	D	A	0

A: on ha entrat 11, però amb sortida 0

B: on ha entrat 11,01, amb sortida 0.

C: on ha entrat 11,01,11, amb sortida 1

D: on no ha entrat cap terme de la seqüència, amb sortida 0.

5. Minimització d'estats. En aquest cas no hi cap estat equivalent

6. Assignació d'estats.

Tenim 4 estats i, per tant, calen 2 FF, les sortides dels quals són $\{Y_1, Y_0\}$. Una possible assignació arbitraria és la binària natural:

.

Estat	Y_1	Y_0
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Encara hem de trobar l'estat futur $\{Y_1^+, Y_0^+\}$, i la sortida Z. A partir d'aquesta taula d'assignacions definim una taula de transicions entre estats, on apareixen els estats, les variables d'entrada i les sortides corresponents

Estat actual Y	Estat Futur Y^+				Sortida Z
	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0	
	00	01	10	11	
A	D	B	D	A	0
B	D	D	D	C	0
C	D	B	D	A	1
D	D	D	D	A	0

+

Estat	Y_1	Y_0
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

=

7. Taula de transicions.

Terme	Variables d'entrada		Variables de sortida	
	Estat actual Y_1Y_0	Entrades X_1X_0	Estat futur $Y^+_1Y^+_0$	Sortida Z
0	0 0(A)	0 0	1 1(D)	0
1	0 0(A)	0 1	0 1(B)	0
2	0 0(A)	1 0	1 1(D)	0
3	0 0(A)	1 1	0 0(A)	0
4	0 1(B)	0 0	1 1(D)	0
5	0 1(B)	0 1	1 1(D)	0
6	0 1(B)	1 0	1 1(D)	0
7	0 1(B)	1 1	1 0(C)	0
8	1 0(C)	0 0	1 1(D)	1
9	1 0(C)	0 1	0 1(B)	1
10	1 0(C)	1 0	1 1(D)	1
11	1 0(C)	1 1	0 0(A)	1
12	1 1(D)	0 0	1 1(D)	0
13	1 1(D)	0 1	1 1(D)	0
14	1 1(D)	1 0	1 1(D)	0
15	1 1(D)	1 1	0 0(A)	0

8. Elecció del tipus de FF.

Normalment farem servir FF edge-triggered tipus D.

Q	Q^+	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Es a dir: $Q^+ = D$

7. Taula de transicions.

Terme	Variables d'entrada		Variables de sortida	
	Estat actual Y_1Y_0	Entrades X_1X_0	$D_1\ D_0$	Sortida Z
0	0 0(A)	0 0	1 1(D)	0
1	0 0(A)	0 1	0 1(B)	0
2	0 0(A)	1 0	1 1(D)	0
3	0 0(A)	1 1	0 0(A)	0
4	0 1(B)	0 0	1 1(D)	0
5	0 1(B)	0 1	1 1(D)	0
6	0 1(B)	1 0	1 1(D)	0
7	0 1(B)	1 1	1 0(C)	0
8	1 0(C)	0 0	1 1(D)	1
9	1 0(C)	0 1	0 1(B)	1
10	1 0(C)	1 0	1 1(D)	1
11	1 0(C)	1 1	0 0(A)	1
12	1 1(D)	0 0	1 1(D)	0
13	1 1(D)	0 1	1 1(D)	0
14	1 1(D)	1 0	1 1(D)	0
15	1 1(D)	1 1	0 0(A)	0

9. Càlcul de les funcions d'excitació de les entrades dels FF i de les sortides de la màquina. Com que tenim 2 FF D, es compleix que: $Y^+_1 = D_1$ i $Y^+_0 = D_0$, i hem de simplificar aquestes dues 2 variables més la sortida Z.

