1.1 Es considera el conjunt dels parells de nombres reals (a_1, a_2) amb la suma habitual,

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

i el producte per escalars

$$b(a_1, a_2) = (ba_1, 0).$$

Determineu quines de les condicions de la definició d'espai vectorial es satisfan i quines no.

1.2 Es considera el conjunt dels parells de nombres reals (a_1, a_2) amb la suma habitual,

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

i el producte per escalars

$$b(a_1, a_2) = (|b|a_1, |b|a_2),$$

on $|b|$ indica el valor absolut del nombre real b. Determineu quines de les condicions de la definició d'espai vectorial es satisfan i quines no.

1.3 Resoleu, si són compatibles, els sistemes d'equacions lineals següents:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 28 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 1 \\ 2x - 13y + 2z = 1. \end{cases}$$

1.4 Discutiu en funció de a la compatibilitat del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + az = 10 \end{cases}$$

i resoleu-lo per als valors de a per als quals tingui solució.

1.5 Es considera el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} .$$

Determineu-ne la compatibilitat i els graus de llibertat en funció del paràmetre a, i resoleu-lo en els casos en que sigui compatible

1.6 Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + z = a \\ y + t = b \\ x + 2y + 3z + 4t = c \\ 2x + y + 4z + 3t = d \end{cases} .$$

Determineu-ne la compatibilitat i els graus de llibertat en funció dels paràmetres i resoleu-lo en el cas que sigui compatible.

1.7 Per a cada un dels sistemes d'equacions lineals que segueixen, trobeu quines condicions han de complir els paràmetres $a, b, c \in \mathbb{R}$ per tal que siguin compatibles i, en aquest cas, trobeu-ne la solució.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=a \\ 5x+3y+3z=b \\ x+y-z=c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=a \\ 5x+3y+4z=b \\ x+y-z=c \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z+4t=a \\ x-2z+3t=a \\ -x+4y+12z-t=b \\ 3x-2y-11z+8t=c. \end{cases}$$

1.8 Discutiu i resoleu, en els casos compatibles, els sistemes d'equacions lineals següents

$$(i)\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+my+z=3 \\ 3x+y-mz=4 \end{cases}$$

$$(iii)\begin{cases} 2x-ay=1 \\ -x+2y-az=1 \\ -y+2z=1 \end{cases} \qquad (iv)\begin{cases} x+3y=2a \\ x+y=5 \\ 2ax+6y=a+3 \end{cases}$$

$$(v)\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases} \qquad (vi)\begin{cases} x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \\ x-y+3z=-3 \\ 4x+2y=a. \end{cases}$$

1.9 Determineu per a quins valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ és incompatible el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax+(a-3)y+z=2 \\ bx+(2b+5)y+2z=3 \end{cases} .$$

1.10 D'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites sabem que

(i) la matriu del sistema és no nula;

(ii) $(1,2,2)$ i $(0,1,1)$ són solucions;

(iii) $(0,a,b)$ només és solució si $a=b=1$.

Trobeu les solucions del sistema.

1.11 Determineu un polinomi de tercer grau $p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3$ tal que

$$p(1)=5, \qquad p(-1)=3, \qquad p(2)=9, \qquad p(-2)=16.$$

1.12 Considerem els nombres complexos $z_1=3-i, z_2=2+5i, z_3=1+2i$. Calculeu

$$z_1+z_2, \quad z_1z_3, \quad z_2^2, \quad z_1^{-1}, \quad \overline{z_2}, \quad z_1/z_2, \quad z_3/z_1, \quad \mathrm{Re}(z_1+z_2), \quad \mathrm{Re}(z_1z_3), \quad \mathrm{Im}(z_3/z_1).$$

1.13 Considerem els nombres complexos $z_1=2-3i, z_2=3+i, z_3=4-5i$. Calculeu

$$z_1+z_2+z_3, \quad z_1z_3/z_2, \quad z_2^{-1}, \quad \overline{z_1z_2}, \quad z_1/z_3, \quad \mathrm{Re}(z_1+z_2), \quad \mathrm{Re}(z_1z_3), \quad \mathrm{Im}(z_2z_3), \quad \mathrm{Im}(z_3/z_2).$$