Mètode de la potència

Rec: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; v vep de $A \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $Av = \lambda v$.

Algorisme: inici $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} z_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|} \\ x_{k+1} = A z_k \end{cases}$$

← Assumeix $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

on $\operatorname{Spec} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Convergència: (lent ⚠)

$$\begin{cases} \|x_k\| \longrightarrow |\lambda_1| \;; \quad \dfrac{x_{k+1,i}}{z_{k,i}} \longrightarrow \lambda_1 \quad \forall i = 1,\dots,n \\ \text{i} \\ \dfrac{\cancel{x}_{k+1}}{\|x_k\|} \longrightarrow v \end{cases}$$

↑ vep de vap λ_1.

Exemple: (p. 41 slides)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 0 \\ 16 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; ; \quad \operatorname{Spec} A = \{-4, 4, 12\}$$

↑ λ_1 vap dominant

inici $x_0 = (1,1,1)^T$

$$z_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_\infty} = (1,1,1)^T$$

$$x_1 = A z_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 0 \\ 16 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_1^{(1)} = \|x_1\|_\infty = 20$$

$$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_\infty} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = A z_1 = \begin{pmatrix} 5.6 \\ 5.6 \\ 10.4 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_1^{(2)} = \|x_1\|_\infty = 10.4$$

$$z_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|_\infty} = \begin{pmatrix} 0.538462 \\ 0.538462 \\ 1 \end{pmatrix}$$

; i seguim ← convergeix lentament ⚠

Ok!!

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1^{(k)} \to \boxed{12} \\ z^{(k)} \to \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right)^T \end{cases}}$$

Potència inversa i potència inversa desplaçada

<u>Idea:</u> Usem la matriu $(A-\mu I)^{-1}$ per iterar el mètode de la potència $\Longrightarrow$ el mètode convergeix al vap més proper a μ.

<u>Obs:</u> (i) v vep de vap λ de $A \Longleftrightarrow A v = \lambda v \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (A-\mu I)\, v = A v - \mu v = \cancel{\ldots}$$
$$= \lambda v - \mu v = (\lambda-\mu)\, v. \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow$ v vep de vap $(\lambda-\mu)$ de $(A-\mu I)$.

(ii) vaps de $(A-\mu I)^{-1}$ són de la forma

$$\frac{1}{\lambda_i-\mu} \quad \text{on } \lambda_i \text{ és vap de } A.$$

$\Longrightarrow$ Si triem $\mu \approx \lambda_i$ aleshores $\boxed{\dfrac{1}{\lambda_i-\mu}}$ és vap dominant de $\boxed{(A-\mu I)^{-1}}$ i el trobarem aplicant potencia a

<u>Algorisme:</u> inici $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} z_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|} \\ x_{k+1} = (A-\mu I)^{-1}\, x_k \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ sist. lineal.

<u>Obs:</u> $\mu=0$ correspon a potencia inversa $\rightsquigarrow$ trobem vap de mòdul mínim de A.