LLISTA 2. PROBLEMES

1.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n+3} = \frac{3}{4}$. $\forall \varepsilon > 0$ hem de trobar que $\exists n_0(\varepsilon)$.

$$\Big|\underbrace{\frac{3n}{4n+3}}_{a_n} - \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{límit}}\Big| < \varepsilon. \to \left|\frac{12n-(12n+9)}{4(4n+3)}\right| = \frac{9}{4(4n+3)} < \varepsilon \to \frac{9}{4\varepsilon} < 4n+3 \to$$

$$\to \frac{9}{4\varepsilon} - 3 < 4n \to \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4\varepsilon} - 3\right) < n \to$$

$$\to n_0 = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4\varepsilon} - 3\right)\right] + 1.$$

(b) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ i $(y_n)_n$ és una successió acotada aleshores $\lim_{n\to\infty} (-1)^n x_n y_n = 0$.

$\varepsilon > 0$.

Hem de trobar n tal que $|(-1)^n x_n y_n - 0| < \varepsilon$ si $n \geq n_0(\varepsilon)$.

$\hookrightarrow |(-1)^n x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| \leq |x_n|\, M \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$.

$\boxed{|y_n| \leq M}$ $\boxed{\exists n_0 \ |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.}$

successió fitada per una quantitat M.

2. Així el mateix no ens serveix tant per la successió x_n, com $(-1)^n x_n y_n$.

Alternativa: $\lim (-1)^n x_n y_n = 0 \to$ no es pot definir com el producte dels límits. $(-1)^n$ no té límit.

Donat $\varepsilon > 0$, cal trobar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|(-1)^n x_n y_n - 0| < \varepsilon$.

$|(-1)^n x_n y_n| < \varepsilon$.

$|x_n|\,|y_n| < \varepsilon$. $\to$ Donat $\varepsilon > 0$, trobar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|\,|y_n| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

$\{y_n\}_n$ és acotada.

Hi ha un $M > 0$ (cota màxima) tal que $|y_n| \leq M$.

$\to |x_n|\,|y_n| < \varepsilon$

$\to |x_n|\, M < \varepsilon \to |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

$\to |x_n|\,|y_n| \leq M|x_n| < \cancel{M}\frac{\varepsilon}{\cancel{M}} = \varepsilon.$

2. Si $a \in (0,1/2)$, definim una successió recurrent amb un primer terme, $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}(1-x_n)$ $\forall n \geq 1$. *Si una successió és monòtona i acotada, té límit.*

(a) $x_2 = \frac{a}{2}(1-a) = \frac{a-a^2}{2}$, $x_3 = \frac{a-a^2}{4}\left(1 - \frac{a-a^2}{2}\right) \dots$

Monotonia: Podem agafar casos per veure si és creixent o decreixent.

$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{32} \dots \searrow$ decreixent.

Acotada: Primer provarem que és acotada.

en valor absolut — $|x_1| \leq a$, $|x_2| = \underbrace{\frac{a}{2}}_{\text{podem treure valor abs. pq. sabem que és positiu.}}\underset{\text{més petit que 1.}}{(1-a)} < \frac{a}{2} \leq a$.

↳ Suposarem cert $|x_n| \leq a \Rightarrow |x_{n+1}| = \frac{|x_n|}{2}\underset{\text{quantitat més petita que 1.}}{|1-x_n|} \leq \frac{a}{2} \leq a$.

2. Abans de veure el decreixement, comprovarem que $0 < x_n \leq a$ $\forall n \geq 1$.

El primer és obvi: $0 < x_1 \leq a$.

Suposarem $0 < x_n \leq a \Rightarrow x_{n+1} = \underset{\text{positiu}}{\frac{x_n}{2}}\underset{\text{més petit que a.}}{(1-x_n)} > 0$.

Decreixent: $x_2 = \frac{x_1}{2}(1-x_1) = \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_1}{2} \leq x_1$.

$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}(1-x_n) = \frac{x_n}{2} - \frac{x_n^2}{2} \leq \frac{x_n}{2} \leq x_n$.

Límit: • Acotada
• Monòtona decreixent

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}(1-x_n)$$
$$\ell \qquad \frac{\ell}{2}(1-\ell)$$

successió convergent que va cap a ℓ.

$\to \ell = \frac{\ell}{2}(1-\ell)$

$\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow \ell = 0$, $\cancel{\ell = 1}$ decreixent i $a \in (0,1/2)$

(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_1 = a$. → com la successió és decreixent serà el primer terme, x_1.

$\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$. → successió decreixent, doncs l'ínfim serà = al límit.

ALTERNATIVA:

(a) • Acotada: Provem que $0 \leq x_n \leq 1$.

Ho veiem per inducció:

$n = 1 \to x_1 = a < \frac{1}{2} < 1$, $x_1 = a > 0$ $\Big\}$ $0 < x_1 < 1$.

