Introducción

En la última clase definimos el concepto de lenguaje de predicados. En la clase de hoy, estudiaremos algunos de los conceptos más fundamentales sobre estos lenguajes.

Empezamos mostrando cómo se pueden formalizar situaciones del lenguaje natural en los lenguajes de predicados.

Reglas de formalización

Para poder representar propiedades formales o situaciones del lenguaje natural en lógica de predicados, deberemos utilizar las siguientes reglas:

(1) Todo A es B se representa por $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$.

(2) Ningún A es B se representa por $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$.

(3) Algún A es B se representa por $\exists x(Ax \wedge Bx)$.

(4) Algún A no es B se representa por $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"A todos los esquiadores les gusta la nieve"

Átomos:

E$x = x$ es esquiador,

$Nx =$ a x le gusta la nieve.

La frase se puede formalizar entonces por $\forall x(Ex \rightarrow Nx)$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"A ningún montañero le gusta la lluvia."

Átomos:

$Mx = x$ es montañero,

$Lx =$ a x le gusta la lluvia.

La frase se puede formalizar entonces por $\forall x(Mx \to \neg Lx)$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"Todos los bancos tiene clientes descontentos."

Átomos:

$Bx = x$ es un banco,

$Cxy = x$ es cliente de y,

$Dx = x$ está descontento

La frase se puede formalizar entonces por
$\forall x(Bx \to \exists z(Czx \wedge Dz))$.

Ejemplo

Consideremos la frase:
"Los amigos de Joan están alegres"

Átomos:

$Axy = x$ es amigo de y,

$Lx = x$ está alegre.

Además, hemos de representar a Joan por una constante.
Representamos entonces a Joan por c.

La frase se puede formalizar entonces por $\forall x(Axc \rightarrow Lx)$.

Variables libres y ligadas

Una aparición de una variable x en una fórmula φ es libre, si dicha aparición no está afectada por ningún cuantificador. En caso contrario, diremos que la aparición es ligada.

Una variable x es libre en una fórmula φ, si hay alguna aparición libre de x en φ. En caso contrario, diremos que la variable es ligada en φ.

Por ejemplo, en la fórmula $\forall x(Rxy \wedge \exists z(Pz \vee Rxz))$, las variables x, z son ligadas y la variable y es libre.

Fórmulas cerradas

Una fórmula ϕ de un lenguaje de predicados es cerrada, si ϕ no tiene variables libres.

Por ejemplo, la fórmula $\phi = \forall x(Rxy \wedge \exists z(Pz \vee Rxz))$ no es cerrada, ya que la variable y es libre en ϕ.

Sin embargo, la fórmula $\phi' = \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy))$ es cerrada, ya que las tres variables x, y, z son ligadas en ϕ'.

Interpretaciones

Nuestro objetivo ahora es dar significado a los términos y a las fórmulas de los lenguajes de predicados. Para ello, definimos el concepto de interpretación en lógica de predicados.

Recordemos previamente que si D es un conjunto no vacío y $n \geq 1$, una función (o un operador) de n argumentos sobre D es una función de D^n en D, donde D^n denota el producto cartesiano de D consigo mismo n veces.

Y un predicado de n argumentos sobre D es un subconjunto de D^n.

Si R es una relación de n argumentos sobre D y $a_1, \ldots, a_n \in D$, escribiremos $Ra_1 \ldots a_n$ en lugar de $(a_1, \ldots, a_n) \in R$.

Si σ es un vocabulario, una σ-interpretación es una estructura que consta de lo siguiente:

- Un conjunto no vacío D al que llamaremos dominio de la interpretación.
- Una aplicación tal que:
  - A cada variable x le asigna un elemento $I(x)$ de D.
  - A cada símbolo de constante c de σ le asigna un elemento $I(c)$ de D.
  - A cada símbolo de función f de n argumentos de σ le asocia una función $I(f)$ de n argumentos sobre D.
  - A cada símbolo de predicado R de n argumentos de σ le asocia un predicado $I(R)$ de n argumentos sobre D.

Evaluación de términos

Para evaluar un término t en una interpretación I se sustituyen los símbolos de constante, los símbolos de función y las variables que aparezcan en t por sus correspondientes interpretaciones.

El resultado de la evaluación es un elemento del dominio de I, que será denotado por $I(t)$.

