53. Donats $A = \{3,4,9\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,2,\{3\},4\}$ i $D = \{3,4,\emptyset\}$, comprova si es compleixen les següents igualtats.

(a) $(C \smallsetminus D) \times (A \smallsetminus B) = (C \times A) \smallsetminus \big(D \times B\big)$.

(b) $(C \cup D) \times A = (C \times A) \cup (D \times A)$.

(c) $C \times (D \smallsetminus A) = (C \smallsetminus A) \times (D \smallsetminus A)$.

54. Considera els conjunts $X = \{1\}$, $Y = \mathcal{P}(X)$, $Z = X \times Y$. Digues si són certes o no les següents afirmacions.

(a) $(1, X) \in Z$.

(b) $(1, \emptyset) \in Z$.

(c) $\big\{(\emptyset,\emptyset)\big\} \in \mathcal{P}(Z)$.

(d) $\big\{(1,1)\big\} \subseteq Z$.

(e) $X \smallsetminus Z \in Y$.

(f) $\big\{\{1\}\big\} \subseteq Z$.

55. Considera A, B, C, D conjunts arbitraris. Demostra les següents igualtats.

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) $(A \smallsetminus B) \times (A \smallsetminus B) = (A \times A) \smallsetminus (B \times B)$

56. Siguin A i B dos conjunts diferents. Demostra:

(a) Si E és un conjunt tal que $A \times E = B \times E$, aleshores $E = \emptyset$.

(b) En general no és cert que si C és un conjunt tal que $A \times B = A \times C$, aleshores $B = C$.

57. Considera A, B, C conjunts arbitraris. Demostra la igualtat

$$\big(A \times B\big) \cup \big((B \smallsetminus A) \times B\big) = (A \cup B) \times B\,.$$

58. Demostra (per inducció sobre k) que si el conjunt S té k elements, i el conjunt T en té m, aleshores el conjunt $S \times T$ té $k \cdot m$ elements.

59. Siguin $S = \{a,b,c,d\}$ i $T = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Calcula el domini i la imatge de cadascuna de les relacions següents, i digues justificadament quines són una funció de S en T, i quines són una aplicació.

(a) $\big\{(a,4)\,,(d,3)\,,(c,3)\,,(b,2)\big\}$

(b) $\big\{(a,5)\,,(c,4)\,,(d,3)\big\}$

(c) $\big\{(a,1)\,,(b,1)\,,(c,1)\,,(d,1)\big\}$

(d) $\big\{(a,2)\,,(b,2)\,,(c,3)\,,(d,3)\big\}$

(e) $\big\{(d,1)\,,(c,2)\,,(b,3)\,,(a,4)\big\}$

(f) $\big\{(d,7)\,,(c,6)\,,(c,5)\,,(a,4)\,,(b,2)\big\}$

(g) $\big\{(a,6)\,,(c,9)\big\}$

60. Examina les següents relacions entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

(a) $S_1 = \Big\{ \big((1,2), \frac{1}{2}\big), \big((0,5), 0\big), \big((10^9, 10^{10}), 0.1\big), \big((2,4), \frac{2}{4}\big), \big((1,0), 1\big), \big((2,20), \frac{1}{10}\big), \big((3,7), 3\big), \big((7,3), 7\big) \Big\}$.

(b) $S_2 = \big\{ \big((n,m), \frac{n}{m}\big) : n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \big\}$.

(c) $S_3 = \big\{ \big((n,m), n+m\big) : n, m \in \mathbb{N} \big\}$.

Calcula el seu domini i la seva imatge. Digues quines són funcions. De les que ho siguin, digues si són injectives i si són exhaustives.

61. Considera les relacions $T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 = y^2\}$ i $S = \{(t^3, t^4) : t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Demostra que $T = \{(u^2, u^3) : u \in \mathbb{R}\}$

(b) Troba el domini i recorregut (imatge) de T i de S. Digues si T i S són o no funcions.

(c) De les que siguin funció, digues raonadament si són injectives, exhaustives o bijectives.

62. Siguin A, B conjunts no buits i $f \colon A \to B$ una aplicació que pren el mateix valor $c \in B$ per a tots els elements del seu domini. Determina quan f és injectiva i quan f és exhaustiva.

63. Considera la funció $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ on $f(z) = z^2 + 1$ per tot $z \in \mathbb{Z}$. Calcula:

(a) $f(\{-1, 0, 1, 24\})$

(b) $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 5\})$

(c) $f^{-1}(\{5\})$

(d) $f^{-1}(\{3\})$

64. Siguin f i g les següents funcions reals $f(x) = 3x - 2$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Dóna el domini i imatge de $f \circ g$ i de $g \circ f$. Calcula $(g \circ f)(-3)$, $(f \circ g)(-3)$, $(g \circ f)(6)$ i $(f \circ g)(6)$.

65. Sigui $g \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $g(x,y) = \dfrac{x}{y}$. Troba, i dibuixa en el pla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el seu domini i els següents conjunts: $g^{-1}(\{3\})$, $g^{-1}(\{0\})$, $g^{-1}\big([-1,1]\big)$.

66. D'entre els següents grups de relacions, digues quines són reflexives, quines simètriques, quines transitives, i quines antisimètriques.

(i) En el conjunt $\{1,2,3\}$:

(a) $\big\{(1,2), (1,3), (2,3), (1,1)\big\}$.

(b) $\big\{(1,2), (2,1), (2,3)\big\}$.

(c) $\big\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3)\big\}$.

(ii) En el conjunt dels nombres naturals:

(d) $\big\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \neq m\big\}$.

(e) $\big\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\big\}$.

(f) $\big\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n | m\big\}$.

(g) $\big\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n = m^2\big\}$.