$0 \leq x_n \leq 1$ $\quad x_{n+1} \leq 1$

$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}(1-x_n) \leq \frac{1}{2}(1-x_n) \leq 1/2$

$x_n \geq 0$.

• **Monòtona:** $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a}{2}(1-a)$. Sabem $x_1 > x_2$ en cas de ser monòtona, serà decreixent. Cal provar $x_{n+1} \leq x_n$.

$x_{n+1} \leq x_n$.

$$\frac{x_n}{2}(1-x_n) \leq x_n \rightarrow \frac{(1-x_n)}{2} \leq 1.$$

$$1 - x_n \leq 2$$

$$x_n \geq -1.$$ Cert. Monòtona decreixent.

• **Límit:** Pel teorema anterior $\{x_n\}$ és convergent i té límit finit.

Sigui $x = \lim x_n = \lim x_{n+1}$.

$$x = \lim x_{n+1} = \lim \left(\frac{x_n}{2}(1-x_n)\right) = \frac{1}{2}(\lim x_n).(1-\lim x_n) =$$

$$= \frac{1}{2}x(1-x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}x(1-x)$$

$\rightarrow$ Si $x \neq 0$ $\quad \cancel{x} = \frac{1}{2}\cancel{x}(1-x)$

$$1 = \frac{1-x}{2} \rightarrow x = -1$$

$$x_n \geq 0 \rightarrow x \neq -1.$$

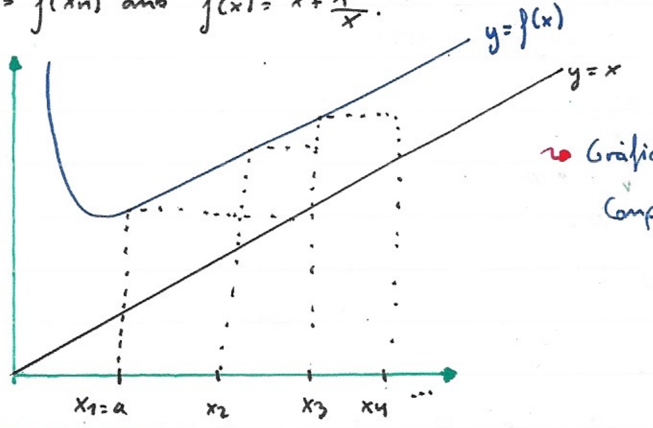
La única possibilitat és $\underline{\underline{x=0}}$.

(b) Quan una successió és acotada monòtona decreixent, l'ínfim és el límit i el primer terme és el suprem.

$\inf x_n = 0 = x$, $\sup x_n = a$.

3. Successió $\{x_n\}_n$ de manera inductiva com $x_1 = a > 0$ i $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. És $(x_n)_n$ convergent?

$x_{n+1} = f(x_n)$ amb $f(x) = x + \frac{1}{x}$.



• Gràficament veiem que sembla que $(x_n)_n$ és creixent i no fitada. Comprovem-ho.

$\boxed{x_n \leq x_{n+1}}$

$n=1$: $a \leq a + \frac{1}{a}$ ok perquè $a > 0$.

H.I. : $x_h \leq x_{h+1}$ per $h = 1, 2, \dots, n$.

$n+1$: $x_{n+1} \leq x_{n+2} \iff x_{n+1} \leq x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}$

$$\iff 0 \leq \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$\iff x_{n+1} > 0.$$

Però això és cert donat que $0 < a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \overset{\text{H.I}}{\leq} x_{n+1}$

$\boxed{(x_n) \text{ no fitada}}$ Si fos fitada, essent també monòtona, hauria de tenir límit l finit.

Llavors, $l = \lim_n (x_n) \Rightarrow \cdot\, l = \lim_n (x_{n+1})$

$$\cdot\ \frac{1}{l} = \lim_n \left(\frac{1}{x_n}\right)_n .$$

$$\text{d'on}: \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \Rightarrow l = l + \frac{1}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = 0 \Rightarrow \text{IMPOSIBLE!}$$

$\Rightarrow$ X_n no pot ser fitada.

R: $(X_n)_n$ és creixent i no fitada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n) = +\infty$.

ALTERNATIVA: Suposem que és convergent, i, per tant, té límit finit.

$$X = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \lim x_n + \frac{1}{\lim x_n} = x + \frac{1}{x}.$$

$$\rightarrow x = x + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} = 0. \text{ Contradicció!}$$

R: $(x_n)_n$ no té límit i no és convergent.

4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+2} + \dots + \frac{n}{2n^2+n}\right)$. Calculeu.

Aplicant el teorema del Sandwich.

