LÒGICA I LLENGUATGES

PROBLEMES

Llenguatges de proposicions

→ P, Q, R i S són àtoms.

Exercici 1. Determineu quines de les les següents expressions són fórmules proposicionals. = proposició

- a) $R \vee S$ ✓
- b) P ✓ (un àtom és una proposició)
- c) $(PQ \to P)$ ✗ ← falta connector lògic
- d) $(\neg P) \to P$ ✓ → a l'antecedent és necessari el parèntesis per saber si va abans el "¬" o "→". Al conseqüent no fa falta.
- e) $\neg S \neg Q$ ✗ ← falta connector lògic
- f) $S \leftrightarrow (\neg T)$ ✓
- g) $(P \vee Q) \to \neg R$ ✓
- h) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ ✓
- i) $P \neg Q$ ✗
- j) $((P \vee) \wedge Q)$ ✗
- k) $\neg(P \to Q) \wedge \neg R$ ✓
- l) $\vee P \wedge Q$ ✗
- m) $P \vee (Q \neg R)$ ✗
- n) $P \wedge (Q \vee R)$ ✓
- o) $(P \vee Q) \wedge R$ ✓
- p) $(P \to Q) \wedge (S \to R)$ ✓
- q) $P \neg\neg(Q \to R)$ ✗ ← correcte, però falta connector lògic
- r) $\neg(\neg R \to (S \vee P))$ ✓

Exercici 2. Formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. O està $\overset{P}{\text{plovent}}$ i $\overset{N}{\text{nevant}}$, o fa $\overset{V}{\text{vent}}$. $(P \wedge N) \vee V$
2. No he vist la $\overset{P}{\text{pel·lícula}}$, $\overset{\text{"}\wedge\text{"}}{\text{però}}$ he $\overset{N}{\text{llegit}}$ la novel·la. $\neg P \wedge N$
3. Ni he vist la $\overset{P}{\text{pel·lícula}}$, ni he llegit la $\overset{N}{\text{novel·la}}$. $\neg P \wedge \neg N$
4. Si $\overset{E}{\text{estudio}}$ i $\overset{T}{\text{treballo}}$, $\overset{A}{\text{aprovo}}$. $(E \wedge T) \to A$
5. Si bec $\overset{C}{\text{cafè}}$, no $\overset{\neg A}{\text{m'adormo}}$; i si no (no $\overset{\neg C}{\text{en bec}}$), sí $\overset{A}{\text{(m'adormo)}}$. $(C \to \neg A) \wedge ((\neg C) \to A)$
6. Si tinc mal de $\overset{M}{\text{cap}}$, me'n vaig a $\overset{N}{\text{nedar}}$ o a $\overset{D}{\text{dormir}}$ (però no les dues coses). → $M \to ((N \vee D) \wedge \neg(N \wedge D))$
7. Quan $\overset{M}{\text{menjo}}$ molt i faig la $\overset{G}{\text{migdiada}}$, em costa $\overset{L}{\text{llevar-me}}$ i estic de mal $\overset{H}{\text{humor}}$. → $(M \wedge G) \to (L \wedge H)$
8. Si faig la $\overset{G}{\text{migdiada}}$ i em costa $\overset{L}{\text{llevar-me}}$, estic de mal $\overset{H}{\text{humor}}$ si $\overset{M}{\text{menjo}}$ molt. $(G \wedge L) \to (M \to H)$

Exercici 3. Formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals:

1. Et mulles quan plou. : $P \to M$ (si plou, aleshores et mulles)
   conseqüent antecedent
2. Una relació és d'equivalència si i només si és reflexiva, simètrica i transitiva. $E \leftrightarrow (R \wedge S \wedge T) \equiv (E \to (R \wedge S \wedge T)) \wedge ((R \wedge S \wedge T) \to E)$ no òptim
3. Es podrà curar el càncer quan es determini la seva causa i es trobi un nou medicament adequat.: $(A \wedge M) \to C$
   Però no implica que tenint C i H puguis escalar una muntanya.
4. Es necessita coratge i habilitat per escalar una muntanya.: $(C \wedge H) \to M$ NO $\Rightarrow$ $M \to (C \wedge H)$
   V V
   F V/F
5. El motor s'engega si la bateria està carregada: $B \to M$
6. El motor s'engega només si la bateria està carregada: $M \to B$
   C = "vaig en cotxe"
7. Si vaig en cotxe, trobo aparcament si arribo aviat : $C \to (V \to A) \equiv (C \wedge V) \to A$
   forma part del connector lògic, no s'escriu en l'àtom
   V V
   F V/F
8. Si vaig en cotxe, trobo aparcament només si arribo aviat.: $C \to (A \to V)$ diferència respecte l'anterior
   V V
   F V/F
9. Quan cal portar calculadora per aprovar, cal recordar les fórmules per estar tranquil.
10. Tant si plou com si neva, cal portar gavardina per no mullar-se.

