Exercici 29. Siguin p, q dos nombres naturals primers diferents. Demostreu que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1(mod\, pq)$.

Solucio 29.

1. Sabem que, pel Petit Teorema de Fermat, sigui $a \in \mathbb{Z}$ no divisble per p i p primer, es compleix que $a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$, per tant com p i q, son dos primers, i son diferents cap d'ells es divisible per l'altre. I per tant, tenim que pel Petit Teorema de Fremat es compleix que $q^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$ i $p^{q-1} \equiv 1(mod\, q)$, d'aqui per la definicio de "ser congruent amb", sabem que $p|q^{p-1} - 1$, i $q|p^{q-1} - 1$.

2. Veure que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1(mod\, pq)$ equival a veure que $pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$. Com $p|q^{p-1} - 1$ i $p|p^{q-1}$, $\implies p|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$. TambÃ© podem veure que $q|p^{q-1} - 1$ i $q|q^{p-1}$, $\implies q|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

3. Per tant, com p i q son dos nombres primers, es compleix que $pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$. Com $p|q^{p-1} - 1$ i $p|p^{q-1}$ i per tant, $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1(mod\, pq)$.