Tots els espais vectorials es suposen amb una base finita.

11.1 Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definides per

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 0) \qquad g : (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y).$$

(i) Trobeu les matrius de f, g i de les composicions $g \circ f$ i $f \circ g$.

(ii) Comproveu que $\operatorname{Nuc} f \subset \operatorname{Nuc}(g \circ f)$ i que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$. Són estrictes aquestes inclusions?

11.2 Fixada una base en un espai vectorial E de dimensió tres, es considera l'endomorfisme f de E de matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ i $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

11.3 Fixada una base en un espai vectorial E de dimensió quatre, es considera l'endomorfisme f de E de matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ i $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

11.4 Fixada una base en un espai vectorial E de dimensió tres, es considera l'endomorfisme f de E de matriu

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Determineu per a quins valors de a no és injectiu i calculeu-ne el nucli en aquests casos. Demostreu que per als restants valors de a, f és un isomorfisme i calculeu la matriu del seu invers.

11.5 Demostreu que si f i g són aplicacions lineals,

$$\begin{aligned} f &: E \to F \\ g &: F \to G, \end{aligned}$$

llavors $\operatorname{Nuc} f \subset \operatorname{Nuc}(g \circ f)$ i $\operatorname{Im} g \supset \operatorname{Im}(g \circ f)$.

11.6 Demostreu que si f és un endomorfisme d'un espai vectorial E, llavors $\operatorname{Nuc} f \supset \operatorname{Im} f$ si i només si $f^2 = 0$.

11.7 Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 0, 1))$ i $((3, 1), (2, 0))$ són bases de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament, i trobeu la matriu de f en aquestes bases.

11.8 Sigui (v_1, v_2, v_3) una base de d'un espai vectorial E i sigui $f : E \to E$ un endomorfisme que compleix

$$v_1 + v_2 \in \operatorname{Nuc} f, \quad f(v_3) = v_1, \quad \text{i} \quad f(v_1) = v_1 + v_2.$$

(i) Trobeu la matriu de f en la base (v_1, v_2, v_3).

(ii) Calculeu $f(4v_1 - v_2 + 2v_3)$.

(iii) Calculeu el nucli i la imatge de f.

11.9 Demostreu que si f és un endomorfisme d'un espai vectorial E, llavors $\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$ si, i només si, $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f^2$.

11.10 Demostreu que si f és un endomorfisme d'un espai vectorial E, llavors $E = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$ si, i només si, $f = f^2$.

11.11 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal de matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a & 0 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Determineu $\operatorname{Nuc} f$ i $\operatorname{Im} f$, segons els valors dels paràmetres a i b. Demostreu que per a qualssevol valors dels paràmetres a i b, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$.

11.12 Doneu exemples d'aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que compleixin cadascuna de les condicions següents (si n'existeixen):

(i) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Nuc} f$;

(ii) $\operatorname{Nuc} f \subset \operatorname{Im} f$;

(iii) $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f$;

(iv) $\operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

11.13 Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial de dimensió $2n$. Demostreu que

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \ \text{ i } \ \operatorname{rg} f = n.$$

11.14 1) Siguin E_1, E_2, E_3 espais vectorials, $f : E_1 \to E_2$ i $g : E_2 \to E_3$ aplicacions lineals. Demostreu que

$$\dim \operatorname{Nuc}(g \circ f) = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim(\operatorname{Nuc} g \cap \operatorname{Im} f).$$

2) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E. Demostreu que, per a tot enter positiu r,

$$\dim \operatorname{Nuc} f \leq \dim \operatorname{Nuc} f^r \leq r \dim \operatorname{Nuc} f.$$

11.15 Siguin E un espai vectorial de dimensió n, f un endomorfisme de E. Esbrineu quines de les següents afirmacions són certes i quines no ho són. Demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que siguin falses.

(i) $\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$.

(ii) $\dim(\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f) \leq n/2$.

(iii) $\dim(\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f) = n - \dim(\operatorname{Nuc} f + \operatorname{Im} f)$.

11.16 Siguin E_1, E_2, E_3 espais vectorials, $f : E_1 \to E_2$ i $g : E_2 \to E_3$ aplicacions lineals. Demostreu que

1) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Nuc} g \Leftrightarrow g \circ f = 0$

2) Si $v_1, v_2, \ldots, v_r$ són vectors linealment independents de E_1 i $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle \cap \operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)$ són també linealment independents.

11.17 Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E. Sabem que existeix un vector v de E tal que $f(v) \neq \vec{0}$ i $f^2(v) = \vec{0}$. Proveu que

1) $\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{\vec{0}\}$;

2) $\operatorname{Nuc} f + \operatorname{Im} f \neq E$.

11.18 Siguin f i g endomorfismes d'un espai vectorial E i siguin M i N les seves matrius respectives en una base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Demostreu que

(i) $F = \{v \in E \mid f(v) = g(v)\}$ és un subespai vectorial de E.

(ii) $F \neq \{\vec{0}\}$ si, i només si, $\det(M - N) = 0$.

11.19 Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ vectors de $\mathbb{R}^n$, linealment independents, $v_j = (a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^n)$. Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x^1, x^2, \ldots, x^n) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & x^1 \\ a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_{n-1}^n & x^n \end{pmatrix}. \end{array}$$

Proveu que f és lineal, determineu $\operatorname{Nuc} f$ i proveu que f és exhautiva.

11.20 Siguin E_1, E_2 espais vectorials, $f : E_1 \to E_2$ una aplicació lineal i $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vectors de E_1, linealment independents. Proveu que

(i) $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)$ són linealment independents si, i només si $\operatorname{Nuc} f \cap \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle = \{\vec{0}\}$;

(ii) $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)$ generen $\operatorname{Im} f$ si, i només si $E_1 = \operatorname{Nuc} f + \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$;

(iii) $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)$ formen base de $\operatorname{Im} f$ si, i només si $E_1 = \operatorname{Nuc} f \oplus \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$.