resultat de fer els Karnaugh

$$D_1 = \overline{X}_0 + \overline{Y}_1 \cdot Y_0 + Y_0 \cdot \overline{X}_1$$

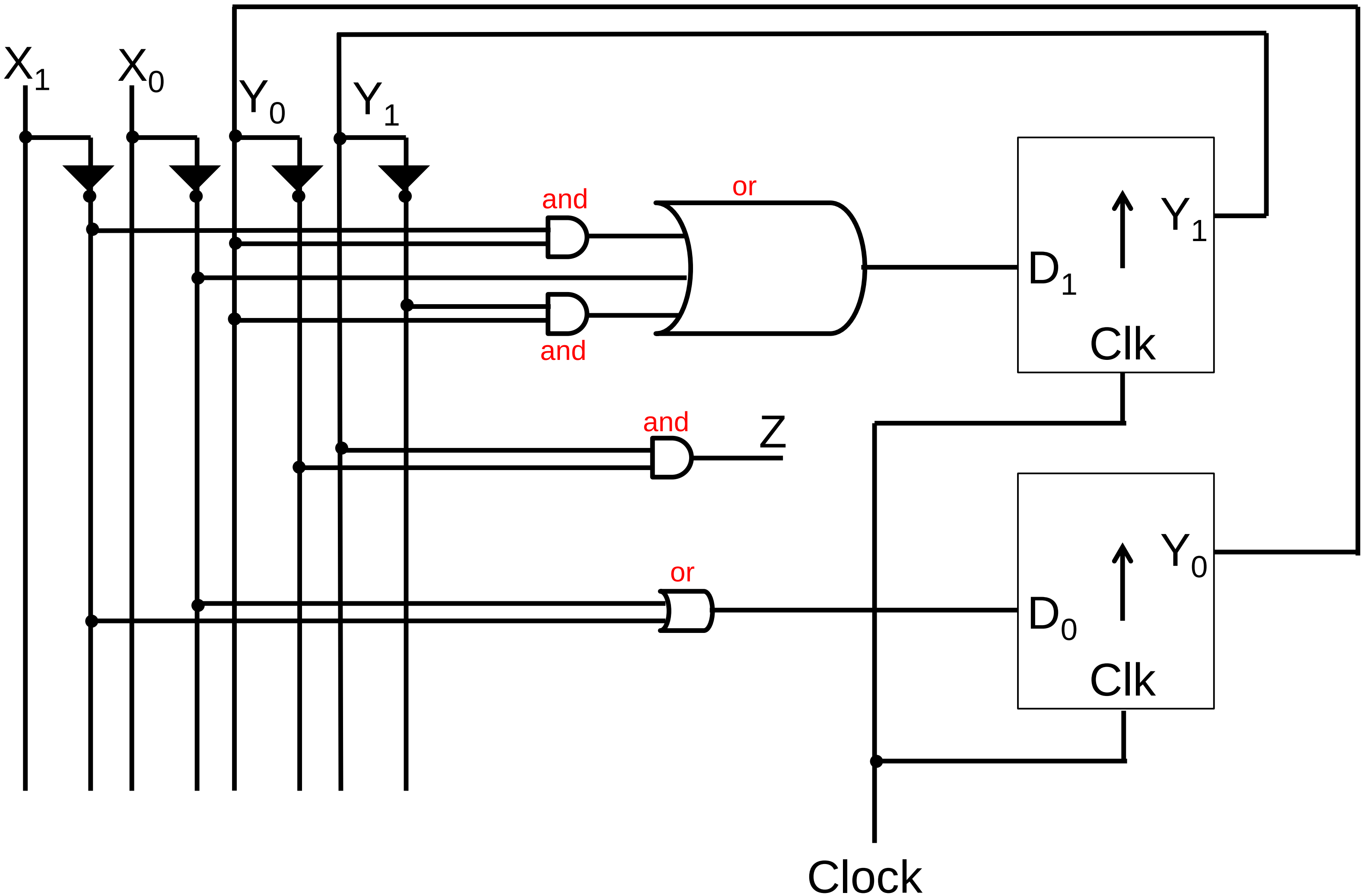
$$D_0 = \overline{X}_0 + \overline{X}_1$$

