Matrius i Vectors
Examen final, problemas

Enero 2016

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (0,1,0,1),(1,0,1,0) >$$

y G y H, dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} G &: x+y+z=0, \quad y+z+t=0, \\ H &: x+y+z+t=0. \end{aligned}$$

Se pide calcular las dimensiones de F, G y H y determinar, mediante una base o ecuaciones independientes, $F \cap H$, $G \cap H$ y $(F \cap H) + (G \cap H)$, explicitando la dimensión de cada uno de ellos.

2.- Para un entero cualquiera $n \geq 2$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

(1) Demostrar que A tiene inversa si y sólo si $a \neq n-1$.

(2) Calcular $\det A$.

(3) Para $n = 4$ y $a = 1$ calcular A^{-1} y expresar A como producto de matrices elementales.

3.- Se suponen dados vectores linealmente independientes $A_1, \ldots, A_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $A \in \mathbb{R}^n$ se considera la matriz $(A_1, \ldots, A_{n-1}, A)$ cuyas columnas son $A_1, \ldots, A_{n-1}, A$.

Se pide demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det(A_1, \ldots, A_{n-1}, A) \end{aligned}$$

es lineal, determinar su núcleo y demostrar que es exhaustiva.

4.- Si e_1, e_2, e_3 es una base de un espacio vectorial E, se consideran los endomorfismos f y g de E determinados por las relaciones

$$\begin{gathered} f(e_1) = -e_2, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \\ g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad g(e_2) = -e_3, \quad g(e_3) = -e_1. \end{gathered}$$

Se pide determinar las matrices de f y g y demostrar que

$$(f \circ g)^2 = g^2 \quad \text{y} \quad (f \circ g)^4 = Id.$$