LLISTA 2

Hi ha dos tipus de problemes:

- Lineal dependència: Siguin els vectors $v_1, \dots, v_n$ i la combinació lineal $a_1 v + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, et demana determinar si els vectors $v_1, \dots, v_n$ són L.I o L.D.

PROCEDIMENT:
- Escriure la combinació lineal dins una matriu per files.
- Realitzar un esglaonament de la matriu per files.
- Si queda alguna fila amb tot zeros, els vectors són L.D. Si totes les files tenen algun coeficient diferent de 0, són L.I.

EXPLICACIÓ: Si els vectors són linealment dependents aleshores existeix un v_i que és combinació lineal dels altres. Al fer l'esglaonament de la matriu, estem multiplicant el vector v_i per una combinació ~~lineal~~ de la resta de vectors, i per tant la fila v_i queda tota zeros. Si els vectors són linealment independents, això no passa.

EXEMPLE: Demostreu que les funcions e^x, e^{2x} i e^{3x} són linealment independents. Indicació: deriveu 2 vegades.

Al principi només tenim una equació lineal:

$$\lambda e^x + \mu e^{2x} + \rho e^{3x} = 0$$

Si derivem dues vegades la equació:

$$\lambda e^x + \mu 2e^{2x} + \rho 3e^{3x} = 0 \quad i$$

$$\lambda e^x + \mu 4e^{2x} + \rho 9e^{3x} = 0$$

Ara ja tenim les condicions per fer el procediment:

tenim $v_1 = (e^x, e^x, e^x)$, $v_2 = (e^{2x}, 2e^{2x}, 4e^{2x})$ i $v_3 = (e^{3x}, 3e^{3x}, 9e^{3x})$.

i $\lambda v_1 + \mu v_2 + \rho v_3 = 0$.

Escrivim ~~els vectors~~ la combinació per files en una matriu:

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix}$$

I esglaonem la matriu:

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} \\ 0 & 3e^{2x} & 8e^{3x} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} \\ 0 & 0 & 2e^{3x} \end{pmatrix}$$ Com que totes les files són diferents de 0, són L.I. Q.E.D.

En cas que els vectors siguin linialment dependents, ens poden demanar que expressem un en funció dels altres. En aquest cas, només hem de trobar un dels vectors que depen dels altres i igualar-los a ~~la resta~~ una combinació lineal de la resta i resoldre la combinació.

- Subespais i bases: Siguin els vectors $v_1, \ldots, v_r$, et demana que diguis si $v_1, \ldots, v_r$ ~~són~~ generen un subespai de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq r)$. En cas afirmatiu et demana que diguis si són base. Si no ho són, et demana que en trobis una.

PROCEDIMENT:
- Mirar si $v_1, \ldots, v_r$ són un subconjunt de E
- Mirar si qualsevol vectors del subconjunt compleixen:
  $$u + v \in F$$
  $$\lambda u \in F$$
- En cas afirmatiu, F és un subespai.
- Mirar si $v_1, \ldots, v_r$ són L.I.
- En cas afirmatiu, són base.
- En cas negatiu, agafar com a base els vectors diferents de 0 de la matriu esglaonada.

EXPLICACIÓ: Els 3 primers passos es justifiquen per definició de subespai vectorial. $v_1, \dots, v_r$ són base si són L.I i si generen tot l'espai. Com que els vectors generen F per definició, només cal mirar si són independents. Si ho són, ja tenim la base, sinó els vectors de la matriu $\neq 0$ ho seran i generaran tot l'espai.

EXEMPLE: Digues si $\{(x,y,z) \mid 2x+3y-z=0\}$ es un subespai de $\mathbb{R}^3$.

