FÍSICA PARA CIENCIAS E INGENIERÍA

McKelvey, J. & Grotch, H.

México, Harla, 1981

Caps. 19-20 (págs. 767-873)

CAMPO MAGNÉTICO E INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

50. Explique, con cálculos adecuados, cómo puede convertirse un galvanómetro de 0 a 50 μA (microamperes) con 400 Ω de resistencia en un instrumento que indique **(a)** de 0 a 3 A, **(b)** de 0 a 10 V, **(c)** de 0 a 5 A, **(d)** de 0 a 30 V.

51. Un capacitor C se carga a una tensión o diferencia de potencial ΔV. En $t = 0$ se cierra un interruptor, completando un circuito con una resistencia R en serie. Entonces, la carga en el capacitor está dada por

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$

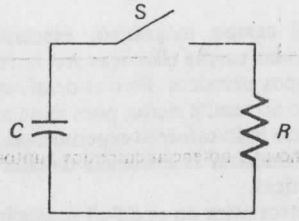
Calcule la energía total disipada en la resistencia y demuestre que es igual a la energía almacenada inicialmente por el capacitor.

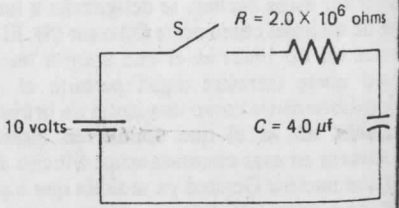
52. Se carga un capacitor de 5 μF a 300 V y luego se descarga a través de un resistor de 75 000 Ω. Después de 3 s de descarga, evalúe la carga remanente en el capacitor, la corriente a través de la resistencia y la intensidad a la que se produce calor por efecto Joule en la resistencia.

53. El capacitor en un circuito RC se carga hasta 0.1% de su carga máxima. ¿Cuántas constantes de tiempo transcurren desde que comenzó el proceso de carga? En el diagrama, un capacitor de 2×10^{-6} F tiene una carga de 3×10^{-6} C. El valor de la resistencia es de 4×10^{6} Ω. ¿Cuál es la carga del capacitor 24 s después de cerrado el interruptor? Halle la corriente que pasa por la resistencia inmediatamente después de cerrado el interruptor.

54. Se conecta una batería de 12 V en serie con un resistor de resistencia $R = 3.0 \times 10^{6}$ Ω y un capacitor con capacidad $C = 2.0$ μF. Evalúe la constante de tiempo del circuito. Cuando la carga del capacitor es un medio del valor máximo, ¿qué carga tiene?

55. En el circuito del diagrama se cierra el interruptor en $t = 0$. **(a)** Trace una gráfica del voltaje ΔV_c del capacitor en función del tiempo. **(b)** Calcule la carga en el capacitor después de transcurrido un tiempo muy largo. **(c)** ¿Cuánta energía proporciona la batería en el proceso de carga? **(d)** ¿Cuánta energía queda almacenada en el capacitor cuando está cargado totalmente? **(e)** ¿A dónde va el resto de la energía?





CAMPOS MAGNÉTICOS DE CORRIENTES CONSTANTES

19

19.1 Introducción

El fenómeno del magnetismo se conoce casi desde hace tanto tiempo como la electricidad estática. Los antiguos griegos conocían las fuerzas magnéticas que ejercían las sustancias imantadas o imanadas permanentemente, como la magnetita, sobre objetos hechos de hierro, y los chinos ya utilizaban brújulas o agujas magnéticas hacia el año 1 000 d.C. En el tiempo en que ocurrió la guerra de independencia de Estados Unidos, la brújula ya era un instrumento náutico suficientemente confiable para que los barcos pudieran navegar por todo el mundo, y se había delimitado con exactitud el magnetismo terrestre. Por entonces ya se sabía que los polos magnéticos terrestres no coinciden con los del eje de rotación, de manera que se habían trazado mapas exactos de la declinación magnética, en los que se señalaba la desviación del "norte magnético" con respecto al norte verdadero. Durante la segunda parte del siglo XIX se especuló muchísimo acerca de las posibles relaciones entre los fenómenos eléctricos y los magnéticos.

Pero sólo hasta 1819 el científico danés Hans Christian Oersted (1777-1851), utilizando la recién descubierta "pila voltaica" para establecer una corriente constante, descubrió que una aguja de brújula se desvía en la proximidad de un conductor por el que fluye una corriente eléctrica. La implicación de este experimento, es decir, que el magnetismo y la

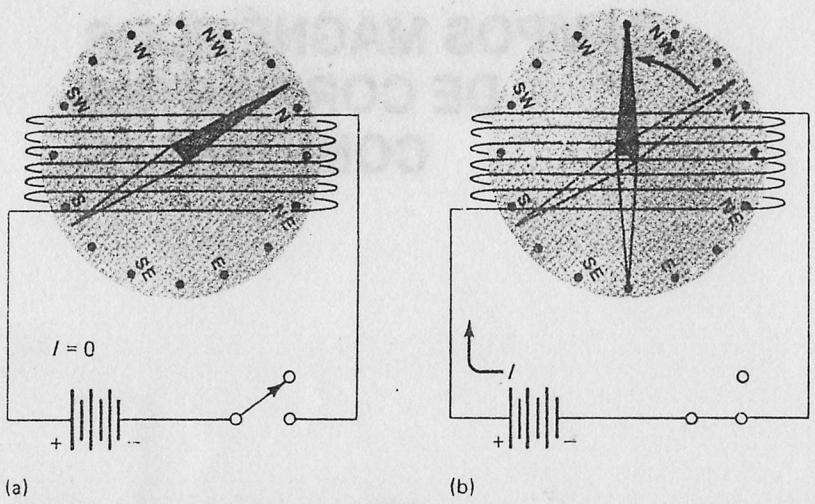


FIGURA 19.1. Experimento de Oersted para poner de manifiesto el campo magnético producido por una corriente eléctrica.

electricidad son fenómenos relacionados, es profunda y dio lugar a un periodo de rápido desarrollo de la comprensión del magnetismo y su relación con la electricidad. En la figura 19.1 se ilustra el experimento de Oersted.

El hecho de que el conocimiento inicial de las fuerzas magnéticas se debiera a imanes permanentes naturales tendió a oscurecer la relación entre el magnetismo y la electricidad, en vez de aclararla. Sólo después de un periodo relativamente largo, se comprendió de manera general que todos los campos magnéticos, *incluso los asociados a imanes permanentes*, se deben al flujo de corrientes eléctricas. Los campos magnéticos de las sustancias magnetizadas permantemente se deben a corrientes que circulan dentro de los átomos de la sustancia y que se suman en la superficie del imán para producir una *corriente superficial equivalente*, como lo ilustra la figura 19.2. Esta corriente superficial es la que constituye la fuente del campo magnético. El magnetismo permanente, que se conoce también como *ferromagnetismo*, es un tema complejo que no se tratará de explicar en detalle, aunque se aprenderá más de ello en el Capítulo 21. Por ahora, el objetivo será definir y comprender los campos de fuerzas magnéticas, y examinar cómo se originan de las corrientes eléctricas.

El enfoque que se seguirá es describir el comportamiento de las cargas y corrientes que están en campos magnéticos *producidos exteriormente*, sin considerar primero cómo se crea el campo magnético. Este procedimiento tiene la ventaja de que permite formular una definición razonable de la intensidad de un campo magnético desde el principio. Una vez logrado lo anterior, se atenderá la descripción y comprensión de los campos magnéticos producidos por cargas móviles y por corrientes que fluyen en conductores, y a explicar las fuerzas entre conductores portadores de corriente.

19.2 Fuerzas y campos magnéticos: dipolos magnéticos

Mucho antes del descubrimiento por Oersted del electromagnetismo ya se habían establecido ciertos hechos básicos relativos a las fuerzas entre los polos de los imanes y el comportamiento de las sustancias magnéticas. Al

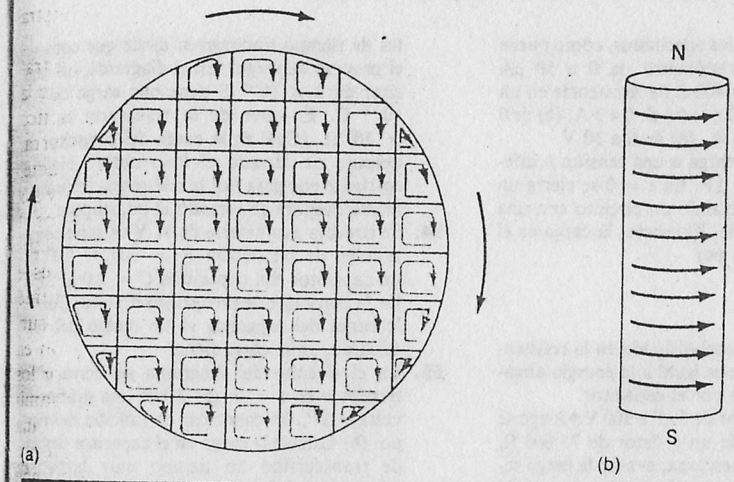


FIGURA 19.2. Diagrama que ilustra en (a) las corrientes atómicas circulantes. En los límites interiores indicados, estas corrientes se acumulan o cancelan mutuamente, pero en la superficie se suman para producir una corriente de magnetización superficial equivalente, que se representa en (b).

describir estos hechos, se designarán a los polos de un imán como norte (N) o sur (S). El polo norte de un imán es el que apunta hacia el polo norte terrestre aquél permite al imán girar libremente como una aguja de brújula, y el polo sur es el que apunta en dirección contraria en esas circunstancias. Mucho antes de que naciera Oersted ya se sabía que los *polos magnéticos opuestos se atraen mutuamente y que los polos iguales se repelen entre sí*. Haciendo mediciones cuantitativas de las fuerzas entre polos de imanes de barra largos y delgados (de manera que el extremo norte del imán esencialmente no esté interferido por los efectos creados por su propio polo sur) ya se había reconocido que estas fuerzas de atracción y repulsión son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre los polos de los imanes. En muchos sentidos, las fuerzas entre polos magnéticos se asemejan a las fuerzas de Coulomb entre cargas eléctricas, especialmente en el sentido de que presentan la misma dependencia *inversa al cuadrado* de la distancia. Sería tentador suponer que hay *cargas magnéticas* positivas (N) y negativas (S) en los imanes que actúan, de acuerdo con la ley de las fuerzas de Coulomb, como origen del campo magnético, exactamente igual como las cargas eléctricas son la fuente de los campos eléctricos. Pero es desafortunado que esto no resulte cierto, pues hasta ahora ha fracasado todo esfuerzo experimental para tratar de demostrar la existencia de tales cargas magnéticas.

En electrostática no es difícil producir objetos con carga neta positiva o negativa. Basta con utilizar el pedazo de ámbar y la piel de gato o la barra de vidrio y la tela de seda para lograrlo. También es posible dividir o partir un dipolo eléctrico en dos partes, obteniendo así una porción cargada positivamente y otra con carga negativa. Por otra parte, *invariablemente* los imanes *tienen polos norte y sur de intensidades precisamente iguales*, por lo que esencialmente son *dipolos*. Más aún, cuando se corta en dos partes un imán de barra, en vez de obtenerse un polo norte y un polo sur aislados se obtienen dos mitades, cada una de las cuales tiene polos norte y sur de intensidad exactamente igual, como se ilustra en la figura 19.3. Se han ideado otros métodos más complejos para aislar las "cargas" magnéticas norte o sur, pero todos han resultado en el más rotundo fracaso, por lo que hay que

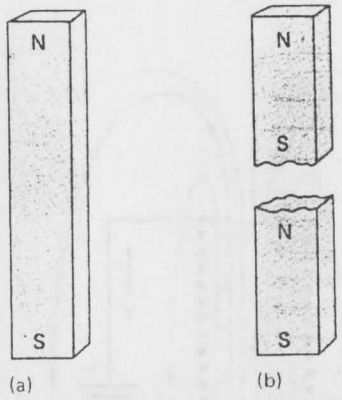


FIGURA 19.3. Cuando un imán se parte a la mitad, se producen dos imanes con polos norte y sur de igual magnitud. Esto indica que los campos magnéticos son de naturaleza esencialmente dipolar, y no provienen de cargas magnéticas libres.

concluir que aunque puedan tenerse dipolos magnéticos, no existen aisladamente los polos norte o sur. Este comportamiento notable puede explicarse afirmando que la *única fuente de magnetismo, incluso en los imanes permanentes, es una corriente eléctrica*. En las sustancias imantadas permanentemente, estas corrientes circulan dentro de los átomos de la

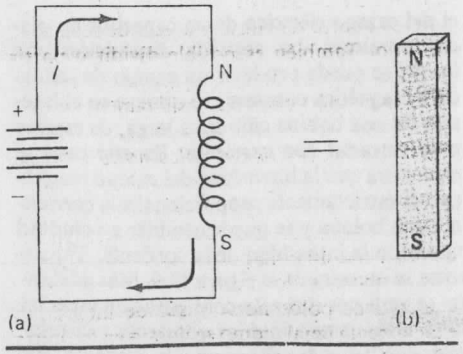


FIGURA 19.4. Una corriente eléctrica de intensidad constante en un inductor (o bobina) produce exactamente la misma clase de campo magnético que un imán de barra.

sustancia, como se mencionó antes y se ilustra en la figura 19.2.

Cuando una corriente eléctrica fluye a través de una bobina de alambre, como la de la figura 19.4, establece un campo magnético muy semejante al campo de un imán de barra. El campo que aparece tiene todas las características de un campo *dipolar* de Coulomb y sus propiedades son análogas en todos sentidos al campo eléctrico asociado a los dipolos eléctricos, como se estudió en el capítulo 16. Desde luego, en estas circunstancias no tiene sentido hablar de separar un polo norte de uno sur. Empero, los campos que se producen son en todo sentido idénticos a los originados por los imanes permanentes con los que se tiene familiaridad. Además, si se somete a la bobina portadora de corriente a un campo magnético *producido exteriormente*, como el de un imán de barra, le afectarán las fuerzas magnéticas de atracción o de repulsión igual como si fuera un imán permanente. En consecuencia, el polo norte de la bobina es atraído por el polo sur de un imán permanente y repelido por su polo norte. De hecho, ya que cualquier conductor en que fluye una corriente tiene asociado a él un campo magnético, *habrá una fuerza magnética en cualquier conductor con corriente que esté en un campo magnético producido exteriormente*. Por último, como una corriente se debe al movimiento de cualquier partícula cargada, *debe existir la acción de una fuerza magnética sobre cualquier carga móvil en un campo magnético producido exteriormente*.

Ahora debe examinarse el problema de cómo establecer una definición cuantitativa de la intensidad de un campo magnético. La manera más obvia de hacerlo es proceder en forma análoga al caso electrostático y expresar la intensidad del campo magnético en términos de la fuerza por unidad de "carga" magnética que experimentaría una "carga" de tal clase colocada en el campo. Pero como hasta donde se sabe, no existen las cargas magnéticas, jamás podrá implementarse experimentalmente este procedimiento, por lo que es incongruente desde el punto de vista de la lógica e imposible desde el punto de vista operativo. Entonces, debe tratarse de encontrar alguna otra manera de lograr en esencia el

mismo propósito en forma que, al menos en principio, sea factible desde el punto de vista experimental.

Puede comenzarse recordando del estudio de la electrostática que el momento de rotación en un dipolo eléctrico cuyo momento dipolar es **p** está dado por la ecuación (16.6.28) como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (19.2.1)$$

De acuerdo con esta expresión, la magnitud del momento es

$$\tau = pE \sin \theta \qquad (19.2.2)$$

en que θ es el ángulo entre el vector de campo **E** y la dirección del momento dipolar. El momento se anula cuando $\theta = 0$, lo que significa que cuando el dipolo se alinea en la dirección del campo, no hay momento neto y el dipolo están en *equilibrio*. Por tanto, podría visualizarse la dirección del campo notando la dirección en que apunta un dipolo de prueba suspendido libremente, cuando está en equilibrio.

Puede adoptarse el mismo enfoque para reconocer la dirección del campo magnético. Se observa que tanto los electroimanes como los imanes permanentes se comportan como *dipolos magnéticos*. Se designará el *momento magnético dipolar* del imán mediante $\mathbf{p}_m$ y por medio de **B** al vector que representa el campo magnético, que en adelante se llamará *inducción magnética*. En el caso de un dipolo eléctrico, generalmente puede expresarse el momento como el producto de la carga eléctrica en uno de los extremos del dipolo por la longitud de éste. En el caso magnético, esto ya no es posible, pues no hay carga magnética como tal. Por tanto, sólo se cuenta con el *momento magnético* $\mathbf{p}_m$ para describir el imán y sirve como el único parámetro fundamental que establece su intensidad. Sin embargo, más adelante se verá que este momento está relacionado con la corriente que actúa como fuente del campo y con la magnitud del circuito por el que fluye. Sería conveniente definir la inducción magnética **B** como un campo que tiene las mismas propiedades con respecto a la carga magnética que tiene **E** en relación con la carga eléctrica —o que tendría, si existiera la carga magnética. En este caso, el momento de rotación en un dipolo *magnético* de intensidad $\mathbf{p}_m$ en cualquier punto de un campo magnético **B** producido exteriormente debe ser

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} \qquad (19.2.3)$$

De nuevo, la magnitud de este momento de rotación es

$$\tau = p_m B \operatorname{sen} \theta \qquad (19.2.4)$$

en que θ es el ángulo entre el eje del dipolo magnético y la dirección del campo de inducción magnética **B** en el punto donde está ubicado el dipolo. Como antes, este momento se hace cero y se equilibra el dipolo suspendido libremente, cuando el eje del mismo está alineado paralelamente al vector inducción magnética **B**.

Utilizando estas ideas como base, puede visualizarse el campo de inducción magnética **B** notando la dirección que toma un pequeño dipolo magnético suspendido libremente (como una brújula,) en distintos puntos dentro del campo, como se ilustra en la figura 19.5. De esta manera se trazan fácilmente los dibujos de las líneas de fuerza magnéticas análogos a los que se estudiaron antes y que co-

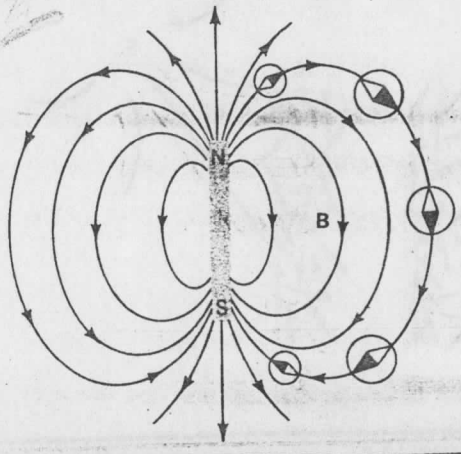


FIGURA 19.5. Líneas de fuerza magnética detectadas con ayuda de una brújula.

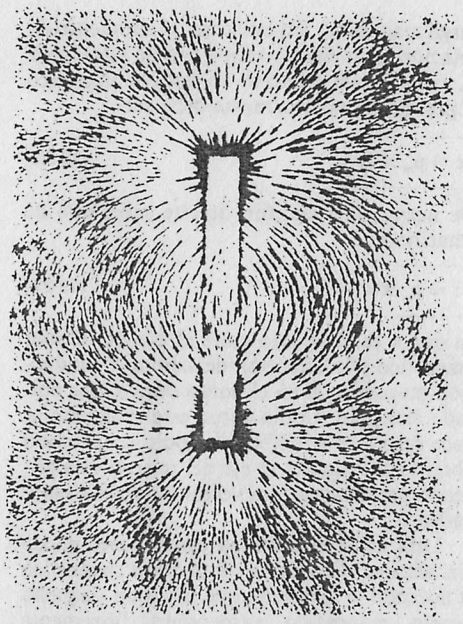


FIGURA 19.6. Patrón o figura formada por limaduras de hierro en el campo de un imán de barra.

rresponden a las líneas de fuerza eléctricas. Se puede hacer visible la configuración de campos magnéticos esparciendo limaduras de hierro sobre una hoja de papel colocada en un campo magnético. Los momentos magnéticos atómicos en las limaduras se alinearán paralelamente al campo externo **B** cuando se colocan en éste, lo que produce un momento dipolar magnético *inducido* en cada una de las limaduras, la que entonces se alinea con el campo externo, produciendo figuras como la de la figura 19.6, donde se aprecian claramente las líneas del campo. Este fenómeno del *magnetismo inducido* en muestras inicialmente no magnetizadas de materiales magnetizables permanentemente es al que se debe la atracción que ejercen los imanes, incluso de pequeños trozos de hierro no magnetizados. El efecto, ilustrado en la figura 19.7, se asemeja a la producción de un momento dipolar eléctrico inducido en un cuerpo conductor descargado, que se lleva a un campo eléctrico. Los mecanismos físicos responsables del magnetismo inducido difieren de aquellos de los que dependen los momentos eléctricos inducidos en los conductores, ya que en el caso eléctrico participa el movimiento de las cargas libres. En el Capítulo 21 se estudiará con más detalle

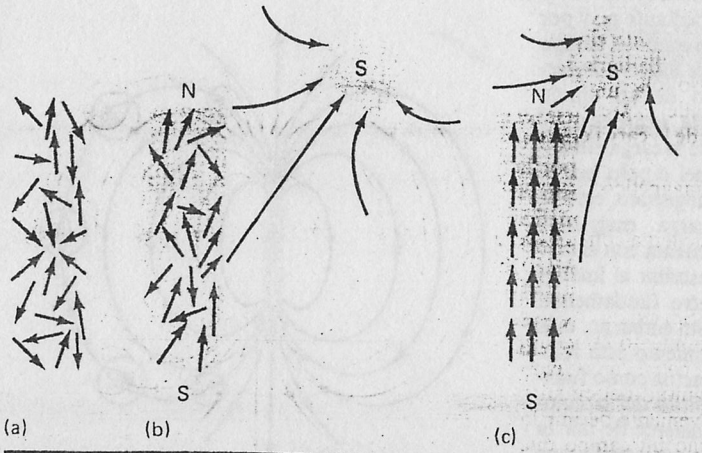


FIGURA 19.7. Alineación de imanes atómicos en un trozo de hierro inicialmente no magnetizado, originada por el campo de un imán permanente. Lo anterior ilustra el fenómeno del magnetismo inducido.

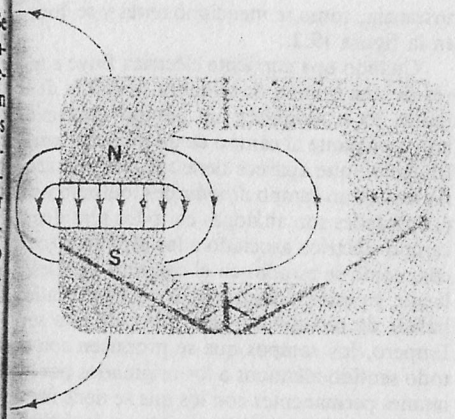


FIGURA 19.8. Campo magnético uniforme en el entrehierro que separa los polos norte y sur de un imán en herradura.

el magnetismo inducido y los efectos relacionados que tienen que ver con el comportamiento de los materiales magnetizables en los campos magnéticos.

Se puede obtener la magnitud del campo **B** determinando el momento de rotación necesario para desplazar un dipolo de prueba un cierto ángulo respecto de la posición de equilibrio. De acuerdo con (19.2.4), este momento es proporcional a la magnitud de **B**. Utilizando estos métodos, pueden trazarse sistemáticamente líneas de inducción magnética y determinar la magnitud relativa de **B** en condiciones experimentales. En especial, se encontrarán determinadas disposiciones de fuentes de corriente o polos magnéticos que producen un campo **B** *de magnitud y dirección constantes*, y tienen un papel particularmente importante en las investigaciones experimentales de los fenómenos magnéticos.

Dos de estas disposiciones tienen especial importancia. La primera puede obtenerse doblando un imán de barra a la forma de un anillo, dejando sólo una pequeña separación en sus extremos con límites planos paralelos, o sea, un espacio de aire entre los dos polos del imán. Entonces, el campo **B** prácticamente será constante en magnitud y dirección dentro de este espacio, como se ilustra en la figura 19.8. Es evidente la analogía entre este caso y

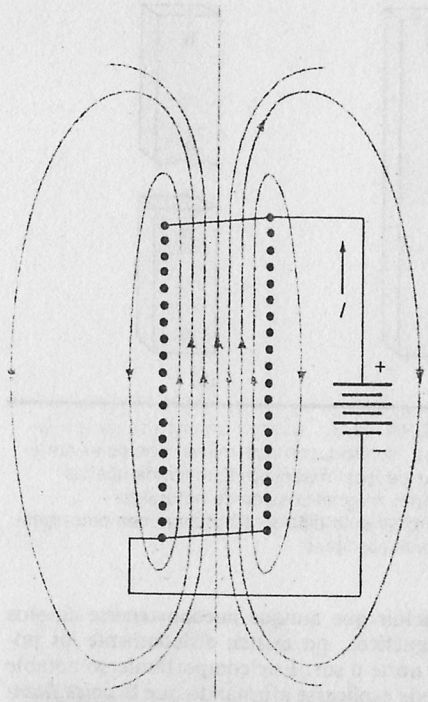


FIGURA 19.9. Campo magnético uniforme en el interior de una bobina larga de enrollamiento muy cerrado que conduce una corriente constante.

el del campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas. La segunda disposición con la que se puede producir un campo de inducción magnética constante se obtiene en el interior de una bobina cilíndrica larga, de espiras muy cerradas con corriente. En este caso se encuentra que la intensidad del campo magnético es estrictamente proporcional a la *corriente* en la bobina y se puede cambiar a voluntad variando la intensidad de la corriente. Tal sistema se muestra en la figura 19.9. Más adelante se verá por qué esta configuración especial lleva a un campo interior constante y la relación que hay entre el campo y la corriente. En todo caso, estas configuraciones —que pueden realizarse fácilmente— permiten hacer experimentos simples y exactos para determinar

la naturaleza de las fuerzas magnéticas que actúan sobre cargas móviles en campos magnéticos y sobre conductores con corriente situados en campos magnéticos.

En el caso de una partícula con carga eléctrica, los resultados de experimentos como éstos llevan a las siguientes conclusiones: 1) La fuerza magnética sobre una partícula cargada es perpendicular tanto al vector **B** como al vector velocidad de la partícula. 2) La fuerza es proporcional en magnitud a la del campo **B**, a la velocidad de la partícula y a la carga que lleva. 3) La fuerza es proporcional en magnitud al seno del ángulo entre el vector velocidad de la carga y el vector **B**. Las observaciones 2) y 3) permiten llegar a la conclusión de que la magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada es proporcional a qBv sen θ, en que θ es el ángulo entre el vector velocidad **v** y el vector del campo **B**. La observación 1) indica que la fuerza es perpendicular tanto a **v** como a **B**. De la definición del producto vectorial, se puede expresar la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ como

$$\mathbf{F}_m = \lambda q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (19.2.5)$$

en que λ es una constante de proporcionalidad cuyo valor dependerá de la magnitud de las unidades elegidas para expresar la magnitud de **B**. Naturalmente, es mejor escoger estas unidades de manera que la constante λ tenga el valor unitario. En el SI esto significa que si la inducción magnética es de magnitud unitaria, una carga puntual de 1 coulomb que se mueva perpendicularmente a **B** con velocidad de 1 metro por segundo experimentará una fuerza (perpendicular tanto a **B** como a **v**) de 1 newton de magnitud. Por (19.2.5), se llega a la conclusión de que las unidades de **B** son newton-segundo/coulomb-metro. Pero como 1 C/S equivale a 1 A, se puede escribir igualmente la unidad como newton/ampere-metro.* En la figura 19.10 se ilustra la relación geométrica entre **B**, **v** y $\mathbf{F}_m$. La magnitud de la unidad SI de la inducción magnética puede visualizarse notando que la inducción magnética terrestre típicamente es de cerca de 10^{-4} N/A · m, mientras que la inducción en la proximidad de la cerca del polo de un imán permanente de gran potencia es del orden de 0.1 N/A · m. Los electroimanes más potentes disponibles en la actualidad pueden crear inducciones cercanas a 10 N/A · m.[1] La ecuación (19.2.5) puede expresarse como

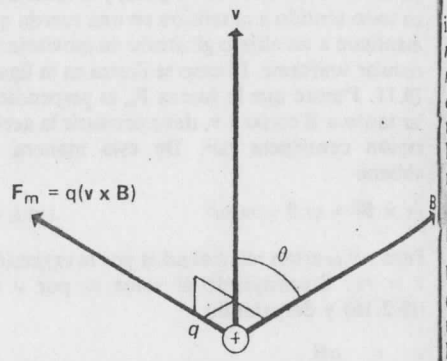


FIGURA 19.10. Relación entre los vectores que representan el campo magnético, la velocidad de una carga eléctrica y la fuerza magnética.

$$\boxed{\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})} \qquad (19.2.6)$$

Si hay *tanto* un campo eléctrico **E** *como* un campo magnético **B**, se producirá una fuerza *eléctrica* $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ además de la fuerza dada por (19.2.6). La fuerza total sobre la carga será entonces la suma vectorial de las fuerzas eléctrica y magnética, o sea,

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})} \qquad (19.2.7)$$

Esta es la fuerza que experimenta una partícula cargada en las circunstancias más generales cuando actúan sobre ella campos eléctricos y magnéticos. A veces se conoce como *expresión de la fuerza de Lorentz* en honor del físico holandés H. L. A. Lorentz (1853 - 1928). Es importante comprender que *ninguna fuerza magnética actúa sobre una carga eléctrica en reposo*, debido a que entonces *no hay ninguna corriente asociada a la carga*. En estas circunstancias, no crea campo magnético propio que le permita experimentar fuerzas por campos magnéticos externos.

* N. del S. Esta unidad SI se denomina específicamente *tesla* (símbolo: T).

[1] Como la unidad SI de inducción magnética es demasiado grande para ciertos usos, a veces se utiliza mejor el *oersted* definido como 10^{-4} N/A. m. Desde luego, si B se mide en oersteds la constante λ en (19.2.5) ya no es la unidad sino que su valor es de 1.000×10^{-4}. En este libro se utilizarán de preferencia las unidades SI.

EJEMPLO 19.2.1

Un electrón se mueve sobre el eje x a la velocidad de 1.00×10^7 m/s. En la dirección z hay una inducción magnética constante de 2.50 N/A · m. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza magnética que experimenta el electrón. Indicar la magnitud del campo electrostático necesaria para producir una fuerza electrostática de la misma magnitud.

De acuerdo con (19.2.6), la fueza magnética es

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(v_x\mathbf{i}_x \times B_z\mathbf{i}_z) = qv_xB_z(\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_z)$$

o, ya que $\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_y$,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m &= -qv_xB_z\mathbf{i}_y \\ &= -(-1.602 \times 10^{-19})(1.00 \times 10^7)(2.5)\mathbf{i}_y \\ &= (4.00 \times 10^{-12}\ \text{N})(\mathbf{i}_y)\end{aligned}$$

La fuerza es de 4.00×10^{-12} N y actúa en la dirección y positiva. Para que un campo electrostático **E** produzca una fuerza de la misma magnitud, se requiere que

$$E = \frac{F}{q_{m}} = \frac{4.00 \times 10^{-12}}{1.602 \times 10^{-19}} = 2.50 \times 10^7\ \text{V/m}$$

EJEMPLO 19.2.2

Se observa que un cuerpo con una carga $q = 3.00 \times 10^{-8}$ C experimenta una fuerza **F** cuyas componentes son $F_x = 37.5 \times 10^{-8}$ N, $F_y = -15.0 \times 10^{-8}$ N y $F_z = -60.0 \times 10^{-8}$ N cuando se mueve a través de cierto campo magnético constante con la velocidad **v**, cuyas componentes son $v_x = 20$ m/s, $v_y = 50$ m/s y $v_z = 0$. Sobre la misma carga actúa una fuerza $\mathbf{F}'$ cuyas componentes son $F'_x = 22.5 \times 10^{-8}$ N, $F'_y = 7.5 \times 10^{-8}$ N y $F'_z = -36.0 \times 10^{-8}$ N cuando se mueve a la velocidad $\mathbf{v}'$ de componentes $v'_x = 10$ m/s, $v'_y = 30$ m/s y $v'_z = 0$ en el mismo campo. Encontrar la magnitud y dirección de la inducción magnética constante **B** a partir de estos datos.

De (19.2.6), se puede escribir

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (19.2.8)$$

o, en términos de componentes,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q}(F_x\mathbf{i}_x + F_y\mathbf{i}_y + F_z\mathbf{i}_z) \\ &\quad = (v_x\mathbf{i}_x + v_y\mathbf{i}_y + 0\ \mathbf{i}_z) \times (B_x\mathbf{i}_x + B_y\mathbf{i}_y + B_z\mathbf{i}_z)\end{aligned} \qquad (19.2.9)$$

notando que $v_z = 0$. Evaluando el producto vectorial e igualando las componentes x, y y z de los vectores en ambos miembros de la ecuación resultante, es evidente que

$$\frac{F_x}{q} = v_yB_z \qquad (19.2.10)$$

$$\frac{F_y}{q} = -v_xB_z \qquad (19.2.11)$$

$$\frac{F_z}{q} = v_xB_y - v_yB_x \qquad (19.2.12)$$

Ahora se conocen v_x, v_y, F_x, F_y, F_z y q, por lo que puede obtenerse B_z de (19.2.10) o de (19.2.11). Por otra parte, sólo se tiene una ecuación para B_y y B_x, la ecuación (19.2.12), de manera que no se puede utilizar para obtener las dos magnitudes. Esta es una consecuencia del hecho de que hay *distintos* campos posibles **B** que pueden originar la *misma* fuerza magnética sobre una carga con velocidad dada. Por tanto, para determinar en forma unívoca a B_x y B_y, se necesita un segundo conjunto de datos en los que se midan las componentes de fuerza con alguna otra velocidad conocida; por esa razón en el enunciado del problema se especifica la fuerza $\mathbf{F}'$ que resulta cuando la velocidad de la carga es $\mathbf{v}'$. De (19.2.6), $\mathbf{F}'$ debe estar relacionada con $\mathbf{v}'$ mediante $\mathbf{F}'/q = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}$, en que el campo magnético es el mismo en ambos casos. De nuevo se pueden escribir las componentes, como en

(19.2.9), evaluar el producto vectorial e igualar las componentes x, y y z para tener

$$\frac{F_x'}{q} = v_y' B_z \qquad (19.2.13)$$

$$\frac{F_y'}{q} = -v_x' B_z \qquad (19.2.14)$$

$$\frac{F_z'}{q} = v_x' B_y - v_y' B_x \qquad (19.2.15)$$

Asimismo es posible obtener B_z de (19.2.13) o de (19.2.14); ahora hay no menos de *cuatro* maneras de evaluar esta componente. ¡Por fortuna, todas concuerdan! Por ejemplo, de (19.2.10) se obtiene

$$B_z = \frac{F_x}{qv_y} = \frac{37.5 \times 10^{-8}}{(3.00 \times 10^{-8})(50)} = 0.25 \text{ N/ A} \cdot \text{m}$$

Ahora (19.2.12) y (19.2.15) dan dos ecuaciones independientes de las que se puede obtener B_x y B_y; utilizando los valores dados para las componentes de la fuerza y de la velocidad, resulta

$$20B_y - 50B_x = -20$$
$$-10B_y - 30B_x = -12$$

Multiplicando la ecuación de abajo por 2 y sumándola a la de arriba, se encuentra que $B_x = 0.4$ N/A · m. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se obtiene que $B_y = 0$. Es evidente que el vector **B** está en el plano xz. Su magnitud es

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \sqrt{(0.4)^2 + (0.25)^2}$$
$$= 0.472 \text{ N/ A} \cdot \text{m}$$

La tangente del ángulo θ entre **B** y el eje z está dada por

$$\tan\theta = \frac{B_x}{B_z} = \frac{0.4}{0.25} = 1.6$$

de donde $\theta = 58.0°$.

EJEMPLO 19.2.3

Se introduce un protón en una región donde hay un campo magnético constante en la dirección z; esa partícula tiene un vector velocidad inicial que está en el plano xy y es de magnitud 5.00×10^6 m/s. Se encuentra que se mueve en una órbita circular de 12.5 cm de radio en el plano xy. Explicar por qué el protón sigue una trayectoria circular, evaluar su velocidad angular y determinar la magnitud del campo magnético **B** a partir de los datos.

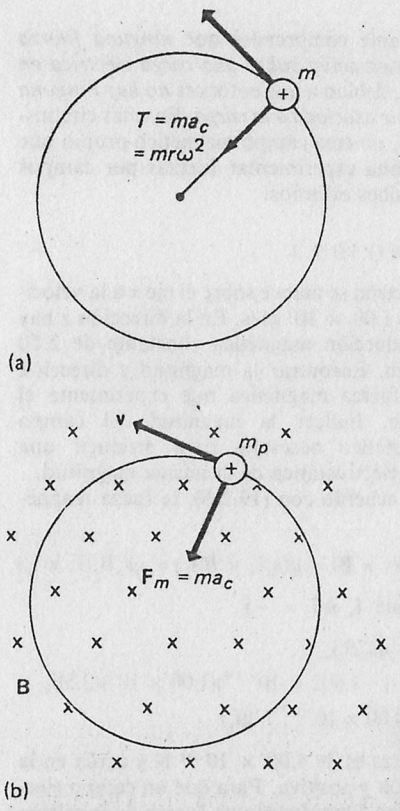


FIGURA 19.11. Esquema que ilustra la acción de la fuerza magnética como fuerza centrípeta, en el caso de una partícula cargada que se mueve con velocidad constante en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme.

En el campo magnético constante, el protón experimenta una fuerza magnética de magnitud también constante que siempre está en dirección perpendicular a la del movimiento, por lo que tiene todas las características físicas de una fuerza *centrípeta*, y es semejante en todo sentido a la tensión en una cuerda que mantiene a un objeto giratorio en movimiento circular uniforme. El caso se ilustra en la figura 19.11. Puesto que la fuerza $\mathbf{F}_m$ es perpendicular tanto a **B** como a **v**, debe producir la aceleración centrípeta $r\omega^2$. De esta manera se obtiene

$$q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = qvB = mr\omega^2 \qquad (19.2.16)$$

Pero v y ω están relacionados por la expresión $v = r\omega$. Sustituyendo el valor $r\omega$ por v en (19.2.16) y despejando

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \qquad (19.2.17)$$

Como se conocen v y r,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{5.00 \times 10^6}{12.5} = 4 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo esto junto con la carga $q = 1.602 \times 10^{-19}$ C y la masa del protón $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg en (19.2.17), se puede despejar B, obteniendo un valor de 0.00417 N/A · m.

19.3 Flujo magnético y ley de Gauss para el campo magnético

Del Capítulo 16 se recordará que se definió el *flujo eléctrico* a través de una superficie como la integral de la componente de **E** normal a la superficie, sobre un área dada. En analogía exacta con lo anterior, se definirá el *flujo magnético* Φ_m a través de una superficie dada S como la integral de la componente de **B** normal a la superficie, sobre el área especificada. Para una superficie como la que se muestra en la figura 19.12, en el punto P hay un pequeño elemento de área da y en ese punto puede trazarse un vector **n** de magnitud unitaria normal al citado elemento de área. Por lo general, la inducción magnética **B** no será constante ni en magnitud ni en dirección sobre toda la superficie, sino que el vector **B** que determina el valor local del campo magnético en el punto P será como se muestra en la figura 19.12. La componente de **B** perpendicular a la superficie en este punto, es simplemente la componente

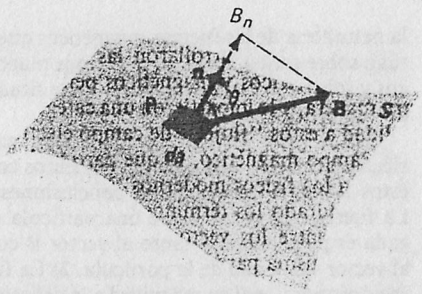


FIGURA 19.12. Cantidades vectoriales que intervienen en la definición de flujo magnético.

de **B** en la dirección del vector normal **n**, que es $B \cos\theta$. Pero como **n** es de magnitud unitaria, el producto escalar **B** · **n** también tiene el valor $B \cos\theta$ y se puede expresar la componente de **B** normal a la superficie como

$$B_n = B\cos\theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \qquad (19.3.1)$$

El elemento de flujo magnético a través del área da se define como la componente de la inducción magnética normal a la superficie por el área da, es decir,

$$d\Phi_m = B_n\, da = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da \qquad (19.3.2)$$

Esto indica que el flujo magnético a través de da es la componente de la inducción B_n, normal a la superficie, por el área da. El lector notará la analogía precisa entre esta definición del flujo magnético y la relación entre la corriente y la densidad de corriente descrita en el capítulo 18 como la ecuación (18.2.9). Ahí, la corriente dI que pasa a través del elemento de área da era la componente normal de la densidad de corriente **j** multiplicada por da; por lo tanto, $dI = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, da$. Aquí, la idea es la misma (e igual en el caso del flujo eléctrico que se estudió en el Capítulo 16). Es natural la idea del flujo de carga relacionado con un vector de intensidad superficial de corriente **j**. En el caso del campo magnético, parece forzada la analogía de un "flujo" semejante, relacionado de la misma manera con un vector de intensidad superficial de campo **B**, en el sentido de que se trata de una fluencia física de materia o de energía que constituya lo que de ordinario

se conoce como flujo. Empero, los científicos del siglo XIX que desarrollaron las ideas de los campos eléctricos y magnéticos pensaban de otra manera, y le impartieron una categoría de realidad a estos "flujos" de campo eléctrico y de campo magnético, lo que parece algo superfluo a los físicos modernos. No obstante, han perdurado los términos, y la relación matemática entre los vectores de flujo y de campo es la misma para los campos eléctricos y magnéticos que para el flujo de carga, por lo que se siguen utilizando los términos aunque se comprende que su interpretación literal en el caso de los flujos eléctrico y magnético es engañosa. En el siguiente capítulo se verá que el concepto de flujo magnético es muy importante para estudiar las FEMs inducidas en circuitos eléctricos por campos magnéticos variables.

En todo caso, la ecuación (19.3.2) describe el elemento de flujo $d\Phi_m$ asociado a un elemento de área da. Para evaluar el flujo magnético total Φ_m que pasa por toda la superficie S en la figura 19.12, basta con integrar sobre todos los elementos de área que constituyen a S. De esta manera puede expresarse el flujo magnético como la *integral de la componente de* **B** *normal a S en cada punto, sobre toda la superficie*, o sea

$$\boxed{\Phi_m = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da} \qquad (19.3.3)$$

En general, evaluar esta integral puede ser una tarea tardada y difícil. Pero el trabajo es mucho más fácil si la inducción magnética **B** es *de magnitud* y *dirección constantes* en todos los puntos y si es *plana* la superficie S a través de la cual se calcula el flujo, de manera que el vector normal **n** también sea constante en todos los puntos. En estas circunstancias la cantidad $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$ es la misma para todos los elementos de área de S, por lo que puede escribirse fuera de la integral:

$$\Phi_m = \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\int_S da \qquad (19.3.4)$$

o bien,

$$\boxed{\Phi_m = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})A = BA\cos\theta} \qquad (19.3.5)$$

en que A denota el área total de la superficie S. Si además la dirección de **B** es normal a la superficie, el ángulo θ entre **B** y el vector normal **n** es cero, y (19.3.5) queda como

$$\boxed{\Phi_m = BA} \qquad (19.3.6)$$

La unidad de flujo magnético corresponde a las de la inducción magnética multiplicada por el área, que se puede escribir como newton-metro/ampere, o bien joule/ampere. Esta unidad SI del flujo magnético se conoce normalmente como *weber* (símbolo: Wb), en honor del físico alemán Wilhelm Weber (1804-1891). De hecho, es más frecuente que la unidad de la inducción magnética se expresa como Wb/m² que como N/A · m, que es como se ha llamado aquí hasta este momento. Por tanto, en adelante se seguirá la costumbre y se utilizará la unidad Wb/m² para B.* También es común referirse a la inducción magnética **B** como *densidad de flujo magnético*, en vista de que puede considerarse como flujo por unidad de área. El lector debe percatarse de esta terminología, aunque no se adoptará aquí.

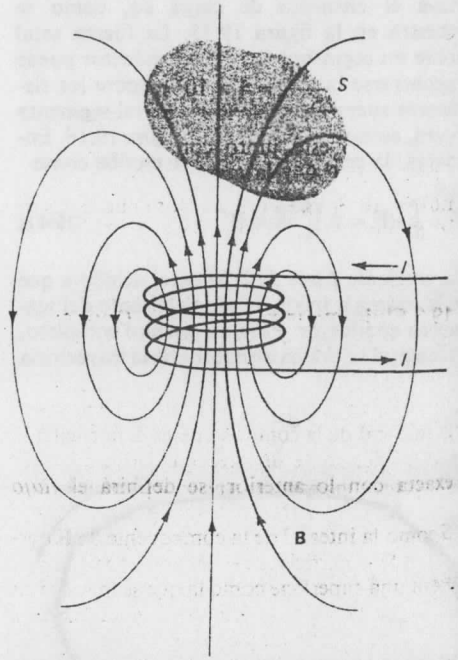


FIGURA 19.13. Las líneas de fuerza magnética no comienzan o terminan en cargas libres, puesto que no existen las cargas magnéticas. Por tanto, deben cerrarse sobre sí mismas, formando trayectorias cerradas, como se ilustra. En este caso, toda línea de flujo que entre a una superficie cerrada deberá también salir de ella, lo que conduce a la ley de Gauss para el magnetismo, dada por la ecuación (19.3.8).

Antes se mencionó que las fuerzas magnéticas entre los polos de imanes de barra largos y delgados (en que son despreciables los efectos de los polos en extremos opuestos) obedecen a la ley de Coulomb en el sentido de que decrecen inversamente con el cuadrado de la distancia entre los mismos. En la sección 19.5 se verá expresada esta ley con mayor precisión. De lo anterior, se recordará que precisamente esta dependencia de la intensidad del campo sobre la distancia es lo que permite demostrar la ley de Gauss para los campos eléctricos. Como las "cargas magnéticas" que pueden considerarse como fuentes de los dipolos magnéticos dan lugar a campos magnéticos de variación inversa al cuadrado de la distancia, se puede demostrar la ley de Gauss para el magnetismo, en forma temporal, imaginando que el campo magnético (para fines de la demostración) se origina en la "carga magnética". La demostración se realiza de la misma manera que para el campo eléctrico. El resultado es

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = 4\pi k q_m \qquad (19.3.7)$$

La integral del flujo magnético se (evalúa) sobre *cualquier superficie cerrada S* y la cantidad q_m designa la "carga magnética total" *encerrada por esta* "superficie gaussiana." La constante k de proporcionalidad en la expresión de la ley de Coulomb relaciona el campo B con la "carga magnética" q_m y la distancia, es decir $B = k(q_m/r^2)$.

Desde luego, realmente no existe la "carga magnética". La única causa de los campos magnéticos son las corrientes eléctricas y *los campos magnéticos son invariablemente de carácter dipolar*, lo que corresponde a cero carga magnética, equivalente total. Por tanto, la cantidad q_m en el segundo miembro de la ecuación (19.3.7) *siempre debe ser cero*, y para toda configuración de campo magnético lograble, la ley de Gauss para el campo magnético debe ser

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = 0} \qquad (19.3.8)$$

en que S es *cualquier superficie cerrada*.

Geométricamente se puede comprender el significado de este resultado recordando que las líneas electrostáticas de fuerza siempre emanan de, o terminan en, cargas eléctricas. Empero, ya que no hay cargas magnéticas, las líneas de inducción magnética no pueden comenzar o terminar en cualquier parte, sino que deben formar *líneas cerradas*, como se muestra en la figura 19.13. En el caso de un imán permanente, como se ilustra en la figura 19.5, las líneas se cierran *dentro* del propio imán. El requisito de que el segundo miembro de (19.3.8) sea cero, se satisface entonces en la medida de que todas las líneas de campo que entran a cualquier superficie cerrada como S, también deben salir de esa superficie por alguna parte; ninguna línea puede comenzar o terminar dentro de la superficie.

EJEMPLO 19.3.1

Encontrar el flujo magnético a través de una espira circular de 30 cm de diámetro cuya normal forma un ángulo de 30° con una inducción magnética constante de 0.8 Wb/m², como se ilustra en la figura 19.14. Determinar el flujo si el plano de la espira es perpendicular al campo magnético.

En este caso debe determinarse el flujo a través de un área circular plana de 30 cm de diámetro. La magnitud y dirección de la inducción magnética **B** es constante y el ángulo entre los vectores **B** y **n** es de 30°. Por tanto, puede utilizarse la expresión simple (19.3.5) para clacular el flujo:

$$\Phi_m = BA\cos\theta = (0.8)(\pi)(0.15)^2(0.866)$$
$$= 0.0490\ \text{Wb}$$

* N. del S. La denominación actual para esta unidad del SI es *tesla* (símbolo: T).

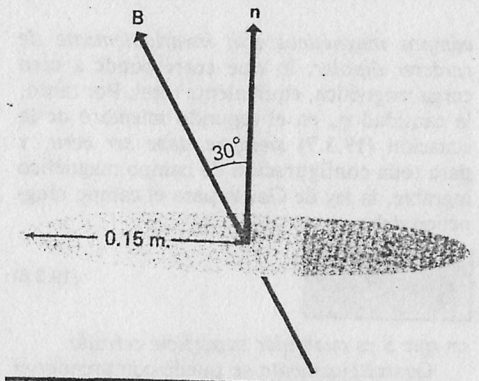


FIGURA 19.14

Si el campo es perpendicular al plano de la espira, el ángulo θ es cero, $\cos\theta = 1$ y

$$\Phi_m = BA = (0.8)(\pi)(0.15)^2 = 0.0565 \text{ Wb}$$

19.4 Fuerzas sobre corrientes y momentos de rotación en dipolos magnéticos

Ahora que se conoce la fuerza que actúa sobre una carga móvil en un campo magnético producido exteriormente, no es difícil calcular la fuerza magnética sobre un conductor portador de corriente en un campo externo, puesto que tal conductor es en efecto un conducto de cargas móviles. Una vez logrado lo anterior, es relativamente fácil evaluar las fuerzas y momentos de rotación sobre espiras conductoras

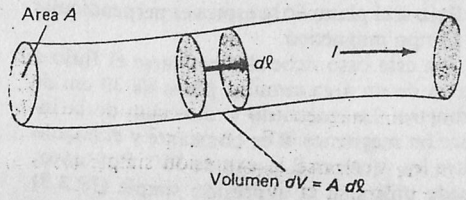


FIGURA 19.15. Paso de una corriente constante por un conductor de sección transversal uniforme.

de corriente y calcular la intensidad del momento dipolar de una espira que lleva corriente.

