Exemples d'intervals de confiança amb condicions de normalitat

1. Tenim que la mitjana i la variància de les alçades en centímetres dels 17 nois que cursen l'assignatura **Estadística** del Departament Probabilitat, Lògica i Estadística de la Universitat de Barcelona són:

$$\bar{x}_{17} \simeq 175,65 \qquad \text{i} \qquad s_{17}^2 \simeq 5,24.$$

Assumint que les observacions provenen d'una mostra aleatòria simple d'una normal $N(\mu, \sigma^2)$ amb μ i σ^2 desconegudes, pretenem donar els intervals de confiança per a μ i σ^2 al nivell de confiança $\alpha = 0,95$.

Busquem primer l'interval de de confiança per a μ. Si ν és la probabilitat d'una variable aleatòria amb llei t de Student amb 16 graus de llibertat, tenim que

$$\nu([-\eta_\alpha, \eta_\alpha]) = 0,95 \quad \Longrightarrow \quad \eta_\alpha = 2,12.$$

Per tant, tenim que l'interval és:

$$\left[\bar{x}_{17} - 2,12\frac{s_{17}}{\sqrt{16}},\ \bar{x}_{17} + 2,12\frac{s_{17}}{\sqrt{16}}\right] = [174,43;\ 176,86]\,.$$

Per a calcular l'interval de confiança per a σ^2 en primer lloc, si ν és la probabilitat associada a una variable aleatòria amb llei $\chi^2_{(16)}$, hem de trobar $\zeta_\alpha, \eta_\alpha$, $0 < \zeta_\alpha < \eta_\alpha$, tal que $\nu([\zeta_\alpha, \eta_\alpha]) = 0,95$, buscant-los tenim que $\zeta_\alpha = 6,908$ i $\eta_\alpha = 28,845$; aleshores emprant obtenim

$$\left[\frac{17\, s_{17}^2}{28,845},\ \frac{17\, s_{17}^2}{6,908}\right] = [3,09;\ 12;90].$$

2. Suposem ara que també coneixem la mitjana i la variància de les alçades dels 20 nois de l'assignatura **Probabilitat**

$$\bar{y}_{20} \simeq 175,55 \qquad \text{i} \qquad s_{20}^2 \simeq 6,81,$$

i que les dades també provenen d'una mostra aleatòria simple d'una normal $N(\mu, \sigma^2)$ amb paràmetres desconeguts. Ens proposem trobar l'interval de confiança per a la difèrencia de mitjanes al nivell de confiança $\alpha = 0,95$.

En primer lloc haurem de veure com són les seves variàncies i en funció d'aquesta dada buscar l'interval per a la diferència de mitjanes. La funció pivotant que hem proposat per a la raó de variàncies és una F de Fisher-Snedecor $F_{16,19}$ i, per tant, l'interval per a la raó de variànces que trobem és

$$\left[\frac{1}{2,59}\frac{\tilde{s}_{17}^2}{\tilde{s}_{20}^2}, \frac{1}{0,37}\frac{\tilde{s}_{17}^2}{\tilde{s}_{20}^2}\right] = [0,29;\ 2,10]\,.$$

Com que l'1 pertany a l'interval que hem obtingut per a la raó de variàncies, podem assumir que les variànces són desconegudes però iguals. En aquest cas, la funció pivotant que usem és una t de Student $t_{(35)}$ i els extrems de l'interval per a la diferència de mitjanes són:

$$\bar{x}_{17} - \bar{y}_{20} \pm 2,03\sqrt{\frac{37(17s_{17}^2 + 20s_{20}^2)}{17 \times 20 \times 35}},$$

i, per tant, l'interval és $[-1,60;\ 1,80]\,.$