

TEMA 4: Derivació i integració numèriques.

Problema 21 Els temps i les velocitats corresponents a un mòbil venen donats per la taula:

t	0	60	120	180	240	300
v	0.0	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.2229

Calculeu valors aproximats de l'acceleració en els instants $t = 0$, $t = 120$ i $t = 300$.

Problema 22 Considereu la taula següent corresponent a la funció $f(x) = xe^x$:

x	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
$f(x)$	2.7182	2.7730	2.8286	2.8850	2.9423	3.0005	3.0595

Aproximeu els valors de $f'(1.0)$, $f'(1.03)$ i $f'(1.06)$ emprant fórmules progressives, centrades i regressives de 3 punts.

Problema 23 La taula següent es construeix a partir de la funció $f(x) = xe^x$:

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x)$	10.8894	12.7032	14.7781	17.1490	19.8550

Aproximeu $f'(2)$ utilitzant diferències progressives, amb dos i tres punts, i fiteu els errors absoluts de les aproximacions obtingudes. Contrastu les aproximacions amb el valor exacte.

Problema 24 Sigui $f(x) = x^2 - e^x + e^{-x}$, es vol aproximar $f'(0.7)$.

- Treballant amb 8 decimals, useu la fórmula de les diferències finites centrada de primer ordre per aproximar $f'(0.7)$ amb $h = 10^{-i}$ per a $i = 1, 2, \dots, 5$.
- Si $F(h)$ és la fórmula anterior, es pot veure que

$$F(h) = f'(a) + a_0 h^2 + a_1 h^4 + \dots + a_n h^{2n+2} + \dots, \quad (a_j \neq 0).$$

Tenint en compte això i els resultats de l'apartat a), useu el mètode d'extrapolació de Richardson per obtenir una millor aproximació de $f'(0.7)$. Doneu els errors absoluts comparant amb el valor exacte de la derivada.

Problema 25 Es disposa de la taula de la funció \sqrt{x} amb 5 xifres decimals correctes:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
\sqrt{x}	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Utilitzeu aquesta informació per calcular $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x} dx$ mitjançant les regles compostes dels trapezis i de Simpson. Contrastu les aproximacions amb el valor exacte de la integral.

Problema 26 Per calcular una aproximació de la integral

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

amb cinc xifres decimals correctes, mitjançant la fórmula composta dels trapezis $T(h)$, quin valor d' h triaríeu?