$$Z = Y_1 \cdot \overline{Y}_0$$

7. Taula de transicions.

Terme	Variables d'entrada		Variables de sortida	
	Estat actual $Y_1 Y_0$	Entrades $X_1 X_0$	$D_1 D_0$	Sortida Z
0	0 0(A)	0 0	1 1(D)	0
1	0 0(A)	0 1	0 1(B)	0
2	0 0(A)	1 0	1 1(D)	0
3	0 0(A)	1 1	0 0(A)	0
4	0 1(B)	0 0	1 1(D)	0
5	0 1(B)	0 1	1 1(D)	0
6	0 1(B)	1 0	1 1(D)	0
7	0 1(B)	1 1	1 0(C)	0
8	1 0(C)	0 0	1 1(D)	1
9	1 0(C)	0 1	0 1(B)	1
10	1 0(C)	1 0	1 1(D)	1
11	1 0(C)	1 1	0 0(A)	1
12	1 1(D)	0 0	1 1(D)	0
13	1 1(D)	0 1	1 1(D)	0
14	1 1(D)	1 0	1 1(D)	0
15	1 1(D)	1 1	0 0(A)	0

10. Esquema lògic del circuit



Síntesi d'una màquina de Mealy

Exemple

Dissenyeu una màquina sincrònica de Mealy amb dues entrades (X_1 i X_0) i una sortida (Z) que es comporti de la següent forma:

- Quan les entrades valguin X_1X_0=11, la sortida serà 0
- Quan les entrades valguin X_1X_0=00 i en els dos cicles de rellotge anteriors les entrades hagin estat X_1X_0=10, la sortida serà 1.
- En qualsevol altre cas la sortida es manté en el valor en que estava.

