Exercici 24 NOVA PROPOSTA.

Proposta nova: Quants ous hi hauria, com a mínim, si en lloc de sobrar-ne un cada vegada que els comptava de dos en dos, de tres en tres, de quatre en quatre, de cinc en cinc o de sis en sis, n'hi hagués mancat un, i en comptar-los de set en set li haguessin quedat justos?

Solució 24 NOVA PROPOSTA.

Llegint l'enunciat deduim què si x és el nombre d'ous:

$x \equiv -1 \pmod 2$ i $x \equiv -1 \pmod 3$ i $x \equiv -1 \pmod 4$ i $x \equiv -1 \pmod 5$ i
$x \equiv -1 \pmod 6$ i $x \equiv 0 \pmod 7$

Com $x \equiv -1 \pmod 2, \pmod 3, \pmod 4, \pmod 5, \pmod 6 \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{(\mathrm{mcd}(2,3,4,5,6))}$
$\Rightarrow x \equiv -1 \pmod{60}$
Resolem el sistema de congruències:

$$\left.\begin{aligned} x \equiv 0 \pmod 7 \\ x \equiv -1 \pmod{60} \end{aligned}\right\}$$

Com $\mathrm{mcd}(7,60) = 1 \Rightarrow$ el sistema té solució.

Com $x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x = 7r$ per a algún $r \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Com } x \equiv -1 \pmod{60} &\Rightarrow [x]_{60} = [7r]_{60} = [-1]_{60} \\ &\Rightarrow [r]_{60} = ([7]_{60})^{-1}[-1]_{60} \\ &\Rightarrow [r]_{60} = [-17]_{60}[-1]_{60} \\ &\Rightarrow [r]_{60} = [17]_{60} \\ &\Rightarrow r = 60q + 17 \text{ on } q \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 7(60q+17) = 420q + 119 \end{aligned}$$

Càlcul de $([7]_{60})^{-1} \Rightarrow 7x + 60y = 1$

$$\begin{gathered} 60 = 7 \times 8 + 4 \\ 7 = 4 \times 1 + 3 \\ 4 = 3 \times 1 + 1 \\ 3 = 1 \times 3 + 0 \end{gathered}$$

Trobem la identitat de Bezout:

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2(60 - 7 \times 8) - 7 = 2 \times 60 - 17 \times 7$$

$$\text{Per tant: } ([7]_{60})^{-1} = [-17]_{60}$$

Com $x = 420q + 119\ \forall q \in \mathbb{Z}$, tindria com a mínim 119 ous.