Espais de probabilitat

Un **experiment aleatori** serà aquell experiment sobre el qual coneixem tots els resultats possibles però que repetit en les mateixes condicions pot donar resultats diferents, i per al qual no podem predir quin d'aquests resultats es produirà realment.

Espai mostral i esdeveniments

L'**espai mostral** Ω es defineix com el conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori.

Fixeu-vos que els espais mostrals poden ser molt diferents depenent de quin sigui l'experiment aleatori que estigueu tractant. Pot ser que siguin numèrics o que no ho siguin i també pot ser que siguin finits o infinits.

A la pràctica, no sempre estarem interessats en tot l'espai mostral, si no en uns quants dels possibles resultats que formen part de l'espai mostral. Ún **esdeveniment** o **succés** és un subconjunt de l'espai mostral Ω.

Hi ha alguns esdeveniments que s'utilitzen més i que són importants de conèixer. Dos d'aquests són:

- El **succés segur**, és el format per tots els resultats possibles, o sigui Ω.
- El **succés impossible**, és el que no es dóna mai, o sigui $\emptyset$.

Ara bé, donats dos esdeveniments A i B podem definir diverses **operacions** entre ells:

- L'esdeveniment que es dóna quan passa A o passa B s'anomena A **unió** B, i ho escriurem com $A \cup B$.
- L'esdeveniment que es dóna quan passa A i al mateix temps passa B s'anomena A **intersecció** B, i ho escriurem com $A \cap B$.
- L'esdeveniment que es dóna quan no passa A s'anomena el **complementari** d'A, i ho escriurem com A^c.

I finalment, tenim les relacions següents:

- Dos esdeveniments A i B són **disjunts** si no tenen resultats en comú, o sigui $A \cap B = \emptyset$.
- Dos esdeveniments A i B són **exhaustius** si entre els dos tenim tots els resultats possibles, o sigui $A \cup B = \Omega$.
- Si tots els resultats de B estan inclosos a A, es diu que B **està inclòs** a A, i escriurem $B \subset A$.

Observem que hi ha esdeveniments que poden complir les dues condicions: poden ser exhaustius i a l'hora ser disjunts. L'exemple més fàcil d'esdeveniments que compleixen les dues condicions és: un esdeveniment A i el seu complementari A^c.

Espais de probabilitat

La definició rigurosa d'espai probabilitat és molt tècnica i abstracta pel que necessitarem en aquest curs, és per això que introdurem només els espais de probabilitat finits (o numerable), és a dir, quan l'espai mostral és finit (o numerable).

Si l'espai mostral és $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, una **probabilitat** P serà una mesura numèrica de la possibilitat que passi un cert esdeveniment. Aquesta probabilitat P queda definida quan assignem a cada un dels resultats ω_i una probabilitat $P(\omega_i)$, $1 \leq i \leq k$. Aquesta probabilitat ha de complir certes propietats:

1. $\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i) = 1$,
2. per a qualsevol i, $i = 1, \ldots, k$, $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$,
3. per un esdeveniment A qualsevol,

$$P(A) = \sum_{i, \omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Observació. Tot això té el seu equivalent quan l'espai mostral és infinit numerable $\Omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Cas particular Quan tots els elements tenen la mateixa probabilitat, tenim el cas equiprobable.

$$P(\omega_1) = \ldots = P(\omega_k) = \frac{1}{k}.$$

En aquest cas, calcular les probabilitats dels esdeveniments és fàcil. Si A és un esdeveniment

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

on $card(\cdot)$ denota el **cardinal** del conjunt, o sigui és el número d'elements que té el conjunt. Per calcular el cardinal d'un esdeveniment utilitzarem sovint la **combinatòria**.

Propietats de la probabilitat

Algunes de les propietats bàsiques de la probabilitat són:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si A és un esdeveniment, aleshores $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. Si $\{B_k, 1 \leq k \leq n\}$ és una família d'esdeveniments disjunts 2 a 2, és a dir, tals que per a tot $i \neq j$ es compleix que $B_i \cap B_j = \emptyset$ aleshores
$$P(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = P(B_1) + \ldots + P(B_n).$$
Això ens diu en particular que si A i B són dos esdeveniments disjunts, aleshores
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
5. Si A i B són dos esdeveniments qualssevol, aleshores
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
I en particular tenim la desigualtat,
$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$
6. Per dos esdeveniments A i B tenim
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

Probabilitat condicionada

Quan volem calcular una probabilitat, el fet de conèixer una informació prèvia sobre l'esdeveniment ens pot modificar el valor de la probabilitat.

Siguin A i B dos esdeveniments tal que $P(B) > 0$, aleshores la **probabilitat de A condicionada per B** és

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Fixeu-vos que, la fórmula anterior també es pot escriure de la manera segent

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

A més, el paper dels esdeveniments A i B es pot intercanviar. Si $P(A) > 0$, aleshores es compleix que

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A),$$

i aleshores és certa la següent relació

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Esdeveniments independents

A vegades però, el fet de tenir més informació no ens fa canviar les probabilitats.

Donats dos esdeveniments A i B direm que són **esdeveniments independents** si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Aquesta seria la definició rigurosa d'esdeveniments independents, però hi ha altres igualtats equivalents a aquesta.

Proposició. Si A i B són dos esdeveniments tals que $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, aleshores les afirmacions següents són equivalents:

1. A i B són independents,
2. $P(A|B) = P(A)$,
3. $P(B|A) = P(B)$.

Fórmula de les probabilitats totals

Per introduir la fórmula de les probabilitats totals necessitem definir un nou concepte, el de *partició*.

Una **partició** de l'espai mostral Ω és una família d'esdeveniments $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ que compleixen dues condicions:

1. són disjunts dos a dos,
2. són exhastius ($\Omega = \cup_{i=1}^{m} A_i$).

Fórmula de les probabilitats totals.

Sigui $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ una partició de l'espai mostral Ω, tals que $P(A_i) > 0$ per a tot i. Aleshores donat qualsevol altre esdeveniment B, tenim la igualtat segent:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_m) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_m)P(A_m). \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

En alguns casos, necessitem calcular una probabilitat condicionada quan justament coneixem la probabilitat amb la condició inversa. O sigui, suposem que donats dos esdeveniments A i B volem calcular $P(B|A)$ i coneixem:

- $P(A)$ i $P(B)$,
- i a més també coneixem $P(A|B)$.

Aleshores, podem invertir les condicions.

bf Teorema. Sigui A i B dos esdeveniments tals que $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Aleshores,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Hi ha una versió més complicada, que també ens pot ser útil en determinades situacions i que es coneix com la fórmula de Bayes.

Fórmula de Bayes

Sigui E_1, E_2, ..., E_k una partició de Ω tal que $P(E_i) > 0 \ \forall i = 1, \ldots, k$, i sigui A un esdeveniment tal que $P(A) > 0$. Aleshores,

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A|E_1)P(E_1) + \ldots + P(A|E_k)P(E_k)}.$$