Exercici 4. En una habitació tenim dues persones a les quals anomenem a i b, i tenim tres instruments musicals, als cuals anomenem 1, 2 i 3. Per a $k \in \{1, 2, 3\}$ considerem la proposició Pak que significa que la persona a sap tocar l'instrument k, i la proposició Pbk que significa que la persona b sap tocar l'instrument k. Llavors, formalitzeu les següents frases mitjançant fórmules proposicionals: e.g.. Pa1 = "persona a sap tocar l'instrument 1".

1. La persona b no sap tocar cap instrument.: $\neg Pb1 \wedge \neg Pb2 \wedge \neg Pb3$
2. La persona a sap tocar algun instrument.: $Pa1 \vee Pa2 \vee Pa3$
3. La persona a sap tocar exactament un instrument.: $(Pa1 \vee Pa2 \vee Pa3) \wedge ((\neg Pa1 \wedge \neg Pa2) \vee (\neg Pa1 \wedge \neg Pa3) \vee (\neg Pa2 \wedge \neg Pa3))$
4. Ni la persona a ni la persona b saben tocar l'instrument 3.: $\neg Pa3 \wedge \neg Pb3$
5. La persona a o la persona b sap tocar algun instrument.: $Pa1 \vee Pa2 \vee Pa3 \vee Pb1 \vee Pb2 \vee Pb3$
6. Per a cada instrument musical hi ha alguna persona que el sap tocar.: $(Pa1 \vee Pb1) \wedge (Pa2 \vee Pb2) \wedge (Pa3 \vee Pb3)$

$\varphi_1: \equiv \neg P \vee (Q \to \neg P) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \equiv \neg P \vee \neg Q$ → Satisfactible, però no tautologia

$I(P)=V,\ I(Q)=V \to I(\neg P \vee \neg Q) = V \vee V = F$

$I(P)=F,\ I(Q)=F \to I(\neg P \vee \neg Q) = V \vee V = \underline{\underline{V}}$

interpretació

$\varphi_2: \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \equiv Q \vee (\neg P \wedge P) \equiv Q \vee F \equiv Q$ → Satisfactible, però no tautologia

$\varphi_3: ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R))$; $\bullet\ (P \wedge Q) \to R \equiv \neg(P \wedge Q) \vee R \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R = \underline{A}$

$\bullet\ P \to (\neg Q \vee R) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R = \underline{A}$

→ Tautologia, perquè antecedent significa el mateix que el consegüent.

$I(A \to A)=1$ per tota interpretació d'A

$A \to A \equiv \neg A \vee A = \underline{\underline{V}}$

$\varphi_4.\ (P \wedge Q) \to (P \vee Q) \equiv \neg(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee P \vee Q \equiv \neg P \vee P \vee \neg Q \vee Q$

Tautologia

Exercici 5. Determineu si les següents fórmules son satisfactibles, tautologies o contradiccions:

$$\varphi_1 = P \to (Q \to \neg P),$$
$$\varphi_2 = (P \to Q) \wedge (P \vee Q),$$
$$\varphi_3 = ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R)),$$
$$\varphi_4 = (P \wedge Q) \to (P \vee Q),$$
$$\varphi_5 = ((P \to Q) \to P) \to Q.$$

Si $I(P)=I(Q)=V,\ I(\varphi_5): ((V \to V) \to V) \to V \underline{\underline{=V}}$ → Satisfactible, però no tautologia.

Si $I'(P)=V,\ I'(Q)=F,\ I(\varphi_5): ((V \to F) \to V) \to F = (F \to V) \to F = V \to F \underline{\underline{=F}}$

exercici a presentar (al final del document)

Exercici 6. Determineu si les següents fórmules son satisfactibles, tautologies o contradiccions:

$$\varphi_1 = (P \to Q) \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q)),$$
$$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R)),$$
$$\varphi_3 = (\neg P \to (Q \to (P \wedge R))) \to R,$$
$$\varphi_4 = ((P \to \neg Q) \wedge (R \to Q)) \to \neg(P \wedge R),$$
$$\varphi_5 = \neg(\neg(\neg(\neg P \vee P) \vee P) \vee P) \vee P.$$

$\equiv \neg(\neg((P \wedge \neg P) \vee P) \vee P) \vee P \equiv \neg((\neg(P \wedge \neg P) \wedge \neg P) \vee P) \vee P \equiv \neg(((\neg P \vee P) \wedge \neg P) \vee P) \vee P \equiv (\neg((\neg P \vee P) \wedge \neg P) \wedge \neg P) \vee P \equiv$

$\neg\neg P \equiv P$

$\equiv P \cdot I(P \wedge (P \vee \neg P))$ "$I(P)$"

$\equiv (((P \wedge \neg P) \vee P) \wedge \neg P) \vee P \equiv ((((P \vee P) \wedge (\neg P \vee P)) \wedge \neg P) \vee P \equiv (P \wedge \neg P) \vee P \equiv P$

distributiva

$I(P \wedge \neg P) \underline{\underline{=F}}$

un altre forma

$\equiv \neg(\neg(P) \vee P) \vee P \equiv \neg(\neg P \vee P) \vee P \equiv P$ → Satisfactible, però no tautologia.