- $\frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+n} \geq \frac{n}{2n^2+n} + \dots + \frac{n}{2n^2+n} = n \cdot \frac{n}{2n^2+n} = \frac{n^2}{2n^2+n}$.
- $\frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+n} \leq \frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+1} = n \cdot \frac{n}{2n^2+1} = \frac{n^2}{2n^2+1}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{n^2}{2n^2+n}}_{\downarrow\, n\to\infty \ 1/2} \leq \frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+n} \leq \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\downarrow\, n\to\infty \ 1/2}.$$

$$\underset{\text{Sandwich}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+n}\right) = 1/2$$

ALTERNATIVA:

$$\frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+2} + \frac{n}{2n^2+3} + \dots + \frac{n}{2n^2+n} \leq \frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+1} + \frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+1} = \frac{n \cdot n}{2n^2+1}$$

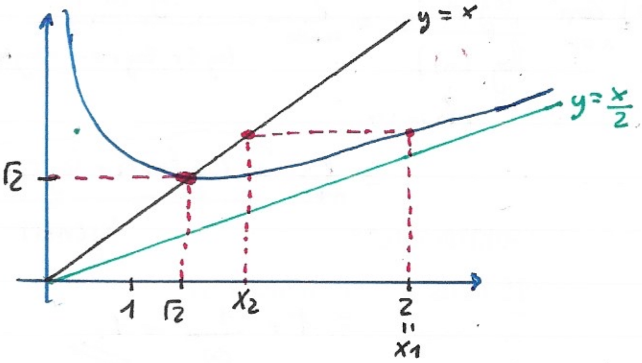
com més petit, les fraccions seran més grans.

$$a_n = \left(\frac{n}{2n^2+1} + \dots + \frac{n}{2n^2+n}\right) \leq \frac{n^2}{2n^2+1}.$$

$$\frac{n^2}{\underbrace{2n^2+n}_{\text{sen més petit}}} \leq a_n \leq \frac{n^2}{\underbrace{2n^2+1}_{\text{sen més gran}}}$$

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2} \rightarrow \lim a_n = 1/2.$$

5. $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n} \\ x_1 = 2 \end{cases}$, $n \geq 1$.



Funció definida: $y = f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \rightarrow$

(a) Provar que $\boxed{x_n > 0}$ i $x_n^2 \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\underline{n=1:}$ $x_1 > 0$. ✓

$\underline{H.I:}$ $x_n > 0$. ✓

$\underline{n+1:}$ $x_{n+1} > 0$

$\Updownarrow$

$\dfrac{x_n^2+2}{2x_n} > 0$ ✓ ($x_n^2+2 \rightarrow > 0$)

$\hookrightarrow x_n > 0$

$\boxed{x_n^2 \geq 2}$

$\underline{n=1:}$ $2^2 \geq 2$. ✓

$\underline{H.I:}$ $x_n^2 \geq 2$

$\underline{n+1:}$ $x_{n+1}^2 \geq 2$

$\Updownarrow$

$\dfrac{(x_n^2+2)^2}{4x_n^2} \geq 2 \rightarrow x_n^4 + 4x_n^2 + 4 \geq 8x_n^2 \rightarrow$

$\rightarrow x_n^4 - 4x_n^2 + 4 \geq 0 \rightarrow (x_n^2-2)^2 \geq 0$ ✓.

(b) Demostrar que $(x_n)_n$ és monòtona. $x_n \geq x_{n+1}$.

$\underline{n=1:}$ $x_1 \geq x_2 \iff 2 \geq \frac{6}{4}$ ✓.

$\underline{H.I:}$ $x_{n-1} \geq x_n$

$\underline{n+1:}$ $x_n \geq x_{n+1} \iff x_n \geq \dfrac{x_n^2+2}{2x_n} \iff 2x_n^2 \geq x_n^2+2 \iff x_n^2 \geq 2$ ✓

(c) És $(x_n)_n$ convergent? En aquest cas, calculeu el límit.

→ monòtona decreixent (b)
→ fitada inferiorment (a) $\Big\}$ té límit $\Rightarrow$ Sigui $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow l = \lim\limits_{n} (x_{n+1}) \Rightarrow$

$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_n > 0 \\ x_n^2 \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \geq \sqrt{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{l^2+2}{2l} = \lim\limits_{n} \dfrac{x_n^2+2}{2x_n}$

$(x_n) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$

$(x_{n+1}) = \{x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}\}$.

