Problemas de Matemática Discreta

Emilio Bujalance
José A. Bujalance
Antonio F. Costa
Ernesto Martínez
U.N.E.D.

SANZ Y TORRES

Introducción

*Es éste un libro de problemas pensado y elaborado para servir de complemento al de "***Elementos de Matemática Discreta***" de los autores. Aquí, el lector puede encontrar la solución de los problemas propuestos en el libro citado más otros nuevos, que pueden ayudarle a profundizar en la materia y comprobar su grado de dominio de la misma.*

La resolución de ejercicios es quizás la tarea más importante en el estudio de cualquier disciplina matemática. El método de estudio recomendado para conseguir el mejor resultado es el siguiente:

- en primer lugar, lea cuidadosamente el enunciado del problema,

- trate de resolverlo sin leer la solución,

- si consigue resolverlo sin ayuda, ¡enhorabuena!, quiere decir que comienza a dominar el tema. De todos modos, lea la solución del ejercicio, pues puede ser que descubra dificultades que pasó por alto en su resolución,

- si no es capaz de encontrar la solución, comience a leer la solución escrita en el texto y según se ofrecen indicaciones intente acabar de resolver el problema sin leer el resto.

Todos los problemas están completamente resueltos. Los grados de dificultad son variados, desde cuestiones de sencillo planteamiento hasta otras que requieren mayor esfuerzo de comprensión teórica de los principios básicos.

Los destinatarios de este libro son, principalmente, los alumnos de

1º de la Escuela de Informática de la UNED, aunque será igualmente útil para un primer curso de Matemática Discreta de cualquier otra Escuela o Facultad.

Agadecemos al Profesor Víctor Fernández Laguna sus valiosos comentarios y sugerencias a los problemas de los Temas sobre Teoría Elemental de Números.

Esperamos que tanto el libro de teoría como éste de problemas sirvan de ayuda a nuestros lectores.

Los Autores

Indice General

Tema 1

Algoritmos de División y Euclides

Problema 1

Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, pruébese la desigualdad

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Solución

Si $|a| - |b| \geq 0$, como

$$a = (a - b) + b,$$

se tiene

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|,$$

luego

$$|a| - |b| \leq |a - b|,$$

por lo tanto

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Si $|a| - |b| < 0$, puesto que

$$b = (b - a) + a,$$

entonces

$$|b| - |a| \leq |b - a|,$$

y como $|b| - |a| > 0$

$$|b| - |a| = ||b| - |a|| \leq |b - a|.$$

Ahora bien, como $|-m| = |m|$ se tiene $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Luego en ambos casos se tiene la desigualdad.

Problema 2

Pruébese que si a y b son enteros, con $b > 0$, entonces existen enteros q y r únicos tales que

$$a = bq + r \quad \text{donde} \quad 2b \leq r < 3b.$$

Solución

Por el Algoritmo de División existen q' y r' unívocamente determinados tales que

$$a = bq' + r' \quad \text{con} \quad 0 \leq r' < b,$$

entonces $a = b(q' - 2) + r' + 2b$, luego si denominamos $q = q' - 2$ y $r = r' + 2b$, se tiene

$$a = bq + r \quad \text{con} \quad 2b \leq r < 3b.$$

Ademas q y r están unívocamente determinados puesto que q' y r' lo están.

Problema 3

Demuéstrese que

a) El cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ ó $3k + 1$.

b) El cubo de cualquier entero es de la forma $9k$, $9k+1$ ó $9k+8$.

Solución

Por el Algoritmo de División cualquier número entero es de la forma $n = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$.

a) El cuadrado de n será

$$n^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2 = 3(3q^2 + 2qr) + r^2.$$

Si $r = 0$, entonces n^2 es de la forma $3k$. Si $r = 1$, n^2 es de la forma $3k + 1$, y si $r = 2$, n^2 es de la forma $3k + 1$, puesto que

$$3(3q^2 + 2qr) + 4 = 3(3q^2 + 2qr + 1) + 1.$$

b) El cubo de n será

$$n^3 = (3q + r)^3 = 27\,q^3 + 27\,q^2r + 9qr^2 + r^3 = 9(3q^3 + 3q^2r + qr^2) + r^3.$$

Si $r = 0$ entonces, n^3 es de la forma $9k$, si $r = 1$, n^3 es de la forma $9k + 1$ y si $r = 2$, n^3 es de la forma $9k + 8$.

Problema 4

Para $n \geq 1$, pruébese que $\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ es un entero.