Ejemplo

Supongamos que $\sigma = \{a, b, f^2, g^2\}$ e I es una σ-interpretación cuyo dominio es el conjunto de los números enteros tal que $I(a) = 2$, $I(b) = 3$, $I(f)$ es la suma, $I(g)$ es la multiplicación e $I(v_i) = 3i$ para toda variable v_i. Tenemos entonces:

(a) $I(a) = 2$,

(b) $I(v_2) = 6$,

(c) $I(f(a, v_2)) = 2 + 6 = 8$,

(d) $I(g(b, v_3)) = 3 \times 9 = 27$,

(e) $I(f(a, g(b, v_3))) = 2 + 27 = 29$.

Evaluación de fórmulas

Para evaluar una fórmula φ en una interpretación I se sustituyen los símbolos de predicado, los símbolos de función y los símbolos de constante que aparezcan en φ por sus correspondientes interpretaciones. Una aparición libre de una variable x en φ se sustituye por su interpretación $I(x)$. Y las apariciones ligadas de las variables de φ se interpretan mediante los cuantificadores que las afectan, tomando como dominio de los cuantificadores el dominio de la interpretación I.

Si la evaluación de φ es una propiedad cierta, escribiremos $I(\varphi) = V$; en caso contrario, escribiremos $I(\varphi) = F$.

Ejemplo

Consideremos el vocabulario $\sigma = \{c, f^2, g^2, P^2, Q^1\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I =$ los enteros,
- $I(c) = 3$,
- $I(f) = +$,
- $I(g) = \times$,
- $I(P) = \{(m, n) : m, n$ son enteros tales que $m \leq n\}$,
- $I(Q) =$ conjunto de los números primos,
- $I(v_i) = 2i$ para cada variable v_i.

Evaluamos entonces las siguientes fórmulas en I.

$\varphi_1 = Qv_3$,
$\varphi_2 = Pv_2g(c, v_2)$,
$\varphi_3 = \exists v_0 Pf(v_1, v_2)v_0$,
$\varphi_4 = \forall v_0 \exists v_1 Pv_0v_1$.
$\varphi_5 = \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (Pv_0v_2 \wedge Pv_2v_0)$.

Ejemplo

Para evaluar las fórmulas anteriores, utilizamos el algoritmo de evaluación de fórmulas visto anteriormente.

Como en φ_1 no hay cuantificadores, sustituimos los símbolos de φ_1 por sus interpretaciones. Por tanto, el significado de φ_1 en I es la condición "6 es un número primo". Por tanto, $I(\varphi_1) = F$.

Como en φ_2 no hay cuantificadores, sustituimos los símbolos de φ_2 por sus interpretaciones. Por tanto, el significado de φ_2 en I es la condición "$4 \leq 3 \times 4$". Por tanto, $I(\varphi_2) = V$.

Ejemplo

En φ_3, las variables v_1, v_2 aparecen libres y la variable v_o aparece ligada. Por tanto, v_1, v_2 se han de sustituir por $I(v_1), I(v_2)$ respectivamente, y la variable v_0 se ha de interpretar mediante el cuantificador existencial que la afecta. Así pues, el significado de φ_3 en I es la condición " existe un entero n_0 tal que "$2 + 4 \leq n_0$". Por tanto, $I(\varphi_3) = V$.

En φ_4, las variables v_0, v_1 aparecen ligadas. Por tanto, se han de interpretar mediante los cuantificadores que las afectan. Así pues, el significado de φ_4 en I es la condición " para todo entero n_0 existe un entero n_1 tal que $n_0 \leq n_1$". Por tanto, $I(\varphi_4) = V$.

Ejemplo

En φ_5, las variables v_0, v_1, v_2 aparecen ligadas. Por tanto, se han de interpretar mediante los cuantificadores que las afectan. Así pues, el significado de φ_5 en I es la condición " para todo entero n_0 para todo entero n_1 existe un entero n_2 tal que $n_0 \leq n_2$ y $n_2 \leq n_1$". Esta condición es falsa si $n_0 > n_1$ (por ejemplo, si $n_0 = 3$ y $n_1 = 2$). Por tanto, $I(\varphi_5) = F$.

Notación

Si σ es un vocabulario e I es una σ-interpretación, escribiremos:

(a) $\overline{x} = I(x)$ para toda variable x.

(b) $\overline{s} = I(s)$ para todo símbolo $s \in \sigma$.

