1. Sigui z un nombre enter, considera les següents propietats de z expressades amb símbols:

$$\forall p \in \mathbb{Z}(z \neq 6p+2) \wedge \forall q \in \mathbb{Z}(z \neq 6q-1) \tag{1}$$

$$\neg \exists s(s \in \mathbb{Z} \wedge z = 3s+2) \tag{2}$$

(a) Expressa amb símbols les negacions de (1) i de (2), sense que apareguin les expressions $\neg\forall$ i $\neg\exists$.

(b) Expressa les negacions obtingudes a l'apartat anterior en llenguatge informal, de la forma més entenedora possible.

(c) Demostra per contrarecíproc que si z compleix (1), aleshores z compleix (2).

Solució. (a)

$$\neg(\forall p \in \mathbb{Z}(z \neq 6p+2) \wedge \forall q \in \mathbb{Z}(z \neq 6q-1)) \equiv$$

$$\exists p \in \mathbb{Z}(z = 6p+2) \vee \exists q \in \mathbb{Z}(z = 6q-1)$$

$$\neg(\neg \exists s(s \in \mathbb{Z} \wedge z = 3s+2)) \equiv \exists s(s \in \mathbb{Z} \wedge z = 3s+2)$$

(b) $\neg(1)$: O bé existeix un nombre enter p tal que $z = 6p+2$ o bé existeix un nombre enter q tal que $z = 6q-1$.

$\neg(2)$: Existeix un nombre enter s tal que $z = 3s+2$.

(c) Suposem que (2) és fals, i el nostre objectiu és arribar a veure que la hipòtesi, (1) també és falsa.

Tenim que existeix $s \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 3s+2$. Volem trobar p o q enters que satisfacin que o bé $z = 6p+2$ o bé $z = 6q-1$, però encara no sabem qui són ni si existeixen. Per trobar-los, farem casos segons la paritat de s.

- Si s és parell, aleshores existeix un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s = 2k$.

$$z = 3s+2 = 6k+2 \implies \exists p(=k) \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z = 6p+2.$$

- Si s és senar, aleshores existeix un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s = 2k+1$.

$$z = 3s+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+5 = 6(k+1)-1 \implies \exists q(=k+1) \text{ tal que } z = 6q-1.$$

Com que els casos s parell i s senar cobreixen totes les possibilitats, ja hem vist que sempre estarem en una de les dos opcions i per tant queda negat (1) i completat el contrarecíproc.

$\square$

2. Adoptem la definició que dues rectes del pla són *paral·leles* quan no tenen cap punt en comú. Demostra per reducció a l'absurd que dues rectes del pla diferents, ambdues perpendiculars a una altra recta, són paral·leles.

Nota: Pots utilitzar que la suma dels angles d'un triangle és sempre 180^o.

Solució. Volem demostrar el següent enunciat:

$$r \text{ i } s \text{ rectes perpendiculars a una altra recta } t \implies r \text{ i } s \text{ són paral·leles}$$

Ho demostrem per reducció a l'absurd, per tant suposem que les rectes r i s no són paral·leles però segueixen sent perpendiculars a la recta t. Per la definició de rectes paral·leles de l'enunciat, existeix un punt A en comú de les rectes r i s.

Construïm un triangle amb aquest punt A i els dos punts de tall de les rectes r i s amb la recta t, B i C. Els angles dels vèrtexs B i C són de 90^o ja que les rectes r i s són perpendiculars a t. Per tant,

$$180 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + 90 + 90 \implies \hat{A} = 0$$

És una contradicció ja que un angle d'un triangle no pot mesurar 0^o. Per tant, hem demostrat que si dues rectes són perpendiculars a una tercera recta, aleshores aquestes dues rectes són paral·leles. $\square$

3. Demostra que no existeixen enters n i m tals que $3m + 15n = 64$.

Solució. Ho farem per reducció a l'absurd. Suposem que existeixen $n, m \in \mathbb{Z}$ tals que $3m + 15n = 64$.

$$3m + 15n = 64 \implies 3(m + 5n) = 64 = 2^6$$

Com que 3 és primer, de la igualtat anterior deduïm que $3 \mid 2^6$. Això és una contradicció ja que el nombre 2^6 no és divisible per 3 (ho veiem observant la factorització en nombres primers). $\square$