

Exercici 19

Resoleu el sistema de congruències:

$$3x \equiv 6 \pmod{12}, 10x \equiv 15 \pmod{25}$$

doneu les solucions positives menors que 300.

Solució 19.

Com s'observa $\text{mcd}(12, 25) = 1 \Rightarrow \exists$ una solució al sistema de congruències.

Com $3x \equiv 6 \pmod{12} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{4}$

$$\Rightarrow x = 4l + 2$$

Com $10x \equiv 15 \pmod{25} \Leftrightarrow 2x \equiv 3 \pmod{5}$

$$\Rightarrow [2x]_5 = [2(4l + 2)]_5 = [3]_5$$

$$\Rightarrow [8l + 4]_5 = [3]_5$$

$$\Rightarrow [8l]_5 = [-1]_5$$

$$\Rightarrow [l]_5 = ([8]_5)^{-1}[-1]_5$$

$$\Rightarrow [l]_5 = [2]_5[-1]_5 = [-2]_5$$

$$\Rightarrow l = 5q - 2 \Rightarrow x = 4(5q - 2) + 2 = 20q - 6$$

Totes les solucions del sistema és: $x = 20q - 6 \forall q \in \mathbb{Z}$ o $x \equiv -6 \pmod{20}$

Busquem els x tals que $0 \leq x \leq 300$

$$1. 0 \leq 20q - 6 \Leftrightarrow 6 \leq 20q \Leftrightarrow 6/20 \leq q \Rightarrow 1 \leq q$$

$$2. 20q - 6 \leq 300 \Leftrightarrow 20q \leq 306 \Leftrightarrow q \leq 306/20 \Rightarrow q \leq 15$$

Per tant les solucions que busquem són:

$$x = 20q - 6, \forall q \in \{z \in \mathbb{N} : 1 \leq z \leq 15\}$$