$\Downarrow$

$l = \dfrac{l^2+2}{2l} \Rightarrow l^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} l = \sqrt{2} \\ \cancel{l = -\sqrt{2}} \text{ ha de ser } > 0. \end{cases}$

6. Aplicació del Criteri de Stolz

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overbrace{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}^{a_n}}{\underbrace{n}_{b_n}} \underset{(S)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n-(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{1} =$

$a_n = 1+\sqrt{2}+\ldots+\ldots+\sqrt[n]{n}$ → només queda aquesta

$a_{n-1} = 1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^n)}{\log(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^n)}{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log((n+1)^{n+1}) - \log(n^n)}{\log(n+1)} =$

$n! = 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\log(n+1) + \log(n+1) - n\log n}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n\cdot\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n+1)}\right) =$

$\to 1.$

$= 1 + \frac{1}{\infty} = 1.$

$n\cdot\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e.$

$\xrightarrow{n\to\infty} \log e = 1$

7. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 + 1 = 2.$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 + 3^4 + \dots + (n+1)^{2n}}{2^1 + 5^2 + \dots + (n^2+1)^n} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(n^2+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{(n^2+1)}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{2n}}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}}_{e}\Bigg]^{\frac{2n}{n^2+1}\cdot n \to 2} =$

$= e^2.$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)\cos(n^2)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0} \cdot \underbrace{\sin(n^2)\cos(n^2)}_{\text{fitat}} = 0 \times \text{fitat} = 0.$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+4]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = A.$

productes, volem sumes.

$\to \log A = \lim_{n\to\infty} \log\left((n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)\right)^{\frac{1}{n+4}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1) + \log(n+2) + \dots + \log(n+n)}{n+4} \overset{S}{=}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2n+1) + \log(2n+2) - \log(n+1)}{1} = \lim_{n\to\infty} \log(2n+1) + \underbrace{\log\left(\frac{2n+2}{n+1}\right)}_{\log 2.} = \infty + \log 2 =$

$= \infty$

$a_n = \boxed{\log(n+1)} + \log(n+2) + \dots + \log(2n)$ → $n+n$ → del $2n$ al $2n+2$, està entremig $2n+1$.

$a_{n+1} = \log(n+2) + \log(n+3) + \dots + \log(2n+2)$

no està a a_{n+1}, per tant l'hem d'incloure.

$a_{n+1} - a_n = \log(2n+1) + \log(2n+2) - \log(n+1)$

PROBLEMES ADICIONALS

1. Calculeu : $\lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2+n)^2} \right)$

- $\frac{1}{(n^2+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2+n)^2} \le \frac{1}{(n^2)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2)^2} = \frac{n}{(n^2)^2} = \frac{1}{n^3}$ //
- $\frac{1}{(n^2+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2+n)^2} \ge \frac{1}{(n^2+n)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2+n)^2} = \frac{n}{(n^2+n)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}$ //

$$\Rightarrow \frac{n^3}{n(n+1)^2} \le n^3 \left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2+n)^2} \right) \le 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2+n)^2} \right) = 1 \ \#$$

Sandwich

2. Digueu si les següents successions són convergents :

(1) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. Provarem que $(a_n)_n$ és $\begin{cases} \bullet \text{ monòtona creixent } (*) \\ \bullet \text{ fitada superiorment } (**) \end{cases}$

(*) $a_n \le a_{n+1} \iff \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \le \frac{1}{(n+1)+1} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}$

$$\iff \frac{1}{n+1} + \cancel{\dots + \frac{1}{2n}} \le \cancel{\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \le \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\iff 2(2n+1) \le 4n+3 . \ \checkmark$$

(**) $\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \le 1 \ \checkmark$

R: $\left.\begin{array}{l} \text{– monòtona creixent} \\ \text{– fitada superiorment} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(teoria)}]{} \text{Té límit.}$

(2) $b_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$\boxed{\text{Pista: } \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$

Provarem que $(b_n)_n$ és $\begin{cases} \bullet \text{ monòtona creixent } (*) \\ \bullet \text{ fitada superiorment } (**) \end{cases}$

(*) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{=b_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{>0} \ge b_n . \ \checkmark$$

(**) Aquí farem servir la pista per $k = 2, 3, \dots$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

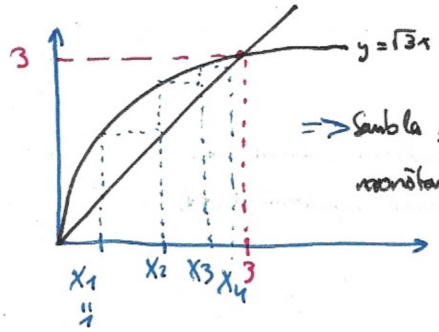
$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \le 2. \checkmark$$

SUCCESSIONS RECURRENTS

① $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \sqrt{3x_{n-1}}, \; n \ge 2. \end{cases}$ funció definidora : $y = \sqrt{3x}$



=> Sembla que $(x_n)_n$ és monòtona creixent i fitada superiorment per 3.

=> Intentarem provar que:

$1 \le x_n \le x_{n+1} \le 3$. → Fitada superiorment i inferiorment i monòtona creixent.

$n = 1$: $1 \le 1 \le \sqrt{3} \le 3$ ✓

H.I: $1 \le x_n \le x_{n+1} \le 3$

$n+1$: $1 \le x_{n+1} \le x_{n+2} \le 3$?

