4. Introducció a la Probabilitat

Universitat de Barcelona

Primeres definicions

- Un experiment aleatori és un fenomen del qual coneixem tots els possibles resultats però no podem predir quin es produirà.
- Els resultats possibles d'un experiment aleatori s'anomenen resultats elementals i es denoten per ω_i.
- El conjunt de tots els ω_i s'anomena espai mostral i es denota Ω.
- Un esdeveniment A és un subconjunt de Ω, $A \subset \Omega$.

Exemple

1. *Tirem una moneda i observem si surt cara o creu:* $\Omega = \{C, +\}$.

2. *Tirem dues monedes i observem el número de cares:* $\Omega = \{0, 1, 2\}$.
   Esdeveniment: $A =$ *'Ha sortit més cares que creus'* $A = \{2\}$.

3. *Tirem un dau de 6 cares i observem el no. de la cara superior:*
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. *Valor ràtio Euro - Dolar respecte del seu valor en el moment del tancament del dia immediatament anterior:* $\Omega = \{\uparrow, =, \downarrow\}$
   Esdeveniment: $B :=$ *'Valor ràtio no puja'.* $B = \{=, \downarrow\}$

Preguntes

- Podem estar interessats simultàniament en un o més esdeveniments?
- Tots els resultats són igualment probables?
- Pot ser que Ω tingui mida infinita?

Exemple

Tirem una moneda perfecta.

1. **Experiment:** *Quantes tirades cal fer fins que surti una cara?*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

2. *Quina és la probabilitat que el número de tirades fins que surti una cara sigui parell?*

$$P(2, 4, 6, ...) = 1/2^2 + 1/2^4 + \ldots = 1/3$$

Esdeveniments i operacions

Siguin A, B dos esdeveniments, tenim les operacions següents:

Unió $A \cup B$: A, B o els dos a la vegada

Intersecció $A \cap B$: els dos a vegada

Complementari A^c: aquell esdeveniment que passa quan no passa A.

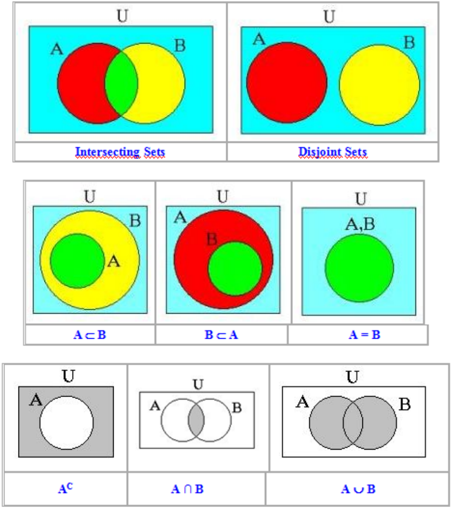
Esdeveniments especials:

- Ω l'esdeveniment que sempre passa, l'esdeveniment segur.
- $\emptyset$ aquell esdeveniment que no passa mai, l'esdeveniment impossible.

Definicions

- A i B són disjunts si $A \cap B = \emptyset$.
- Són exhaustius si $A \cup B = \Omega$.
- Són complementaris, si són disjunts i a la vegada $A \cup B = \Omega$, en aquest cas $B = A^c$.

Diagrames de Venn



Exemple

- **Experiment:** tirada d'un dau (no trucat) de 6 cares.
- **Esdeveniments:** A = "cara parell" i B = "cara $\geq$ 4".

Calculem:

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,4,6\} \\
B &= \{4,5,6\} \\
A \cup B &= \{2,4,5,6\} \\
A \cap B &= \{4,6\} \\
A^c &= \{1,3,5\} \\
B^c &= \{1,2,3\} \\
A \cap B^c &= \{2\} \\
B \cup B^c &= \Omega
\end{aligned}
$$

Operacions en conjunts

- **Propietats commutativa i associativa:**

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \end{aligned}$$

- **Propietat distributiva:**

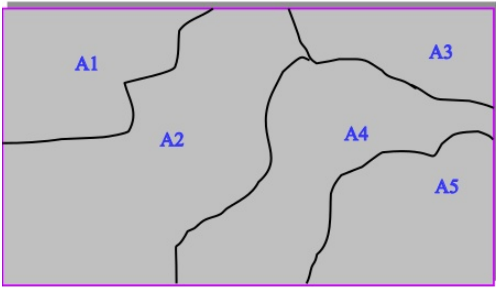
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

- **Lleis de Morgan:**

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Partició

- $A_1, \ldots A_k$ són disjunts dos a dos si $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.
- $A_1, \ldots A_k$ són col·lectivament exhaustius si $A_1 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$.
- **Partició de Ω**: $A_1, \ldots A_k$ són mútuament excloents i col·lectivament exhaustius.



