Matrius i Vectors
Grupo Mañana
Examen final, problemas

Enero 2015

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (0,1,0,1),(2,1,2,1),(1,0,1,0) >$$

y G, dado por las ecuaciones

$$x - y + z - t = 0, \quad y - z = 0.$$

Se pide calcular bases de F y G y determinar, mediante una base o ecuaciones independientes, $F \cap G$ y $F + G$, explicitando la dimensión de cada uno de los cuatro subespacios.

2.- Sean F, G y H subespacios de un espacio vectorial E que satisfacen $(F + G) \cap H = \{0\}$. Se pide:

a) Probar que $F \cap H = 0$ y $G \cap H = 0$.

b) Determinar $\dim(F+G+H)$ en función de $\dim F$, $\dim G$, $\dim H$ y $\dim F \cap G$.

c) Demostrar que si $e_1, \ldots, e_r$ es base de F, $v_1, \ldots, v_s$ es base de G, y $w_1, \ldots, w_k$ es base de H y $F \cap G = 0$, entonces $e_1, \ldots, e_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_k$ es base de $F + G + H$.

3.-

a) Se considera la matriz

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

donde a es un número real. Se pide determinar los valores de a para los que la matriz M_a es regular y calcular para los mismos M_a^{-1} y $(M_a^t)^{-2}$.

b) Se consideran un espacio vectorial E de dimensión tres, una base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E y el endomorfismo

$$f_a : E \longrightarrow E$$

que tiene matriz M_a en base $\mathcal{E}$. Se pide determinar en función de a, mediante una base o un sistema de ecuaciones independientes, el núcleo y la imagen de f_a, así como los valores de a para los que $\mathrm{Im}(f_a) \subset \ker(f_a^2)$.

4.- Sean f y g endomorfismos de un espacio vectorial E,

$$f, g : E \longrightarrow E,$$

y sean M y N sus respectivas matrices relativas a una base $e_1, \ldots, e_n$ de E. Se pide demostrar que:

a) $F = \{v \in E | f(v) = g(v)\}$ es un subespacio de E.

b) $F \neq \{0\}$ si y sólo si $\det(M - N) = 0$.