Exercici 9. Per a cadascuna de les equacions diofantines seguents, doneu la solucio (x, y) tal que x pren el menor valor positiu (i no nul) possible:

(a) $119x + 84y = 7$,

(b) $119x + 84y = 21$,

(c) $104x + 143y = 13$.

Solucio 9.

1. $\text{mcd}(119, 84) = \text{mcd}(84, 35) = \text{mcd}(35, 14) = \text{mcd}(14, 7) = \text{mcd}(7, 0) = 7$, ara com $7|7$, aquesta equacio te solucio retrocedint en l'algorsime d'Euclides ens queda $7 = 35-14\cdot 2 = 35-84\cdot 2+35\cdot 4 = 35\cdot 5-84\cdot 2 = 119\cdot 5-84\cdot 7$, per tant $(5, -7)$, es un solucio i tenim que per qualsevol altra solucio es comlpleix que es de la forma $(5+k12, -7-k17)$, com volem el menor x majors que 0 i no nul i tenim que $x = 5$, es el que compleix aquest propietat, ja que per si exitis un altre $x' = 5 + k12$, que compleix que $0 < x' < x \implies \frac{-5}{12} < k < 0$ i no hi ha cap k que compleixi aquestes condicions.

2. Fent servir els calculs anterios obtenim que totes les solucions son de la forma $(15 + k12, -21 - k17)$, i per k = -1, $x = 3$, es el menor x major que 0 i no nul que es solucio $(3, -4)$ ja que si hagues un de mes menor compleix que $\frac{-15}{12} < k < -1$ i no hi ha cap k que ho compleixi.

3. Aplicant l'agorsime d'Euclides tenim que $\text{mcd}(143, 104) = \text{mcd}(104, 39) = \text{mcd}(39, 26) = \text{mcd}(26, 13) = \text{mcd}(13, 0) = 13$, desfent els pasos ens queda que $13 = 39 - 26 = 39-104+39\cdot 2 = 39\cdot 3-104 = 143\cdot 3-104\cdot 4$, i per tant qualsevol solucio es de la forma $(-4 + k11, 3 - k8)$, i la solucio amb la menor x es per $k = 1$, ja que $(7, -5)$, ja que si hagues una altra solcuio que fos positiva i menor compliria que $0 < x' < x \iff \frac{4}{11} < k < 1$ i tenim que no hi ha cap k que ho compleixi.