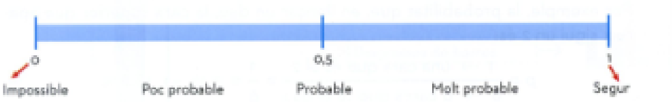
Probabilitat: mesura de versemblança

El concepte de probabilitat és una mesura numèrica de la plausibilitat d'ocurrència d'un cert esdeveniment.

Per definir aquest concepte, hi ha diferents escoles.

Freqüentista Anem repetint el mateix experiment i obtenim que la freqüència relativa s'aproxima a la seva probabilitat

Clàssica Tots els elements de l'espai mostral tenen la mateix probabilitat



Definició freqüentista

La probabilitat de l'esdeveniment A, $P(A)$, és el límit de la freqüència relativa de l'esdeveniment A.

$$\frac{\#A}{\#\text{repeticions experiment}} \xrightarrow{\#\text{repeticions experiment} \to \infty} P(A)$$

(Llei Feble dels Grans Nombres)

Observació. La mesura de probabilitat no ha de dependre del nombre de repeticions de l'experiment.

Exemple. En tirar una moneda n vegades,

$$\frac{\#Cares}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}$$

Aleatorietat: regularitat d'una cursa llarga

Table: Freqüències de 20 rèpliques de treure una bola d'una caixa amb 5 boles numerades.

Núm.	Freqüència Absoluta	Freqüència Relativa
1	6	0.30
2	3	0.15
3	6	0.30
4	2	0.10
5	3	0.15
Total	20	1.00

Table: Repeticions de tirar una moneda no trucada.

# tirades	# cares	prob. de cares	Diferència
100	51	0.51	1
1000	505	0.505	5
10000	5025	0.5025	25
100000	50125	0.50125	125

Més simulacions amb R

```
> coin<- c("H","T")  # Una moneda
> sample(coin,20, replace=T)
"H" "T" "H" "T" "T" "H" "H" "H" "T" "H" "T" "H" "H" "T" "T" "H"
"T" "H" "H" "H"
> dice1 <- 1:6  # Dau amb sis possibles resultats, fem 2 tirades
> tosses1 <- sample(dice1, 20, replace = T)
> tosses1
 [1] 5 5 3 4 6 6 2 2 4 4 1 5 4 2 4 3 4 5 2 1
> dice2 = 1:6;
> tosses2 <- sample(dice2, 20, replace = T)
> tosses2
 [1] 3 5 2 2 2 6 2 1 4 6 2 1 3 3 1 3 5 6 3 4
> tosses1+tosses2
 [1]  8 10  5  6  8 12  4  3  8 10  3  6  7  5  5  6  9 11  5  5
> dice = c(1,2,2,4,5,6)  # Un dau sense 3 i amb dos 2
> sample(dice,20,replace = T)
[1] 1 2 1 5 2 6 5 4 1 2 2 1 5 4 6 1 2 5 2 1
```

Definició Clàssica

Suposem Ω finit i equiprobable. A és un esdeveniment.

Probabilitat d' A:

$$\boxed{P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}}$$

Exemple

Si traiem una bola d'una urna amb 8 boles blanques, 7 vermelles i 5 negres, quina és la probabilitat que surti vermella? I no negra? I blanca o vermella?

Extensió. Si Ω és infinit però tenim definida una mesura uniforme (longitud, àrea...)

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Mesura de } A}{\text{Mesura de } \Omega}}$$

Definició axiomàtica. Espais finits o numerables

Assumim $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$, on I és finit o numerable.

Definition

$\{p_i, i \in I\}$ és una probabilitat si compleix que

- $0 \leq p_i \leq 1$
- $\sum_{i \in I} p_i = 1$

Per tant,

$$P(A) = \sum_{i, \omega_i \in A} P(\{w_i\}) = \sum_{i, \omega_i \in A} p_i$$

$\boxed{\text{Observació:}}$ En el cas finit i amb cardinal n, si l'espai mostral és equiprobable coincideix amb la definició clàssica.

