

1. Calculeu els límits següents (quan existeixin):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{3x + 2} - \sqrt{x + 4}} \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + \log(1 + x^2)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

2. Calculeu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^m x} - \sqrt{1 - \sin^m x}}{x^n},$$

per a cada $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Cadascuna de les funcions següents no està definida en $x = 0$. Estudieu en cada cas si és possible assignar un valor a la funció en $x = 0$ que faci que sigui contínua:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{|x|}. \quad (b) \quad g(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right). \quad (c) \quad h(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right).$$

4. Determineu per a quins valors d' $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ és contínua la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \leq 0, \\ ax \log x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x - b|, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Sigui la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x \sin(x + a) & \text{si } x \leq 0 \\ (x + b) \cos(\pi/x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ cx \log(1 + 1/x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Digueu si existeixen valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ per als que f sigui contínua. En cas afirmatiu digueu quins són aquests valors.

(b) Calculeu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

6. Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sigui la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \log(1 - x) & \text{si } x \leq 0 \\ x^\beta \sin(\pi/x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Digueu si existeixen valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per als que f sigui contínua. En cas afirmatiu digueu quins són aquests valors.

7. Sigui, per a cada $n \in \mathbb{N}$, la funció definida a $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\infty) \setminus \{0\}$ per les igualtats

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2)}{x^n} & \text{si } -\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < 0 \\ x^{\sin x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Per a quins n es pot definir $f(0)$ de manera que f sigui contínua a 0 ?

8. Estudieu la continuïtat de la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0, \\ \left(\frac{e}{x}\right)^x & \text{si } 0 < x \leq e, \\ 1 + (x - e) \sin\left(\frac{1}{x - e}\right) & \text{si } x > e. \end{cases}$$