Exercici 7.

(a) Proveu que si $mcd(a, b) = 1$, llavors $mcd(a^n, b^n) = 1$, per a tot n natural.

(b) Proveu que si $mcd(a, b) = d$, llavors $mcd(a^n, b^n) = d^n$, per a tot n natural.

Solució 7.

(a) Pel Teorema Fonamental de l'Aritmètica, sabem que tot nombre enter, és primer o producte de primers. Aleshores tenim dos casos:
Cas 1:
Suposem a i b primers, aleshores per definició $mcd(a, b) = 1$, i veiem que $a^n = a \cdot a \cdots a$ i $b^n = b \cdots b$, com $a \neq b$ i $mcd(a, b) = 1 \Rightarrow mcd(a^n, b^n) = 1$.
Cas 2:
En aquest cas suposarem a i b no primers, és a dir $\exists\ a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{Z}$, primers tals que $a = a_1 \cdots a_n$, $b = b_1 \cdots b_m$ amb m no necessàriament diferent de n. Com $mcd(a, b) = 1$, podem afirmar que $a_i \neq b_j$, $\forall i, j$. Aleshores, podem creure que :

$$a^n = (a_0 \cdots a_n)^n = a_0^n \cdots a_n^n$$
$$b^n = (b_0 \cdots b_m)^n = b_0^n \cdots b_m^n$$

Com a_i, b_j són primers aleshores, $a_i^n \neq b_j$, $\forall i, j$ i per tant, $mcd(a^n, b^n) = 1$

(b) Seguint la definició de màxim comú divisor, podem suposar que $\exists\ a', b' \in \mathbb{Z}$ tals que $a = a' \cdot d$, $b = b' \cdot d$, amb $mcd(a', b') = 1$. Llavors:

$$mcd(a^n, b^n) = mcd(a'^n d^n, b'^n d^n) = d^n \cdot mcd(a'^n, b'^n)$$

, com $mcd(a', b') = 1 \Rightarrow mcd(a'^n, b'^n) = 1$, en conseqüència:

$$mcd(a^n, b^n) = d^n$$