Exercici 8.

(a) Proveu que, per a tot nombre enter n, $\text{mcd}(n, n+1) = 1$

(b) Sigui $k \in \mathbb{Z}$, un nombre enter tal que, per a tot $t \in \mathbb{N}$, és $\text{mcd}(t, t+k) = 1$. Demostreu que $k = \pm 1$.

(c) Esbrineu per a quins valors de $k \in \mathbb{Z}$ es té que, per a tot $s \in \mathbb{N}$, és $\text{mcd}(s, s+k) = 2$

Solució 8.

(a) Ho faig per reducció a l'absurd, suposem que $\text{mcd}(n, n+1) = d, d > 1$. Aleshores, $\exists a', b' \in \mathbb{Z}$, $a \neq b, \text{mcd}(a', b') = 1$, tal que $n = a'd$ i $n + 1 = b'd$.
Restant obtenim que $1 = (b' - a')d$ però $d > 1$ i per tant, $d(b' - a') \neq 1$, el que suposa una contradicció.
Aquesta contradicció fa cert que $\text{mcd}(n, n+1) = 1$.

(b) Fixem $t = k$, aleshores tindrem que $\text{mcd}(k, k+k) = \text{mcd}(k, 2k) = k$, com $\text{mcd}(t, t + k) = 1 \Rightarrow k = 1$.
Ara suposem $t \neq k$, aleshores pel resultat de teoria sabem que $\text{mcd}(\text{t}, \text{t} + \text{k}) = \text{mcd}(\text{t}, \text{k})$, llavors, si $k = \pm 1$, tenim que $\text{mcd}(t, t \pm 1) = \text{mcd}(t, \pm 1) = 1$, $\forall t \in \mathbb{N}$.

(c) Refutem mitjançant un contraexemple.
Sigui $s = 1$, es té que $\text{mcd}(1, 1+k) = 1 \neq 2$, $\forall k \in Z$