Solución

Por el Algoritmo de División todo número n se puede escribir de la forma

$$n = 6q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < 6,$$

luego

$$m = n(n + 1)(2n + 1) = (6q + r)(6q + r + 1)(12q + 2r + 1) = 6k + 2r^3 + 3r^2 + r,$$

donde k es un entero. Por lo tanto, m se puede escribir de la forma

$$m = 6k + s \quad \text{con} \quad s = 2r^3 + 3r^2 + r,$$

si	$r = 0$,	$s = 0$	y	$m = 6k$,
si	$r = 1$,	$s = 6$	y	$m = 6(k + 1)$,
si	$r = 2$,	$s = 30$	y	$m = 6(k + 5)$,
si	$r = 3$,	$s = 84$	y	$m = 6(k + 14)$,
si	$r = 4$,	$s = 180$	y	$m = 6(k + 30)$,
si	$r = 5$,	$s = 330$	y	$m = 6(k + 55)$.

En todos los casos m es divisible por 6.

Problema 5

Pruébese que si a es un número entero tal que 2 y 3 no lo dividen, entonces 24 divide a $(a^2 - 1)$.

Solución

Por el Algoritmo de División tenemos que todo número entero a se puede escribir de la forma

$$a = 12k + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < 12.$$

Como 2 y 3 no dividen al número a entonces r sólo puede ser 1, 5, 7 ó 11. Por lo tanto

$$a^2 = (12k + r)^2 = 144k^2 + 24kr + r^2 = 24(6k^2 + kr) + r^2.$$

Si $r = 1$, $a^2 - 1 = 24(6k^2 + k)$,

si $r = 5$, $a^2 - 1 = 24(6k^2 + 5k) + 24 = 24(6k^2 + 5k + 1)$,

si $r = 7$, $a^2 - 1 = 24(6k^2 + 7k) + 48 = 24(6k^2 + 7k + 2)$,

si $r = 11$, $a^2 - 1 = 24(6k^2 + 11k) + 120 = 24(6k^2 + 11k + 5)$,

luego en todos los casos 24 divide a $(a^2 - 1)$.

Problema 6

Pruébese que ningún entero de la forma 11, 111, 1111,.... es un cuadrado.

Solución

Puesto que todo número de la forma

$$1...11 = 1...08 + 3 = 4k + 3.$$

Por el Algoritmo de División cualquier número entero n se puede escribir

$$n = 4q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < 4.$$

Supongamos que $n^2 = 1..11$, entonces

$$(4q + r)^2 = 16q^2 + r^2 + 8qr = 4(4q^2+2qr) + r^2 = 4k' + r^2,$$

si $r = 0$, el número es de la forma $4k'$,
si $r = 1$, el número es de la forma $4k' + 1$,
si $r = 2$, el número es de la forma $4(k' + 1)$, y
si $r = 3$, el número es de la forma $4(k' + 2) + 1$,

luego nunca 1...11 se podría escribir de la forma 4k + 3, que estaría en contradicción con los resultados obtenidos.

Problema 7

Pruébese que

a) La suma de los cuadrados de dos enteros impares no puede ser un cuadrado.

b) El producto de cuatro enteros consecutivos es igual a un cuadrado menos la unidad.

Solución

a) Sean a y b dos enteros impares, entonces por el Algoritmo de División

$$a = 4k' + r', \qquad r' = 1 \text{ ó } 3,$$
$$b = 4k'' + r'', \qquad r'' = 1 \text{ ó } 3,$$

luego

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (4k' + r')^2 + (4k'' + r'')^2 = \\ &= 16k'^2 + 8k'r' + r'^2 + 16k''^2 + 8k''r'' + r''^2 = \\ &= 4\,(4k'^2 + 2k'r' + 4k''^2 + 2k''r'') + r'^2 + r''^2 = \\ &= 4k^* + r'^2 + r''^2, \end{aligned}$$

si $r' = 1$ y $r'' = 1$, el número se escribe de la forma $4k^* + 2$,
si $r' = 1$ y $r'' = 3$, el número se escribe de la forma $4(k^* + 2) + 2$,
si $r' = 3$ y $r'' = 1$, el número se escribe de la forma $4(k^* + 2) + 2$,
si $r' = 3$ y $r'' = 3$, el número se escribe de la forma $4(k^* + 4) + 2$.

