LÒGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges de proposicions

Exercici 1. Determineu quines de les les següents expressions són fórmules proposicionals.

a) $R \vee S$
b) P
c) $PQ \to P)$
d) $(\neg P) \to P$
e) $\neg S \neg Q$
f) $S \leftrightarrow (\neg T)$
g) $(P \vee Q) \to \neg R$
h) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
i) $P \neg Q$
j) $((P \vee) \wedge Q)$
k) $\neg(P \to Q) \wedge \neg R$
l) $\vee P \wedge Q$
m) $P \vee (Q \neg R)$
n) $P \wedge (Q \vee R)$
o) $(P \vee Q) \wedge R$
p) $(P \to Q) \wedge (S \to R)$
q) $P \neg\neg(Q \to R)$
r)$\neg(\neg R \to (S \vee P))$

Exercici 2. Formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. O està plovent i nevant, o fa vent.
2. No he vist la pel·lícula, però he llegit la novel·la.
3. Ni he vist la pel·lícula, ni he llegit la novel·la.
4. Si estudio i treballo, aprovo.
5. Si bec cafè, no m'adormo; i si no (no en bec), sí (m'adormo).
6. Si tinc mal de cap, me'n vaig a nedar o a dormir (però no les dues coses).
7. Quan menjo molt i faig la migdiada, em costa llevar-me i estic de mal humor.
8. Si faig la migdiada i em costa llevar-me, estic de mal humor si menjo molt.

Exercici 3. Formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. Et mulles quan plou.
2. Una relació és d'equivalència si i només si és reflexiva, simètrica i transitiva.
3. Es podrà curar el càncer quan es determini la seva causa i es trobi un nou medicament adequat.
4. Es necessita coratge i habilitat per escalar una muntanya.
5. El motor s'engega si la bateria està carregada
6. El motor s'engega només si la bateria està carregada
7. Si vaig en cotxe, trobo aparcament si arribo aviat
8. Si vaig en cotxe, trobo aparcament només si arribo aviat.
9. Quan cal portar calculadora per aprovar, cal recordar les fórmules per estar tranquil.
10. Tant si plou com si neva, cal portar gavardina per no mullar-se.

Exercici 4. En una habitació tenim dues persones a les quals anomenem a i b, i tenim tres instruments musicals, als cuals anomenem 1, 2 i 3. Per a $k \in \{1, 2, 3\}$ considerem la proposició Pak que significa que la persona a sap tocar l'instrument k, i la proposició Pbk que significa que la persona b sap tocar l'instrument k. Llavors, formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. La persona b no sap tocar cap instrument.
2. La persona a sap tocar algun instrument.
3. La persona a sap tocar exactament un instrument.
4. Ni la persona a ni la persona b saben tocar l'instrument 3.
5. La persona a o la persona b sap tocar algun instrument.
6. Per a cada instrument musical hi ha alguna persona que el sap tocar.

Exercici 5. Determineu si les següents fórmules son satisfactibles, tautologies o contradiccions:

$\varphi_1 = P \to (Q \to \neg P)$,
$\varphi_2 = (P \to Q) \wedge (P \vee Q)$,
$\varphi_3 = ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R))$,
$\varphi_4 = (P \wedge Q) \to (P \vee Q)$,
$\varphi_5 = ((P \to Q) \to P) \to Q$.

Exercici 6. Determineu si les següents fórmules son satisfactibles, tautologies o contradiccions:
$\varphi_1 = (P \to Q) \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q))$,
$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R))$,
$\varphi_3 = (\neg P \to (Q \to (P \wedge R))) \to R$,
$\varphi_4 = ((P \to \neg Q) \wedge (R \to Q)) \to \neg(P \wedge R)$,
$\varphi_5 = \neg(\neg(\neg(\neg P \vee P) \vee P) \vee P) \vee P$.

