

Exercici 17. Resoleu el sistema de congruències

$$x \equiv 1 \pmod{6}, x \equiv 2 \pmod{7}, x \equiv 3 \pmod{17};$$

doneu-ne la solució més petita.

Solució 17.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 1, \pmod{6} \\ x \equiv 2, \pmod{7} \\ x \equiv 3, \pmod{17} \end{array} \right\} = \text{mcd}(6, 7, 17) = 1 \Rightarrow \text{són comprimers. Definim:}$$

$$m = [6, 7, 17] \Rightarrow M = 714$$

$$a = [1, 2, 3]$$

$$M(\text{different}) = [119, 102, 42]$$

Resolem les congruències $M_i N_i \equiv a_i \pmod{m_i}$, $1 \leq i \leq 3$

$$N_1 :$$

$$119N_1 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$119 \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow 5N_1 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$-1 \equiv 5^{-1} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}\right)^*$$

$$N_1 \equiv -1 \pmod{6}$$

$$N_2 :$$

$$102N_2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$102 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 4N_2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2 \equiv 4^{-1} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}\right)^*$$

$$N_2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$N_3 :$$

$$42N_3 \equiv 3 \pmod{17}$$

$$42 \equiv 8 \pmod{17} \Rightarrow 8N_3 \equiv 3 \pmod{17}$$

$$15 \equiv 8^{-1} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}}\right)^*$$

$$N_3 \equiv 15 \cdot 3 \equiv 11 \pmod{17}$$

$$x = \sum_{i=1}^3 M_i N_i = [(119)(-1)] + [(102)(4)] + [(42)(11)] = 751$$

La solució és $x \equiv 751 \equiv 37 \pmod{714}$.