Utilizaremos esta notación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Consideremos el vocabulario $\sigma = \{a, f^1, P^1, Q^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

(1) dominio de $I = \{0, 1\}$,

(2) $\overline{a} = 0$,

(3) $\overline{f}(0) = 1$, $\overline{f}(1) = 0$,

(4) $\overline{P}0 = F$, $\overline{P}1 = V$,

(5) $\overline{Q}00 = V$, $\overline{Q}01 = V$, $\overline{Q}10 = F$, $\overline{Q}11 = V$.

Evaluamos entonces las siguientes fórmulas en I.

$\varphi_1 = \exists x(Px \wedge Qxa)$,

$\varphi_2 = \exists x(Pf(x) \wedge Qxf(a))$,

$\varphi_3 = \forall x \exists y(Px \wedge Qxy)$,

$\varphi_4 = \forall x \forall y(Px \to Qxy)$.

Ejemplo

La fórmula φ_1 se interpreta mediante la expresión " existe $n \in \{0, 1\}$ tal que $\overline{P}n = V$ y $\overline{Q}n0 = V$". Se tiene que la expresión es falsa, ya que si $n = 0$ se tiene que $\overline{P}0 = F$, y si $n = 1$ se tiene que $\overline{Q}10 = F$. Por tanto, $I(\varphi_1) = F$.

La fórmula φ_2 se interpreta mediante la expresión " existe $n \in \{0, 1\}$ tal que $\overline{P}\overline{f}(n) = V$ y $\overline{Q}n1 = V$". Se tiene que la expresión es verdadera, ya que para $n = 0$ tenemos que $\overline{P}\overline{f}(0) = \overline{P}1 = V$, y asimismo tenemos que $\overline{Q}0\overline{f}(0) = \overline{Q}01 = V$. Por tanto, $I(\varphi_2) = V$.

Ejemplo

La fórmula φ_3 se interpreta mediante la expresión "para todo $n \in \{0,1\}$ existe $m \in \{0,1\}$ tal que $\overline{P}n = V$ y $\overline{Q}nm = V$". Se tiene que la expresión falla para $n = 0$, ya que tenemos que $\overline{P}0 = F$. Por tanto, $I(\varphi_3) = F$.

La fórmula φ_4 se interpreta mediante la expresión "para todo $n, m \in \{0,1\}$, $\overline{P}n \to \overline{Q}nm = V$". Se tiene que la expresión falla para $n = 1$ y $m = 0$, ya que $\overline{P}1 \to \overline{Q}10 = V \to F = F$. Por tanto, $I(\varphi_4) = F$.

Fórmulas equivalentes

Decimos que dos fórmulas φ, ψ son lógicamente equivalentes, si para toda interpretación I, tenemos que $I(\varphi) = I(\psi)$.

Si φ, ψ son lógicamente equivalentes, escribiremos $\varphi \equiv \psi$.

Añadimos a las equivalencias lógicas vistas en lógica de proposiciones las siguientes equivalencias:

Fórmulas equivalentes

(1) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$.

(2) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

(3) $Qx(\varphi \wedge \psi) \equiv Qx\varphi \wedge \psi$, si $Q \in \{\exists, \forall\}$ y x no aparece en ψ.

(4) $Qx(\varphi \vee \psi) \equiv Qx\varphi \vee \psi$, si $Q \in \{\exists, \forall\}$ y x no aparece en ψ.

(5) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$.

(6) $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$.

Ejemplo 1

Consideremos las fórmulas $\varphi_1 = \neg\exists x \forall y (Px \wedge \neg Rxy)$ y $\varphi_2 = \forall x \exists y (Px \to Rxy)$. Demostramos que estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes. Tenemos:

$\varphi_1 = \neg\exists x \forall y (Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \neg \forall y (Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \exists y \neg (Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \exists y (\neg Px \vee Rxy) \equiv \forall x \exists y (Px \to Rxy) = \varphi_2$.

Ejemplo 2

Consideremos las fórmulas $\varphi_1 = Pc$ y $\varphi_2 = \exists x Px$. En este caso, las fórmulas no son equivalentes. Para ello, damos una interpretación que separa las fórmulas. Defininimos entonces la interpretación I de la siguiente manera. El dominio de I es $\{0, 1\}$, definimos $I(P) = \{1\}$ y definimos $I(c) = 0$. Se tiene entonces que $I(\varphi_1) = F$, pero $I(\varphi_2) = V$.