

Exercici 12.

Trobeu totes les solucions (x, y) , amb $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$, del sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} xy = 51840 \\ \text{mcd}(x, y) = 24 \end{array} \right\}$$

Solució 12.

Com $\text{mcd}(x, y) = 24$ sabem que $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tals que $x = 24p, y = 24q$. A més:

$$\text{mcd}(x, y) = 24 \longrightarrow \text{mcd}(24p, 24q) = 24 \longrightarrow \text{mcd}(p, q) = 1$$

Podem escriure doncs la primera equació del sistema com: $24p \times 24q = 51840$, que comporta clarament $pq = 90$. Així doncs, les úniques opcions possibles (ja que teniem $p, q \in \mathbb{N}$) són:

$$p = 1, q = 90$$

$$p = 2, q = 45$$

$$p = 5, q = 18$$

$$p = 9, q = 10$$

o viceversa. Les possibilitats $p = 3, q = 30$ i $p = 6, q = 15$ no es contemplen ja que $\text{mcd}(3, 30) = \text{mcd}(6, 15) = 3$ i no pot ser, pel motiu que s'ha vist abans. Les solucions del sistema són doncs:

$$(24, 2160), (48, 1080), (120, 432), (216, 240)$$

o, viceversa:

$$(2160, 24), (1080, 48), (432, 120), (240, 216)$$