

LOGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges incontextuals

Exercici 1. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\lambda\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1. $((q_0, 0, \lambda), (q_0, 1))$,
2. $((q_0, 0, \lambda), (q_0, 11))$,
3. $((q_0, \lambda, \lambda), (f, \lambda))$,
4. $((f, 1, 1), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

- (a) Demostrar que $\lambda, 011, 00111, 00011111 \in L(M)$.
- (b) Demostrar que $0111 \notin L(M)$.
- (c) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Exercici 2. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{c\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1. $((q_0, a, \lambda), (q_0, c))$,
2. $((q_0, b, \lambda), (q_0, c))$,
3. $((q_0, a, \lambda), (f, \lambda))$,
4. $((f, a, c), (f, \lambda))$,
5. $((f, b, c), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

- (a) Demostrar que $baa, bab, baaaa \in L(M)$.
- (b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Exercici 3. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1. $((q_0, \lambda, \lambda), (q_1, c))$,

2. $((q_1, a, c), (q_1, ac))$.
3. $((q_1, a, a), (q_1, aa))$.
4. $((q_1, a, b), (q_1, \lambda))$.
5. $((q_1, b, c), (q_1, bc))$.
6. $((q_1, b, b), (q_1, bb))$.
7. $((q_1, b, a), (q_1, \lambda))$.
8. $((q_1, \lambda, c), (q_2, \lambda))$.

Llavors es demana:

- (a) Demostrar que $\lambda, aabb, abbbabaa \in L(M)$.
- (b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Exercici 4. Definir un autòmat amb pila M tal que $L(M) = \{a^i b^j c^k : i = j \vee i = k\}$.

Exercici 5. Considerem l'autòmat amb pila determinista $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1. $((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$,
2. $((q_0, b, \lambda), (q_0, b))$,
3. $((q_0, c, \lambda), (f, \lambda))$,
4. $((f, a, a), (f, \lambda))$,
5. $((f, b, b), (f, \lambda))$.

Llavors, simular M mitjançant un programa en JAVA.

Exercici 6. Considerem la gramàtica incontextual $G = (V, \Sigma, P, S)$ on $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ i $P = \{S \rightarrow ABC, A \rightarrow 0A1, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow 1B, B \rightarrow 1, C \rightarrow 1C0, C \rightarrow \lambda\}$. Llavors, es demana:

- (a) Donar derivacions per a les paraules 01110 i 0111100.
- (b) Determinar el llenguatge $L(G)$.

Exercici 7. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

- (a) El llenguatge de les paraules de longitud senar en $\{a, b\}^*$ amb a com a símbol central.
- (b) El llenguatge de les paraules de longitud parell en $\{a, b\}^*$ amb dos símbols centrals iguals.
- (c) El llenguatge de les paraules de longitud senar en $\{a, b\}^*$ que tenen iguals els símbols central, primer i últim.

Exercici 8. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

- (a) $\{a^i b^i : i \geq 2\}$.
- (b) $\{a^i b^j : i \geq j\}$.
- (c) $\{a^i b^j : j \leq i \leq 2j\}$.
- (d) $\{a^i b^j c^k : i = k\}$.
- (e) $\{a^i b^j c^k : i = j + k\}$.
- (f) $\{a^i b^j c^k : j = i + k\}$.

Exercici 9. (a) Definir una gramàtica incontextual que generi el llenguatge $\{xx^I : x \in \{0, 1, \dots, 9\}^*\}$.

(b) Definir una gramàtica incontextual que generi el llenguatge $\{x \in \{0, 1, \dots, 9\}^* : x = x^I\}$.

Exercici 10. Considerem la gramàtica incontextual $G = (V, \Sigma, P, S)$ on $V = \{S\}$, $\Sigma = \{(\cdot), [\cdot], \cdot\}$ i $P = \{S \rightarrow \lambda, S \rightarrow SS, S \rightarrow (S), S \rightarrow [S]\}$. Llavors, es demana:

- (a) Donar una derivació en la gramàtica per a la paraula $((\cdot)[\cdot])$.
- (b) Determinar el llenguatge $L(G)$.
- (c) Utilitzant l'algorisme vist a classe, simular la gramàtica G mitjançant un autòmat amb pila.
- (d) Donar un còmput en l'autòmat de l'apartat (c) que reconegui la paraula $((\cdot)[\cdot])$.

Exercici 11. La següent gramàtica incontextual G genera una classe d'instruccions repetitives de JAVA.

