Exercici 6. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$ nombres enters tals que $mcd(a,b) = 1$. Calculeu $mcd(a+b, a-b)$ en funció de a i b.

Solució 6.
Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$ nombres enters tals que $mcd(a,b) = 1$.

Sigui $d = mcd(a+b, a-b)$. Com que $d|a+b \, i \, d|a-b$, d divideix qualsevol combinació lineal d'aquests.

$$\begin{cases} d \mid (a+b) + (a-b) = 2a \\ d \mid (a+b) - (a-b) = 2b \end{cases}$$

Veiem que d'aquestes dues propietats $d \mid 2a$ i $d \mid 2b$ deduim necessàriament que $d = 1$ o bé $d = 2 \Rightarrow d \mid 2$, ja que en cas contrari es contradiu la hipòtesi $mcd(a,b) = 1$. (Si $d \mid a$, i $d \mid b$, necessàriament, $d = 1$).

Distingim aleshores els següents casos:

$$\begin{cases} (a \equiv 0(\text{mod}2) \land b \equiv 1(\text{mod}2)) \text{ (o viceversa)} \Rightarrow mcd(a+b, a-b) = 1 \\ (a \equiv 1(\text{mod}2) \land b \equiv 1(\text{mod}2)) \lor (a \equiv 0(\text{mod}2) \land b \equiv 0(\text{mod}2)) \Rightarrow mcd(a+b, a-b) = 2 \end{cases}$$