En els coeficients de les matrius, l'índex superior indica la fila i l'inferior la columna. Matriu $m \times n$ significa *amb m files i n columnes*.

6.1 Si

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, calculeu $A(0)$, $A(\alpha)A(\beta)$ i $A(\beta)A(\alpha)$; feu servir els resultats per calcular $A(\alpha)^n$, $A(\alpha)^{-1}$ i $A(\alpha)^{-n}$ $(= (A(\alpha)^{-1})^n)$, $n > 1$.

6.2 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu uma matriu 2×2, B, $B \neq 0$, de manera que $AB = 0$. Trobeu matrius 2×2, C i C', $C \neq C'$, de manera que $AC = AC'$.

6.3 Demostreu que si dues matrius $n \times n$, A i B, commuten, llavors

$$A^k B = BA^k, \quad k > 1,$$

i si A és regular,

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= BA^{-1}, \\ A^{-k}B &= BA^{-k}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

6.4 Si A i B son matrius $n \times n$, desenvolupeu

$$(A+B)^2, \quad (A+B)^3, \quad (A+B)(A-B).$$

Reescriviu els resultats en cas que A i B commutin.

6.5 Demostreu que si A és una matriu $m \times n$ i $\mathrm{rg}(A) < n$, llavors existeix una matriu $n \times 1$, B, $B \neq 0$, de manera que $AB = 0$. Deduïu d'aquest fet que en cas de ser $m = n$, A no és invertible.

6.6 Per quina matriu i per quin costat s'ha de multiplicar una matriu per obtenir

- la seva i-èsima fila,
- la seva j-èsima columna,
- la suma de les seves columnes?

6.7 Descriviu l'efecte de multiplicar una matriu $m \times n$, per la dreta, per la matriu $n \times n$: $A = (a^i_j)$ amb

$$a^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j + i = n + 1; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

6.8 Si

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculeu les potències A_4^n per a $n \geq 0$. Feu el mateix amb la matriu $m \times m$, $A_m = (a_j^i)$ definida per

$$a_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j+1; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

6.9 Siguin A, B, C les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu BA i resoleu l'equació matricial $AX = C$, on X és una matriu 3×3.
Calculeu AB i resoleu l'equació matricial $XA = C$, on X és una matriu 3×3.

6.10 En cas d'existir, trobeu la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.11 Si $A = (a_j^i)$ amb

$$a_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j, \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, $n > 1$, demostreu que

$$A^2 = (n-1)\,\mathrm{Id} + (n-2)A.$$

Aïlleu Id de l'equació anterior, demostreu que A té inversa i calculeu-la.

6.12 Es diu traça d'una matriu quadrada $A = (a_j^i)_{1 \leq i,j \leq n}$ la suma dels elements de la seva diagonal, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_i^i$. Demostreu les propietats següents.

1) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

2) $\operatorname{tr}(bA) = b \operatorname{tr} A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}$;

3) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

4) Proveu que no existeixen matrius $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tals que $AB - BA = \mathrm{Id}$.

6.13 Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1) Demostreu que la matriu $A + A^T$ és simètrica i que la matriu $A - A^T$ és antisimètrica.

2) Demostreu que A es pot escriure en forma única com la suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica.