LLISTA 7

Trobar matriu inversa

Per trobar-la, igualem la matriu a la identitat i la reduïm a la matriu identitat, per obtenir:

$$(A \mid Id) \longrightarrow (Id_n \mid A^{-1})$$

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{R}}: \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Observem que, en aquest cas, per aconseguir el triangle de zeros inferior, hem de multiplicar la fila inferior i restar-la a la superior, per tant ens van quedant potències d'a negatives

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a & -a^2 & \cdots & -a^{n-2} & -a^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & \cdots & -a^{n-3} & -a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Producte de matrius elementals

És la manera d'expressar una matriu amb el producte d'altres matrius.

⚠ Per a poder-ho fer, la matriu ha de ser de rang màxim, perquè així serà invertible.

Passos a seguir:

i) trobar la inversa (apuntant les transformacions que anem fent).

ii) trobar les transformacions inverses a

iii) cada transformació inversa aplicar-la a la Id per obtenir tantes matrius elementals com transformacions inverses tenim.

iv) La matriu que busquem serà el producte de les matrius obtingudes.

⚠ L'ordre importa ⚠

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ És rang màxim? $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ sí

i) trobem la inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3' = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3'' = F_3'/-3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1''' = F_1'' - 9F_3'']{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

ii) TRANSF $F_3 - F_1$ $F_3/-3$ $F_1 - 9F_3$

TRANS. INV. $F_3 + F_1$ $F_3 \cdot (-3)$ $F_1 + 9F_3$

iii) IDE. TRANS. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Demostrar que uns vectors formen una base B' tenint la base B.

Ens donen una base $B=(e_1, e_2, e_3)$ d'un espai vectorial E i vectors en funció d'e_1, e_2, e_3.

i) Comprovem que siguin l. independents.

ii) Expressem un vector en les dues bases.

Es veu més clar en un exemple.

Ex. $V_1 = e_1 - e_2 \quad V_2 = e_2 - e_3 \quad V_3 = e_1 + e_3$

i) Comprovem la independència lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ V són l. indep.

Són doncs base, perquè la dimensió és 3.

Trobar la matriu que canvia components en base B en components en base B'.

La matriu formada per V_1, V_2, V_3 canvia components de base B' a base B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma = a \\ -\alpha + \beta = b \\ -\beta + \gamma = c \end{pmatrix}$$

on (a, b, c) són les co— del vector en base B.

Per tant, la que canviarà components en base B en comp. en base B' serà la inversa d'aquesta.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

R: $1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu

Calcular les components en base B' amb la matriu

$e_1 - e_2 + 2e_3$ en base B'

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1+1-2=0 \\ 1-1-2=-2 \\ 1-1+2=2 \end{matrix}$$

Les components són 0, -2, 2