Primero se considerará el caso de un conductor de sección transversal uniforme A que lleva una corriente constante I, como se muestra en la figura 19.15. La carga dentro del conductor se mueve con la velocidad $\mathbf{v}$ y en el tiempo dt describe un volumen $dV = A\,dl$, como se muestra en el diagrama. El desplazamiento de la carga es $d\mathbf{l}$, vector que apunta en la dirección de conducción en tal punto. Por la definición de la velocidad instantánea, se puede escribir la velocidad $\mathbf{v}$ con que fluye la carga por el conductor como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \tag{19.4.1}$$

De las ecuaciones (19.2.6) y (19.4.1), el elemento de fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre el elemento de carga dq es

$$d\mathbf{F} = dq\,\frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} \tag{19.4.2}$$

Pero si se denota la densidad de carga por unidad de volumen como ρ,

$$dq = \rho\,dV = \rho A\,dl \tag{19.4.3}$$

Sustituyendo esto en (19.4.2), entonces puede encontrarse que

$$d\mathbf{F} = \rho A\,\frac{dl}{dt}\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{19.4.4}$$

Por (19.4.1) se ve que dl/dt es simplemente la magnitud de la velocidad v. Más aún, como la densidad de carga multiplicada por la velocidad representa la densidad de corriente, y como la densidad de corriente multiplicada por el área es la corriente total I, se puede sustituir $\rho A\,(dl/dt)$ en (19.4.4) por I, obteniéndose el resultado final

$$\boxed{d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})} \tag{19.4.5}$$

Esta ecuación da el elemento de fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre el elemento de carga dq dentro de un segmento de conductor con longitud $d\mathbf{l}$. El vector $d\mathbf{l}$ en esta ecuación es un

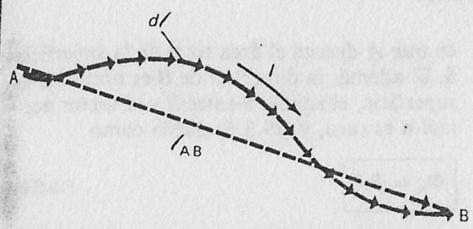


FIGURA 19.16. El vector $\mathbf{l}_{AB}$ entre dos puntos dados de un circuito corresponde a la suma de elementos infinitesimales elementos $d\mathbf{l}$ situados a lo largo de la trayectoria real de la corriente.

vector de longitud dl ($= v\,dt$) que apunta en la dirección del conductor en la región donde fluye el elemento de carga dq, como se muestra en la figura 19.15. La fuerza total sobre un segmento finito de conductor puede encontrarse integrando (19.4.5) sobre los elementos sucesivos $d\mathbf{l}$ que definen tal segmento finito, como se muestra en la figura 19.16. Entonces, la ecuación (19.4.5) se escribe como

$$\mathbf{F} = \int_c d\mathbf{F} = I\int_A^B d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{19.4.6}$$

La corriente I sale de la integral debido a que es la misma a través de cada elemento del segmento conductor. Para un circuito completo, la integral se evalúa alrededor de la trayectoria

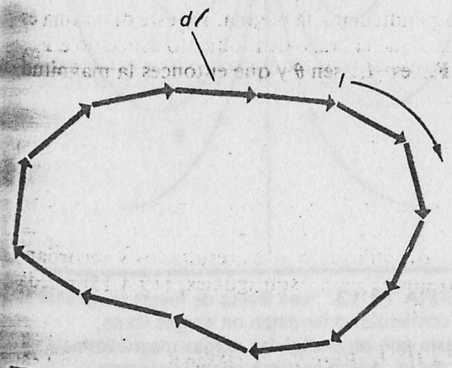


FIGURA 19.17. La suma vectorial de elementos infinitesimales tomados alrededor de un circuito cerrado vale cero, según las leyes de la adición vectorial.

cerrada formada por el conductor, y ahora la integral se escribe como

$$\boxed{\mathbf{F} = I\oint_c d\mathbf{l} \times \mathbf{B}} \tag{19.4.7}$$

Hay dos casos especiales que merecen énfasis especial. En ambos, el campo magnético producido exteriormente es de magnitud y dirección *uniformes* en todas las partes del conductor. Si asi sucede, entonces también se puede escribir $\mathbf{B}$ fuera de la integral como una constante y (19.4.6) queda

$$\mathbf{F} = \left[I\int_A^B d\mathbf{l}\right] \times \mathbf{B} \tag{19.4.8}$$

La integral anterior dentro de los corchetes representa simplemente la *suma vectorial* de todos los pequeños vectores $d\mathbf{l}$ que se muestran en la figura 19.16, y de acuerdo con la interpretación geométrica de la adición vectorial, es precisamente el vector $\mathbf{l}_{AB}$, cuyo origen está en A y cuya punta está en B. En este caso, se puede escribir (19.4.8) como

$$\boxed{\mathbf{F} = I(\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B})} \tag{19.4.9}$$

El segundo caso especial es aquél en que $\mathbf{B}$ nuevamente es uniforme y en que la trayectoria de la corriente es una espira cerrada. Los elementos $d\mathbf{l}$ forman un *polígono cerrado* como se ilustra en la figura 19.17 y la suma vectorial es cero, de acuerdo con el método del polígono para la adición vectorial. La integral de (19.4.8) se anula, y el resultado queda ahora como

$$F = 0 \quad \text{espira cerrada, } \mathbf{B} \text{ constante} \tag{19.4.10}$$

En este caso, es importante notar que aunque se reduzca a cero la *fuerza* resultante sobre una espira con corriente, de todas maneras el campo magnético puede dar lugar a un *momento de rotación* neto sobre la espira, como se verá después o más adelante.

Considérese la espira que se indica en la figura 19.18. Como se presenta en este ejemplo, hay una corriente I que fluye en una espira rectangular plana ABCD. La pieza conductora está en una región donde hay un campo

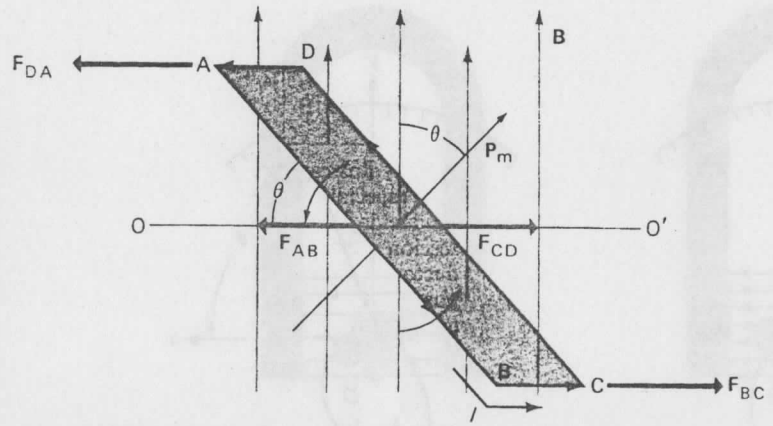


FIGURA 19.18. Espira rectangular que conduce una corriente constante en un campo magnético. El plano de la espira se ha representado como casi normal a la página de modo que su lado AB está más cerca del lector que el CD.

magnético constante **B**, dirigido verticalmente hacia arriba. La espira puede girar con libertad alrededor del eje 00′, que debe ser perpendicular al plano de la página. En el diagrama, se ve que el plano de la espira forma un ángulo θ con el plano normal a la inducción magnética **B**. Puesto que la corriente fluye en un circuito cerrado, la fuerza resultante sobre la espira debe ser cero, de acuerdo con (19.4.10). Pero las fuerzas sobre los cuatro lados del rectángulo pueden calcularse por separado según (19.4.9), o sea,

$$\mathbf{F}_{AB} = I(\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B}) \qquad (19.4.11)$$

$$\mathbf{F}_{BC} = I(\mathbf{l}_{BC} \times \mathbf{B}) \qquad (19.4.12)$$

$$\mathbf{F}_{CD} = I(\mathbf{l}_{CD} \times \mathbf{B}) \qquad (19.4.13)$$

$$\mathbf{F}_{DA} = I(\mathbf{l}_{DA} \times \mathbf{B}) \qquad (19.4.14)$$

donde el vector $\mathbf{l}_{AB}$ se extiende en la dirección del lado que va de A a B, $\mathbf{l}_{BC}$ va desde B hasta C, etc. Por las reglas para la multiplicación vectorial, es evidente que las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ $\mathbf{F}_{CD}$ son de igual magnitud ($l_{AB} = l_{CD}$, ya que la espira es rectangular) y de dirección opuesta, estando sus líneas de acción sobre el eje 00′. Es claro que estas fuerzas no dan lugar a un momento neto de rotación. Las fuerzas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{DA}$ son de igual magnitud, pues $l_{BC} = l_{DA}$, y también de dirección opuesta. Pero debido a que el plano de la espira está inclinado formando un ángulo θ con la vertical, las líneas de acción de estas dos fuerzas no coinciden y dan lugar entonces a un momento de rotación alrededor de 00′, como se representa, que tiende a hacer girar la espira hasta que su plano sea normal al campo **B**. Estas fuerzas se muestran en forma más clara en la figura 19.19, donde se indica el eje 00′ exactamente perpendicular a la página. De este diagrama es claro que el brazo de momento asociado a $\mathbf{F}_{DA}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ es l_{AB} sen θ y que entonces la magnitud del momento de rotación τ será

$\tau_1 = Fd = F\,\tfrac{1}{2}l_{AB}\,\text{sen}\,\theta$ $\quad \tau = \tau_1 + \tau_2$

$\tau_2 = Fd = F\,\tfrac{1}{2}l_{AB}\,\text{sen}\,\theta$ $\quad d$ = brazo de palanca

$$\tau = \tfrac{1}{2}F_{DA}l_{AB}\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{1}{2}F_{BC}l_{AB}\,\text{sen}\,\theta \qquad (19.4.15)$$

Pero como $\mathbf{l}_{DA}$ y $\mathbf{l}_{BC}$ son perpendiculares a **B**, por (19.4.12) y (19.4.14), $F_{DA} = Il_{DA}B$ y $F_{BC} = Il_{BC}B$. Utilizando estos resultados y recordando que l_{DA} y l_{BC} son iguales, (19.4.15) queda como sigue:

$$\tau = Il_{BC}l_{AB}B\,\text{sen}\,\theta = IAB\,\text{sen}\,\theta \qquad (19.4.16)$$

en que A es el *área* de la espira. La dirección del *vector* momento rotacional τ es vertical y hacia afuera de la página en la figura 19.19

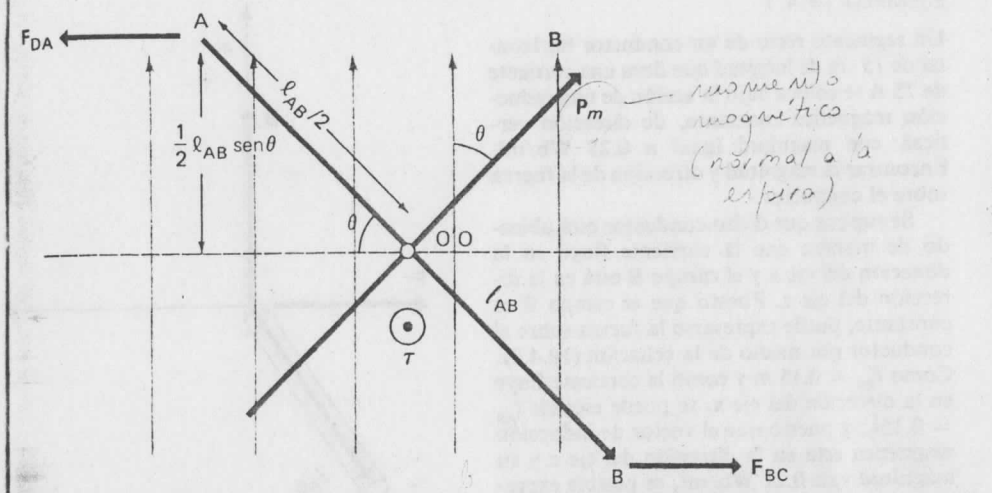


FIGURA 19.19. Otra vista de la espira rectangular de la figura 19.18, en la que los lados AD y BC y la recta 00′ son normales a la página.

Este resultado puede expresarse de manera más simple definiendo el vector $\mathbf{p}_m$ como *un vector normal a la espira y cuya magnitud está dada por IA*, es decir, el producto de la corriente por el área de la espira. Si se hace esto, entonces es evidente de inmediato que el vector momento τ puede expresarse como

$$\boxed{\tau = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}} \qquad (19.4.17)$$

porque entonces la magnitud de τ será la dada por (19.4.16) y su dirección será verticalmente hacia arriba, saliendo de la página, en la figura 19.19.

Es fácil ver que las ecuaciones (19.4.17) y (19.2.3) son idénticas, lo que sólo significa que la ley de la fuerza magnética de Lorentz (19.2.6) y la ecuación (19.4.5), que se sigue directamente de la anterior, llevan a la conclusión de que el momento de rotación sobre una espira con corriente en un campo magnético, es justamente igual al que se esperaría que actuara sobre un *dipolo magnético* en un campo magnético; lo anterior concuerda con lo que se observa físicamente en espiras con corriente y otros electroimanes cuando se colocan en campos magnéticos producidos exteriormente, y se puede considerar como una de las verificaciones experimentales importantes de la ley de Lorentz. Más aún, se encuentra que la *magnitud* del momento dipolar magnético IA que se obtiene de la citada ley de Lorentz predice con exactitud la magnitud de los momentos de rotación que se observan en espiras individuales y en electroimanes de solenoide en campos magnéticos. De hecho, se encuentra que las espiras con corriente se comportan en todos sentidos como dipolos magnéticos; más adelante se verá que los campos magnéticos que generan son dipolares.

Los resultados anteriores se obtuvieron rigurosamente sólo para espiras rectangulares con corriente, pero son correctos sin importar la forma que tenga la espira conductora, siempre que el momento dipolar se exprese como el producto de la corriente en la espira por su área. Al relacionar la dirección del momento dipolar magnético asociado a una espira, es útil recordar la regla de que si la mano derecha se coloca de manera que los dedos se encorven en el sentido del flujo de corriente en la espira, el pulgar extendido apuntará en la dirección del vector momento magnético $\mathbf{p}_m$ asociado a la corriente, lo que se ve en las figuras 19.18 y 19.19, pero se ilustra con mayor claridad en la 19.20

EJEMPLO 19.4.1

Un segmento recto de un conductor horizontal de 15 cm de longitud que lleva una corriente de 75 A se coloca bajo la acción de una inducción magnética constante, de dirección vertical, con magnitud igual a 0.25 Wb/m². Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza sobre el conductor.

Se supone que dicho conductor está ubicado de manera que la corriente fluye en la dirección del eje x y el campo **B** está en la dirección del eje z. Puesto que el campo **B** es constante, puede expresarse la fuerza sobre el conductor por medio de la ecuación (19.4.9). Como $l_{AB} = 0.15$ m y como la corriente fluye en la dirección del eje x, se puede escribir $\mathbf{l}_{AB} = 0.15\mathbf{i}_x$; y puesto que el vector de inducción magnética está en la dirección del eje z y su magnitud vale 0.25 Wb/m², es posible expresar como $\mathbf{B} = 0.25\mathbf{i}_z$. Entonces, la ecuación (19.4.9) da

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B}) = (75)(0.15\mathbf{i}_x \times 0.25\mathbf{i}_z)$$
$$= (75)(0.15)(0.25)(\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_z) = 2.81(-\mathbf{i}_y)$$

En consecuencia, la fuerza es de 2.81 N en la dirección del eje y negativo, como se muestra en la figura 19.21. De otra manera, se observa que la magnitud de **F** está dada por

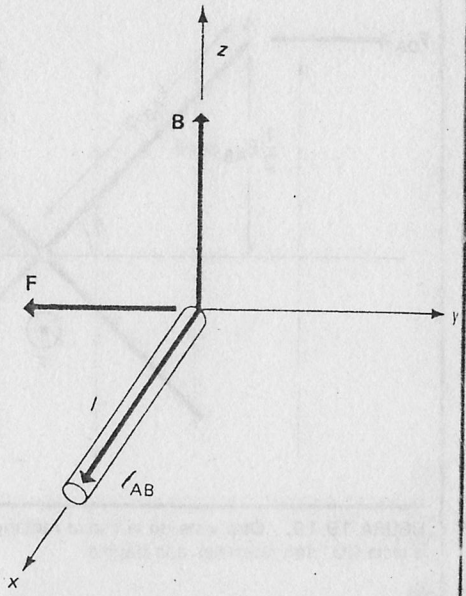


FIGURA 19.21

$$F = Il_{AB}B \operatorname{sen} \theta = (75)(0.15)(0.25)(1) = 2.81 \text{ N}$$

ya que el ángulo θ entre $\mathbf{l}_{AB}$ y **B** es de 90°, y el vector fuerza **F** debe estar en la dirección que se indica en la figura 19.21, como consecuencia de la definición del producto vectorial.

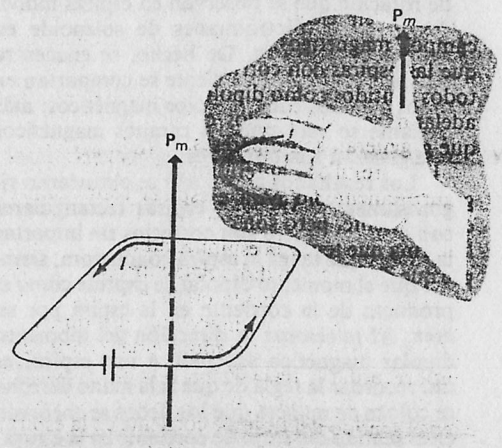


FIGURA 19.20. "Regla de la mano derecha" para la dirección del momento dipolar (y el campo magnético axial) de una espira conductora de corriente

EJEMPLO 19.4.2

En la figura 19.22 se muestra el esquema de un *galvanómetro de d'Arsonval*, que comúnmente se utiliza como un instrumento para la medición precisa de corriente. Una bobina que consiste en varios cientos de vueltas de alambre muy delgado puede girar en un campo magnético uniforme generado por un imán permanente. La rotación de la bobina está restringida por un resorte espiral muy delgado, de manera que cuando la corriente fluye por la bobina, experimenta un momento rotacional por acción del campo magnético, y gira hasta que es contrarrestado el momento anterior por un momento igual y opuesto de restauración debido al muelle, y nuevamente se logra el equilibrio. En este nuevo estado de cosas, la bobina y su índice o aguja indicadora han girado un ángulo ϕ, que está relacionado con la corriente que pasa por la bobina. Encontrar la relación general entre el ángulo ϕ y la corriente, suponiendo que el momento restaurador del resorte espiral es directamente proporcional a ϕ. En el caso de un imán que produce un campo uniforme de 0.25 Wb/m², una bobina rectangular de 3 cm de longitud y 2 cm de ancho, con 300 vueltas de alambre y un resorte con una constante de torsión de 1.60×10^{-7} N · m/rad, ¿qué corriente debe circular en la bobina para producir una deflexión de 30°?

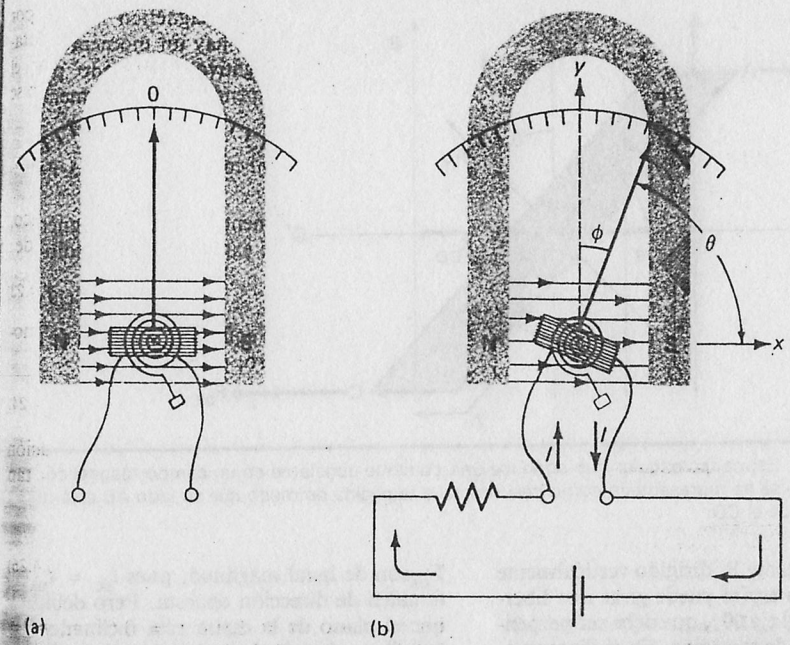


FIGURA 19.22. Galvanómetro de d'Arsonval.

De acuerdo con (19.4.16), el momento de rotación sobre una sola espira con corriente es IAB sen θ, en que θ es el ángulo entre la normal al plano de la espira y la dirección de **B**. En este caso, el ángulo θ es igual a $90° - \phi$, como se indica en la figura 19.22, b. Además, puesto que hay muchas vueltas de alambre en la bobina, efectivamente hay N espiras con corriente, siendo N el número de vueltas. Como los momentos de rotación de cada espira son aditivos, el momento rotacional sobre la bobina será N veces el momento sobre una sola espira; por tanto, de acuerdo con (19.4.16), el momento de rotación sobre una bobina de este tipo será

$$\tau = NIAB \operatorname{sen}(90° - \phi) = NIAB \cos \phi \quad (19.4.18)$$

El resorte ejercerá un momento de restauración negativo τ_r sobre la bobina. Suponiendo que el resorte es ideal, este momento estará dado por

$$\tau_r = -k'\phi \quad (19.4.19)$$

en que k' es la constante de torsión, que expresa el momento necesario para producir un desplazamiento angular unitario. Se logra el equilibrio y la aguja queda en reposo cuando el momento resultante (igual a la suma de

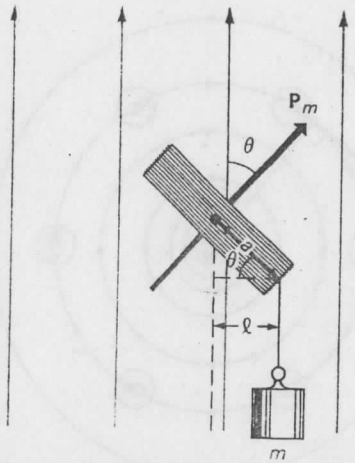


FIGURA 19.23

los momentos anteriores) es cero. En estas circunstancias,

$$\sum \tau = NIAB \cos \phi - k'\phi = 0 \qquad (19.4.20)$$

Despejando la corriente de esta ecuación, se obtiene

$$I = \frac{k\phi}{NAB \cos \phi} \qquad (19.4.21)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos dados en el enunciado del problema, resulta $I = 2.15 \times 10^{-6}$ A.

EJEMPLO 19.4.3

Supóngase que la bobina descrita en el ejemplo anterior está montada para que gire libremente alrededor de un eje horizontal en un campo magnético vertical constante de 1.5 Wb/m². En este ejemplo no se tiene una restricción mediante un resorte, sino que se cuelga una masa de 1 g en uno de los lados de la bobina, como se muestra en la figura 19.23. Encontrar el ángulo θ entre el vector $\mathbf{p}_m$, normal al plano de la bobina, y el campo magnético, cuando fluye una corriente de $I = 2 \times 10^{-4}$ A por la bobina.

Nuevamente el problema comprende el equilibrio de momentos. Otra vez interviene el momento de origen magnético dado por (19.4.16), pero ahora hay un momento rotacional de signo negativo provocado por el peso de la masa suspendida. Este momento se puede expresar así:

$$\tau_m = -mgl = -mga \cos \theta \qquad (19.4.22)$$

en tanto que el momento de fuerza magnético, de (19.4.16), puede expresarse por medio de

$$\tau = NIAB \operatorname{sen} \theta \qquad (19.4.23)$$

Si el sistema está en equilibrio, la suma de momentos debe ser cero; por tanto,

$$\sum \tau = NIAB \operatorname{sen} \theta - mga \cos \theta = 0 \qquad (19.4.24)$$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre $\cos \theta$, observando que $\operatorname{sen} \theta / \cos \theta = \tan \theta$ y despejando $\tan \theta$ resulta que

$$\tan \theta = \frac{mga}{NIAB} \qquad (19.4.25)$$

En este caso, $a = 1.0$ cm $= 0.01$ m, $m = 0.001$ kg, $N = 300$, $I = 2 \times 10^{-4}$ A, $A = 0.0006$ m², $B = 1.5$ Wb/m². Sustituyendo estos valores en (19.4.25), se obtiene $\tan \theta = 1.815$, $\theta = 61.1°$.

19.5 Campo magnético de un conductor que lleva corriente: ley de Biot y Savart

Hasta ahora se ha centrado la atención en la descripción de fuerzas sobre cargas y corrientes ubicadas en campos magnéticos producidos exteriormente. En este proceso no se tomó en cuenta el campo magnético propio producido por las corrientes o las cargas móviles, por lo que no se atacó el problema de describir y explicar los resultados de los experimentos de Oersted. El avance fue orientado por la necesidad de definir y comprender el vector inducción magnético **B**. Después de lograr este objetivo, ahora conviene volver a los experimentos de Oersted y describir el campo magnético producido por una corriente constante sobre un conductor uniforme.

En el estudio de la electrostática se observó que la ley de Coulomb que describe el campo

eléctrico de cargas puntuales, era sencillamente la manera como podía resumirse mejor las observaciones *experimentales* relativas a las fuerzas electrostáticas sobre cuerpos cargados. El caso es igual con relación a los campos magnéticos producidos por corrientes constantes. No hay manera de deducir una expresión para estos campos; lo único que puede hacerse es observar experimentalmente las fuerzas magnéticas creadas por las corrientes reales, y luego tratar de encontrar una expresión matemática para el campo magnético que concuerde con los resultados de todas las observaciones. De esta manera se llegó precisamente a la *ley de Biot y Savart*, que evalúa el campo magnético creado por el flujo de corriente en un conductor. Dicha ley expresa que el elemento de inducción magnética $d\mathbf{B}$ asociado a una corriente I en un segmento de conductor descrito por el vector $d\mathbf{l}$ cumple las siguientes condiciones:

1. Está en dirección perpendicular tanto a $d\mathbf{l}$ como al, vector de posición **r** desde el segmento de conductor hasta el punto P, donde se mide el campo, como se ilustra en la figura 19.24;
2. Es directamente proporcional a la longitud dl del segmento y a la corriente I que conduce;
3. Es directamente proporcional en magnitud al cuadrado de la distancia r entre el elemento de corriente y el punto P;
4. Es proporcional al seno del ángulo θ entre los vectores $d\mathbf{l}$ y **r**.

En forma matemática, esta ley queda como

$$d\mathbf{B} = \text{const} \cdot \frac{I}{r^2} d\mathbf{l} \times \mathbf{i}_r \qquad (19.5.1)$$

en que $\mathbf{i}_r$ es un vector *unitario* en la dirección del vector **r** de la figura 19.24. Es evidente que la ecuación (19.5.1) comprende todos los resultados expresados antes, ya que indica que $d\mathbf{B}$ es perpendicular tanto a $d\mathbf{l}$ como **r** y que su magnitud es proporcional a $I\,dl \operatorname{sen} \theta / r^2$, precisamente lo observado. Antes se hizo referencia al hecho de que las fuerzas magnéticas presentan una dependencia en razón inversa al

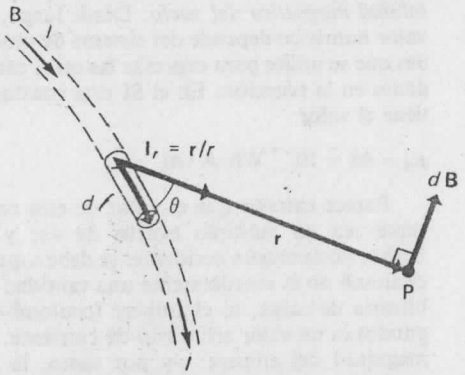


FIGURA 19.24. Campo magnético de magnitud $d\mathbf{B}$ producido en un punto P por un elemento de corriente $d\mathbf{l}$ en un conductor por el que circula una corriente constante I de acuerdo con la ley de Biot y Savart.

cuadrado de la distancia, como las fuerzas de Coulomb entre cargas eléctricas. Claramente, (19.5.1) indica lo anterior. Por lo general, la constante de proporcionalidad en la ecuación (19.5.1) se expresa como $\mu_0/4\pi$, por razones parecidas a las expresadas para escribir la constante de proporcionalidad en la ley de Coulomb para campos eléctricos como $1/4\pi\varepsilon_0$. Escribiendo la constante de proporcionalidad de esta manera, (19.5.1) queda

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{i}_r}{r^2} \qquad (19.5.2)$$

Ya que puede obtenerse el vector unitario $\mathbf{i}_r$ en la dirección de **r** tomando este vector (la magnitud r) y dividiéndolo entre su propia magnitud, se puede escribir

$$\mathbf{i}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (19.5.3)$$

Entonces, la ecuación (19.5.2) es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \qquad (19.5.4)$$

La constante μ_0 es una medida fundamental de la intensidad del magnetismo asociado al flujo

de la carga eléctrica; se conoce como *permeabilidad magnética del vacío*. Desde luego, su valor numérico depende del sistema de unidades que se utilice para expresar las otras cantidades en la ecuación. En el SI esta constante tiene el valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m}$$

Pareçe extraño que el valor de esta constante sea un múltiplo exacto de 4π; y de hecho, no es ningún accidente: se debe a que el coulomb no es sencillamente una cantidad arbitraria de carga, ni el ampere (coulomb/segundo) es un valor arbitrario de corriente. La magnitud del ampere —y por tanto, la del coulomb— se escogió de modo que se *requiriera* que el valor de μ_0 fuera el adoptado. Se verá cómo sucede esto con mayor claridad cuando se estudien las fuerzas que actúan entre dos conductores rectos paralelos que llevan corrientes constantes.

Desafortunadamente, la ley de Biot y Savart anterior sólo evalúa el *elemento diferencial* de la inducción magnética en un punto dado debido a un segmento diferencial de conductor. Para determinar la inducción magnética total debida a un conductor de tamaño finito, debe integrarse (19.5.4) sobre los elementos diferenciales $d\mathbf{l}$ que constituyen dicho segmento finito. Entonces se puede escribir la inducción magnética total **B** como la integral

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_c \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}} \qquad (19.5.5)$$

evaluándose la misma sobre la porción de conductor considerada.

Un caso simple en que puede hacerse esto es el de un conductor infinitamente largo y recto de diámetro despreciable. Se estudiará este caso en detalle. Supóngase que el conductor coincide con el eje z y que la corriente I fluye desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$, como se indica en la figura 19.25. Se tratará de calcular la inducción magnética en el punto P a la distancia a del conductor a lo largo del eje y. Primero se considerará la parte de la inducción que se debe a un elemento de corriente de longitud dl que se extiende desde z hasta $z + dz$ a lo largo del eje z. Ya que el vector $d\mathbf{l}$

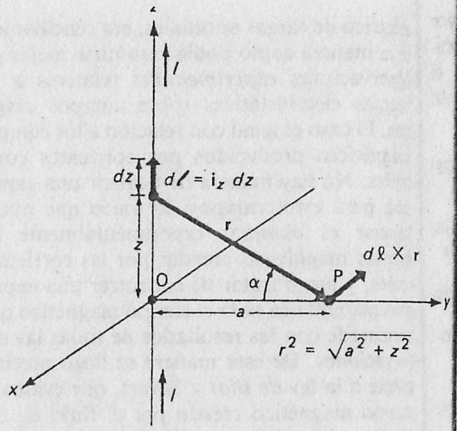


FIGURA 19.25

puede escribirse como $d\mathbf{l} = \mathbf{i}_z\, dz$, y el vector $\mathbf{r}$ (cuya componente y es a y cuya componente z es $-z$) se puede escribir como $\mathbf{r} = a\mathbf{i}_y - z\mathbf{i}_z$, la ecuación (19.5.4) se expresa como

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathbf{i}_z\, dz \times (a\mathbf{i}_y - z\mathbf{i}_z)}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\,dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i}_x \qquad (19.5.6)$$

La expresión en el extremo derecho es el resultado del desarrollo del producto vectorial utilizando las reglas para la multiplicación de cruz de vectores unitarios. Es evidente que el vector $d\mathbf{B}$ está en la dirección $-x$; también es cierto esto para la inducción magnética total **B**, debido a que los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$ siempre están en el plano yz, por lo que su producto vectorial sólo debe tener componente x.

Ahora puede evaluarse **B** integrando (19.5.6) desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$ para obtener

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi}\,\mathbf{i}_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (19.5.7)$$

En esta expresión se saca el vector unitario $\mathbf{i}_x$ de la integral, ya que es de magnitud y dirección constantes. Esta integral puede evaluarse con mayor facilidad expresando todas las fun-

ciones de z en términos del ángulo α, que se muestra en la figura 19.25. Por tanto,

$$r = \sqrt{a^2 + z^2} = \frac{a}{\cos\alpha} \qquad (19.5.8)$$

$$z = a\tan\alpha \qquad (19.5.9)$$

$$dz = a\sec^2\alpha\, d\alpha = \frac{a\, d\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad (19.5.10)$$

Sustituyendo todo esto en (19.5.7), se puede escribir esta ecuación en la forma

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\mathbf{i}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\mathbf{i}_x [\operatorname{sen}\alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} \qquad (19.5.11)$$

En esta expresión, la integración sobre el ángulo α se toma entre los límites $-\pi/2$ a $+\pi/2$, debido a que al integrar sobre dz desde $-\infty$ hasta $+\infty$, como lo requiere (19.5.7), el ángulo α de la figura 19.25 varía entre esos dos valores. Evaluando (19.5.11) entre esos límites, finalmente se obtiene

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}(-\mathbf{i}_x)} \qquad (19.5.12)$$

Esto indica que la magnitud de **B** es $\mu_0 I/2\pi a$, en que a es la distancia entre el conductor y el punto P, y la dirección de **B** es la del eje $-x$. No hay nada especialmente importante acerca de que se haya escogido el punto P en el eje y, sólo fue cuestión de conveniencia para los cálculos. De otra manera se pudo haber escogido primero P y luego orientar el eje de las y para que coincidiera con dicho punto. Por tanto, la magnitud de **B** es la misma para *cualquier* punto que esté a la distancia a desde el conductor, y su dirección siempre será perpendicular tanto a la dirección de la corriente como al segmento OP entre el punto y el conductor, pues esta es la dirección de $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$. Estos resultados se resumen en el dibujo del campo que se muestra en la figura 19.26. Las líneas de **B** son circulares, y la dirección del vector **B** es la que indican los dedos curvados de la mano derecha cuando el pulgar apunta en la

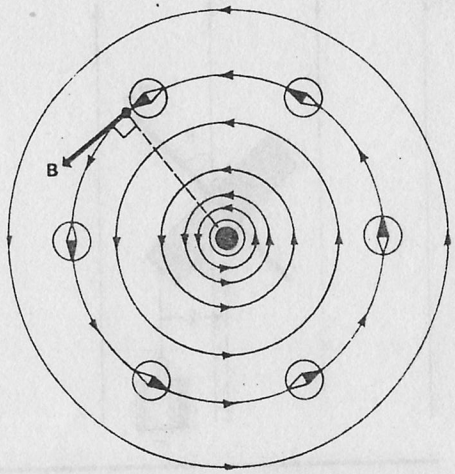


FIGURA 19.26. Campo magnético que rodea un conductor recto de gran longitud y por el que pasa una corriente constante.

dirección de la corriente. *Es extremadamente importante apreciar con claridad las características del campo que rodea a un conductor largo y recto, para poder comprender campos más complejos y estar en condiciones de manejar fuerzas que ejercen entre sí conductores que llevan corriente.* Históricamente, el resultado (19.5.12) para un conductor largo y recto precedió a la forma diferencial más fundamental (19.5.4), y de ordinario se conoce también como ley de Biot y Savart.

Los campos magnéticos producidos por distintas corrientes pueden *superponerse* o sumarse para obtener un campo magnético total, al igual que se pueden superponer los campos debidos a una serie de cargas eléctricas puntuales para obtener un campo eléctrico total. Por tanto, si hay una cierta cantidad de conductores que llevan las corrientes I_1, I_2, I_3, . . . , las cuales dan lugar respectivamente a los campos magnéticos $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, . . . , de acuerdo con la ley de Biot y Savart expresada por (19.5.5), la inducción magnética total **B** puede representarse como la *suma vectorial* de los campos individuales $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, . . . , lo que permite escribir

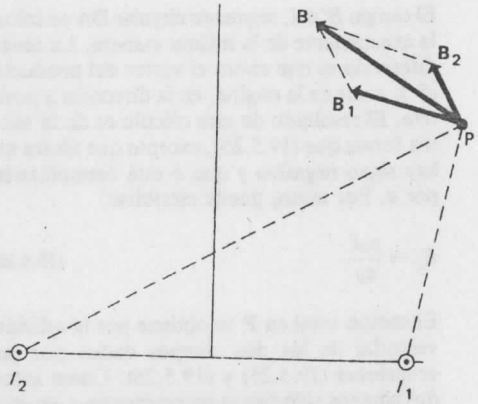


FIGURA 19.27. Superposición de campos magnéticos por la ley de la adición vectorial.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \cdots + \mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i \tag{19.5.13}$$

en que cada uno de los campos individuales $\mathbf{B}_i$ está relacionado con su propia corriente generatriz I_i por medio de

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \int_{c_i} \frac{d\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{19.5.14}$$

En esta ecuación, $d\mathbf{l}_i$ son los elementos diferenciales $d\mathbf{l}$ que constituyen el conductor c_i por el cual pasa la corriente I_i, en tanto que $\mathbf{r}_i$ es el vector que va desde el elemento diferencial $d\mathbf{l}_i$ hasta el punto P en que se evalúa el campo. Al superponer los campos magnéticos individuales de esta manera, es importante que se sumen como *vectores*, ejecutando la suma indicada en (19.5.13) siguiendo las leyes de adición *vectorial*.

El ejemplo más simple de la superposición de campos magnéticos lo proporciona el caso de dos conductores rectos paralelos, en que el campo resultante **B** es la suma vectorial de las contribuciones $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ de los campos individuales que son originados por las dos corrientes en los conductores separados (fig. 19.27).

EJEMPLO 19.5.1

Evaluar la inducción magnética en un punto del eje z creada por una corriente I que fluye en una espira circular de radio a en el plano xy, y cuyo centro está en el origen (fig. 19.28).

En este ejemplo, es importante percatarse de que el campo total **B** en todos los puntos del eje z está en la dirección de éste y *sólo* tiene una componente z, lo que se comprende considerando las contribuciones separadas al campo total **B** por el elemento $d\mathbf{l}$ que se muestra en la figura 19.28, y el elemento $d\mathbf{l}'$ de igual longitud pero diametralmente opuesto en la espira. Estas dos contribuciones $d\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}'$ están cada una en la dirección de $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ y $d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}'$, por lo que se hallan en el plano definido por OQP, que es perpendicular al elemento $d\mathbf{l}$ y pasa por el vector de posición **r**. Es claro que las componentes horizontales de $d\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}'$ son de signo contrario por lo que su suma será cero cuando se reúnan todas las contribuciones de

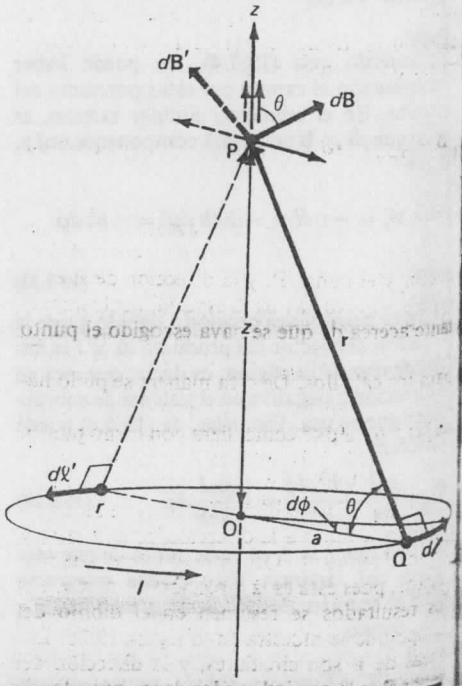


FIGURA 19.28

$d\mathbf{l}$. Pero las componentes verticales son de igual signo y su suma tendrá una contribución definitiva al integrarse sobre todos los elementos $d\mathbf{l}$. Ya que cada elemento de la espira tiene su compañero diametralmente opuesto $d\mathbf{l}'$ en el otro lado de aquella, no puede haber componente horizontal del campo resultante **B**, por lo que **B** sólo tendrá componente vertical z. En consecuencia, al sumar las contribuciones de los elementos de la espira con corriente, basta considerar las componentes z de los vectores $d\mathbf{B}$, pues ya se sabe que las componentes horizontales se cancelan.

Como son iguales los vectores en uno y otro miembro de la ecuación (19.5.4), sus componentes z deben ser también iguales. Entonces pueden igualarse las componentes z de estos vectores para obtener

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})_z}{r^3} \tag{19.5.15}$$

De la figura 19.28 y de la definición del producto vectorial, la componente z de $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ está dado por

$$(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})_z = |d\mathbf{l} \times \mathbf{r}| \cos\theta = r\, dl \frac{a}{r} = a\, dl \tag{19.5.16}$$

También, la longitud de arco dl puede expresarse como el producto del radio a de la espira circular multiplicado por el ángulo central $d\phi$. Por tanto, (19.5.16) queda como

$$(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})_z = a^2\, d\phi \tag{19.5.17}$$

que al sustituir en (19.5.15) da

$$dB_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} d\phi \tag{19.5.18}$$

Ahora puede integrarse esta ecuación sobre $d\phi$ y al hacerlo sacar de la integral el coeficiente de $d\phi$, pues al integrar sobre todos los elementos $d\mathbf{l}$ de la espira, la cantidad r^3 *es la misma para cada elemento*, y por tanto, es una constante en esta integración. Integrando sobre la longitud circular desde $\phi = 0$ hasta $\phi = 2\pi$, se obtiene

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \tag{19.5.19}$$

De la figura es evidente que $r^2 = a^2 + z^2$, y por tanto, que (19.5.19) se puede escribir finalmente como

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{19.5.20}$$

Este resultado puede expresarse en términos del momento magnético p_m de la espira conductora, recordando que $p_m = \pi a^2 I$. De esta manera, (19.5.20) queda como

$$B_z = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{19.5.21}$$

Es más difícil calcular la inducción magnética en puntos que no estén en el eje de la espira, de modo que no se tratará de hacerlo aquí. Baste decir que a distancias considerables de la espira, se puede demostrar que el campo **B** es el de un *dipolo* cuyo momento es $p_m\mathbf{i}_z$. Para valores de z mucho mayores que el radio a, se desprecia el valor de a en el denominador de (19.5.21); entonces, la expresión para el campo queda como

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_m}{z^3}$$

Esto es comparable a la expresión para el campo eléctrico axial de un dipolo eléctrico, que se dedujo en el Capítulo 16; es evidente la similitud en la forma. En la figura 19.29 se muestran las líneas de **B** para este campo; en análisis posteriores se harán frecuentes referencias a esta configuración de campo.

EJEMPLO 19.5.2

Calcular la inducción magnética en el centro de una bobina circular de 100 vueltas, cuyo diámetro es de 10 cm y que lleva una corriente constante de 10 A.

Este ejemplo puede considerarse como un caso especial del anterior. La ecuación (19.5.20) da el campo en el eje de una espira circular. Tratándose de una bobina circular de N vueltas, habrá N espiras con corriente en vez de una sola y los campos se superponen para dar un campo N veces mayor que el expresado por (19.5.19). Al mismo tiempo, si

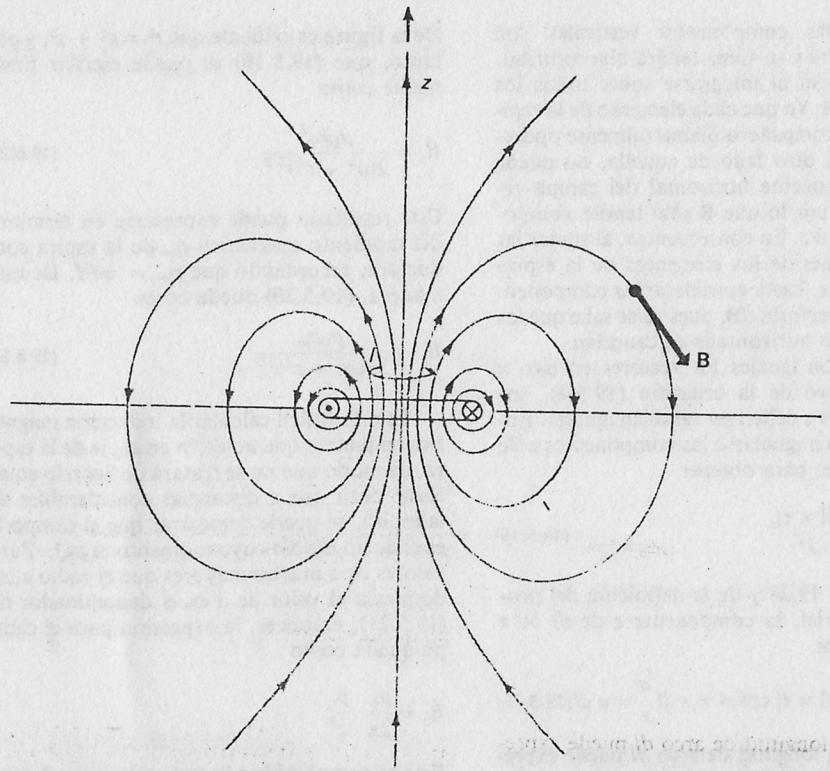


FIGURA 19.29. Campo magnético establecido por una espira circular con corriente.

se quiere evaluar el campo en el centro de la bobina debe hacerse z igual a cero en (19.5.20). Multiplicando el segundo miembro de (19.5.20) por N y haciendo $z = 0$ en (19.5.20), se obtiene

$$B_z = \frac{N\mu_0 I}{2a} \tag{19.5.22}$$

En el ejemplo, $N = 100$, $I = 10$ A y $a = 5$ cm $= 0.05$ m, en cuyo caso (19.5.22) indica que

$$B_z = \frac{(100)(4\pi)(10^{-7})(10)}{(2)(0.05)} = 0.0126 \text{ Wb/m}^2$$

EJEMPLO 19.5.3

Determinar el campo en el punto P en el diagrama que se muestra en la figura 19.30. Obtener el valor numérico de la inducción B para el circuito en que $a = 5$ cm, $b = 15$ cm, $l = 10$ cm e $I = 100$ A.

En este ejemplo, primero deben calcularse los campos de los tramos rectos AB y CD, y luego los de los tramos circulares BC y DA, superponiendo por último todos, por adición vectorial. Para los segmentos rectos AB y CD, los elementos de $d\mathbf{l}$ son *paralelos* al vector $\mathbf{r}$ que une el elemento de corriente y el punto P donde desea determinarse el campo. Para estos segmentos, $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ es *cero*, de manera que

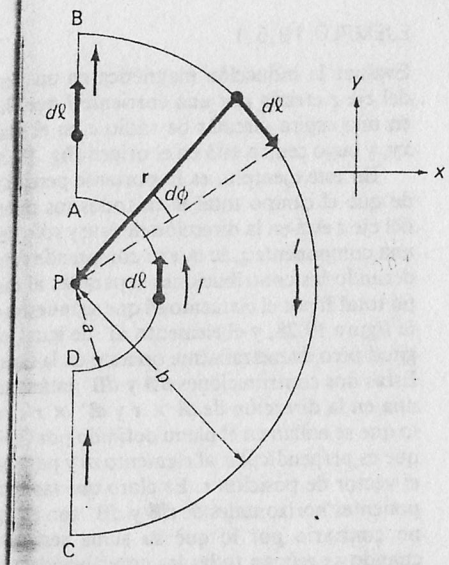


FIGURA 19.30

de acuerdo con (19.5.4), no puede haber contribución al campo por estas porciones del circuito. En el segmento circular externo, es claro que $d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ no tendrá componente x ni y, y que

$$(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})_z = -r\,dl = -(b)(b\,d\phi) = -b^2\,d\phi \tag{19.5.23}$$

El signo negativo es necesario debido a que la dirección del vector del producto $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ es *hacia adentro* de la página, es decir, que está en la dirección z negativa en el sistema de coordenadas que se usa. Entonces, de (19.5.4) puede escribirse

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{-b^2\,d\phi}{b^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\,d\phi \tag{19.5.24}$$

notando que $r = b$ en cada punto de este segmento del circuito. Esto puede integrarse sobre el semicírculo BC desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi$, dando

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_0^{\pi} d\phi = -\frac{\mu_0 I}{4b} \tag{19.5.25}$$

El campo B_z' del segmento circular DA se calcula exactamente de la misma manera. La única diferencia es que ahora el vector del producto $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ sale de la página, en la dirección z positiva. El resultado de este cálculo es de la misma forma que (19.5.25), excepto que ahora no hay signo negativo y que b está reemplazada por a. Por tanto, puede escribirse

$$B_z' = \frac{\mu_0 I}{4a} \tag{19.5.26}$$

El campo total en P se obtiene por la adición vectorial de los dos campos dados por las ecuaciones (19.5.25) y (19.5.26). Como estos dos campos sólo tienen componentes z, en este caso basta sumar estas componentes para obtener

$$B_{z(\text{tot})} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{19.5.27}$$

Si $a = 0.05$ m, $b = 0.15$ m e $I = 100$ A, esta expresión indica que $B_{z(\text{tot})} = 4.19 \times 10^{-4}$ Wb/m².

