7. Demostreu que si $n, n+2$ i $n+4$ son nombres naturals primers, aleshores $n=3$

Solucio 7.

Ho provarem per contrarecíproc, llavors suposarem que $n \neq 3$, i volem veure que $n, n+2$ i $n+4$ no son primers, procedim per distincio de casos en funcio de si n es parell o senar:

- **Cas 1** n es parell. Si n es parell $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$, per tant tenim que si $k = 0$, sabem que 0 no es primer, i si $k \neq 0$, tenim que $1 < 2 < n+2$, i $2|n+2$, ja que $n+2 = 2k+2 = 2(k+1)$
- **Cas 2** n es imparell. Si n es imparell $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k+1$, ara distinguirem per casos en funcio de si $n = 3l$, $n = 3l+1$ o $n = 3l+2$, tenim que aquests casos son exhaustius, ja que pel teorema de la divisio entera es te que $n = 3q+r$, $\leq r < 3$, per tant r = 0, o r = 1 o r = 2.
  - **Subcas 1** n = 3l, aleshores tenim que $3|n$, ja que n = 3l on $l \in \mathbb{N}$, i com $1 < 3 < n$, al ser $3 < 3l \iff 1 < l$, cosa que es certa, ja que si $l = 1, n = 3$, cosa que es imopssible, i si $l = 0$, n es parell cosa que no pot ser ja que estem analitzant el cas on n es imparell.
  - **Subcas 2** $n = 3l+1$, aleshores tenim que $3|n+2$, ja que $n+2 = 3(l+1)$ on $l \in \mathbb{N}$, i com $1 < 3 < n+2$, al ser $3 < 3(l+1) \iff 1 < l+1 \iff 0 < l$, cosa que es certa, ja que si $l = 10, n+2 = 3$, cosa que es impossible.
  - **Subcas 3** $n = 3l+2$, aleshores tenim que $3|n+4$, ja que $n+4 = 3l+6 = 3(l+2)$ on $l \in \mathbb{N}$, i com $1 < 3 < n+4$, al ser $3 < 3(l+2) \iff 1 < l+2 \iff -1 < l$, cosa que es certa, ja que $l \in \mathbb{N}$.

Per tant hem provat, que si $n \neq 3$, aleshores $n, n+2$ i $n+4$ no son tots primers.