Exercici 13. Demostreu que no hi ha cap nombre primer de la forma $n = a^4 - b^4$, amb $a, b \in \mathbb{Z}$

Solució 13. Primer de tot, val a dir que no considero ± 1 nombre primer.
Aleshores, resolc per reducció a l'absurd: suposo que existeix un $n = a^4 - b^4$, amb n primer.
Puc suposar que $n = a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$, i per tant: $a^2 + b^2 = \pm 1$ o bé, $a^2 - b^2 = \pm 1$, llavors per casos tinc :
Cas $a^2 - b^2 = \pm 1$:

- Si $a^2 - b^2 = +1 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 1$ i com $a, b \in \mathbb{Z}$ llavors $a = \pm 1, b = 0$ i en conseqüència $n = 1$. Contradicció!, ja que 1 no és primer.
- Si $a^2 - b^2 = -1 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = -1 \Leftrightarrow (a+b)$ i $(a-b)$, tenen signe diferent i el seu valor absolut val 1, ja que $a, b \in \mathbb{Z}$, per tant $b = \pm 1$ i $n = -1$. Contradicció!, -1 no és primer.

Cas $a^2 + b^2 = 1$:
Com $a^2, b^2 \geq 0$ i $a^2, b^2 \in \mathbb{Z}$, ja que $a, b \in \mathbb{Z}$, tinc que: o bé $a^2 = 1$, $b^2 = 0$ o bé $a^2 = 0$ i $b^2 = 1$. En el primer cas, $a = \pm 1 \Rightarrow n = 1$, d'altra banda, si $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow n = -1$, i en totes dues situacions hi ha una contradicció, ja que ni 1 és primer ni -1, tampoc.
El cas $a^2 + b^2 = -1$, no és possible ja que $a^2, b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 0$.
En conclusió, he vist que no hi ha cap $n = a^4 - b^4$ primer, amb $a, b \in \mathbb{Z}$