6. Sigui $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_1 - e_2 - e_3$, $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$ formen una base β' de E.

Apliquem la reducció curta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Com tots els resultats després d'aplicar la reducció són diferents de 0, aleshores són vectors linealment independents.

La dimensió de E és 3.

Com que la dimensió del subespai coincideix amb la dimensió de la base, v_1, v_2, v_3 <u>són base</u> de E.

- Calculeu les coordenades de $v_1 + v_2 + 3v_3$ en les bases B i B'.

Sigui $w = v_1 + v_2 + 3v_3$

$w = (1,1,3)_{B'}$

$$P_{B' \to B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $w = (1,1,3)_{B'}$

$w = (3,2,9)_{B}$.

- Feu el mateix amb $e_1 - e_2 + 2e_3$. $\quad w = e_1 - e_2 + 2e_3 = (1,-1,2)_B$

$$\underbrace{(1,-1,2)}_{\text{base } B} = \underbrace{x(1,2,3) + y(1,-1,-1) + z(1,1,1)}_{\text{base } B'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 3/2 \\ 0 & -3 & 0 & -3/2 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3/2 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & -3/2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 2 & -3/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

inversa