Exercici 7. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$ nombres enters.

(a) Proveu que si $mcd(a, b) = 1$, llavors $mcd(a^n, b^n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Proveu que si $mcd(a, b) = d$, llavors $mcd(a^n, b^n) = d^n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Solució 7.

(a) $mcd(a, b) = 1 \Rightarrow a = a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2}\ ...\ a_k^{p_k}$, i $b = b_1^{r_1} \cdot b_2^{r_2}\ ...\ b_t^{r_t}, a_i \neq b_j, \forall i, j, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq t$.

Així doncs, $mcd(a^n, b^n) \Rightarrow a^n = (a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2}\ ...\ a_k^{p_k})^n$, i $b^n = (b = b_1^{r_1} \cdot b_2^{r_2}\ ...\ b_t^{r_t})^n \Rightarrow a^n = a_1^{np_1} \cdot a_2^{np_2}\ ...\ a_k^{np_k}$, i $b^n = b_1^{nr_1} \cdot b_2^{nr_2}\ ...\ b_t^{nr_t}$. Això vol dir que si a i b no tenen una descomposició en primers iguals, a^n i b^n tampoc la tindrà $\Rightarrow mcd(a^n, b^n) = 1$.

(b) $mcd(a, b) = d \Rightarrow a = a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2}\ ...\ a_k^{p_k}$, i $b = b_1^{r_1} \cdot b_2^{r_2}\ ...\ b_t^{r_t}$, tal que $\exists a_i^{p_i}\ ...\ a_z^{p_z} = d = b_j^{r_j}\ ...\ b_{z'}^{r'_z}$.

$mcd(a^n, b^n) \Rightarrow a^n = (a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2}\ ...\ a_k^{p_k})^n$, i $b^n = (b = b_1^{r_1} \cdot b_2^{r_2}\ ...\ b_t^{r_t})^n$ tal que $\exists (a_i\ ... a_z)^n = d^n = (b_j\ ...\ b_{z'})^n$.