LÒGICA I LLENGUATGES

SOLUCIONS DE PROBLEMES

SETMANA DEL 10 D'ABRIL

Exercici 1 (llista 3). Sigui $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Siguin $L_1 = \{1, 02, 10\}$ i $L_2 = \{\lambda, 112, 0\}$. Determinar els llenguatges L_1L_2, L_2L_1, $L_1L_2 \cup L_2L_1$ i $L_1L_2 \cap L_2L_1$.

Solució : $L_1L_2 = \{1, 1112, 10, 02, 02112, 020, 10, 10112, 100\}$,

$L_2L_1 = \{1, 02, 10, 1121, 11202, 11210, 01, 002, 010\}$,

$L_1L_2 \cup L_2L_1 = \{1, 1112, 10, 02, 02112, 020, 10, 10112, 100, 1121, 11202, 11210, 01, 002, 010\}$,

$L_1L_2 \cap L_2L_1 = \{1, 10, 02\}$.

Exercici 2. Sobre l'alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, siguin:

$L_1 =$ el conjunt de paraules de bits que tenen exactament tants 0's com 1's,

$L_2 =$ el conjunt de paraules de bits que tenen almenys tants 0's com 1's,

$L_3 =$ el conjunt de paraules de bits que tenen almenys tants 1's com 0's.

Aleshores, determineu els llenguatges L_1L_1, L_1L_2, L_1L_3, L_2L_1, L_2L_2, L_2L_3, L_3L_1, L_3L_2, L_3L_3.

Solució : $L_1L_1 = L_1$, $L_1L_2 = L_2L_1 = L_2$, $L_1L_3 = L_3L_1 = L_3$, $L_2L_2 = L_2$, $L_3L_3 = L_3$, $L_2L_3 = \{0, 1\}^*$, $L_3L_2 = \{0, 1\}^*$.

Per a demostrar que $L_2L_3 = \{0, 1\}^*$, suposem que $x \in \{0, 1\}^*$. Aleshores, si $n_1(x) \leq n_0(x)$ tenim que $x = x \cdot \lambda \in L_2L_3$. I si $n_0(x) \leq n_1(x)$ tenim que $x = \lambda \cdot x \in L_2L_3$.

De manera anàloga, es demostra que $L_3L_2 = \{0, 1\}^*$.

Exercici 3 (llista 3). Considerem $L_1 = \{x \in \{0, 1\}^* : n_0(x)$ és parell $\}$ i $L_2 = \{x \in \{0, 1\}^* : n_0(x)$ és senar $\}$. Llavors, determineu L_1^* i L_2^*.

Solució : $L_1^* = L_1$, ja que si $x_1, \ldots, x_n$ són paraules tals que $n_0(x_i)$ és parell per $i = 1 \ldots n$, aleshores $n_0(x_1 x_2 \ldots x_n)$ és parell.

$L_2^* = \{x \in \{0,1\}^* : n_0(x) > 0\} \cup \{\lambda\}$, ja que si $x \in \{0,1\}^*$ tal que $n_0(x) > 0$, aleshores x és de la forma $1 \ldots 101 \ldots 10 \ldots 1 \ldots 101....1$ on els blocs de 1's poden ser buits. Aleshores, com que cada bloc $1 \ldots 10$ és una paraula de L_2 i el bloc final $1....101....1$ és també una paraula de L_2, la paraula x és una paraula de L_2^*.

<u>Exercici 4</u> (llista 3). Demostreu que per a tot llenguatge L, $(L^*)^* = L^*$.

Solució : Clarament, $L^* \subseteq (L^*)^*$, ja que tot llenguatge està contingut en la seva clausura. Llavors, demostrem que $(L^*)^* \subseteq L^*$. Sigui $x \in (L^*)^*$. Aleshores, $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ on $n \geq 0$ i $x_1, \ldots, x_n \in L^*$. Com tenim que cada $x_i \in L^*$, existeixen paraules $y_1^i, \ldots, y_{k_i}^i$ tals que $x_i = y_1^i \cdot \ldots y_{k_i}^i$. Per tant,

$$x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = y_1^1 \cdot \ldots \cdot y_{k_1}^1 \cdot y_1^2 \cdot \ldots \cdot y_{k_2}^2 \cdot \ldots \cdot y_1^n \cdot \ldots \cdot y_{k_n}^n \in L^*.$$

<u>Exercici 5</u> (llista 3). Determineu si són certes les següents conditions:
(a) $11001001 \in L((00 \cup 1)^*)$.
(b) $000 \in L((00 \cup 1)^*)$.
(c) $10100 \in L((00 \cup 1)^*)$.
(d) $10000111 \in L((00 \cup 1)^*)$.
(e) $L(1^*0^*) \cap L(0^*1^*) = L(0^* \cup 1^*)$.
(f) $L(0^*1^*) \cap L(2^*3^*) = \emptyset$.
(g) $0123 \in L((0(23)^*1)^*)$.

