Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Prova 2 (GRUP TG). Curs 2020-2021

1. Siguin $\{a_n, n \geq 1\}$ i $\{b_n, n \geq 1\}$ dues successions convergents amb $\lim_n a_n = a$ i $\lim_n b_n = b$, respectivament. Proveu

$$\lim_{n \to \infty} (2a_n + 3b_n) = 2a + 3b.$$

2. Considereu la successió definida de manera recurrent:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + 6}{2}}, n \geq 1.$$

   (a) Proveu que $0 < a_n \leq \sqrt{6}$.

   (b) Proveu que és monòtona.

   (c) És convergent? En cas afirmatiu, quin és el límit?

3. Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n+1]{n^2(4n+1)6n}.$$

1) Sabem que

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0 \ \exists \hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \hat{n}_0$

$|a_n - a| < \varepsilon'$.

$\lim_{n\to+\infty} b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon'' > 0 \ \exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0$

$|b_n - b| < \varepsilon''$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = \max(\tilde{n}_0, \hat{n}_0)$ tq $\forall n \geq n_0$

$|2a_n + 3b_n - (2a + 3b)| = |2a_n - 2a + 3b_n - 3b|$

$\leq 2|a_n - a| + 3|b_n - b| \leq 2\varepsilon' + 3\varepsilon''$,

Si prenem $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4}$ i $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{6}$ ja ho tenim

2) Estudiem primer la positivitat.

a) $a_1 > 0$

$$\forall n \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2+6}{2}} > 0.$$

Per veure la cota superior:

$$a_2 \leq \sqrt{6}.$$

Si $a_n \leq \sqrt{6}$ aleshores

$$a_{n+1} \leq \sqrt{\frac{6+6}{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}.$$

Per inducció podem concloure-ho.

b) $$a_2 = \sqrt{\frac{4+6}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5} \geq a_1$$

Suposem $a_{n-1} \leq a_n$.

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2+6}{2}} \geq \sqrt{\frac{a_{n-1}^2+6}{2}} = a_n.$$

o bé

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2+6}{2}} \geq a_n \iff a_n^2+6 \geq 2a_n^2$$

$$\iff a_n^2 \leq 6 \iff a_n \leq \sqrt{6}$$

c) Suc. monotona creixent i acotada superiorment implica convergent:

$$\lim_n a_n = l$$

Aleshores

$$\lim_n \sqrt{\frac{a_n^2+6}{2}} = \sqrt{\frac{l^2+6}{2}}$$

per les propietats que hem vist a classe.

Així

$$\lim_n a_{n+1} = \lim_n \sqrt{\frac{a_n^2+6}{2}}$$

i

$$l = \sqrt{\frac{l^2+6}{2}} \Rightarrow l^2 = 6 \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{6}}$$

3

$$\lim_n \left(n^2(4n+1)6n\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \lim_n e^{\frac{1}{2n+1}\ln\left(n^2 6n(4n+1)\right)}$$

$$= \lim_n e^{\frac{1}{2n+1}\ln\left(6n^3(4n+1)\right)} = \lim_n e^{\frac{\ln 6n^3}{2n+1} + \frac{\ln(4n+1)}{2n+1}}$$

$$= e^0 = 1 \quad \text{perquè} \quad \frac{\ln n}{n^c} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{per } c>0$$