Exercici 20.

Demostreu que no existeix cap polinomi no constant $f(x) \in Z[x]$ tal que $f(a)$ sigui primer per a tot $a \in \mathbb{Z}$.

Solució 20.

Sigui $f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots\cdots + A_nx^n$ on $n \in \mathbb{N}$ i $A_i \in \mathbb{Z}\ \forall i\ 1 \leq i \leq n$ una funció no constant, és a dir, $1 \leq n$ i $A_n \neq 0$

Si A_0 no és primer, s'observa clàrament què $f(0) = A_0 \Rightarrow$ existeix un $a = 0$ enter tal què $f(a)$ no és primer.

Si A_0 és primer:

Tenim què $f(A_0) = A_0 + A_1A_0 + A_2(A_0)^2 + \cdots\cdots + A_n(A_0)^n$
$= A_0(1 + A_1 + A_2(A_0)^1 + \cdots\cdots + A_n(A_0)^{n-1})$
Observem què $A_0|f(A_0)$. Per tant, si $f(A_0)$ és primer, solament és possible si $f(A_0) = A_0$

Aplicant aquest raonament també podem deduir què si $f(A_0z)$, per a qualsevol z tal què $z \in \mathbb{Z}$, sigui primer, implicaria què $f(A_0z) = A_0$, ja què podriem extraure factor comú d'A_0

Tenim què $f(zA_0) = A_0 + zA_1A_0 + A_2(zA_0)^2 + \cdots\cdots + A_n(zA_0)^n$
$= A_0(1 + zA_1 + zA_2(A_0)^1z^2 + \cdots\cdots + zA_n(A_0)^{n-1}z^n)$

Com s'observa $A_0|f(zA_0)$. Per tant, si $f(zA_0)$ és primer, solament és possible si $f(zA_0) = A_0$, $\forall z \in \mathbb{Z}$.

Observem què $f(x)$ ha de ser una funció constant, si volem que es cumplisca que $f(x)$ sigui primer per a tot $x \in \mathbb{Z}$. Tenint en compte què $gr(f(x)) = gr(f(zA_0) - A_0)$ com $f(zA_0) - A_0$ té infinits arrels, això implica que és una funció polinòmica constant, ja què una funció polinòmica de grau n té com a màxim n arrels.

Amb els dos casos hem demostrat que no existeix cap polinomi no constant $f(x) \in Z[x]$ tal que $f(a)$ sigui primer per a tot $a \in \mathbb{Z}$.