EJEMPLO 19.5.4

La figura 19.31 muestra dos espiras circulares idénticas que llevan corrientes iguales I. Sus planos están inclinados entre sí formando un ángulo que se muestra como 2θ en el diagrama. Demostrar que en cualquier parte del plano AB que biseca este ángulo, la inducción magnética total debe ser normal al plano.

Se comprende este resultado notando que los circuitos con corrientes iguales son idénticos y conducen asimismo, los campos $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ asociados a las espiras circulares, como se muestra en la figura 19.29, son simétricos. En el plano AB todos los puntos *equidistan* de los centros de las dos espiras. Ahora considérese una línea representativa de inducción magnética en el campo $\mathbf{B}_1$ producido por la espira de la izquierda, por ejemplo, la línea QP, y su correspondiente PQ′ en el campo $\mathbf{B}_2$ producido por la espira del lado derecho. Por la simetría de campos con respecto a los planos de las espiras y la disposición simétrica del plano AB con respecto a las mismas, es evidente que son iguales las longitudes de arco QP y $Q'P$ sobre las líneas correspondientes de

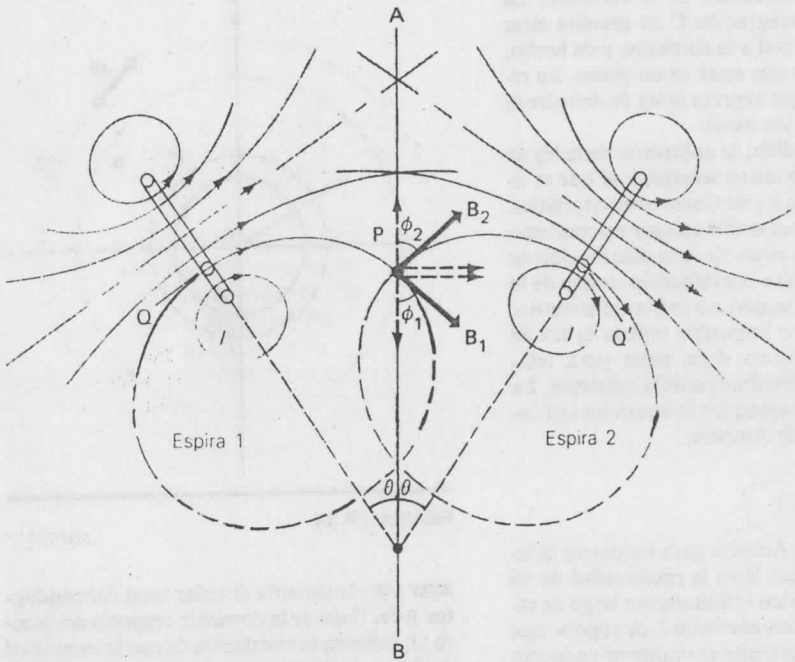


FIGURA 19.31

B, lo mismo que sus ángulos de intersección con el plano **AB**, ϕ_1 y ϕ_2. Para que las corrientes en las dos espiras sean iguales, las magnitudes B_1 y B_2 también tendrán que ser las mismas. En estas circunstancias, de la figura 19.31 es claro que las componentes transversales $B_1 \cos \phi_1$ y $B_2 \cos \phi_2$ son de igual magnitud pero de signo contrario, por lo que se cancelan, dejando sólo las componentes normales B_1 sen ϕ_1 y B_2 sen ϕ_2. En consecuencia, el campo resultante **B** en el punto P es normal al plano AB y su magnitud está dada por

$$B = B_1 \operatorname{sen} \phi_1 + B_2 \operatorname{sen} \phi_2$$

$$= 2B_1 \operatorname{sen} \phi_1 \qquad (19.5.28)$$

Puesto que se ha escogido P arbitrariamente y es representativo de cualquier punto que esté en el plano AB, estos resultados serán ciertos para todos los puntos en el plano. Los resultados de este ejemplo son importantes, y se tendrá ocasión de referirse a ellos de nuevo cuando se investiguen los campos magnéticos en el interior de bobinas toroidales y solenoidales.

19.6 Ley de Ampère

En el estudio de la electrostática se encontró que en tanto que a menudo puede determinarse el campo eléctrico establecido por una distribución dada de cargas, superponiendo la contribución de campo de los elementos individuales de carga, el introducir la *ley de Gauss* proporciona otra forma por demás útil e importante de lograr el mismo propósito. Lo mismo ocurre en la determinación del campo magnético a partir de sus corrientes generatrices, aunque con ciertos aspectos que son distintos. Ya se han descrito las características principales de la determinación de los campos magnéticos por superposición de campos que

se deben a elementos individuales de corriente. Se podría esperar que la ley de Gauss del magnetismo sea en este caso una alternativa útil, igual que en electrostática. Por desgracia, no sucede así, pues en el caso de los campos magnéticos la integral de superficie del flujo magnético a través de una superficie cerrada invariablemente es *cero*, en vista de que no existen cargas magnéticas. La ley de Gauss para el magnetismo es informativa y tiene importante significado fundamental en relación con las propiedades de los campos magnéticos, pero poca utilidad práctica como para ayuda calcular campos magnéticos a partir de distribuciones de corriente.

Por tanto, debe buscarse un método distinto que ayude esencialmente como lo hace la ley de Gauss en electrostática. La alternativa buscada la proporciona el teorema denominado *ley de Ampère*, que relaciona la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada, con la corriente total que fluye a través de la trayectoria de integración. La ley de Ampère se asemeja a la ley de Gauss para las cargas eléctricas en que una integral sobre una trayectoria cerrada arbitraria tiene relación con la intensidad de la fuente que encierra. Por tanto, la aplicación práctica de la ley de Ampère para calcular campos magnéticos sigue más o menos las mismas líneas que la ley de Gauss, excepto que la de Ampère comprende una integración de elementos de *línea* alrededor de una curva cerrada, mientras que la de Gauss corresponde a la integración de elementos de *superficie* sobre una cerrada.

Ya se ha demostrado cómo la ley de Gauss para los campos electrostáticos se obtiene como consecuencia directa de la ley de las fuerzas de Coulomb. También es cierto que es posible demostrar que la ley de Ampère se sigue directamente de la forma diferencial de la ley de Biot y Savart expresada por la ecuación (19.5.4). Es desafortunado que esta tarea matemática sea formidable, incluso con la ayuda de matemáticas mucho más avanzadas que el nivel usado en este libro. Por tanto, tendrá que presentarse una demostración de la ley de Ampère que es mucho menos amplia que lo que es de desear, pero se tendrá cuidado en señalar que los resultados obtenidos se aplican en casos mucho más generales.

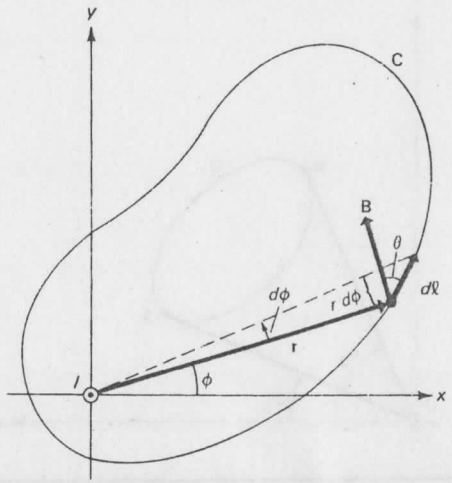


FIGURA 19.32. Cálculo de la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de una trayectoria cerrada C que rodea un conductor largo y recto, que conduce una corriente de intensidad constante.

Considérese el caso que se ilustra en la figura 19.32, donde fluye una corriente constante I hacia afuera de la página en un conductor largo y recto, normal a aquella. Por comodidad, se escogió el sistema de coordenadas, de manera que la corriente fluya a lo largo del eje z, saliendo por el origen en el plano xy. Se muestra una curva cerrada arbitraria C que está en el plano xy y que rodea el conductor; se procederá evaluando la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sobre todos los elementos $d\mathbf{l}$ que constituyen la curva C. Por la definición del producto escalar de dos vectores, se sabe que

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cos \theta \, dl \qquad (19.6.1)$$

en que θ es el ángulo entre los vectores **B** y $d\mathbf{l}$. Pero, de la figura 19.32 es evidente que

$$dl \cos \theta = r \, d\phi \qquad (19.6.2)$$

También se ha visto que la ley de Biot y Savart para un conductor largo y recto, representada por (19.5.12), indica que la magnitud de **B** debe ser

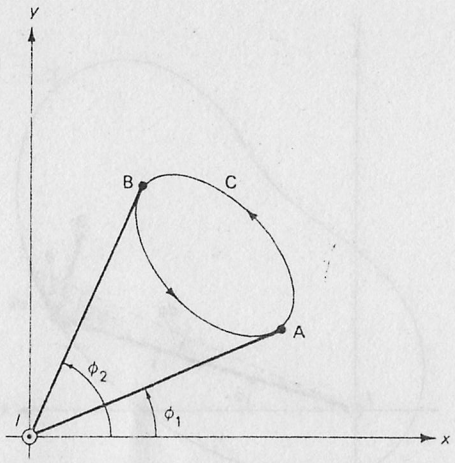


FIGURA 19.33. La misma determinación de la figura 19.32 cuando la trayectoria de integración no rodea al conductor.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (19.6.3)$$

Sustituyendo los valores dados para B y dl cos θ por (19.6.2) y (19.6.3) en (19.6.1), se obtiene

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\, d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi \qquad (19.6.4)$$

Ahora se puede integrar sobre todos los elementos $d\mathbf{l}$ de la curva C; al hacerlo, el ángulo ϕ va de 0 a 2π. Por tanto,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \qquad (19.6.5)$$

o sea que

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \qquad (19.6.6)$$

Si la corriente I no pasa por la trayectoria cerrada C, el caso es como se muestra en la figura 19.33. Al integrar a lo largo de la curva desde A hasta B (en sentido contrario al del reloj, como se muestra), el ángulo ϕ va desde ϕ_1 hasta ϕ_2, mientras que al volver desde B hasta A, va desde ϕ_2 hasta ϕ_1. En este caso, la integral sobre $d\phi$ en el segundo miembro de (19.6.5) sería

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi\right)$$

$$(A \to B) \quad (B \to A)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\phi_2 - \phi_1 + \phi_1 - \phi_2) = 0 \qquad (19.6.7)$$

Así puede verse que la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de una curva cerrada por la que pasa una corriente I es igual a $\mu_0 I$, pero que si la corriente no fluye a través de la curva cerrada, la integral es cero. Este es el contenido esencial de la ley de Ampère.

La demostración se limita al caso de un conductor recto de longitud finita y una curva C que está en un plano normal a aquel. Fácilmente se extiende al caso en que hay una serie de conductores largos rectos y paralelos que llevan las corrientes $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$, que dan lugar a los campos individuales $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_n$, cuya suma vectorial es el campo total $\mathbf{B}$. En este caso se calcula la integral de $\mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}$, $\mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}$, $\mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l}$, etc. alrededor de la curva C, obteniéndose $\mu_0 I_1, \mu_0 I_2, \ldots$, en tanto las corrientes pasen a través de C, pero *haciéndose cero si no sucede esto último*. Luego se suman las integrales, obteniéndose el resultado

$$\oint_C (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \cdots + \mathbf{B}_n) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c \qquad (19.6.8)$$

o sea,

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c} \qquad (19.6.9)$$

en que I_c representa la *corriente total que fluye a través de la trayectoria cerrada arbitraria de integración C*. En general, esto será menor que la suma de todas las corrientes $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ en la magnitud de la suma de las corrientes que no pasan por C, por lo que no contribuyen nada a la integral.

Sin embargo, la ley de Ampère es mucho más general que esto. No importa si los conductores son rectos o curvos, largos o cortos, paralelos o no. En efecto, no importa si hay conductores individuales o una distribución continua de la densidad de la corriente. La trayectoria de integración C no necesita estar en un plano normal a la corriente, y de hecho, ni siquiera tiene que estar en un plano. La relación (19.6.9) que expresa la ley de Ampère es válida en todos los casos.

En cierta medida, la aplicación de la ley de Ampère sigue un curso semejante al que se siguió al emplear la ley de Gauss en electrostática. Por lo general es deseable escoger un contorno C sobre el cual la *simetría* de la distribución de la corriente permita la evaluación simple de la integral $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. Cuando no existe tal simetría, puede ser difícil o imposible utilizar la ley de Ampère en la forma dada antes para relacionar $\mathbf{B}$ con la distribución de la corriente. La siguiente serie de ejemplos ilustrará las aplicaciones de la ley de Ampère.

EJEMPLO 19.6.1

Utilizar la ley de Ampère para encontrar la inducción magnética $\mathbf{B}$ en la proximidad de un conductor cilíndrico infinitamente largo de radio a que lleva una corriente I. Se supone que la densidad de corriente es *uniforme* en la sección transversal del conductor.

Como se muestra en la figura 19.34, la simetría del caso permite conjeturar que las líneas de $\mathbf{B}$ son circulares concéntricas. Por lo que respecta a la simetría, naturalmente pudieran ser radiales, pero por la forma de la ley de Biot y Savart (19.5.4) y de la experiencia en deducir (19.5.12) se sabe que esto no es realista. En las condiciones dadas, es difícil ver que pueda existir una componente de $\mathbf{B}$ que no sea de tal forma. De ser así, ¿por qué tendrá la magnitud que tiene y por qué está en la dirección indicada? El que estas preguntas no puedan responderse, permite llegar a la conclusión de que efectivamente no hay componentes de $\mathbf{B}$ en la dirección radial o en la dirección z.

Ya que así sucede, tiene sentido escoger trayectorias *circulares* como C y C' para realizar la integración especificada en la ley de Ampère. Los vectores $\mathbf{B}$ y $d\mathbf{l}$ siempre son paralelos en tales contornos, de manera que para esas trayectorias

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B\, dl \qquad (19.6.10)$$

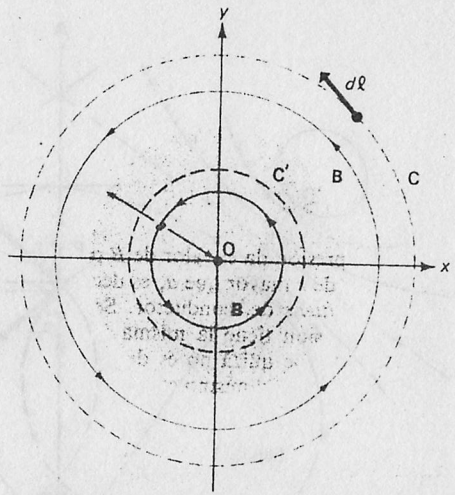


FIGURA 19.34

Más aún, la simetría circular total del conductor y del flujo de la corriente respecto del punto O, inducen la conclusión de que la *magnitud* de $\mathbf{B}$ será la misma en todos los puntos de esta trayectoria. ¿Por qué deberá ser diferente en un punto de C, por ejemplo, a la que haya en algún otro punto? De nuevo, el hecho de que no pueda responderse la pregunta lleva a la conclusión inevitable de que efectivamente no es así. En estas circunstancias, B es la misma para todos los elementos $d\mathbf{l}$ que constituyen la trayectoria C, por lo que puede considerarse como constante en la evaluación de la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. En vista de estas consideraciones y de (19.6.10), la ley de Ampère (19.6.6) se puede escribir como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B\, dl = B \oint_C dl = \mu_0 I_C \qquad (19.6.11)$$

La integral de dl alrededor de la trayectoria C es sencillamente la longitud de la trayectoria, que en este caso es la circunferencia C. Denotando el radio de la trayectoria circular C mediante r, (19.6.11) queda

$$Bl = 2\pi r B = \mu_0 I_C \qquad (19.6.12)$$

I_c es la corriente total que fluye a través de la curva cerrada C. Si el radio r de la trayectoria

C es mayor que el radio del conductor, I_C es sencillamente la corriente total I que lleva el conductor. En este caso,

$$2\pi rB = \mu_0 I$$

de donde

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r > a \tag{19.6.13}$$

Esta expresión da el valor de B para cualquier valor de r mayor que a, es decir, en todas partes *fuera* del conductor. Se advierte que la expresión tiene la misma forma que (19.5.12), lo que quizá no es de sorprender, aunque este no es el mismo caso que el que se consideró al deducir (19.5.12), debido a que aquí se limitó la corriente a una línea a lo largo del eje z en vez de a un conductor de radio finito. Para puntos *dentro* del conductor, debe procederse en forma ligeramente distinta.[2] Supóngase que se desea aplicar la ley de Ampère alrededor de la trayectoria circular C' que está dentro del conductor y cuyo radio r es menor que el radio del mismo. La integral de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ se evalúa exactamente de la misma manera y tiene el valor $2\pi rB$ dado por (19.6.12). Pero ahora debe igualarse a μ_0 multiplicado por I_C', que representa la corriente que fluye a través de la trayectoria C' y éste es ahora sólo una *fracción* de la corriente total I. Si se supone que la densidad de corriente j es uniforme en el área transversal del conductor, la corriente que pasa por C' es sencillamente la densidad de corriente multiplicada por el área limitada por la trayectoria cerrada C'. De acuerdo con ello,

$$I_{C'} = j\pi r^2 \tag{19.6.14}$$

Puesto que la densidad de corriente es la corriente total I dividida entre el área total del conductor, que es πa^2, se puede escribir (19.6.14) como

$$I_{C'} = I\frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I\frac{r^2}{a^2} \tag{19.6.15}$$

[2] Aunque es cierto que en el equilibrio electrostático no puede haber campo *eléctrico* dentro de un cuerpo conductor, no hay ley que impida que haya un campo magnético en el interior de un cuerpo tal. Como pronto se verá, los campos magnéticos dentro de los conductores pueden ser tanto o más intensos que los que están en el exterior.

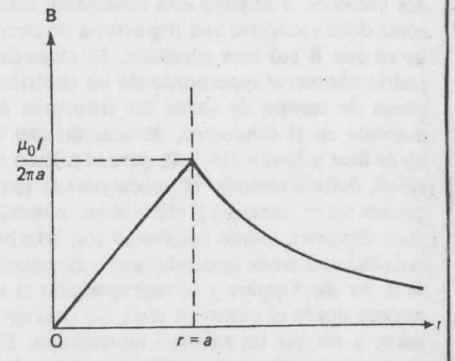


FIGURA 19.35. Gráfica de inducción magnética en función de la distancia radial r a partir del centro del conductor mostrado en la figura 19.34.

Si ahora se iguala la integral de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$, que tiene el valor $2\pi rB$ como antes, a $\mu_0 I_C'$, de acuerdo con la ley de Ampère puede escribirse

$$2\pi rB = \mu_0 I_{C'} = \mu_0 I\frac{r^2}{a^2} \tag{19.6.16}$$

Luego se despeja B a fin de obtener, r *menor* que a,

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \qquad r < a \tag{19.6.17}$$

Por tanto, fuera del conductor, B está dado por (19.6.13) y decrece a medida que aumenta la distancia en proporción a $1/r$, mientras que dentro del conductor está expresado por (19.6.17) y aumenta linealmente en función de r desde el centro hasta la superficie exterior. En la superficie, donde $r = a$, tanto (19.6.13) como (19.6.17) llevan al mismo valor para el campo, $B = \mu_0 I/2\pi a$. Ya que el vector $\mathbf{B}$ es tangente en todas partes a las trayectorias circulares como C o C', las líneas de $\mathbf{B}$ son circulares, como se ilustra en la figura 19.34. En la figura 19.35 se presenta la viariación de $\mathbf{B}$ en función de r. Para un conductor de 1 mm de radio que lleva una corriente de 100 A, la máxima inducción, que ocurre en la superficie del conductor, será

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{(4\pi)(10^{-7})(100)}{(2\pi)(10^{-3})} = 0.0200\ \text{Wb/m}^2$$

EJEMPLO 19.6.2

Utilizar la ley de Ampère para evaluar el campo magnético de un conductor cilíndrico hueco, infinitamente largo, de radio exterior a y radio interior b, que lleva una corriente total I. Determinar el campo fuera del conductor, en la sustancia conductora y dentro de la cavidad tubular hueca, cerca del centro. Se supone que la densidad de corriente es constante en el conductor.

En la figura 19.36 se muestra una sección transversal de este elemento. Nuevamente, la simetría del conductor y el flujo de la corriente es tal que puede suponerse con seguridad que las líneas de $\mathbf{B}$ son circulares, de manera que el vector $\mathbf{B}$ siempre es tangente a ellas, como se ilustra. Por este motivo, si se escogen trayectorias circulares como C, C' y C'' para evaluar la integral, de Ampère, nuevamente se encontrará que $\mathbf{B}$ y los elementos de $d\mathbf{l}$ de la trayectoria siempre son paralelos, y que $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ simplemente se reduce a $B\,dl$. También en este caso, la simetría es tal que la magnitud de $\mathbf{B}$ será la misma en todas las partes de los contornos circulares, por lo que se puede escribir fuera de la integral. Como en el ejemplo anterior, puede expresarse la ley de Ampère como

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\oint_C dl = \mu_0 I_C \tag{19.6.18}$$

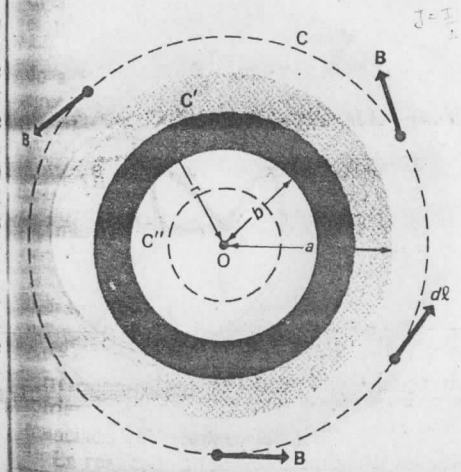


FIGURA 19.36

De nuevo, la integral de dl alrededor de la trayectoria es la longitud del arco total del contorno, en este caso, una circunferencia. Por tanto, para el contorno C que está totalmente fuera del conductor, se tiene

$$2\pi rB = \mu_0 I_C = \mu_0 I \qquad r > a \tag{19.6.19}$$

en que r es el radio de la trayectoria circular C e I es la corriente total que lleva el conductor. Despejando B,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r > a \tag{19.6.20}$$

Este es el mismo resultado que se encontró en el ejemplo anterior para un conductor cilíndrico macizo. Por tanto, con sólo observar el campo magnético fuera del conductor, no es posible decir si es macizo o hueco.

Dentro del conductor, en una trayectoria de integración como C', debe igualarse la integral de Ampère a la parte de la corriente total I_C' que pasa a través del contorno. La corriente dentro del mismo, puede expresarse como el producto de la densidad de corriente constante j por el área de la sección transversal del conductor, queda dentro del contorno C' de radio r, el cual se muestra sombreado en tono más oscuro en la figura 19.36. Como esta área es $\pi r^2 - \pi b^2$, se tiene

$$I_{C'} = j\pi(r^2 - b^2) \tag{19.6.21}$$

Pero como puede expresarse la densidad de corriente j como la corriente total I dividida entre el área transversal total del conductor, que en este caso es $\pi a^2 - \pi b^2$, es posible escribir (19.6.21) como

$$I_{C'} = \frac{I(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2} \tag{19.6.22}$$

Como antes, la integral de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ alrededor de C' es $2\pi rB$, de manera que la ley de Ampère de

$$2\pi rB = \mu_0 I_{C'} = \frac{\mu_0 I(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2} \tag{19.6.23}$$

o sea que

$$B = \frac{\mu_0 I(r^2 - b^2)}{2\pi r(a^2 - b^2)} \qquad b < r < a \tag{19.6.24}$$

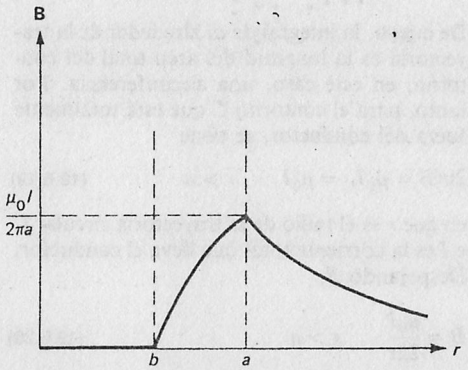


FIGURA 19.37. Gráfica de la inducción magnética en función de la distancia radial desde el centro del sistema correspondiente al conductor hueco de la figura 19.36.

Cuando el radio de la trayectoria de integración es *menor* que el radio interno del conductor, como sucede en el caso del contorno C'' de la figura 19.36, no fluye corriente a través de la trayectoria cerrada de integración. Por tanto, para toda trayectoria de ese tipo, $I_{C''} = 0$ y la ley de Ampère da

$$2\pi r B = \mu_0 I_{C''} = 0$$

de donde

$$B = 0 \qquad r < b \tag{19.6.25}$$

Por tanto, es cero la inducción magnética en el interior hueco del conductor. Este resultado es semejante al que se obtuvo de la ley de Gauss en electrostática para el caso de un cuerpo esférico hueco cargado, en el cual se encontró que el campo eléctrico en la cavidad esférica interior es cero. También recuerda que se anula el campo gravitacional en el interior de un cuerpo esférico hueco. Empero, en el caso del campo magnético, se halla que el campo se anula dentro de *cilindros* huecos en lugar de esferas huecas, debido a que la ley de Biot y Savart es algo distinta en su forma a la ley de Coulomb. Nuevamente se notará que cuando $r = a$, tanto (19.6.20) como (19.6.14) se reducen a $B\mu_0 I/2\pi a$, en tanto que para $r = b$, (19.6.24) da $B = 0$, lo que concuerda con (19.6.25). En la figura 19.37 se muestra una gráfica del campo B en función de r, dado por (19.6.20), (19.6.24) y (19.6.25).

EJEMPLO 19.6.3

La figura 19.38 muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico infinitamente largo, en el que se ha hecho un agujero descentrado. El conductor lleva una corriente I distribuida uniformemente en el área transversal conductora. El radio externo del conductor es a, el radio del agujero es b, y el eje del conductor y el agujero están a la distancia c, como se muestra en la figura. Encontrar la magnitud y dirección de la inducción magnética en el eje 0′ del agujero.

Este es un ejemplo difícil que a primera vista parece desafiar todos los métodos de ataque. Ya que el agujero está descentrado, no se puede concluir que el campo **B** sea cero dentro de él, ni puede evaluarse con facilidad de integral de Ampère alrededor de un contorno circular centrado en 0 o en 0′, de manera que ya no se justifica suponer que el campo **B** sea tangente a circunferencias centradas en uno u otro punto. Ello significa que en una trayectoria circular de este tipo, **B** y **dl** ya no son paralelos y **B** $d\mathbf{l}$ ya no es igual a **B** dl sino a **B** $dl \cos\theta$, en que θ es el ángulo desconocido entre los

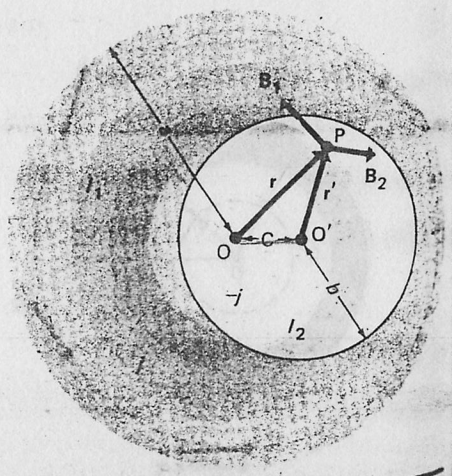


FIGURA 19.38

dos vectores. Tampoco está totalmente claro cómo deba escogerse una trayectoria no circular en que **B** y $d\mathbf{l}$ *sean* paralelos. La respuesta podría obtenerse superponiendo las contribuciones de campo de todos los elementos de corriente en el conductor, de acuerdo con la ley de Biot y Savart (19.5.4), pero el cálculo es difícil, definitivamente no recomendado para quienes no se sientan a gusto con las matemáticas. Empero, puede resolverse con relativa facilidad utilizando la combinación apropiada de la ley de Ampère y la superposición si se procede desde el punto de vista del concepto físico, y no del formalismo matemático. En efecto, proporciona una valiosa demostración del valor de la percepción física sobre el cálculo matemático directo. Hablando metafóricamente se trata de una carrera de resistencia, más que de una carrera de velocidad.

El truco consiste en percatarse de que la distribución de corriente especificada por el enunciado del ejemplo, puede lograrse superponiendo una densidad de corriente uniforme j (hacia afuera de la página) que se extiende por *todo* el interior del conductor, *incluyendo* al agujero, y una densidad de corriente igual pero en dirección opuesta $-j$ (hacia adentro de la página) y que sólo se extiende sobre la región del hueco. La suma de estas dos distribuciones da la densidad de corriente uniforme j en el conductor y cero en la región hueca, que es precisamente lo que se tiene. Entonces puede calcularse el campo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la primera de las distribuciones mencionadas, utilizando la ley de Ampère. Al hacerlo, ahora es perfectamente razonable la simetría del flujo de corriente y del conductor, que permite hacer las suposiciones simplificativas usuales con respecto a $\mathbf{B}_1$ y $d\mathbf{l}$. De la misma manera puede calcularse el campo magnético $\mathbf{B}_2$ que se debe a la segunda distribución de corriente en la región del agujero, usando nuevamente la simplificación. Entonces basta superponer los campos $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ mediante adición vectorial para obtener el campo total **B** correspondiente a la distribución total de corriente, que es lo que se especificó en el enunciado del ejemplo.

En realidad, no se necesitan hacer los cálculos de la ley de Ampère, pues ya se conocen los resultados del ejemplo 19.6.1. Por las ecuaciones (19.6.14) y (19.6.16), fácilmente se ve que el campo $\mathbf{B}_1$ en el interior del conductor cilíndrico de radio a con densidad de corriente uniforme j es

$$B_1 = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j r}{2} \tag{19.6.26}$$

Las líneas de $\mathbf{B}_1$ son círculos centrados en 0 y el campo $\mathbf{B}_1$ en cualquier punto como P, siempre será perpendicular al vector **r** que lo une con el origen. En el caso de $\mathbf{B}_2$ se tiene un campo que proviene de una densidad de corriente $-j$ (que entra a la página) extendido en una región circular centrada en O′. De acuerdo con la ecuación (19.6.14) y (19.6.16), la magnitud de este campo será

$$B_2 = \frac{\mu_0(-j)\pi r'^2}{2\pi r'} = -\frac{\mu_0 j r'}{2} \tag{19.6.27}$$

en que r' es la distancia desde el punto P, donde se requiere evaluar el campo, al centro de la distribución de densidad de corriente en O′. Las líneas de $\mathbf{B}_2$ son círculos con centro en O′ y la dirección de $\mathbf{B}_2$ en un punto como P naturalmente será perpendicular al vector $\mathbf{r}'$ que une al punto con O′. De aquí, es claro que en general, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ están en direcciones distintas y que al expresar el campo total **B** como la suma $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, es necesario tomar cuidadosamente en cuenta las leyes de la adición vectorial. Aun así, las direcciones de los dos campos están especificadas de manera bastante simple por los vectores $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ y la distancia OO′; y aunque deben efectuarse ciertos cálculos relativamente tediosos, no es demasiado difícil obtener expresiones matemáticas para las componentes de **B** en cualquier punto.

Pero no se pidió hacer esto, sino sólo encontrar la magnitud y dirección de $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ en el punto O′. Si se moviera el punto P a O′, se tendría $r' = 0$; y de (19.6.27), $B_2 = 0$. En estas circunstancias, el vector **r** se extendería desde O hasta O′ y su magnitud es entonces $r = c$. Por tanto, en este punto $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ y de (19.6.26),

$$B = B_1 = \frac{\mu_0 j c}{2} \tag{19.6.28}$$

De la figura 19.38, es evidente que la dirección de **B** en estas condiciones sería verticalmente hacia arriba en el plano de la página.

Ahora sólo necesita encontrarse la relación entre la densidad de corriente j y la corriente total I que lleva el conductor. La corriente total I_1 que se supuso era el origen de $\mathbf{B}_1$ está dada por la densidad de corriente j multiplicada por el área total limitada por la frontera exterior del conductor, de donde

$$I_1 = \pi a^2 j \tag{19.6.29}$$

De la misma manera, la corriente total I_2 que actúa como origen de $\mathbf{B}_2$ es la densidad de corriente $-j$ multiplicada por el área del agujero:

$$I_2 = -\pi b^2 j \tag{19.6.30}$$

La suma algebraica de estas dos corrientes es la corriente neta I que realmente lleva el conductor:

$$I = I_1 + I_2 = \pi j(a^2 - b^2)$$

o sea,

$$j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)} \tag{19.6.31}$$

Sustituyendo esto en (19.6.28), finalmente se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 I c}{2\pi(a^2 - b^2)} \tag{19.6.32}$$

Puede notarse que cuando $c = 0$, el agujero es concéntrico. En este caso, (19.6.32) da $B = 0$, lo que concuerda con el resultado que se obtuvo en el ejemplo 19.6.2.

19.7 Campos magnéticos en el interior de bobinas toroidales y solenoides

Las bobinas toroidales (anulares) y los solenoides (bobinas cilíndricas) son de especial importancia en trabajos experimentales de electromagnetismo en el laboratorio, al igual que en la tecnología. También se encontrará que puede comprenderse mejor la ley de Ampère por el estudio de estos elementos. Por tanto, ahora se emprenderá una investigación de estas estructuras desde el punto de partida de la ley de Ampère.

Es natural pensar que la mejor manera de empezar sería con la bobina solenoidal recta, infinitamente larga y de espiras muy próximas que aparentemente es el electroimán más simple. En efecto, en muchos libros se comienza utilizando la ley de Ampère en una deducción muy simple de la inducción magnética dentro de este tipo de bobina, cuya única virtud es la que se obtiene la respuesta correcta. Pero la aplicación de la ley de Ampère a un solenoide no es cuestión sencilla, si se insiste en comprender claramente las respuestas a todas las preguntas que surgen durante el proceso.

En consecuencia, se procederá investigando primero las propiedades de los *toroides*, que son realmente más simples y fáciles de analizar que los solenoides. En el ejemplo 19.5.4 y en la figura 19.31, que le corresponde, se establecieron las bases para este trabajo. El objeto de dicho ejemplo fue demostrar que el campo **B** dentro de una bobina toroidal de espiras muy cercanas como la de la figura 19.39, es solamente tangente a líneas circulares y que no tiene componente alguna en un plano perpendicular al eje de la bobina, es decir, en un plano como AB. Es inmediatamente

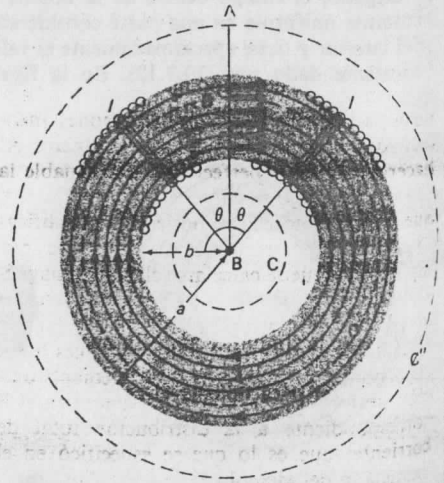


FIGURA 19.39. Bobina toroidal (o tórica) que conduce una corriente constante I.

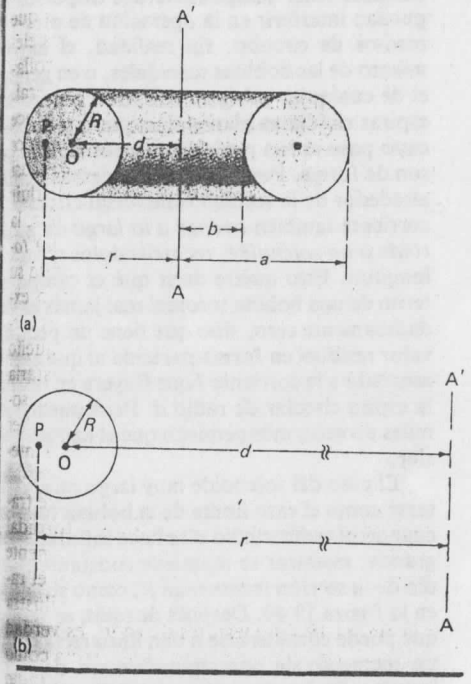


FIGURA 19.40. Parámetros geométricos de un toroide "grueso" (a) y uno "delgado" (b).

clara la semejanza entre los casos mostrados en las figuras 19.31 y 19.39. En el caso de la figura 19.31 y del ejemplo 19.5.4, se mostró que dos espiras circulares dispuestas como se indica dan lugar a un campo normal en todos los puntos al plano que biseca el ángulo entre las espiras.

En la figura 19.39 se trata de demostrar que es posible considerar una bobina toroidal está constituida por pares de espiras conductoras como las que se muestran en la figura 19.31, cada una de las cuales está dispuesta de manera semejante con respecto al plano AB, aunque a distintos ángulos θ para cada uno de dichos pares. Como el campo en el plano AB es sencillamente la superposición de todos los campos asociados a los pares de espiras, la dirección del campo **B** total en todas las partes del plano también es normal al mismo. Como no tiene ninguna importancia dónde se sitúe AB para principiar, puede decirse lo mismo acerca de la dirección de **B** en cualquier parte del toroide. La conclusión es que el campo **B** una bobina toroidal siempre debe ser tangente a una línea circular y que, por tanto, las líneas de **B** deben ser círculos concéntricos, como se muestra en la figura 19.39. De la sola simetría, también se puede concluir que la *magnitud* de **B** es la misma en todas partes en cualquier circular centrada en A.

Supóngase ahora que el radio exterior de la bobina es a y que el radio interior es b lo que significa que el radio *medio* está dado por

$$d = \frac{a + b}{2} \tag{19.7.1}$$

Entonces, la circunferencia media c será

$$c = 2\pi d = \pi(a + b) \tag{19.7.2}$$

En la figura 19.40, a se ilustran estos parámetros dimensionales. Supóngase que el número total de vueltas de conductor (o espiras), es N, por lo que el número de vueltas por unidad de longitud es

$$n = \frac{N}{c} = \frac{N}{\pi(a + b)} \tag{19.7.3}$$

Ahora se aplica la ley de Ampère a la bobina de la figura 19.39, utilizando contornos circulares como C, C' y C'' a lo largo de los cuales se puede evaluar la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. Para una trayectoria como C, puede escribirse la ley de Ampère como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = 2\pi r B = \mu_0 I_C \tag{19.7.4}$$

en que r es el radio de la trayectoria circular C. Pero para una trayectoria como C, cuyo radio es menor que el radio interno b, $I_C = 0$, por lo que (19.7.4) indica que

$$B = 0 \qquad r < b \tag{19.7.5}$$

A lo largo de una curva como C', la corriente I_C' que atraviesa la trayectoria cerrada de integración, es sencillamente NI, pues hay N espiras conductoras, cada una de las cuales lleva

la corriente I. La ley de Ampère evaluada sobre una trayectoria como ésta da

$$\oint_{C'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_{C'} dl = 2\pi r B = \mu_0 N I \qquad (19.7.6)$$

En consecuencia, dentro del toroide, para $b < r < a$ puede expresarse el campo como

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \qquad b < r < a \qquad (19.7.7)$$

Como de (19.7.3), $N = n\pi(a + b)$, en que n es el número medio de vueltas por unidad de longitud de la bobina, también se puede escribir (19.7.7) como

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 n(a+b)I}{2r} = \mu_0 n I \frac{d}{r}} \qquad (19.7.8)$$

En el propio centro de la bobina, donde $r = d$ $1/2\ (a + b)$, el campo B estará dado por

$$\boxed{B_c = \mu_0 n I} \qquad (19.7.9)$$

Puede considerarse que esta expresión da el campo *medio* en el interior de la bobina toroidal.

Para trayectorias circulares como C'', cuyo radio es mayor que el radio máximo del toroide, nuevamente $I_{C''}$ se hace cero, pues para cada vuelta hay una corriente I que entra al plano de la figura y una corriente igual pero opuesta, $-I$, que sale. La suma de estas corrientes para cada espira es cero, lo que da $I_{C''} = 0$. Por tanto, la ley de Ampère indica que

$$\oint_{C''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I_{C''} = 0 \qquad (19.7.10)$$

de donde

$$B = 0 \qquad r > a \qquad (19.7.11)$$

Estos resultados son notables porque dentro del toroide puede haber un intenso campo magnético dado por (19.7.8) o por (19.7.9), mientras que fuera de la bobina toroidal *no* hay ningún campo. Esta propiedad de tales bobinas lleva a su extenso uso en circuitos eléctricos, donde es necesario generar un campo magnético intenso, pero resulta indeseable tener campos externos dispersos que puedan interferir en la operación de otros elementos de circuito. En realidad, el enrollamiento de las bobinas toroidales, o en general, el de cualquier bobina, realmente no produce espiras circulares planas sino que es una *hélice* cuyo paso es tan pequeño que sus espiras casi son de forma. Por ese motivo, además de fluir alrededor de la sección transversal circular, la corriente también *avanza a lo largo de un toroide o un solenoide*, recorriéndolos a toda su longitud. Esto quiere decir que el campo externo de una bobina toroidal real jamás es verdaderamente cero, sino que tiene un pequeño valor residual en forma parecida al que estaría asociado a la corriente I que fluyera en una sola espira circular de radio d. Pero pueden ser miles de veces más pequeño que el campo interior.

El caso del solenoide muy largo puede tratarse como el caso límite de la bobina toroidal cuando el radio medio d se hace infinitamente grande, mientras se mantiene constante el radio de la sección transversal R, como se ilustra en la figura 19.40. Después de todo, es verdad que puede considerarse a una línea recta como un segmento de una circunferencia de radio infinito. De las ecuaciones (19.7.8) y (19.7.9), es claro de inmediato que el campo en el centro del toroide siempre tiene el valor $B_c = \mu_0 nI$, que es totalmente *independiente* del radio d. Entonces, esta ecuación da el campo en el centro de la bobina en el punto O en la figura 19.40, sin importar la magnitud del radio, incluso en el límite cuando d tiende a infinito.

La expresión (19.7.8) da el campo en otros puntos en el interior de la bobina, en que r es la distancia del punto desde el eje central AA'. Cuando el radio medio d es relativamente pequeño, como en la figura 19.40, a, la relación d/r de la ecuación (19.7.8) puede ser apreciablemente mayor o menor que la unidad para puntos, dentro de la bobina que pueden estar cerca del radio interno o externo. Pero cuando d se hace muy grande (y la sección transversal de la bobina se mantiene constante) como se ilustra en la figura 19.40, b, la relación d/r para cualquier punto dentro de la bobina jamás puede diferir demasiado de la unidad. De hecho, a medida que d aumenta sin límite, la relación d/r para todos los puntos internos se aproxima a la unidad, por tanto en la ecuación (19.7.8) se encuentra que *en todas partes* en el interior de la bobina, el campo estará dado por

$$\boxed{B = B_c = \mu_0 n I} \qquad (19.7.12)$$

en que n es el número de vueltas por unidad de longitud. Al mismo tiempo, de (19.7.5) y de (19.7.11), el campo en todas partes fuera de la bobina será cero. Por tanto, los campos asociados a las bobinas toroidales y a las solenoidales de longitud infinita tiene las configuraciones que se muestran en la figura 19.41.

Desafortunadamente, todos los solenoides con que debe tratarse en la realidad son de longitud finita, por lo que sus propiedades se apartan en mayor o menor grado a las del solenoide infinito ideal descrito. En ningún caso ocurre que el campo magnético externo de un solenoide finito sea cero como el de uno de longitud infinita. En vez de ello, para un solenoide largo y delgado el campo externo es semejante al de un imán de barra recto y largo (fig. 19.4), mientras que para un solenoide corto y grueso, el campo es muy parecido al de la espira circular ilustrada en la figura 19.29. Sin embargo tratándose de un solenoide largo y delgado, el campo dentro de la bobina es bastante uniforme en una parte considerable del interior y tiene aproximadamente el valor constante dado por (19.7.12). En la figura 19.42 se muestra la configuración del campo en este tipo de solenoide; estas bobinas se pueden utilizar provechosamente para generar un campo magnético constante en el laboratorio, y también en la construcción de electroimanes, bobinas de relevadores y otros dispositivos electromecánicos.

EJEMPLO 19.7.1

Una bobina toroidal tiene un diámetro interno $a = 5$ cm, un diámetro externo $b = 10$ cm, 1 500 vueltas de alambre y conduce una corriente de 5 A. Encontrar (a) el campo magnético en el centro de la sección transversal circular, (b) el campo interior justamente después del radio interno y (c) el campo interno justo antes del radio externo. (d) Indicar qué campo habrá dentro de un solenoide infinito que tuviera precisamente el mismo número de vueltas por unidad de longitud.

En este ejemplo, el radio interno es de 0.05 m, el radio externo de 0.10 m y el radio medio o central d está dado por

$$d = \tfrac{1}{2}(a + b) = (\tfrac{1}{2})(0.15) = 0.075 \text{ m}$$

Por tanto, la circunferencia media es

$$c = 2\pi d = (2\pi)(0.075) = 0.4712 \text{ m}$$

El número de vueltas por longitud unitaria es

$$n = \frac{N}{c} = \frac{1500}{0.4712} = 3183 \text{ vueltas/m}$$

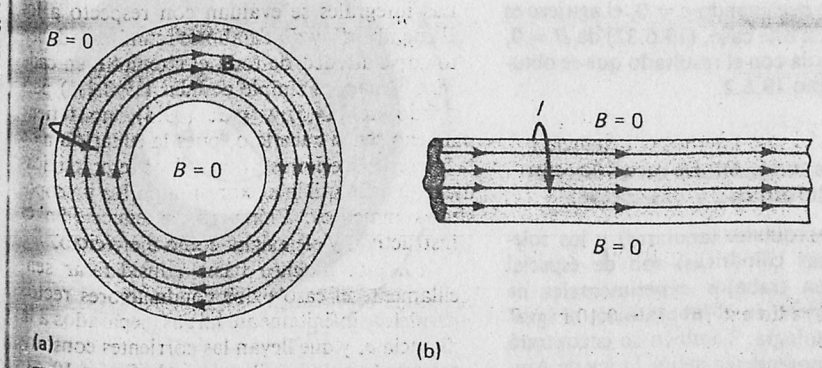


FIGURA 19.41. Configuración de campo para (a) una bobina toroidal y (b) un solenoide largo y recto.

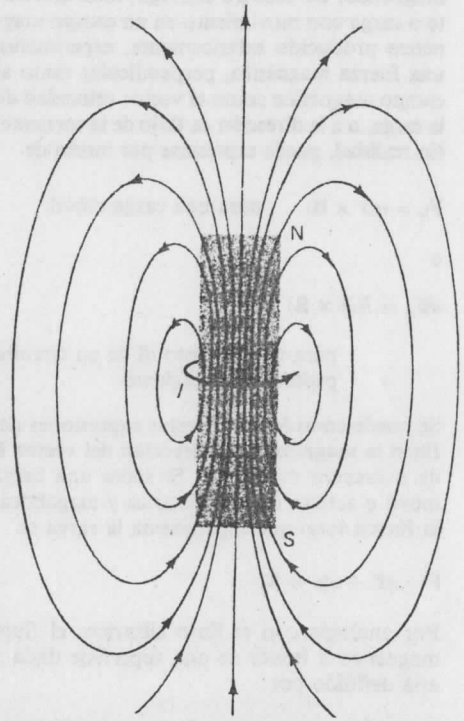


FIGURA 19.42. Configuración del campo magnético de un solenoide largo y finito.

De acuerdo con (19.7.9), el campo central B_c será

$$B_c = \mu_0 nI = (4\pi)(10^{-7})(3183)(5)$$

$$= 0.0200 \text{ Wb/m}^2$$

Justo después del radio interno, la distancia r al origen es de 0.05 m. De acuerdo con (19.7.8), el campo ahí es

$$B = \mu_0 nI \frac{d}{r} = \frac{(0.0200)(0.075)}{(0.05)} = 0.0300 \text{ Wb/m}^2$$

Justo antes del radio externo, $r = 0.10$ m y B estará dado por

$$B = \mu_0 nI \frac{d}{r} = \frac{(0.020)(0.075)}{(0.10)} = 0.0150 \text{ Wb/m}^2$$

Para un solenoide de longitud infinita con el mismo número de vueltas por unidad de longitud, el campo en todas partes del interior es

$$B = \mu_0 nI = (4\pi)(10^{-7})(3183)(5)$$

$$= 0.0200 \text{ Wb/m}^2$$

19.8 Fuerza entre corriente y definición del ampere

Antes ya se estudió el hecho de que las corrientes en los conductores dan lugar a campos magnéticos, y también que los conductores en los que fluye corriente experimentan fuerzas cuando se las expone a campos magnéticos externos. Reuniendo estas dos observaciones, puede comprenderse fácilmente que las corrientes pueden ejercer fuerzas entre sí a través de sus campos magnéticos.

Es bastante fácil escribir una expresión matemática para ese tipo de fuerzas, de la forma

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \qquad (19.8.1)$$

En esta expresión, $\mathbf{F}_{12}$ representa la fuerza sobre la corriente I_2 que fluye en un conductor C_2 compuesto por los elementos $d\mathbf{l}_2$, debida a la corriente I_1 que fluye en otro conductor C_1 descrito análogamente por los elementos $d\mathbf{l}_1$. El vector $\mathbf{r}_{12}$ es un vector que va del elemento $d\mathbf{l}_1$ del primer conductor al $d\mathbf{l}_2$ del segundo. Las integrales se evalúan con respecto a los elementos $d\mathbf{l}_1$ y $d\mathbf{l}_2$ de ambos circuitos y deben tomarse alrededor de todo el circuito en cada caso. Aunque es simple deducir (19.8.1) partiendo de (19.4.5) y de (19.5.4), no tiene mucho sentido hacerlo, pues la evaluación de la integral anterior es tan tediosa que prácticamente hace inútil la expresión para los propósitos inmediatos. Empero, su deducción es instructiva, y se le asigna como ejercicio.

