Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Prova 3 (GRUP MB). Curs 2020-2021

1. Siguin dues funcions f i g amb $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to -\infty} g(x) = l$. Proveu que
$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

2. Considereu la successió recurrent definida de la manera següent:
$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{4a_n^2 + 1}{4}, n \geq 1.$$
   (a) La successió està acotada? És monòtona?
   (b) És convergent? En cas afirmatiu busqueu el límit.

3. Calculeu els límits següents:
$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{2x^4 + 2x^2 + 1} - \sqrt{2x^4 - 7x^2 + 8}\right]$$
i
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-3x} + \ln(6 + 3x^4) + 3x^2}{\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^7}}.$$

4. Sigui, per a cada $n \in \mathbb{N}$, la funció definida a $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \setminus \{0\}$ per
$$f(x) = \begin{cases} (\sin(x^2))^{x^2} & \text{si } -\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < 0 \\ x^n \cot(x^2), & \text{si } 0 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$
Per a quins n podem definir $f(0)$ de manera que f sigui contínua a 0?

Prova 3 (grup MB)

(1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\Longleftrightarrow \forall M_f > 0 \ \exists k_f > 0$ tq si $x < -k_f$, $f(x) \geq M_f$.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \ell$

$\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon_g > 0 \ \exists k_g > 0$ tq si $x < -k_g$, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Això implica que $g(x) > \ell - \varepsilon$.

Així agafant $k = k_f \wedge k_g$,

$\forall M > 0 \ \exists k > 0$ tq si $x < -k$,

$f(x) + g(x) > M_f + \ell - \varepsilon = M$,

si $M_f = M - \ell + \varepsilon$.

(2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $\quad a_{n+1} = \frac{4a_n^2+1}{4}$, $n \geq 1$.

Fixem-nos que $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

La successió és <u>monòtona</u> perquè

$$a_1 \leq a_2 = \frac{13}{36},$$

i si $a_{n-1} \leq a_n$ tenim que també es compleix

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Efectivament $\frac{4a_{n-1}^2+1}{4} \leq \frac{4a_n^2+1}{4}$.

També podem comprovar que $a_n \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$.
És cert pel cas $n=1$. Pel cas general,

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{4a_n^2+1}{4} \leq \frac{1}{2} \iff 4a_n^2+1 \leq 2$$

$$\iff 4a_n^2 \leq 1 \iff a_n^2 \leq \frac{1}{4} \underset{\boxed{a_n > 0}}{\iff} a_n \leq \frac{1}{2}$$

Finalment, com és monòtona i acotada és convergent,
i $\lim_n a_{n+1} = \lim_n \frac{4a_n^2+1}{4}$,

resultant que el límit és $l = 1/2$.

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^4+2x^2+1}-\sqrt{2x^4-7x^2+8}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^4+2x^2+1}-\sqrt{2x^4-7x^2+8}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^4+2x^2+1}+\sqrt{2x^4-7x^2+8}\right)}{\sqrt{2x^4+2x^2+1}+\sqrt{2x^4-7x^2+8}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x^4}+2x^2+1-\cancel{2x^4}+7x^2-8}{\sqrt{2x^4+2x^2+1}+\sqrt{2x^4-7x^2+8}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9-\frac{7}{x^2}}{\sqrt{2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{2-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^4}}}=\frac{9}{2\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-3x}+\ln(6+3x^4)+3x^2}{x^{3/2}+x^{7/3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-3x}}{x^{7/3}}+\frac{\ln(6+3x^4)}{x^{7/3}}+\frac{1}{x^{1/3}}}{\frac{1}{x^{5/6}}+1}=0$$

L'únic cas que no és clar és el ln. Fixem-nos que per ~~x~~ gran

$$0\le\frac{\ln(6+3x^4)}{x^{7/3}}\le\frac{\ln(4x^4)}{x^{7/3}}=\frac{\ln 4}{x^{7/3}}+\frac{4\ln x}{x^{7/3}},$$

que sabem que convergeix a 0 per teoria.

(4) Les funcions (si $x \neq 0$) són contínues.

Estudiem

$$\lim_{x\to 0^-} (\sin(x^2))^{x^2} = \lim_{x\to 0^-} e^{x^2 \ln(\sin(x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^{x^2 \ln\left[\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot x^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^{x^2\left(\ln\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right) + 2\ln x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^{2x^2 \ln x} = \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{1/x^2}}$$

pq $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$

$$= \lim_{y\to +\infty} e^{-\frac{\ln y}{y}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^m \cot(x^2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^m \cos(x^2)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)}\cdot \cos(x^2)\, x^{m-2}$$

Si $m=2$, aquest límit és 1 i podem afegir $f(0)=1$ per fer-la contínua. Si $m=1$, aquest límit és $+\infty$ i si $m \geq 3$ el límit és zero i no pot ser contínua.