Propietats

- $P(\emptyset) = 0$ i $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \in [0, 1]$, per A esdeveniment.
- Unió disjunta: A i B esdeveniments disjunts

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Més general, si $A_1, \ldots, A_k$ són disjunts 2 a 2

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + \ldots + P(A_k)$$

- Complementari: $\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$

Propietats

- Si A i B dos esdeveniments tals que $A \subseteq B$

$$P(A) \leq P(B)$$

- Unió: A i B dos esdeveniments qualssevol

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- A i B dos esdeveniments qualssevol

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

En general,

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_k)$$

Definició axiomàtica. General. Kolmogorov (1933)

Un espai de probabilitat és una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on

1. Ω és el conjunt de resultats possibles.
2. $\mathcal{F}$ és una família de subconjunts de Ω amb estructura de σ-àlgebra:
   - $\Omega \in \mathcal{F}$
   - Si $A \in \mathcal{F}$ aleshores $A^c \in \mathcal{F}$
   - Si $\{A_n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$, aleshores $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
3. P és una aplicació

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

   complint
   - $P(\Omega) = 1$
   - Si $\{A_n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$ disjunts 2 a 2, aleshores

$$P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Quants cotxes podem matricular?

- Deu dígits 0 a 9
- 20 lletres (B-Z, no hi ha vocals, ni la Q, la Ñ, la LL)

Solució: $10^4 \cdot 20^3$.

Comptatges bàsics (Exemples)

Variacions: 3 premis diferents a repartir entre 12 persones:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

Permutacions: 3 premis diferents a repartir entre 3 persones:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

(`R > factorial(3)`).

Combinacions: 3 premis idèntics a repartir entre 12 persones

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,9!} = 220$$

(`R > choose(12,3)`).

Regla del producte: 1 premi per un grup de 8 persones i un altre per un grup de 6 :

$$8 \cdot 6 = 48$$

Regla del producte

Hem de realitzar k tries successives

- La primera tria té n_1 possibilitats.
- La segona tria té n_2 possibilitats.[1]
- ....
- La k tria té n_k possibilitats.[2]

Aleshores, el nombre total de possibilitats és

$$\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_k}$$

Podem representar-ho utilitzant arbres.

[1] independentment del triat a la primera
[2] independentment del triat a les anteriors

Variacions i Combinacions

Volem comptar donat un conjunt de n elements, quants grups de k ($k \leq n$) elements podem formar si:

- Variacions: Han d'estar ordenats

$$\boxed{V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\texttt{factorial(n)}}{\texttt{factorial(n-k)}}}$$

- Combinacions: No cal que estiguin ordenats

$$\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1} = \texttt{choose(n,k)}}$$

On recordem que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$

Variacions i Combinacions

Volem comptar donat un conjunt de n elements, quants grups de k elements podem formar si podem repetir elements:

- Variacions amb repetició: Han d'estar ordenats

$$\boxed{VR_n^k = n^k}$$

- Combinacions amb repetició: No cal que estiguin ordenats

$$\boxed{CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)\cdot\dots\cdot n}{k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot 1} = \texttt{choose(n+k-1,k)}}$$

Exemples de combinatòria

Exemple

De quantes maneres podem omplir una travessa de futbol de 14 partits?

$$VR_3^{14} = 3^{14} = 4782969 \; possibilitats.$$

Exemple

'Paraules' de 4 lletres amb 'ARBOL'?

$$V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 = \texttt{factorial(5)}$$

Exemple

Hi ha 7 carreres universitàries diferents i només es permet triar-ne 3 per ordre de preferència, de quantes maneres diferents les puc triar?

$$V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Exemples de combinatòria

Exemple

S'ha de triar una comissió de 8 persones a partir de 10 habitants del poble A i 15 del poble B

1. *Quantes possibles comissions hi ha?*

$$\texttt{choose(25,8)} = 1081575 \ possibles\ comissions.$$

2. *I si cada poble representat per 4 persones?*

$$\texttt{choose(10,4)} \cdot \texttt{choose(15,4)} = 286650.$$

3. *I si el poble A pot tenir com a màxim 2 representants?*

$$\texttt{choose(10,0)} \cdot \texttt{choose(15,8)} + \texttt{choose(10,1)} \cdot \texttt{choose(15,7)} +$$

$$+ \texttt{choose(10,2)} \cdot \texttt{choose(15,6)} = 6435 + 64350 + 225225 = 296010$$

