1. (2 pts) L'acceleració a que experimenten les dues masses m_1 i m_2 d'una màquina de Atwood ve donada per l'expressió

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

on $g = 9.81\ m/s^2$ és la constant gravitatòria. Suposeu que $m_1 = 100 \pm 1$ grams i $m_2 = 50 \pm 1$ grams.

(a) Useu la fórmula de propagació de l'error per donar una estimació de l'error absolut en el càlcul de l'acceleració a usant la fòrmula (1).

(b) Feu el càlcul de l'acceleració usant aritmètica intervalar i doneu l'interval on pertany a.

Solució:

(a) Si $m_i = \bar{m}_i \pm \varepsilon(m_i)$, $i = 1, 2$, aleshores tenim $\bar{m}_1 = 100$, $\bar{m}_2 = 50$, $\varepsilon_a(m_1) = \varepsilon_a(m_2) = 1$. Considerant l'acceleració a com a funció de dues variables $a = a(m_1, m_2)$ i aplicant la fòrmula de propagació de l'error tenim que:

$$\varepsilon_a(a) \approx \left(\left| \frac{\partial a}{\partial m_1}(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \right| \varepsilon_a(m_1) + \left| \frac{\partial a}{\partial m_2}(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \right| \varepsilon_a(m_2) \right).$$

Donat que

$$\frac{\partial a}{\partial m_1}(\bar{m}_1, \bar{m}_2) = \frac{2g\bar{m}_2}{(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)^2} = g \cdot 100/150^2, \qquad \frac{\partial a}{\partial m_2}(\bar{m}_1, \bar{m}_2) = \frac{-2g\bar{m}_1}{(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)^2} = g \cdot (-200)/150^2,$$

obtenim

$$\varepsilon_a(a) \approx g/75 = 9.81/75 = 0.1308.$$

(b) Tenim $m_1 \in [99, 101]$, $m_2 \in [49, 51]$, d'on $m_1 - m_2 \in [48, 52]$ i $m_1 + m_2 \in [148, 152]$. Així,

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \in \left[\frac{6}{19}, \frac{13}{37} \right] \Rightarrow a \in [3.0978, 3.4468].$$

2. (3.5 pts) Considerem el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} 0.986x_1 + 0.579x_2 & = & 0.235 \\ 0.409x_1 + 0.237x_2 & = & 0.107 \end{array}\right\}$$

i denotem per $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriu corresponent i per $b \in \mathbb{R}^2$ el terme independent.

(a) Trobeu la factorització LU de la matriu A usant aritmètica de punt flotant amb 3 dígits significatius i arrodoniment.

(b) Es proposa el següent procediment per a obtenir una aproximació de la solució del sistema $Ax = b$:

i. Resoleu el sistema $Ax = b$ usant la factorització LU de l'apartat (a) i aritmètica de punt flotant amb 3 dígits significatius i arrodoniment. Denotem per $\hat{x}$ la solució obtinguda.

ii. Calculeu el vector residu corresponent a l'aproximació $\hat{x}$ fent les operacions corresponents amb aritmètica "exacte" (amb tots els dígits que us proporciona la calculadora). Sigui r el vector residu obtingut representat amb 3 dígits significatius i arrodoniment.
NOTA: S'obté $r = (-1.00 \times 10^{-2}, -4.70 \times 10^{-3})^\top$.

iii. Resoleu el sistema $Ay = r$ usant la factorització LU de l'apartat (a) i aritmètica de punt flotant amb 3 dígits significatius i arrodoniment. Denotem per $\hat{y}$ la solució obtinguda.

iv. Calculeu l'aproximació $x = \hat{x} + \hat{y}$ de la solució del sistema lineal $Ax = b$ i el residu corresponent.

Solució:

(a) Usant fl_3 (punt flotant amb 3 dígits significatius amb arrodoniment) fem un pas d'el·liminació gaussiana i obtenim:

$$m_{21} = \frac{0.409}{0.986} = 0.415, \qquad a_{22}^{(1)} = 0.237 - 0.415 \cdot 0.579 = 0.237 - 0.240 = -0.00300,$$

d'on

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.415 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0.986 & 0.579 \\ 0 & -0.00300 \end{pmatrix}.$$

(b) Comencem calculant $\hat{x}$. Tenim $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Lz = b,\ Ux = z$. Per tant, resolem $Lz = b$ per substitució endavant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.415 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.235 \\ 0.107 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0.235, \\ z_2 = 0.107 - 0.415 \cdot 0.235 = 0.107 - 0.0975 = 0.00950. \end{cases}$$

i resolem $Ux = z$ per substitució enrera:

$$\begin{pmatrix} 0.986 & 0.579 \\ 0 & -0.00300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.235 \\ 0.00950 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{0.00950}{-0.00300} = -3.17, \\ x_1 = \frac{0.235 - 0.579 \cdot -3.17}{0.986} = \frac{2.08}{0.986} = 2.11. \end{cases}$$