$I(\neg(P \vee \neg P)=F$

$I(\neg(\neg P \vee P))=F$

Si $I(P)=F$ → fals

Si $I(P)=V$ → cert

Exercici 7. Siguin φ, ψ fórmules proposicionals. Determineu quines de les següents condicions són certes:

Amb frases que no són àtoms no es pot fer taules de la veritat.

Intentar trobar contraexemples

1. Si $\varphi \vee \psi$ és tautologia, aleshores φ és tautologia o ψ és tautologia. → Falsa.

Si $\varphi = P$, $\psi = \neg P$ } $\varphi \vee \psi = P \vee \neg P$

$\varphi \vee \psi$ és tautologia, però ni φ ni ψ són tautologies. → (P pot ser V o F, $\neg P$ pot ser V o F)

$I(\varphi \vee \psi)=V \not\Rightarrow I(\varphi)=V$, $I(\psi)=V$

2. Si $\varphi \wedge \psi$ és tautologia, aleshores φ és tautologia i ψ és tautologia. → Cert

3. Si $\varphi \to \psi$ és tautologia i φ és tautologia, aleshores ψ és tautologia. → Certa

4. φ és tautologia si i només si $\neg\varphi$ és contradicció.

Dem. $I(\varphi \wedge \psi)=V \Rightarrow I(\varphi)=V,\ I(\psi)=\underline{\underline{V}}$

$\varphi \vee \psi$ només és cert si φ és cert i ψ és cert.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
V	F	F
V	V	V
F	F	V
F	V	V

Cert → $I(\varphi \to \psi)=V$, $I(\varphi)=V$ } $\Rightarrow I(\psi)=\underline{\underline{V}}$

la única possibilitat de $\varphi, \varphi \to \psi$ de la taula de la veritat és $I(\psi)=V$.

Dem. contrarecíproc: Suposem que o bé φ o bé ψ no són tautologies, existeix I tal que $I(\varphi)=0 \Rightarrow I(\varphi \wedge \psi)=0 \to \varphi \wedge \psi$ no és tautologia.

$I(\varphi)=V \leftrightarrow I(\neg Q)=F$

$I(\neg\varphi)=F \to I(\varphi)=V$ } $\underline{\underline{\text{Cert}}}$

Exercici 8. Determineu si les següents equivalències lògiques són correctes:

1. $P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R,$ → falsa (semblant)
2. $P \to (Q \to R) \equiv (P \to R) \to Q,$ → falsa
   $I(P)=V,\ I(Q)=V,\ I(R)=F$
3. $P \to (Q \vee R) \equiv (P \to Q) \vee (P \to R),$
4. $P \to (Q \vee R) \equiv (P \to R) \vee Q,$
5. $(P \vee Q) \to R \equiv (P \to R) \vee (R \to Q).$

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R,$

$P \to (\neg Q \vee R)$ $\quad (\neg P \vee Q) \to R$

$\neg P \vee (\neg Q \vee R)$ $\quad \neg(\neg P \vee Q) \vee R$

$\underset{(1)}{\neg P \vee \neg Q \vee R} \not\equiv \underset{(2)}{(P \wedge \neg Q) \vee R}$ → deduir quines provar

Justificar amb interpretacions.

$I(P)=V,\ I(Q)=V,\ I(R)=V,\ I(1)=F,\ I(2)=V$

$\neg P \vee Q \vee R \equiv \underbrace{(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)}_{\neg P \vee Q \vee R}$ → distributiva al revés

$\equiv$ no cal interpretació perquè són equivalents.

(*) $\varphi = i > 0$

Si $(a \wedge e) = b$

Si $(a \wedge \neg e) = F$

Si $(a \vee b) = a$

else φ.

a	b	φ	Sortida
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

necessari

$\rightarrow$ R: (i>0 && a==b)

(drive)

(**) A: "A és culpable"

B = "B és culpable"

C = "C és culpable"

$\varphi = (B \wedge \neg C) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (\neg C \wedge (A \vee B))$

a)

A	B	C	$\neg C$	$B \wedge \neg C$	$A \to C$	$A \vee B$	$\neg C \wedge (A \vee B)$	φ
F	F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	V	F	F

no són contradictòries

b) A i C són innocents i B és culpable (per la taula de la veritat).

Implica

Alternativa: $I(B \wedge \neg C) = V \Rightarrow I(B) = V$, $I(C) = F$

$I(A \Rightarrow C) = V$ i $I(C) = F \Rightarrow I(A) = F$ $\quad I(\neg C \wedge (A \vee B)) = V \Rightarrow I(A \vee B) = V$

$I(B) = V$, $I(A) = F$

Arribem a la mateixa conclusió que amb la taula de la veritat.