Exercici 7. Siguin φ, ψ fórmules proposicionals. Determineu quines de les següents condicions són certes:

1. Si $\varphi \vee \psi$ és tautologia, aleshores φ és tautologia o ψ és tautologia.
2. Si $\varphi \wedge \psi$ és tautologia, aleshores φ és tautologia i ψ és tautologia.
3. Si $\varphi \to \psi$ és tautologia i φ és tautologia, aleshores ψ és tautologia.
4. φ és tautologia si i només si $\neg\varphi$ és contradicció.

Exercici 8. Determineu si les següents equivalències lògiques són correctes:

1. $P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$,
2. $P \to (Q \to R) \equiv (P \to R) \to Q$,
3. $P \to (Q \vee R) \equiv (P \to Q) \vee (P \to R)$,
4. $P \to (Q \vee R) \equiv (P \to R) \vee Q$,
5. $(P \vee Q) \to R \equiv (P \to R) \vee (R \to Q)$.

Exercici 9. Considerem el següent fragment de programa, que retorna un valor booleà.

int i;
boolean a,b;
. . . . . .
if (a && ($i > 0$)) return b;
else if (a && ($i <= 0$)) return false;
else if (a || b) return a;
else return ($i > 0$);

Llavors, simplifiqueu els valors de retorn per un únic valor de retorn que sigui una expressió booleana en $i > 0$, a i b:

int i;
boolean a,b;
return . . . . . .;

Exercici 10. Tres estudiants A, B, C són acusats d'introduir un virus a les aules d'ordinadors de la Facultat d'Informàtica. Durant l'interrogatori les declaracions són les següents:

A diu: "B ho va fer i C és innocent".

B diu: "si A és culpable aleshores C també ho és".

C diu: "Jo no ho vaig fer, ho va fer algun dels altres".

Llavors, es demana:

(a) Determinar si les tres declaracions son contradictòries.

(b) Assumint que ningú va mentir, qui és innocent i qui és culpable ?

Exercici 11. Determineu una forma normal conjuntiva de les següents fórmules:

$\varphi_1 = (P \vee \neg Q) \rightarrow (P \vee R)$,
$\varphi_2 = (\neg P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (R \wedge P)$,
$\varphi_3 = (P \rightarrow (\neg Q \vee \neg R \vee S)) \rightarrow ((P \wedge Q \wedge R) \rightarrow S)$,
$\varphi_4 = (P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q))$,
$\varphi_5 = (P \rightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \rightarrow R))$,

$\varphi_6 = (\neg P \to (Q \to (P \wedge R))) \to R$,
$\varphi_7 = ((P \to \neg Q) \wedge (R \to Q)) \to \neg(P \wedge R)$,
$\varphi_8 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R)$,
$\varphi_9 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P)$,
$\varphi_{10} = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q)$.

Exercici 12. Determineu si les següents afirmacions són correctes:
(1) $P \vee Q \vee R \vee S$ és resolvent de $P \vee Q \vee R$ i $P \vee Q \vee S$.
(2) P és resolvent de $P \vee Q$ i $P \vee \neg Q$.
(3) $\square$ és resolvent de $P \vee \neg Q$ i $\neg P \vee Q$.
(4) $R \vee \neg R$ és resolvent de $R \vee \neg R$ i $R \vee \neg R$.

Exercici 13. Escriviu tres parells de clàusules que tinguin respectivament 1,2 i 3 resolvents, i un altre parell que no tingui resolvent.

Exercici 14. Demostreu que si $P \vee \varphi_1$ i $\neg P \vee \varphi_2$ són clàusules, aleshores $(P \vee \varphi_1) \wedge (\neg P \vee \varphi_2) \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Exercici 15. Demostreu per resolució que dels següents conjunts de clàusules es dedueix la clàusula buida.
(a) $\{S \vee T \vee \neg R, \neg S \vee \neg R, \neg T, R\}$.
(b) $\{\neg S \vee R, \neg P \vee S, \neg R, P \vee S\}$.
(c) $\{\neg P \vee \neg Q \vee \neg R, Q \vee R, P \vee \neg Q, \neg R \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$.
(d) $\{P \vee Q \vee \neg R, \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q\}$

Exercici 16. Demostreu per resolució:
(a) $\models (P \wedge (P \to Q)) \to Q$.
(b) $\models (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$.
(c) $\models ((P \to Q) \to Q) \to ((Q \to P) \to P)$.
(d) $P \to (Q \wedge R) \models \neg R \to \neg P$.
(e) $\{\neg P \to (Q \vee \neg R),\ Q \to \neg R, R\} \models P$.