És obvi que és un subconjunt de $\mathbb{R}^3$. Agafem 2 vectors $u, v \in F$: mirem si la seva suma $\in F$:

$u=(u_1,u_2,u_3)$ $\quad v=(v_1,v_2,v_3)$

Suposem $2u_1+3u_2-u_3=0$ i $2v_1+3v_2-v_3=0$

Volem veure si:

$\cancel{2u_1+3u_2-u_3}$

$$2(u_1+v_1)+3(u_2+v_2)-(u_3+v_3)=0 \iff$$

$$2u_1+3u_2-u_3+2v_1+3v_2-v_3=0 \rightarrow \text{cert per hipòtesi.}$$

Volem veure si:

$$2(\lambda u_1)+3(\lambda u_2)-(\lambda u_3)=0 \iff$$

$$\lambda(2u_1+3u_2-u_3)=0 \rightarrow \text{cert per hipòtesi}$$

Per tant, sí que és un subespai.

Sigui $F=\langle(1,3,-3,1),(3,1,-1,3),(1,1,-1,1)\rangle$. Determineu una base i digueu si $(2,2,2,2)$ pertany a F.

Mirem si els vectors són L.I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-4F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores una base de F és:

$\langle(1,3,-3,1),(0,-2,2,0)\rangle$

Per veure si $(2,2,2,2)$ pertany a F:

$(2,2,2,2) = \lambda(1,3,-3,1) + \mu(0,-2,2,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ 3\lambda - 2\mu = 2 \\ -3\lambda + 2\mu = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda = 2 \text{ i } \mu = 2$$

Com que hem trobat una combinació lineal amb coeficients $\neq$, $(2,2,2,2) \in F$.

3.1 Siguin u_1, u_2, u_3, u_4 vectors tals que les ternes

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}.$$

són de vectors linealment independents. Podem assegurar que u_1, u_2, u_3, u_4 són independents?

$u_1\ (0,0,1)$

$u_2\ (0,1,0)$

$u_3\ (1,0,0)$

$u_4\ (-1,-1,-1)$

$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0.$

$a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,0) + d(-1,-1,-1) = 0.$

$a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,0) = 0 \rightarrow a = b = c = 0$ ← també hem fet s. d'eq.

$a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,1,-1) = 0 \rightarrow a = b = c = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} -c = 0 \\ b - c = 0 \\ a - c = 0 \end{array}\right\}$$

$a(0,0,1) + b(1,0,0) + c(-1,-1,-1) = 0 \rightarrow a = b = c = 0$ ← també hem fet s. d'eq

$a(0,1,0) + b(1,0,0) + c(-1,-1,-1) = 0 \rightarrow a = b = c = 0$ també hem fet s. d'eq

3.4. Comproveu que $\mathcal{B}_1 = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,10)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. Trobeu les components de $(1,1,1)$ en aquesta base.

Per ser base han de ser l. indep.

$\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) + \gamma(7,8,10) = (0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \gamma = 0 \quad \beta = \frac{6\gamma}{-3} = 0 \quad \alpha = -7\gamma - 4\beta = 0.$$

són linealment independents.

Com la dimensió és 3, i tenim 3 vectors independents, són base.

Hem de trobar les components de $(1,1,1)$ en aquesta base.

$x(1,2,3) + y(4,5,6) + z(7,8,10) = (1,1,1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow z = 0 \quad y = \frac{-1+6z}{-3} = \frac{1}{3} \quad x = \frac{1-7z-4y}{1} = -\frac{1}{3}$$

$(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

3.2. Doneu una base i la dimensió de:

a) l'espai de les matrius amb dues files i tres columnes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{23}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$=$$

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}$$

Els A_{ij}, $i=1,2$, $j=1,2,3$ són un sistema de generadors

$$\lambda_{11}A_{11}+\lambda_{12}A_{12}+\dots+\lambda_{32}A_{32}=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{ij}=0$, $\forall i,j \Rightarrow$ són lin. indep.

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad$ $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^6$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

matrius simètriques:

$a_{ij}=a_{ji}$ $\forall i,j$

matrius antisimètriques

$a_{ij}=-a_{ji}$ $\forall i,j$

la diagonal són 0

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dim(simètrica) = 3

dim(antisimètrica) = 6

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$ (a les antisimètriques)