Exercici 6.

Siguin a, b $\in \mathbb{Z}$ tals que $a > 0, b > 0$ i $\text{mcd}(a, b) = 1$

(a) Demostreu que si $ab = c^2$, per a algun nombre enter c, llavors existeixen x,y $\in \mathbb{Z}$ tals que $a = x^2$, $b = y^2$ i $\text{mcd}(x, y) = 1$.

(b) Doneu un exemple que ensenyi que en el cas què no sigui $\text{mcd}(a, b) = 1$, es pot tenir una igualtat de forma $ab = c^2$, amb c $\in \mathbb{Z}$, però a i b no quadrats.

Solució 8.

(a) Demostreu que si $ab = c^2$, per a algun nombre enter c, llavors existeixen x,y $\in \mathbb{Z}$ tals que $a = x^2$, $b = y^2$ i $\text{mcd}(x, y) = 1$.

Lema: Sigui a $\in \mathbb{Z}$, tots els exponenets de la factorització en nombres primers de a^2 seràn parells.

Sigui la factorització d'a:

$a = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots\, p_k^{x_k}$

$\Rightarrow a^2 = (p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots\, p_k^{x_k})^2 = p_1^{2\times x_1} \times p_2^{2\times x_2} \times \cdots\cdots\cdots\, p_k^{2\times x_k}$

$\Rightarrow$ tots els exponents de la factorització en nombres primers de a^2 seràn parells.

DEMOSTRACIÓ DE L'ENUNCIAT

Sigui $a = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots\, p_k^{x_k}$ on $k \in \mathbb{N}$ la descomposició en factors primers d'a i $b = v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots\, v_t^{y_t}$ on $t \in \mathbb{N}$ la descomposició en factors primers de b.

Com $\text{mcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \forall p_i,\ 1 \leq i \leq k$ i $\forall v_i, 1 \leq i \leq t$ tenim què $p_i \neq v_i$, és a dir, que no tenen cap factor primer en comú. Per tant, la factorització de ab serà el producte de la factoritzaciò d'a amb el del b sense fer canvis als exponents.

Aplicant el lema anterior sabem què els exponents de la descomposició seràn parells.

Per tant:

$$ab = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{x_k} \times v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{y_t} = c^2$$
$$\Rightarrow ab = (p_1^{\frac{x_1}{2}} \times p_2^{\frac{x_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{\frac{x_k}{2}} \times v_1^{\frac{y_1}{2}} \times v_2^{\frac{y_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{\frac{y_t}{2}})^2 = c^2$$
$$\Rightarrow ab = (p_1^{\frac{x_1}{2}} \times p_2^{\frac{x_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{\frac{x_k}{2}})^2 \times (v_1^{\frac{y_1}{2}} \times v_2^{\frac{y_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{\frac{y_t}{2}})^2 = c^2$$

Sobserva claramente què:

a $= (p_1^{\frac{x_1}{2}} \times p_2^{\frac{x_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{\frac{x_k}{2}})^2 \Rightarrow a = x^2$ on $x = p_1^{\frac{x_1}{2}} \times p_2^{\frac{x_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{\frac{x_k}{2}}$

b $= (v_1^{\frac{y_1}{2}} \times v_2^{\frac{y_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{\frac{y_t}{2}})^2 \Rightarrow b = y^2$ on $y = v_1^{\frac{y_1}{2}} \times v_2^{\frac{y_2}{2}} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{\frac{y_t}{2}}$

Com els exponents són parells podem afirmar què x, y $\in \mathbb{Z}$

(b) Doneu un exemple que ensenyi que en el cas què no sigui $\text{mcd}(a, b) = 1$, es pot tenir una igualtat de forma $ab = c^2$, amb c $\in \mathbb{Z}$, però a i b no quadrats.

Sigui c = 16 observem què $16 = 2 \times 8$ on $\text{mcd}(2, 8) = 2 \neq 1$ i 2 i 8 no són quadrats.

Per tant, com a exemple podem agafar a = 2, b = 8 i c = 4.