1. Definició d'entrades i sortides.
   - dues entrades X_1 i X_0
   - una sortida Z

2. Definició dels estats. Hi ha 4 estats diferents:

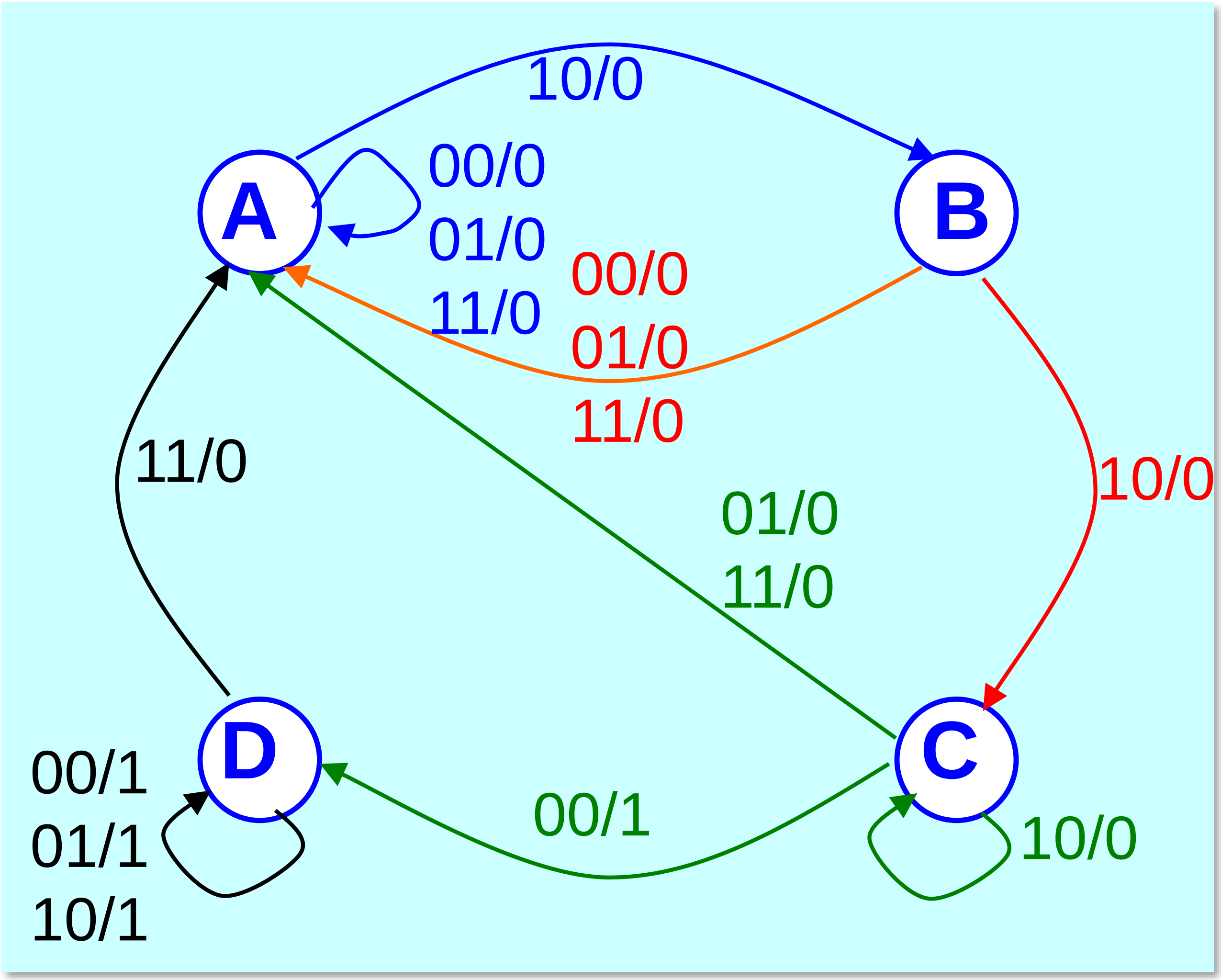
A: estat de partida o estat on no ha començat la seqüència que portarà a sortida 1

B: estat on comença la seqüència que portarà a sortida 1 (primer ’10’)

C: estat on segueix la seqüència que portarà a sortida 1 (segon ’10’)

D: estat on acaba la seqüència que dona sortida 1 (últim ’00’)