Luego en ningún caso es un cuadrado ya que, como se ha visto en el problcma anterior, todo cuadrado se escribe de la forma $4k$ ó $4k + 1$.

b) Dados cuatro enteros consecutivos

$$k - 1, k, k + 1, k + 2,$$

entonces el producto

$$(k - 1)\,k(k + 1)(k + 2) = (k^2 - 1)(k^2 + 2k) = k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k.$$

Si le sumamos 1 entonces tenemos

$$k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k + 1 = ((k^2 + k) - 1)^2,$$

que es un cuadrado.

Problema 8

Sean m, x e y enteros, con $m \neq 0$. Pruébese que x MOD $m = y$ MOD m si y sólo si $x - y$ es múltiplo de m.

Solución

Si x MOD $m = y$ MOD m, entonces

$$x = mq_1 + r,$$
$$y = mq_2 + r,$$

luego $x - y = m(q_1 - q_2)$, por lo tanto $x - y$ es múltiplo de m.

Si $x - y$ es múltiplo de m, entonces $x - y = mk$. Por el Algoritmo de División

$$x = mq_1 + r_1 \quad \text{con} \quad 0 \leq r_1 < |m|$$
$$y = mq_2 + r_2 \quad \text{con} \quad 0 \leq r_2 < |m|,$$

si restamos y a x

$$x - y = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2,$$

como $m \mid (x - y)$, entonces $m \mid (r_1 - r_2)$, de donde $r_1 - r_2 = 0$, y así $r_1 = r_2$, luego

$$x \text{ MOD } m = y \text{ MOD } m.$$

Problema 9

Dados $x \text{ MOD } 7 = 3$ e $y \text{ MOD } 7 = 5$, encuéntrese.

a) $(x + y) \text{ MOD } 7$.

b) $(x - y) \text{ MOD } 7$.

c) $(xy) \text{ MOD } 7$.

d) $(4x - 3y) \text{ MOD } 7$.

Solución

Como $x = 7q + 3$ e $y = 7q' + 5$ se tiene que

a) $(x + y) = 7(q + q') + 8 = 7(q + q' + 1) + 1$, así

$$(x + y) \text{ MOD } 7 = 1.$$

b) $(x - y) = 7(q - q') - 2 = 7(q - q') + -7 + 5 = 7(q - q' - 1) + 5$, luego

$$(x - y) \text{ MOD } 7 = 5.$$

c) $xy = (7q + 3)(7q' + 5) = 49qq' + 35q + 21q' + 15 =$
$= 7(7qq' + 5q + 3q' + 2) + 1,$

y así

$$(xy) \text{ MOD } 7 = 1.$$

d) $4x - 3y = 28q + 12 - 21q' - 15 = 7(4q - 3q') - 3 = 7(4q - 3q' - 1) + 4,$

luego

$$(4x - 3y) \text{ MOD } 7 = 4.$$

Problema 10

Calcúlese cuánto vale

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 100^3) \text{ MOD } 4.$$

Solución

Es fácil comprobar que

$$1^3 \text{ MOD } 4 = 1,$$
$$2^3 \text{ MOD } 4 = 0,$$
$$3^3 \text{ MOD } 4 = 3.$$

Dado que 4 MOD 4 = 0, entonces 4 MOD 4 = 0 MOD 4 y así por las propiedades de los productos módulo un número, se tiene

$$4^3 \text{ MOD } 4 = 0^3 \text{ MOD } 4 = 0 \text{ MOD } 4 = 0.$$

Como 5 MOD 4 = 1, entonces

$$5^3 \text{ MOD } 4 = 1^3 \text{ MOD } 4 = 1.$$

Puesto que 6 MOD 4 = 2,

$$6^3 \text{ MOD } 4 = 2^3 \text{ MOD } 4 = 0.$$

Además $7 \text{ MOD } 4 = 3$, luego $7^3 \text{ MOD } 4 = 3^3 \text{ MOD } 4 = 3$; como $8 \text{ MOD } 4 = 0$, tenemos que $8^3 \text{ MOD } 4 = 0$.