En este momento basta considerar sencillamente el caso de dos conductores rectos paralelos, infinitamente largos, separados a la ditancia a, y que llevan las corrientes constantes I_1 e I_2, como se ilustra en la figura 19.43. De la ley de Biot y Savart, o de la ley de Ampère, se sabe que la inducción magnética $\mathbf{B}_1$

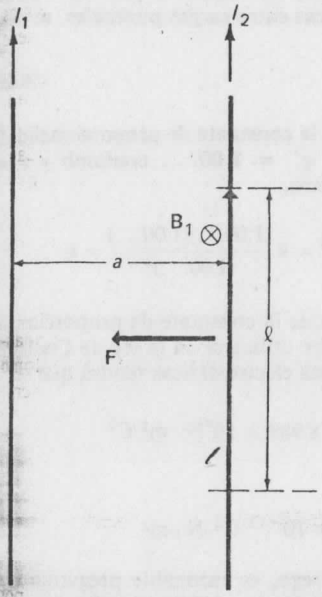


FIGURA 19.43. Determinación de las fuerzas magnéticas entre conductores rectos, paralelos y de gran longitud que conducen corrientes constantes.

debida a la corriente I_1 en el conductor de la izquierda es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \qquad (19.8.2)$$

en que r es la distancia desde el conductor. La dirección de $\mathbf{B}_1$ será perpendicular hacia el borde superior de la página, como se muestra en la figura 19.43, de acuerdo con la regla de la mano derecha. Claramente, la magnitud de $\mathbf{B}_1$ en el sitio del segundo conductor, donde $r = a$, es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \qquad (19.8.3)$$

De acuerdo con (19.4.5), la fuerza sobre un elemento $d\mathbf{l}$ del conductor de la derecha —que lleva la corriente I_2— debida a este campo magnético será,

$$d\mathbf{F} = I_2(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1) \qquad (19.8.4)$$

De hecho, ya que $\mathbf{B}_1$ es constante en toda parte del conductor de la derecha, se puede escribir la fuerza total sobre un segmento de ese conductor de longitud l como

$$\mathbf{F} = I_2(\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1) \qquad (19.8.5)$$

El vector $\mathbf{l}$ se ilustra en la figura 19.43. Ahí es claro que el vector $\mathbf{F}$ tiene la dirección mostrada, por lo que la corriente de la derecha experimenta una fuerza de *atracción* hacia la corriente paralela de la izquierda. De acuerdo con (19.8.5) y de (19.8.3), la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ debe ser

$$\boxed{F = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}} \qquad (19.8.6)$$

Se pueden resumir estos resultados expresando que la fuerza por unidad de longitud que experimenta el conductor de la derecha, es de atracción y está dada por

$$\boxed{\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}} \qquad (19.8.7)$$

Un cálculo semejante de la fuerza experimentada por el conductor de la izquierda debido al campo magnético de la corriente en el conductor de la derecha, indica que la fuerza que actúa en aquel conductor es de magnitud igual y de dirección opuesta a la dada por (19.8.7), lo que es de esperar para que se cumpla la tercera ley de Newton, ya que estas fuerzas califican en todas formas como una pareja de acción y reacción.

Si se invierte el sentido de la corriente I_2, el vector $\mathbf{l}$ también invierte su dirección, lo que a su vez invierte la dirección de la fuerza. Entonces se encuentra que las dos corrientes se repelen entre sí, por lo que la ley será que

las corrientes paralelas se atraen mientras que las antiparalelas se repelen.

Ahora se calculará la fuerza sobre un tramo de 1 m de conductor que lleva una corriente de exactamente 1 A, situado en forma paralela, el cual se encuentra a 1 m de distancia y que lleva la misma corriente. En este caso, $l = 1.0$

m, $I_1 = I_2 = 1.000$ A (exactos) y $a = 1.000$ m, de manera que (19.8.7) da

$$F = \frac{(4\pi)(10^{-7})(1.0)(1.0)}{(2\pi)(1.0)} = 2.00\ldots \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

en forma exacta. El hecho de que el resultado preciso del cálculo sea $2.00\ldots \times 10^{-7}$ N no es accidental sino que se debe a que *el ampere se define como la corriente que, cuando fluye a través de un conductor recto paralelo a uno con una corriente igual y a 1 m de distancia, genera una fuerza de atracción de precisamente* $2.00\ldots \times 10^{-7}$ newtons por metro. A su vez, esta definición fija la magnitud del *coulomb*, ya que esta unidad puede considerarse como la cantidad de carga que se transporta por un punto dado en un conductor, cuando fluye una corriente de 1 ampere durante 1 s.

Esta definición del ampere y del coulomb *también* determina el valor de la constante de permeabilidad μ_0. Por ejemplo, supóngase que no se conociera el valor de μ_0 y que se insistiera en definir el A en la forma antes descrita. Entonces se hubiera tenido que insistir en que en ese caso se producía una fuerza de exactamente $2.00\ldots \times 10^{-7}$ newtons y entonces la corriente *tendría* que ser de 1.00. . . ampere, es decir, 1.00. . . coulomb/segundo. Sustituyendo estos valores en (19.8.7), se encontraría que

$$2.00\ldots \times 10^{-7} = \frac{(\mu_0)(1.0)(1.0)}{(2\pi)(1.0)}$$

de donde

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A.m}$$

Por tanto, la manera de definir el ampere, y por ende el coulomb, *determina* que el valor de μ_0 sea $4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m. Si se acepta esta definición del coulomb y se pregunta la magnitud de la fuerza *electrostática* que pueden ejercer dos cargas puntuales de 1 C a 1 m de distancia, experimentalmente se encuentra que esta fuerza *casualmente* tiene el valor peculiar de 8.988×10^{-9} N. Empero, al escribir la ley de Coulomb para las fuerzas electrostáticas entre cargas puntuales, se tiene

$$F = k\frac{qq'}{r^2} \tag{19.8.8}$$

en que k es la constante de proporcionalidad. Para $q = q' = 1.00\ldots$ coulomb y $r = 1.00\ldots$ metro,

$$8.988 \times 10^9 = k\frac{(1.00\ldots)(1.00\ldots)}{(1.00\ldots)^2} = k$$

que indica que la constante de proporcionalidad que debe utilizarse en la ley de Coulomb de las fuerzas electrostáticas tendrá que ser

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

o sea

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$$

Desde luego, es razonable preguntar por qué a μ_0 se le da un valor tan simple, en vez de a ϵ_0. La respuesta es que debido a la disponibilidad de las fuentes de corriente constante como las celdas electroquímicas (baterías o acumuladores) y a los instrumentos precisos de medición de corriente como el galvanómetro de d'Arsonval, es mucho más fácil medir fuerzas entre corrientes y estandarizar estas últimas, que medir cargas electrostáticas. Por tanto, históricamente, cuando se necesitó contar con patrones eléctricos definidos con exactitud, fue mucho más sencillo disponer de un A reproductible y fácilmente medible de corriente, que de una carga precisa de un *C*. en realidad, en el sistema gaussiano CGS de unidades eléctricas, que se utiliza ahora ocasionalmente, la constante en la ley de Coulomb de las cargas tiene asignado un valor igual a la unidad, lo que a su vez fija la magnitud de la unidad electrostática de carga (ues) en ese sistema. Entonces la constante μ_0 ya no tiene el valor numérico simple que se le asigna en el SI.

Aprovechando este tema de la numerología de μ_0 y ϵ_0 es interesante señalar que las dimensiones de la cantidad $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ son las de velocidad, lo que puede apreciarse recordando que el Wb es una unidad de flujo magnético, que a su vez es igual a inducción magnética multiplicada por área (m²). Entonces, dimensionalmente (N/A · m, o bien, Wb/m²)

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\text{amp-m}}{\text{weber}} \cdot \frac{\text{N-m}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{amp}^2\text{-m}^2}{\text{N-m}^2} \cdot \frac{\text{N-m}^2}{\text{C}^2}$$

$$= \frac{\text{amp}^2\text{-m}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{C}^2\text{-m}^2}{\text{C}^2\text{-s}^2} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \tag{19.8.9}$$

Ahora tratará de determinarse la magnitud de la velocidad $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Sustituyendo los valores numéricos conocidos de μ_0 y ϵ_0 que, el lector recordará se obtienen midiendo fuerzas entre corrientes y entre cargas eléctricas, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(1.256637\times 10^{-6})(8.854185\times 10^{-12})}}$$

$$= 2.997925 \times 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

o sea que

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 299\ 792.5\ \text{km/s} \tag{19.8.10}$$

Al comparar esto con la *velocidad de la luz*, en forma independiente y con exactitud se determinó es de 299 792 kilómetros por segundo, se encuentra que ambos números concuerdan tanto que debe ser más que accidental sean tan cercanos. Por tanto, es de sospechar en cierta forma la luz debe estar relacionada íntimamente con los campos eléctrico y magnético.

Aunque todavía no se está en condiciones de aclarar esta relación, debe tenerse presente el hecho de ser uno de los objetivos que se persiguen. En el capítulo 23 se verá que las propiedades de los campos eléctrico y magnético llevan directamente a la posibilidad de *ondas electromagnéticas* formadas por campos eléctrico y magnético variables en el tiempo, que se propagan a la velocidad $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, y que exhiben todas las características observadas experimentalmente de las ondas luminosas.

RESUMEN

Una corriente eléctrica en un conductor, o una carga móvil en el espacio, produce un campo magnético. De manera análoga, toda corriente o carga con movimiento en un campo magnético producido exteriormente, experimenta una fuerza magnética, perpendicular tanto al campo magnético como al vector velocidad de la carga, o a la dirección de flujo de la corriente. En realidad, puede expresarse por medio de

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad \text{para una carga móvil}$$

o

$$d\mathbf{F}_m = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

para un elemento $d\mathbf{l}$ de un circuito portador de corriente

Se puede considerar que estas expresiones definen la magnitud y la dirección del vector **B** de inducción magnética. Si sobre una carga móvil q actúan fuerzas eléctrica y magnética, la fuerza total que experimenta la carga es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Por analogía con el flujo eléctrico, el flujo magnético a través de una superficie dada S está definido por

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da$$

Para un campo magnético constante y una superficie plana, la anterior se reduce a

$$\Phi_m = BA\cos\theta$$

en que θ es el ángulo entre la dirección de **B** y la normal a la superficie. La ley de Gauss para la inducción magnética tiene la forma

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, da = 0$$

en que el cero de la derecha refleja la inexistencia de la carga magnética, o el hecho de que las corrientes eléctricas son el origen de todos los campos magnéticos.

El campo magnético de una espira con corriente eléctrica es de carácter dipolar. El momento dipolar magnético $\mathbf{p}_m$ de toda espira con corriente se puede expresar por medio de

$$p_m = IA$$

en que A es el área de la espira. Las dirección del vector momento dipolar es normal al plano de la espira, y apunta en la dirección indicada por el pulgar de la mano derecha, cuando los otros dedos se curvan sobre la espira en el sentido de la corriente. El momento de rotación sobre una espira con corriente y situada en un campo magnético externo es

$$\tau = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$$

en que $\mathbf{p}_m$ es el momento dipolar magnético del circuito.

El campo magnético creado por una corriente dada puede encontrarse de dos maneras principales: En primer lugar, de acuerdo con la ley de Biot y Savart se puede expresar el elemento de campo $d\mathbf{B}$ que resulta del flujo de corriente I a lo largo del elemento $d\mathbf{l}$ de un conductor como

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

en que $\mathbf{r}$ es el vector que va del elemento de trayectoria $d\mathbf{l}$ al punto P donde desea calcularse el elemento de campo $d\mathbf{B}$. Luego se puede obtener el campo total integrando sobre todos los elementos de trayectoria $d\mathbf{l}$ a lo largo de los que fluye la corriente. Al realizar la adición debe tenerse cuidado de utilizar las reglas de la suma *vectorial*. Por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

En estas expresiones, la constante μ_0 tiene el valor de $4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m en unidades SI. Se llama *permeabilidad magnética del vacío*. En el caso de un conductor largo y recto que lleva la corriente I, la integración de la forma diferencial de la ley de Biot y Savart sobre los elementos $d\mathbf{l}$ de conductor para el campo a la distancia r del mismo, dá el resultado simple

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En este caso, las líneas de **B** son círculos que rodean al conductor en el sentido indicado por los dedos curvados de la mano derecha, cuando el pulgar apunta en la dirección de la corriente.

Una segunda forma de obtener el campo magnético asociado a una distribución de corriente dada es por la ley de Ampère, que expresa que para cualquier trayectoria *cerrada* C

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

en que I_C es la corriente que fluye a través de la trayectoria C alrededor de la cual se calcula la integral. La ley de Ampère es especialmente útil en casos en que la simetría permite que la integral anterior se exprese como la magnitud de B multiplicada por la longitud del camino cerrado C. La ley de Biot y Savart es un enunciado parecido al de la ley de Coulomb, en tanto que la ley de Ampère tiene gran analogía con la ley de Gauss de la electrostática.

El campo magnético fuera de una bobina toroidal ideal es cero. Dentro de la bobina, a lo largo del eje de la sección transversal, el campo magnético es paralelo al eje central del toroide y su magnitud es

$$B = \mu_0 n I$$

en que I es la corriente en la bobina y n el número medio de vueltas por unidad de longitud a lo largo del toroide. En un solenoide de gran longitud, el campo dentro de la bobina es uniforme, apunta en la dirección del eje de la bobina y su magnitud es

$$B = \mu_0 n I$$

siendo n número de vueltas por unidad de longitud e I la corriente en la bobina.

La fuerza por longitud unitaria de un conductor recto que conduce la corriente I_1 y está a la distancia a de un segundo conductor recto paralelo que lleva la corriente I_2 es

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

La fuerza es de atracción si las dos corrientes están en la misma dirección y de repulsión si están en direcciones opuestas.

La unidad ampere es la corriente que, cuando fluye a través de un conductor recto paralelo a otro igual con una corriente de igual intensidad y sentido, a 1 m de distancia, experimenta una fuerza de atracción de exactamente 2.000. . . $\times 10^{-7}$ newtons por metro. Esta definición fija también la magnitud del coulomb, que equivale a 1 A · s.

PREGUNTAS

1. El campo eléctrico se define de manera que la fuerza eléctrica sea paralela al campo. ¿Podría definirse el campo magnético de manera que la fuerza magnética fuese paralela a este campo?
2. La máxima velocidad de una partícula con carga q es v_0. ¿Cuál es la magnitud máxima y la mínima de la fuerza magnética que actúa sobre ella?
3. Una partícula de carga q y velocidad $\mathbf{v}$ no se desvía cuando se mueve a través de una región del espacio en que hay campos uniformes **E** y **B**. Obtenga una expresión para **E** en términos de las otras cantidades.
4. Los campos magnéticos se deben al movimiento de cargas eléctricas. ¿Existen otras formas en que pueda producirse un campo **B**?
5. En un tubo de rayos catódicos, inicialmente se proyectan los electrones en la dirección del eje z positivo y el haz se desvía hacia los valores negativos de x en el plano xy. Si la deflexión se debe a un campo magnético, halle la dirección del mismo.
6. Un alambre que lleva una corriente I no experimenta fuerza magnética alguna aunque esté en un campo magnético uniforme. ¿Cómo puede explicarse lo anterior?
7. En las partes del norte de Canadá, el flujo de rayos cósmicos es mayor que en el Ecuador. ¿Cómo puede explicarse éste?
8. Un niño que mira la televisión, nota una distorsión en la imagen siempre que acerca su pequeño imán de juguete a la pantalla. Explique esto.
9. Analice los diversos factores que determinan el flujo magnético a través de una superficie dada. ¿Siempre es cierto que el flujo magnético a través de una superficie cerrada vale cero?
10. ¿Puede sugerir un método para medir el momento dipolar de una aguja de brújula?
11. Señale y compare las diferencias entre la ley de Biot y Savart y la ley de Coulomb para las cargas eléctricas.
12. Indique si la ley de Ampère es válida para todas las trayectorias cerradas posibles que pudieran escogerse. ¿Es útil para todas ellas?
13. Se puede utilizar la ley de Ampère y la ley de Biot y Savart para calcular campos magnéticos. Indique cuál es más general, en términos de aplicabilidad.
14. El campo magnético debido a un toroide está completamente limitado a su interior, mientras que el campo debido a un solenoide largo no se anula en el exterior. Explique esto en términos de la necesidad de que cierren las líneas del campo magnético.
15. Explique en términos simples por qué la fuerza entre dos alambres que llevan corriente, es proporcional al producto de las intensidades.
16. Un protón se mueve de occidente a oriente cerca del Ecuador terrestre. ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética que experimenta?
17. Dos partículas de carga igual están limitadas a moverse paralelamente una a la otra. Analice los campos magnéticos y las fuerzas producidas y experimentadas por cada una de las cargas.
18. En Estados Unidos y Gran Bretaña están creándose muchas discusiones acerca de la adopción de las unidades métricas en vez de las del sistema inglés. Pero por lo que respecta a las unidades *eléctricas*, ambos países han utilizado el sistema métrico durante más de un siglo, ya que el volt, el ampere, el coulomb, el ohm y el watt eran y son unidades MKS. Sólo por molestar a los propugnantes afanosos del Sistema Internacional, ¿puede sugerir una forma de definir las unidades eléctricas con base en el sistema *inglés o "británico"*? ¿Qué valor tendrían los factores de conversión entre las posibles unidades "britcoulomb", "britvolt", "britampere", "britwatt" y "britohm" y las unidades normales del SI? ¿Qué valores tendrán ϵ_0 y μ_0 en las unidades inventadas del "Sistema Británico"?

PROBLEMAS

1. Una carga puntual de 1.8×10^{-6} C se mueve sobre el eje $+x$ a 800 m/s. Hay una inducción magnética constante **B** cuya magnitud es de 0.72 N/A · m. El campo **B** está en el plano yz y forma un ángulo de 45° con el eje $+y$. Determine la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre la carga.
2. Una carga puntual de 2.7×10^{-5} C se mueve sobre el eje $+y$ a 600 m/s. Hay un campo constante **B** de 0.96 N/A · m (o Wb/m²). Su dirección está en el plano xy, formando ángulos iguales con los ejes $+x$ y $+y$. Obtenga la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre la carga.

3. Un campo eléctrico de 1 200$\mathbf{i}_y$ V/m y un campo magnético de 0.080$\mathbf{i}_z$ Wb/m^2 actúan sobre un electrón para producir una fuerza neta igual a cero. Si los campos eléctrico y magnético son perpendiculares, indique la magnitud y dirección de la velocidad del electrón.

4. Un deuterón (de masa $2m_p$ y carga $+e$) se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 500 V, adquiriendo con ello la velocidad v. Para esta última magnitud, evalúe el radio de su órbita en un campo magnético de 0.5 Wb/m^2.

5. Demuestre que la energía cinética de una partícula de carga q y masa m en un campo magnético B está dada por $q^2 B^2 r^2/2m$, en que r es el radio de su trayectoria orbital circular.

6. En $t = 0$, se proyecta una partícula de carga q y masa m a una región del espacio donde actúa sobre ella un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{i}_z$. Si la velocidad inicial es $\mathbf{v}_0 = v_{0y}\mathbf{i}_y + v_{0x}\mathbf{i}_x$, describa su movimiento subsecuente. Calcule la velocidad $\mathbf{v}$ a un tiempo arbitrario t.

7. Una carga $q_0 = 6 \times 10^{-5}$ C se mueve a razón de 19 500 m/s sobre el eje x, en presencia de un campo magnético $\mathbf{B}$ de 8.0 Wb/m^2 que está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje de las x. Halle la magnitud y dirección de la fuerza sobre la carga.

8. Un protón circunda a la Tierra siguiendo una órbita sobre el Ecuador. El radio de la órbita (medida desde el centro de la Tierra) es 1.2×10^{-4} km. Se supone que el campo magnético terrestre en la órbita es de 1.5×10^{-5} Wb/m^2 en dirección paralela a su eje, y se desprecian todos los efectos gravitacionales. Utilizando $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg y $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, calcule (a) la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre el protón y (b) el periodo de movimiento orbital del protón.

9. Si la velocidad de un electrón es de 10^7 m/s y es perpendicular a un campo magnético, determine la intensidad que debe tener el campo para que la órbita del electrón sea de 1 m de diámetro.

10. Una partícula de carga q y masa m entra a una región con un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ a la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Calculando el trabajo efectuado por la fuerza magnética, demuestre que la energía cinética de la partícula es constante.

11. Un ion con carga $+3e$ se proyecta a un campo magnético uniforme de 1.5 Wb/m^2. Viaja a 10^7 m/s formando un ángulo de 45° con la dirección del campo. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza sobre el ion.

12. Entre las armaduras de un capacitor de placas paralelas con separación d, existe una diferencia de potencial ΔV. Entre las placas hay un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, perpendicular al campo eléctrico. Se proyectan electrones a la región y se observa que no se desvían cuando hay un valor apropiado de ΔV. Luego se suprime el campo eléctrico, ΔV decrece a cero y se aprecia que los electrones viajan según una trayectoria circular de radio r. (a) Obtenga una expresión para e/m en términos de ΔV, B, r y d. (b) Si el voltaje ΔV es tal que produce un campo eléctrico de 10^4 V/m si B y r son 10^{-3} Wb/m^2 y 5.71 cm, respectivamente, determine la relación de la carga a la masa, e/m.

13. En una región dada del espacio hay un campo magnético uniforme de 0.2 Wb/m^2. A esta región entra una partícula cargada con una velocidad de 10^5 m/s, y su vector velocidad forma un ángulo de 30° con la dirección de $\mathbf{B}$. Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico que hará que no se desvíe la trayectoria de la partícula.

14. Un campo magnético $\mathbf{B}$ apunta en la dirección z, y su magnitud es de 2 Wb/m^2. Evalúe el flujo magnético Φ_m que atraviesa una espira cuadrada de 2 m^2 de área, si el plano de la espira forma un ángulo de 15° con el eje z.

15. Se coloca una bobina rectangular de 18 cm por 36 cm en un campo de inducción magnética constante de 0.24 Wb/m^2. El vector $\mathbf{B}$ forma un ángulo de 53° con el plano de la bobina. Halle el flujo magnético que atraviesa la bobina.

16. La magnitud de un campo de inducción magnética cuya dirección es paralela al eje z varía en la dirección del eje x y está dada por $B = B_0(1 + (x/x_0)^2)$, en que B_0 y x_0 son constantes. Demuestre que el flujo magnético que atraviesa una espira rectangular en el plano xy de longitud a y anchura b, y cuyo centro está en el punto $x = c$, $y = 0$, puede expresarse como $\Phi_m = AB(c) + AB_0b^2/12x_0^2$, en que $B(c)$ es el valor de B en el centro de la espira. Se supone que el lado de la espira de longitud b es paralelo al eje x.

17. Utilizando la ecuación (19.3.8), demuestre que es imposible tener un campo magnético radial esféricamente simétrico, es decir, un campo magnético tal que $B = (k/r^2)\mathbf{i}_r$, semejante al campo coulómbico de una carga puntual.

18. Las masas atómicas de dos isótopos de cierto elemento son m_1 y m_2. Ambos están ionizados simplemente y se aceleran a través de la misma diferencia de potencial. Después de ser acelerados desde el reposo, ambos átomos entran a un campo magnético uniforme, viajan siguiendo un semicírculo y se detectan en una placa fotográfica. Si describen trayectorias con radios r_1 y r_2, respectivamente, halle la relación de sus masas.

19. Un alambre largo y recto lleva una corriente de 50 A. Se coloca en un campo magnético uniforme de 0.0200 Wb/m^2, que forma un ángulo de 30° con el alambre. Obtenga la fuerza magnética por unidad de longitud del conductor.

20. El campo magnético de la Tierra en el Ecuador es horizontal, apunta hacia el Norte y su intensidad es aproximadamente de 1.0×10^{-4} Wb/m^2. Una línea de transmisión de 100 m de longitud conduce una corriente de 700 A de oriente a poniente. Evalúe la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la línea de transmisión debida al campo magnético terrestre.

21. Una bobina rectangular de 0.12 m de longitud y 0.18 m de ancho consiste en 240 vueltas de alambre fino. (a) Determine el momento dipolar de esta bobina cuando lleva una corriente de 6.0 A. (b) Determine el momento de rotación que experimentará en un campo de inducción magnética uniforme de 0.24 Wb/m^2 y que forma un ángulo de 30° con el plano de la bobina.

22. Una espira circular delgada hecha de material aislante y con 0.16 m de radio, tiene una carga distribuida uniformemente de 1.8×10^{-5} C. Gira alrededor de su eje a la velocidad angular de 3 000 rpm. Evalúe su momento magnético.

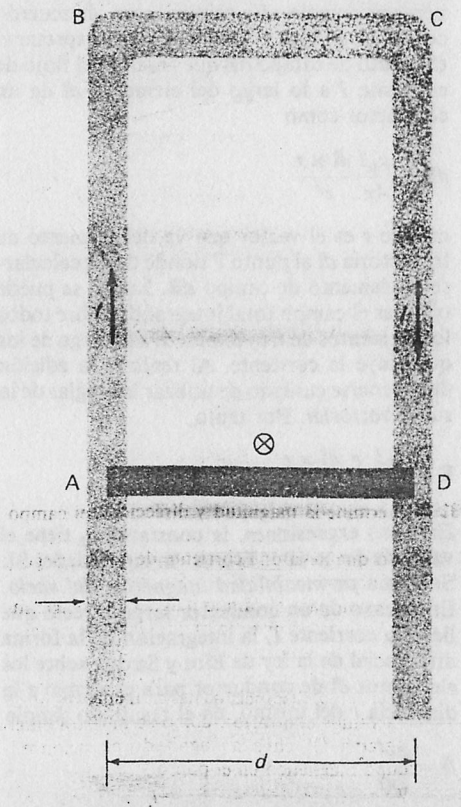
23. Un disco delgado de material aislante y radio R, con una densidad de carga uniforme σ, gira con frecuencia angular ω alrededor de su eje. Halle el momento magnético del disco.

24. Un galvanómetro consiste en una bobina de 2.5 cm de longitud por 2 cm de ancho, formada con 250 vueltas de alambre y colocada en un campo magnético uniforme de 0.12 Wb/m^2. El plano de la bobina es normal al campo cuando no pasa corriente por el instrumento. Si una corriente de 5×10^{-6} A provoca una deflexión de 45° en la bobina, determine la constante de torsión del resorte del galvanómetro.

25. Un momento magnético $\mathbf{p}_m$ en un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ experimenta un momento de rotación dado por la ecuación (19.4.17). Este momento debe ser igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular $d\mathbf{L}/dt$. Si el momento magnético es proporcional a la cantidad de movimiento angular, es decir, $\mathbf{p}_\mu = \lambda\mathbf{L}$, estudie el movimiento del vector momento cinético angular $\mathbf{L}$ en el campo magnético $\mathbf{B}$.

26. Una bobina rectangular de 6 por 12 cm contiene 500 vueltas de alambre y lleva una corriente de 10^{-6} A. Calcule el máximo momento de rotación sobre la bobina en un campo magnético uniforme de 0.2 Wb/m^2.

27. En el diagrama anexo se muestran dos conductores paralelos muy largos, AB y CD; están en un plano horizontal y conectados mediante el puente fijo BC y por un conductor deslizante sin fricción, AD, cuya masa es m. Como se muestra, por el circuito fluye una corriente I. Despreciando el efecto de la corriente en el conductor BC, que se supone que está muy alejado de AD, obtenga una expresión para la aceleración del conductor deslizante AD.

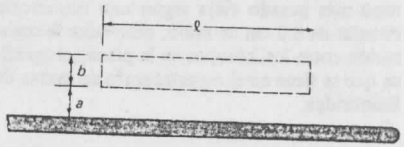


28. Un alambre largo y recto de longitud L lleva una corriente I. Utilizando la ley de Biot y Savart, calcule el campo magnético producido a la distancia r del centro del conductor, en un plano perpendicular a éste. Luego, L tiende a

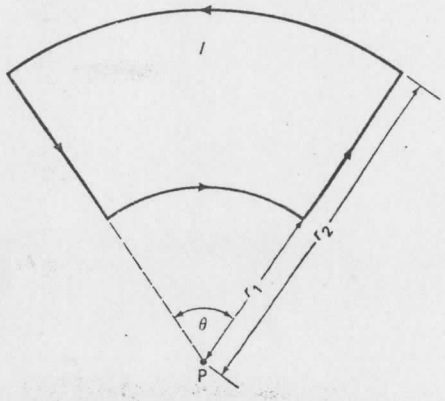
infinito; demuestre que se obtiene el campo magnético $\mu_0 I/2\pi r$ debido a un alambre infinitamente largo.

29. Una corriente I fluye en el sentido del reloj alrededor de una espira de alambre con forma de triángulo equilátero de lado L. Halle el campo magnético en el centro de la figura.

30. Calcule el flujo magnético que atraviesa el contorno que se indica en la siguiente figura.



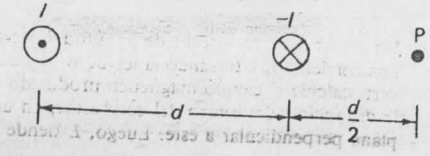
31. Un circuito cerrado lleva una corriente I, como se muestra en el diagrama. Obtenga el campo magnético que se produce en el punto P.



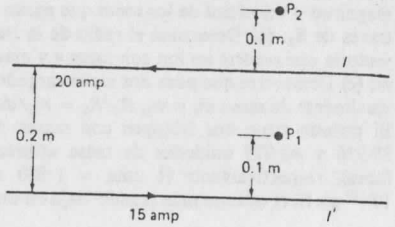
32. Determine la magnitud y dirección del campo magnético a 1.5 cm de un conductor largo y recto que lleva una corriente de 400 A.

33. Utilizando la ley de Biot y Savart, obtenga una expresión para el campo magnético producido en el centro de una espira circular de radio a y que lleva una corriente I.

34. Dos alambres rectos paralelos, muy largos, separados a la distancia d, llevan una corriente I en sentidos contrarios, como se muestra en el diagrama. Obtenga la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P.



35. Dos alambres largos y paralelos distantes 0.2 m llevan corrientes de 15 y 20 A, respectivamente, como se muestra en el diagrama. Calcule el campo magnético **B** en los puntos P_1 y P_2.



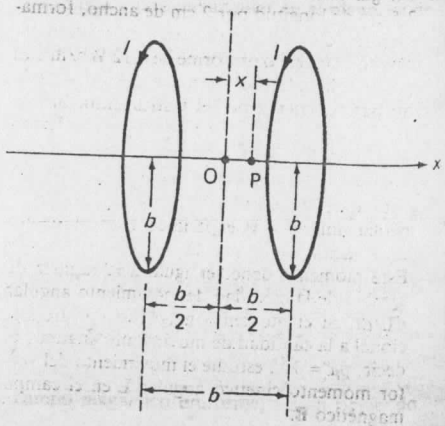
36. Una partícula de carga q y masa m entra a un campo magnético uniforme **B** y viaja sobre una órbita circular de radio R. Demuestre que debido al movimiento circular de la carga, en el centro de la órbita de la partícula existirá un campo adicional de magnitud

$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2 B}{mR}$$

37. Dos bobinas circulares paralelas y coaxiales, cada una de radio b, están a la distancia b, como se muestra en el diagrama. Ambas llevan la misma corriente I. Demuestre que el campo magnético en un punto P del eje está dado por

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0 I b^2 \{[b^2 + (x + \tfrac{1}{2}b)^2]^{-3/2} + [b^2 + (x - \tfrac{1}{2}b)^2]^{-3/2}\}$$

Esta disposición se conoce como "bobina de Helmholtz" y produce un campo muy uniforme en el punto medio de la línea que une los centros de las bobinas. Demuestre que la primera y la segunda derivadas de B con respecto a x se anulan en este punto ($x = 0$).



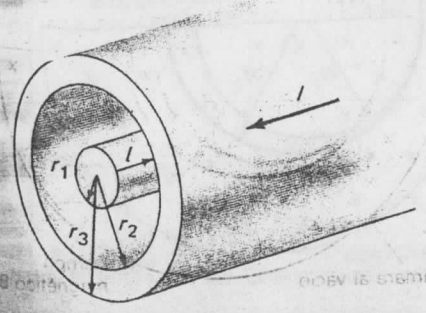
38. El campo magnético terrestre tiene la magnitud de 2.0×10^{-4} Wb/m² en determinado sitio. Unas bobinas de Helmholtz, como las ilustradas en el diagrama anterior, consisten en dos enrollamientos circulares, cada uno de los cuales contiene 40 vueltas. Si el radio de las bobinas es de 15 cm, determine la corriente necesaria para cancelar el campo magnético terrestre, produciendo con ello una pequeña región libre de campo en el punto $x = 0$ a lo largo del eje de las bobinas. Suponga que este eje se halla en la dirección del campo magnético terrestre.

39. Una bobina cuadrada, cuyos lados miden L, lleva una corriente I. Halle la magnitud del campo magnético a la distancia z arriba del centro de la bobina. (*Sugerencia*: Utilice el resultado del problema 28.)

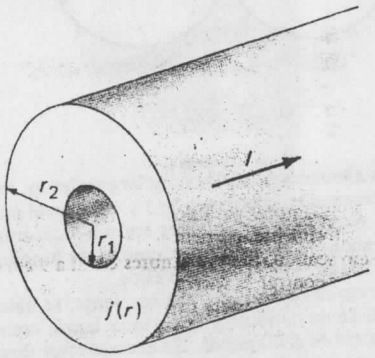
40. Un anillo circular de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente. El anillo gira alrededor de uno de sus diámetros con la velocidad angular ω. Obtenga una expresión para el campo magnético en el centro del anillo.

41. Una bobina de alambre flexible de longitud L lleva una corriente I. El alambre puede tomar la forma de una espira plana circular, cuadrada o rectangular. Indique para cuál de estas posibilidades se obtiene el máximo campo magnético en el centro de la bobina.

42. Un conductor coaxial muy largo consiste en un elemento cilíndrico interno de radio r_1 y otro cilindro externo de radio interior r_2 y radio exterior r_3, como se muestra en el diagrama. Los conductores interno y externo llevan corrientes I de igual intensidad pero de sentidos opuestos. La densidad de corriente en ambos conductores es uniforme. Obtenga expresiones para el campo magnético en función de r, la distancia desde el eje, para valores de r entre cero infinito. Grafique B en función de r.



43. Un conductor cilíndrico largo y hueco tiene un radio interior r_1 y radio exterior r_2, como se muestra en la figura. El conductor lleva una corriente total I, pero la densidad de corriente j dentro del conductor no es uniforme. Calcule el campo magnético B para $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ y $r > r_2$ con cada uno de los siguientes casos: (a) j varía linealmente con la distancia desde el eje central en la región entre r_1 y r_2, es decir, $j(r) = \alpha r$, en que α es una constante, para $r_1 < r < r_2$ y (b) j varía cuadráticamente en la misma región, es decir, $j(r) = \beta r^2$, en que β es una constante, para $r_1 < r < r_2$. (*Sugerencia*: ¿Cómo se evalúan los valores de α y β en términos de la corriente total I en los casos anteriores?)



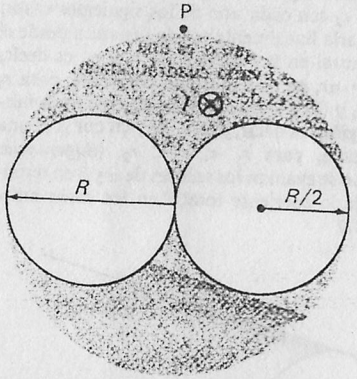
44. Un solenoide largo mide 50 cm y lleva una corriente de 0.4 A. Contiene 300 vueltas de alambre, cada una de 4 cm de radio. Calcule: (a) el campo magnético **B** cerca del centro del solenoide, y (b) el flujo magnético total que pasa a través de cada vuelta. (c) Si se aumenta la corriente en 1%, determine el aumento fraccional del campo magnético.

45. Una bobina solenoidal larga, que consiste en vueltas o espiras circulares estrechamente situadas, tiene 3.0 cm de radio y lleva una corriente de 1.5 A. El campo magnético en el centro de la bobina es de 1.4×10^{-4} Wb/m². Determine el número de vueltas en la bobina.

46. Una bobina toroidal arrollada uniformemente tiene 1 000 vueltas de alambre. El radio interior es de 1.5 cm y el radio exterior de 20 cm. Determine el valor del campo magnético en el centro de la bobina cuando la corriente en el devanado es de 10 A.

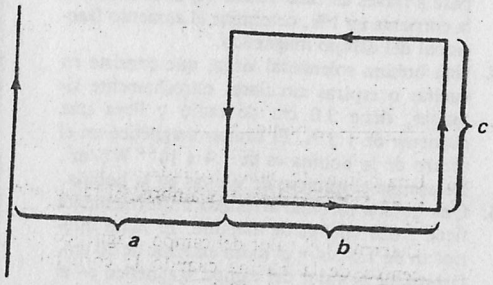
47. Determine el campo magnético en el centro del "agujero" de la bobina toroidal (o en forma de rosca) del problema anterior.

48. Un cilindro conductor muy largo contiene dos cavidades cilíndricas, como se muestra en el diagrama. Halle el campo magnético producido en el punto P encima de la superficie del cilindro, si la corriente total en el conductor es I y la densidad de corriente es uniforme en su sección transversal.

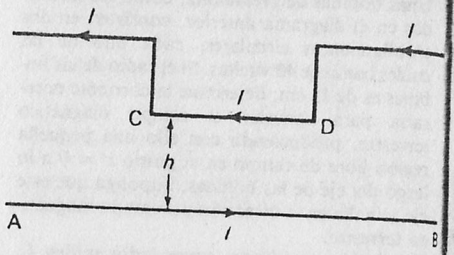


49. Dos alambres paralelos muy largos llevan, respectivamente, corrientes de 5 y 10 A en el mismo sentido. Si los alambres están a 9 cm entre sí, encontrar la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre uno de ellos.

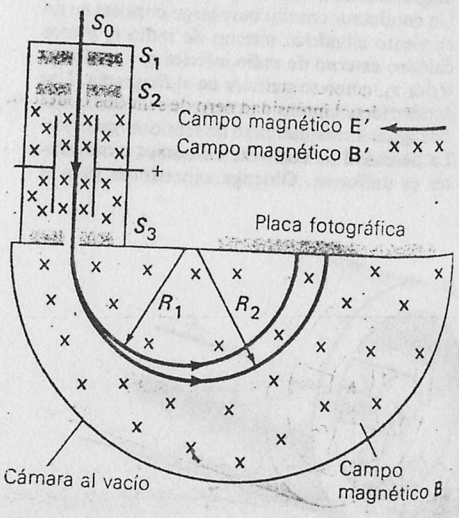
50. Una espira rectangular con corriente, se ubica cerca de un conductor recto muy largo, como se ilustra en el diagrama. En el conductor fluye una corriente I = 3 A y en la espira se tiene I' = 1 A. Las dimensiones de la citada espira son b = 0.5 m, c = 0.3 m, mientras que la distancia a es de 0.2 m. Obtenga la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre la espira conductora.



51. Un alambre horizontal largo AB lleva una corriente de 50 A (vea la figura). El alambre CD puede moverse hacia arriba y hacia abajo mientras hace contacto eléctrico en los puntos CD. La masa por unidad de longitud de CD es 5×10^{-3} kg/m. Determine la altura h de equilibrio a la que llega CD cuando fluyen las corrientes como se ilustra.



52. Un espectrógrafo de masas es un instrumento que se utiliza para medir las masas de iones cargados y determinar la abundancia relativa de los distintos isótopos de cualquier elemento dado. En la figura se ve un diagrama de un espectrógrafo de masas del tipo Bainbridge. Los iones positivos que provienen de una fuente se coliman pasando a través de las rendijas S_1 y S_2. Luego pasan a una región con campos eléctrico y magnético perpendiculares, que selecciona una velocidad única para pasar a través de la rendija S_3. Los iones que pasan por S_3 entran a una región en que hay un campo magnético constante **B**, perpendicular a la página.



Luego viajan según una trayectoria circular, y finalmente son registrados en una placa fotográfica. La densidad de la imagen fotográfica mide su abundancia relativa, mientras que el radio de la trayectoria se utiliza para medir la masa. (a) En términos de **E′** y **B′**, evalúe la magnitud y velocidad de los iones que pasan a través de S_3. (b) Determine el radio de la trayectoria que recorre un ion con carga e y masa m; (c) Demuestre que para dos iones cargados igualmente de masa m_1 y m_2, $R_1/R_2 = m_1/m_2$.

53. El potasio tiene dos isótopos con masas de 38 976 y 40 975 unidades de masa atómica (uma), respectivamente (1 uma = $1\,660 \times 10^{-24}$ g). Si el isótopo más pesado viaja en una trayectoria circular de radio 8.0 cm, en el espectrógrafo de masas que se estudió en el problema anterior, determine el radio de la trayectoria del isótopo más ligero. Si los iones potasio tienen la carga e, evalúe el campo magnético B si se sabe que E' = 70 000 V/m y B' = 0.5 Wb/m². Halle también la velocidad de los iones potasio.

54. Las masas de los dos isótopos del cloro son 34 980 y 36 978 uma respectivamente. Si el isótopo más pesado viaja según una trayectoria circular de 8.0 cm de radio, determine la separación entre los isótopos en la placa fotográfica que se tiene en el espectrógrafo de masas de Bainbridge.

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

20

20.1 Introducción

En el capítulo anterior se vio que el paso de una corriente eléctrica crea un campo magnético alrededor del conductor por el que fluye la corriente. El descubrimiento de Oersted de este hecho, en 1819, condujo a los científicos a preguntarse si de alguna manera sería igualmente posible invertir el proceso e inducir el flujo de corriente en un circuito por medio de un campo magnético. Los experimentos iniciales para producir este efecto fracasaron, porque al principio no se apreció que los flujos magnéticos *constantes* no inducen una FEM o flujo de corriente en un circuito. No fue sino hasta 1831 que se descubrió que podía generarse magnéticamente una corriente, pero que este fenómeno *sólo se observa cuando el flujo magnético a través del circuito cambia en el tiempo*. A este efecto se le llama *inducción electromagnética*, y las corrientes y FEMs generadas de esta manera se denominan *corrientes inducidas y FEMs inducidas*. El físico inglés Michael Faraday (1791-1867) y Joseph Henry (1797-1878), quien fue el primero de una larga serie de distinguidos físicos estadounidenses, descubrieron de manera independiente y casi al mismo tiempo, la inducción electromagnética.

El descubrimiento de la inducción electromagnética de inmediato condujo a la posibilidad de construir máquinas que pudieran convertir el trabajo mecánico en energía eléctrica haciendo girar simplemente bobinas

conductoras en un campo magnético intenso. Este tipo de máquinas, que ahora se denominan *generadores*, se llamaron primeramente *dínamo-eléctricas*, y aunque muchos ingenieros y técnicos participaron en el desarrollo tecnológico de las *dínamos*, desde una curiosidad de laboratorio hasta una máquina comercial eficiente, puede considerarse que Henry y Faraday fueron los inventores del generador eléctrico. Puesto que las dínamos simples son reversibles y pueden operar como *motores*, o máquinas que producen trabajo mecánico cuando se les suministra corriente eléctrica de una fuente externa, igualmente se puede acreditar a Faraday y a Henry el haber inventado el motor eléctrico.

Estos dos científicos observaron que cuando fluye una corriente variable en el tiempo por un circuito dado, el campo magnético del propio circuito actúa induciendo una FEM en el mismo circuito, cuyos efectos son tales que se opone a la FEM externa que provoca la variación de la corriente. A este efecto se le llama *auto-inducción*. También estudiaron las FEMs y corrientes inducidas en una bobina por corrientes variables en el tiempo que fluyen en otra bobina próxima, y encontraron que se podían producir FEMs inducidas muy grandes en una bobina con un número grande de vueltas de conductor, por medio de una FEM variable en el tiempo y más pequeña, aplicada en una bobina que consistiera en relativamente pocas vueltas. Así construyeron las primeras *bobinas de inducción*, que son precisamente las antecesoras de las bobinas de encendido que se usan en los automóviles con motor de gasolina para excitar las bujías, e inventaron los principios sobre los que opera el *transformador*.

Aunque Michael Faraday y Joseph Henry estaban interesados primordialmente en comprender y explicar los principios científicos en los que se funda el comportamiento de las corrientes eléctricas y los campos magnéticos, y no en inventar y desarrollar productos comerciales, se puede decir con seguridad que los valores sociales y comerciales resultantes de su trabajo hubieran bastado para multiplicar con creces sus modestos salarios.

En este capítulo se estudiará la manera como se producen las FEMs y las corrientes inducidas a partir de flujos magnéticos cambiantes y cómo los flujos variables afectan las corrientes que circulan en los circuitos donde se originan y en otros circuitos. Al hacerlo, se tendrán que dominar los conceptos fundamentales que subyacen a los fenómenos de las FEMs y las corrientes inducidas, y a comprender la autoinducción, la inducción mutua y el comportamiento de los circuitos resistivos-inductivos.

20.2 FEMs de movimiento, corrientes inducidas y ley de inducción de Faraday

La física básica que fundamenta la producción de fuerzas electromotrices y corrientes inducidas por variación de flujos magnéticos, se puede comprender bastante bien considerando ejemplos donde algunos circuitos se someten a la acción de flujos magnéticos variables en el tiempo. En este punto, será conveniente que el lector revise la definición del término *flujo magnético* dada en la sección 19.3, ya que no se podrá comprender bien este capítulo a menos que el estudiante entienda este concepto.

Los resultados experimentales de Faraday y Henry acerca de la producción de FEMs y corrientes inducidas puede resumirse en la observación de que

> siempre que un flujo magnético variable en el tiempo atraviesa un circuito, se induce una FEM en éste cuya magnitud es directamente proporcional a la intensidad de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo.

Este enunciado se conoce como *ley de inducción de Faraday*. Matemáticamente, haciendo referencia a la definición de flujo magnético expresada en la sección 19.3, puede escribirse como ecuación en la forma siguiente:

$$\mathcal{E}_m = C\frac{d\Phi_m}{dt} = C\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (20.2.1)$$

en que $\mathcal{E}_m$ designa la FEM inducida magnéticamente en el circuito y C es una constante de proporcionalidad cuya magnitud depende de

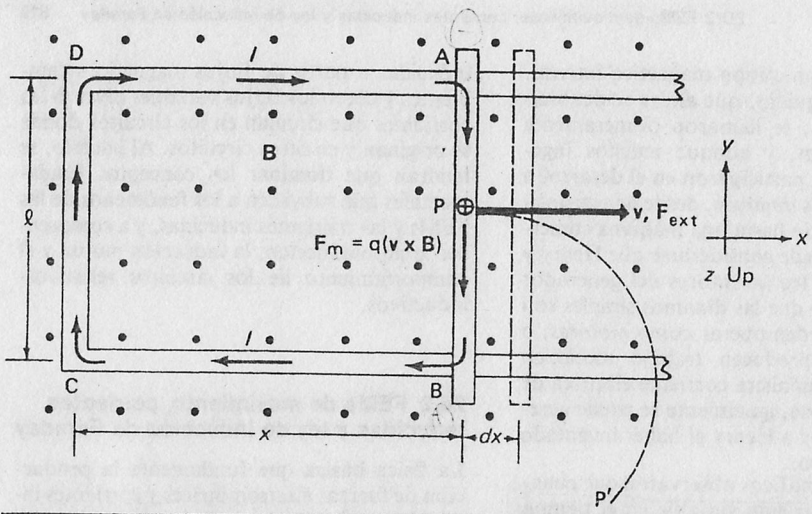


FIGURA 20.1. Fuerzas magnéticas y corrientes en un conductor en forma de U sobre el que se mueve un contacto deslizante que toca las dos ramas.

las unidades en que estén $\mathscr{E}_m$, Φ_m y t. La integral en (20.2.1) se toma sobre el área encerrada por el circuito. En el SI, la constante C tiene el valor exacto de -1, por razones semejantes a las que determinan el valor $4\pi \times 10^{-7}$ para la permeabilidad magnética del vacío. Entonces, en este sistema la ley de Faraday se expresa como

$$\boxed{\mathscr{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da} \qquad (20.2.2)$$

Esta expresión puede simplificarse a

$$\mathscr{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}BA\cos\theta \qquad (20.2.3)$$

en circunstancias en que se puede expresar como $BA\cos\theta$ a la integral de (20.2.2), que define al flujo magnético. En la expresión anterior, A es el área limitada por el circuito y θ el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano de aquel. La ecuación (20.2.3) puede utilizarse siempre que $\mathbf{B}$ sea de magnitud uniforme en el área encerrada por el circuito, a condición de que el circuito esté en un plano. Estas condiciones se satisfarán en la mayoría de los ejemplos considerados en este texto, aunque hay algunos casos de interés práctico en que no es así. En esos casos es necesario calcular la FEM inducida utilizando la expresión más general (20.2.2).

El flujo magnético que atraviesa un circuito se puede variar, como indica (20.2.3), en una diversidad de modos: variando la magnitud de $\mathbf{B}$ con respecto al tiempo, haciendo cambiar el área del circuito con respecto al tiempo, o variando el ángulo θ con respecto al tiempo. *En todos los casos* se produce una FEM inducida descrita por (20.2.3) o por (20.2.2). Diferenciando el producto $BA\cos\theta$ en (20.2.3) y utilizando la regla para diferenciar el producto de tres funciones, se pueden ver más claramente estas distintas posibilidades:

$$\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) = A\cos\theta\frac{dB}{dt} + B\cos\theta\frac{dA}{dt} + BA\frac{d(\cos\theta)}{dt} \qquad (20.2.4)$$

Como $d(\cos\theta)/dt = -\operatorname{sen}\theta\,(d\theta/dt)$, esto permite escribir (20.2.3) en la forma

$$\boxed{\mathscr{E}_m = -A\cos\theta\frac{dB}{dt} - B\cos\theta\frac{dA}{dt} + BA\,\omega\operatorname{sen}\theta} \qquad (20.2.5)$$

en que ω es la velocidad angular $d\theta/dt$. El signo negativo en (20.2.2) y (20.2.3) también tiene gran significación física, aunque se pospondrá el estudio detallado hasta más adelante en este capítulo.