Exercici 9. Considerem el següent fragment de programa, que retorna un valor booleà.

```
int i;
boolean a,b;
......
if  (a && (i > 0)) return b;
else if  (a && (i <= 0)) return false;
else if  (a || b) return a;
else  return (i > 0);
```

(*) Llavors, simplifiqueu els valors de retorn per un únic valor de retorn que sigui una expressió booleana en $i > 0$, a i b:

```
int i;
boolean a,b;
return ......;
```

(**) Exercici 10. Tres estudiants A, B, C són acusats d'introduir un virus a les aules d'ordinadors de la Facultat d'Informàtica. Durant l'interrogatori les declaracions són les següents:

A diu: "B ho va fer i C és innocent".

B diu: "si A és culpable aleshores C també ho és".

C diu: "Jo no ho vaig fer, ho va fer algun dels altres".

Llavors, es demana:

(a) Determinar si les tres declaracions son contradictòries.

(b) Assumint que ningú va mentir, qui és innocent i qui és culpable ?

Sempre que puguem, intentem treure parèntesis

tautologia

Exercici 11. Determineu una forma normal conjuntiva de les següents fórmules:

$\neg(P \vee \neg Q) \vee P \vee R \equiv (\neg P \wedge Q) \vee P \vee R = ((\neg P \vee P) \wedge (Q \vee P)) \vee R \equiv (Q \vee P) \vee R \equiv Q \vee P \vee R$ → clàusula (fórmules conjuntives) → FNC

volem tot conjuncions → fem la distributiva (per invertir els operadors)

lògica de conjuncions → conjunció de clàusules

$\varphi_1 = (P \vee \neg Q) \to (P \vee R)$,

$\varphi_2 = (\neg P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (R \wedge P)$,

distributiva

$\equiv ((\neg P \wedge Q) \vee (R \wedge P)) \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (R \wedge P)) \equiv (((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee P) \wedge (((\neg P \vee \neg R) \vee R) \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee P)) \equiv ((\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee P) \wedge (Q \vee P)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (\neg R \vee R)) \wedge ((\neg P \vee P) \vee (\neg R \vee P)) \equiv (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee P) \wedge (\neg P \vee R \vee \neg R) \wedge (\neg R \vee P \vee R) \equiv$

tauto tauto tauto tauto tauto (és igual la P ja que sempre cert)

$\equiv (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee P)$ #

conjunció de clàusules disjuntives (si hi hagués una conjunció dins d'un parèntesis ja no seria FNC).

Sempre que tinguem una disjunció a fora de tot, recomanable fer la distributiva

$\varphi_3 = (P \to (\neg Q \vee \neg R \vee S)) \to ((P \wedge Q \wedge R) \to S)$,

$\varphi_4 = (P \to Q) \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q))$,

$\varphi_5 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R))$,

$\varphi_4 = (P \to Q) \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q))$

Si $I(P) = V \Rightarrow I(\varphi_4) = V$ → Si $P = V \Rightarrow \varphi_4 = V$. Si ho veiem, ens estalviem passos.

Si $I(P) = F \Rightarrow I(\varphi_4) = I(\neg Q)$

Per tant, $\varphi_4 = P \vee \underbrace{(\neg P \wedge \neg Q)}_{} \equiv P \vee \neg Q$

distributiva: $(P \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q)$

tauto

$\varphi_6 \Rightarrow$ P Q R | $P\wedge R$ | $Q \to (P\wedge R)$ | $\neg P \to (Q\to(P\wedge R))$

V V V V V V
V V F F F V
V F V V V V
V F F F V V
F V V F F F
F V F F V F
F F V F V F
F F F F V F

φ → comprovar taula perquè són certes

F: $(\neg P \vee \neg Q \vee R)$ — això ho faríem per cada sortida falsa i les juntem amb conjuncions.

(per equivalències): $\varphi_6 \equiv (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

3era forma → taula de la veritat → causa problemes per equivocacions

$$\varphi_6 = (\neg P \to (Q \to (P \wedge R))) \to R,$$
$$\varphi_7 = ((P \to \neg Q) \wedge (R \to Q)) \to \neg(P \wedge R),$$
$$\varphi_8 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R),$$
$$\varphi_9 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P),$$
$$\varphi_{10} = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q).$$

(*) (1) $\varphi_1 = P\vee Q \vee R$, $\varphi_2 = P \vee Q \vee S$ ⇒ $P\vee Q \vee R \vee S$ Fals → $\{\varphi_1,\varphi_2\} \vdash_R \{\varnothing\}$ → No hi ha resolvent, perquè no hem pogut anular res.