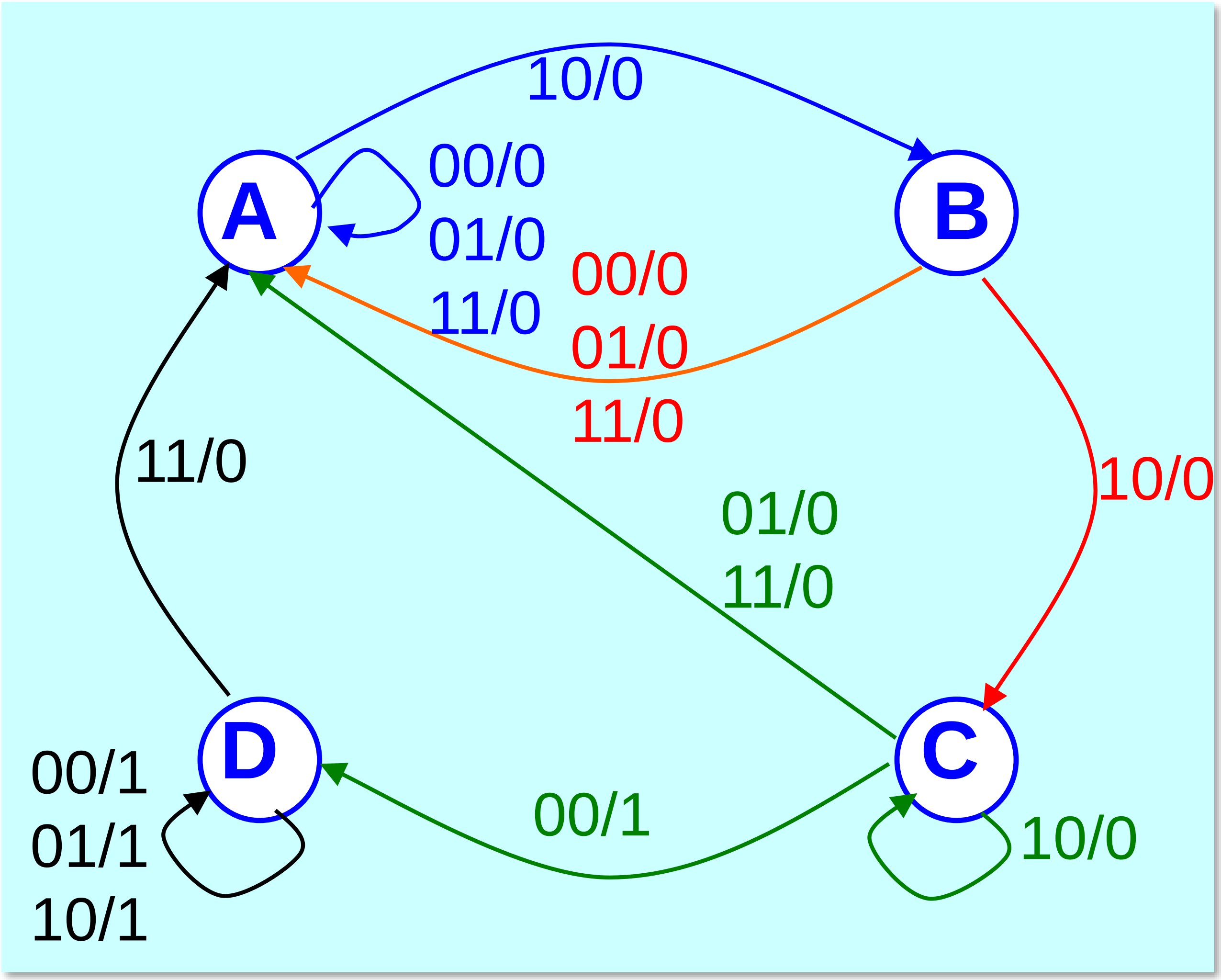
3. Diagrama d’estats



4. Taula d'estats

Estat actual Y	Estat Futur Y^{+} / Sortida Z			
	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0
	00	01	10	11
A	A/0	A/0	B/0	A/0
B	A/0	A/0	C/0	A/0
C	D/1	A/0	C/0	A/0
D	D/1	D/1	D/1	A/0

3. Diagrama d'estats



5. Minimització d'estats. En aquest cas no hi cap estat equivalent

6. Assignació d'estats.

Tenim 4 estats i, per tant, calen 2 FF, les sortides dels quals són $\{Y_1, Y_0\}$. Una possible assignació arbitraria és la binària natural:

Estat	Y_1	Y_0
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

.

Encara hem de trobar l'estat futur $\{Y_1^+, Y_0^+\}$, i la sortida Z. A partir d'aquesta taula d'assignacions definim una taula de transicions entre estats, on apareixen els estats, les variables d'entrada i les sortides corresponents

Estat actual Y	Estat Futur Y^+ / Sortida Z			
	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0	X_1X_0
	00	01	10	11
A	A/0	A/0	B/0	A/0
B	A/0	A/0	C/0	A/0
C	D/1	A/0	C/0	A/0
D	D/1	D/1	D/1	A/0