Exercici 17. Demostreu per resolució que la fórmula $P \wedge R$ és conseqüència lògica del conjunt de fórmules $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ on
$\varphi_1 = \neg P \to Q$,
$\varphi_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$,

$\varphi_3 = Q \to \neg R.$

Exercici 18. Demostreu per resolució que la fórmula $A \wedge B \wedge D$ és conseqüència lògica del conjunt de fórmules $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ on
$\varphi_1 = C \to A,$
$\varphi_2 = G \to D,$
$\varphi_3 = \neg((B \wedge C \wedge G) \to E).$

Exercici 19. Volem organitzar els torns de guàrdia de 40 farmàcies d'una ciutat per un període de 60 nits. Cada nit hi ha d'haver-hi exactament una farmàcia de guàrdia. Cada farmàcia k proporciona una llista L_k de nits en les quals la farmàcia no pot estar de guàrdia. Aleshores, es tracta d'assignar els torns de guàrdia respectant les restriccions de les llistes L_k de les farmàcies i de manera que cap farmàcia pot estar de guàrdia dues nits consecutives. Llavors, es demana representar aquest problema mitjançant una fórmula en FNC de manera que pugui ser resolt per un SAT-solver. Per a això, per $i \leq 40$ i $j \leq 60$ considerar la proposició Pij que significa que la farmàcia i està de guàrdia la nit j.

Exercici 20. Una acadèmia d'idiomes té quatre hores lectives cada dia, és a dir, 20 hores setmanals de classe enumerades d'1 a 20. A més, l'acadèmia té 10 grups d'estudiants i 10 professors. Per a cada grup j (amb j $\leq$ 10) disposem de la llista d'hores setmanals en les quals té clase el grup j. I per a cada professor i (amb i $\leq$ 10) tenim una llista R_i, que conté les hores setmanals en les quals el professor i no pot fer classe. Volem saber si és possible fer els horaris de manera que s'assigni a cada grup un sol professor i a cada professor un sol grup, respectant les restriccions dels professors. Llavors, es demana representar aquest problema mitjançant una fórmula en FNC de manera que pugui ser resolt per un SAT-solver. Per a això, per $i, j \in \{1, \ldots, 10\}$ considerar la proposició Pij que significa que el professor i fa classe al grup j.

Exercici 21. Per millorar la seguretat del nostre ordinador hem d'instal.lar paquets d'actualització complint les següents restriccions:
(a) Exactament un dels paquets A,B,C s'ha d'instal.lar.
(b) El paquet E no es pot instal.lar.
(c) És necessari instal.lar el paquet D si es vol instal.lar el paquet B.
(d) Si instal.lem el paquet A o el paquet C, llavors hem d'instal.lar el

paquet B o el paquet E.

(e) Els paquets D i E no es poden instal.lar al mateix temps.

Llavors es demana :

(1) Definir una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva per determinar mitjançant un SAT-solver si es pot actualitzar l'ordinador complint les restriccions dels paquets.

(2) Demostrar que la fórmula definida en (1) és satisfactible.

Exercici 22. Aplicant les regles de Davis i Putnam, decidir si les següents fórmules són satisfactibles.

(1) $(\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge A$.

(2) $A \wedge B \wedge C$.

(3) $(A \vee B) \wedge \neg B$.

(4) $(A \vee B) \wedge (C \vee B) \wedge \neg C \wedge \neg B$.

(5) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge C$.

(6) $(A \vee \neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge B \wedge \neg A$.

(7) $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee Q) \wedge (\neg C \vee \neg A)$.

(8) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)$.