(2) $\varphi_1 = P \vee Q$, $\varphi_2 = P \vee \neg Q$ (contradictòries) ⇒ $\{\varphi_1,\varphi_2\} \vdash_R P$ Cert; $P \vee P \equiv P$. 2 clàusules amb parts contradictòries.

(3) 2 clàusules: $\varphi_1 = P \vee \neg Q$, $\varphi_2 = \neg P \vee Q$ ⇒ $\{\varphi_1,\varphi_2\} \vdash_R Q \vee \neg Q$; $\{\varphi_1,\varphi_2\} \vdash_R P \vee \neg P$ (Resolvent) ⇒ $\Box$ Fals. Només podem aplicar resolvent quan hi ha dues fórmules, aquí només tenim 1. Aquest són els resolvents.

(4) $\varphi_1 = \neg R \vee R$, $\varphi_2 = \neg R \vee R$ $\vdash_R R \vee \neg R$ → és resolvent → Cert

(**) 1 resolvent: $c_1 = P \vee Q$, $c_2 = \neg P \vee R$ ⇒ $\{c_1,c_2\} \vdash_R Q \vee R$

2 resolvents: $c_1 = P \vee \neg Q$, $c_2 = \neg P \vee Q$: $\{c_1,c_2\} \vdash_R Q \vee \neg Q$; $\{c_1,c_2\} \vdash_R P \vee \neg P$

3 resolvents: $c_1 = P \vee Q \vee R$, $c_2 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$: $\{c_1,c_2\} \vdash_R P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q$; $\{c_1,c_2\} \vdash_R P \vee R \vee \neg P \vee \neg R$; $\{c_1,c_2\} \vdash_R Q \vee \neg Q \vee \neg R \vee R$

0 resolvents: $c_1 = P \vee R$, $c_2 = S \vee T \vee P$ → No hi ha resolvents.

(*) <u>Exercici 12</u>. Determineu si les següents afirmacions són correctes:

(1) $P \vee Q \vee R \vee S$ és resolvent de $P \vee Q \vee R$ i $P \vee Q \vee S$.

(2) P és resolvent de $P \vee Q$ i $P \vee \neg Q$.

(3) $\Box$ és resolvent de $P \vee \neg Q$ i $\neg P \vee Q$. (clàusula buida, contradicció)

(4) $R \vee \neg R$ és resolvent de $R \vee \neg R$ i $R \vee \neg R$.

(**) <u>Exercici 13</u>. Escriviu tres parells de clàusules que tinguin respectivament 1,2 i 3 resolvents, i un altre parell que no tingui resolvent.

Alternativa: $\{(P\vee\varphi_1), (\neg P \vee \varphi_2), \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)\} \vdash_R \Box$ → clàusula buida. Demostrar

<u>Exercici 14</u>. Demostreu que si $P \vee \varphi_1$ i $\neg P \vee \varphi_2$ són clàusules, aleshores $(P \vee \varphi_1) \wedge (\neg P \vee \varphi_2) \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

→ $(P\vee\varphi_1) \wedge (\neg P \vee \varphi_2) \to (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg((P\vee\varphi_1)\wedge(\neg P\vee\varphi_2)) \vee (\varphi_1\vee\varphi_2) \equiv \neg(P\vee\varphi_1) \vee \neg(\neg P \vee \varphi_2) \vee (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv$
$\equiv (\neg P \wedge \neg\varphi_1) \vee (P \wedge \neg\varphi_2) \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg\varphi_2) \wedge (\neg\varphi_1 \vee P) \wedge (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)) \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv$
$\equiv (\neg P \vee \neg\varphi_2 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\neg\varphi_1 \vee P \vee \varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv V$ (doble distributiva; tauto)

(***) <u>Exercici 15</u>. Demostreu per resolució que dels següents conjunts de clàusules es dedueix la clàusula buida.

(a) $\{S \vee T \vee \neg R, \neg S \vee \neg R, \neg T, R\}$.

(b) $\{\neg S \vee R, \neg P \vee S, \neg R, P \vee S\}$.

(c) $\{\neg P \vee \neg Q \vee \neg R, Q \vee R, P \vee \neg Q, \neg R \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$.

(d) $\{P \vee Q \vee \neg R, \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q\}$

(+) Hem de demostrar que la negació és una contradicció.

(a) $\neg((P \wedge (P\to Q)) \to Q)$; $(P \wedge (P \to Q)) \wedge \neg Q$; $P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$
1/ P (input) 2/ $\neg P \vee Q$ (input) 3/ $\neg Q$ (input) 4/ Q (1,2) 5/ $\Box$ (3,4) (+) Per tant, $\models (P \wedge (P \to Q)) \to Q$ — negació sempre falsa

(b) $\neg((P\to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$; $(P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \to \neg P)$; $(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge P$
1/ $\neg P \vee Q$ (input) 2/ $\neg Q$ (input) 3/ P (input) 4/ $\neg P$ (1,2) 5/ $\Box$ (3,4) (+)

<u>Exercici 16</u>. Demostreu per resolució:

(a) $\models (P \wedge (P \to Q)) \to Q$. (Primer arribar a FNC.) Si no hi ha res al davant: hipòtesi buida. Negar i demostrar.

