LÒGICA I LLENGUATGES

SOLUCIONS DE PROBLEMES

SETMANA DEL 1 DE MAIG

Exercici 1. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{1\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, 0, \lambda), (q_0, 1))$,

2.$((q_0, 0, \lambda), (q_0, 11))$,

3.$((q_0, \lambda, \lambda), (f, \lambda))$,

4.$((f, 1, 1), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que $\lambda, 011, 00111, 00011111 \in L(M)$.

(b) Demostrar que $0111 \notin L(M)$.

(c) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Solució : (a) Tenim que $\lambda \in L(M)$ per la transició 3.

El següent còmput reconeix 011:
vspace6mm

estat	cinta	pila	transició
q_0	011	λ	–
q_0	11	11	2
f	11	11	3
f	1	1	4
f	λ	λ	4

El següent còmput reconeix 00111.

estat	cinta	pila	transició
q_0	00111	λ	–
q_0	0111	11	2
q_0	111	111	1
f	111	111	3
f	11	11	4
f	1	1	4
f	λ	λ	4

El següent còmput reconeix 00011111.

estat	cinta	pila	transició
q_0	00011111	λ	–
q_0	0011111	11	2
q_0	011111	1111	2
q_0	11111	11111	1
f	11111	11111	3
f	1111	1111	4
f	111	111	4
f	11	11	4
f	1	1	4
f	λ	λ	4

(b) Tenim els següents còmputs per a 0111:

estat	cinta	pila	transició
q_0	0111	λ	–
q_0	111	1	1
f	111	1	3
f	11	λ	4

estat	cinta	pila	transició
q_0	0111	λ	–
q_0	111	11	2
f	111	11	3
f	11	1	4
f	1	λ	4

Com tenim que en cap dels dos còmputs es llegeix tota la paraula d'entrada, 0111 no és reconeguda per M.

(c) $L(M) = \{0^n 1^m : n \leq m \leq 2n\}$.

<u>Exercici 2</u>. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{c\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, a, \lambda), (q_0, c))$,
2.$((q_0, b, \lambda), (q_0, c))$,
3.$((q_0, a, \lambda), (f, \lambda))$,
4.$((f, a, c), (f, \lambda))$,
5.$((f, b, c), (f, \lambda))$.

Llavors, es demana:

(a) Demostrar que $baa, bab, baaaa \in L(M)$.

(b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Solució: (a) El següent còmput reconeix baa.

estat	cinta	pila	transició
q_0	baa	λ	–
q_0	aa	c	2
f	a	c	3
f	λ	λ	4

El següent còmput reconeix bab.

estat	cinta	pila	transició
q_0	bab	λ	–
q_0	ab	c	2
f	b	c	3
f	λ	λ	5

I el següent còmput reconeix baaaa.

estat	cinta	pila	transició
q_0	baaaa	λ	–
q_0	aaaa	c	2
q_0	aaa	cc	1
f	aa	cc	3
f	a	c	4
f	λ	λ	4

(b) $L(M) = \{xay : x, y \in \{a,b\}^* \text{ tals que } |x| = |y|\}$.

Exercici 3. Considerem l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, \lambda, \lambda), (q_1, c))$,

2.$((q_1, a, c), (q_1, ac))$.

3.$((q_1, a, a), (q_1, aa))$.

4.$((q_1, a, b), (q_1, \lambda))$.

5.$((q_1, b, c), (q_1, bc))$.

6.$((q_1, b, b), (q_1, bb))$.

7.$((q_1, b, a), (q_1, \lambda))$.

8.$((q_1, \lambda, c), (q_2, \lambda))$.

Llavors es demana:

(a) Demostrar que $\lambda, aabb, abbbabaa \in L(M)$.

(b) Descriure el llenguatge $L(M)$.

Solució: (a) El següent còmput reconeix λ.

estat	cinta	pila	transició
q_0	λ	λ	–
q_1	λ	c	1
q_2	λ	λ	8

El següent còmput reconeix aabb.

estat	cinta	pila	transició
q_0	aabb	λ	–
q_1	aabb	c	1
q_1	abb	ac	2
q_1	bb	aac	2
q_1	b	ac	7
q_1	λ	c	7
q_2	λ	λ	8

I el següent còmput reconeix abbbabaa.

estat	cinta	pila	transició
q_0	abbbabaa	λ	–
q_1	abbbabaa	c	1
q_1	bbbabaa	ac	2
q_1	bbabaa	c	7
q_1	babaa	bc	5
q_1	abaa	bbc	6
q_1	baa	bc	4
q_1	aa	bbc	6
q_1	a	bc	4
q_1	λ	c	4
q_2	λ	λ	8

Observem que el símbol c es un símbol especial que s'utilitza per a marcar la base de la pila.

(b) $L(M) = \{x \in \{a, b\}^* : n_a(x) = n_b(x)\}$.

Exercici 4. Definir un autòmat amb pila M tal que $L(M) = \{a^i b^j c^k : i = j \vee i = k\}$.

Solució: Definim l'autòmat amb pila $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2, q_4\}$ y Δ consta de les següents transicions:

1. $((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$.
2. $((q_0, \lambda, \lambda), (q_1, \lambda))$.
3. $((q_1, b, a), (q_1, \lambda))$.
4. $((q_1, \lambda, \lambda), (q_2, \lambda))$.

5. $((q_2, c, \lambda), (q_2, \lambda))$.
6. $((q_0, \lambda, \lambda), (q_3, \lambda))$.
7. $((q_3, b, \lambda), (q_3, \lambda))$.
8. $((q_3, \lambda, \lambda), (q_4, \lambda))$.
9. $((q_4, c, a), (q_4, \lambda))$.

