Exercici 33. Demostreu que $2^{p-1}(2^p - 1)$ és un nombre perfecte quan $M_p = 2^p - 1$ és un nombre primer de Mersenne. (*Teorema d'Euclides*)

Solució 33. Veiem que si $n = (2^n - 1)(2^{n-1})$ és un nombre perfecte, $\sigma_1(n) = 2n$.

$$\begin{gathered}
\sigma_1[(2^{2n-1})(2^n - 1)] = \\
[(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1})] + [(2^n - 1) + 2(2^n - 1) + ... + 2^{n-1}(2^n - 1)] = \\
[(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1})] + (2^n - 1)[(1 + 2 + 2^2 + .. + 2^{n-1})] = \\
2^n(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) = \\
2^n(2^n - 1) \Rightarrow \\
2^n(2^n - 1) = 2(2^{n-1})(2^n - 1) = 2(n)
\end{gathered}$$