Se pueden ilustrar los principios físicos en que se basa a la ley de inducción de Faraday considerando detalladamente unos cuantos casos específicos en que se generan FEMs inducidas de modos especialmente simples. La primera se ilustra en la figura 20.1. En ese diagrama se ve un conductor rígido en forma de U cuyos brazos están conectados por un segmento de conductor recto AB que puede deslizarse sobre los brazos de la U. Todo el sistema está en un campo magnético constante $\mathbf{B}$, en la dirección z. Aplicando una fuerza $\mathbf{F}_{ext}$ hacia la derecha se puede hacer que el conductor deslizante se mueva con velocidad invariable $\mathbf{v}$ en la misma dirección. Una carga libre dentro del conductor AB experimentará una fuerza magnética, ya que se mueve con la velocidad $\mathbf{v}$. De acuerdo con la expresión (19.2.7) de la fuerza magnética de Lorentz la magnitud es

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = q(v\mathbf{i}_x \times B\mathbf{i}_z) \qquad (20.2.6)$$

porque en la figura 20.1 el vector $\mathbf{v}$ está en la dirección x mientras que $\mathbf{B}$ está en la dirección z. La fuerza $\mathbf{F}_m$ está en la dirección que se muestra en la figura 20.1, para una carga positiva; evaluando el producto vectorial de la ecuación (20.2.6), es claro que

$$\mathbf{F}_m = (-qvB)\mathbf{i}_y \qquad (20.2.7)$$

en que el signo negativo significa que el vector $\mathbf{F}_m$ apunta en la dirección y negativa. Como las cargas en el conductor son móviles, esta fuerza establece una corriente I que fluye alrededor del circuito ABCD en el sentido de las manecillas del reloj. Al mover una carga q desde A hasta B una distancia l en la figura, es necesario efectuar una cantidad de trabajo sobre la carga, dada por el producto de la fuerza y la distancia, es decir, $-qvBl$, que corresponde a un trabajo por unidad de carga $-qvBl/q = vBl$. Por la definición de fuerza electromotriz dada en el capítulo 18, sección 18.3, esta última es la FEM que hace que fluya una corriente en el conductor AB, y por tanto, en el circuito ABCD. Adoptando esta imagen física de la FEM inducida, se puede expresar esta *FEM inducida por movimiento* $\mathscr{E}_m$ como

$$\mathscr{E}_m = -vBl \qquad (20.2.8)$$

En las otras ramas del circuito BC, CD y DA hay fuerzas $I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ que actúan sobre las cargas que constituyen la corriente I, pero en todos los casos son normales a la dirección de flujo de la corriente, por lo que no efectúan trabajo. En consecuencia, la FEM dada por (20.2.8) es la única que hace que fluya corriente en el circuito. La intensidad de la corriente I que se debe a la FEM inducida será

$$\boxed{I = \frac{|\mathscr{E}_m|}{R} = \frac{vBl}{R}} \qquad (20.2.9)$$

en que R es la resistencia de la trayectoria ABCD, suponiendo que todos los conductores son óhmicos.

Cuando fluye corriente por la trayectoria ABCD, la energía eléctrica se disipa en forma de calor a razón de I^2R (joules por segundo) a medida que la corriente encuentra la resistencia R en el circuito. Esta energía eléctrica se debe originalmente a la energía cinética asociada a la velocidad ordenada de deriva de las cargas a lo largo del conductor. A su vez, sobre tal movimiento de deriva de la distribución de cargas libres dentro del conductor, actúa la fuerza de Lorentz que proviene de la velocidad $\mathbf{v}$ lateral, impartida al conductor AB por la fuerza externa. Por tanto, esta fuerza es la responsable de efectuar trabajo sobre cargas libres dentro del conductor, que las acelera hasta su velocidad media de deriva en el sentido de la corriente —o en el sentido contrario si son negativas. Por tanto, según la ley de conservación de la energía sería de esperar que el trabajo efectuado sobre el conductor por la fuerza externa durante un intervalo

dado, fuera igual a la energía eléctrica producida por la FEM inducida durante ese periodo, lo que sería igual a la cantidad de energía eléctrica disipada como calor por la resistencia del circuito durante ese tiempo.

De acuerdo con esta consideración, en que se conserva la energía, el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}_{ext}$ para mover el conductor AB la distancia dx en el tiempo dt, es sencillamente $F_{ext}\,dx$, mientras que la cantidad de energía eléctrica disipada durante ese intervalo debe estar dada por

$$dW = I^2 R\,dt = (I)(IR)\,dt \qquad (20.2.10)$$

o, recordando (20.2.9),

$$dW = IlBv\,dt \qquad (20.2.11)$$

Igualando estas dos cantidades se encuentra que

$$F_{ext}\,dx = IlBv\,dt \qquad (20.2.12)$$

$$F_{ext}\frac{dx}{dt} = F_{ext}\,v = IlBv \qquad (20.2.13)$$

de donde, por (20.2.9),

$$F_{ext} = IlB = \frac{vB^2l^2}{R} \qquad (20.2.14)$$

En la sección 19.4 se vio que un segmento conductor recto definido por un vector **l** y que lleva una corriente I, experimenta una fuerza $I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ cuando se coloca en un campo magnético uniforme **B**. En el caso del segmento AB de la figura 20.1, esto significa que el conductor AB experimenta una fuerza de magnitud IlB en la dirección *x negativa* por parte del campo **B**, pues el vector $\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B}$ apunta en esa dirección. Pero según (20.2.14), tal fuerza es igual y opuesta a la fuerza aplicada exteriormente $\mathbf{F}_{ext}$. La fuerza *resultante* sobre el conductor AB es cero, lo que significa que está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre él. Por tanto, la fuerza $\mathbf{F}_{ext}$ *no* acelera al conductor AB, sino sólo vence la fuerza magnética $I(\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B})$ que actúa en la dirección opuesta, y por tanto, lo mantiene en movimiento a la velocidad constante **v**.[1] Una persona que tire de un conductor como AB, experimentará efectivamente una fuerza resistente que puede ser apreciable en las circunstancias apropiadas.

En este caso, es evidente que todo el trabajo efectuado por la fuerza aplicada exteriormente se transforma en energía térmica interna de los átomos en los conductores. Pero si se intercala un motor eléctrico en el circuito ABCD de la figura 20.1, parte de ese trabajo aparecería como trabajo mecánico efectuado por el motor. La disposición que se muestra en la figura puede considerarse como una especie burda de dínamo o generador eléctrico.

Se ha explorado con cierta extensión el fundamento físico de la FEM inducida en este caso para que el lector pueda comprender sus orígenes en forma puramente cualitativa e intuitiva, y para demostrar cómo encaja esto en el cuadro de las corrientes, campos y fuerzas que se delineó en el capítulo anterior. Se podría haber obtenido su valor con mucho mayor facilidad, y pronto se incurrirá en el hábito de hacerlo, partiendo simplemente de la ley de inducción de Faraday expresada por (20.2.3):

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) \qquad (20.2.15)$$

En este ejemplo, B no cambia en el tiempo y la normal al plano del circuito es paralela a **B**, de manera que $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$. En estas circunstancias, lo único que ahora varía en el tiempo es el área de ABCD, de manera que (20.2.15) queda como

$$\mathcal{E}_m = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{d}{dt}(lx) = -Bl\frac{dx}{dt} \qquad (20.2.16)$$

o bien,

$$\mathcal{E}_m = -Blv \qquad (20.2.17)$$

[1] Este enunciado es estrictamente cierto sólo si la resistencia R del circuito ABCD permanece constante. En realidad debido a que la longitud de los segmentos AD y BC varía a medida que el conductor AB se mueve hacia la izquierda, la resistencia del circuito también cambia. Sin embargo, ésta es una cuestión secundaria que no afecta la validez general del estudio que se da en este ejemplo.

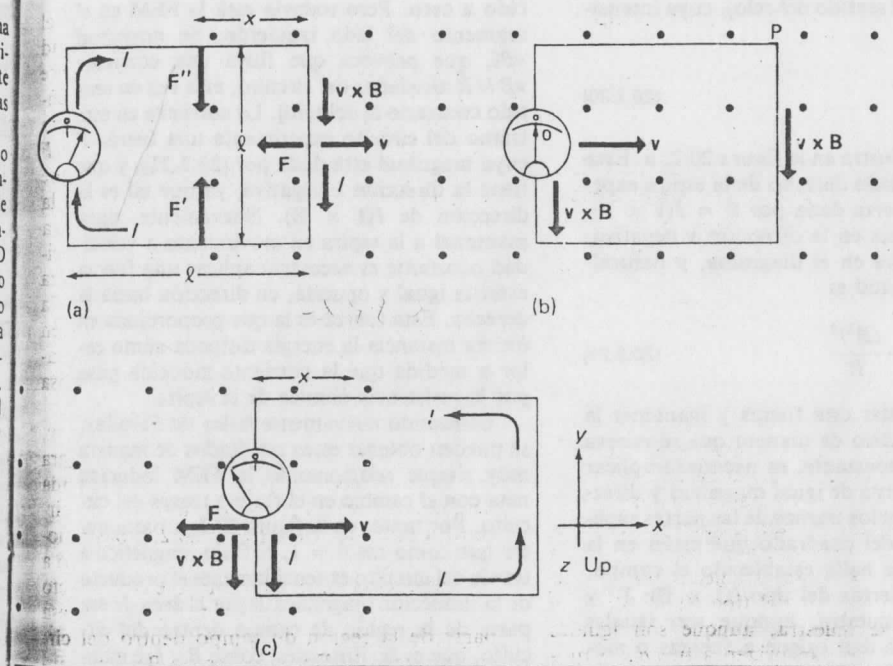


FIGURA 20.2. Corriente y "FEMs de movimiento" en un circuito que entra (a), atraviesa (b) y sale (c) de una región en la que se ha producido un campo magnético uniforme.

Esta respuesta concuerda exactamente con el resultado anterior (20.2.8). Desde luego, se podría haber utilizado (20.2.5), en donde se cancelan el primero y el tercer términos por que tanto B como θ son constantes, para obtener el mismo resultado. También puede notarse que la concordancia entre este resultado y el expresado como (20.2.8) sólo se obtiene si a la constante C de (20.2.1) se le asigna el valor -1. Se puede considerar que esta concordancia justifica la selección de $C = -1$ en aquella ecuación.

En la figura 20.2 se muestra otro ejemplo algo semejante pero en el que se ilustran algunos otros aspectos de la inducción electromagnética. En este caso se desplaza una espira cuadrada de alambre cuyos lados miden l y que originalmente está en una región sin campo magnético, con una velocidad constante **v** hacia una región donde hay un campo **B** constante; la espira pasa a través de esta región y sale por el otro lado, donde nuevamente no hay campo magnético. Se supone que el campo es normal al plano de la espira. Se desea examinar las corrientes inducidas en la espira, así como las fuerzas que actúan sobre ella al pasar, por esta serie de eventos.

En tanto que la espira está en una región sin campo, no puede haber FEMs de movimiento, pero tan pronto como el lado derecho del cuadrado entre a la región donde existe el campo constante **B**, las cargas en esta parte de la espira experimentarán fuerzas magnéticas dadas por

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (20.2.18)$$

que establecen una FEM de movimiento con magnitud

$$\mathcal{E}_m = -vBl \qquad (20.2.19)$$

en forma análoga a como en el ejemplo anterior. Esta FEM establece en la espira una

corriente I en el sentido del reloj, cuya intensidad es

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{R} = \frac{vBl}{R} \qquad (20.2.20)$$

Lo anterior se ilustra en la figura 20.2, a. Esta corriente en el lado derecho de la espira experimenta una fuerza dada por $\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. La fuerza apunta en la direcciór x negativa, como se muestra en el diagrama, y naturalmente su magnitud es

$$F_x = -IlB = -\frac{vB^2l^2}{R} \qquad (20.2.21)$$

Para contrarrestar esta fuerza y mantener la espira en equilibrio de manera que se mueva con velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza externa de igual magnitud y dirección opuesta. En los tramos de las partes superior e inferior del cuadrado que están en la región donde se halla establecido el campo, también hay fuerzas del tipo $I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$: $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$, como se muestra, aunque son iguales y opuestas y no dan origen a fuerzas o momentos netos.

Una vez que el lado izquierdo de la espira entra a la región del campo, como se muestra en la figura 20.2, b, las cargas en los tramos derecho e izquierdo del circuito experimentan fuerzas magnéticas iguales de la forma (20.2.18). Pero estas fuerzas tienden a establecer corrientes que circularían en sentidos opuestos alrededor del circuito, cancelándose entre sí. Visto de otra manera, una carga positiva q que sale del punto P y recorre el circuito en el sentido de las manecillas del reloj, primero experimenta una FEM que aumenta su energía potencial en la cantidad $qBlv$ en el lado izquierdo de la espira, y luego una FEM en el lado derecho que disminuye su energía potencial en una cantidad semejante. Por tanto, la FEM neta alrededor del circuito es *cero*, y no se observa ninguna corriente inducida. Puesto que no hay corriente en la espira, no hay fuerzas que actúen sobre ella o sobre ninguna de sus partes.

En la figura 20.2, c, el lado derecho de la espira sale de la región del campo y en esa parte del circuito la FEM de movimiento se ha reducido a cero. Pero todavía está la FEM en el segmento del lado izquierdo, de magnitud vBl, que provoca que fluya una corriente vBl/R alrededor del circuito, esta vez en sentido contrario al del reloj. La corriente en este tramo del circuito experimenta una fuerza F cuya magnitud está dada por (20.2.21), y que tiene la dirección x negativa; ya que tal es la dirección de $I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. Nuevamente, para mantener a la espira en movimiento a velocidad constante es necesario aplicar una fuerza externa igual y opuesta, en dirección hacia la derecha. Esta fuerza es la que proporciona en última instancia la energía disipada como calor a medida que la corriente inducida pasa por la resistencia óhmica de la espira.

Utilizando nuevamente la ley de Faraday, se pueden obtener estos resultados de manera muy simple relacionando la FEM inducida neta con el cambio en el flujo a través del circuito. Por tanto, en la figura 20.2, a basta notar que como $\cos\theta = 1$, el flujo magnético a través del circuito es sencillamente el producto de la inducción magnética B por el área de esa parte de la región de campo dentro del circuito, que es lx. Entonces, como B y l se mantienen constantes,

$$\mathscr{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} \qquad (20.2.22)$$

o

$$\mathscr{E}_m = -Blv \qquad (20.2.23)$$

que concuerda con (20.2.17). En la figura 20.2, b, es claro que no cambia el flujo a través del circuito, de donde $\mathscr{E}_m = -d\Phi_m/dt$, mientras que en la figura 20.2, c, el flujo de nuevo es igual al producto de la inducción por el área de la región de campo contenida en el circuito, lo que permite escribir

$$\mathscr{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Bl(-v) = Blv \qquad (20.3.24)$$

ya que dx/dt es negativa y su magnitud es v.

En la figura 20.3 se muestran las gráficas de la FEM neta, la corriente y la fuerza que experimenta la espira, en función de la distancia. Es importante recordar que, como se ve en la figura 20.3, b, el solo hecho de que un circuito se mueva dentro de una región donde hay un campo magnético *no* garantiza que habrá una FEM o una corriente inducidas en el mismo. La FEM o corriente inducida sólo aparece cuando hay un *cambio en el flujo magnético* a través del circuito. En el ejemplo anterior, dicho cambio en el flujo se debió al aumento en el área activa del circuito, mientras que en éste, el cambio se debe al movimiento del circuito en conjunto hacia adentro y hacia afuera de la región en la que hay campo magnético. No importa el modo con que se logre el cambio de flujo; la FEM inducida siempre estará dada por la ley de Faraday sin importar cómo ocurra el cambio de flujo.

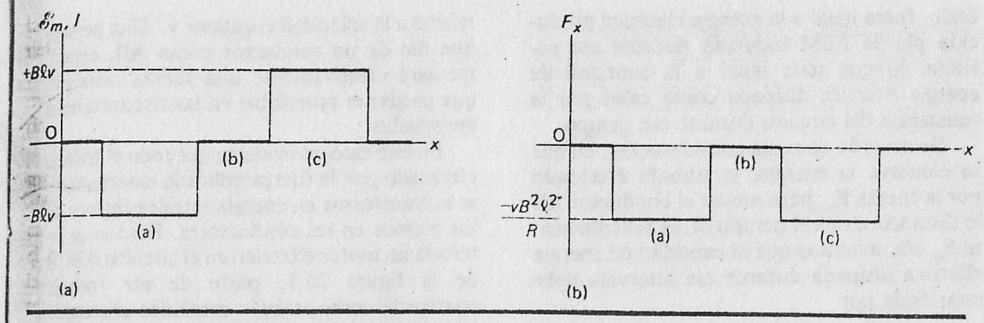


FIGURA 20.3. (a) Fuerza electromotriz y (b) fuerzas experimentadas por el circuito de la figura 20.2 durante las fases (a), (b) y (c) mostradas antes.

Como ilustración final, se considerará el caso de una pequeña bobina circular de N vueltas y área A, colocada dentro de un solenoide muy largo de n vueltas por unidad de longitud, en el que se mantiene una corriente I que aumenta linealmente en el tiempo. Se supone que el eje de la bobina pequeña es paralelo al del solenoide. Determinar la corriente y la FEM inducidas en la bobina pequeña (figura 20.4).

La corriente en el solenoide se designa por I_0. Puesto que esta corriente aumenta linealmente en el tiempo, se puede escribir, suponiendo que $I_0 = 0$ al tiempo $t = 0$,

$$I_0(t) = \alpha t \qquad (20.2.25)$$

en que α es una constante. En el capítulo anterior, se encontró que la inducción magnética dentro de un solenoide largo se puede escribir, de acuerdo con (19.7.10), como

$$B = \mu_0 n I_0 = \mu_0 n \alpha t \qquad (20.2.26)$$

en que n es el número de vueltas por unidad de longitud. El flujo magnético interceptado por cada vuelta de la pequeña bobina será

$$\Phi_m = BA = \mu_0 n I_0 A = \mu_0 n A \alpha t \qquad (20.2.27)$$

en tanto que

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \mu_0 n A \alpha \qquad (20.2.28)$$

En cada vuelta de la bobina pequeña se generará determinada FEM dada por $-d\Phi_m/dt$, debido a que cada una de las N vueltas experi-

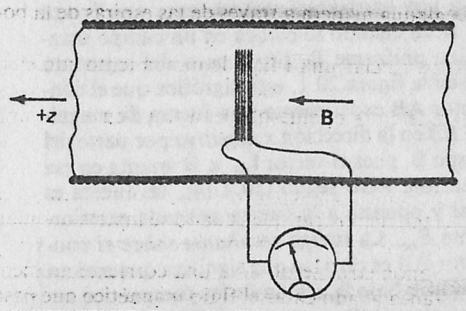


FIGURA 20.4. Inducción en una bobina estacionaria a través de la cual pasa un flujo magnético creciente producido por una corriente también creciente.

menta el cambio en el flujo. Es claro que estas FEMs individuales están en serie, de manera que es evidente que para una bobina de N vueltas, debe escribirse la ley de inducción de Faraday como

$$\mathcal{E}_m = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 nNA\alpha \qquad (20.2.29)$$

Si se nota que, de acuerdo con (20.2.25), $\alpha = dI_0/dt$, finalmente se puede escribir la anterior como

$$\mathcal{E}_m = -\mu_0 nNA\frac{dI_0}{dt} \qquad (20.2.30)$$

Entonces, la corriente en la bobina pequeña será

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{\mu_0 nNA}{R}\frac{dI_0}{dt} \qquad (20.2.31)$$

en que R es su resistencia.

Es evidente que cuando aumenta la corriente en el solenoide con *rapidez constante*, se produce una corriente inducida de *intensidad constante* y proporcional a la *rapidez de aumento* de la corriente en el solenoide. No es fácil comprender por qué debe ser así, con base en las FEMs de movimiento, presentadas en las ilustraciones anteriores de FEMs y corrientes inducidas. No hay movimiento relativo entre las dos bobinas ni tampoco existe cambio en su área. Desde luego, es verdad que el flujo magnético del solenoide se propaga de alguna manera a través de las espiras de la bobina pequeña, aunque no hay una forma clara de asociar una FEM de movimiento con ella. Sin embargo, experimentalmente se observa que en la bobina pequeña fluye en efecto una corriente cuya intensidad predice correctamente (20.2.31). En forma análoga, como descubrieran tanto Faraday como Henry, es fácil demostrar que cuando se inserta un imán permanente en una bobina conectada a un galvanómetro, se observa una corriente momentánea al aumentar el flujo magnético que pasa por las vueltas de la bobina. Al retirar el imán, circula una corriente momentánea en sentido contrario a medida que disminuye el flujo a través de la bobina, como se ilustra en la figura 20.5. La FEM asociada a estas corrientes, aunque no es de movimiento en el sentido ordinario, existe y está descrita correctamente por la ley de Faraday en términos de la rapidez de variación del flujo a través de la bobina.

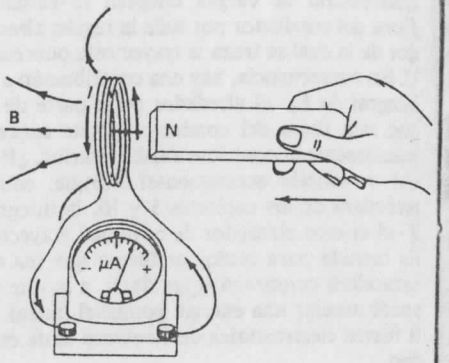


FIGURA 20.5. Otro ejemplo de una FEM inducida por un cambio de flujo magnético.

Los dos primeros ejemplos se pudieron analizar partiendo de la expresión de la fuerza de Lorentz y utilizándola para encontrar una FEM de movimiento apropiada, de manera bastante independiente de la ley de Faraday. En el tercer ejemplo ya no pudo hacerse esto, pues no hubo una forma clara de encontrar una FEM de movimiento. Fue necesario utilizar la ley de Faraday para describir lo que se observa; desde luego, se pudo igualmente haber estudiado los otros ejemplos desde el punto de vista de la citada ley de Faraday. Entonces, es claro que esta ley comprende la información relativa a las fuerzas magnéticas sobre cargas móviles que contiene la ley de Lorentz; en efecto, el carácter correcto observado de la ley de Faraday proporciona una justificación experimental adecuada de la fuerza de Lorentz, aunque también hay otra confirmación experimental. No obstante, la mencionada ley de Faraday va más allá de este punto para generalizar el comportamiento de FEMs inducidas y flujos magnéticos variables en casos donde no son claramente definibles las "FEMs de movimiento". Por tanto, la ley de Faraday es la que resume en un solo enunciado todo lo que se sabe y se ha observado de

las FEMs y corrientes inducidas electromagnéticamente. Más adelante se verá que es una de las cuatro leyes básicas del electromagnetismo a partir de las que Maxwell formuló la teoría de la radiación electromagnética.

A las FEMs y corrientes inducidas electromagnéticamente les acompaña un *campo eléctrico inducido* por acción electromagnética. En efecto, este campo eléctrico inducido es el que puede considerarse como el origen de las FEMs predichas por la ley de Faraday. Por tanto, es importante poder relacionar el cambio en el flujo magnético con el campo eléctrico inducido, al igual que con FEMs inducidas en circuitos. Ahora se mostrará cómo puede hacerse lo anterior. El lector recordará del estudio del concepto de fuerza electromotriz en la sección 18.3 que se puede relacionar toda FEM con un campo eléctrico que al menos sea parcialmente de origen *no electrostático* (recuérdese que los campos eléctricos no siempre son campos electrostáticos). Si se expresa el campo eléctrico total $\mathbf{E}$ en cualquier punto como la suma de un campo *electrostático* $\mathbf{E}_0$ y un campo *no electrostático* $\mathbf{E}'$ que expresa la fuerza por carga unitaria, que no se puede atribuir a las interacciones electrostáticas con otras cargas, es posible escribir, como se hizo en el capítulo 18,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \qquad (20.2.32)$$

Se recordará que la FEM $\mathcal{E}$ se definió como el trabajo efectuado, por unidad de carga, sobre una carga que realiza un recorrido completo en un circuito cerrado. Pero como el trabajo efectuado sobre una carga unitaria en cualquier desplazamiento $d\mathbf{l}$ es $dw = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$, se tiene que

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_0\cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} \qquad (20.2.33)$$

en que las integrales se evalúan alrededor de la trayectoria del circuito cerrado C, que puede seguir, *o puede no* hacerlo, la trayectoria de un conductor metálico. Pero en el capítulo 16 se vio que como el campo electrostático es de carácter *conservativo*, es cero el trabajo efectuado sobre una carga para moverla alrededor de cualquier camino cerrado. En consecuencia, la primera integral en el segundo miembro de (20.2.33) es nula y

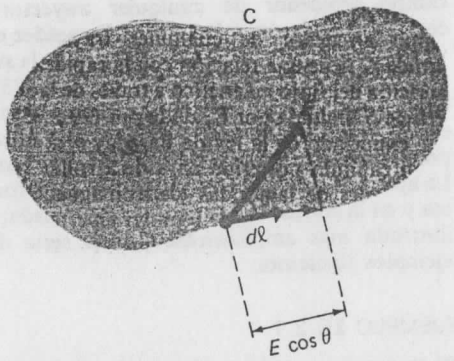


FIGURA 20.6. Evaluación de la integral de $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ alrededor de un circuito cerrado.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} \qquad (20.2.34)$$

en que entonces la FEM representa el trabajo *no electrostático* por carga unitaria efectuado para mover una carga alrededor de la trayectoria cerrada C. Ya que la integral de $\mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l}$ no puede ser cero si hay una FEM inducida, necesariamente la parte no electrostática del campo eléctrico, $\mathbf{E}'$, debe ser *no conservativa*.

En todo caso, ahora puede reemplazarse la FEM en el enunciado de la ley de Faraday dada antes como la ecuación (20.2.2), por la expresión anterior, lo que permite escribir la ley como sigue:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (20.2.35)$$

En esta ecuación, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E\cos\theta\, dl$, en que θ es el ángulo entre el campo eléctrico inducido $\mathbf{E}$ y el elemento $d\mathbf{l}$ del recorrido C en ese punto. Por tanto, la cantidad $E\cos\theta$ representa la componente de $\mathbf{E}$ tangente a la trayectoria cerrada C en cualquier punto dado, como se muestra en la figura 20.6. La ley de Faraday escrita de esta manera indica que *siempre que hay un flujo magnético variable, hay un campo eléctrico inducido acompañante*, y que la

integral de la componente tangencial de este campo alrededor de cualquier trayectoria cerrada C tiene una relación con la rapidez de variación del flujo magnético a través de la superficie S limitada por C, dada por (20.2.35). Este enunciado de la ley de Faraday será útil en un capítulo posterior para desarrollar las propiedades de las ondas electromagnéticas. La aplicación de la ley de Faraday en esta forma y en la forma dada originalmente quedará ilustrada más ampliamente por la serie de ejemplos siguientes.

EJEMPLO 20.2.1

Se mueve un conductor recto de longitud l con velocidad constante $\mathbf{v}$ normal a un campo magnético constante $\mathbf{B}$, como se muestra en la figura 20.7. Determinar la fuerza neta sobre una carga dentro del conductor. Evaluar el campo electrostático. Determinar el campo "de movimiento" no electrostático. ¿Cuál es la diferencia de potencial electrostático entre los dos extremos del conductor? ¿Qué sucede si los dos extremos del conductor están conectados por un alambre que completa un circuito que pasa por alguna región fuera del campo?

Puesto que no hay circuito por el que pueda fluir la corriente, las cargas libres dentro del conductor deberán estar en reposo con respecto a éste, lo que significa que sólo se mueven con la velocidad constante $\mathbf{v}$ con respecto a un observador estacionario. En todo caso, están en equilibrio, de manera que la fuerza resultante sobre cualquier carga debe

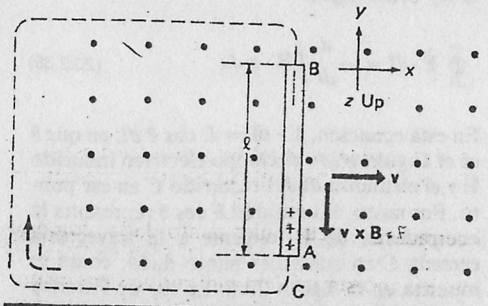


FIGURA 20.7

ser cero. No obstante, la fuerza sobre una carga movible puede expresarse como la suma de las fuerzas electrostática y magnética por medio de

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \qquad (20.2.36)$$

en que $\mathbf{E}_0$ es el campo electrostático dentro del conductor. En este ejemplo, el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está en la dirección y negativa y se puede escribir la relación entre las componentes y de las fuerzas en (20.2.36) como

$$F_y = qE_{0y} - qvB = 0 \qquad (20.2.37)$$

lo que inica que el campo electrostático E_0, dentro del conductor tiene el valor constante

$$E_{0y} = vB \qquad (20.2.38)$$

En (20.2.37) se puede identificar el término $-qvB$ con un campo "de movimiento" no electrostático qE', de manera que

$$E_y' = -vB \qquad (20.2.39)$$

La FEM $\mathscr{E}$ sobre cualquier trayectoria cerrada, como la línea punteada C, será la integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de aquella, es decir,

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \qquad (20.2.40)$$

Observando sólo (20.2.38) y (20.2.39), es difícil ver que el valor de la integral en (20.2.40) debe ser distinto de cero, pues $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$ son iguales y opuestos dentro del conductor. La resolución de esta aparente paradoja estriba en el hecho de que, aunque es cierto que $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$ son iguales y opuestos dentro del segmento conductor AB, no son iguales y opuestos *fuera* del conductor a lo largo del resto de la trayectoria C. El hecho es que fuera del conductor, el campo de movimiento $\mathbf{E}'$ es *nulo*. Por otra parte, el campo electrostático $\mathbf{E}_0$ es originado por una distribución de carga establecida en los extremos superior e inferior del conductor por la fuerza $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que impulsa las cargas positivas hacia A y las cargas negativas hacia B. Dentro del conductor, esta distribución de cargas establece un campo dado por (20.2.38) para que no fluya ninguna corriente. Pero el campo electrostático de esa

distribución de cargas también se extiende *fuera* del conductor por toda la región alrededor de la cual se traza la trayectoria punteada C. En consecuencia, hay una contribución a la integral de $\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de la parte de C que está fuera del conductor y que cancela exactamente la contribución del interior. ¿Por qué se cancela exactamente? Porque, como recordará de los capítulos 5 y 16, la integral $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ es cero alrededor de cualquier trayectoria cerrada para cualquier fuerza que sea de naturaleza *conservativa* (es decir, a la que se puede asociar una energía potencial única), y la fuerza electrostática de Coulomb es de este tipo.

Por tanto, la FEM total $\mathscr{E}$ alrededor de la trayectoria C está dada por

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \qquad (20.2.41)$$

y como el campo $\mathbf{E}'$ está dado por (20.2.39) dentro del conductor y es cero fuera de él, lo anterior puede escribirse como

$$\mathscr{E} = \int_{y_A}^{y_B} E_y'\, dy = -\int_{y_A}^{y_B} vB\, dy = -vB \int_{y_A}^{y_B} dy$$

$$\mathscr{E} = -vB(y_B - y_A) = -vBl \qquad (20.2.42)$$

La diferencia en potencial electrostático entre los dos extremos del conductor puede calcularse del modo usual a partir de la relación $dV = -\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$. De esta manera, se obtiene

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= -\int_{y_A}^{y_B} E_{0y}\, dy = -vB \int_{y_A}^{y_B} dy$$

o sea,

$$\Delta V_{AB} = -vB(y_B - y_A) = -vBl \qquad (20.2.43)$$

Cuando se completa un circuito externo, conectando por ejemplo un alambre alrededor de la trayectoria punteada C, las cargas excedentes acumuladas que representan la fuente del campo electrostático pueden fluir con libertad fuera del conductor, a través del circuito externo. Cuando sucede así, el campo electrostático decrece a cero y sólo deja la FEM de movimiento $-vBl$, que ahora mantiene un flujo de corriente inducida en el circuito externo, como en el ejemplo que se consideró antes en relación con la figura 20.2, a.

EJEMPLO 20.2.2

Un conductor recto de longitud R gira alrededor de uno de sus extremos con velocidad angular constante ω en un campo magnético constante B paralelo al eje de rotación, como se ilustra en la figura 20.8, a. Hallar el campo electrostático dentro del conductor y la diferencia en potencial electrostático entre sus extremos. Si se establece un circuito como en la figura 20.8b, conectando el extremo del conductor en el eje de rotación con un aro circular de radio R sobre el que se desliza el otro extremo, encontrar la FEM en el circuito.

La fuerza resultante sobre una carga q en el conductor es nuevamente

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (20.2.44)$$

En este caso no se puede igualar de inmediato a cero esta fuerza como en el ejemplo anterior, debido a que las cargas están aceleradas, de manera que no se hallan en equilibrio bajo la acción de las fuerzas. En vez de ello es necesario igualar la fuerza resultante $\mathbf{F}$ dada por (20.2.44) a la masa de la carga por su aceleración centrípeta, que es $-r\omega^2$, en que r es la distancia desde el eje de rotación. Como, de acuerdo con la figura 20.8, a, la magnitud de la fuerza $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ es $qvB = qr\omega B$, se puede escribir la siguiente ecuación para las componentes de fuerza radiales

$$qE_0 + qr\omega B = -mr\omega^2 \qquad (20.2.45)$$

De aquí puede despejarse E_0,

$$E_0 = -r\omega\left(B + \frac{m\omega}{q}\right) \qquad (20.2.46)$$

Ahora es posible encontrar, como es costumbre, la diferencia de potencial entre los puntos O ($r = 0$) y P ($r = R$), a partir de $dV = -\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$. En este caso, ya que $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{E}_0$ son vectores radiales, $\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = E_0\, dr$ y se puede escribir

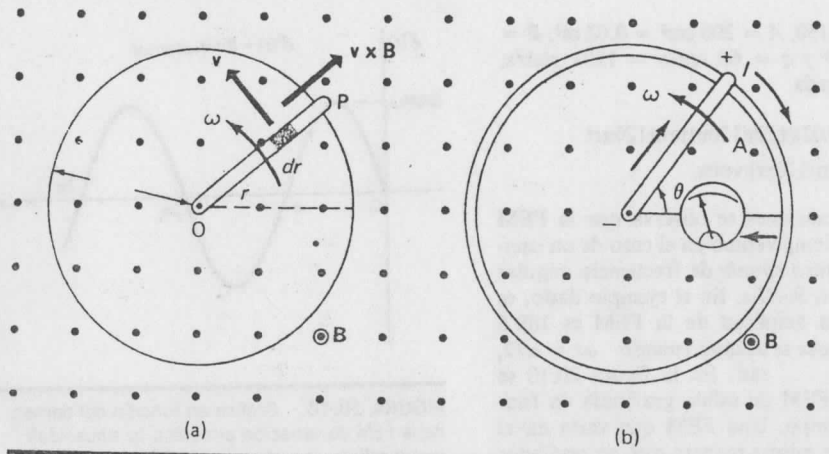


FIGURA 20.8

$$\Delta V_{OP} = V_P - V_O = -\int_O^P \mathbf{E}_O \cdot d\mathbf{l}$$

$$= -\int_0^R E_0\, dr = \int_0^R r\omega\left(B + \frac{m\omega}{q}\right) dr$$

$$\Delta V_{OP} = \omega\left(B + \frac{m\omega}{q}\right)\int_0^R r\, dr \qquad (20.2.47)$$

$$\Delta V_{OP} = \left(B + \frac{m\omega}{q}\right)\frac{\omega R^2}{2}$$

En la integración anterior, como B, m, ω y q son constantes, la cantidad $\omega B + (m\omega^2/q)$ puede sacarse de la integral.

En (20.2.46) y (20.2.47) hay dos términos independientes. El primero, que contiene a B, se debe al movimiento del conductor en el campo magnético y la fuerza correspondiente $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, de la misma manera como se produce el campo en el ejemplo anterior expresado por (20.2.38). Si el campo magnético fuera cero, esta contribución se anularía también. El segundo término, en que aparece el factor $m\omega/q$, se debe simplemente a que el segundo miembro de la ecuación (20.2.45) debe tener el valor $-mr\omega^2$ debido a la aceleración centrípeta. Por tanto, este término representa un campo eléctrico de origen *inercial* que sólo sirve para mantener las cargas en el conductor moviéndose en trayectorias circulares con velocidad angular ω. Está ahí debido a que las cargas libres se mueven hacia afuera en el conductor, dejando una carga no compensada de signo contrario en los iones metálicos fijos de la red cristalina, hasta que haya una fuerza hacia el interior de atracción electrostática entre las dos cargas que sea apenas suficiente para proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para mantener a las cargas libres en sus recorridos circulares. Si no hubiera aceleración centrípeta, este término no estaría presente, como en el ejemplo anterior.

Ahora se calculará qué diferencia de potencial puede generar este campo inercial en la práctica. Por ahora se hará B igual a cero y se utiliza un valor de ω que produzca la *mayor* diferencia de potencial posible que pueda lograrse en procedimientos experimentales normales. Luego supóngase que $R = 0.3$ m y $\omega = 6\,280$ rad/s; esto corresponde a un conductor de aproximadamente 30 cm de largo, que gira a 60 000 rpm. Sería difícil utilizar un conductor que se mueve con mayor rapidez que ésta, en experimentos de la práctica. En este caso, utilizando valores numéricos apropiados para la masa y carga del electrón se encuentra que

$$\Delta V = \frac{m\omega^2 R^2}{2q}$$

$$= \frac{(9.11 \times 10^{-31})(6.28 \times 10^3)^2(9 \times 10^{-2})}{(2)(-1.602 \times 10^{-19})}$$

$$= -1.01 \times 10^{-5} \text{ volt}$$

En efecto, éste es un voltaje muy pequeño, que incluso sería muy difícil detectar. Por ejemplo, supóngase que el conductor girara en un plano normal al campo magnético terrestre, que en realidad es muy débil, pues en la mayoría de los sitios su intensidad es próxima a 0.5×10^{-4} Wb/m². En estas circunstancias, la contribución del primer término en (20.2.47), que se debe al movimiento del conductor en el campo magnético terrestre, sería

$$\Delta V = \tfrac{1}{2}B\omega R^2$$

$$= (0.5)(0.5 \times 10^{-4})(6.28 \times 10^3)(9 \times 10^{-2})$$

$$= 1.41 \times 10^{-2} \text{ volt}$$

Esta magnitud es unas 1400 veces mayor que el voltaje producido inercialmente $m\omega^2R^2/2q$. Para tener una probabilidad más o menos razonable de detectar la diferencia de potencial de origen inercial, tendría que reducirse el campo terrestre mediante blindaje magnético hasta que fuera de 1000 a 10 000 veces menor que su valor normal, lo que no es una tarea imposible, aunque tampoco puede hacerse con facilidad.

El caso se puede resumir observando que en condiciones normalmente logrables, el voltaje inercial $m\omega^2R^2/2q$ es tan pequeño que puede ser despreciado por completo en comparación con la contribución debida al movimiento del conductor, incluso aunque sólo haya campos dispersos debidos al magnetismo terrestre. En estas circunstancias, puede *despreciarse* la contribución inercial y escribir como aproximaciones razonables para (20.2.46) y (20.2.47),

$$\mathcal{E}_O = -r\omega B \qquad (20.2.48)$$

y

$$\Delta V_{OP} = \tfrac{1}{2}B\omega R^2 \qquad (20.2.49)$$

Ocasionalmente se encontrarán más adelante casos en que existen estas diferencias de potencial inercial electrónico, y con base en el trabajo realizado aquí, siempre se *despreciarán* en comparación con los voltajes inducidos electromagnéticamente y que son mucho mayores. Empero, cabe señalar que hay casos, notablemente en física atómica, en los que las fuerzas centrípetas que actúan sobre los electrones pueden ser efectivamente muy importantes. Un ejemplo simple en que así ocurre es el átomo de hidrógeno, en el que la fuerza electrostática de atracción entre un protón y un electrón de la fuerza centrípeta que mantiene al electrón en su trayectoria alrededor del núcleo.

Volviendo ahora al caso que se muestra en la figura 20.8, b, donde se ha formado un circuito completo que incluye el conductor rotatorio anterior, se puede utilizar la ley de Faraday para encontrar la FEM en el circuito con mucha facilidad. En este caso puede expresarse el flujo a través del área sombreada como

$$\Phi_m = BA \qquad (20.2.50)$$

y como B es constante,

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B\frac{dA}{dt} \qquad (20.2.51)$$

El área A del sector sombreado es una fracción $\theta/2\pi$ del área total πR^2 dentro del conductor circular externo. Por tanto, ya que R es constante,

$$\mathcal{E}_m = -B\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{2\pi}\pi R^2\right)$$

$$= -\frac{BR^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = -\tfrac{1}{2}BR^2\omega \qquad (20.2.52)$$

en que el signo negativo sencillamente refleja el hecho de que la corriente en el circuito externo fluye en el sentido negativo (el de las manecillas del reloj) en vez de en sentido positivo (el sentido contrario). A su vez, esto se debe al hecho de que se consideran los desplazamientos angulares contrarios al sentido del reloj como positivos, y los opuestos como negativos. Ya que la ley de Faraday sólo habla de las FEMs y corrientes inducidas *electromagnéticamente*, no da indicación alguna de

que también pueda haber una FEM o corriente producida *inercialmente*.

También debe quedar claro por este y varios ejemplos anteriores que la diferencia de potencial en un segmento conductor que se mueve en un campo magnético a veces puede encontrarse muy fácilmente *utilizando la ley de Faraday para evaluar la FEM en un circuito completo en el que el conductor móvil forma una rama*. La concordancia entre (20.2.52) y (20.2.48) y entre (20.2.17) y (20.2.43), y en otros ejemplos estudiados hasta ahora, refleja la validez de este procedimiento. Se deriva del hecho de que la integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo del segmento conductor de que se trata representa la FEM en el segmento conductor aislado y, *en tanto que el campo magnético no varíe en el tiempo*, en el circuito en que ese conductor forma la rama móvil. Lo destacado en *cursivas* de la frase anterior define las limitaciones de este procedimiento, ya que cuando hay campos variables en el tiempo, existen FEMs inducidas en el circuito asociadas a la variación en el tiempo de **B** al igual que al movimiento del segmento conductor.

EJEMPLO 20.2.3

En su forma más simple, un generador de corriente alterna (CA), que también se conoce como *alternador*, consiste en una bobina de N vueltas que gira con velocidad angular constante q en un campo magnético uniforme B, como se ilustra en la figura 20.9. Para una bobina de 150 vueltas con 200 cm² de área y 2.5 Ω de resistencia, que gira con velocidad angular constante de 60 revoluciones por segundo en un campo magnético de 0.15 Wb/m², hallar el valor de la FEM en función del tiempo, la amplitud valor máximo de la FEM, la amplitud de la máxima corriente que puede suministrarse a un circuito externo y la potencia entregada a un circuito exterior de resistencia R, en función del tiempo.

La FEM instantánea se calcula a partir de la ley de Faraday en la manera usual, recordando que como hay N vueltas, la FEM en cada espira está en serie con las demás. Por tanto,

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -N\frac{d}{dt}BA\cos\theta \qquad (20.2.53)$$

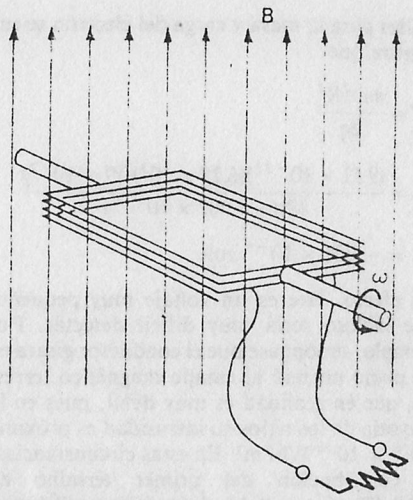


FIGURA 20.9

en que θ es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano en el que está la bobina. En este ejemplo son constantes B y A, y el ángulo θ cambia a medida que la bobina gira. Al girar ésta, el flujo interceptado cambia desde el valor máximo BAN cuando $\theta = 0$, en cuyo caso el plano de la bobina es normal a **B**, hasta cero cuando $\theta = 90°$ y el plano de la bobina es paralelo a las líneas de **B**. En estas circunstancias, se puede escribir (20.2.52) como

$$\mathscr{E} = -BAN\frac{d\cos\theta}{dt} = BAN\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad (20.2.54)$$

Pero $d\theta/dt$ es la velocidad angular constante ω; por tanto, puede expresarse lo anterior como

$$\mathscr{E} = BAN\omega\,\text{sen}\,\theta \qquad (20.2.55)$$

Esto también podría haberse obtenido de (20.2.5), donde debido a que $dB/dt = dA/dt = 0$, sólo el tercer término contribuiría en algo al resultado. Ya que en este ejemplo la bobina gira continuamente alrededor de un eje fijo, el ángulo θ aumenta continuamente en el tiempo de acuerdo con la relación $\theta = \omega t$, y por último, la FEM puede expresarse en la forma

$$\mathscr{E}(t) = BAN\omega\,\text{sen}\,\omega t \qquad (20.2.56)$$

Como $N = 150$, $A = 200\ \text{cm}^2 = 0.02\ \text{m}^2$, $B = 0.15\ \text{Wb/m}^2$ y $q = 60\ \text{rev/s} = 120\pi\ \text{rad/s}$, (20.2.56) queda

$$\mathscr{E} = (0.15)(0.02)(150)(120\pi)\text{sen}(120\pi t)$$
$$= 169.6\,\text{sen}(120\pi t)\ \text{volts}$$

De estas ecuaciones se observa que la FEM varía en el tiempo como en el caso de un *oscilador armónico simple* de frecuencia angular ω y amplitud $BAN\omega$. En el ejemplo dado, es claro que la amplitud de la FEM es 169.6 volts, valor que se alcanza cuando $\omega t = \pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, . . . rad. En la figura 20.10 se muestra la FEM de salida graficada en función del tiempo. Una FEM que varía en el tiempo de la misma manera que un oscilador armónico simple se conoce como *FEM alterna* sinusoidal.

Si la resistencia interna de la bobina rotatoria es R_i y la resistencia del circuito externo al que está conectado el dispositivo es R, en el circuito fluirá una corriente cuyo valor instantáneo es

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R_i + R} = \frac{BAN\omega}{R_i + R}\,\text{sen}\,\omega t \qquad (20.2.57)$$

La amplitud de esta corriente será

$$I_{\text{máx}} = \frac{BAN\omega}{R_i + R} = \frac{169.6}{2.5} = 67.8\ \text{A}$$

cuando $R_i = 2.5\ \Omega$ y la resistencia externa es cero, en cuyo caso la corriente en el circuito exterior será la más intensa posible. La potencia instantánea disipada en la resistencia externa R será I^2R, en que I está dada por (20.2.57). Entonces se puede escribir

$$P_{\text{ext}} = I^2R = \left(\frac{BAN\omega}{R_i + R}\right)^2 R\,\text{sen}^2\,\omega t \qquad (20.2.58)$$

EJEMPLO 20.2.4

Un campo magnético uniforme **B** está limitado a un volumen cilíndrico de radio R, siendo la dirección de **B** paralela el eje del volumen; fuera del mismo, B es cero, (fig. 20.11). La

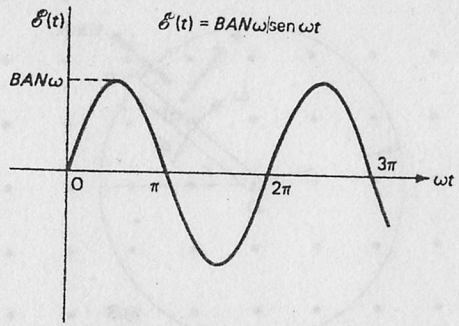


FIGURA 20.10. Gráfica en función del tiempo de la FEM de variación armónica (o sinusoidal) que produce un generador de CA (o alternador).

magnitud del campo **B** varía linealmente en el tiempo de manera que

$$B(t) = \alpha t \qquad (20.2.59)$$

es la descripción B en función del tiempo; la constante α representa la rapidez de cambio dB/dt. Se ve que este caso es parecido al que se estudió en relación con la tercera de las

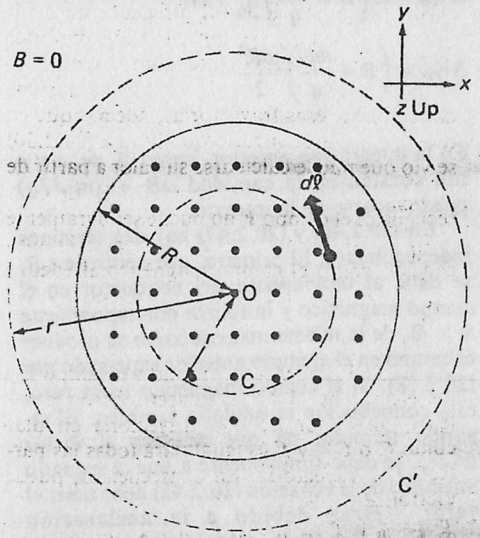


FIGURA 20.11

ilustraciones consideradas en el texto anterior a esta serie de ejemplos. Hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico inducido no electrostático **E** que existe dentro de la región del campo y externo a él como resultado del flujo magnético cambiante.

La ley de Faraday en la forma

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad (20.2.60)$$

muestra de la mejor manera la relación entre el campo **E** y la rapidez de variación del flujo magnético. En este caso, la simetría cilíndrica del campo **B** es exactamente la misma que la de la distribución de corriente en conductores rectos que se estudió en el capítulo 19, sección 19.6, en relación con la deducción de los campos magnéticos alrededor de conductores cilíndricos, en que se utilizó la ley de Ampère. Los mismos argumentos de simetría que se emplearon son útiles aquí también para indicar que el campo **E** inducido debe ser puramente radial o únicamente tangencial a contornos circulares. Pero si el campo fuese puramente radial, entonces **E** y $d\mathbf{l}$ siempre serían mutuamente perpendiculares y el producto $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ sería cero en todos los puntos alrededor de una trayectoria circular como C o C' en la figura 20.11. En estas circunstancias, la integral de $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ alrededor de cualquier trayectoria, y por tanto la FEM alrededor de la misma, tendría que ser cero. Experimentalmente, se sabe bien que *hay* FEM inducidas alrededor de esas trayectorias, además que en todo caso del desarrollo que lleva a (20.2.30) se vio que puede calcularse su valor a partir de la ley de Faraday en la forma (20.2.3). En consecuencia, el campo **E** no puede ser puramente radial, sino que debe ser circunferencial o tangencial, como el campo magnético alrededor de un conductor recto con corriente, y sus líneas de campo están en el plano de la ilustración (fig. 20.11).

