36. Quines de les següents afirmacions són certes i quines falses ? Justifica les respostes.

- **(a)** $3 \in (3,5]$.
- **(b)** $11 \notin (-\infty, \pi^2]$.
- **(c)** $7 \in \{2,3,\dots,11\}$.
- **(d)** $\pi \in (2,\infty)$.
- **(e)** $-1.3 \in \{\dots -3,-2,-1\}$.
- **(f)** $[1,2] \subseteq \{0,1,2,3\}$.
- **(g)** $\{-1,0,1\} \subseteq [-1,1]$.
- **(h)** $[5,7] \nsubseteq (4,\infty)$.
- **(i)** $\{2,4,6,8,\dots\} \subseteq [2,\infty)$.
- **(j)** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$.

37. Sigui $x \in \mathbb{N}$. Identifica quines propietats del nombre x descriuen les següents expressions; és a dir, quins conjunts de nombres naturals defineixen quan escrivim $\{x \in \mathbb{N} : \dots\}$.

- **(a)** $\exists n \in \mathbb{N}(2n = x)$
- **(b)** $\exists n, m \in \mathbb{N}(m \cdot x = n)$
- **(c)** $\exists n \in \mathbb{N}(x + n = 0)$
- **(d)** $\forall p, q \in \mathbb{N}(x = p \cdot q \ \rightarrow\ p = 1 \vee q = 1)$
- **(e)** $\neg\exists p, q \in \mathbb{N}(p \neq 1 \wedge q \neq 1 \wedge x = p \cdot q)$

38. Per a cada una de les parelles de conjunts següents, determina si hi ha inclusió entre ells o no, i calcula la reunió i la intersecció dels dos conjunts.

- **(a)** $X = \{x \in \mathbb{N} : x^2 > 2\}$, $Y = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant \sqrt{2}\}$
- **(b)** $X = \{x \in \mathbb{N} : x^2 > 2\}$, $Y = \{x \in \mathbb{N} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$
- **(c)** $X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$, $Y = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\big\}$
- **(d)** $X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$, $Y = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\big\}$
- **(e)** $X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}$, $Y = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant y\big\}$

39. Siguin $C = \{a,b,c,d,e,f\}$, $D = \{a,c,e\}$, $E = \{d,e,f\}$ i $F = \{a,b\}$.

Troba els conjunts següents.

- **(a)** $C \smallsetminus (D \cup E)$
- **(b)** $(C \smallsetminus D) \cup E$
- **(c)** $F \smallsetminus (C \smallsetminus E)$
- **(d)** $F \cap (D \cup E)$
- **(e)** $(F \cap D) \cup E$
- **(f)** $(C \smallsetminus D) \cup (F \cap E)$

40. Siguin

$$\begin{aligned} G &= \{n \in \mathbb{Z} : n = 2m \text{ per algun } m \in \mathbb{Z}\} \\ H &= \{n \in \mathbb{Z} : n = 3k \text{ per algun } k \in \mathbb{Z}\} \\ I &= \{n \in \mathbb{Z} : n^2 \text{ és imparell}\} \\ J &= \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leqslant n \leqslant 10\}. \end{aligned}$$

Troba els conjunts següents.

(a) $G \cup I$ **(c)** $G \cap H$ **(e)** $I \setminus H$

(b) $G \cap I$ **(d)** $J \setminus G$ **(f)** $J \cap (G \setminus H)$

41. Siguin $X = \{2, 5, 6, 8\}$ i $Y = \big\{2, \{5\}, 6, \{8\}\big\}$. Respon a les següents preguntes, justificant breument les respostes.

(a) És veritat que $X \subseteq \big\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\big\}$?

(b) Calcula $X \cap \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\}$.

(c) És veritat que $X \subseteq \big\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}(y = 2x)\big\}$?

(d) És veritat que $\{2\} \in X$?

(e) És veritat que $\{2\} \subseteq Y$?

(f) Calcula $X \cap Y$.

(g) És veritat que $Y \cap \big\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}(x = 2y)\big\} = \emptyset$?

42. Digues si és cert o no que, si A i B són conjunts, aleshores ha de ser veritat una de les tres propietats: $A \subseteq B$, $A = B$ o $B \subseteq A$. Raona la resposta.

43. Siguin A, B, C conjunts arbitraris. Demostra o refuta les igualtats següents:

(a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ **(b)** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

44. Siguin A, B, C conjunts qualssevol.

(a) Demostra que $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$.

(b) Demostra que $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ si i només si $A \subseteq C$.

45. Sigui X un conjunt, i $A, B, C \subseteq X$. Suposa que $(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap C$ i que $A \cap B = A \cap C$. Demostra que $B = C$.

46. Siguin A, B, C conjunts arbitraris inclosos en un univers U. Demostra:

(a) $A \cup A^c = U$ **(d)** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(b) $A \cap A^c = \emptyset$ **(e)** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(c) $(A^c)^c = A$ **(f)** Si $A \subseteq B$, aleshores $B^c \subseteq A^c$

Digues també si és cert el recíproc de (f).

47. Troba $\bigcup\limits_{k \geqslant 1} B_k$ i $\bigcap\limits_{k \geqslant 1} B_k$ per a cadascuna de les següents definicions:

(a) $B_k := \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2k\}$ **(c)** $B_k := \big[\frac{3}{k}, \frac{5k+2}{k}\big) \cup \{10 + k\}$

(b) $B_k := \{k - 1, k, k + 1\}$ **(d)** $B_k := \big[0, \frac{k+1}{k+2}\big] \cup \big[7, \frac{7k+1}{k}\big)$

48. Siguin $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ una família de conjunts arbitraris inclosos en un univers U. Demostra que

- $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$.
- $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$.

49. Considera els següents conjunts:

$$A = \{z \in \mathbb{N} : z^2 \leqslant 20 \wedge \exists x \in \mathbb{Z}(z = 2x)\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < 6 \wedge \exists x \in \mathbb{Z}\big(|z| = x^2\big)\}$$

Digues si són certes o falses les següents afirmacions, i per què:

(a) $\{\{4\}\} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)$

(b) $\{\{2, -2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

(c) $\{2\} \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(d) $A \cap B \subsetneq A$

(e) $\forall x \in A\, \exists y \in B\, \exists z \in \mathbb{Z}(z \neq 0 \wedge y = x \cdot z)$

(f) $\forall x \in B\, \exists y \in A\big(|x| = 2y\big)$

50. Si $X = \{1, 2, \{5\}, 9\}$, indica quines de les següents relacions són certes i quines són falses (cal raonar-ho).

(a) $\{1, 2\} \subseteq X$

(b) $\{2, 9\} \in \mathcal{P}(X)$

(c) $\{\{9\}\} \subseteq \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X)\big)$

(d) $\{5\} \in \mathcal{P}(X)$

(e) $\{5\} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X)\big)$

(f) $\{\{5\}\} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X)\big)$

(g) $\{2, 5\} \in \mathcal{P}(X)$

(h) $\{2, 5\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

(i) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

(j) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(X)$

51. Sigui $X = \{1, \{2\}, 3, 4\}$. Digues si és veritat o no que $\big\{\{\{2\}\}\big\} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X)\big)$. Justifica la teva resposta.

52. Indica quina de les següents inclusions és certa i quina és falsa, demostrant les que són certes i donant un contraexemple per les que són falses.

(a) $\mathcal{P}(X \cup Y) \subseteq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$

(b) $\mathcal{P}(X \cup Y) \supseteq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$

(c) $\mathcal{P}(X \setminus Y) \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$

(d) $\mathcal{P}(X \setminus Y) \supseteq \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$