Matrius i Vectors
Grupo Tarde
Examen final, problemas

Enero 2013

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (2,1,5,-2),(3,2,6,0) >, \quad G =< (1,3,2,1),(2,4,3,3) >$$

y H, dado por las ecuaciones

$$x+y+z-2t=0, \quad 2x-y-2z+4t=0, \quad x-y-z-t=0.$$

Se pide calcular ecuaciones, una base y la dimensión de $(F\cap G)+H$.

2.- Se considera una matriz A, 4×4, con columnas A_1, A_2, A_3, A_4, $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, y se pide:

a) Calcular $\det(A_4, A_3, A_2, A_1) - \det(A_3, A_1, A_4, A_2)$ en función de $\det(A)$.

b) Demostrar que si $A' = (A_1, A_2, A_3, A_4')$ es una matriz 4×4 con las mismas tres primeras columnas que A, entonces $\det(A) = \det(A')$ si y sólo si $A_1, A_2, A_3, A_4 - A_4'$ son linealmente dependientes.

3.- a) Determine para qué valores de a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 10 & 5 & 10 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcule dicha inversa en caso de existir.

b) Fijada en un espacio vectorial E una base (e_1, e_2, e_3), se considera el endomorfismo f de E que tiene matriz M (definida en el apartado anterior) en dicha base. Se pide calcular, según los valores de a, el núcleo y la imagen de f y determinar en cada caso si existe alguna relación de inclusión entre ellos.

4.- Si f, g son aplicaciones lineales entre espacios vectoriales,

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow F \\ g &: F \longrightarrow G, \end{aligned}$$

demuestre que:

a) $\ker g \supset \operatorname{Im} f$ si y sólo si $g \circ f = 0$

b) Supuestos $v_1, \ldots, v_r \in E$ linealmente independientes, si

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \cap \ker f = \{0\},$$

entonces $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ son también linealmente independientes.