Si este fuera el caso, entonces el campo **E** y los elementos $d\mathbf{l}$ de la trayectoria son paralelos, alrededor de una trayectoria circular como C o C', y E es igual para todas las partes de la trayectoria. En consecuencia, puede escribirse

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C E\,dl = E\oint_C dl = 2\pi r E \qquad (20.2.61)$$

Al mismo tiempo, si se evalúa la integral de superficie de la izquierda en (20.2.60) sobre la superficie limitada por C o C', se ve que las líneas de **B** y la normal **n** a esta superficie son paralelas, además de que la magnitud de **B** es la misma en todas partes dentro de la región del campo. Consecuentemente puede escribirse, para la trayectoria C,

$$\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_S B\,da = B\int_S da = \pi r^2 B \qquad (20.2.62)$$

mientras que para la trayectoria C', notando con cuidado que el campo **B** se extiende hacia el exterior sólo hasta $r = R$ y que más allá es cero,

$$\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_S B\,da = B\int_{r<R} da + 0\int_{r>R} da$$

$$= \pi R^2 B \qquad (20.2.63)$$

Tratándose de trayectorias como C, para la que $r < R$, entonces se puede sustituir (20.2.61) y (20.2.62) en la ley de Faraday (20.2.60) y obtener

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B) = -\pi r^2\frac{dB}{dt} \qquad (20.2.64)$$

de donde

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = -\frac{\alpha r}{2} \qquad r < R \qquad (20.2.65)$$

Tratándose de trayectorias como C' para la que $r > R'$, puede sustituirse (20.2.62) y (20.2.63) en (20.2.60) y encontrar

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}(\pi R^2 B) = -\pi R^2\frac{dB}{dt} \qquad (20.2.66)$$

o sea,

$$E = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} = -\frac{\alpha R^2}{2r} \qquad r > R \qquad (20.2.67)$$

Se notará que para $r = R$, tanto (20.2.65) como (20.2.67) llevan al mismo resultado, $E = -\alpha R/2$. En la figura 20.12 se muestra la gráfica en función de r de la magnitud del campo eléctrico inducido. Se parece mucho a la del campo magnético de un conductor uniforme, recto, que conduce corriente, como lo ilustra la figura 19.35, excepto por el valor negativo de E. En la figura 20.13 se muestra una gráfica de las líneas de **E**; es evidente que el campo se parece al campo magnético alrededor de un conductor recto. Cabe enfatizar que éste es un campo *inducido*, no uno electrostático. La integral de $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ alrededor de trayectorias cerradas *no se anula*, como siempre sucede con un campo electrostático. También, por esta razón, estos campos inducidos son *no conservativos*. Las líneas de campo no comienzan y terminan en cargas, como sucede invariablemente en los campos electrostáticos. En vez de ello se cierran sobre sí mismas en forma que recuerda a las líneas de los campos magnéticos. En el caso de estos últimos, la fuente del campo siempre es una distribución de corriente, y por tanto es una distribución de cargas móviles. En el caso de los campos eléctricos inducidos, la fuente del campo siempre es una distribución de flujo magnético que *cambia en el tiempo*. Un campo magnético estable no induce campo eléctrico, al igual que un conjunto estacionario de cargas no da lugar a un campo magnético. Más adelante se verá que los campos eléctricos inducidos tienen un papel importante en la descripción de las ondas electromagnéticas.

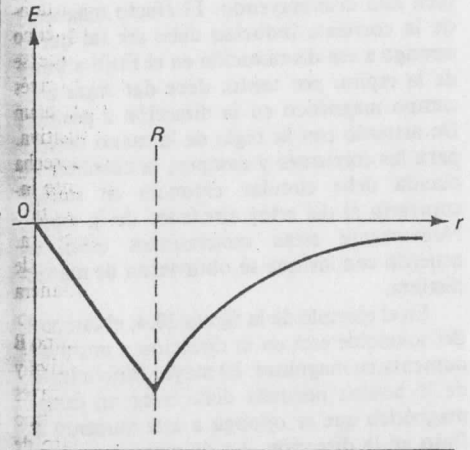


FIGURA 20.12. Gráfica de la intensidad del campo eléctrico inducido, como función de la distancia radial desde el centro del sistema de la figura 20.11.

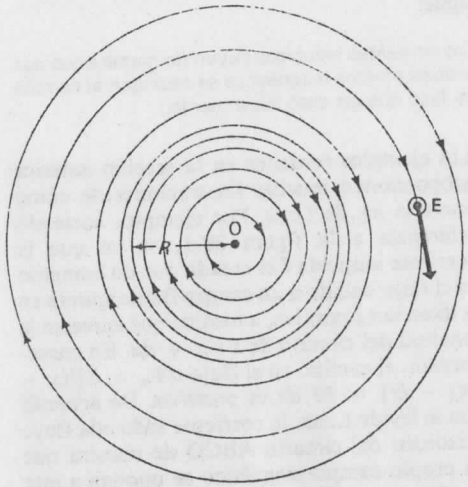


FIGURA 20.13. Líneas del campo eléctrico inducido en el sistema de la figura 20.11.

20.3 Ley de Lenz y corrientes de Foucault

Lo que por lo general se conoce como la *ley de Lenz* es sencillamente un aspecto de la ley de Faraday que todavía no se ha examinado a fondo aquí. Se refiere al sentido de las corrientes inducidas por cambios de flujo y al de sus propios campos magnéticos. En la sección anterior se destacó en especial el cálculo de las FEMs, campos eléctricos y corrientes inducidos, utilizando la ley de Faraday, sin poner demasiada atención a su sentido. Desde luego que la ley de Faraday determina en forma unívoca el sentido de cualquier corriente e inducida por un cambio en el flujo magnético a través de un circuito; no hay ambigüedad al respecto. Pero todavía queda la cuestión del signo negativo frente a la rapidez de cambio del flujo magnético en las ecuaciones (20.2.2), (20.2.3) o (20.2.35), y lo que se llama ley de Lenz sencillamente expresa los efectos físicos que requieren que el signo algebraico sea negativo en vez de positivo.

La ley de Lenz puede expresarse como sigue:

> Las corrientes inducidas fluyen de manera que sus propios efectos magnéticos se opongan al cambio de flujo que las creó inicialmente.

Los ejemplos resueltos en la sección anterior proporcionan muchas ilustraciones de cómo opera la ley de Lenz. Por ejemplo, haciendo referencia a la figura 20.1, se ve que la corriente inducida I es creada por un aumento en el flujo debido a un campo **B** que apunta en la dirección z positiva, a medida que aumenta la longitud del circuito de x a $x + dx$. En consecuencia, el cambio en el flujo $d\Phi_m = B[l(x + dx) - lx] = Bl\ dx$ es *positivo*. De acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida fluye alrededor del circuito ABCD de manera que su propio campo magnético se oponga a este cambio en el flujo. Por tanto, la corriente debe crear otro campo magnético que esté en la dirección z *negativa*, por lo que, de acuerdo con la regla de la mano derecha que relaciona las corrientes con sus campos magnéticos, debe fluir en el sentido *del reloj* alrededor de ABCD. Esto concuerda con los cálculos anteriores basados en la dirección de la fuerza de Lorentz y en la propia ley de Faraday. Se ve que aunque la ley de Lenz no da la magnitud de la FEM o corriente inducidas, sí indica rápida y sencillamente el sentido de la corriente inducida, de donde naturalmente es más fácil inferir el signo de la FEM.

En el ejemplo ilustrado en la figura 20.2, se ve que en (a) el campo magnético está en la dirección z positiva; en consecuencia, el flujo a través del circuito aumenta. De acuerdo con la ley de Lenz, el efecto magnético de la corriente inducida en el circuito debe ser de sentido contrario; por tanto, tiene que producir un campo magnético que se oponga a este aumento de flujo, y por consiguiente, estar en la dirección z negativa. De acuerdo con la regla de la mano derecha, la corriente debe [illegible] el sentido del reloj para producir este [illegible] En la figura 20.2, c se obser- [illegible] el campo magnético todavía [illegible] ón z positiva, el área de la re- [illegible] encerrada por la espira dismi- [illegible] que ésta se retira del campo.

$\oint_c E_{ne}$

Por tanto, el flujo a través de la espira también está disminuyendo. El efecto magnético de la corriente inducida debe ser tal que se oponga a esa disminución en el flujo a través de la espira; por tanto, debe dar lugar a un campo magnético en la dirección z positiva. De acuerdo con la regla de la mano derecha para las corrientes y campos, la corriente inducida debe circular entonces en sentido contrario al del reloj alrededor de la espira. Nuevamente estas conclusiones están de acuerdo con las que se obtuvieron de manera distinta.

En el ejemplo de la figura 20.4, el campo **B** del solenoide está en la dirección z positiva y aumenta en magnitud. El mayor flujo a través de la bobina pequeña debe crear un campo magnético que se oponga a este aumento de flujo en la dirección $+z$ de manera que este campo magnético debe estar en la dirección $-z$. Pero esto sólo puede ocurrir si el flujo de la corriente en la bobina pequeña es hacia afuera (de la página) en su parte superior y hacia adentro en la parte inferior de la bobina.

Por último, en la figura 20.5 se ve un imán cuyo extremo norte se aproxima a una bobina circular. El flujo a través de la bobina aumenta rápidamente a medida que el imán se acerca a aquella. El sentido de la corriente inducida en la bobina debe ser tal que se oponga al aumento en el flujo, de manera que tal corriente crea un campo magnético cuya dirección es opuesta a la del campo del imán, es decir, cuyo vector **B** apunte hacia la derecha en la figura. Pero este campo sólo puede obtenerse si la corriente inducida tiene el sentido que se muestra. Al hacerlo, el campo magnético de la bobina es tal que el extremo más próximo al imán queda como polo norte mientras que el extremo opuesto es sur, como se muestra, por ejemplo, en la figura 19.4. En consecuencia, se establece una fuerza de *repulsión* que se opone a la aproximación del polo del imán de barra a la bobina. Si se invirtiera el movimiento del imán, retirándolo hacia la derecha, disminuiría el flujo primario a través de la bobina. Entonces la corriente en la misma tendría que fluir de manera que se opusiera a la disminución, generando con ello un campo propio cuya dirección fuera la del imán, representada por un vector **B** hacia la izquierda. En

este caso el sentido de la corriente en la bobina sería opuesto al que se indica en el diagrama. El campo magnético de la bobina es tal que el extremo más próximo al imán de barra es un polo sur y el otro extremo es norte. En estas circunstancias hay una fuerza de *atracción* entre la bobina y el imán de barra que se opone a que se aleje el imán.

Al utilizar la ley de Lenz es importante comprender que el campo magnético de la corriente inducida siempre se opone al *cambio* en el flujo magnético primario que induce la corriente, no al flujo magnético primario, lo que se ilustra precisamente en el último ejemplo que se consideró antes, en que se retira hacia la derecha el polo norte del imán de la figura 20.5. En este caso, el vector **B** del campo primario dentro de la bobina todavía apunta hacia la izquierda pero su magnitud está disminuyendo, de manera que el vector $\Delta\mathbf{B}$ que expresa el *cambio* de flujo en un intervalo dado apuntará en la dirección opuesta, hacia la *derecha*. Este *cambio* en el flujo es al que se debe oponer la corriente inducida generando un campo magnético cuyo vector **B** apunta hacia la izquierda.

Considerando las consecuencias de revocarla, se puede comprender el significado físico de la ley de Lenz. Por ahora supóngase que las corrientes inducidas siempre tuvieran el sentido *opuesto* al que predice la ley de Lenz. Las direcciones de las fuerzas que experimentan los conductores que llevan corrientes inducidas y se hallan en campos magnéticos externos también estarían invertidas. Esto querría decir que, en la figura 20.2, a, la dirección de la fuerza **F** que actúa sobre el lado derecho de la espira, dada por la ecuación (20.2.21), sería opuesta a la que se indica. Ahora la espira sería atraída *hacia* la región del campo y se necesitaría aplicar una fuerza igual y opuesta para retenerla y evitar que se acelerara. En efecto, la espira haría trabajo contra esta fuerza externa y serviría como fuente de energía que pudiera accionar cualquier dispositivo externo que se quisiera operar. Lo mismo sucedería del otro lado de la región del campo, como se muestra en la figura 20.2, c. La dirección de la fuerza **F** sobre el lado izquierdo de la espira se invertiría y ésta sería expelida de la región del campo, pudiendo hacer trabajo externo. Entonces se repetiría el proceso reinsertando la espira desde la derecha y volviendo a su posición original de nuevo, haciendo otra vez trabajo. Todavía está ahí el campo magnético; no ha dado energía al exterior —por lo que respecta a este estudio, podría provenir de un imán permanente. El único cambio neto fue en la realización de trabajo externo sin que se diera energía al sistema. ¿Es necesario decir más? Para rechazar la ley de Lenz también debe prescindirse de la ley de conservación de la energía, lo que hasta la fecha nadie ha descubierto cómo hacer.

Un estudio de la ley de Lenz no sería completo sin una descripción breve de las *corrientes de Foucault*, ya que su generación y comportamiento subsecuentes están relacionados estrechamente con la operación de la ley de Lenz. Estas corrientes son inducidas, al igual que cualquier otra corriente, por cambios en el flujo magnético, pero en *objetos conductores de forma diversa* en vez de en conductores lineales. Aunque el flujo de las corrientes de Foucault está limitado por las fronteras del conductor, no lo está a una sola trayectoria cerrada y lineal como sucede con el flujo de corriente en un circuito conductor ordinario. Las trayectorias de estas corrientes dentro del conductor se definen primordialmente por las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre la distribución de cargas móviles en el objeto conductor, y la ley de Lenz determina el sentido en que fluyen dichas corrientes por estas trayectorias.

En la figura 20.14 se muestra la acción de las corrientes de Foucault. Se tira de una lámina conductora rectangular hacia afuera de una región donde se ha establecido un campo magnético uniforme. Dentro de la región del campo hay fuerzas magnéticas sobre cargas móviles en el conductor, dadas por $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, en tanto que estas fuerzas son cero en el exterior. Las fuerzas hacen que fluyan corrientes hacia abajo en la parte de la lámina que está dentro del campo, pues hay una FEM en la dirección de cualquier trayectoria, (como la ABC) que esté en tal región. El origen de esta FEM es igual al asociado a la espira conductora lineal de la figura 20.2, c. Se establece el flujo de corriente en esta trayectoria, y la

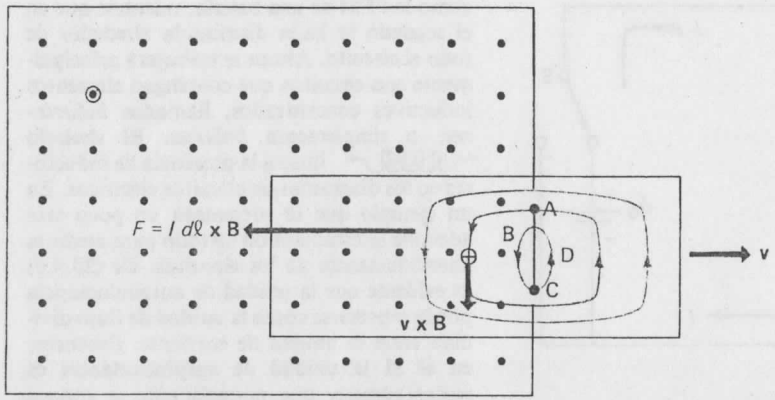


FIGURA 20.14. Corrientes de Foucault en una placa conductora delgada que sale de una región en la que existe un campo magnético uniforme.

corriente regresa al punto A por la trayectoria CDA que está fuera del campo. Como en el caso de la espira que se muestra en la figura 20.2, c, la corriente experimenta una fuerza de retardación $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ que hace necesario ejercer una fuerza externa en dirección opuesta para mantener al conductor moviéndose a velocidad constante. Hay muchas espiras o caminos de corriente de este tipo en la lámina, cuyo efecto conjunto es generar *calor* por

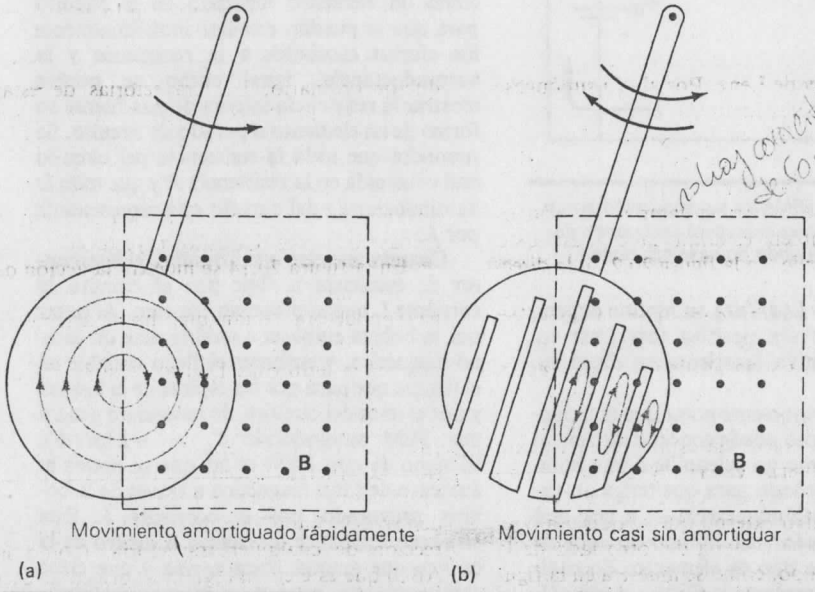


FIGURA 20.15. Circulación de corrientes de Foucault en la lenteja de un péndulo de material altamente conductor (a), y de un péndulo del mismo material con ranuras paralelas (b).

efecto Joule a medida que la corriente pasa por la resistencia de los caminos conductores, además de crear una fuerza retardatriz que puede ser apreciable si se trata de tirar con mucha rapidez de la lámina conductora hacia afuera del campo.

En la figura 20.15 se ilustra otra demostración de los efectos de las corrientes de Foucault. Ahí se muestra un péndulo cuya lenteja es una placa circular conductora dispuesta para que oscile entre los polos de un imán poderoso, como se muestra en (a). Debido a la generación de corrientes de Foucault y a las fuerzas de retardación que experimentan al entrar y salir de la región de campo, el movimiento del péndulo se amortigua rápidamente y su energía cinética aparece como calor por efecto Joule, dentro de la placa conductora. En (b) se ha reemplazado el péndulo por otro igual pero que tiene una serie de ranuras verticales. Estas impiden que se formen corrientes de Foucault en una gran extensión y limitan las que se originan a recorrer caminos largos y estrechos entre las ranuras. Como resultado de ello se reduce la intensidad de las corrientes de Foucault y se genera mucho menos calor dentro del cuerpo conductor, las fuerzas de retardación que experimenta el péndulo a medida que su disco entra y sale de la región del campo son mucho más pequeñas, y el movimiento pendular sufre muy poca amortiguación. Este método de descomponer el flujo de corrientes de Foucault, y de reducir el calentamiento debido a las mismas también se utiliza en transformadores, en los que los núcleos de hierro se hacen con láminas aisladas eléctricamente entre sí, en vez de hacerse de una sola pieza maciza de metal.

20.4 Autoinducción y autoinductancia: comportamiento de los circuitos *R–L*

Hasta este punto, la atención se ha centrado en las FEMs generadas por flujos magnéticos producidos exteriormente. Desde luego, *todo* cambio de flujo experimentado por un circuito, *incluso un cambio en el flujo magnético producido por corriente que fluye en el propio circuito*, inducirá una FEM en éste. Las tuerzas electromotrices generadas de esta manera por la propia corriente de un circuito se llaman ***FEMs autoinducidas*** y a su generación se le denomina ***autoinducción***.

Es más fácil comprender la producción de las FEMs autoinducidas estudiando algunos ejemplos específicos. Primero se considerará el caso de un solenoide largo ideal con n vueltas de alambre por unidad de longitud. De los estudios anteriores, por la ecuación (19.7.9) resulta que la inducción magnética axial B dentro del arrollamiento de esta bobina tiene el valor

$$B = \mu_0 n I \tag{20.4.1}$$

en que I es la corriente en la misma. En el solenoide ideal, todo el flujo magnético asociado a este campo pasa por cada vuelta de la bobina, como se muestra en la figura 19.41, lo cual no es cierto para un solenoide de longitud finita, como se ilustra en la figura 19.42. Aun así, si la longitud del solenoide es mucho mayor que su radio, como se supondrá, no se comete mucho error haciendo esta consideración. Procediendo de esta manera, el flujo a través de cada vuelta puede expresarse como el producto de la inducción magnética por el área transversal A de la bobina,

$$\Phi_m = BA = \mu_0 n I A \tag{20.4.2}$$

Si la corriente cambia en el tiempo, la rapidez de variación del flujo dentro del solenoide es

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \mu_0 n A \frac{dI}{dt} \tag{20.4.3}$$

Ahora puede obtenerse la FEM autoinducida, a partir de la ley de Faraday como

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 N n A \frac{dI}{dt} \tag{20.4.4}$$

en que N es el número total de vueltas igual a nl, siendo l la longitud del solenoide. Por último se puede expresar la FEM autoinducida como

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n^2 l A \frac{dI}{dt} \tag{20.4.5}$$

Si el circuito fuera de alguna forma distinta a un solenoide largo, ya no se hubiera podi-

do utilizar (20.4.1) para expresar el campo magnético alrededor y dentro del mismo. Pero incluso si no hubiese sido posible calcular el campo que rodea al circuito, de la ley de Biot-Savart —expresada por (19.5.5)— se hubiera llegado a la conclusión de que el campo magnético en todos los puntos debe ser *directamente proporcional a la corriente* que lo crea, lo que también es cierto acerca del flujo Φ_m, ya que es simplemente una suma de valores de campo sobre el área del circuito —en el caso más simple, igual al campo multiplicado por el área. De modo que la rapidez de variación del flujo $d\Phi_m/dt$ tiene que ser directamente proporcional a la rapidez de cambio de la corriente dI/dt, sin importar la forma que tenga el circuito. En consecuencia, siempre se encontrará que la FEM autoinducida $\mathscr{E}$ está relacionada con la corriente en el circuito por medio de

$$\boxed{\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}} \qquad (20.4.6)$$

en que L es una constante de proporcionalidad llamada *autoinductancia* del circuito. El término autoinductancia a menudo se abrevia a *inductancia*. En el caso de un circuito con forma de solenoide largo abrevia, de longitud l y área transversal A, formado de n vueltas de alambre por unidad longitud, es fácil ver de (20.4.5) que la autoinductancia debe ser

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 lA} \qquad (20.4.7)$$

Para un circuito de otra forma tendría que buscarse una relación distinta a (20.4.2) que dé el flujo dentro del circuito. También, como en el caso de solenoides cuyo radio no es pequeño en comparación con su longitud, todo el flujo generado puede no estar envuelto por cada espira del circuito; en este caso tendría que conocerse precisamente qué cantidad del flujo producido contribuye efectivamente a las FEMs en cada espira. En ese caso la autoinductancia del circuito ya no estaría dada por (20.4.7), y en efecto sería difícil o imposible obtenerla puramente por cálculos matemáticos. Empero, incluso en estos casos, debido a la estricta proporcionalidad entre la corriente en un circuito y el flujo magnético que produce, todavía se satisface la ecuación (20.4.6), aunque no se tenga una manera simple de determinar la autoinductancia L, aparte de medirla experimentalmente. Por fortuna esto no es difícil en especial y para casi todos los propósitos basta con conocer simplemente que la FEM autoinducida está dada por (20.4.6), en que L es una propiedad de un circuito individual o de un conjunto de espiras de un circuito, que se determinará por mediciones.

El caso es semejante al que se plantea en la ley de Ohm para los circuitos eléctricos. A menudo es muy difícil *calcular* directamente la resistencia eléctrica de un resistor, aunque se conozca con exactitud la resistividad eléctrica del material lo que por lo general no es necesario. Sin embargo, prácticamente es juego de niños hacer pasar una corriente medida con precisión por la resistencia, medir la diferencia de potencial a través de ella y utilizar $R = \Delta V/I$ para obtener el resultado deseado. Lo importante no es saber cómo calcular la resistencia sino poder determinar su valor de alguna manera práctica, y saber que expresa la proporcionalidad entre la corriente y la diferencia de potencial, de acuerdo con la ley de Ohm.

Del mismo modo no es del todo importante saber cómo calcular directamente la autoinductancia de un circuito o bobina. Es mucho más importante poder determinar la autoinductancia de un circuito en una forma experimental práctica, y comprender que la FEM autoinducida en cualquier circuito está relacionada con la rapidez de variación de la corriente en el circuito por medio de

$$\boxed{\mathscr{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = \Delta V_L} \qquad (20.4.8)$$

en que el factor de proporcionalidad L es la autoinductancia. Como cualquier otra FEM, el efecto de ésta es producir una diferencia de potencial ΔV_L entre las terminales del dispositivo, por medios *no electrostáticos*. En este caso, la FEM es de origen electromagnético; y como se verá pronto, aunque la diferencia de potencial a la que contribuye al circuito siempre puede representarse matemáticamente como $\Delta V_L = -L(dI/dt)$, su *sentido* depende de que dI/dt sea positiva (corriente en aumento) o negativa (corriente en disminución).

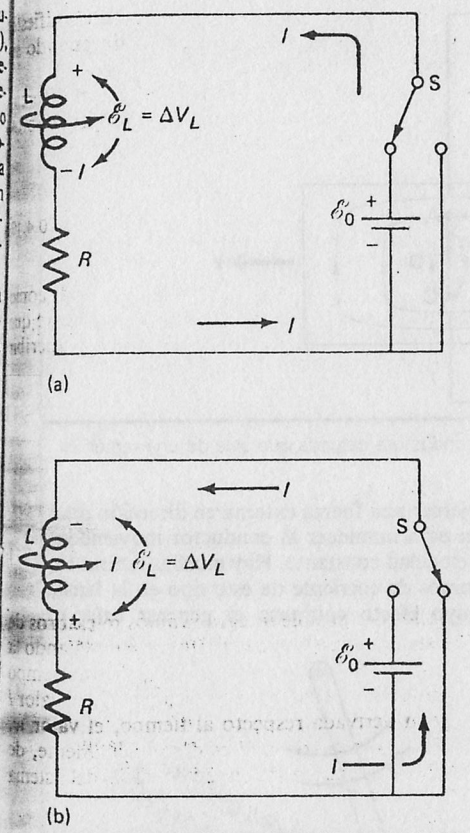


FIGURA 20.16. FEMs de autoinducción en un circuito $R-L$ (resistivo-inductivo) (a) cuando pasa corriente y (b) cuando no pasa corriente.

También es importante notar que la inductancia de un circuito puede concentrarse en un solo elemento como un solenoide o una bobina toroidal —diseñado para que tenga un valor grande de autoinductancia—, o que esté distribuida alrededor del circuito en caso de que no exista este tipo de elemento. En cualquier forma está presente la FEM $-L(dI/dt)$, pero en el primer caso claramente se halla asociada al elemento inductivo, más o menos como la FEM de una batería, mientras que en el segundo se halla distribuida alrededor de todo el circuito. Ahora se trabajará principalmente con circuitos que contengan elementos inductivos concentrados, llamados *inductores*, o simplemente *bobinas*. El símbolo ilustra la presencia de inductores en los diagramas de circuitos eléctricos. En un ejemplo que se presentará un poco más adelante se estudiará un método para medir la autoinductancia de los circuitos. De (20.4.6) es evidente que la unidad de autoinductancia puede expresarse como la unidad de flujo dividida entre la unidad de corriente. Entonces, en el SI la unidad de autoinductancia es weber/ampere, que normalmente se conoce como *henry* y su símbolo es H.

Es fácil determinar el *sentido* de las FEMs autoinducidas en los circuitos inductivos aplicando la ley de Lenz. Por ejemplo, en la figura 20.16, a se muestra una bobina, que tiene una autoinductancia L y una resistencia R, en serie con una fuente de FEM $\mathscr{E}_0$ y un interruptor S. La resistencia R, que representa la del conductor que forma la bobina, se muestra como un elemento separado en el circuito para que se puedan estudiar individualmente los efectos asociados a la resistencia y la autoinductancia, igual como se podría mostrar la resistencia interna de una fuente en forma de un elemento separado de circuito. Se supondrá que toda la resistencia del circuito está contenida en la resistencia R y que *toda la* autoinductancia del circuito está representada por L.

Cuando se cierra a la izquierda el interruptor S, comienza a fluir por el circuito la corriente I, que al principio era cero. Al pasar por la bobina empieza a establecerse un campo magnético, y entonces el flujo variable en el tiempo que pasa por las espiras de la bobina y por el resto del circuito, de inmediato genera una FEM autoinducida $\mathscr{E}_L = -L(dI/dt)$. El signo de esta FEM es tal que se *opone* al aumento de flujo magnético a través de la bobina provocado por la corriente I. Esta corriente I produce un campo **B** dentro de la bobina que apunta hacia arriba y que crece continuamente, pues la corriente va aumentando en el tiempo. En un intervalo de tiempo Δt, hay un cambio de flujo provocado por un

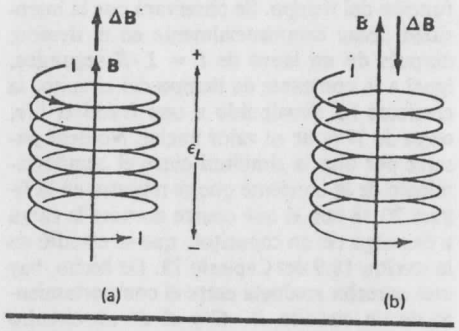


FIGURA 20.17. Cambios de flujo y FEMs inducidas (a) en el caso de la figura 20.16a y (b) en el de la figura 20.16b.

cambio de campo **ΔB**, como se muestra en la figura 20.17, a. En este caso la FEM autoinducida debe ser tal que si se determinara el sentido de la corriente en el campo, generaría un cambio de flujo opuesto. Por tanto, la FEM autoinducida $\mathcal{E}_L$ tiende a establecer una corriente que se *oponga* a la que está fluyendo en realidad; la corriente circula de la manera como lo hace debido a que la FEM de la fuente $\mathcal{E}_0$ es mayor que $\mathcal{E}_L$. Actuando por sí sola, crearía una diferencia de potencial en el circuito que hacia al extremo superior de la bobina positivo con respecto al extremo inferior, como se muestra en la figura 20.17, a. Por tanto, el signo de $\mathcal{E}_L$ es opuesto al de la FEM de la batería. En vez de hacer que exista un aumento de potencial en el circuito al recorrerlo en el sentido de flujo de la corriente, provoca una caída de potencial, lo que ya se refleja en el signo negativo de la ecuación (20.4.8), que puede encontrar sus orígenes en la ley de Lenz. La aplicación de la ley II de Kirchhoff, que indica que la suma de todas las FEMs y cambios de potencial alrededor de cualquier circuito cerrado debe ser cero, muestra entonces que con el interruptor S en la posición que se indica en la figura 20.16, a,

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} - RI = 0 \qquad (20.4.9)$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse para evaluar la corriente I en el circuito en función del tiempo, y poner así de manifiesto el modo como crece la corriente cuando se cierra el interruptor.

Es muy fácil resolver la ecuación diferenciando o derivando primero ambos miembros de (20.4.9) con respecto al tiempo:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (20.4.10)$$

Ahora se designará a la cantidad dI/dt como w. Entonces, si $w = dI/dt$, debe tenerse que $dw/dt = d^2I/dt^2$, o cual permite escribir (20.4.10) como

$$L\frac{dw}{dt} = -Rw$$

de donde

$$\frac{dw}{w} = -\frac{R}{L}\,dt \qquad (20.4.11)$$

Ahora es posible integrar ambos miembros de esta ecuación desde el tiempo $t = 0$, cuando la corriente también es nula, hasta algún tiempo posterior t, cuando la corriente tenga el valor I y su derivada respecto al tiempo, el valor w. Pero si la corriente I es cero inicialmente, de (20.4.9) debe tenerse en estado inicial del sistema

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \qquad (20.4.12)$$

Ya que dI/dt es w en (20.4.11), cuando $t = 0$ entonces w debe tener el valor inicial $\mathcal{E}_0/L$, por lo que debe integrarse (20.4.11) desde $t = 0$ hasta el tiempo posterior t en el primer miembro desde $w = \mathcal{E}_0/L$ que corresponde al tiempo = 0, hasta el valor w, que corresponde al tiempo t. De esta manera, recordando que R y L son constantes y no varían en el tiempo, se obtiene

$$\int_{\mathcal{E}_0/L}^{w}\frac{dw}{w} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

o

$$[\ln w]_{\mathcal{E}_0/L}^{w} = \ln w - \ln\frac{\mathcal{E}_0}{L} = -\frac{Rt}{L} \qquad (20.4.13)$$

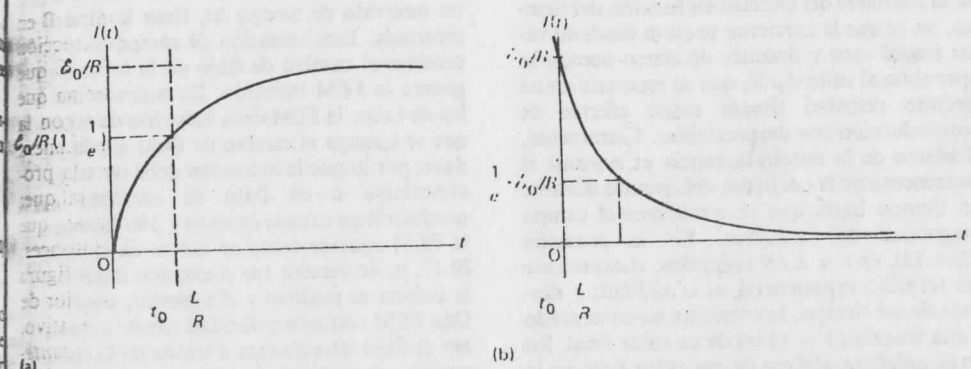


FIGURA 20.18. Gráfica de la corriente en función del tiempo (a) para el caso de la figura 20.16a, y (b) para el de la figura 20.16b.

Como $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$, lo anterior puede escribirse

$$\ln\frac{wL}{\mathcal{E}_0} = -\frac{Rt}{L} \qquad (20.4.14)$$

y exponencializando ambos miembros:

$$\frac{wL}{\mathcal{E}_0} = e^{-Rt/L} \qquad (20.4.15)$$

o

$$w(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}e^{-Rt/L} = \frac{dI}{dt} \qquad (20.4.16)$$

recordando que en todo momento se utilizó w como representación de dI/dt.

Ahora es posible escribir (20.4.16) como sigue:

$$dI = \frac{\mathcal{E}_0}{L}e^{-Rt/L}\,dt \qquad (20.4.17)$$

después de multiplicar ambos miembros por dt. Esta expresión puede integrarse nuevamente desde $t = 0$, cuando la corriente I también es cero, hasta el tiempo t, cuando la corriente tiene el valor I:

$$\int_0^I dI = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\int_0^t e^{-Rt/L}\,dt$$

o sea,

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\left[-\frac{L}{R}e^{-Rt/L}\right]_0^t$$

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})} \qquad (20.4.18)$$

La ecuación (20.4.18), que se obtuvo después de todas las operaciones, es la buscada. Describe la forma como crece la corriente del circuito de la figura 20.16, a, en el tiempo, después que se cierra el interruptor.

De la ecuación (20.4.8), la diferencia del potencial a través de la inductancia es

$$\Delta V_L = \mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \qquad (20.4.19)$$

y como (20.4.16) da dI/dt, se encuentra que

$$\boxed{\Delta V_L = -\mathcal{E}_0 e^{-Rt/L}} \qquad (20.4.20)$$

y el signo negativo refleja el hecho de que la corriente experimenta una caída de potencial al pasar por la inductancia. La caída de potencial a través de la resistencia es IR, en que I está dada por (20.4.18); es fácil verificar que la suma de estos dos cambios de potencial dados por las ecuaciones (20.4.18) y (20.4.19) es igual a la FEM aplicada $\mathcal{E}_0$.

En la figura 20.18, a, se muestra la variación de la corriente del circuito en función del tiempo. Se ve que la corriente se eleva desde su valor inicial cero y después de cierto tiempo se aproxima al valor $\mathscr{E}_0/R$, que se esperaría en un circuito resistivo simple cuyos efectos de autoinducción son despreciables. Claramente, el efecto de la autoinductancia es *retrasar* el incremento de la corriente del circuito durante un tiempo hasta que se establezca el campo magnético del inductor. En la ecuación (20.4.18), en $t = L/R$ segundos, el exponente del término exponencial es la unidad; y después de ese tiempo, la corriente ha aumentado a una fracción $1 - (1/e)$ de su valor final. En otras palabras, *difiere* de ese valor final en la fracción $1/e$. La cantidad L/R, que tiene la dimensión de tiempo y que expresa esta propiedad de los circuitos inductivos-resistivos, se conoce como *constante de tiempo inductiva* del circuito. En circuitos en que la inductancia es grande y la resistencia es pequeña, tal constante de tiempo puede ser considerable. En la práctica no es muy difícil formar un inductor cuya inductancia sea de unos 10 henrys y que tenga no más de 1 ohm de resistencia. Esta inductancia tendría una constante de tiempo de 10 segundos. Con frecuencia se encontrarán inductancias de circuitos cuyas constantes de tiempo son fracciones muy pequeñas de un segundo. Aun así, pueden ser muy importantes los efectos de la autoinducción en circuitos como éstos.

Ahora se supondrá que la corriente ha alcanzado el valor asintótico $\mathscr{E}_0/R$ después de un tiempo largo, y que repentinamente se abre el interruptor S, (cambiándolo al lado derecho) como se muestra en la figura 20.16, b. Esto quiere decir que de pronto se suprime la FEM de la batería. Entonces no existe ya una fuente externa de energía que mantenga la corriente en el circuito o el campo magnético que produce, de manera que la corriente comienza a disminuir y el flujo magnético contenido por las espiras del inductor (o en el propio circuito) comienza a disminuir. De acuerdo con la ley de Faraday, como resultado debe inducirse una FEM, cuyo signo nuevamente se puede determinar por medio de la ley de Lenz. Como ilustra la figura 20.17, b, ahora el campo magnético está disminuyendo; el vector $\Delta\mathbf{B}$ que representa la variación en el campo $\mathbf{B}$ en un intervalo de tiempo Δt, tiene la dirección mostrada. Esta variación de campo es lo que produce el cambio de flujo en la bobina que genera la FEM inducida. De acuerdo con la ley de Lenz, la FEM debe inducirse de manera que se *oponga* al cambio de flujo que la produce, por lo que la inducción debe ser tal que; contribuya a un flujo de corriente que produciría un campo opuesto a $\Delta\mathbf{B}$. Entonces, la FEM aparece como se indica en la figura 20.17, b, de manera que el extremo inferior de la bobina es positivo y el superior, negativo. Una FEM con esta polaridad tiende a *mantener* el flujo de corriente a través de la inductancia y de todo el circuito, en tanto que la corriente siga variando en el tiempo, de manera parecida a la de una batería de polaridad semejante. Desde luego, la FEM actúa en tanto que la corriente esté variando; una vez que haya cesado tal corriente y desaparecido su campo magnético asociado, también desaparecerá la FEM inducida. De nuevo, la FEM origina una diferencia de potencial $\Delta V_L = +L(dI/dt)$ entre las terminales del elemento inductivo; pero como ahora dI/dt es negativa, su polaridad es opuesta a la que tenía en el caso que se estudió antes y que está ilustrado en la figura 20.16, a.

De nuevo se puede igualar a cero la suma algebraica de las elevaciones caídas de potencial alrededor del circuito de la figura 20.16, a, de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, para obtener

$$\boxed{-L\frac{dI}{dt} - RI = 0} \qquad (20.4.21)$$

Multiplicando todo por dt y reordenando algebraicamente, lo anterior puede quedar como

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \qquad (20.4.22)$$

en que el primer miembro sólo depende de I y el segundo sólo de t. Ahora puede integrarse en ambos lados desde $t = 0$, en cuyo momento la corriente tiene el valor de estado estable

$\mathscr{E}_0/R$ dado por (20.4.18) para t grande, hasta el tiempo t, cuando la corriente tiene el valor I. Por tanto,

$$\int_{\mathscr{E}_0/R}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \qquad (20.4.23)$$

o sea,

$$[\ln I]_{\mathscr{E}_0/R}^{I} = \ln I - \ln(\mathscr{E}_0/R) = -\frac{Rt}{L}$$

$$\ln\left(\frac{IR}{\mathscr{E}_0}\right) = -\frac{Rt}{L} \qquad (20.4.24)$$

Exponencializando ambos lados de esta ecuación, se obtiene por último

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{-Rt/L}} \qquad (20.4.25)$$

La diferencia de potencial ΔV_L entre las terminales del inductor, de acuerdo con (20.4.19), será

$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathscr{E}_0 L}{R}\left(-\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\right)$$

o bien,

$$\boxed{\Delta V_L = \mathscr{E}_0 e^{-Rt/L}} \qquad (20.4.26)$$

El signo positivo de esta diferencia de potencial confirma el razonamiento anterior que condujo a esperar un aumento de potencial a través de la inductancia en estas condiciones, parecido al asociado a una batería. En efecto, en el circuito de la figura 20.16, b, el inductor es la única fuente de FEM en el circuito y es la FEM de la inductancia, generada a medida que decrece el campo magnético de la bobina, la única que mantiene la corriente en el circuito.

Nuevamente, la caída de potencial a través del circuito es IR, en que I está dada por la ecuación (20.4.25). De nuevo es más fácil verificar que es cero la suma algebraica de las diferencias de potencial a través de la inductancia y de la resistencia como lo requiere (20.4.20). En la figura 20.18, b, se muestra la gráfica de la corriente dada por (20.4.25) en función del tiempo. Se observará que la intensidad decae exponencialmente en el tiempo; después de un lapso de $t = L/R$ segundos, igual a la constante de tiempo del circuito, la corriente ha disminuído a una fracción $1/e$, cerca de 37% de su valor inicial. No debe pasarse por alto la similitud entre el comportamiento de la corriente que se muestra en la figura 20.18 con el que ocurre durante la carga y descarga de un capacitor, que se estudió en la sección 18.9 del Capítulo 18. De hecho, hay una estrecha analogía entre el comportamiento de un circuito $R-C$ y el de un circuito inductivo-resistivo, que se conoce también como circuito $R-L$. En el caso de los primeros, el capacitor almacena y libera la energía de un campo eléctrico que se forma entre las placas; en el caso de los segundos, el inductor almacena y libera la energía *magnética* asociada a su campo.

Por último, el lector debe tener cuidado de no confundir el aumento retrasado de la corriente en los circuitos $R-L$ a medida que se aplica una FEM externa y el decaimiento prolongado de la corriente cuando se elimina aquella, con los retrasos muchos más breves en el aumento y reducción de la corriente debidos a la inercia de los electrones libres de conducción en los circuitos puramente resistivos que se estudiaron en el Capítulo 18, sección 18.4, correspondiente al desarrollo de la ley de Ohm. Estos últimos efectos ocurren por razones completamente distintas y en una escala de tiempo mucho más breve; de hecho, tanto, que ni siquiera pueden observarse directamente. Los fenómenos inductivos que se estudian aquí, son de origen exclusivamente magnético y producen efectos en el crecimiento y decrecimiento de las corrientes en circuitos, cambios que pueden observarse incluso con aparatos por demás rudimentarios.

EJEMPLO 20.4.1

Calcular la autoinductancia L de una bobina toroidal arrollada estrechamente, de radio interno a, radio externo b, radio medio d, y que tiene n vueltas por unidad de longitud a lo largo de la circunferencia media. Se supone que el toroide es "delgado", es decir, uno en que la diferencia $b - a$ entre los radios interno y

externo es mucho menor que el radio medio d.

En (19.7.8) se vio que el campo **B** dentro de una bobina toroidal está dada por

$$B = \mu_0 n I \left(\frac{d}{r}\right) \tag{20.4.27}$$

y es cero fuera de la bobina. En un toroide "delgado", la relación d/r está muy próxima a la unidad en todas partes dentro del toroide, como se ilustra en la figura 19.40, b. En este caso (20.4.27) se reduce a la expresión aproximada

$$B \simeq \mu_0 n I \tag{20.4.28}$$

Ya que en este tipo de bobina toroidal, B prácticamente es constante en la sección transversal, el flujo magnético dentro de la bobina será

$$\Phi_m = BA = \mu_0 n I A \tag{20.4.29}$$

en que A es el área transversal. Entonces, la FEM inducida es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 n N A \frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{20.4.30}$$

y la igualdad final se sigue (20.4.6). De esta ecuación es evidente que

$$\boxed{L = \mu_0 n N A} \tag{20.4.31}$$

Pero el número total de vueltas N está relacionado con el número n por unidad de longitud mediante $N = nc$, en que c es la circunferencia media igual a $2\pi d$. Sustituyendo esto en (20.4.31),

$$L = 2\pi\mu_0 n^2\, dA \tag{20.4.32}$$

Para una bobina de 10 cm de radio, el área transversal de 3 cm², y con 50 vueltas/cm, se obtiene

$$L = (6.283)(12.57 \times 10^{-7})$$

$$(5.0 \times 10^3)^2(0.1)(3 \times 10^{-4})$$

$$= 5.92 \times 10^{-3}\ \text{H}$$

EJEMPLO 20.4.2

La bobina descrita en el ejemplo anterior está formada con alambre de cobre de 0.2 mm de diámetro, cuya resistividad eléctrica ρ es $1.75 \times 10^{-8}\ \Omega$.m. Calcular la constante de tiempo de la bobina.

De acuerdo con el estudio anterior de los circuitos, la constante de tiempo es sencillamente L/R, en que R es la resistencia. Para encontrar este valor se necesita conocer la longitud de alambre que se utilizó en el devanado, la que está dada por

$$l = 2\pi r_c N \tag{20.4.33}$$

en que r_c es el radio de la sección transversal circular de la bobina. Se sabe que el área transversal es de 3 cm² = 3×10^{-4} m², por lo que,

$$A = \pi r_c^2 = 3 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

de donde

$$r_c = 9.772 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

El número total de vueltas es el número por unidad de longitud (en este caso 50 cm⁻¹, o sea 5 000 m⁻¹) por la circunferencia media del toroide, que es $2\pi d = (2\pi)(0.1)$ m. Por tanto, $N = (5\,000)(2\pi)(0.1) = 3\,142$. En consecuencia, la longitud del alambre en la bobina es, de acuerdo con (20.4.33),

$$l = (2\pi)(9.772 \times 10^{-3})(3142) = 192.9\ \text{m}$$

El área transversal del conductor es

$$A_w = \pi r_w^2 = (\pi)(10^{-4})^2 = 3.142 \times 10^{-8}\ \text{m}^2$$

La resistencia del mismo es

$$R = \frac{\rho l}{A_w} = \frac{(1.75 \times 10^{-8})(192.9)}{3.142 \times 10^{-8}} = 107.5\ \text{ohms}$$

La constante de tiempo t_0 de la bobina es

$$t_0 = \frac{L}{R} = \frac{5.92 \times 10^{-3}}{107.5} = 5.51 \times 10^{-5}\ \text{s}$$

EJEMPLO 20.4.3

Se determina que una bobina de inductancia desconocida lleva una corriente unidireccional

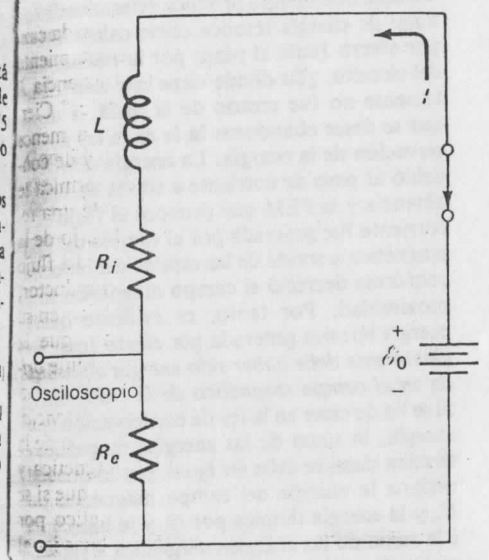


FIGURA 20.19.

constante (CC) de 3.50 A. cuando se mantiene a través de ella una diferencia de potencial de 2.80 V. Cuando se conecta en un circuito como el de la figura 20.19, con ayuda de un osciloscopio se observa que la diferencia de potencial a través de un resistor de 1.0 Ω colocado en serie con la bobina se eleva a 90% de su valor asintótico en 4.2×10^{-3} segundos. ¿Cuál es la inductancia de la bobina? Determine el valor instantáneo de la corriente en ese momento. Evalúe la diferencia de potencial entre las terminales del inductor en ese instante. Se supone que la batería mostrada en el diagrama tiene resistencia interna despreciable y que su FEM es de 6.3 V.

Este circuito es semejante al que se muestra en la figura 20.16a, con la única diferencia de que parte de la resistencia total del circuito es la resistencia *interna* R_i de la bobina y parte es una resistencia *externa* R_c, igual a 1.0 Ω, cuya diferencia de potencial terminal se puede observar en un osciloscopio. De los datos anteriores se ve que el valor de la resistencia interna del inductor está dado por la relación de la diferencia de potencial a la corriente medida en las condiciones estables de la corriente continua:

$$R_i = \frac{\Delta V_L}{I_{dc}} = \frac{2.80}{3.50} = 0.80\ \text{ohm}$$

En efecto, se pueden reemplazar las resistencias en serie R_i y R_c en la figura 20.19 con una *sola* resistencia equivalente total R dada por

$$R = R_i + R_c = 0.80 + 1.00 = 1.80\ \text{ohm}$$

en cuyo caso es que el circuito es idéntico al de la figura 20.16, a. Por tanto, los resultados deducidos para ese circuito son aplicables a éste, a condición de que se identifique a R como la *suma* de las resistencias internas y externas.

