7.1 Sigui $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$a^i_j = \begin{cases} 0 \text{ si } & i = j \\ 1 \text{ si } & i < j \\ -1 \text{ si } & i > j \end{cases}$$

Demostreu que $\operatorname{rg} A = n$ si n és parell i $\operatorname{rg} A = n-1$ si n és senar.

7.2 En cas d'existir, trobeu la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.3 Trobeu la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.4 Expresseu com a producte de matrius elementals la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.5 Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una expressió de A com a producte de matrius elementals i demostreu que una tal expressió no existeix per a B.

7.6 Sigui $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ v_2 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ v_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

formen una base $\mathfrak{B}'$ de E. Calculeu les coordenades de $v_1 + v_2 + 3v_3$ en les bases $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$. Feu el mateix amb $e_1 - e_2 + 2e_3$

7.7 Sigui $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_2 \\ v_2 &= e_2 - e_3 \\ v_3 &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

formen una base $\mathfrak{B}'$ de E. Calculeu la matriu de canvi de la base $\mathfrak{B}$ a la base $\mathfrak{B}'$. Feu-la servir per calcular les coordenades en base $\mathfrak{B}'$ de $e_1 - e_2 + 2e_3$.

7.8 En un espai vectorial E es consideren dues bases, $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ i $\mathfrak{B}'$, formada per

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ v_2 &= e_1 + e_2 - e_3 \\ v_3 &= -e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Demostreu que els vectors de E que tenen les coordenades relatives a una i altra base iguals formen un subespai de E. Calculeu-ne la dimensió i una base.

7.9 Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$ dues bases de E i C la matriu de canvi de la base $\mathfrak{B}'$ a la base $\mathfrak{B}$. Demostreu que els vectors de E que tenen les coordenades relatives a una i altra base iguals formen un subespai F de E. Doneu una condició equivalent a $F \neq \{\vec{0}\}$ en termes de la matriu C.