(b) $\models (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$.

(c) $\models ((P \to Q) \to Q) \to ((Q \to P) \to P)$.

(c) $\neg(((P\to Q)\to Q) \to ((Q\to P)\to P))$; $((P\to Q)\to Q) \wedge \neg((Q\to P)\to P)$; $(\neg(P\to Q) \vee Q) \wedge ((Q \to P) \wedge \neg P)$; $((P \wedge \neg Q) \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee P) \wedge \neg P)$ (no és clàusula encara); $(P\vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg P$
1/ $P \vee Q$ (input) 2/ $\neg Q \vee P$ (input) 3/ $\neg P$ (input) 4/ P (1,2) 5/ $\Box$ (4,3)

(+) Alternativa a partir d'aquí: $((P\vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge ((\neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg P))$; $(P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge \neg P$
1/ $P\vee Q$ (input) 2/ $\neg Q$ (input) 3/ $\neg P$ (input) 4/ P (1,2) 5/ $\Box$ (3,4)

Si fos una conjunció, tot seria contradicció; contradicció amb una disjunció es pot trovar.

tenen hipòtesis:

(d) $P \to (Q \wedge R) \models \neg R \to \neg P$. (FNC)

(e) $\{\neg P \to (Q \vee \neg R),\ Q \to \neg R,\ R\} \models P$. (3 fórmules com a hipòtesi; conclusió)

(d) $P \to (Q \wedge R) \equiv \neg P \vee (Q \wedge R) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$; $\neg(\neg R \to \neg P) \equiv \neg(R \vee \neg P) \equiv \neg R \wedge P$
1/ $\neg P \vee Q$ (input) 2/ $\neg P \vee R$ (input) 3/ $\neg R$ (input) 4/ P (input) 5/ $\neg P$ (2,3) 6/ $\Box$ (4,5)

(iv) $\neg P \to (Q \vee \neg R) \equiv P \vee Q \vee \neg R$; $Q \to \neg R \equiv \neg Q \vee \neg R$
1/ $P \vee Q \vee \neg R$ 2/ $\neg Q \vee \neg R$ 3/ R 4/ $\neg P$ (input) 5/ $P \vee Q$ (1,3) 6/ $\neg Q$ (2,3) 7/ P (5,6) 8/ $\Box$ (4,7)

<u>Exercici 17</u>. Demostreu per resolució que la fórmula $P \wedge R$ és conseqüència lògica del conjunt de fórmules $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ on

$\varphi_1 = \neg P \to Q$, $\equiv P \vee Q$

$\varphi_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$, $\equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$\varphi_3 = Q \to \neg R \equiv \neg Q \vee \neg R$

$\varphi_4 = \neg(P \wedge R) \equiv \neg P \vee \neg R$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models P \wedge R$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg(P \wedge R)\} \vdash_R \Box$

1/ $P \vee Q$ 2/ $\neg P \vee R$ 3/ $\neg Q \vee R$ 4/ $\neg Q \vee \neg R$ 5/ $\neg P \vee \neg R$ (φ_4) (input)
6/ $\neg P$ (2,5) 7/ $\neg Q$ (3,4) 8/ Q (1,6) 9/ $\Box$ (7,8) #

clàusula: disjunció o literals

(***)
a) $\{S \vee T \vee \neg R, \neg S \vee \neg R, \neg T, R\}$
$\varphi_1 = S \vee T \vee \neg R$, $\varphi_2 = \neg S \vee \neg R$, $\varphi_3 = \neg T$, $\varphi_4 = R$
(φ_1,φ_3) $\varphi_5 = S \vee \neg R$; (φ_2,φ_5) $\varphi_6 = \neg R$; (φ_6,φ_4) $\varphi_7 = \Box$ #

b) $\{\neg S \vee R, \neg P \vee S, \neg R, P \vee S\}$
$\varphi_1 = \neg S \vee R$, $\varphi_2 = \neg P \vee S$, $\varphi_3 = \neg R$, $\varphi_4 = P \vee S$
(φ_2,φ_4) $\varphi_5 = S$; (φ_5,φ_1) $\varphi_6 = R$; (φ_6,φ_3) $\varphi_7 = \Box$ #

c) $\{\neg P \vee \neg Q \vee \neg R, Q \vee R, P \vee \neg Q, \neg R \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$
$\varphi_1 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$, $\varphi_2 = Q \vee R$, $\varphi_3 = P \vee \neg Q$, $\varphi_4 = \neg R \vee Q$, $\varphi_5 = \neg P \vee \neg Q$
~~(φ_1,φ_2) $\varphi_6 = \neg Q \vee \neg R$~~ (no cal); (φ_2,φ_4) $\varphi_7 = Q$; $\varphi_8 = \neg Q$ (3,5); $\varphi_9 = \Box$ (7,8)

d) $\{P \vee Q \vee \neg R, \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q\}$
$\varphi_1 = P \vee Q \vee \neg R$, $\varphi_2 = \neg P$, $\varphi_3 = P \vee Q \vee R$, $\varphi_4 = P \vee \neg Q$
$\varphi_5 = P \vee Q$ (1,3); $\varphi_6 = P$ (4,5); $\varphi_7 = \Box$ (2,6)