+

Estat	Y_1	Y_0
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

=

7. Taula de transicions.

Terme	Variables d'entrada		Variables de sortida	
	Estat actual Y_1Y_0	Entrades X_1X_0	Estat futur $Y^+_1\ Y^+_0$	Sortida Z
0	0 0(A)	0 0	0 0(A)	0
1	0 0(A)	0 1	0 0(A)	0
2	0 0(A)	1 0	0 1(B)	0
3	0 0(A)	1 1	0 0(A)	0
4	0 1(B)	0 0	0 0(A)	0
5	0 1(B)	0 1	0 0(A)	0
6	0 1(B)	1 0	1 0(C)	0
7	0 1(B)	1 1	0 0(A)	0
8	1 0(C)	0 0	1 1(D)	1
9	1 0(C)	0 1	0 0(A)	0
10	1 0(C)	1 0	1 0(C)	0
11	1 0(C)	1 1	0 0(A)	0
12	1 1(D)	0 0	1 1(D)	1
13	1 1(D)	0 1	1 1(D)	1
14	1 1(D)	1 0	1 1(D)	1
15	1 1(D)	1 1	0 0(A)	0

8. Elecció del tipus de FF. Normalment farem servir FF edge-triggered tipus D.

Q	Q^+	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Es a dir: $Q^+ = D$

7. Taula de transicions.

Terme	Variables d'entrada		Variables de sortida	
	Estat actual Y_1Y_0	Entrades X_1X_0	D_1 D_0	Sortida Z
0	0 0(A)	0 0	0 0(A)	0
1	0 0(A)	0 1	0 0(A)	0
2	0 0(A)	1 0	0 1(B)	0
3	0 0(A)	1 1	0 0(A)	0
4	0 1(B)	0 0	0 0(A)	0
5	0 1(B)	0 1	0 0(A)	0
6	0 1(B)	1 0	1 0(C)	0
7	0 1(B)	1 1	0 0(A)	0
8	1 0(C)	0 0	1 1(D)	1
9	1 0(C)	0 1	0 0(A)	0
10	1 0(C)	1 0	1 0(C)	0
11	1 0(C)	1 1	0 0(A)	0
12	1 1(D)	0 0	1 1(D)	1
13	1 1(D)	0 1	1 1(D)	1
14	1 1(D)	1 0	1 1(D)	1
15	1 1(D)	1 1	0 0(A)	0

9. Càlcul de les funcions d'excitació de les entrades dels FF i de les sortides de la màquina. Com que tenim 2 FF D, es compleix que: $Y^{+}_1 = D_1$ i $Y^{+}_0 = D_0$, i hem de simplificar aquestes dues 2 variables més la sortida Z.

Terme	Variables d'entrada		Variables de sortida	
	Estat actual Y_1Y_0	Entrades X_1X_0	$D_1\ D_0$	Sortida Z
0	0 0(A)	0 0	0 0(A)	0
1	0 0(A)	0 1	0 0(A)	0
2	0 0(A)	1 0	0 1(B)	0
3	0 0(A)	1 1	0 0(A)	0
4	0 1(B)	0 0	0 0(A)	0
5	0 1(B)	0 1	0 0(A)	0
6	0 1(B)	1 0	1 0(C)	0
7	0 1(B)	1 1	0 0(A)	0
8	1 0(C)	0 0	1 1(D)	1
			0 0(A)	0
			1 0(C)	0
			0 0(A)	0
			1 1(D)	1
			1 1(D)	1
			1 1(D)	1
15	1 1(D)	1 1	0 0(A)	0