Solució : (a) és certa.

(b) és falsa, perquè els ceros han de sortir de dos en dos.

(c) és falsa, perquè els ceros han de sortir de dos en dos, i per tant no pot sortir un 0 entre dos uns.

(d) és certa.

(e) és certa.

(f) és falsa, perquè la paraula buida pertany al llenguatge $L(0^*1^*)$ i també al llenguatge $L(2^*3^*)$.

(g) és falsa, perquè si en una paraula del llenguatge apareix un símbol després d'un 1, aquest símbol ha de ser un 0.

Exercici 6 (llista 3). Determineu els llenguatges corresponents a les següents expressions regulars:
(a) 1^*10.
(b) $(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*$.
(c) $(0 \cup 10)(1 \cup 01)^*$.
(d) $(0^*10^*10^*1)0^*$.
(e) $(1 \cup 01)^*00(10 \cup 1)^*$.
(f) $0(0 \cup 1)^*0 \cup 1(0 \cup 1)^*1 \cup 0 \cup 1$.

Solució : (a) $\{1^n0 : n > 1\}$.

(b) $\{x \in \{0,1\}^* : x$ conté algun 1 $\}$.

(c) $\{xx_1 \ldots x_n : n \geq 0, x = 0 \vee x = 10, x_i = 1 \vee x_i = 01$ per $i = 1, \ldots, n\}$.

(d) $\{x \in \{0,1\}^* : x$ té exactament tres uns $\}$.

(e) $\{x \in \{0,1\}^* :$ en x apareix 00 exactament una vegada $\}$.

(f) $\{x \in \{0,1\}^* : x$ comença i acaba en el mateix símbol $\}$.

Exercici 7 (llista 3). Demostreu que els següents parells d'expressions regulars no són equivalents:
(a) $\alpha = (0 \cup 1)^*$, $\beta = (0)^* \cup (1)^*$.
(b) $\alpha = (0 \cup 1)^*$, $\beta = (01)^*$.
(c) $\alpha = 00^*1$, $\beta = 0^*1$.
(d) $\alpha = (0^*1)^*$, $\beta = (0 \cup 1)^*1$.

Solució : Per a demostrar que dos expressions regulars no són equivalents, hem de donar una paraula que estigui en el llenguatge d'una de les expressions regulars, però no estigui en el llenguatge de l'altra expressió regular. Llavors, tenim:

(a) $01 \in L(\alpha)$, però $01 \notin L(\beta)$, ja que les paraules de $L(\beta)$ són blocs de ceros o blocs d'uns.

(b) $1 \in L(\alpha)$, però $1 \notin L(\beta)$, ja que tota paraula de $L(\beta)$ té un nombre parell de símbols.

(c) $1 \in L(\beta)$, però $1 \notin L(\alpha)$ ja que tota paraula de $L(\alpha)$ comença en 0.

(d) $\lambda \in L(\alpha)$, però $\lambda \notin L(\beta)$, ja que tota paraula de $L(\beta)$ acaba en 1.

Exercici 8 (llista 3). Simplifica les següents expressions regulars, trobant per cadascuna d'elles una expressió regular més simple i equivalent.
(a) $(0 \cup \lambda)^*$.

(b) $(0 \cup \lambda)(0 \cup \lambda)^*$.
(c) $\lambda \cup 0^* \cup 1^* \cup (0 \cup 1)^*$.
(d) $0^*1 \cup (0^*1)0^*$.
(e) $(0^*1)^* \cup (1^*0)^*$.
(f) $(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*$.

Solució : Recordem que dos expressions regulars α i β són equivalents, si $L(\alpha) = L(\beta)$. Si dos expressions regulars α i β són equivalents, escrivim $\alpha \equiv \beta$. Llavors tenim:

(a) $(0 \cup \lambda)^* \equiv 0^*$.

(b) $(0 \cup \lambda)(0 \cup \lambda)^* \equiv 0^*$.

(c) $\lambda \cup 0^* \cup 1^* \cup (0 \cup 1)^* \equiv (0 \cup 1)^*$.

(d) $0^*1 \cup (0^*1)0^* \equiv 0^*10^*$.

(e) $(0^*1)^* \cup (1^*0)^* \equiv (0 \cup 1)^*$.

(f) $(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^* \equiv (0 \cup 1)^*01^*$.