Permutacions. Cas particular de les variacions

Cas particular de les variacions: $\boxed{n = k}$. El nombre possibles ordenacions de n elements és

$$\boxed{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 = \texttt{factorial(n)}}$$

Si podem repetir elements aleshores tenim, que si $n_1 + \ldots + n_k = n$

$$\boxed{PR^n_{n_1 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} = \frac{\texttt{factorial(n)}}{\texttt{factorial(}n_1\texttt{)}\ldots\ \texttt{factorial(}n_k\texttt{)}}}$$

Exemple

De quantes maneres diferents poden seure 4 persones en una filera de 4 seients?

$$4! = 24 = \mathtt{factorial(4)}\ \textit{possibilitats}$$

Exemples de combinatòria

Exemple

Quantes formes d'ordenar 5 monedes tenim si volem sempre 2 cares i 3 creus?

$$PR^5_{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \; possibilitats.$$

Exemple

Quantes peces té un joc de dominó?

$$CR^2_7 = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \texttt{choose(8,2)} = 28$$

Exemple

Una pastisseria tenen 8 tipus diferents de pastissos. En volem 3, quants encàrrecs diferents podem fer?

$$CR^3_8 = \binom{10}{3} = \texttt{choose(10,3)} = 120$$

Nombres combinatoris

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Propietats

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

On apareixen? Binomi de Newton

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$$

Exemples de Probabilitat

Exemple

Una persona té tres pantalons diferents P_1, P_2, P_3, 4 samarretes S_1, S_2, S_3, S_4 i dos parells de bambes B_1, B_2. Quina és la probabilitat que la tria per vestir-se sigui $P_1/S_1/B_1$?

Sigui A :='La persona tria per vestir-se $P_1/S_1/B_1$'.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{\#\Omega}$$

on $n(\Omega)$ és el nombre de maneres diferents per vestir. Com calculem $\#\Omega$?

$$\#\Omega = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

Per tant,

$$P(A) = \frac{1}{24}.$$

Problema del sopar i l'ał.lèrgia

Un estudiant convida a una amiga a casa. A la nevera hi té 6 productes diferents i fa una pizza amb 4 dels 6 productes triats a l'atzar. Després s'oblida dels productes que hi ha posat. Abans del sopar l'amiga obra la nevera i comenta que té ał.lèrgia a dos dels sis productes de la nevera.

Quina és la probabilitat que l'amiga tingui ał.lèrgia a la pizza?

Solució:

- Les combinacions de pizza possibles són `choose(6,4)`
- Hi ha una combinació solament que no té ał.lergen.

$$1 - \frac{1}{\texttt{choose}(6,4)} = 0.9333333$$

- Si a la nevera hi haguessin 8 productes, aleshores la probabilitat buscada seria:

$$1 - \frac{\texttt{choose}(6,4)}{\texttt{choose}(8,4)} = 0.7857143$$

El problema de coincidència d'aniversari

En un grup de n persones, calculem la probabilitat de A $=$ "hi ha com a mínim dues persones amb el mateix aniversari".

La probabilitat de A és difícil de calcular, de manera que . . . Intentem el complementari i la regla de Laplace (casos favorables partit per casos possibles)

$$P(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot ...(365 - n + 1)}{365^n}.$$

Considereu el cas de $n = 3$ persones

$$P(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = \texttt{365*364*363/365^3} = 0.9917958$$

Per $n = 40$ $P(A) = 0.885$ i per $n = 80$ $P(A) = 0.999$.

Ho podem calcular amb R

```
> n=40
> seq(365-n+1, 365,1)
 [1] 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338
 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349
[25] 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362
363 364 365
> prod(seq(365-n+1, 365,1))/(365^n)
[1] 0.1087682
> 1-prod(seq(365-n+1, 365,1))/(365^n)
[1] 0.8912318
> n=60
> 1-prod(seq(365-n+1, 365,1))/(365^n)
[1] 0.9941227
```

. . . fem l'experiment a l'aula?

Problema dels barrets

Tres senyors (A,B,C) amb barret entren al restaurant per sopar. El cambrer recull els tres barrets. Acabat el sopar, el cambrer reparteix els barrets a l'atzar. Quina és la probabilitat que com a mínim un dels senyors li toqui el seu barret?

Definim els esdeveniments següents:

- A= "El senyor A li toca el seu barret";
- B= "El senyor B li toca el seu barret";
- C= "El senyor C li toca el seu barret".

Aleshores

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - 2 \cdot P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ja que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6}$.