Grau d'Enginyeria Informàtica

Introducció a la Computació Científica

Semestre Tardor 2020 - Prova parcial de 5 de novembre

Cada apartat val 20 punts i es qualifica sobre 100. Resol els 2 exercicis en fulls separats.

Exercici 1 [Errors]

Considerem la data d'avui escrita així: $A = 20201105 = 1001101000011111010010001_{2)}$.

(a) Troba el nombre màquina $\bar{A}$ que és la representació IEEE amb precisió simple d'A i l'error exacte $E = A - \bar{A}$ comès en aquesta representació.

(b) Mitjançant la fórmula aproximada de propagació de l'error, troba una fita aproximada de l'error absolut en calcular $1/A$ usant el valor representat $\bar{A}$: $1/\bar{A}$.

(c) Es vol calcular la diferència D entre els recíprocs d'A i $\bar{A}$:

$$D = 1/A - 1/\bar{A} \ .$$

Intenta calcular-la directament i explica la problemàtica amb què et trobes si no pots fer servir moltes xifres. Fes servir una fórmula millor des del punt de vista numèric per calcular-la, justificant breument perquè és millor.

Exercici 2 [Sistemes lineals]

El polinomi interpolador $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ de grau màxim 2 a la funció $f(x)$ en els nodes x_k $(k = 0, 1, 2)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineals $p_2(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2)$ que compleixen els coeficients a_0, a_1, a_2:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & x_0 a_1 & + & x_0^2 a_2 & = & f(x_0) \\ a_0 & + & x_1 a_1 & + & x_1^2 a_2 & = & f(x_1) \\ a_0 & + & x_2 a_1 & + & x_2^2 a_2 & = & f(x_2) \end{array}$$

Considera la funció $f(x) = x^3$. Es vol trobar el polinomi interpolador a $f(x)$ en les nodes $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$, on $f(x_0) = 1, f(x_1) = 8, f(x_2) = 27$.

El sistema d'equacions lineals que compleixen els coeficients a_0, a_1, a_2 de $p_2(x)$ és:

$$\mathbf{Aa} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \ .$$

(a) Troba la solució del sistema d'equacions $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ pel mètode de Gauss i escriu el polinomi interpolador $p_2(x)$.

(b) Calcula la matriu inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de la matriu A pel mètode de Gauss-Jordan i comprova que la solució trobada del sistema anterior és $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

(c) Escriu les iteracions del mètode de Jacobi aplicat al sistema inicial i troba els dos primers iterats a partir de l'aproximació $\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Idees per a la solució. **[Errors]**

(a) Fem la representació en punt flotant en base 2:

$$A = 1001101000011111010010001_{2)} = 1.001101000011111010010001_{2)} 2^{24} = \sigma(1+f)2^{q-1} \ .$$

Representació IEEE simple d'A:

- Signe σ: $s = 0$.
- Mantissa fraccionària amb 23 bits arrodonits: $\mathrm{fl}_{23}(f) = 0.00110100001111101001001_{2)}$.
- Exponent: $e = q - 1 + 127 = 24 + 127 = 10010111_{2)}$

La representació usant 4 bytes seria

$$\boxed{0|10010111|00110100001111101001001} \ .$$

El nombre màquina de representació d'A (24 bits significatius arrodonits) és així:

$$\bar{A} = 1001101000011111010010010_{2)} = 20201106 \ .$$

Error absolut exacte: $E = A - \bar{A} = -1$.

Fita de l'error absolut: $\epsilon_a(A) = 1$.

(b) Una fita aproximada de l'error absolut comès en aproximar $\frac{1}{A}$ per $\frac{1}{\bar{A}}$ ve donada per la fórmula de propagació de l'error:

$$\epsilon_a(\frac{1}{A}) \approx \frac{1}{\bar{A}^2}\epsilon_a(A) = \frac{1}{20201106^2} \simeq 2.450471777 \cdot 10^{-15} \ .$$

(c) Si no es pot treballar amb molts dígits significatius l'ús directe de l'expressió té un problema de cancel·lació que no permet conèixer gaire xifres de la diferència. Treballant, per exemple, amb 12 dígits significatius s'obté:

$$D = \frac{1}{A} - \frac{1}{\bar{A}} = 4.95022425753 \cdot 10^{-8} - 4.95022401249 \cdot 10^{-8} = 0.00000024504 \cdot 10^{-8} = 2.4504 \cdot 10^{-15} \ .$$

Amb una fórmula millor, que evita la cancel·lacions, s'obté un resultat més precís:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{\bar{A}} = \frac{\bar{A} - A}{A\bar{A}} = \frac{-E}{A\bar{A}} = \frac{1}{A\bar{A}} = 2.45047189868 \cdot 10^{-15} \ .$$

Idees per a la solució. **[Sistemes lineals]**

(a) La matriu ampliada del sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{array}\right) .$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben les matrius ampliades:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) .$$

La solució del sistema lineal triangular superior resultant es troba per substitució enrera:

$$a_2 = 6 \ , \quad a_1 = -11 \ , \quad a_0 = 6 \ .$$

El polinomi interpolador és llavors:

$$p_2(x) = 6x^2 - 11x + 6 \ .$$

(b) Es parteix del sistema matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, en què la solució buscada $\mathbf{X}$ correspon a la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ i es va transformant fins a obtenir un sistema $(\mathbf{I}|\mathbf{X})$ que conté en la part estesa $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

S'escriuen els sistemes lineals corresponents en la matriu estesa

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben els sistemes lineals equivalents:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) ,$$

Es divideix cada filera per la diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) .$$

Aplicant eliminació gaussiana en els elements superiors a la diagonal es té:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) .$$

El sistema equivalent final és de la forma $(\mathbf{I}|\mathbf{X})$, la solució del qual és la matriu inversa buscada:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) .$$

Es pot comprovar que la solució trobada a l'apartat (a), coincideix amb:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

(c) Les iteracions del mètode de Jacobi s'escriuen així

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{(k)} .$$

Els dos primers iterats són:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix} .$$