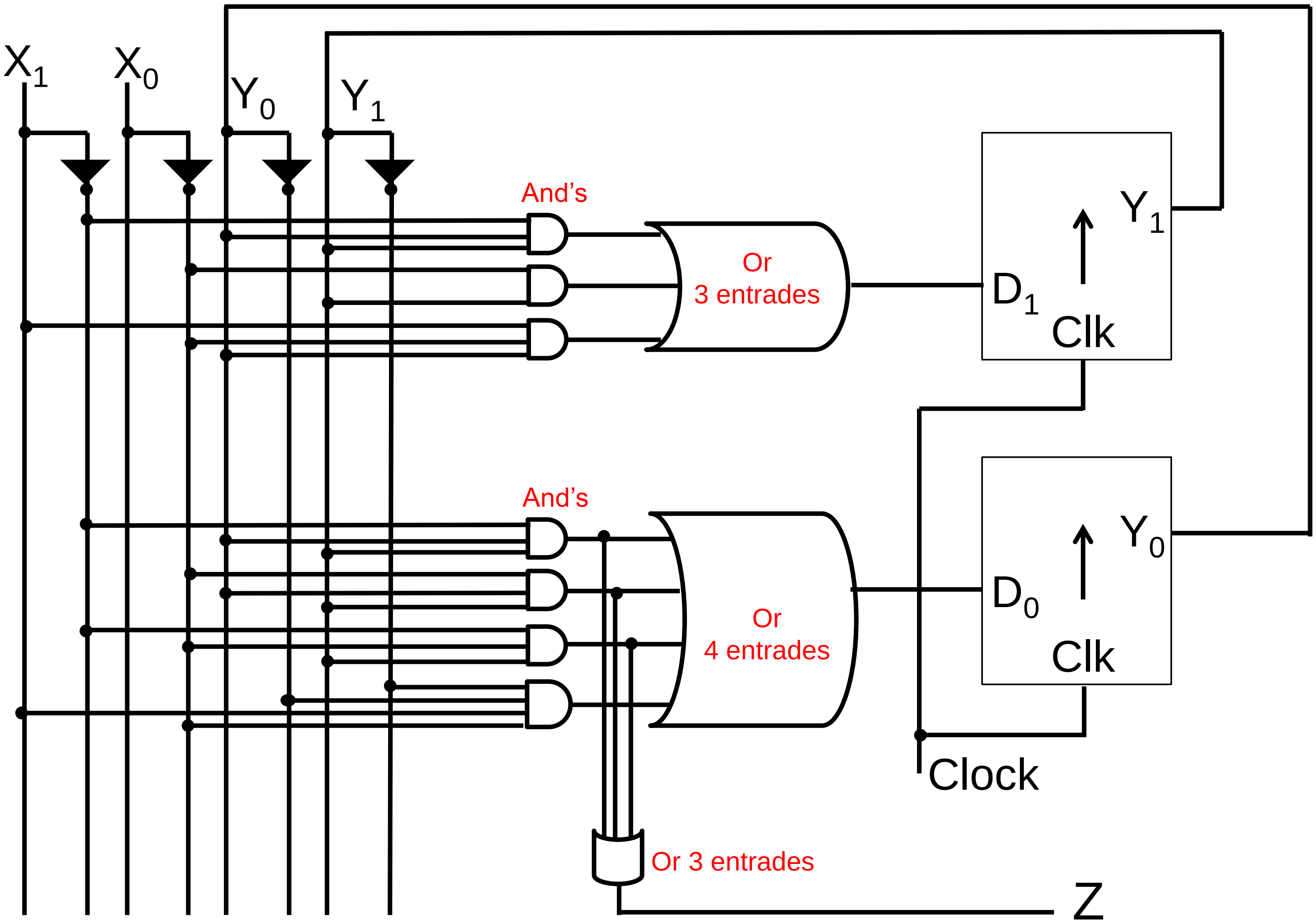
resultat de fer els Karnaugh

$$D_1 = Y_1 \cdot \overline{X_0} + Y_1 \cdot Y_0 \cdot \overline{X_1} + Y_0 \cdot X_1 \cdot \overline{X_0}$$

$$D_0 = \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_0} \cdot X_1 \cdot \overline{X_0} + Y_1 \cdot Y_0 \cdot \overline{X_1} + Y_1 \cdot Y_0 \cdot \overline{X_0} + Y_1 \cdot \overline{X_1} \cdot \overline{X_0}$$

$$Z = Y_1 \cdot Y_0 \cdot \overline{X_1} + Y_1 \cdot Y_0 \cdot \overline{X_0} + Y_1 \cdot \overline{X_1} \cdot \overline{X_0}$$