CERT PER H.I.

positius

$x_{n+1} \le \sqrt{3x_{n+1}}$
$\Updownarrow$
$x_{n+1}^2 \le 3x_{n+1}$
$\Updownarrow$
$x_{n+1} \le 3$ → CERT PER H.I.

$\sqrt{3x_{n+1}} \le 3$
$\Updownarrow$
$3x_{n+1} \le 9$
$x_{n+1} \le 3$ → CERT PER H.I.

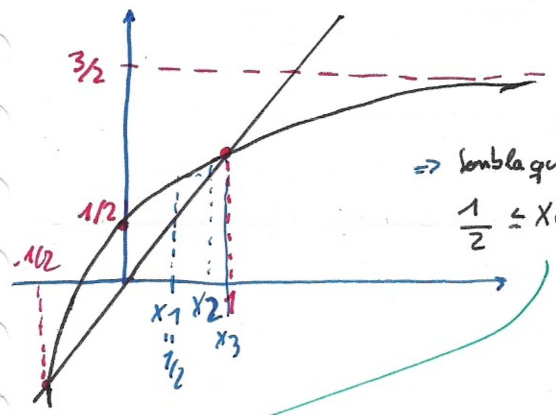
=> $(x_n)_n$ és convergent: $\exists\, l = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Per calcular l prenem límits a la recurrència.

$$x_n = \sqrt{3x_{n-1}}$$
$$n\to\infty \downarrow \qquad \downarrow n\to\infty$$

$$l = \sqrt{3l} \Rightarrow l^2 = 3l \Rightarrow \begin{cases} \cancel{l = 0} & \text{fitada inferiorment per 1.} \\ l = 3 \end{cases}$$

② $\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_n}{x_n+1}. \end{cases}$ funció definidora $= \frac{1}{2} + \frac{x}{x+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x+1}$



$\Rightarrow$ Sembla que $(x_n)_n$.

$\frac{1}{2} \le x_n \le x_n \le x_{n+1} \le 1$

Això és el que provarem:

$\underline{n=1}$: $\frac{1}{2} \le \underset{1/2}{\overset{\shortparallel}{x_1}} \le \underset{\frac{2}{3}}{\overset{\shortparallel}{x_2}} \le 1$ ✓

H.I.: $\frac{1}{2} \le x_n \le x_{n+1} \le 1$

n+1: $\frac{1}{2} \le x_{n+1} \le x_{n+2} \le 1$

certa per H.I.

$x_{n+1} \le \frac{3}{2} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$

$(x_{n+1})(x_{n+1}+1) \le \frac{3}{2}(x_{n+1}+1) - 1$

$\Updownarrow$

$2(x_{n+1})(x_{n+1}+1) \le 3(x_{n+1}+1) - 2$

$2x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 3x_{n+1} - 3 + 2 \le 0$

$2x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 1 \le 0$ $\begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x_{n+1} \le 1$ CERT PER H.I.

$\frac{3}{2} - \frac{1}{x_{n+1}+1} \le 1$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{x_{n+1}+1}$

$x_{n+1} + 1 \le 2$

$x_{n+1} \le 1$ H.I.

$\Rightarrow$ monòtona creixent i fitada superiorment $\Rightarrow \exists\, l = \lim_{n\to\infty} x_n$.

$x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_n}{x_n+1}$

$n\to\infty \downarrow \qquad \downarrow n\to\infty$

$l = \frac{1}{2} + \frac{l}{l+1}$ $\begin{cases} \cancel{l = -1/2} \text{ no pot ser donat que la nostra successió té una fita inferior a } \frac{1}{2}. \\ l = 1 \end{cases}$

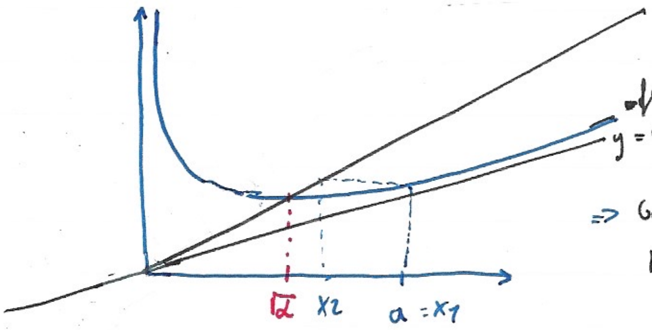
(3) $\begin{cases} \alpha > 0 \text{ donat} \\ x_1 = a > \sqrt{\alpha} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \end{cases}$

funció definidora: $y = \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2x}$ $\rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2x^2} = 0$

$x^2 = \alpha$

$x = \pm\sqrt{\alpha}$

$\frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2x} = x \rightarrow x^2 = \alpha$. punts comuns de $y = x$ i definidora.



$\Rightarrow$ Gràficament sembla que $(x_n)_n$ és decreixent i fitada inferiorment per $\sqrt{\alpha}$.

