Exercici 16. Calcula todas las soluciones de las congruéncias siguientes:

Solució 16.

(g) $55x \equiv 77 \pmod{121}$

Vemos que sí tiene solución ya que

$$121 = 55 * 2 + 11$$

$$55 = 11 * 5 + 0$$

$$mcd(55, 121) = 11$$

y 11 es divisible entre 77

$$11|77$$

Podemos simplificar la ecuación dividiendo todos los términos entre el $mcd(55, 121) = 11$, entonces:

$$5x \equiv 7(mod11)$$

Para resolverlo, simplificar el término que va acompañado a x, de esta manera:

$$5x \equiv 7 + 11(mod11)$$

Podemos hacer esto ya que no afecta a la resolución, porque sumanos en múltiplo de 11. Seguimos sumandole hasta que obtengamos un número que pueda simplificar con 5:

$$5x \equiv 7 + (11 * 3)(mod11)$$

$$5x \equiv 40(mod11)$$

$$x \equiv 8(mod11)$$

Y de aquí obtenemos el resultado de x como:

$$x = 8 + 11k$$

$$\forall k \in Z$$

Por ejemplo: $k = 0 \rightarrow x = 8 \rightarrow 440 \equiv 77(mod121) \rightarrow 121 * 3 = 440 - 77$

(j) $45x \equiv 105 \pmod{100}$ Hacemos lo mismo para este apartado:

$$100 = 45 * 2 + 10$$

$$45 = 10 * 4 + 5$$

$$10 = 5^*2 + 0$$

$$mcd(45, 100) = 5$$

Y 5 sí es divisible por 105:

$$5|105$$

Podemos simplificar la ecuación dividiendo todos los términos entre el $mcd(45, 100) = 5$, entonces:

$$9x \equiv 21(mod20)$$

Luego,

$$9x \equiv 21 + 20 * 3(mod20)$$
$$9x \equiv 81(mod20)$$
$$x \equiv 9(mod20)$$

Y de aquí obtenemos el resultado de x como:

$$x = 9 + 20k \forall k \in Z$$

Por ejemplo: $k = 0 \rightarrow x = 9 \rightarrow 405 \equiv 105(mod100) \rightarrow 100 * 3 = 405 - 105$