67. De cadascuna de les relacions que apareixen a continuació, digues si és reflexiva, simètrica, transitiva, antisimètrica, relació d'equivalència, d'ordre, i d'ordre total

(a) La relació S en $\mathbb{R}$ definida per aSb si i només si $a = |b|$, essent $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) La relació D en $\mathbb{N}$ definida per nDm si i només si $n|m$, essent $n, m \in \mathbb{N}$.

(c) La relació T en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida per $(n_1, n_2)T(m_1, m_2)$ si i només si $(n_1, n_2) = (m_1, m_2)$ o la recta del pla $\mathbb{R}^2$ determinada pels dos punts passa per $(0, 0)$.

(d) La relació $\otimes$ en $\mathcal{P}(A)$, essent A un conjunt qualsevol, definida per a $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ així: $X \otimes Y$ si i només si $X \cap Y \neq \emptyset$.

(e) La relació T en $\mathbb{R}[x]$ definida per $p(x)Tq(x)$ sii $p(x) - q(x) = s(x)x^2$ per algun $s(x) \in \mathbb{R}[x]$.

(f) La relació T definida en $\mathbb{Q}^+$ per aTb si i només si $q < s$ o ($q = s$ i $p \leqslant r$), on $\dfrac{p}{q}$ és l'expressió irreduïble d'a i $\dfrac{r}{s}$ és l'expressió irreduïble de b.

68. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ considerem la següent relació:

$$(r, s) \preceq (r', s') \quad \text{si i només si} \quad r \leqslant r' \text{ i } s \leqslant s'.$$

Demostra que $\preceq$ és una relació d'ordre que no és total sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

69. Sigui $\leqslant$ una relació d'ordre en un conjunt A tal que tot $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, té un element mínim (és a dir, existeix $b \in B$ tal que per tot $a \in B$, $b \leqslant a$). Demostra que la relació $\leqslant$ és total.

70. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ considerem la següent relació:

$$(n, m) \preccurlyeq (n', m') \quad \text{si i només si} \quad n < n' \text{ o } (n = n' \text{ i } m \leqslant m').$$

Demostra que $\preccurlyeq$ és relació d'ordre en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i que per tot $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$, té mínim. És un ordre total?

71. En el conjunt A de les circumferències de pla $\mathbb{R}^2$ definim la relació binària R:

$$C_1 \; R \; C_2 \text{ si i només si } C_1 \text{ i } C_2 \text{ tenen el mateix centre.}$$

(a) Comprova que R és una relació d'equivalència en A.

(b) Dibuixa una circumferència a l'atzar, i dibuixa la seva classe d'equivalència.

(c) Digues quin és l'element més *senzill* (en la teva opinió) dins de cada classe d'equivalència.

72. Sigui $\approx$ la relació d'equivalència definida en el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos per:

$$z \approx w \text{ si i només si } \|z\| = \|w\|, \text{ per tot } z, w \in \mathbb{C}.$$

Determina la seva partició associada $\mathbb{C}/\approx$ (conjunt quocient), escull un representant per cada classe i dóna una bona representació de $\mathbb{C}/\approx$.

73. En el conjunt $\mathbb{Z}$ definim la relació $\approx$ de la forma següent: $z_1 \approx z_2 \iff z_1 + z_2$ és parell.

(a) Demostra que $\approx$ és una relació d'equivalència en $\mathbb{Z}$.

(b) Dóna l'expressió de la classe d'equivalència d'un element $z \in \mathbb{Z}$ arbitrari.

(c) Dóna el conjunt quocient $\mathbb{Z}/\approx$.

74. Definim la següent relació $\sim$ en el pla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x, y) \sim (x_1, y_1) \text{ si i només si } \begin{cases} x - x_1 = 2z, & \text{per algun } z \in \mathbb{Z}, \text{ i} \\ y - y_1 = 7t, & \text{per algun } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

(b) Formula com a conjunt la classe d'equivalència d'un punt $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ arbitrari.

(c) Escull un punt $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a l'atzar i dibuixa la seva classe d'equivalència en el pla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(d) Dóna una bona representació de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\sim$.

75. Sigui A un conjunt no buit, i $B \subsetneq A$ no buit. Definim una relació $\sim$ en $\mathcal{P}(A)$ així:
Per tots $X, Y \subseteq A$, $X \sim Y \iff (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \subseteq B$.

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

(b) Demostra que si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2\}$, aleshores la relació $\sim$ no és total.

(c) Demostra que si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2\}$, aleshores la relació $\sim$ no és d'ordre.

(d) Demostra que $X \sim X \setminus B$ per tot $X \subseteq A$.

(e) Descriu el conjunt quocient $\mathcal{P}(A)/\sim$.

76. Sigui $\sim$ la relació en $\mathbb{R}$ definida per:

$$a \sim b \iff a = b \text{ o } \big(|a| - 2\big) \cdot \big(|b| - 2\big) > 0.$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

(b) Troba $\overline{-1}$, $\overline{2}$ i $\overline{-3}$.

(c) Dóna la partició associada a $\sim$.

77. Considera la relació $\sim$ en $\mathbb{Z}$ definida per: $m \sim n$ si i només si $m^2 - n^2$ és múltiple de 4.

(a) Demostra que és una relació d'equivalència.

(b) Demostra que si $p \in \mathbb{Z}$ és parell, aleshores $p \sim 1$.

(c) Troba el conjunt quocient $\mathbb{Z}/\!\sim$ i digues quants elements té.

78. Siguin A un conjunt i $\asymp$ una relació en A. Demostra que $\asymp$ és una relació d'equivalència en A si i només si $\asymp$ compleix les següents propietats:

i) Per tot $a \in A$, $a \asymp a$.

ii) Per tots $a, b, c \in A$, si $a \asymp b$ i $b \asymp c$, aleshores $c \asymp a$.