$\Rightarrow$ Volem demostrar: $\sqrt{\alpha} \leq x_{n+1} \leq x_n \leq a$.

(*)

$\underline{n=1}$: $\sqrt{\alpha} \leq x_2 \leq x_1 \leq a$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{\alpha}{x_1}\right) = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{2a} \leq a$

$\frac{\alpha}{2a} \leq \frac{a}{2}$

$\alpha \leq a^2$

$\sqrt{\alpha} \leq a$ ✓

(*) $x_2 \geq \sqrt{\alpha}$

$\frac{a}{2} + \frac{\alpha}{2a} \geq \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow a^2 + \alpha \geq 2a\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow a^2 - 2a\sqrt{\alpha} + \alpha \geq 0$

$(a + \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$ ✓

$\underline{\text{H.I}}$: $\sqrt{\alpha} \leq x_{n+1} \leq x_n \leq a$.

$\underline{n+1}$: $\underset{(i)}{\sqrt{\alpha} \leq} \; \underset{(ii)}{x_{n+2} \leq} \; x_{n+1} \leq a$.
$\downarrow$ H.I.

(i) $\sqrt{\alpha} \leq x_{n+2}$

$\sqrt{\alpha} \leq \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{\alpha}{x_{n+1}}\right) \Leftrightarrow 2x_{n+1}\sqrt{\alpha} \leq x_{n+1}^2 + \alpha$

$0 \leq x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}\sqrt{\alpha} + \alpha$

$0 \leq (x_{n+1} - \sqrt{\alpha})^2$ ✓ H.I.

(ii) $\frac{x_{n+1}}{2} + \frac{\alpha}{2x_{n+1}} \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1}^2 + \alpha \leq 2x_{n+1}^2 \Leftrightarrow x_{n+1}^2 \geq \alpha$

$\underline{x_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}}$ ✓ $\underline{\text{H.I.}}$

$\Rightarrow$ Monòtona decreixent i fitada inferiorment $\Rightarrow \exists\, l = \lim_{n\to\infty} x_n$.

$l > 0$. , $l \geq \sqrt{\alpha} > 0$. (enunciat)

$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right) = \frac{l}{2} + \frac{\alpha}{2l} \Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + \alpha \Rightarrow l^2 = \alpha$

$l = \pm\sqrt{\alpha}$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{l = +\sqrt{\alpha}}}$

CÀLCUL DE LÍMITS

quan els denominadors són iguals millor.

① $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2}\right)\underset{(S)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(1+2+\dots+}n+1)-\cancel{(1+2+\dots+n)}}{(n+1)^2-n^2}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=1/2$

② $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)\Rightarrow$ lema del Sandwich.

forma: $\frac{1}{(n+k)^2}$ on $k=1,2,3\dots n$

$\frac{1}{(n+n)^2}\leq\frac{1}{(n+k)^2}\leq\frac{1}{(n+1)^2}$

això més gran, numerador més petit

això petit, més gran numerador

pq estic sumant n vegades

$\Rightarrow\frac{n}{(n+n)^2}\leq\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+n)^2}}_{\text{també té límit 0.}}\leq\frac{n}{(n+1)^2}$

$\frac{n}{(n+n)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$ $\qquad$ $\frac{n}{(n+1)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$

③ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\Rightarrow$ lema del Sandwich.

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $k=1,2,\dots,n$.

sumands genèrics

n sumants

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{límit és igual a 1.}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\to l=1$ $\qquad$ $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to l=1$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[5]{n^3}\cdot\sin(n^{2n})}{n\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(n^{2n})\frac{n^{3/5}}{n\sqrt{n^2+1}}$

$[-1,1]$

oscila de manera fitada

exponent negatiu

$=\frac{1}{n^{2/5}}\to l=0.$

$n\sqrt{n^2+1}\to+\infty$

$=$ fitada $\cdot\,0=0.$

successió amb límit 0.

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\dots+n!}{n!}\underset{(S)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(1!+2!+\dots+}n+1!)-\cancel{(1!+2!+\dots+n!)}}{(n+1)!-n!}=$

denominador és una successió creixent amb límit infinit

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n+1!}}{\cancel{(n+1)!}\left(1-\frac{n!}{(n+1)!}\right)}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{n!}{(n+1)!}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=1$

LABORATORI 2:

1.) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}$ a partir de la definició de límit d'una successió.

V.v. (volem veure) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0 \ \left|\frac{2n}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{2n}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n-6n+2}{9n-3}\right| = \frac{2}{|9n-3|} \underset{\substack{\uparrow \\ n\geq 1 \to 9n-3>0}}{=} \frac{2}{9n-3} < \varepsilon \iff$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 9n-3>0}}{\iff} 2 < (9n-3)\cdot\varepsilon = 9n\varepsilon - 3\varepsilon \iff 2+3\varepsilon < 9n\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ 9\varepsilon>0}}{\iff} n > \frac{2+3\varepsilon}{9\varepsilon}$$ No és natural en general.

