LÒGICA I LLENGUATGES

CURSO 2021-22

PRIMERA PRUEBA PARCIAL DE PROBLEMAS

(a) Consideremos las siguientes fórmulas:
$\varphi_1 = (P \to Q) \to ((P \lor Q) \to (P \land Q))$,
$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \lor R)) \land (P \land (\neg Q \to R))$,
$\varphi_3 = (\neg P \to (Q \to (P \land R))) \to R$,
$\varphi_4 = ((P \to \neg Q) \land (R \to Q)) \to \neg(P \land R)$.

Se pide entonces:

(1) Determinar si φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4 son tautologías, satisfactibles o contradicciones.

(2) Calcular formas normales conjuntivas de φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4.

(6 puntos)

(b) Consideremos el siguiente problema. Una academia de idiomas tiene cuatro horas lectivas cada día laborable, es decir 20 horas semanales de clase numeradas de 1 a 20. Además, la academia tiene 10 grupos de estudiantes y 10 profesores. Para cada grupo j (con $j \leq 10$) disponemos de la lista L_j de horas semanales en las que tiene clase el grupo j. Y para cada profesor i (con $i \leq 10$) tenemos una lista R_i, que contiene las horas semanales en las que no puede dar clase el profesor i. Deseamos saber si es posible hacer los horarios de manera que se asigne a cada grupo un solo profesor y a cada profesor un solo grupo, respetando las restricciones de los profesores. Representar entonces este problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \dots, 10\}$ y $j \in \{1, \dots, 10\}$, considerar la proposición Pij que significa que "el profesor i da clase al grupo j".

(4 puntos)

SOLUCIÓN:

(a) (1) La fórmula φ_1 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\varphi_1) = (V \to V) \to (V \to V) = V \to V = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por

$I'(P)=F, I'(Q)=V$, tenemos que $I'(\varphi_1)=(F\to V)\to(V\to F)=V\to F=F$.

La fórmula φ_2 es contradicción, ya que $\neg(P\to\neg(Q\vee R))\equiv P\wedge\neg\neg(Q\vee R)\equiv P\wedge(Q\vee R)\equiv P\wedge(\neg Q\to R)$. Por tanto, tenemos que $\varphi_2\equiv\psi\wedge\neg\psi$ donde $\psi=P\to\neg(Q\vee R)$, y por consiguiente φ_2 es insatisfactible.

La fórmula φ_3 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P)=I(Q)=I(R)=V$, tenemos que $I(\varphi_3)=(F\to(V\to V))\to V=(F\to V)\to V=V\to V=V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P)=V, I'(Q)=V, I'(R)=F$, tenemos que $I'(\varphi_3)=(F\to(V\to F))\to F=(F\to F)\to F=V\to F=F$.

La fórmula φ_4 es tautología. Una forma de demostrarlo es hacer la tabla de verdad de φ_4, y comprobar que la fórmula es siempre verdadera. Y otra manera más directa de demostrarlo es mediante el siguiente razonamiento. Consideremos una interpretación I tal que $I(((P\to\neg Q)\wedge(R\to Q)))=V$. Por tanto, tenemos que $I(P\to\neg Q)=V$ e $I(R\to Q)=V$. Tenemos que demostrar que $I(\neg(P\wedge R))=V$. Para ello, supongamos por el contrario que $I(\neg(P\wedge R))=F$. Por tanto, $I(P\wedge R)=V$, y por consiguiente tenemos que $I(P)=I(R)=V$. Ahora, como $I(P)=V$ e $I(P\to\neg Q)=V$, deducimos que $I(\neg Q)=V$. Y como tenemos que $I(R)=V$ e $I(R\to Q)=V$, deducimos que $I(Q)=V$. Como es imposible que $I(Q)=V$ e $I(\neg Q)=V$, deducimos que $I(\neg(P\wedge R))=V$, que es lo que queríamos demostrar. Pon tanto, φ_4 es tautología.

(a) (2) Tenemos que $\varphi_1\equiv\neg(P\to Q)\vee((P\vee Q)\to(P\wedge Q))\equiv\neg(P\to Q)\vee(\neg(P\vee Q)\vee(P\wedge Q))\equiv(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\equiv(\neg Q\wedge(\neg P\vee P))\vee(P\wedge Q)$ $\equiv(\neg Q\wedge V)\vee(P\wedge Q)\equiv\neg Q\vee(P\wedge Q)\equiv(\neg Q\vee P)\wedge(\neg Q\vee Q)\equiv(\neg Q\vee P)\wedge V$ $\equiv\neg Q\vee P$.

Como φ_2 es contradicción, tenemos que $\varphi_2\equiv P\wedge\neg P$.

Tenemos que $\varphi_3\equiv\neg((\neg P\to(Q\to(P\wedge R))))\vee R\equiv(\neg P\wedge\neg(Q\to(P\wedge R)))\vee R\equiv\neg P\wedge(Q\wedge\neg(P\wedge R))\vee R\equiv\neg P\wedge Q\wedge(\neg P\vee\neg R))\vee R\equiv(R\vee\neg P)\wedge(R\vee Q)\wedge(R\vee\neg P\vee\neg R)\equiv(R\vee\neg P)\wedge(R\vee Q)\wedge V\equiv(R\vee\neg P)\wedge(R\vee Q)$.

Y como φ_4 es tautología, tenemos que $\varphi_4\equiv P\vee\neg P$.

(b) Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) Cada grupo tiene asignado un profesor.

Para todo $j\leq 10$ ponemos la cláusula

$P1j\vee P2j\vee\ldots\vee P10j$.

(2) Ningún grupo tiene asignado más de un profesor.

Para todo $j\leq 10$ y para todo $i,i'\leq 10$ con $i\neq i'$, ponemos la cláusula

$\neg(Pij\wedge Pi'j)\equiv\neg Pij\vee\neg Pi'j$.

(3) Ningún profesor da clase a más de un grupo.

Para todo $i\leq 10$ y para todo $j,j'\leq 10$ con $j\neq j'$, ponemos la cláusula

$\neg(Pij \wedge Pij') \equiv \neg Pij \vee \neg Pij'$.

(4) Se respetan las restricciones de los profesores.

Para todo $i \leq 10$ y para todo $j \leq 10$, si $R_i \cap L_j \neq \emptyset$ ponemos la cláusula

$\neg Pij$.

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2), (3) y (4).