

TEMA 2: Àlgebra lineal numèrica.

Problema 1 Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10000 & 1 & 20000 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20000 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Resoleu-lo pel mètode d'eliminació gaussiana usant aritmètica decimal de punt flotant amb 4 díigits ($t = 4$).
 - (b) Resoleu-lo pel mètode d'eliminació gaussiana amb pivotatge maximal per columnes usant aritmètica decimal de punt flotant amb 4 díigits.
 - (c) Resoleu-lo exactament i compareu totes les solucions.
-

Problema 2 Considereu el sistema d'equacions lineals $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ amb $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$.

- (a) Usant aritmètica de punt flotant de 3 díigits, resoleu el sistema per eliminació gaussiana amb i sense pivotatge.
 - (b) Resoleu el sistema de forma exacta. Compareu totes les solucions.
-

Problema 3 Efectueu la factorització LU de la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Fent ús d'aquesta factorització, resoleu el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ amb $\mathbf{b}^T = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Problema 4 Considerem la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 1.0 \\ -3.9 & 1.1 & 3.2 \\ 1.4 & 1.5 & -1.0 \end{pmatrix}$ i el vector $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.1 \\ -1.4 \end{pmatrix}$.

Calculeu $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$, \mathbf{A}^{-1} i el determinant d' \mathbf{A} .

Problema 5 Calculeu una solució aproximada del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

emprant el mètode de Jacobi. Feu els càlculs amb dos decimals fins que $|x_i^{r+1} - x_i^r| < 0.05$ per a cadascuna de les variables.

Problema 6 Calculeu una solució aproximada de cadascun dels sistemes lineals següents :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} & (b) \quad & \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases} \\ (c) \quad & \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases} & (d) \quad & \begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \end{aligned}$$