1. $S \rightarrow \underline{do} Y \underline{while} (C)$
2. $Y \rightarrow \underline{id} = E;$
3. $E \rightarrow E * F$
4. $E \rightarrow E / F$
5. $E \rightarrow F$
6. $F \rightarrow (E)$
7. $F \rightarrow \underline{id}$
8. $F \rightarrow \underline{int}$
9. $F \rightarrow \underline{float}$

10. $C \rightarrow C \ \&\& \ D$
11. $C \rightarrow D$
12. $D \rightarrow \underline{id} \geq \underline{id}$
13. $D \rightarrow \underline{id} > \underline{id}$

- (a) Donar una derivació en G per a la paraula
 $\underline{do} \ \underline{id} = \underline{int} * (\underline{float} / \underline{id}) ; \underline{while} (\underline{id} > \underline{id} \ \&\& \ \underline{id} \geq \underline{id})$
- (b) Utilitzant l'algorisme vist a classe, simular la gramàtica G mitjançant un autòmat amb pila.

Exercici 12. Considerem la següent gramàtica incontextual G per a dissenyar una calculadora de dígit decimal, on E és el símbol inicial.

1. $E \rightarrow T$
2. $E \rightarrow EOE$
3. $T \rightarrow A$
4. $T \rightarrow TPA$
5. $O \rightarrow +$
6. $O \rightarrow -$
7. $P \rightarrow *$
8. $P \rightarrow /$
9. $A \rightarrow \underline{int}$
10. $A \rightarrow \underline{float}$

Llavors, es demana:

- (a) Demostrar que G és ambigua.
- (b) Donar una gramàtica equivalent a G que no sigui ambigua.

Exercici 13. Considerem la següent gramàtica incontextual G :

1. $S \rightarrow Aa$
2. $A \rightarrow Bb$
3. $B \rightarrow Cc$
4. $C \rightarrow dXY$

5. $C \rightarrow c$
6. $X \rightarrow aX$
7. $X \rightarrow \lambda$
8. $Y \rightarrow bY$

Llavors, calculeu $\text{Primers}(\text{Sab})$, $\text{Primers}(\text{XY})$, $\text{Primers}(\text{bAX})$, $\text{Primers}(\text{cXY})$, $\text{Primers}(\text{d})$.

Exercici 14. Considerem la següent gramàtica incontextual:

1. $S \rightarrow A$
2. $A \rightarrow aBb$
3. $A \rightarrow cBd$
4. $B \rightarrow XY$
5. $X \rightarrow eX$
6. $X \rightarrow \lambda$
7. $Y \rightarrow fY$
8. $Y \rightarrow \lambda$

- (a) Calculeu els conjunts de Primers i Següents de les variables de la gramàtica.
- (b) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica.

Exercici 15. Considerem la següent gramàtica incontextual:

1. $S \rightarrow aSA$
2. $S \rightarrow \lambda$
3. $A \rightarrow bB$
4. $B \rightarrow cbB$
5. $B \rightarrow \lambda$

Llavors, es demana:

- (a) Obtenir els conjunts de Primers i Següents de les variables de la gramàtica.
- (b) Determinar si la gramàtica és LL(1).

Exercici 16. Considerem la següent gramàtica per generar instruccions condicionals:

$$S \rightarrow I \mid t$$

$$I \rightarrow \underline{if} (E) S R$$

$$R \rightarrow \underline{else} S \mid \lambda$$

$$E \rightarrow 0 \mid 1$$

Llavors, es demana:

- (a) Obtenir els conjunts de Primers i Següents de les variables de la gramàtica
- (b) Determinar si la gramàtica és LL(1).

Exercici 17. Considerem la gramàtica incontextual de l'Exercici 11. Llavors, es demana:

- (a) Explicar per què G no és LL(1).
- (b) Aplicar las reglas de factorització i recursió per transformar la gramàtica G en una gramàtica LL(1).
- (c) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (b).

Exercici 18. Considerem la següent gramàtica incontextual G per a generar una classe d'instruccions de JAVA.

1. $S \rightarrow \{L\}$
2. $S \rightarrow \underline{id} = E$
3. $L \rightarrow S; L$
4. $L \rightarrow S$
5. $E \rightarrow E + T$
6. $E \rightarrow E - T$
7. $E \rightarrow T$
8. $T \rightarrow \underline{id}$
9. $T \rightarrow \underline{int}$
10. $T \rightarrow \underline{float}$

Llavors es demana:

- (a) Donar una derivació en G que generi la paraula $\{\underline{id} = \underline{id} + \underline{int}; \{\underline{id} = \underline{int} - \underline{float}; \underline{id} = \underline{id}\}\}$

- (b) Demostrar que G no es LL(1).
- (c) Aplicar les regles de factorització i recursió a G .
- (d) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (c).

Exercici 19. Considerem la següent gramàtica incontextual:

$$S \rightarrow \underline{id} = C \mid \underline{if} (C) S \mid \underline{while} (C) S \mid \{L\}.$$

$$L \rightarrow S \mid L ; S.$$

$$C \rightarrow \underline{id} == \underline{id} \mid \underline{id} ! = \underline{id} \mid C \&\& \underline{id}.$$

Llavors, es demana:

- (a) Demostrar que la gramàtica no és LL(1).
- (b) Obtenir una gramàtica equivalent LL(1).
- (c) Construir la taula d'anàlisi de la gramàtica obtinguda en (b).