Així, si prenem $n_0 := \left[\frac{2+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right] + 1$ ja tindrem la definició de límit:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 := \left[\frac{2+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{2n}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon.$$

2.) $(X_n)_n$ definida com: $\begin{cases} X_1 = 1 \\ X_{n+1} = \frac{9X_n - 4}{2X_n+1}, \ n \geq 1. \end{cases}$

Demostrar: (i) X_n monòtona
(ii) X_n acotada.
(iii) límit si $\exists$.

Obs. 1: $X_1 = 1$, $X_2 = \frac{9-4}{2+1} = \frac{5}{3} \geq X_1 = 1 \Rightarrow$ Si és monòtona, serà creixent.

Obs. 2: $2X_n + 1 \geq 1 > 0$. De fet veurem $X_n \geq 1$.

- Cas inicial: $X_1 = 1 \geq 1$.
  $X_2 = \frac{5}{3} \geq 1$.
- H.I. X_n t.q. $X_n \geq 1$.
- Cas $n+1$? $X_{n+1} \geq 1$?

$$X_{n+1} = \frac{9X_n - 4}{2X_n+1} \geq 1 \underset{2X_n+1>0}{\iff} 9X_n - 4 \geq 2X_n + 1 \iff 7X_n \geq 5 \iff X_n \geq \frac{5}{7}$$ Ok! De fet, $X_n \geq 1 \geq 5/7$ ✓.

(i) Veiem X_n monòtona creixent, i.e. $X_n \leq X_{n+1}$. Fem inducció:

- Cas inicial: $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{X_1}} \leq \underset{5/3}{\underset{\shortparallel}{X_2}}$ Ok!
- H.I.: $X_n \leq X_{n+1}$.
- Cas $n+1$: $X_{n+1} \leq X_{n+2}$? $X_{n+1} = \frac{9X_n - 4}{2X_n+1} \overset{?}{\leq} \frac{9X_{n+1} - 4}{2X_{n+1}+1} \underset{\substack{\uparrow \\ 2X_n+1>0 \ \forall n\in\mathbb{N}}}{\iff}$

$$\iff (9X_n - 4)(2X_{n+1}+1) \leq (2X_n+1)(9X_{n+1}-4) \iff$$

$$\iff 18\cancel{X_nX_{n+1}} + 9X_n - 8X_{n+1} \cancel{-4} \leq 18\cancel{X_nX_{n+1}} - 8X_n + 9X_{n+1} \cancel{-4} \iff$$

$$\iff 17X_n \leq 17X_{n+1} \iff X_n \leq X_{n+1}$$ CERT PER H.I. ✓

Així, X_n és monòtona creixent.

(ii) X_n acotada: per l'Obs. 2, ja sabem que $X_n \geq 1$ (de fet, per ser creixent i $x_1 = 1 \Rightarrow X_n \geq 1$). Veiem ara una cota superior. Demostrarem $X_n \leq 2+\sqrt{2}$. Farem inducció:

- Cas inicial: $x_1 = 1 \leq 2+\sqrt{2}$.

  $x_2 = \frac{5}{3} \leq 2+\sqrt{2}$.
- H.I.: $X_n \leq 2+\sqrt{2}$.
- Cas n+1: $X_{n+1} \leq 2+\sqrt{2}$?

$$X_{n+1} = \frac{9X_n - 4}{2X_n+1} \leq 2+\sqrt{2} \overset{2X_n+1>0}{\iff} 9X_n - 4 \leq 2(2+\sqrt{2})X_n + 2+\sqrt{2} \iff$$

$$\iff X_n(5-2\sqrt{2}) \leq 6+\sqrt{2} \iff X_n \leq \frac{6+\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} \overset{(*)}{=} 2+\sqrt{2}$$

CERT PER H.I.

$\Rightarrow$ Hem vist: $1 \leq X_n \leq 2+\sqrt{2}\ \forall n$. X_n acotada.

(*) $\frac{6+\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} \cdot \frac{5+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = \frac{34+17\sqrt{2}}{17} = 2+\sqrt{2}$.

(iii) Com X_n és creixent i acotada (superiorment) $\Rightarrow$ és convergent i $\exists\, l = \lim X_n = \lim X_{n+1}$.

Així,

$$\underset{\downarrow}{X_{n+1}} = \frac{9X_n - 4}{2X_n+1} \Rightarrow l = \frac{9l-4}{2l+1} \iff 2l^2 + l = 9l - 4 \iff$$

$$l \qquad\qquad \frac{9l-4}{2l+1}$$

$$\iff 2l^2 - 8l + 4 = 0 \iff l^2 - 4l + 2 = 0 \iff \begin{cases} l = 2-\sqrt{2} \\ \text{ó} \\ l = 2+\sqrt{2}\ (**) \end{cases}$$

El límit si existeix és únic:

$$2-\sqrt{2} \leq X_1 = 1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \leq X_n \leq \dots \leq 2+\sqrt{2}$$

Com $X_n \nearrow$ i $x_1 > 2-\sqrt{2}$ i $x_n \leq 2+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \boxed{l = 2+\sqrt{2}}$$

(**) Quan fem aquest càlcul, això ens dóna la intuïció de quina cota superior hem de posar per demostrar que X_n està acotada superiorment.

