

**Problema 1** Tenim certs objectes, no sabem quin nombre. Si el dividim per 3, el residu és 2, per 5 el residu és 3 i per 7, el residu es 2. Quin és el nombre?

### Solució 1

Aquest problema, traduït a un sistema de congruències es equivalent a

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Aquest sistema es pot resoldre utilitzant la definició de congruències.

Comencem amb la primera equació. Sabem que  $x \equiv 2 \pmod{3} \iff x - 2 = 3 \cdot k : k \in \mathbb{Z}$ . Reordenant obtenim que  $x + 3 \cdot k' = 2$  i el resultat d'aquesta equació diofantina és  $x = -1 + 3 \cdot t$  i  $k = 1 - t : t \in \mathbb{Z}$ .

Treballant ara sobre la segona equació tenim que  $x \equiv 3 \pmod{5}$ , però acabem de deduir que  $x = -1 + 3 \cdot t$ , per tant,  $-1 + 3 \cdot t \equiv 3 \pmod{5} \iff 3 \cdot t \equiv 4 \pmod{5} \iff 3 \cdot t - 4 = 5 \cdot p$  i tornem a tenir una equació diofantina que, en aquest cas, té per solució  $t = 8 + 5 \cdot i$  i  $p = -4 - 3 \cdot i : i \in \mathbb{Z}$ .

Per últim, utilitzant la tercera equació tenim  $x \equiv 2 \pmod{7}$  i fent ús dels resultats anterior tenim que

$$\begin{aligned} -1 + 3 \cdot t \equiv 2 \pmod{7} &\implies -1 + 3 \cdot (8 + 5 \cdot i) \equiv 2 \pmod{7} \implies 15 \cdot i + 23 \equiv 2 \pmod{7} \\ &\iff 15 \cdot i \equiv -21 \pmod{7} \\ &\iff 15 \cdot i \equiv 0 \pmod{7} \\ &\iff i \equiv 0 \pmod{7} \\ &\iff i = 7 \cdot j \end{aligned}$$

Per tant, podem concloure que

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3 \cdot t \\ &= -1 + 3 \cdot (8 + 5 \cdot i) \\ &= 15 \cdot i + 23 \\ &= 15 \cdot (7 \cdot j) + 23 \\ &= 105 \cdot j + 23 \end{aligned}$$

**Conclusió:** El nombre  $x$  que estavem buscant era  $x = 105 \cdot j + 23 : j \in \mathbb{Z}$ .

■