(*) Per cada i,j definim $P_{i,j}$ = "la farmàcia i està de guàrdia en la nit j".

4 restriccions:

1) Cada nit (exactament) 1 farmàcia de guàrdia: $(P_{11} \vee P_{21} \vee \ldots \vee P_{40\,1}) \overset{\text{cada nit}}{\wedge} (P_{12} \vee P_{22} \vee \ldots \vee P_{40\,2}) \wedge \ldots \wedge (P_{1\,60} \vee P_{2\,60} \vee \ldots \vee P_{40\,60})$. → Alternativa: $\forall j \leq 60 : P_{1j} \vee P_{2j} \vee \ldots \vee P_{40\,j}$

2) Cap farmàcia pot estar 2 nits consecutives de guàrdia: $\neg P_{ij} \vee \neg P_{ij+1}$ (per $j < 60$ [pel $j+1$] i $i \leq 40$).

3) Les restriccions de les llistes L_k de farmàcies han de ser respectades: $(\neg P_{kj})$, $\forall k \leq 40$ i $\forall j \in L_k$ → farmàcia que no pot a la nit

4) Hi ha exactament una farmàcia de guàrdia cada nit: $\forall j \leq 60$, $\forall i, i' \leq 40$ & $i \neq i' \rightarrow \neg(P_{ij} \wedge P_{i'j}) \equiv \neg P_{ij} \vee \neg P_{i'j}$ (qualsevol farmàcia)

↳ Fórmula final en FNC → conjunció de les clàusules (1), (2), (3) i (4).

$\varphi_3 = Q \rightarrow \neg R.$

Exercici 18. Demostreu per resolució que la fórmula $A \wedge B \wedge D$ és conseqüència lògica del conjunt de fórmules $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ on

→ al desenvolupar volem arribar a FNC

$\varphi_1 = C \rightarrow A, \equiv (\neg C \vee A)$

$\varphi_2 = G \rightarrow D, \equiv (\neg G \vee D)$

$\varphi_3 = \neg((B \wedge C \wedge G) \rightarrow E). \equiv (B \wedge C \wedge G) \wedge \neg E$

$\{\neg C \vee A, \neg G \vee D, (B \wedge C \wedge G) \wedge \neg E, \neg(A \wedge B \wedge D)\}$

$\downarrow$

$\{\neg C \vee A, \neg G \vee D, B \wedge C \wedge G, \neg E, \neg A \vee \neg B \vee \neg D\} \vdash_R \square$

$\downarrow$

$\{\neg C \vee A, \neg G \vee D, B, C, G, \neg E, \neg A \vee \neg B \vee \neg D\} \vdash_R \square$ → demostrar

1) $\neg C \vee A$
2) $\neg G \vee D$
3) B
4) C
5) G
6) $\neg E$
7) $\neg A \vee \neg B \vee \neg D$
8) A (1,3)
9) D (2,5)
10) $\neg B \vee \neg D$ (7,8)
11) $\neg D$ (10,3)
12) $\square$ (9,11)

(*)

Exercici 19. Volem organitzar els torns de guàrdia de 40 farmàcies d'una ciutat per un període de 60 nits. Cada nit hi ha d'haver-hi exactament una farmàcia de guàrdia. Cada farmàcia k proporciona una llista L_k de nits en les quals la farmàcia no pot estar de guàrdia. Aleshores, es tracta d'assignar els torns de guàrdia respectant les restriccions de les llistes L_k de les farmàcies i de manera que cap farmàcia pot estar de guàrdia dues nits consecutives. Llavors, es demana representar aquest problema mitjançant una fórmula en FNC de manera que pugui ser resolt per un SAT-solver. Per a això, per $i \leq 40$ i $j \leq 60$ considerar la proposició Pij que significa que la farmàcia i està de guàrdia la nit j.

