LÒGICA I LLENGUATGES

CURSO 2021-22

SEGUNDA PRUEBA PARCIAL (Grupo B)

(a) Consideremos el vocabulario $\sigma = \{a, b, P^1, Q^1, R^2\}$ y la $\sigma$-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $I(a) = 2$, $I(b) = 5$,
- $I(P) = \{2, 5\}$,
- $I(Q) = \{3, 4, 5\}$,
- $I(R) = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $Pa \wedge \neg Rab$,
(2) $\forall x(Rxx \to Qx)$,
(3) $\forall x(Px \vee Qx \vee Rxx)$,
(4) $\forall x \exists y Rxy$,
(5) $\exists x \forall y(Rxy \vee Ryx)$.

(7,5 puntos)

(b) Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1 = \forall x \exists y(Bx \to Ty)$,
$\varphi_2 = \exists x Bx$,
$\varphi_3 = \neg \exists x(Tx \wedge Cx)$,
$\varphi = \exists x \neg Cx$.

(1) Calcular formas clausales de $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ y $\neg\varphi$.

(2) Demostrar por resolución que $\varphi$ es consecuencia lógica de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

(2,5 puntos)

SOLUCIÓN:

(a)

$\boxed{Pa \wedge \neg Rab}$

Es verdadera, ya que $\overline{P}\overline{a} \wedge \neg \overline{R}\overline{a}\overline{b} = \overline{P}2 \wedge \neg \overline{R}25 = V \wedge V = V$.

$\boxed{\forall x(Rxx \to Qx)}$

Es falsa, ya que no es verdad que para todo $n \in \{1,2,3,4,5\}$, $\overline{R}nn = V$ implica que $\overline{Q}n = V$. Por ejemplo, tomando $n = 1$, tenemos que $\overline{R}11 = V$ pero $\overline{Q}1 = F$.

$\boxed{\forall x(Px \vee Qx \vee Rxx)}$

Es verdadera. La fórmula expresa que para todo $n \in \{1,2,3,4,5\}$, $\overline{P}n = V$ o $\overline{Q}n = V$ o $\overline{R}nn = V$. Tenemos que $\overline{R}11 = V$, $\overline{P}2 = V$, y para $n \in \{3,4,5\}$ $\overline{Q}n = V$.

$\boxed{\forall x \exists y Rxy}$

Es verdadera. La fórmula expresa que para todo $n \in \{1,2,3,4,5\}$ existe un $m \in \{1,2,3,4,5\}$ tal que $\overline{R}nm = V$. Y tenemos que $\overline{R}11 = V$, $\overline{R}22 = V$, $\overline{R}34 = V$, $\overline{R}43 = V$ y $\overline{R}55 = V$.

$\boxed{\exists x \forall y(Rxy \vee Ryx)}$

Es falsa. La fórmula expresa que existe un $n \in \{1,2,3,4,5\}$ tal que para todo $m \in \{1,2,3,4,5\}$, $\overline{R}nm = V$ o $\overline{R}mn = V$. Para $n = 1$ tomamos $m = 2$ y tenemos entonces que $\overline{R}12 = F$ y $\overline{R}21 = F$. Para $n = 2$ tomamos $m = 1$, y tenemos entonces que $\overline{R}21 = F$ y $\overline{R}12 = F$. Para $n = 3$ tomamos $m = 1$ , y tenemos que $\overline{R}31 = F$ y $\overline{R}13 = F$. Para $n = 4$ tomamos de nuevo $m = 1$ , y tenemos que $\overline{R}41 = F$ y $\overline{R}14 = F$. Y para $n = 5$ tomamos $m = 2$, y tenemos que $\overline{R}52 = F$ y $\overline{R}25 = F$.

(b) (1) Tenemos:

$(\varphi_1)^{cl} = \forall x(\neg Bx \vee Tf(x))$,<br>
$(\varphi_2)^{cl} = Ba$,<br>
$(\varphi_3)^{cl} = \forall x(\neg Tx \vee \neg Cx)$,<br>
$(\neg\varphi)^{cl} = \forall x Cx$.

(2) Tenemos que considerar las cláusulas que aparecen en los núcleos de las formas clausales anteriores:

$\neg Bx \vee Tf(x)$,

$Ba$,

$\neg Tx \vee \neg Cx$,

$Cx$.

Recordemos que cuando se aplica el algoritmo de resolució, tenemos que renombrar las variables que se repiten en las cláusulas. Entonces, reemplazamos $\neg Tx \vee \neg Cx$ por $\neg Ty \vee \neg Cy$, y reemplazamos $Cx$ por $Cz$. Por tanto, tenemos las siguientes entradas para la resolución:

1. $\neg Bx \vee Tf(x)$.
2. $Ba$.
3. $\neg Ty \vee \neg Cy$
4. $Cz$.

Resolviendo 1 y 2, obtenemos:

5. $Tf(a)$ (tomando $\{x = a\}$).

A continuación, resolviendo 3 y 5, obtenemos:

6. $\neg Cf(a)$ (tomando $\{y = f(a)\}$).

Finalmente, resolviendo 4 y 6, obtenemos:

7. $\square$ (tomando $\{z = f(a)\}$).