Obtenim $\hat{x} = (2.11, -3.17)^\top$ de manera que

$$r = fl_3(b - A\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0.235 \\ 0.107 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.986 & 0.579 \\ 0.409 & 0.237 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.11 \\ -3.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0100 \\ -0.00470 \end{pmatrix}$$

Per calcular $\hat{y}$ procedim com abans. Resolem $Lz = r$ per substitució endavant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.415 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0100 \\ -0.00470 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -0.0100, \\ z_2 = -0.00470 - 0.415 \cdot (-0.0100) = 0.107 - 0.0975 = 0.000550. \end{cases}$$

Resolem $Uy = z$ per substitució enrera:

$$\begin{pmatrix} 0.986 & 0.579 \\ 0 & -0.00300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0100 \\ -0.000550 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{-0.000550}{-0.00300} = 0.183, \\ y_1 = \frac{-0.0100 - 0.579 \cdot 0.183}{0.986} = \frac{-0.116}{0.986} = -0.118. \end{cases}$$

Així,

$$x = \hat{x} + \hat{y} = \begin{pmatrix} 0.235 \\ 0.107 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.118 \\ 0.183 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.99 \\ -2.99 \end{pmatrix}, \qquad \text{i el residu és} \quad b - Ax = \begin{pmatrix} 0.00407 \\ 0.00172 \end{pmatrix}.$$

Explicació: Notem que x és millor aproximació que $\hat{x}$. Es poden obtenir millors aproximacions com s'ha fet de forma iterativa, resolent el sistema amb el residu adequat a cada pas, de forma que tinguem la solució del sistema amb la precisió que estem treballant (en l'exercici: 3 dígits significatius). Cal però fer el càlcul del residu amb precisió més gran (requereix només $\mathcal{O}(n^2)$ flops) que el càlcul de les solucions dels sistemes (que requereixen $\mathcal{O}(n^3)$ flops).

3. (1.5 pts) Siguin

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usant el mètode de Gauss amb pivotatge maximal per columnes, i fent les operacions amb 2 xifres significatives i arrodoniment, calculeu $z = u^\top B^{-1} v$, sense calcular la inversa de la matriu B.

Solució: Es suficient resoldre $Bx = v$ i calcular $u^\top \cdot x$. Per a resoldre $Bx = v$ usant Gauss amb pivotatge, considerem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Pivotem fila 2 $\leftrightarrow$ fila 1, i fem un pas de Gauss amb $m_{21} = 0.33$, $m_{31} = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0.68 & 1.0 & -0.33 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Pivotem fila 3 $\leftrightarrow$ fila 2, i fem un pas de Gauss amb $m_{32} = 0.23$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.080 & -0.33 \end{array}\right)$$

Obtenim $x = (1.2, 5.5, -4.1)^\top$ i $z = u^\top x = 2.6$.

Observació: Si fem els càlculs "exactes" surt $z = 2$.

4. (1.5 pts) Donat $\alpha \neq 0$, considerem el mètode iteratiu de Jacobi per a resoldre el sistema $Ax = b$ on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per a quins valors de $\alpha \neq 0$ podem garantir que el mètode de Jacobi convergeix?

(b) Considereu $\alpha = 3$ i $x^{(0)} = (0, 0)^\top$. Calculeu l'iterat $x^{(3)}$ del mètode de Jacobi.

Solució:

(a) La matriu d'iteració del mètode de Jacobi és

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

que té valors propis $\lambda = \pm 1/\sqrt{2\alpha}$. Cal $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1/2$.

(b) Tenim $c_J = (0, 1/3)^\top$ i la iteració de Jacobi s'escriu com

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J.$$

Llavors, $x^{(0)} = (0, 0)^\top$, $x^{(1)} = c_J$, $x^{(2)} = B_J x^{(1)} + c_J = (1/6, 1/3)^\top$, i $x^{(3)} = B_J x^{(2)} + c_J = (1/6, 7/18)^\top$.

5. (1.5 pts) Trobeu l'ajust mínim quadràtic de les dades

x	0	0.5	1.0	1.5
y	5.02	5.21	6.49	9.54

per una corba de la forma $y = ae^x + be^{-x}$.

Solució:

Tenim que resoldre el sistema sobredeterminat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{1/2} & e^{-1/2} \\ e^{1/2} & e^{-1/2} \\ e & e^{-1} \\ e^{3/2} & e^{-3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.02 \\ 5.21 \\ 6.49 \\ 9.54 \end{pmatrix}$$

Denotem per F la matriu del sistema anterior i per y el terme independent. Plantegem les equacions normals:

$$F^\top F = \begin{pmatrix} 1 + e + e^2 + e^3 & 4 \\ 4 & 1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-4}}{1-e} & 4 \\ 4 & \frac{1-e^{-4}}{1-e^{-1}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 31.19 & 4 \\ 4 & 1.553 \end{pmatrix}$$

$$F^\top y = \begin{pmatrix} 74.007 \\ 12.696 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema d'equacions normals

$$F^\top F x = F^\top y$$

s'obté $x = (a, b)^\top \approx (1.977, 3.083)^\top$.