ALTERNATIVA PER VEURE X_n CREIXENT:

Si primer demostrem que X_n està acotada: $1 \leq X_n \leq 2+\sqrt{2}$, aleshores:

$$X_n \leq X_{n+1} = \frac{9X_n - 4}{2X_n+1} \overset{2X_n+1>0}{\iff} 2X_n^2 + X_n \leq 9X_n - 4 \iff 2X_n^2 - 8X_n + 4 \leq 0 \iff$$

$$\iff X_n^2 - 4X_n + 2 \leq 0 \iff X_n \in [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$$

CERT PERQUÈ: $X_n \in [\underset{2-\sqrt{2}}{\underset{\vee\!\!|}{1}}, 2+\sqrt{2}] \subset [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$ #

LABORATORI 3:

1/ $(x_n)_n$: $\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2}{3-x_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

a) $0 < x_n \leq 1$.

INDUCCIÓ:

→ Cas inicial: $0 < x_1 = 1/2 \leq 1$ ✓

→ H.I: $x_n \in (0,1]$

→ Cas n+1? $x_{n+1} \in (0,1]$?

↳ $0 < x_n \leq 1 \iff -1 \leq -x_n < 0 \iff 2 \leq 3 - x_n < 3 \iff \frac{1}{3} < \frac{1}{3-x_n} \leq \frac{1}{2} \iff$

$\iff \frac{2}{3} < \underbrace{\frac{2}{3-x_n}}_{x_{n+1}} \leq \frac{2}{2} = 1 \iff 0 < \frac{2}{3} < x_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 0 < x_{n+1} \leq 1$ ✓

Alternativa: $\bullet\ x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \leq 1 \iff 2 \leq 3 - x_n \iff x_n \leq 1$ → Cert per H.I.

$3-x_n > 0 \leftarrow x_n \leq 1$

$\bullet\ x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} > 0$ ja que $2 > 0$ i $3 - x_n \geq 2 > 0$ ($x_n \leq 1$ H.I.)

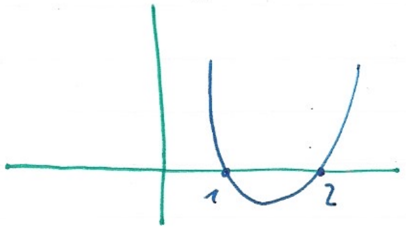
b) x_n monòtona i límit?

$x_1 = 1/2$, $x_2 = \frac{2}{3-1/2} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5} > 1$. Si és monòtona, serà creixent! Provem-ho:

$x_n \leq x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \iff (3-x_n)x_n \leq 2 \iff 3x_n - x_n^2 \leq 2 \iff x_n^2 - 3x_n + 2 \geq 0 \iff$ ($3-x_n \geq 2 > 0$)

$\iff x_n \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot1\cdot2}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \to 2,\ 1$



. Com $0 < x_n \leq 1 \Rightarrow x_n \in (-\infty, 1]$

$\Rightarrow x_n^2 - 3x_n + 2 \geq 0 \iff$

$\iff x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow$ <u>x_n monòtona creixent</u>

Alternativa: Podem fer inducció també.

Calculem límit: com $x_n \uparrow$ i està acotada $\Rightarrow x_n$ convergent. Sigui $\ell = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1}$

Aleshores, $\underset{\substack{\text{tendeix}\downarrow \\ \ell}}{x_{n+1}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{2}{3-\ell}}}{\frac{2}{3-x_n}} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3-\ell} \iff \ell(3-\ell) = 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff$

$\iff \begin{cases} \ell = 1 \\ \text{ó} \\ \ell = 2. \end{cases}$

R: Com el límit és únic i $0 < x_n \leq 1$ $(x_n \uparrow, x_1 = 1/2) \Rightarrow \ell = 1$

2/

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ • $b_n = n^2 \nearrow$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Aplicarem Stolz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-(n^2+1-2n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}$$

$$(*) \underset{\text{Stolz}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1/2$$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3^1+4^2+\dots+(n+2)^n}{1^1+2^2+\dots+n^n} \right)^2 = \Bigg(\underset{x^2 \text{ cont.}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n^2}{b_n^2}} \Bigg) = L$

$b_n = (1^1+2^2+\dots+n^n) \nearrow$ i divergeix a $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\underset{\to+\infty}{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}_{e}^{2} = e^2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = e^2$$

$$\Rightarrow L = (e^2)^2 = e^4$$