(**)

Exercici 20. Una acadèmia d'idiomes té quatre hores lectives cada dia, és a dir, 20 hores setmanals de classe enumerades d'1 a 20. A més, l'acadèmia té 10 grups d'estudiants i 10 professors. Per a cada grup j (amb j $\leq$ 10) disposem de la llista d'hores setmanals en les quals té clase el grup j. I per a cada professor i (amb i $\leq$ 10) tenim una llista R_i, que conté les hores setmanals en les quals el professor i no pot fer classe. Volem saber si és possible fer els horaris de manera que s'assigni a cada grup un sol professor i a cada professor un sol grup, respectant les restriccions dels professors. Llavors, es demana representar aquest problema mitjançant una fórmula en FNC de manera que pugui ser resolt per un SAT-solver. Per a això, per $i, j \in \{1, \ldots, 10\}$ considerar la proposició Pij que significa que el professor i fa classe al grup j.

→ Similar al 20.

Exercici 21. Per millorar la seguretat del nostre ordinador hem d'instal.lar paquets d'actualització complint les següents restriccions:

(a) Exactament un dels paquets A,B,C s'ha d'instal.lar.
(b) El paquet E no es pot instal.lar.
(c) És necessari instal.lar el paquet D si es vol instal.lar el paquet B.
(d) Si instal.lem el paquet A o el paquet C, llavors hem d'instal.lar el

(**) P_{ij} = "el professor i fa classe al grup j"; $j \leq 10$, $i \leq 10$

H_j = llista d'hores que té classe el grup j.

R_i = llista d'hores que el professor i no fa classe.

1) Assignar un profesor a cada grup: $\forall j \leq 10$, $P_{1j} \vee P_{2j} \vee \ldots \vee P_{10j}$

2) Assignar només un professor a cada grup: $\forall j \leq 10$, $\forall i, i' \leq 10$ $i \neq i' \rightarrow \neg P_{ij} \vee \neg P_{i'j}$

diferents

3) Assignem un grup a cada professor: $\forall i \leq 10$, $P_{i1} \vee P_{i2} \vee \ldots \vee P_{i10}$

4) Assignar un sol grup a cada professor: $\forall i \leq 10$, $\forall j, j' \leq 10$ $j \neq j' \rightarrow \neg P_{ij} \vee \neg P_{ij'}$

5) Respectar les hores lectives del professor: $\left.\begin{array}{l}\forall i \leq 10 \\ \forall j \leq 10\end{array}\right\} \forall k \in R_i, k \in H_j \rightarrow \neg P_{ij}$

↳ La fórmula serà la conjunció de (1), (2), (3), (4) i (5).

paquet B o el paquet E.

(e) Els paquets D i E no es poden instal.lar al mateix temps.

Llavors es demana :

(1) Definir una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva per determinar mitjançant un SAT-solver si es pot actualitzar l'ordinador complint les restriccions dels paquets.

(2) Demostrar que la fórmula definida en (1) és satisfactible.

→ Penjarà la solució

Exercici 22. Aplicant les regles de Davis i Putnam, decidir si les següents fórmules són satisfactibles.

(1) $(\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge A$.

(2) $A \wedge B \wedge C$.

(3) $(A \vee B) \wedge \neg B$.

(4) $(A \vee B) \wedge (C \vee B) \wedge \neg C \wedge \neg B$.

(5) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge C$.

(6) $(A \vee \neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge B \wedge \neg A$.

(7) $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee Q) \wedge (\neg C \vee \neg A)$.

(8) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)$.

ex 6

$$\varphi_1 = (P \to Q) \to ((P \lor Q) \to (P \land Q)),$$
$$\varphi_2 = (P \to \neg(Q \lor R)) \land (P \land (\neg Q \to R)),$$
$$\varphi_3 = (\neg P \to (Q \to (P \land R))) \to R,$$
$$\varphi_4 = ((P \to \neg Q) \land (R \to Q)) \to \neg(P \land R),$$
$$\varphi_5 = \neg(\neg(\neg(\neg P \lor P) \lor P) \lor P) \lor P.$$

$\psi = P \land (Q \lor R)$

$\neg P \lor \neg(Q \lor R) \land (P \land (Q \lor R)) \equiv \neg(P \land (Q \lor R)) \land (P \land (Q \lor R)) \equiv \neg\psi \land \psi \Rightarrow$

$\Rightarrow I(\neg\psi \land \psi) = 0$ | Si $I(\psi) = 0 \to 0$
Si $I(\neg\psi) = 0 \to 0.$

φ_1:

p	q	p∨q	p∧q	p⇒q	(p∨q)⇒(p∧q)	(p⇒q)⇒((p∨q)⇒(p∧q))
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

φ_2:

p	q	r	q∨r	¬q⇒r	p⇒¬(q∨r)	p∧(¬q⇒r)	(p⇒¬(q∨r))∧(p∧(¬q⇒r))
V	V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F	F

φ_3:

p	q	r	p∧r	q⇒(p∧r)	¬p⇒(q⇒(p∧r))	(¬p⇒(q⇒(p∧r)))⇒r
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

φ_4:

p	q	r	p⇒¬q	r⇒q	(p⇒¬q)∧(r⇒q)	p∧r	((p⇒¬q)∧(r⇒q))⇒¬(p∧r)
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V