De acuerdo con ello, (20.4.18) de la variación de la corriente en el tiempo después de cerrado el interruptor. Se sabe que para $t = 4.2 \times 10^{-3}$ segundos, I es igual a 0.90 veces el valor asintótico final $\mathcal{E}_0/R$, por lo que, sustituyendo estos valores en (20.4.18), junto con $R = 1.80\ \Omega$,

$$(0.90)(\mathcal{E}_0/R) = (\mathcal{E}_0/R)(1 - e^{-(1.80)(4.2 \times 10^{-3})/L})$$

Ahora se puede cancelar $\mathcal{E}_0/R$ a ambos lados para encontrar

$$e^{-7.56 \times 10^{-3}/L} = 1 - 0.90 = 0.10$$

y tomando el logaritmo natural en ambos miembros,

$$\frac{7.56 \times 10^{-3}}{L} = \ln 0.10 = -2.303$$

$$L = 3.28 \times 10^{-3}\ \text{H}$$

La corriente instantánea en este momento puede encontrarse sustituyendo los valores $\mathcal{E}_0 = 6.3$ V, $R = 1.80\ \Omega$, $t = 4.2 \times 10^{-3}$ y S y $L = 3.28 \times 10^{-3}$ H en (20.4.18) para encontrar $I = 3.15$ A. Empero, es más simple observar que para $t = 4.2 \times 10^{3}$ s,

$$I = (0.90)(\mathcal{E}_0/R) = (0.90)\left(\frac{6.3}{1.8}\right) = 3.15\ \text{A}$$

La diferencia de potencial entre las terminales del inductor, es la suma de la diferencia de potencial inducida $-L(dI/dt)$ a través de la in-

ductancia y la diferencia de potencial $-IR_i$, debida a la resistencia interna de la bobina; se escribe cada uno de estos términos con signo negativo, para indicar que en ambos casos se tiene una *caída* de potencial. Por tanto, por (20.4.20) se puede escribir

$$\Delta V = \Delta V_L + \Delta V_{R_i} = -\mathscr{E}_0 e^{-Rt/L} - IR_i$$
$$= -(6.3)(0.10) - (3.15)(0.80) = -3.15 \text{ volts}$$

Al hacer este cálculo, se observa que ya se conoce de los resultados anteriores que $e^{-Rt/L} = 0.10$ para los valores dados de R, t y L. Más sencillamente, se podrían haber sumado las diferencias de potencial alrededor del circuito y tener

$$\mathscr{E}_0 + \Delta V_L + \Delta V_{R_i} + \Delta V_{R_e} = 0$$

de donde

$$\Delta V_L + \Delta V_{R_i} = -\mathscr{E}_0 - \Delta V_{R_e} = -\mathscr{E}_0 + IR_e$$
$$= -6.3 + (3.15)(1.0) = -3.15 \text{ volts}$$

La *constante de tiempo* del circuito de la figura 20.19 en que se tienen tanto resistencia interna como externa será

$$t_0 = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_i + R_e} = \frac{3.28 \times 10^{-3}}{1.80}$$
$$= 1.82 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Si se elimina la resistencia externa del circuito, entonces la constante de tiempo asociada a la bobina y su propia resistencia interna queda como

$$t_0' = \frac{L}{R_i} = \frac{3.28 \times 10^{-3}}{0.8} = 4.10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

20.5 Energía en circuitos inductivos y densidad de energía de los campos magnéticos

Ahora se volverá el caso ilustrado en la figura 20.16, b, en donde el campo magnético asociado inicialmente a la bobina mantiene el flujo de corriente en el circuito durante cierto tiempo conforme decrece el flujo magnético. Ya se ha observado que la corriente que fluye durante este tiempo produce determinada cantidad de energía térmica como calentamiento por efecto Joule al pasar por la resistencia R del circuito. ¿De dónde viene este calor? Ciertamente no fue creado de la nada, a menos que se desee abandonar la fe en la ley de conservación de la energía. La energía térmica se debió al paso de corriente a través de una resistencia y la FEM que provocó el flujo de la corriente fue generada por el cambio del flujo magnético a través de las espiras del inductor, conforme decreció el campo magnético en su proximidad. Por tanto, es evidente que la energía térmica generada por efecto Joule *originalmente debe haber sido energía almacenada en el campo magnético de la inductancia.* Si se ha de creer en la ley de conservación de la energía, la suma de las energías magnética y térmica siempre debe ser igual, por lo que si se designa la energía del campo magnético por U_m y la energía térmica por Q, y se hace igual a la suma de las energías magnética y térmica en los tiempos t y $t + dt$, entre los cuales ocurren los cambios dU_m y dQ, se tiene

$$U_m + Q = U_m + dU_m + Q + dQ \qquad (20.5.1)$$

o sea,

$$-dU_m = dQ \qquad (20.5.2)$$

Se pueden dividir ambos miembros de esta ecuación entre dt para obtener

$$-\frac{dU_m}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I^2R \qquad (20.5.3)$$

recordando que la velocidad a la que la energía eléctrica se convierte en calor es I^2R. Pero ahora se estudia la ecuación (20.4.20), que indica que, para este sistema,

$$-L\frac{dI}{dt} = RI \qquad (20.5.4)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por I y notando que $I(dI/dt) = d(\frac{1}{2}I^2)/dt$, lo anterior queda

$$LI\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}LI^2) = I^2R \qquad (20.5.5)$$

o sea,

$$-\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}LI^2) = \frac{dQ}{dt} \qquad (20.5.6)$$

Comparando esto con (20.5.3), se ve que debe expresarse *la energía en el campo magnético de un inductor como*

$$\boxed{U_m = \tfrac{1}{2}LI^2} \qquad (20.5.7)$$

Aunque este resultado se dedujo considerando un proceso específico, es evidente que es de aplicabilidad general.

También es importante poder calcular la *densidad de energía*, o energía por unidad de volumen, del campo magnético, lo que puede hacerse con referencia al ejemplo del solenoide largo con vueltas por longitud unitaria, en cuyo interior ya se demostró que existe un campo constante dado por

$$B = \mu_0 nI \qquad (20.5.8)$$

y para el que recientemente se calculó la autoinductancia como

$$L = \mu_0 n^2 lA \qquad (20.5.9)$$

Siendo l la longitud y A el área transversal. De acuerdo con (20.5.7) y (20.5.8), la cantidad de energía magnética asociada al campo es

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}(\mu_0 n^2 lA)\left(\frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}\right) = lA\frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (20.5.10)$$

El producto lA representa sencillamente el volumen V del interior del solenoide, donde reside el campo magnético; esto quiere decir que la *densidad de energía del campo magnético* se puede expresar como

$$\boxed{\frac{U_m}{\mathcal{V}} = \frac{B^2}{2\mu_0}} \qquad (20.5.11)$$

Las ecuaciones (20.5.7) y (20.5.11) son análogas a las expresiones deducidas antes $U_e = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$ y $U_e/\mathcal{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, que expresan la energía del campo eléctrico en un capacitor y la energía por volumen unitario asociada a un campo *eléctrico*:

En consecuencia, es claro que los inductores pueden almacenar energía en sus campos magnéticos, igual que los capacitores pueden contener energía electrostática, y además, que cualquier campo magnético tiene una densidad de energía semejante a la de un campo electrostático. En los circuitos oscilatorios y en las ondas electromagnéticas, como pronto se verá en detalle, la energía se puede intercambiar continuamente entre los campos eléctrico y magnético.

EJEMPLO 20.5.1

Un electroimán grande de investigación tiene polos con caras circulares paralelas de 30 cm de diámetro, que están a una distancia de 5 cm. El imán puede producir un campo máximo de 1.2 Wb/m², esencialmente constante dentro de la región cilíndrica entre los polos. Determinar qué cantidad de energía se almacena en el campo magnético de esta región, en estas condiciones. ¿Cuánto tiempo podrá permanecer encendida una lámpara incandescente de 60 W desarrollando esta potencia y alimentada con la energía del campo?

La densidad de energía en la región del campo está dada por (20.5.11). La energía total en el volumen $\mathcal{V}$ de la región cilíndrica entre los polos es entonces

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0}\mathcal{V} = \frac{B^2\pi R^2 h}{2\mu_0} \qquad (20.5.12)$$

en que R es el radio de la cara del polo y h el espaciamiento entre las caras. Sustituyendo los valores dados de estas cantidades se encuentra

$$U_m = \frac{(1.2)^2(\pi)(0.15)^2(0.05)}{(2)(4\pi)(10^{-7})} = 2025 \text{ J}$$

Una lámpara incandescente de 60 W trabajando a esta potencia, consume 60 joules de energía por segundo. La cantidad de energía expresada antes puede entonces alimentar la lámpara durante un tiempo de

$$t = \frac{2025}{60} = 33.75 \text{ s}$$

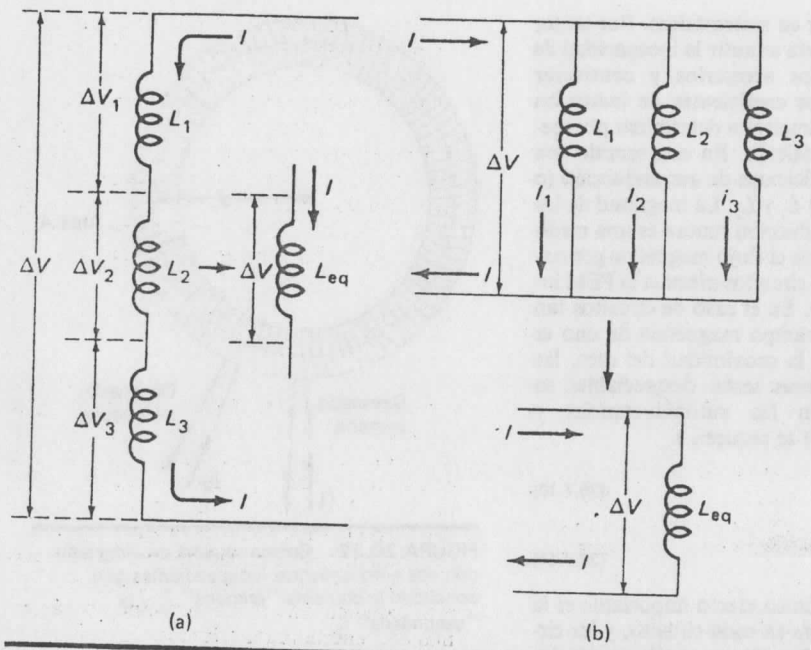


FIGURA 20.20. (a) Inductancias en serie y (b) inductancias en paralelo.

20.6 Inductores en serie o en paralelo

Los inductores pueden combinarse como elementos de circuito en serie o en paralelo de la misma manera que los resistores o los capacitores. Surge así la pregunta de qué valor debe tener la inductancia total del circuito en términos de las inductancias individuales combinadas en serie o en paralelo. Esta cuestión puede resolverse considerando la figura 20.20. En el caso de inductancias en serie, como se muestra en la figura 20.20, a, todos los inductores llevan la *misma corriente I (t)*. La diferencia de potencial a través del conjunto es la suma de las diferencias de potencial en cada elemento, de donde se puede escribir

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \qquad (20.6.1)$$

De (20.4.8), puesto que todas las inductancias llevan la misma corriente, la magnitud de las caídas de potencial a través de ellas será L_1 (dI/dt), L_2 (dI/dt) y L_3 (dI/dt). También, la magnitud de la diferencia de potencial ΔV a través del conjunto debe ser $L(dI/dt)$, en que L es la inductancia equivalente de la combinación en serie. Sustituyendo estos valores en (20.6.1), se obtiene

$$L\left(\frac{dI}{dt}\right) = L_1\left(\frac{dI}{dt}\right) + L_2\left(\frac{dI}{dt}\right) + L_3\left(\frac{dI}{dt}\right) \qquad (20.6.2)$$

o, dividiendo entre (dI/dt),

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \qquad (20.6.3)$$

El mismo procedimiento dará para n inductancias.

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n} \qquad (20.6.4)$$

En el caso de varios inductores en paralelo, como se muestra en la figura 20.20, b, todas las inductancias experimentan *la misma diferencia de potencial* ΔV, aunque lleven distintas corrientes: I_1, I_2 e I_3. La corriente total I que entra y sale del conjunto puede expresarse en términos de estas corrientes individuales como

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \qquad (20.6.5)$$

Diferenciando esto con respecto al tiempo:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt} \qquad (20.6.6)$$

Pero de (20.4.8), la magnitud de la diferencia de potencial ΔV a través de cada inductancia individual tiene que estar relacionada con la rapidez de variación de la corriente a través de ella por medio de

$$\Delta V = L_1\frac{dI_1}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt} = L_3\frac{dI_3}{dt} \qquad (20.6.7)$$

Esto quiere decir que

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\Delta V}{L_1} \qquad \frac{dI_2}{dt} = \frac{\Delta V}{L_2} \qquad \frac{dI_3}{dt} = \frac{\Delta V}{L_3} \qquad (20.6.8)$$

Sustituyendo estos valores en (20.6.6) y notando que la relación entre la diferencia de potencial ΔV y la rapidez de cambio de la corriente total debe estar expresada en términos de la inductancia equivalente L de la conexión en paralelo, por $\Delta V = L\,(dI/dt)$, resulta que

$$\frac{\Delta V}{L} = \frac{\Delta V}{L_1} + \frac{\Delta V}{L_2} + \frac{\Delta V}{L_3} \qquad (20.6.9)$$

o sea,

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \qquad (20.6.10)$$

Nuevamente, una repetición de este mismo razonamiento muestra que una combinación de n inductancias en paralelo tiene la inductancia equivalente dada por

$$\boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n}} \qquad (20.6.11)$$

De estos resultados es evidente que para las conexiones en serie o en paralelo de inductores, las inductancias equivalentes tienen la misma forma que las resistencias equivalentes de conexiones de resistores en serie o en paralelo. Siendo así, no es necesario presentar ejemplos específicos de cómo se realizan cálculos relacionados con esas combinaciones en serie y en paralelo.

Empero, cabe aquí hacer una advertencia sobre otra cuestión: al deducir las ecuaciones (20.6.4) y (20.6.11), se supuso que la caída de potencial a través de cualquier inductancia dada, sólo se crea por el cambio en la corriente —y por tanto, por el cambio en el flujo magnético asociado a esa inductancia— y que tal caída es completamente *independiente* de los cambios en el flujo magnético generados por las otras inductancias en el circuito. Esto únicamente será cierto si las inductancias están muy separadas, de manera que el campo magnético generado por cada una no afecte a ninguno de los demás en medida apreciable. En consecuencia, los resultados señalados aquí sólo se refieren al caso de combinaciones de inductancias *aisladas magnéticamente* entre sí. En la siguiente sección se atenderá el problema de cómo se comportan las inductancias que no estén aisladas magnéticamente entre ellas.

20.7 Inducción mutua, bobinas de inducción y transformadores

En las secciones 20.5 y 20.6 se estudió la manera cómo se inducen FEM en circuitos por las corrientes que fluyen en los mismos; a este fenómeno se le dio el nombre de autoinducción. Es posible que también se induzcan FEM por los cambios de flujo debidos a otros circuitos. A este fenómeno, que ya se encontró en el circuito ilustrado en la figura 20.4, se le llama *inducción mutua*.

Para comprender los fundamentos de la inducción mutua, se considerará el caso ilustrado en la figura 20.21, donde se ven dos circuitos, designados por 1 y 2, que llevan las corrientes I_1 e I_2 que pueden variar en el tiempo. Ahora se desea calcular las FEMs inducidas en cada circuito por los cambios de flujo magnético asociados a estas corrientes variables en el tiempo. Es importante reconocer que en este caso cada circuito encierra flujo

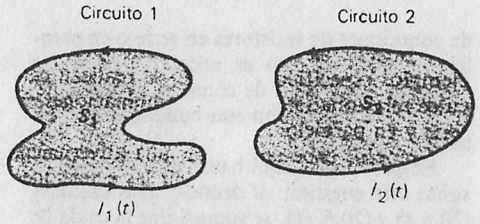


FIGURA 20.21. Dos circuitos cuyos campos magnéticos pueden inducir FEMs en sí mismos y mutuamente.

magnético generado por su propia corriente y por la corriente del otro circuito. Por ejemplo, recordando la definición de flujo magnético dada en el capítulo 19 como la ecuación (19.3.3), el flujo total Φ_1 encerrado por el circuito 1 puede expresarse como la suma del flujo generado por la corriente I_1 que fluye en el propio circuito 1 el generado por la corriente I_2 que fluye en el circuito 2:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \, da + \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, da$$

$$= \Phi_{11} + \Phi_{12} \qquad (20.7.1)$$

En forma análoga, el flujo Φ_2 encerrado por el circuito 2 puede escribirse como la suma del flujo generado por la corriente I_1 en el circuito 1 y el generado por I_2 en el propio circuito 2 como

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \, da + \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \, da$$

$$= \Phi_{21} + \Phi_{22} \qquad (20.7.2)$$

En estas ecuaciones, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son campos de inducción magnética independientes generados por I_1 e I_2, S_1 y S_2 son las áreas limitadas por los circuitos, y $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son vectores unitarios normales a S_1 y S_2, respectivamente.

Por la ley de Faraday se pueden expresar las FEM en los dos circuitos, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, como

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

$$= -\frac{d\Phi_{11}}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.3)$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt}$$

$$= -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.4)$$

Como según (20.4.6), la FEM autoinducida en un circuito que conduzca la corriente I que origine un flujo Φ para una sola espira es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (20.7.5)$$

es evidente que se puede expresar la *autoinductancia L* como

$$\boxed{L = \frac{d\Phi}{dI}} \qquad (20.7.6)$$

En consecuencia, pueden escribirse (20.7.3) y (20.7.4) como

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M_{12}\frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.7)$$

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.8)$$

en que L_1 y L_2 son las autoinductancias de los circuitos 1 y 2, y se defieren M_{12} y M_{21} por medio de

$$\boxed{M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \qquad M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1}} \qquad (20.7.9)$$

El coeficiente M_{12} expresa la rapidez, con la que cambia el flujo magnético a través del circuito 1 con respecto a la corriente en el circuito 2, mientras que M_{21} representa la rapidez con la que varía el flujo magnético a través del circuito 2 en función de la corriente en el circuito 1. Estos valores se llaman *coeficientes de inducción mutua* o *inductancias mutuas*, y relacionan magnéticamente los circuitos 1 y 2.

En principio es posible calcular directamente estos coeficientes, como lo es también calcular el coeficiente de autoinducción para un solo circuito. Sin embargo, para hacerlo se necesita conocer la fracción del flujo generado por uno de los circuitos y encerrada o enlazada por el otro, lo que generalmente es muy difícil representar en matemáticas. Por tanto, por lo general basta admitir la incapacidad de hacer los cálculos necesarios y considerar simplemente a los coeficientes de inducción mutua como parámetros a determinar por medición y no por cálculo. En este sentido son análogos los coeficientes de autoinducción (o autoinductancias) L_1 y L_2. La magnitud de los coeficientes de inducción mutua es una medida del grado en que el flujo magnético generado por uno de los circuitos afecta a la FEM inducida en el otro. En el caso de circuitos tan distantes que el campo magnético de uno es muy pequeño en la proximidad del otro, las inductancias mutuas serán despreciables en comparación con las autoinductancias y (20.7.7) y (20.7.8) se reducen a

$$\mathcal{E}_1 \cong -L_1\frac{dI_1}{dt} \qquad (20.7.10)$$

$$\mathcal{E}_2 \cong -L_2\frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.11)$$

En este caso, el único efecto importante es la FEM *autoinducida* en cada circuito, y los circuitos están aislados o son magnéticamente independientes entre sí. Por otra parte, si los circuitos se hallan tan próximos que uno encierra una parte significativa del flujo que genera el otro, los coeficientes de inducción mutua serán comparables en magnitud con los coeficientes de autoinducción, y se dice entonces que los circuitos están *acoplados magnéticamente* entre sí.

Como ejemplo específico, se considerará el caso de una bobina toroidal "delgada", como la que se estudió en el ejemplo 20.4.1, excepto que hay ahora dos devanados, uno encima del otro, como se ilustra en la figura 20.22. El primero, al que se llamará devanado *primario*, consiste en n_1 vueltas por unidad de longitud a lo largo de la circunferencia media y lleva una corriente I_1 variable en el tiempo. El segundo, al que se denominará devanado *secundario*, tiene n_2 vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente I_2 también variable en el tiempo. De los resultados del ejemplo 20.4.1, se sabe que la corriente I_1 en el primer devanado produce un campo $\mathbf{B}$ dentro del toroide dado por (20.7.12) y definidos por (20.7.1) y (20.7.2) son

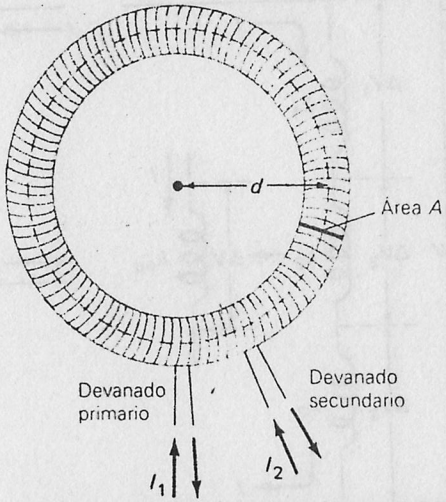


FIGURA 20.22. Bobina toroidal de inducción con dos enrollamientos independientes que conducen la corriente "primaria" I_1 y la "secundaria" I_2.

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \qquad (20.7.12)$$

En este caso, todo el flujo magnético generado está encerrado por todas las vueltas de cada uno de los devanados por lo que los flujos Φ_{11} y Φ_{22} producidos por la corriente primaria I_1 y definidos por (20.7.1) y (20.7.2) son

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} = B_1 A = \mu_0 n_1 A I_1 \qquad (20.7.13)$$

en que A es el área transversal del toroide. En forma análoga, los flujos Φ_{12} y Φ_{22} generados por la corriente secundaria I_2 son

$$\Phi_{12} = \Phi_{22} = B_2 A = \mu_0 n_2 A I_2 \qquad (20.7.14)$$

De acuerdo con (20.7.3), la FEM inducida en el primario —que se considera formado por N_1 vueltas totales de conductor— es

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{d\Phi_{11}}{dt} - N_1\frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

$$= -2\pi D n_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} - 2\pi D n_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \qquad (20.7.15)$$

en tanto que la FEM inducida en el devanado secundario es, de acuerdo con (20.7.4),

$$\mathscr{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt}$$

$$= -2\pi D n_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - 2\pi D n_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} \qquad (20.7.16)$$

en que D es el radio medio de la bobina, y n_1 y n_2 los números de vueltas por unidad de longitud en cada devanado. Sustituyendo los valores de los flujos en términos de las corrientes dados en (20.7.13) y (20.7.14), las ecuaciones quedan

$$\mathscr{E}_1 = -2\pi\mu_0 D n_1^2 A \frac{dI_1}{dt}$$

$$- 2\pi\mu_0 D n_1 n_2 A \frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.17)$$

$$\mathscr{E}_2 = -2\pi\mu_0 D n_1 n_2 A \frac{dI_1}{dt}$$

$$- 2\pi\mu_0 D n_2^2 A \frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.18)$$

Estas ecuaciones son de la misma forma que (20.7.7) y (20.7.8) con

$$L_1 = 2\pi\mu_0 D n_1^2 A \qquad L_2 = 2\pi\mu_0 D n_2^2 A$$

y con (20.7.19)

$$M_{12} = M_{21} = 2\pi\mu_0 D n_1 n_2 A \qquad (20.7.20)$$

Los valores calculados de los coeficientes L_1 y L_2 de autoinducción concuerdan con el resultado que se obtuvo antes para el toroide delgado, ecuación (20.4.32). Se ve que son iguales los dos coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21}, aunque en general esto no se verifica para circuitos acoplados inductivamente. De estas relaciones también se pueden expresar los coeficientes de inducción mutua en términos de las autoinductancias L_1 y L_2:

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2} \qquad (20.7.21)$$

aunque nuevamente éste es un resultado que sólo corresponde a esta configuración específica de circuito. En consecuencia, es posible escribir (20.7.17) y (20.7.18) como

$$\mathscr{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.22)$$

$$\mathscr{E}_2 = -\sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.23)$$

Estas ecuaciones describen las FEM inducidas en los devanados en términos de las corrientes que fluyen en cada uno de ellos. Aunque puede ser necesario emplear operaciones algebraicas relativamente complejas para evaluar las corrientes y diferencias de potencial que surgen cuando los devanados están conectados en circuitos, como se verá en los ejemplos que siguen, la característica esencial del dispositivo que se analiza puede hallarse despejando dI_1/dt de la ecuación (20.7.22), y sustituyendo el valor obtenido en (20.2.23). De esta manera, recordando (20.7.19), fácilmente se puede obtener

$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (20.7.24)$$

o, ya que $N_1 = 2\pi D n_1$ y $N_2 = 2\pi D n_2$,

$$\boxed{\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (20.7.25)$$

Esta ecuación expresa que la relación de las FEMs es igual a la relación entre los números totales de espiras en los dos devanados. Por tanto, si el secundario tiene más vueltas que el primario y en el primario se induce una FEM $\mathscr{E}_1$ conectando ese devanado a una fuente externa de corriente, la FEM $\mathscr{E}_2$ inducida en el secundario será mayor que $\mathscr{E}_1$ en el factor N_2/N_1. Desde luego, físicamente esto ocurre debido a que ambas bobinas encierran los mismos cambios de flujo, y por tanto *en cada vuelta de cada devanado* se induce la misma FEM, que puede llamarse $\mathscr{E}'$. Pero como cada espira de devanado está en serie con las demás, estas FEMs inducidas individualmente se suman de manera que

$$\mathscr{E}_1 = N_1\mathscr{E}' \quad \text{y} \quad \mathscr{E}_2 = N_2\mathscr{E}' \qquad (20.7.26)$$

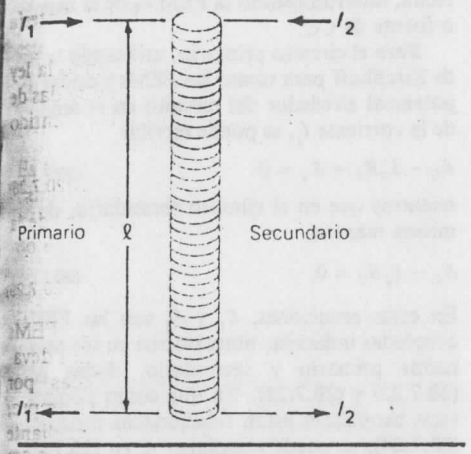


FIGURA 20.23. Bobina cilíndrica y recta de inducción cuyas características importantes son similares a las de la bobina toroidal de la figura 20.22

lo que de inmediato conduce a la ecuación (20.7.25).

Si el devanado secundario tiene más vueltas que el primario, la FEM inducida en la bobina secundaria puede ser mucho mayor que la FEM primaria, lo que proporciona la posibilidad de producir voltajes muy altos a partir de voltajes mucho más pequeños, con este tipo de configuración de circuito. A un dispositivo construido de esta manera se le llama *bobina de inducción* si se utiliza en circuitos de corriente continua (CC) o directa (CD) para producir FEMs altas al cerrar o abrir el circuito, o bien, *transformador* si se utiliza en un circuito de corriente alterna (CA) para elevar FEMs en condiciones de continuidad de circuito. La primera configuración se utiliza para producir las FEMs elevadas y transitorias que se necesitan para excitar las bujías de encendido de los motores de automóvil, a partir de la FEM mucho más pequeña de la batería, o acumulador en tanto que la segunda se emplea extensamente para elevar las FEMs de Ca en sistemas de transmisión de energía eléctrica y en circuitos electrónicos. Desde luego, si el devanado secundario tiene *menos* vueltas que el primario, la FEM del secundario será menor que la del primario, lo que permite construir dispositivos que *reduzcan* las tensiones con poca o casi nula pérdida de energía. Estos transformadores de reducción son útiles en muchas aplicaciones técnicas.

Debe observarse que toda la energía magnética generada por el circuito primario está contenida o se acumula en el interior de la bobina toroidal, ya que al menos en un toroide ideal, el campo **B** externo es cero. Es claro que, idealmente, *toda* esta energía magnética actúa sobre el circuito secundario, por lo que en principio no hay pérdida de energía electromagnética en una bobina de inducción con un transformador. En realidad, esta afirmación jamás se cumple totalmente en la práctica, pues siempre hay pérdidas resistivas que ocurren cuando las corrientes primarias y secundarias pasan por sus devanados respectivos, los que jamás serán de resistencia cero. Pero utilizando un conductor suficientemente grueso para el devanado, por lo general es posible reducir estas pérdidas hasta que en la práctica puedan considerarse despreciables.

Entonces, si se desprecian las pérdidas resistivas internas, serán iguales a la potencia $\mathscr{E}_1 I_1$ entregada al devanado primario y la potencia $\mathscr{E}_2 I_2$ que se toma del devanado secundario, por lo que, para un transformador o una bobina de inducción ideales,

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad (20.7.27)$$

Como ya se ha visto, un solenoide largo puede considerarse como una bobina toroidal delgada de radio infinito. En consecuencia, los resultados que se estudiaron para el transformador o bobina de inducción de esta última clase, se aplican igualmente a un transformador o bobina de inducción en forma de un cilindro largo en el que se colocan dos devanados estrechamente, enrollados como se ilustra en la figura 20.23. Todas las ecuaciones formuladas para el toroide delgado se aplican al solenoide largo, a condición de que se recuerde en las ecuaciones (20.7.15) a (20.7.20) que debe reemplazarse la cantidad $2\pi D$ por la longitud l de la bobina recta.

La operación de la bobina toroidal con devanados primario y secundario como una bo-

bina de inducción en un circuito de CC está ilustrada por el ejemplo 20.7.1, y por el ejemplo 20.7.2 para el caso de un transformador en un circuito de CA. El segundo de estos ejemplos establece algunos de los principios que más adelante se estudiarán en detalle, (capítulo 22), en relación con los circuitos de corriente alterna. Aunque no se intentará considerarlos a fondo aquí, será de interés para el lector repasar el ejemplo 20.7.2 después de aprender los temas principales que se estudien en el capítulo 22.

EJEMPLO 20.7.1

Una bobina de inducción de la clase automotriz, que equivale eléctricamente a la bobina de inducción toroidal delgada descrita antes, se utiliza en un circuito como se muestra en el figura 20.24. En el diagrama se emplea el símbolo usual en circuitos para representar los devanados primario y secundario de la bobina. Suponiendo que inicialmente son cero las corrientes en ambos devanados, evaluar las FEMs y corrientes inducidas en ambos devanados en función del tiempo, después de que se conecte el interruptor S a la izquierda, como se indica. Hallar la diferencia de potencial a través de la resistencia R en el circuito secundario. Describir lo que sucede cuando, luego de que las corrientes I_1 e I_2 hayan alcanzado los valores de régimen permanente o estable (pasado un cierto tiempo), repentinamente se pasa el interruptor S a la conexión de la derecha, interrumpiendo la FEM $\mathcal{E}_0$ de la batería o fuente de CC.

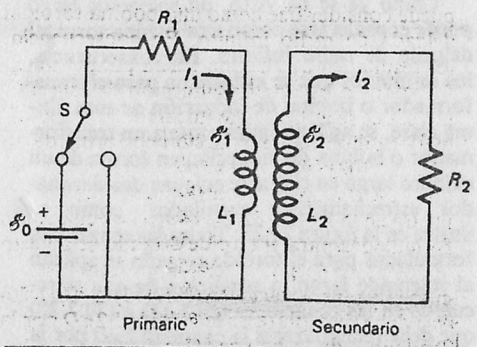


FIGURA 20.24. Bobina de encendido (o ignición) del motor de un automóvil.

Para el circuito primario, utilizando la ley de Kirchhoff para sumar las FEMs y caídas de potencial alrededor del circuito en el sentido de la corriente I_1, se puede escribir

$$\mathcal{E}_0 - I_1R_1 + \mathcal{E}_1 = 0 \qquad (20.7.28)$$

mientras que en el circuito secundario, de la misma manera,

$$\mathcal{E}_2 - I_2R_2 = 0 \qquad (20.7.29)$$

En estas ecuaciones, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son las FEMs acopladas inducidas mutuamente en los devanados primario y secundario, dadas por (20.7.22) y (20.7.23). Ya que como siempre, estas cantidades están relacionadas mediante (20.7.24), se puede remplazar $\mathcal{E}_2$ en (20.7.27) por $\mathcal{E}_1\sqrt{L_2/L_1}$ y escribir

$$\mathcal{E}_1 - I_1R_1 + \mathcal{E}_0 = 0 \qquad (20.7.30)$$

$$\mathcal{E}_1\sqrt{L_2/L_1} - I_2R_2 = 0 \qquad (20.7.31)$$

con $\mathcal{E}_1$ dada por (20.7.22). Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas que pueden resolverse, con cierta dificultad, para evaluar las corrientes I_1 e I_2. Entonces, las ecuaciones (20.7.22) y (20.7.23) darán las FEMs $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$. La manera más simple de hacer esto es sustituir el valor de $\mathcal{E}_1$ de (20.7.30) en (20.7.31); así,

$$I_1R_1\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \mathcal{E}_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + I_2R_2 \qquad (20.7.32)$$

Esto da de inmediato una relación entre I_1 e I_2. Se puede obtener una relación entre dI_1/dt y dI_2/dt diferenciando sencillamente (20.7.30) con respecto al tiempo y observando que el primer término de la derecha es constante:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\frac{dI_2}{dt} \qquad (20.7.33)$$

Si se sustituye el valor de $\mathcal{E}_1$ dado por (20.7.22) en (20.7.31), puede escribirse

$$\sqrt{L_1L_2}\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} + I_2R_2 = 0 \qquad (20.7.34)$$

Sustituyendo el valor de dI_1/dt dado por (20.7.33) en esta ecuación, es posible formular una ecuación que sólo contenga I_2 y dI_2/dt; de este modo

$$\left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}\right)\frac{dI_2}{dt} = -I_2 \qquad (20.7.35)$$

Es fácil reordenar esta ecuación para que únicamente incluya la variable I_2 a la izquierda y t a la derecha, multiplicando por dt y dividiendo entre I_2:

$$\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{dt}{\dfrac{L_1}{R_2} + \dfrac{L_2}{R_2}} \qquad (20.7.36)$$

Ahora debe integrarse esta ecuación desde $t = 0$, en cuyo momento la corriente I_2 tiene el valor inicial I, hasta el tiempo t cuando la corriente tiene el valor I_2. De esta manera resulta

$$\int_{I_{20}}^{I_2}\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{1}{\dfrac{L_1}{R_1} + \dfrac{L_2}{R_2}}\int_0^t dt \qquad (20.7.37)$$

Lo único que impide realizar este procedimiento es que no se conoce el valor de la corriente I_{20} al tiempo $t = 0$. Desde luego, para t menor que cero, I_2 es nula. Pero cuando se conecta el interruptor, I_1 comienza a aumentar con rapidez finita generando un cambio de flujo finito a través del circuito secundario. Este cambio de flujo de inmediato hace que la corriente sufra un salto *discontinuo* en magnitud desde cero hasta I_{20} en $t = 0$. Pero en el circuito primario se sabe que I_1 es cero al tiempo $t = 0$. Si se hace $t = 0$ e $I_1 = 0$ en las ecuaciones (20.7.30) y (20.7.31), se obtiene

$$\mathcal{E}_1(0) + \mathcal{E}_0 = 0 \qquad (20.7.38)$$

$$\mathcal{E}_1(0)\sqrt{L_2/L_1} - I_{20}R_2 = 0 \qquad (20.7.39)$$

en que $\mathcal{E}_1(0)$ representa el valor de la FEM $\mathcal{E}_1$ al tiempo $t = 0$. Pero, de (20.7.38), es claro que $\mathcal{E}_1(0) = -\mathcal{E}_0$, y sustituyendo este valor en (20.7.39) y despejando I_{20},

$$I_{20} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \qquad (20.7.40)$$

Ahora se pueden integrar ambos miembros de (20.7.37) y encontrar que

$$[\ln I_2]_{I_{20}}^{I_2} = \ln I_2 - \ln I_{20} = \ln\frac{I_2}{I_{20}}$$

$$= -\frac{t}{\dfrac{L_1}{R_1} + \dfrac{L_2}{R_2}} \qquad (20.7.41)$$

Exponencializando la igualdad final de la expresión anterior y remplazando I_{20} el valor dado por (20.7.40), por último se puede demostrar que

$$I_2(t) = I_{20}e^{-t/(L_1/R_1 + L_2/R_2)}$$

o sea que

$$I_2(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{R_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,e^{-t/t_0} \qquad (20.7.42)$$

en que la constante de tiempo t_0 está dada por

$$t_0 = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \qquad (20.7.43)$$

Se notará que la corriente I_2 decrece exponencialmente en el tiempo, que la constante exponencial de tiempo t_0 es la *suma* de las constantes de tiempo L_1/R_1 y L_2/R_2 que tendrían el circuito primario y el secundario si no estuvieran acoplados por la inductancia mutua del dispositivo.

Sustituyendo (20.7.42) en (20.7.32) y despejando I_1 se obtiene

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1}(1 - e^{-t/t_0}) \qquad (20.7.44)$$

Las FEMs $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ se determinan diferenciando (20.7.42) y (20.7.44) para encontrar dI_1/dt y dI_2/dt, y sustituyendo luego estos valores en (20.7.22) y (20.7.23):

$$\mathcal{E}_1(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{t_0}\left[\frac{L_1}{R_1} + \frac{\sqrt{L_1L_2}}{R_2}\right]e^{-t/t_0} \qquad (20.7.45)$$

$$\mathcal{E}_2(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{t_0}\left[\frac{\sqrt{L_1L_2}}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}\right]e^{-t/t_0} \qquad (20.7.46)$$

Si se multiplica por $\sqrt{L_1/L_1}$ la $\mathcal{E}_1(t)$ dada arriba, se obtiene $\mathcal{E}_2(t)$ en la forma (20.7.46), lo que concuerda con lo que se esperaría de

(20.7.24). Por último, se puede observar que la diferencia de potencial a través de la resistencia R_2 es sencillamente

$$\Delta V_2 = I_2(t)R_2 = -\mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, e^{-t/t_0} \qquad (20.7.47)$$

o, ya que de (20.7.24) y (20.7.25) la relación $\sqrt{L_2/L_1}$ es igual a la relación de las espiras o vueltas del secundario a las del primario, N_2/N_1,

$$\Delta V_2 = -\mathcal{E}_0 \frac{N_2}{N_1} e^{-t/t_0} \qquad (20.7.48)$$

En el sistema de ignición de un vehículo automotor, el interruptor S es en realidad el ruptor con los "platinos" o contactos en el distribuidor, y la bobina de inducción es la llamada "bobina de encendido" del auto. La resistencia R_1 es la del devanado primario de la bobina, en tanto que la resistencia R_2 es la resistencia combinada del devanado secundario, los conductores de las bujías y de los entrehierros de la chispa en éstas. Es claro que la diferencia de potencial de salida, que esencialmente aparece entre los electrodos de la bujía de encendido (pues de ordinario su resistencia es mucho mayor que la del alambre del devanado o del sistema de las bujías), al principio es *mayor* que la FEM de la batería, en proporción a la relación de números de espiras $N_2/N_1 = 1000$ dará un voltaje inicial de encendido de 12 000 V.

En la figura 20.25 se tienen las gráficas de las corrientes I_1 e I_2 en función del tiempo. Después de un tiempo largo, si el interruptor S permanece cerrado, la corriente primaria I_1 alcanzará el valor constante de estado estable (de CC) $\mathcal{E}_0/R_1$ y ya no cambiará. En este caso, tampoco lo hará el flujo magnético que genera, y la FEM $\mathcal{E}_2$ en el circuito secundario caerá a cero. En estas condiciones, la corriente del secundario I_2 también debe declinar asintóticamente a cero, como se muestra en la figura 20.25b o la ecuación (20.7.42).

Si ahora se conecta repentinamente el interruptor a la derecha, eliminando la FEM $\mathcal{E}_0$ de la batería, la corriente primaria I_1 comenzará a disminuir. Pero debido al hecho de que los campos magnéticos que reducen su magnitud originan las FEMs $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en ambas ramas del circuito, no decaerá de inmediato a cero, sino que será sostenida durante cierto tiempo por la FEM $\mathcal{E}_1$ que —de acuerdo con la ley de Lenz— ahora estará en sentido opuesto. En consecuencia, la corriente I_1 declinará exponencialmente a cero y su constante de tiempo t_0 estará dada por (20.7.43), en forma muy parecida a como la corriente autoinducida decrece en un inductor, se estudió antes en la sección 20.4. Al mismo tiempo, el flujo magnético que cambia repentinamente a través del secundario de la bobina inducirá otra "punta" exponencial grande de FEM y corriente en el secundario, semejante a la que se muestra en la figura 20.25b, pero nuevamente en dirección opuesta, como lo requiere la ley de Lenz. Desde luego, se podrían verificar matemáticamente estas conclusiones cualitativas por métodos semejantes a los empleados antes, pero no será necesario, pues los métodos están bien establecidos y los efectos se pueden describir en términos cualitativos por razonamientos puramente físicos. Si luego se acciona continuamente el interruptor de izquierda a derecha y viceversa, la corriente en el primario será como se muestra en la figura 20.26a, en tanto que el voltaje y la corriente en el secundario presentarán una serie de puntas que corresponderán a diferencias de potencial muy grandes a través de la resistencia de salida R, como se ilustra en las figuras 20.26b y 20.26c.

En el sistema de un automóvil, esta acción repetitiva de cerrar y abrir el circuito primario lo hace automáticamente una leva en el distribuidor, que en forma reiterada abre y cierra los contactos (o platinos) del ruptor. En las bobinas de inducción de laboratorio, esta acción interruptiva generalmente la efectúa un

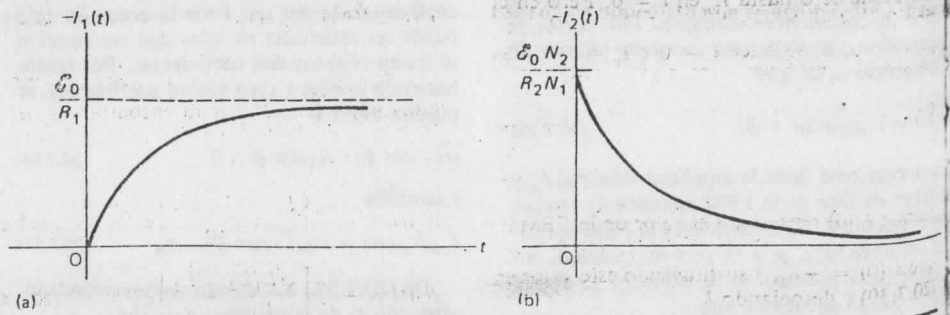


FIGURA 20.25. (a) Corriente primaria y (b) corriente secundaria en la bobina de inducción de automóvil de la figura 20.24, graficadas en función del tiempo transcurrido después del cierre del interruptor S.

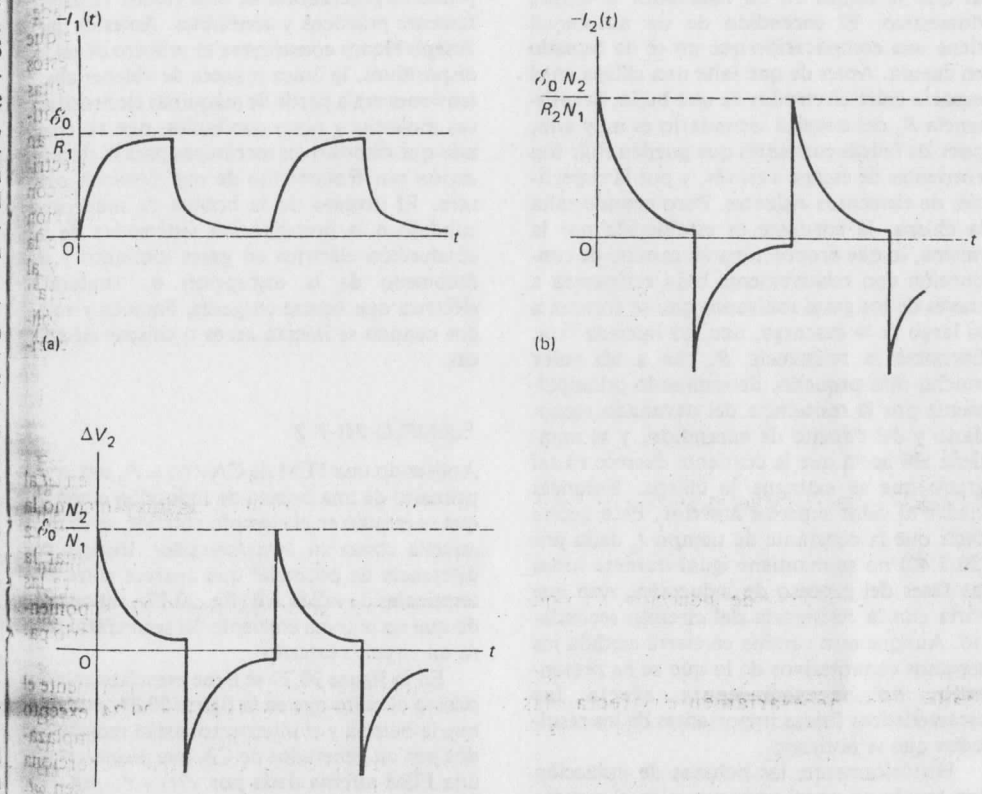


FIGURA 20.26. Aumento y disminución de (a) la corriente primaria, (b) la corriente secundaria y (c) la FEM secundaria en una bobina de encendido conforme los "platinos" cierran y abren alternativamente el circuito primario

circuito operado magnéticamente, semejante al que se utiliza en un zumbador o timbre doméstico. El encendido de un automóvil tiene una complicación que no se ha tomado en cuenta. Antes de que salte una chispa en el espacio entre electrodos de una bujía, la resistencia R_2 del circuito secundario es muy alta, pues las únicas corrientes que pueden fluir son corrientes de escape a través, y por la superficie, de elementos aislantes. Pero cuando salta la chispa, la corriente es establecida por la misma, lo que proporciona un camino de conducción con relativamente baja resistencia a través de los gases ionizados que se forman a lo largo de la descarga, una vez iniciada ésta. Entonces la resistencia R_2 cae a un valor mucho más pequeño, determinado principalmente por la resistencia del devanado secundario y del circuito de encendido, y se mantiene ahí hasta que la corriente decrece en tal grado que se extingue la chispa. Entonces vuelve al valor superior anterior. Esto quiere decir que la constante de tiempo t_0 dada por (20.7.40) no se mantiene igual durante todas las fases del proceso de inducción, sino que varía con la resistencia del circuito secundario. Aunque esto cambia en cierta medida los aspectos cuantitativos de lo que se ha presentado, no necesariamente afecta las características físicas importantes de los resultados que se obtienen.

Históricamente, las bobinas de inducción han tenido un papel importante en el estudio de los fenómenos eléctricos, ya que fueron los primeros generadores de alto voltaje verdaderamente prácticos y confiables. Antes de que Joseph Henry construyera el primero de estos dispositivos, la única manera de obtener altas tensiones era a partir de máquinas electrostáticas molestas y poco confiables, que no eran más que dispositivos mecánicos para la electrización por frotamiento de una sustancia con otra. El invento de la bobina de inducción condujo a la investigación sistemática de la conducción eléctrica en gases ionizados y al fenómeno de la disrupción o "ruptura" eléctrica que ocurre en gases, líquidos y sólidos cuando se inician arcos o chispas eléctricas.

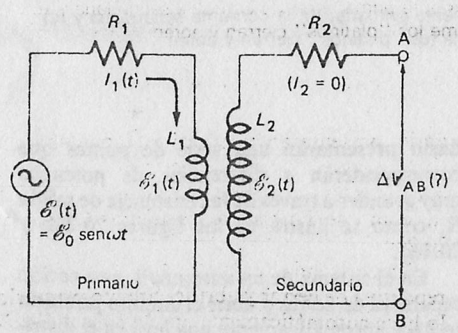


FIGURA 20.27. Esquema de una bobina de inducción empleada como transformador en un circuito de corriente alterna.

EJEMPLO 20.7.2

Aplicando una FEM de CA $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$ al primario de una bobina de inducción como la que se estudió en el ejemplo anterior, se utiliza aquella como un *transformador*. Evaluar la diferencia de potencial que aparece entre las terminales de salida AB (fig. 20.27), suponiendo que no se toma corriente del secundario para un circuito externo.

En la figura 20.27 se tiene esencialmente el mismo circuito que en la figura 20.24, excepto que la batería y el interruptor están remplazados por un generador de CA que proporciona una FEM alterna dada por $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$. En principio, esta es la misma clase de dispositivo descrita en el ejemplo 20.2.3. También, para simplificar algo los cálculos, se dejó abierto el circuito secundario, de manera que $I_2 = 0$ y bastará entonces con encontrar la diferencia de potencial ΔV_{AB} desarrollada entre las terminales de salida. En la figura 20.27 se puede considerar que la resistencia R_1 es la resistencia interna combinada del generador y el primario del transformador, en tanto que R_2 —que más adelante se verá que no desempeña ninguna función en los cálculos— representa la resistencia del secundario.

Como siempre, (20.7.22) y (20.7.23) representan las FEMs inducidas $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ aunque, como en este caso $I_2 = 0$, las expresiones están muy simplificadas. También en este ejemplo, $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ están relacionadas por medio de

(20.7.24) y (20.7.25). Si se escribe la II ley de Kirchhoff para el circuito primario, se tiene

$$\mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t - I_1 R_1 + \mathscr{E}_1(t) = 0 \qquad (20.7.49)$$

en tanto que para el circuito secundario,

$$\mathscr{E}_2(t) - I_2 R_2 - \Delta V_{AB} = 0$$

o, ya que $I_2 = 0$,

$$\mathscr{E}_2(t) - \Delta V_{AB} = 0 \qquad (20.7.50)$$

De (20.7.22), es claro que en este caso $I_2 = 0$ y $\mathscr{E}_1 = L_1 = dI_1/dt$, que permite escribir para (20.7.49)

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad (20.7.51)$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse para evaluar I_1 en función del tiempo. Es de forma ligeramente distinta de las que se han tratado en los ejemplos anteriores, debido al término $\mathscr{E}_0$ sen ωt de la derecha. En realidad, está relacionada con las ecuaciones que describen las vibraciones forzadas en sistemas mecánicos sometidos a fuerzas externas que varían senoidalmente.