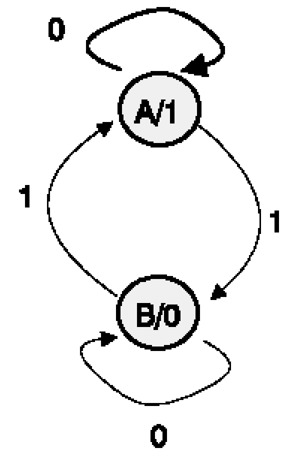
10. Esquema lògic del circuit



Simplificació del diagrama d'estats

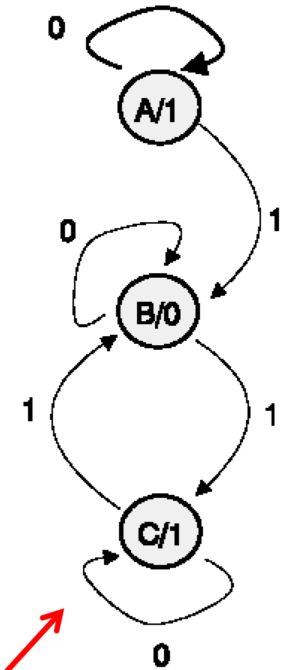
Dos sistemes seqüencials són equivalents si presenten el mateix comportament funcional, és a dir, si tenen la mateixa seqüència de sortida en resposta a les mateixes entrades.

Aquestes dues màquines, en principi, son diferents: la màquina M1 té 2 estats (1 FF) i la màquina M2 té 3 estats (2 FF).



màquina M1

màquina M2



Dos estats són equivalents si:

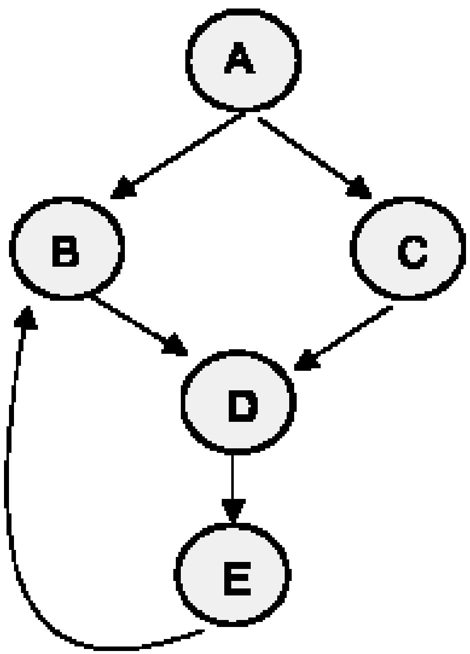
1) Per cada entrada tenen la mateixa sortida ($g(X,S_i)=g(X,S_j)$)

2) Per cada entrada van a parar al mateix estat o estat equivalent ($h(X,S_i)=h(X,S_j)$)

a la màquina M2 els estats A i C són equivalents.

Assignació d'estats

Un aspecte addicional és la simplificació de les funcions booleanes en termes de menor número de portes o de menor número de literals per porta. Per a això el més convenient és fer una assignació d'estats tal que en les transicions entre estats el canvi de variables sigui el mínim possible. Això s'intenta realitzar, primer, entre cada estat, i en cas de conflicte s'intenta minimitzar per a tota la màquina.



Canvis de bits en les assignacions

	Assignació I	Assignació II
A-B	2	1
A-C	3	1
B-D	2	1
C-D	2	1
D-E	1	1
E-B	2	2
Total	13	7

Exemple d'assignacions diferents

Assignació I	Assignació II
A = 000	A = 000
B = 101	B = 001
C = 111	C = 010
D = 010	D = 011
E = 011	E = 111