Tenim que q_2 reconeix $\{a^i b^j c^k : i = j\}$, i q_4 reconeix $\{a^i b^j c^k : i = k\}$.

Exercici 5. Considerem l'autòmat amb pila determinista $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ on $K = \{q_0, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$ i Δ consta de les següents transicions:

1.$((q_0, a, \lambda), (q_0, a))$,
2.$((q_0, b, \lambda), (q_0, b))$,
3.$((q_0, c, \lambda), (f, \lambda))$,
4.$((f, a, a), (f, \lambda))$,
5.$((f, b, b), (f, \lambda))$.

Llavors, simular M mitjançant un programa en JAVA.

Solució: Representem a q_0 per 0 i a f per 1.

```
public boolean simular (String entrada)
{ int q = 0, i = 0;
  boolean b = true;
  char c = entrada.charAt(0);
  Stack ⟨Character⟩ pila = new Stack ⟨Character⟩();
  while ((c != '$') && b)
  { switch(q)
        { case 0:
        if (c == 'a') pila.push('a');
        else if (c == 'b') pila.push('b');
        else if (c == 'c') q = 1;
        else b = false;
        break;
        case 1:
        if ((c == 'a') && pila.peek() == a) pila.pop();
        else if ((c == 'b') && pila.peek() == b) pila.pop();
        else b = false;
        break; }
        c = entrada.charAt(++i); }
  if ((q == 1) && b) return true; else return false; }
```

Exercici 6. Considerem la gramàtica incontextual $G = (V, \Sigma, P, S)$ on $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ i $P = \{S \to ABC, A \to 0A1, A \to \lambda, B \to 1B, B \to 1, C \to 1C\,0, C \to \lambda\}$. Llavors, es demana:

(a) Donar derivacions per a les paraules 01110 i 0111100.

(b) Determinar el llenguatge $L(G)$.

Solució: (a) En primer lloc, enumerem les produccions de P:

1. $S \to ABC$
2. $A \to 0A1$
3. $A \to \lambda$
4. $B \to 1B$
5. $B \to 1$
6. $C \to 1C\,0$
7. $C \to \lambda$

Llavors, tenim les següents derivacions:

$S \Rightarrow^1 ABC \Rightarrow^2 0A1BC \Rightarrow^3 01BC \Rightarrow^5 011C \Rightarrow^6 0111C0 \Rightarrow^7 01110.$

$S \Rightarrow^1 ABC \Rightarrow^2 0A1BC \Rightarrow^3 01BC \Rightarrow^5 011C \Rightarrow^6 0111C0 \Rightarrow^6 01111C00 \Rightarrow^7 0111100.$

(b) Per la definició de llenguatge associat a una gramática, sabem que $L(G) = L(S)$. Llavors, per la regla 1, tenim que $L(G) = L(S) = L(A) \cdot L(B) \cdot L(C)$. Per les regles 2 i 3, tenim que $L(A) = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$. Per les regles 4 i 5, $L(B) = \{1^n : n \geq 1\}$. I per les regles 6 i 7, $L(C) = \{1^n 0^n : n \geq 0\}$. Per tant, $L(G) = \{0^n 1^m 0^k : m > n + k\}$.

Exercici 7. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

(a) El llenguatge de les paraules de longitut senar en $\{a, b\}^*$ amb a com a símbol central.

(b) El llenguatge de les paraules de longitut parell en $\{a, b\}^*$ amb dos símbols centrals iguals.

(c) El llenguatge de les paraules de longitut senar en $\{a, b\}^*$ que tenen iguales els símbols central, primer i últim.

Solució: (a) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aSa$
2. $S \to aSb$
3. $S \to bSa$

4. $S \to bSb$
5. $S \to a$

(b) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aSa$
2. $S \to aSb$
3. $S \to bSa$
4. $S \to bSb$
5. $S \to aa$
6. $S \to bb$

(c) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \to aAa$
2. $S \to bBb$
3. $A \to aAa$
4. $A \to aAb$
5. $A \to bAa$
6. $A \to bAb$
7. $A \to a$
8. $B \to aBa$
9. $B \to aBb$
10. $B \to bBa$
11. $B \to bBb$
12. $B \to b$

Exercici 8. Definir gramàtiques incontextuals que generin els següents llenguatges:

(a) $\{a^i b^i : i \geq 2\}$.
(b) $\{a^i b^j : i \geq j\}$.
(c) $\{a^i b^j : j \leq i \leq 2j\}$.
(d) $\{a^i b^j c^k : i = k\}$.
(e) $\{a^i b^j c^k : i = j + k\}$.
(f) $\{a^i b^j c^k : j = i + k\}$.

Solució:

(a) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow aaTbb$.
2. $T \rightarrow aTb$.
3. $T \rightarrow \lambda$.

(b) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow aS$
2. $S \rightarrow aSb$
3. $S \rightarrow \lambda$

(c) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow aSb$
2. $S \rightarrow aaSb$
3. $S \rightarrow \lambda$

(d) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow aSc$
2. $S \rightarrow B$
3. $B \rightarrow bB$
4. $B \rightarrow \lambda$

(e) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow aSc$
2. $S \rightarrow X$
3. $X \rightarrow aXb$
4. $X \rightarrow \lambda$

(f) Definim la gramàtica incontextual definida per les següents produccions:

1. $S \rightarrow XY$
2. $X \rightarrow aXb$
3. $X \rightarrow \lambda$
4. $Y \rightarrow bYc$
5. $Y \rightarrow \lambda$