Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Laboratori 7. Semestre de Tardor 2020-2021

1. Demostreu que l'equació $e^{x^2} = 3x$ té exactament dues solucions reals.

2. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = 2x^5 + 5x^2 - 2$.
   (a) Determineu els intervals de creixement i decreixement de f.
   (b) Quants zeros té f en $\mathbb{R}$?

Solucions

1. Veiem que la funció $f(x) = e^{x^2} - 3x$ té exactament dues arrels. Per veure que n'hi ha almenys dues utilitzem el Teorema de Bolzano (ja que la funció és contínua). Per un cantó, hi ha molts punts on $f(x) > 0$, ja que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Per altra part, hi ha punts on f és negativa, per exemple $f(1) = e - 3 < 0$. Per tant, existeixen almenys dues arrels α_1, α_2, amb $\alpha_1 < 1$ i $\alpha_2 > 1$.

Per a veure que no pot haver-n'hi més estudiem el creixement i la convexitat de f. Tenim $f'(x) = 2xe^{x^2} - 3$. Podríem ara estudiar el signe d'aquesta derivada, però com que no sembla molt fàcil, mirem primer la segona derivada, per si ens dóna informació més fàcil d'interpretar directament. Tenim $f''(x) = 2e^{x^2} + (2x)^2e^{x^2} = e^{x^2}(2 + 4x^2)$. Veiem doncs que $f''(x) > 0$, i per tant f és convexa a tot $\mathbb{R}$.

Una funció dues vegades derivable amb $f''(x) \neq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ no pot tenir mai més de dues arrels. Vegem-ho per contradicció. Suposem que f té tres arrels $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Pel teorema de Rolle existeixen $\beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ i $\beta_2 \in (\alpha_2, \alpha_3)$ amb

$$f'(\beta_1) = f'(\beta_2) = 0\ .$$

Un altre cop pel Teorema de Rolle, ara aplicat a la funció f', existeix $\gamma \in (\beta_1, \beta_2)$ amb $f''(\gamma) = 0$, la qual cosa contradiu la no nul·litat de f''.

2. (a) Derivant tenim

$$f'(x) = 10x^4 + 10x = 10x(x^3 + 1) = 10x(x + 1)(x^2 + x + 1)\ .$$

Aleshores $f'(x) > 0$ si i només si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, i $f'(x) < 0$ si i només si $x \in (-1, 0)$.

(b) Tenim

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Com que f creix a $(-\infty,-1)$ i $f(-1) > 0$, hi ha un únic zero $\alpha_1 \in (-\infty,-1)$. Entre -1 i 0 la funció decreix, i passa de positiu a negatiu ($f(0) < 0$), i per tant hi ha una arrel $\alpha_2 \in (-1,0)$. A partir de 0 la funció creix i passa de negatiu a positiu, i per tant hi ha una tercera arrel $\alpha_3 \in (0,+\infty)$.