

# Problemes Probabilitats i Estadística. 2022

## Llista 2: Variables aleatòries discretes i contínues

16 de març de 2022

1. Quin és el guany del casino a la jugada d'apostar per un número a la ruleta francesa? I a l'americana?. Definiu la variable aleatòria  $X$  associada. Calculeu l'esperança i la variància de  $X$ .
2. Tenim una urna amb 2 boles numerades amb un 1, 3 boles numerades amb un 2 i 2 boles amb un 3. Traiem dues boles amb reposició. Sigui  $X$  la variable aleatòria que representa la suma dels dos valors de les boles. Trobeu la funció de massa de probabilitat i dibuixeu la funció de distribució de  $X$ . Calculeu l'esperança i la variància de  $X$ .
3. Tenim una urna amb 10 boles negres i 3 boles blanques, exactament iguals. Fem 5 extraccions sense reemplaçament. Sigui  $X$  la variable que compta el nombre de boles blanques extretes. Definiu la funció de massa de probabilitat i trobeu la seva esperança i la seva variància.
4. Feu el mateix exercici però amb reemplaçament.
5. L'1% dels pacients a qui administrem un medicament per regular la tensió arterial pateix cefalàgies. Si administrem aquest medicament a 6 pacients, determina:
  - a) La probabilitat que cap pacient pateixi cefalàgies.
  - b) La probabilitat que més d'un pacient pateixi cefalàgies.
  - c) Si administréssim el medicament a 1000 pacients, quin seria el nombre mitjà de pacients que patirien cefalàgies i quina seria la seva desviació típica?
6. El número de clients que arriben durant una hora a un forn segueix una distribució de Poisson amb paràmetre 3. Suposem que el què passa a una hora és independent del què passa a la resta d'hores. Quina és la probabilitat que entre les 4 i les 5 no arribi cap client? Quina és la probabilitat que durant 4 hores arribin més de 5 clients?
7. El nombre d'insectes capturats a l'interior d'ampolles experimentals al cap d'un dia segueix una distribució de Poisson de paràmetre  $\lambda = 1.2$ .
  - a) S'ha recollit una ampolla, quina és la probabilitat que contingui menys de tres insectes? I que no n'hi trobem cap?
  - b) Si es recullen 4 ampolles de forma independent, quina serà la probabilitat que entre les 4 es trobi almenys un insecte?
  - c) Quina és la probabilitat que, de les 4 ampolles, exactament en dues no trobem cap insecte?
8. En una fàbrica el nombre d'accidents per setmana segueix una llei  $Poisson(5)$ . Calculeu:
  - a) La probabilitat que en una setmana hi hagi algun accident.
  - b) La probabilitat que hi hagi dos accidents en dues setmanes.
  - c) La probabilitat que hi hagi tres accidents en la primera setmana i dos a la setmana següent.
9. Dos daus perfectes es llancen per separat diferents vegades. Sigui  $X$  el nombre de llançaments necessaris fins obtenir un 1 en el primer dau, i sigui  $Y$  el nombre de llançaments necessaris per obtenir un 5 o un 6 amb el segon dau.

- a) Calculeu la llei de  $X$ .
- b) Calculeu la llei de  $Y$ .
- c) Calculeu  $P(X > 3)$ .

10. Sigui  $X$  una variable aleatòria discreta amb la següent funció de massa de probabilitat:

$$P(X = k) = \frac{k}{10}; \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

- a) Dibuixeu la funció de distribució.
- b) Calculeu:  $P(X > 2)$  i  $P(X < 3)$
- c) Calculeu:  $E(X)$ ,  $E(X - 2)$ ,  $E(X^3 + 3X^2)$  i  $Var(X)$ .

11. Sigui  $X$  una variable aleatòria amb funció de distribució

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{6+x}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) És  $X$  una variable aleatòria absolutament contínua?
- b) Calculeu les probabilitats següents:

$$P\left(X = \frac{1}{2}\right), P\left(X \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right), P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right), P\left(X \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right) | X \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]\right).$$

12. Sigui  $X$  una variable aleatòria amb funció de distribució

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) És  $X$  una variable aleatòria absolutament contínua?
- b) Calculeu les probabilitats següents:

$$P(X = 1), P(X \in (1, 2]), P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right), P\left(X \in (1, \infty) | X \in \left(0, \frac{3}{2}\right]\right).$$

- c) Calculeu:  $E(X)$ ,  $E(X^3)$  i  $Var(X)$ .

13. Sigui  $X$  una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = k(x^2 - 1)\mathbb{I}_{(1,3)}(x),$$

- a) Calculeu el valor de  $k$  per tal que  $f(x)$  sigui una funció de densitat.
- b) Calculeu la funció de distribució.
- c) Calculeu  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X > 3)$ ,  $P(X < 3)$ ,  $P(X = 1)$  i  $P(X \geq 0)$ .
- d) Calculeu  $E(X)$ ,  $Var(X)$ .

14. Sigui  $X$  una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = k(2x + 3)\mathbb{I}_{(0,1)}(x),$$

Calculeu:

- a) El valor de  $k$  per tal que  $f(x)$  sigui una funció de densitat.
- b) La funció de distribució.
- c)  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X > 0.5)$ ,  $P(X < 0.5)$ ,  $P(X = 1)$  i  $P(X \geq 0.3)$ .
- d)  $E(X)$  i  $Var(X)$ .

15. El volum de vendes diàries d'un magatzem es distribueix uniformement entre 1800 i 3000 euros. Calculeu:

- a) La probabilitat que les vendes diàries siguin superiors a 2000 euros.
- b) L'esperança i la variància de les vendes diàries.

16. Sigui  $X$  una variable aleatòria amb llei Exponencial amb paràmetre  $\lambda = 2$ . Calculeu les probabilitats següents:

$$P(X > 2), P(X = 3), P(X < 3 | X \in (0, 4)).$$

Calculeu també la mitjana.