Matrius i Vectors
Grupo Tarde
Examen final, problemas

Enero 2014

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (1,1,1,-1),(1,-2,1,1),(3,0,3,3) >, \quad G =< (1,0,1,0) >$$

y H, dado por las ecuaciones

$$x+z+t=0, \quad x-z-2t=0.$$

Se pide calcular bases de F y H y determinar, mediante ecuaciones independientes o una base, $(F \cap H)+G$.

2.- Dados vectores $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$ y $x \in \mathbb{R}$, se considera la matriz $A(x)$ que tiene columnas $A_1 - A_2, A_2 - A_3, A_3 - xA_1$, $A(x) = (A_1 - A_2, A_2 - A_3, A_3 - xA_1)$, y se pide encontrar razonadamente los valores de x para los cuales $\det A(x) = 0$, distinguiendo los casos en que los vectores A_1, A_2, A_3 son dependientes o independientes.

3.- a) Determine para qué valores de a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcule dicha inversa en caso de existir.

b) Fijada en un espacio vectorial E una base (e_1, e_2, e_3), se considera el endomorfismo f de E que tiene matriz M (definida en el apartado anterior) en dicha base. Para los valores de a para los que f no es inyectiva, se pide calcular los núcleos de f y f^2, y determinar en qué casos dichos núcleos son iguales.

4.- Si f es un endomorfismo de un espacio vectorial E, $f : E \to E$, y se sabe que existe un vector no nulo $v \in E$ de modo que $f(v) \neq 0$ y $f^2(v) = 0$, demuestre que

a) $\ker f \cap \operatorname{Im} f \neq 0$ y

b) $\ker f + \operatorname{Im} f \neq E$.