En todo caso, si hay una FEM alterna aplicada al circuito, es razonable creer que producirá una corriente alterna de la misma frecuencia en el mismo. No se tiene mucha certeza de que la corriente estará en *fase* con la FEM; podría estarlo —aunque quizás no sea irrazonable que lo esté— pero desde luego es más seguro suponer que *no lo está, cuando no se tiene la certidumbre absoluta. Por tanto, se supondrá que fluye una corriente alterna de frecuencia* ω tal que

$$I_1(t) = I_{10} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad (20.7.52)$$

Esta corriente tiene la amplitud máxima I_{10} y difiere en fase de la FEM aplicada $\mathscr{E}_0$ sen ωt, en el ángulo Φ. Si la corriente y la FEM aplicada están en fase, $\phi = 0$; pero en realidad, como se verá pronto, no lo están. Si se deriva (20.7.52) se encuentra que

$$\frac{dI_1}{dt} = I_{10}\omega \cos(\omega t + \phi) \qquad (20.7.53)$$

Sustituyendo los valores de I_1 y dI_1/dt dados antes en (20.7.51),

$$L_1 I_{10}\omega \cos(\omega t + \phi) + R_1 I_{10} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad (20.7.54)$$

Pero por trigonometría elemental se sabe que

$$\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \operatorname{sen} \omega t \cos \phi + \cos \omega t \operatorname{sen} \phi$$

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi$$

Sustituyendo estas relaciones en (20.7.54) y agrupando todos los términos que contengan a sen ωt, y a todos los términos que contengan a cos ωt, se puede escribir (20.7.54) en la forma

$$I_{10}(\omega L_1 \cos \phi + R_1 \operatorname{sen} \phi) \cos \omega t + [I_{10}(R_1 \cos \phi - \omega L_1 \operatorname{sen} \phi) - \mathscr{E}_0] \operatorname{sen} \omega t = 0 \qquad (20.7.55)$$

El primer miembro de esta ecuación varía en el tiempo según las funciones sinusoidales sen ωt y cos ωt, en tanto que el segundo miembro es cero. Para que la suma de los términos del lado izquierdo siempre sea nula, los coeficientes de los términos sen ωt y cos ωt deben anularse. Por ejemplo, en $t = 0$, sen ωt es cero mientras que cos ωt vale la unidad; en este caso, es evidente que el coeficiente de cos ωt debe ser cero para que se satisfaga (20.7.51). Por otra parte, al tiempo $t = \pi/2\omega$ (cuando $\omega t = 90°$), cos ωt es cero mientras que sen ωt es igual a 1. Entonces, la única manera como puede satisfacerse (20.7.55) es que se anule el coeficiente de sen ωt. Pero la ecuación sólo puede ser satisfecha en estas dos ocasiones si se hacen cero los dos coeficientes. Por tanto, haciendo iguales a cero *ambos* coeficientes, se pueden escribir

$$\omega L_1 \cos \phi + R_1 \operatorname{sen} \phi = 0 \qquad (20.7.56)$$

y también

$$I_{10}(R_1 \cos \phi - \omega L_1 \operatorname{sen} \phi) = \mathscr{E}_0 \qquad (20.7.57)$$

De (20.7.56), dividiendo ambos miembros entre cos ϕ, de inmediato se ve que

$$\tan \phi = -\frac{\omega L_1}{R_1} \qquad (20.7.58)$$

y sí hay entonces una diferencia de fase entre la FEM aplicada exteriormente y la corriente. De modo que fue inteligente haber previsto tal contingencia en la ecuación (20.7.52). Por el signo menos en (20.7.58), se sabe que el ángulo de fase será negativo, de manera que la fase de la corriente será de atraso con respecto a la de la FEM aplicada. Más adelante, en el capítulo 22, se verá que ésta es una característica general de los circuitos inductivos de CA. Si la tangente del ángulo de fase es $-\omega L_1/R$, entonces de la figura 20.28 pueden deducirse el seno y el coseno; en el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo ϕ es $-\omega L_1$ y el lado adyacente es R_1, lo que garantiza que la tangente está dada por (20.7.58). En este triángulo es claro que

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{-\omega L_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}$$

y que

$$\cos\phi = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \qquad (20.7.59)$$

Sustituyendo estos valores de nuevo en (20.7.57) y despejando I_{10}, finalmente se encuentra que

$$I_{10} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \qquad (20.7.60)$$

Por último, sustituyendo este valor en (20.7.52),

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad (20.7.61)$$

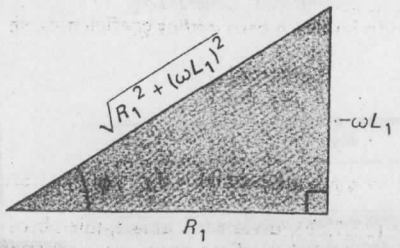


FIGURA 20.28. Relaciones de fase en el circuito primario del transformador de la figura 20.27

Una característica especial de este resultado es que la relación de la corriente I_1 a la FEM aplicada $\mathcal{E}_0$ —que se puede considerar como la conductancia en un circuito de CC— no es constante, sino que *depende de la frecuencia*. Esta es otra característica muy general de los circuitos de CA que contienen inductancia o capacitancia, acerca de la cual se aprenderá más en el capítulo 22.

Sin embargo, se tiene interés en evaluar la FEM inducida $\mathcal{E}_1(t)$, lo cual se obtiene de (20.7.22), notando que $I_2 = 0$, como

$$\mathcal{E}_1(t) = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

$$= -\frac{\omega L_1 \mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \cos(\omega t + \phi) \qquad (20.7.62)$$

Luego puede obtenerse la FEM $\mathcal{E}_2$ secundaria de (20.7.24) como

$$\mathcal{E}_2(t) = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, \mathcal{E}_1(t)$$

$$= -\frac{\omega\sqrt{L_1 L_2}\,\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \cos(\omega t + \phi) \qquad (20.7.63)$$

lo que permite finalmente, de (20.7.50), expresar la diferencia de potencial de salida ΔV_{AB} como

$$\Delta V_{AB} = -\mathcal{E}_2(t)$$

$$= \frac{\omega\sqrt{L_1 L_2}\,\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \cos(\omega t + \phi) \qquad (20.7.64)$$

De aquí es obvio que si la frecuencia ω es cero, el voltaje de salida ΔV_{AB} también será cero, lo que quiere decir *sencillamente que un transformador no funciona en un circuito de corriente continua*, algo que ha molestado durante décadas tanto a los ingenieros electricistas como a los técnicos en electricidad, pero acerca de lo cual poco puede hacerse. Desde luego, la razón es que en un circuito de CC no hay cambio en el flujo, y por tanto, tampoco hay FEM secundaria inducida para crear el voltaje de salida ΔV_{AB}. No obstante para frecuencias de CA tales que $\omega L_1 \gg R_1$ se

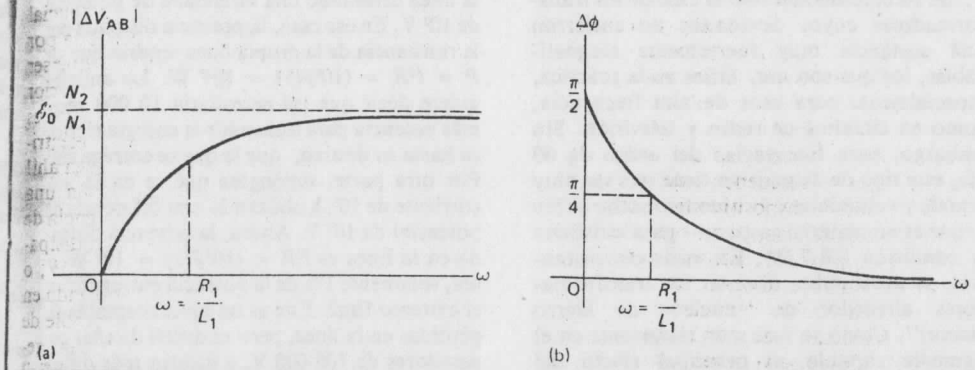


FIGURA 20.29. (a) Tensión secundaria de salida y (b) ángulo de fase ϕ entre las tensiones (o voltajes) de salida y de entrada, graficados en función de la frecuencia.

puede despreciar R_1 en el denominador de (20.7.64), que entonces queda como

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cos(\omega t + \phi) \qquad (20.7.65)$$

También, en este caso, el ángulo de fase ϕ dado por (20.7.58) se aproxima a $-\pi/2$, ya que $\tan\phi$ tiende a $-\infty$. Pero $\cos(\omega t - \pi/2) = \operatorname{sen}\omega t$, de manera que puede escribirse (20.7.65) como

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \operatorname{sen}\omega t \qquad (20.7.66)$$

o, recordando (20.7.24) y (20.7.15),

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_0 \frac{N_2}{N_1} \operatorname{sen}\omega t = \frac{N_2}{N_1}\mathcal{E}(t) \qquad (20.7.67)$$

El resultado final es: un transformador no trabaja en absoluto con corriente continua. Con frecuencias bajas, hay un voltaje de salida dado por (20.7.64). La fase de esta tensión difiere de la fase de la FEM $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\omega t$ aplicada al circuito primario, y su amplitud depende de la frecuencia, aumentando cuando lo hace esta última, como se ilustra en la figura 20.29. Para frecuencia tan altas que $\omega L_1 \gg R_1$, la amplitud del voltaje de salida es en esencia *independiente* de la frecuencia, e igual a la FEM de entrada multiplicada por la relación de vueltas N_2/N_1 del secundario al primario. En este límite, ya no hay una diferencia de fase significativa entre los voltajes de entrada y salida; esto es evidente de la ecuación (20.7.67) y de la figura 20.29b.

Se notará que la condición $\omega L_1 \gg R_1$, con la que la bobina de inducción "opera como debe hacerlo un transformador", se puede expresar como $\omega \gg R_1/L_1$, o, ya que L_1/R_1 es la constante de tiempo inductivo t_1 del circuito primario, también en esta forma:

$$\omega \gg \frac{1}{t_1} \qquad (20.7.68)$$

De modo que, mientras la frecuencia sea mucho mayor que el recíproco de la constante de tiempo del circuito primario, el dispositivo se comportará como un transformador "ideal" en el sentido antes descrito.

Si una corriente I_2 circula en el circuito secundario, prácticamente no cambian las características esenciales del sistema aunque el análisis matemático se complica mucho más, al igual que las expresiones para las FEMs y corrientes en los dos circuitos. No se tratará de atacar los detalles de este caso, excepto para mencionar que la condición (20.7.68) queda entonces así:

$$\omega \gg \frac{1}{t_1 + t_2} \qquad (20.7.69)$$

en que t_2 representa la constante de tiempo inductiva del circuito secundario.

Se ha considerado sólo el caso de los transformadores cuyos devanados no encierran una sustancia muy fuertemente magnetizables, los que son muy útiles en la práctica, especialmente para usos de alta frecuencia, como en circuitos de radio y televisión. Sin embargo, para frecuencias del orden de 60 Hz, este tipo de dispositivo tiene que ser muy grande y voluminoso, y contener mucho cobre —que es un material costoso— para satisfacer la condición (20.7.69). En estas circunstancias, se acostumbra devanar los transformadores alrededor de "núcleos de hierro (acero)". Como se verá más claramente en el siguiente capítulo, el principal efecto del núcleo de acero es aumentar muchísimo el flujo magnético dentro de los devanados. Este aumento se debe a que el flujo producido por la corriente de los devanados es acrecentado por el flujo magnético proveniente de los momentos magnéticos de los átomos de hierro en el núcleo, que se alinean dócilmente por efecto de las corrientes en los devanados. En estas circunstancias, un cambio pequeño en la corriente del primario o del secundario puede producir un cambio considerable en el flujo magnético. De acuerdo con (20.7.6), esto equivale a decir que las *inductancias* de los circuitos primario y secundario aumentan mucho cuando se tiene un núcleo de hierro, lo que a su vez significa que es posible lograr una constante de tiempo L/R con un valor mucho más alto de resistencia de circuito primario o secundario. En consecuencia, se puede hacer que los devanados del transformador sean de alambre más delgado, produciendo un dispositivo mucho más pequeño, ligero y económico.

El transformador es un dispositivo de considerable importancia técnica. Cuando fue inventado, se obtuvo un logro del mismo orden de importancia que el desarrollo de la energía nuclear o de los dispositivos electrónicos de estado sólido, en fechas más recientes; la razón es que sólo es económico transmitir energía eléctrica a gran distancia por líneas de transmisión *con voltaje muy altos*, pero es sumamente peligroso e inconveniente generar o utilizar esos niveles de tensión. Supóngase que se necesita transmitir una potencia de 10^8 W por una línea eléctrica cuya resistencia es de 1 Ω. Podría enviarse una corriente de 10^6 A por la línea utilizando una diferencia de potencial de 10^2 V. En ese caso, la potencia disipada por la resistencia de la propia línea tendría que ser $P = I^2R = (10^6)^2(1) = 10^{12}$ W. Lo anterior quiere decir que ¡se necesitaría 10 000 veces más potencia para transmitir la energía eléctrica hasta su destino, que la que se entrega ahí! Por otra parte, supóngase que se envía una corriente de 10^3 A utilizando una diferencia de potencial de 10^5 V. Ahora, la potencia disipada en la línea es $I^2R = (10^3)^2(1) = 10^6$ W, o sea, solamente 1% de la potencia entregada en el extremo final. Este es un nivel aceptable de pérdidas en la línea, pero es difícil diseñar generadores de 100 000 V, e incluso más difícil que los usuarios empleen la energía en tales condiciones. Sería posible reducir un poco las resistencias de las líneas eléctricas, lo que exigiría conductores muy gruesos y que representarían cuantiosas inversiones en cobre, que es un metal muy costoso. La alternativa más razonable, que es eminentemente práctica y económica, consiste en generar la energía a bajos voltajes, utilizar transformadores para elevarla al valor requerido para la transmisión económica, y disminuir el voltaje en el otro extremo para la distribución y uso convenientes, mediante transformadores de reducción. Desde luego, los transformadores no operan en circuitos de CC, razón por la cual virtualmente toda la electricidad generada en forma comercial se utiliza como *corriente alterna*.

EJEMPLO 20.7.3

El toroide del ejemplo 20.4.2 se utiliza como el secundario de un transformador toroidal. Un devanado primario de 628 vueltas —un quinto del número de espiras del secundario— se coloca sobre el devanado secundario, utilizando un conductor de la misma clase que el empleado para el devanado secundario. Entonces se tiene un transformador con resistencia $R_2 = 10.75\ \Omega$ en el secundario, inductancia en el mismo $L_2 = 5.92 \times 10^{-3}$ H, resistencia $R_1 = (0.2)(10.75) = 2.15\ \Omega$ en el primario e inductancia primaria [recordando de (20.4.32) que la inductancia es proporcional al *cuadrado* del número de vueltas] $L_1 = (0.04)(5.92 \times 10^{-3}) = 2.368 \times 10^{-4}$ H. Determinar los límites de frecuencias dentro de los que este dispositivo se comportará como un transformador "ideal". Calcular la relación de la diferencia de potencial de salida a la FEM de entrada dentro de estos límites de operación.

La condición (20.7.69) debe satisfacerse para que un dispositivo como éste opere como transformador ideal. Las dos constantes de tiempo son

$$t_2 = \frac{L_2}{R_2} = \frac{5.92 \times 10^{-3}}{10.75} = 5.51 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

y

$$t_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{2.368 \times 10^{-4}}{2.15} = 1.10 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

Entonces, la condición (20.7.69) dice que

$$\omega \gg \frac{1}{t_1 + t_2}$$

o bien,

$$\omega \gg 1513\ \text{rad/s, o } 241\ \text{Hz}$$

Debe esperarse que el dispositivo opere como un transformador ideal para frecuencia mucho mayor que 240 Hz —quizás, como cuestión práctica, arriba de 1 000 Hz. Si se hubieran devanado las bobinas primaria y secundaria sobre un núcleo de hierro, habrían podido lograrse inductancias en el primario y secundario superiores a las dadas arriba en un factor aproximado de 1000, aumentando con ello la constante de tiempo t_1 y t_2 en el mismo factor. Así pues, la condición (20.7.68) daría $\omega \gg 1.513$ rad/s (0.241 Hz), y arriba de aproximadamente 1.0 Hz se tendría un sistema que tiende al comportamiento de un transformador ideal. Entonces este dispositivo constituiría un transformador muy eficaz para operación en una línea eléctrica de 60 Hz.

La ecuación (20.7.67) da la relación del voltaje de salida a la FEM de entrada para el transformador ideal. Por tanto, en este caso se puede escribir

$$\frac{\Delta V_{AB}}{\mathcal{E}(t)} = \frac{N_2}{N_1} = 5.0$$

EJEMPLO 20.7.4

Un solenoide largo en área transversal A_1, tiene un devanado primario de n_1 vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente variable en el tiempo I_1. Esta bobina primaria está dentro de una bobina secundaria mayor, con área A_2 y n_2 vueltas por longitud unitaria, que lleva una corriente I_2, como se muestra en la figura 20.30. Calcular los coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21} para esta estructura.

De (20.4.1), se sabe que el campo B_2 dentro de la bobina secundaria grande tiene el valor constante

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 \qquad (20.7.70)$$

En el caso de la bobina primaria más pequeña, el campo B_1 está dado por

$$B_1^{(a)} = \mu_0 n_1 I_1 \quad \text{dentro de la bobina 1}$$

y por

$$B_1^{(b)} = 0 \quad \text{fuerza de la bobina 1} \qquad (20.7.71)$$

De las integrales que se tienen en las ecuaciones (20.7.1) y (20.7.2), puede verse que en este caso

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = B_1A_1 + B_2A_1$$
$$= \mu_0 n_1 I_1 A_1 + \mu_0 n_2 I_2 A_1$$
$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = B_1A_2 + B_2A_2$$
$$= B_1^{(a)}A_1 + B_1^{(b)}(A_2 - A_1) + B_2A_2$$
$$= \mu_0 n_1 I_1 A_1 + \mu_0 n_2 I_2 A_2$$

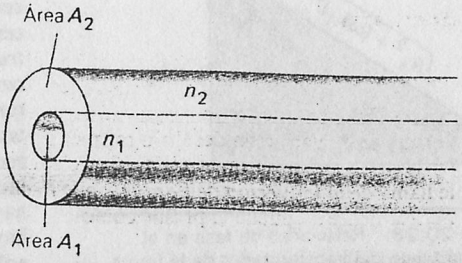


FIGURA 20.30.

recordando que $B_1^{(b)} = 0$. Las FEMs $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ en los dos circuitos son

$$\mathscr{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} - N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$
$$= -(n_1 l)\mu_0 n_1 A_1 \frac{dI_1}{dt} - (n_1 l)\mu_0 n_2 A_1 \frac{dI_2}{dt} \tag{20.7.72}$$

$$\mathscr{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt}$$
$$= -(n_2 l)\mu_0 n_1 A_1 \frac{dI_2}{dt} - (n_2 l)\mu_0 n_2 A_2 \frac{dI_2}{dt} \tag{20.7.73}$$

Comparando estas ecuaciones con (20.7.7) y (20.7.8), es evidente que los coeficientes de dI_1/dt y de dt_2/dt en (20.7.72) son L_1 y M_{12}, respectivamente, mientras que los coeficientes de las mismas cantidades en (20.7.73) son M_{21} y L_2, respectivamente. Por tanto,

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 l A_1 \quad \text{y} \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 l A_2 \tag{20.7.74}$$

que concuerda con (20.4.7), en tanto que

$$M_{12} = M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l A_1 \tag{20.7.75}$$

En este ejemplo, es importante notar que la relación entre las autoinductancias L_1 y L_2, y los coeficientes de inducción mutua, ya no está dada por (20.7.21), sino por

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2} L_1 L_2} \tag{20.7.76}$$

RESUMEN

Siempre que hay un flujo magnético variable en el tiempo que atraviesa un circuito, se induce una FEM en éste, cuya magnitud es igual a la rapidez de variación del flujo magnético interceptado por el circuito. A este enunciado se le llama *de la inducción de Faraday*, que matemáticamente se puede expresar como

$$\mathscr{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da$$

Si la inducción magnética es uniforme en el área encerrada por el circuito, esto queda

$$\mathscr{E}_m = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta)$$

en que A es el área del circuito y θ el ángulo entre la normal al plano en el que está y el vector inducción **B**. La FEM inducida aparece en el circuito sin importar cómo se produzca el cambio en el flujo.

La ley de Faraday implica que un flujo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico **E**, aunque no electrostático, cuya integral, evaluada alrededor de un circuito cerrado, representa la FEM inducida $\mathscr{E}_m$. Vista de esta manera, la ley de Faraday puede escribirse como

$$\mathscr{E}_m = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da$$

La ley de Lenz indica que las corrientes inducidas fluyen de manera que sus propios efectos magnéticos se oponen al cambio de flujo que los creó inicialmente. La ley de Lenz está relacionada con la ley de conservación de la energía, y es la que origina el signo negativo de la FEM inducida expresada por la ley de Faraday. Las corrientes de Foucault son corrientes inducidas magnéticamente que fluyen en cuerpos conductores extensos, aparte de los conductores lineales. De las leyes de Lenz y de Faraday se puede inferir la dirección y configuración general del flujo magnético.

La FEM autoinducida es una FEM que se produce en un circuito por un cambio en su propio flujo magnético, o por un cambio en la corriente que fluye en dicho circuito. Como el flujo magnético siempre es proporcional a la corriente, la FEM autoinducida siempre será proporcional a dI/dt, por lo cual, la citada FEM en un inductor de N espiras es

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

en que L es una constante de proporcionalidad que se conoce como *coeficiente de autoinducción* o *autoinductancia* del circuito. Esta inductancia propia de un circuito o de un elemento inductivo de circuito, depende del número de vueltas de conductor, del área y de la forma del circuito, pero es independiente de la corriente. La FEM autoinducida magnéticamente en una bobina se opone al crecimiento de la corriente que circula en ella, o puede mantener el flujo de la corriente en la bobina después de suprimir la FEM externa; la FEM autoinducida da lugar a una diferencia de potencial entre las terminales de un inductor, cuya magnitud instantánea es

$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

En el caso de un solenoide largo, es fácil calcular que la inductancia es

$$L = \mu_0 n^2 l A$$

en que l es la longitud de la bobina, A el área transversal y n el número de espiras por unidad de longitud. La ley de Lenz determina el sentido de las FEMs autoinducidas.

Debido a estas FEMs asociadas a las inductancias, los circuitos con inductancia y resistencia en serie R—L presentan crecimiento y decrecimiento exponenciales de la corriente, como se encuentra en los circuitos en serie R—C. La constante t_0 que da la escala de tiempo en que ocurren estos cambios exponenciales es

$$t_0 = L/R$$

Como un capacitor, un elemento inductivo también almacena energía, pero ésta reside en el campo *magnético* de la inductancia en vez de un campo electrostático, como en un capacitor. Se puede demostrar que la energía magnética almacenada en un inductor que lleva una corriente I es

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2$$

y que la densidad de la energía magnética (energía de campo magnético por unidad de volumen) en cualquier parte de un campo magnético es

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Las inductancias en serie y en paralelo se combinan como las resistencias, es decir, en el caso de inductancias en serie,

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

y para inductancias en paralelo,

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

En el primer caso, la diferencia de potencial a través del conjunto es la suma de las asociadas a los elementos individuales, y la corriente que pasa por cada uno es la misma; en el segundo caso, la diferencia de potencial es también la misma a través de cada elemento, y la corriente en cada uno se suma para producir la corriente total a través del conjunto.

La inducción mutua aparece entre distintos circuitos cuando un flujo cambiante generado por uno de ellos induce una FEM en otro. Si hay dos circuitos de esta clase la FEM en el circuito 1 dependerá de dI_1/dt además de dI_2/dt, por lo que

$$\mathscr{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathscr{E}_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt}$$

En estas ecuaciones, a M_{12} y M_{21} se les llama *coeficientes de inducción mutua* o *inductancias mutuas*; expresan la intensidad de los campos magnéticos generados por los circuitos y la medida en que el flujo magnético generado por un circuito intercepta el área encerrada por el otro. Las leyes de la inducción mutua gobiernan el comportamiento de dispositivos como las bobinas de inducción y los transformadores, en los que se pueden elevar o reducir las tensiones mediante el acoplamiento inductivo entre bobinas con distinto número de vueltas. En estos dispositivos, las FEMs primaria y secundaria $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ están relacionadas con los números de espiras o vueltas N_1 y N_2 en los devanados por medio de

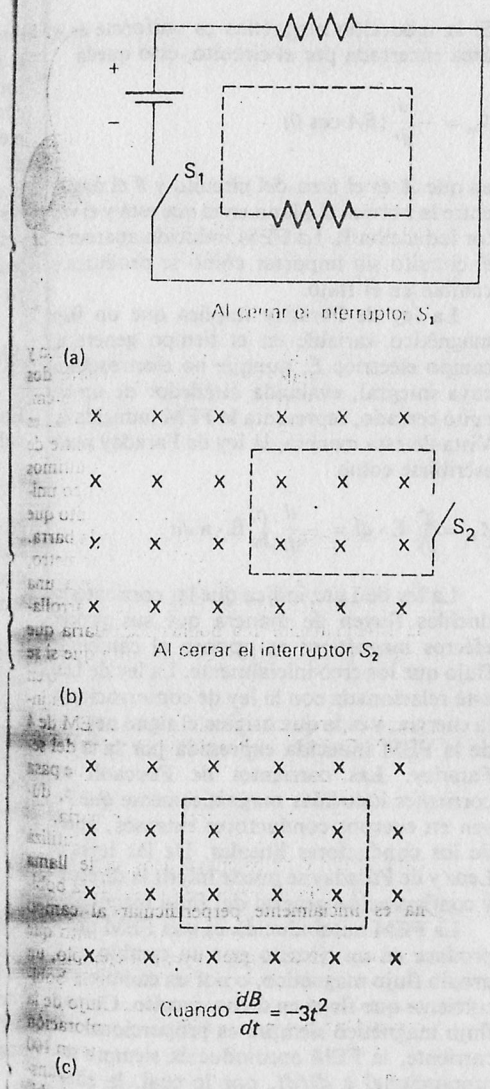
$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

PREGUNTAS

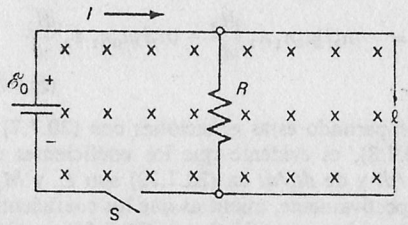
1. La FEM inducida en un circuito depende de una serie de factores. Exprese tantos como pueda.
2. En cada uno de los casos que se muestran en los diagramas marcados (a), (b) y (c), indique claramente el sentido de la corriente inducida en el circuito de línea punteada. (Ver pág. 869).
3. Una espira circular de alambre se coloca entre los polos de un electroimán. ¿Qué orientaciones produce un flujo magnético máximo o mínimo?
4. Explique cuidadosamente la diferencia entre inducción magnética y flujo magnético. Dé un ejemplo en el que la inducción magnética sea constante pero el flujo magnético no lo sea.
5. Se coloca una espira circular cerca de un alambre recto largo, que lleva una corriente que aumenta constantemente en el tiempo. ¿En qué sentido fluirá la corriente en la espira?
6. Explique claramente por qué la frecuencia angular ω de rotación de una bobina en un campo magnético determina la magnitud de la tensión inducida, al igual que su variación en el tiempo. ¿Qué otros factores afectan la magnitud de este voltaje?
7. ¿Puede expresar ejemplos de fenómenos que obedezcan una ley análoga a la de Lenz en el sentido de que un efecto tienda a oponerse a la causa que lo produjo?
8. Explique muy brevemente el significado de FEM de autoinducción.
9. ¿Puede explicar por qué una FEM autoinducida siempre es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente que pasa por un circuito? ¿De qué factores depende la autoinductancia L?
10. ¿Cómo cambia la inductancia por unidad de longitud de un solenoide dado si se duplica la longitud del conductor que se utiliza en el devanado?
11. La FEM de un generador produce una corriente alterna. Describa varias maneras de convertir ésta en una corriente unidireccional pulsante.
12. Se conecta un circuito R—L a una batería. Exprese si la constante de tiempo depende del voltaje de la fuente. ¿Es posible que la tensión de la inductancia exceda la FEM de la batería?
13. Dé algunos razonamientos convincentes que demuestren que una inductancia puede almacenar energía.
14. Suponga que se aplican 250 V de cc al primario de un transformador, en vez una tensión de ac. Describa lo que ocurre.
15. Se construye un transformador de manera, que la FEM del secundario sea solamente la mitad de la FEM del primario. Emita comentarios acerca de este tipo de construcción.

PROBLEMAS

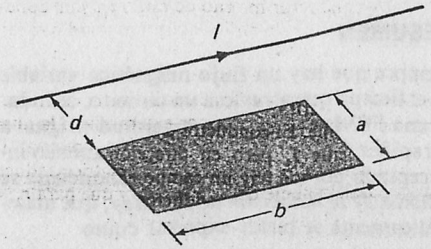
1. Una espira rectangular de alambre de 12.0 cm por 8.0 cm se coloca entre los polos de un electroimán que produce un campo magnético uniforme en la región donde está la espira. Inicialmente, el electroimán está inactivo y el campo magnético en esta región es cero. Luego se hace que fluya una corriente, que crezca linealmente, en las bobinas del electroimán, lo que produce un campo magnético en la región, el que aumenta con rapidez constante desde cero hasta 1.25 Wb/m² en un intervalo de tiempo de 0.15 s. (a) ¿Cuál es la magnitud de la FEM inducida en la espira durante este periodo? (b) Si se reemplaza la espira por una bobina rectangular de alambre que tenga 250 espiras, cada una de las cuales tiene las mismas dimensiones que la espira original, determine la FEM inducida en la bobina.
2. Se coloca una espira circular de alambre flexible de 15.0 cm de radio y 0.01 Ω de resistencia en un campo magnético uniforme de 0.80 Wb/m². En los extremos opuestos de un diámetro se aplican a la espira fuerzas iguales y opuestas deformándola hasta producir un par de conductores rectos paralelos de separación despreciable, en un intervalo de tiempo de 0.025 s. Calcule (a) la FEM media inducida en la espira, (b) el valor medio de la corriente que fluye, (c) el trabajo necesario para efectuar la deformación.
3. Un alambre recto de cobre con 2 m de longitud se mueve a 1.5 m/s en dirección perpendicular a su longitud y a un campo magnético uniforme de 0.7 Wb/m². Evaluar la FEM inducida entre los extremos del alambre. Si tales extremos se unen completando un circuito a través de una resistencia de 3 Ω, indique la rapidez a la que debe hacerse el trabajo para mantener el alambre moviéndose con la velocidad constante de 1.5 m/s.
4. Una barra de cobre de 20 cm de longitud es perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.5 Wb/m². Como resultado de su movimiento perpendicular a su longitud, existe una FEM de 0.10 V entre sus extremos. Determine la velocidad con la que se mueve la barra a través del campo.



5. Una espira circular de alambre de 10 cm de radio está orientada con su plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.2 Wb/m². Se da una vuelta de 180° a la espira en un intervalo de tiempo 0.5 s. (a) Halle la FEM media inducida durante este proceso. (b) Dé el campo eléctrico promedio en la espira. (c) Si la resistencia de la misma es de 2.0 Ω, calcule el trabajo, que se necesitó para dar vuelta a la espira.
6. Un circuito eléctrico contiene una pila o batería con FEM $\mathcal{E}_0$ y un resistor con resistencia R, longitud l y masa m, que puede moverse lateralmente con libertad, según se indica en la siguiente figura. Como se ilustra, hay un campo magnético uniforme B perpendicular al plano del circuito. Cuando se cierra el interruptor S, puede suponerse que la corriente en R es $\mathcal{E}/R$ en $t = 0$. Demuestre que la corriente inducida está dada por $i_{ind} = \mathcal{E}l^2/B^2t/(mR^2)$, a condición de que t no sea demasiado grande. Indique lo que sucede para un valor grande de t.



7. Un solenoide largo con n vueltas por unidad de longitud lleva una corriente que varía en el tiempo de acuerdo con $I = I_0$ sen ωt. Dentro del solenoide se coloca una pequeña bobina circular de N espiras. Los ejes de la bobina y del solenoide son paralelos y cada una de las espiras de la bobina tiene área A' y resistencia R'. Calcule (a) la FEM inducida en la bobina pequeña, (b) la corriente inducida y (c) la intensidad de disipación de energía en la bobina pequeña.
8. Se coloca una espira rectangular de alambre cerca de un conductor largo y recto en el que la corriente aumenta linealmente con el tiempo, de acuerdo con $I = \alpha t$, como se muestra en la figura. Obtenga una expresión para (a) el flujo magnético a través de la espira y (b) la FEM inducida en la misma.

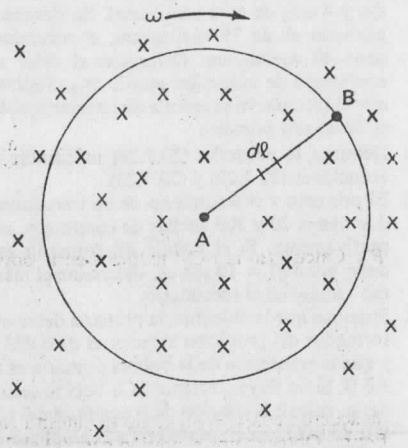


9. Una sola espira de alambre con resistencia R inicialmente tiene un flujo magnético Φ que la atraviesa. Después de un cierto intervalo de

tiempo, el flujo cambia a Φ_f. Demuestre que la carga neta que pasa por cualquier punto está dada por $q = (\Phi_f - \Phi_i)/R$.

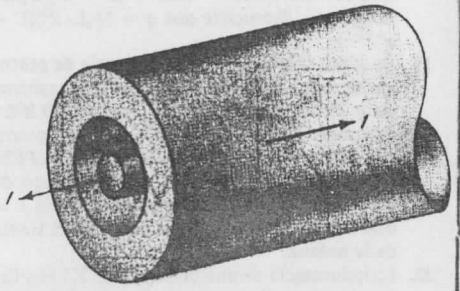
10. Se coloca una bobina circular que tiene 100 vueltas de alambre, cada una de 5 cm de radio, en un campo magnético uniforme de 0.5 Wb/m². El eje de la bobina es paralelo al campo magnético. Si la resistencia de la misma es de 200 Ω, determine qué carga neta fluye en la bobina, si repentinamente se invierte su orientación con respecto al campo magnético.

11. Un disco pequeño tiene 20 cm de radio y gira alrededor de su eje a 50 rev/s, como se muestra en el siguiente esquema. Paralelo al eje del disco hay un campo magnético uniforme de 0.5 Wb/m². Calcule la diferencia de potencial entre el centro y la circunferencia. [*Observación*: La diferencia de potencial a lo largo de un segmento pequeño de la línea AB es $d\mathcal{E} = Bv\,dl$.]



12. Un cable coaxial de gran longitud consiste en un conductor interno de radio r_1, y un conductor externo de radio interior r_2 y radio exterior r_3, como se muestra. El conductor interno lleva una corriente I que varía en el tiempo en forma prescrita, y la densidad de la corriente es uniforme. El conductor externo lleva la misma corriente I, pero en dirección opuesta. Demuestre que hay un campo eléctrico inducido paralelo al eje del conductor y que para $r_2 < r < r_3$ su magnitud está dada por

$$E(r) = E(r_1) + (\mu_0/2\pi)(dI/dt)\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$



13. Una barra conductora recta de 100 g de masa y 15 cm de longitud está en reposo sobre dos rieles horizontales paralelos que distan 15 cm. La barra, que lleva una corriente de 30 A, es perpendicular a los rieles. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y estos últimos es de 0.25, determine el campo magnético uniforme mínimo normal al plano del circuito que se requiere para poner en movimiento la barra.

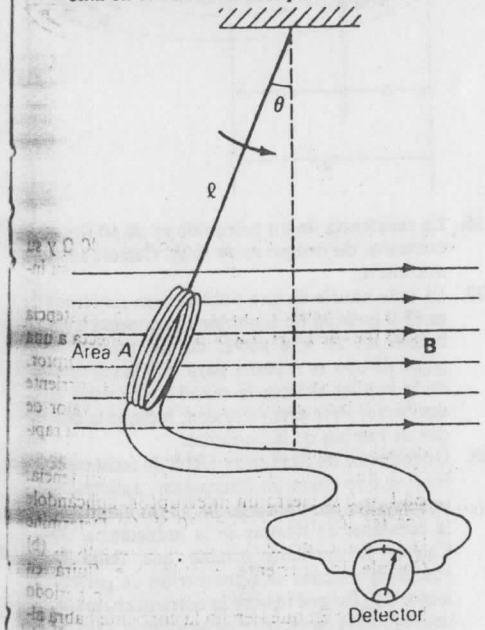
14. Un solenoide largo tiene 500 vueltas por metro, un área transversal de 0.05 m² y lleva una corriente de 2 A. Sobre el primario está arrollada estrechamente una bobina secundaria que tiene 4 Ω de resistencia. Se encuentra que si se invierte la corriente en el devanado primario en un intervalo de tiempo de 0.05, durante la inversión aparece en el secundario una FEM de 4 V. (a) ¿Cuántas vueltas tiene la bobina del secundario? (b) Determine la carga neta que pasa por determinado punto en el secundario, durante la inversión de la corriente primaria.

15. A una pequeña bobina circular que se utiliza para medir campos magnéticos se le llama "bobina de exploración". El plano de la bobina es inicialmente perpendicular al campo magnético y está unida a un instrumento que mide la carga total que fluye, por ejemplo, un galvanómetro balístico. Rápidamente la bobina se voltea (gira 180°) y se mide el flujo de la carga. Una bobina específica de exploración que se utiliza en un laboratorio consiste en 100 vueltas de alambre, cada una con área transversal de 3 cm². La resistencia total de la bobina es de 40 Ω. En una medición específica se encuentra que se registra una carga de 2×10^{-5} C. Con la información anterior determine la magnitud del campo magnético.

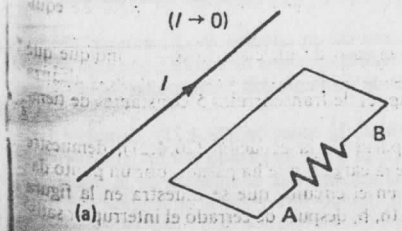
16. Una bobina circular de 300 espiras y 3.0×10^{-2} m² de área gira a 60 rev/s en un campo uniforme de 0.25 Wb/m². Halle la máxima FEM generada y la máxima intensidad de corriente, si la bobina tiene 25 Ω de resistencia.

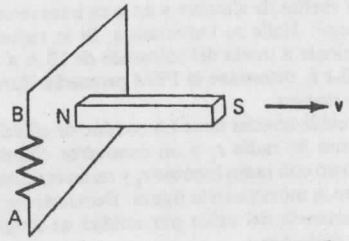
17. Un solenoide largo de 5.0 cm de radio está arrollado con 300 vueltas de alambre por centímetro, e inicialmente lleva una corriente de 2.40 A. La corriente se reduce linealmente a cero en 0.04 s. Obtenga (a) el campo eléctrico en un punto a 4.0 cm del eje del solenoide, (b) el campo eléctrico en un punto a 8.0 cm del eje del mismo. (c) Determine la máxima intensidad de campo eléctrico y dónde ocurre.

18. Se dispone una bobina de N vueltas con área transversal A como un péndulo que oscila con movimiento armónico simple $\theta = \theta_0 \operatorname{sen} \omega t$, como se muestra en el diagrama anexo. También, como se ilustra, un campo magnético uniforme B apunta en la dirección horizontal. Obtenga una expresión para la FEM inducida en la bobina en función del tiempo.

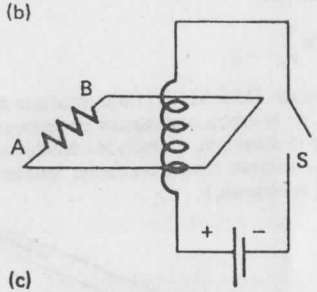


19. Para cada uno de los casos que se muestran en el diagrama adjunto, halle el sentido en que fluye por el resistor de la espira la corriente inducida (de A a B, o de B a A). (a) Repentinamente la corriente I Se reduce a cero. (b) Se retira el imán de barra de la espira. (c) Se cierra el interruptor para completar el circuito.



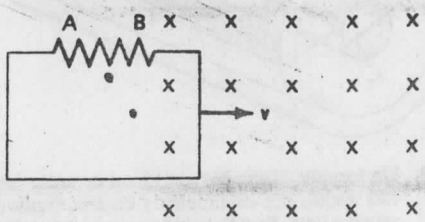


(b)

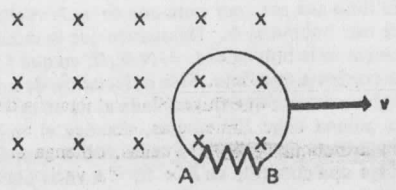


(c)

20. Determine el sentido en que fluye la corriente inducida para los dos casos que se ilustran.



(a)



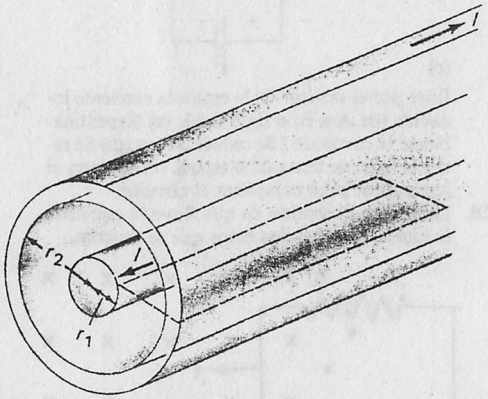
(b)

21. Un solenoide largo de 50 cm de longitud tiene 500 vueltas de alambre y un área transversal de 10 cm². Halle su inductancia. Si se reduce la corriente a través del solenoide de 10 A a cero en 0.1 s, determine la FEM promedio durante este tiempo.

*22. Un cable coaxial tiene un conductor cilíndrico interno de radio r_1 y un conductor cilíndrico externo con radio interior r_2 y radio exterior r_3, como se muestra en la figura. Demuestre que la inductancia del cable por unidad de longitud está dada por

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

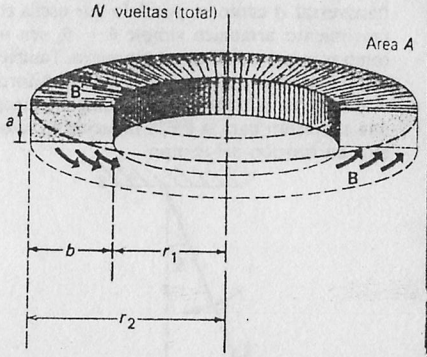
(*Sugerencias*: Determine el flujo total que pasa a través de la espira rectangular de línea punteada en el diagrama, cuando los conductores interno y externo llevan corrientes iguales en sentidos contrarios.)



23. Un toroide "delgado" de 15 cm de radio tiene 100 vueltas por centímetro y un área transversal de 4 cm². Evalúe la inductancia del toroide y la máxima FEM autoinducida cuando se invierte la corriente, de 15 a −15 A, en 0.01 de segundo.

24. El flujo que pasa por cada una de las N vueltas de una bobina es Φ_m. Demuestre que la inductancia de la bobina es $L = N\Phi_m/I$, en que I es la corriente que fluye. Si la inductancia de una bobina estrechamente arrollada es de 10 mH y la bobina tiene 300 vueltas, obtenga el flujo magnético que atraviesa cada vuelta cuando fluye una corriente de 2×10^{-3} A en la bobina.

*25. La sección transversal de un toroide es rectangular, como se muestra en el diagrama. Los radios interno y externo son r_1 y r_2, respectivamente, y el ancho de cada espira es a. El número total de vueltas es N. Obtenga una expresión para la inductancia del toroide. Calcule L si $N = 800$, $a = 2$ cm, $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 8$ cm. (*Sugerencia*: Utilice la expresión $B = \mu_0 IN/2\pi r$ que se obtuvo de la ley de Ampère para el campo magnético a la distancia r desde el centro del toroide, e integre sobre la sección transversal para evaluar el flujo.



26. La resistencia de un solenoide es de 40 Ω y su constante de tiempo es de 0.08. Calcule su inductancia.

27. La inductancia de una bobina cuya resistencia es 65 Ω es de 25 H. La bobina se conecta a una batería de 50 V a través de un interruptor. ¿Qué tiempo se necesita para que la corriente en la bobina alcance la mitad de su valor de equilibrio. Para este valor de t, indique la rapidez de cambio de la corriente.

28. Un inductor de 20 H tiene 150 Ω de resistencia. En $t = 0$ se cierra un interruptor, aplicándole una tensión constante de 30 V. (a) Determine la constante de tiempo de la inductancia. (b) Calcule la corriente estable que fluirá en equilibrio después de transcurrido un periodo largo. (c) ¿En qué tiempo la corriente habrá alcanzado 95% de su valor de equilibrio. (d) Calcular la intensidad de crecimiento de la corriente cuando tiene un medio del valor de equilibrio.

29. En el caso de un circuito R—L, indique qué fracción de la corriente de equilibrio se alcanza después de transcurridas 5 constantes de tiempo.

30. A partir de la ecuación (20.4.21), demuestre que la carga q que ha pasado por un punto dado en el circuito que se muestra en la figura 20.16, b, después de cerrado el interruptor satisface la ecuación $L(I - I(0)) + qR = 0$ y a partir de esto, demuestre que $q = (\mathcal{E}_1 L/R^2)(1 - e^{-Rt/L})$.

31. Se aplica súbitamente una diferencia de potencial de 100 V a una bobina de 200 Ω de resistencia y 75 mH de inductancia. Para $t = 0.002$ s determine qué parte de la diferencia de potencial a través de la bobina se debe a la FEM autoinducida y qué parte se debe al flujo de corriente a través de la resistencia. Para $t = 0.004$ s, evalúe la corriente que fluye a través de la bobina.

32. La inductancia de una bobina es de 2.5 H y lleva una corriente constante de 3 A. Calcule la energía almacenada en el campo magnético. Si el volumen dentro del cual es significativo el campo **B** es de 200 cm³, y si el campo contenido se supone uniforme, determine la intensidad del campo magnético.

33. La inductancia de determinado solenoide es de 15 mH y su resistencia vale 25 Ω. Está conectada a una batería de 6 V cuya resistencia interna es despreciable, mediante un interruptor en el circuito. Justo después de cerrar este interruptor, cuando la corriente ha alcanzado 10% de su valor de equilibrio, calcule (a) la rapidez de cambio de la corriente, (b) la FEM autoinducida, (c) la energía almacenada en el solenoide y (d) la intensidad de disipación de energía en el circuito.

34. ¿Qué energía se necesita, además de la disipada por efecto de calentamiento Joule, para establecer una corriente de 10 A en una bobina toroidal de 200 cm³ de volumen y 1 H de inductancia? Determine la intensidad media del campo magnético dentro de la bobina.

35. Una bobina toroidal con 20 Ω de resistencia, se conecta a una batería. La corriente alcanza la mitad de su valor de equilibrio después de 0.01 s. Si la corriente de equilibrio es de 5 A, halle la energía almacenada en el campo magnético y la FEM de la batería, suponiendo que su resistencia interna es despreciable.

36. Un alambre largo y recto, de radio a, lleva corriente I. Determine la energía almacenada en el campo magnético en un volumen de longitud l que se extiende entre $r = d$ y $r = 2d$, siendo $d > a$.

37. Obtenga la energía magnética por unidad de longitud para el cable coaxial del problema 22 en las regiones $r < r_1$ y $r_1 < r < r_2$.

38. Un alambre largo y recto, de radio a, lleva una corriente total I distribuida uniformemente en su área transversal. Evalúe la energía magnética por unidad de longitud almacenada en el alambre y demuestre que es independiente del radio.

39. Existe un campo magnético uniforme **B** en determinada región del espacio. Exprese qué magnitud de campo eléctrico se necesita para que produzca una densidad de energía eléctrica de la misma magnitud que la densidad de energía magnética.

40. Las inductancias de dos solenoides son de 5×10^{-6} y 8×10^{-6} H, respectivamente. Si están bien separadas especialmente, calcule la inductancia equivalente cuando se conectan en serie y cuando están conectadas en paralelo. Si sus resistencias son de 50 y de 100 ohms, respectivamente, determine la constante de tiempo para las conexiones en serie y en paralelo.

41. Una bobina toroidal delgada tiene 15 cm de radio y 4 cm₂ de área transversal. Su devanado primario es de 75 vueltas/cm, el secundario tiene 40 vueltas/cm. Determine el valor del coeficiente de inducción mutua M_{12}. Suponga que el secundario se enrolla directamente sobre el devanado primario.

42. Deduzca la ecuación (20.7.24) utilizando las ecuaciones (20.7.22) y (20.7.23).

43. El primario y el secundario de un transformador tienen 20 y 300 vueltas de conductor, respectivamente. Si el voltaje del primario está dado por $\mathcal{E}(t) = 10$ sen ωt, determine el máximo voltaje en el secundario.

44. Suponga que la inductancia primaria del transformador del problema anterior es de 0.080 H y que la resistencia de la bobina primaria es de 3.6 Ω. Si no fluye corriente en la bobina secundaria, calcule la relación de la amplitud del voltaje de salida en el secundario a la amplitud de la FEM aplicada (a) de frecuencia infinita, (b) con frecuencia de 400 Hz, (c) con frecuencia de 60 Hz, (d) para una frecuencia de 10 Hz y (e) para una frecuencia de 1.0 Hz. (f) ¿Este dispositivo sería utilizable en circuitos de 60 Hz?

45. Para el caso descrito en el problema anterior, determine la diferencia de fase entre la FEM aplicada y la FEM de salida (a) para una alimentación de frecuencia infinita, (b) con un valor de 400 Hz de frecuencia, (c) con una frecuencia de 60 Hz, (d) con una frecuencia de 10 Hz y (e) con una frecuencia de 1.0 Hz.