LLISTA 8

8.1 Descomposeu en prod. de transposicions les permutacions:

cicle d'ordre 2 = transposició.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,4)(2,3)$

Si no fos tan trivial... 1r → ho multipliquem per (1,4), ens queda només la trans. (2,3). Ho tornem a multiplicar per (1,4) en ambdós costats.

$$\underbrace{(1,4)(1,4)}_{Id}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{1 \to 4 .\ 4 \to 1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1,4)(2,3)$$

Queda Id a l'esquerra i el que busquem (prod trans) a la dreta.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,2)(2,3)(3,4)$ → com que és prod. de 3 transposicions, el signe és negatiu.

8.3 Demostra que el determinant d'una matriu triangular és el prod. dels elements de la diagonal.

DEMOSTRACIÓ XAPUSILLA en $\mathbb{R}^3$

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \lambda_{i\sigma(i)}$$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det M = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{ii}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - ahf - dbi.$$

Si $d = h = g = 0$, $b = c = f = 0$

$$\det A = aei + \cancel{bfg}^{0} + \cancel{cdh}^{0} - \cancel{ceg}^{0} - \cancel{ahf}^{0} - \cancel{dbi}^{0}$$

↳ prod. elements diagonal.

BONA DEMOSTRACIÓ

$$\lambda_{ij} = 0,\ i > j \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{diagonal superior}}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k\sigma(k)} = 0$$

llevat del cas $\sigma = Id$.

$\sigma \neq Id \to \exists k \quad k > \sigma(k)$

És a dir, en posicions on $k > \sigma(k)$ hi tindrem un 0. Exemplifiquem-ho en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - ahf - dbi$$

- aei: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}$
- bfg: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $3>1$
- cdh: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $3>2$
- ceg: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $3>1$
- ahf: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $3>2$
- dbi: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $2>1$

$\boxed{K > \sigma(K)} \longrightarrow$

$\underbrace{\text{En tots els casos hi ha } k > \sigma(k)}_{\text{el productori és 0 ja que hi ha } \lambda_{ij}=0 \text{ per a } i>j}$ menys al cas $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8.5 Càlcul de determinants

Per a $n \leq 3 \rightarrow$ SARRUS

Per a $n > 3 \rightarrow$ reducció d'una columna (per facilitar els càlculs) o fer directament el mètode dels adjunts.

①
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$$

②
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = 0.$$

EXERCICIS DE DETERMINANTS D'EXÀMENS

FINAL PRÀCTIC 2014 TARDES

Sigui $A(x)$ una matriu formada pels vectors $\overbrace{A_1, A_2, A_3}^{\text{columna}}$. Sigui $A'(x)$ una matriu formada pels vectors $\underbrace{(A_1 - A_2, A_2 - A_3, A_3 - xA_1)}_{\text{columna}}$.

Per a quins valors de x

$$\det(A_1 - A_2, A_2 - A_3, A_3 - xA_1) = 0 \ ?$$

Quan seran A_1, A_2, A_3 vectors LI?

Utilitzarem una de les propietats dels determinants, la multiplicitat. Es tracta de "desglossar" els determinants.

$$0 = \det(A_1 - A_2, A_2 - A_3, A_3 - xA_1) =$$

$$= \det(A_1, A_2 - A_3, A_3 - xA_1) - \det(A_2, A_2 - A_3, A_3 - xA_2) =$$

$$= \det(A_1, A_2, A_3 - xA_1) - \det(A_1, A_3, A_3 - xA_1) - \det(A_2, A_2, A_3 - xA_2) -$$

$$\det(A_2, A_3, A_3 - xA_2) = \det(A_1, A_2, A_3) - \overset{CL}{\det(A_1, \cancel{A_2}, xA_1)} - \overset{CL}{\det(\cancel{A_1, A_3, A_3})}$$

$$+ \overset{CL}{\det(A_1, \cancel{A_3}, xA_1)} - \overset{CL}{\det(A_2, \cancel{A_2}, A_3)} + \overset{CL}{\det(A_2, \cancel{A_2}, xA_2)} - \overset{CL}{\det(\cancel{A_2, A_3, A_3})}$$

$$+ \det(A_2, A_3, xA_2) = \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2)(2,3) \oplus$$

$$= \det(A_1, A_2, A_3) - x \det(A_2, A_3, A_1) = 0$$

si $\boxed{x = 1}$ aleshores $\det = 0$ i a més A_1, A_2, A_3 són LI

Si són LD, $\det(A_1, A_2, A_3) = 0$ i per tant $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

FINAL 2013 PRÀCTIC

- Sigui una matriu A 4×4 amb columnes A_1, A_2, A_3, A_4.

a) Calculeu $\underbrace{\det(A_4, A_3, A_2, A_1)}_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,4)(2,3)\ \oplus} - \det \underbrace{(A_3, A_1, A_4, A_2)}_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)(3,4)(4,2)\ \ominus}$.

$$\det(A_1, A_2, A_3, A_4) - -\det(A_1, A_2, A_3, A_4) = \boxed{2 \det(A_1, A_2, A_3, A_4)}$$

b) Si $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A'_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$, demostra que $\det(A) = \det(A')$ sii $A_1, A_2, A_3, A_4 - A'_4$ són LD.

$\boxed{\Leftarrow}$

$\underbrace{\det(A_1, A_2, A_3, A_4 - A'_4)}_{LD} = 0 \Rightarrow \det(A_1, A_2, A_3, A_4) - \det(A_1, A_2, A_3, A'_4) = 0$

i per tant $\det(A_1, A_2, A_3, A_4) = \det(A_1, A_2, A_3, A'_4)$. cvd

$\boxed{\Rightarrow}$

$\det(A_1, A_2, A_3, A_4) = \det(A_1, A_2, A_3, A'_4) \Rightarrow \det(A_1, A_2, A_3, A_4) - \det(A_1, A_2, A_3, A'_4) = 0 \Rightarrow \det(A_1, A_2, A_3, A_4 - A'_4) = 0$ cvd.

REAVALUACIÓ 2014

$f: E \to E$

$M \{e_1, \dots, e_n\}$

$N \{v_1, \dots, v_n\}$

Demostra $\boxed{\det M = \det N}$

matriu canvi de base

$\det N = \det(P M P^{-1})$

$\det N = \det(P) \cdot \det(M) \cdot \det(P^{-1})$

$\det N = \det(P) \cdot \det(P^{-1}) \cdot \det(M)$

$\det N = \det M \cdot \det(P \cdot P^{-1})$

$\det N = \det M \cdot \det(Id)$

$\det N = \det M \cdot 1$ ✓