Si seguimos este proceso los valores que aparecen siempre son

$$1, 0, 3, 0, 1, 0, 3, 0, \ldots,$$

luego

$$\begin{aligned}
&(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3) \text{ MOD } 4 = \\
&= (1^3 \text{ MOD } 4 + 2^3 \text{ MOD } 4 + 3^3 \text{ MOD } 4 + \ldots + 100^3 \text{ MOD } 4) \text{ MOD } 4 = \\
&= (1 + 0 + 3 + 0 + \ldots + 1 + 0 + 3 + 0) \text{ MOD } 4 = \\
&= (25 + 3.25) \text{ MOD } 4 = 100 \text{ MOD } 4 = 0.
\end{aligned}$$

Problema 11

Sean a, b, n y n' enteros, con $n \neq 0$, $n' \neq 0$ y $n' \mid n$. Pruébese que si

$$a \text{ MOD } n = b \text{ MOD } n,$$

entonces

$$a \text{ MOD } n' = b \text{ MOD } n'.$$

Solución

Por ser $a \text{ MOD } n = b \text{ MOD } n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
a &= nq_1 + r, \\
b &= nq_2 + r, \text{ con } 0 \leq r < |n|.
\end{aligned}$$

Como $n' \mid n$, entonces $n = n'p$. Si $r < |n'|$ tenemos que

$$a = n'(pq_1) + r, \quad b = n'(pq_2) + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < |n'|,$$

y así a MOD n' = b MOD n'.

Si $r \geq |n'|$, entonces $r = n'q' + r'$, con $0 \leq r' < |n'|$, y así

$$a = n'(pq_1) + n'q' + r' = n'(pq_1 + q') + r', \quad y$$
$$b = n'(pq_2) + n'q' + r' = n'(pq_2 + q') + r',$$

luego a MOD n' = b MOD n'.

Problema 12

Sean a, b y d números enteros con $d > 0$. Pruébese que si d es un divisor común de a y b, d se puede expresar como una combinación lineal de a y b entonces d = m.c.d.(a, b).

Solución

Como d se puede expresar como una combinación lineal de a y b

$$d = ax + by.$$

Sea d' otro número que sea divisor común de a y b, entonces $d' \mid (ax + by)$, luego $d' \mid d$, así d = m.c.d.(a, b).

Problema 13

Usando el Algoritmo de Euclides para el cálculo de d = m.c.d.(a, b), encuéntrense x e y tales que

$$d = ax + by,$$

en cada uno de los casos siguientes:

a) a = 1312, b = 800,

b) a = 322, b = 406.

Solución

a) Para calcular el m.c.d.(a, b) empezamos por dividir a entre b.

$$1312 = 1.800 + 512, \tag{13.1}$$

entonces como el resto es distinto de cero, seguimos dividiendo 800 entre 512,

$$800 = 1.512 + 288, \tag{13.2}$$

y procediendo de forma análoga

$$512 = 1.288 + 224, \tag{13.3}$$

$$288 = 1.224 + 64, \tag{13.4}$$

$$224 = 3.\ 64 + 32, \tag{13.5}$$

$$64 = 2.32 + 0, \tag{13.6}$$

luego m.c.d.(1312, 800) = 32.

De la expresión (13.5) se tiene

$$\begin{aligned} 32 &= 224 - 3.\ 64 = \\ &= 244 - 3(288 - 224) = && \text{(de 13.4)} \\ &= 4.224 - 3.288 = \\ &= 4\,(512 - 288) - 3.288 = && \text{(de 13.3)} \\ &= 4.512 - 7.288 = \\ &= 4.512 - 7\,(800 - 512) = && \text{(de 13.2)} \\ &= 11.\ 512 - 7.800 = \\ &= 11\,(1312 - 800) - 7.800 = && \text{(de 13.1)} \\ &= 11.1312 - 18.800, \end{aligned}$$

luego x = 11 e y = -18.

b) En este caso empezamos dividiendo

$$322 = 0.406 + 322, \tag{13.7}$$

$$406 = 1.322 + 84, \tag{13.8}$$

$$322 = 3.84 + 70, \tag{13.9}$$

$$84 = 1.70 + 14, \tag{13.10}$$

$$70 = 5.14 + 0, \qquad (13.11)$$

de (13.11) el m.c.d.(322, 406) = 14, además por (13.10)

$$\begin{aligned} 14 &= 84 - 70 = \\ &= 84 - (322 - 3.84) = && \text{(de 13.9)} \\ &= -322 + 4.84 = \\ &= -322 + 4\,(406 - 322) = && \text{(de 13.8)} \\ &= -5.322 + 4.406, \end{aligned}$$

luego x = -5 e y = 4.

Problema 14

Sean a, b y m enteros con $m \neq 0$. Pruébese que si

$$a \text{ MOD } m = b \text{ MOD } m \text{ entonces m.c.d.}(a, m) = \text{m.c.d.}(b, m).$$

Solución

Como a MOD m = b MOD m, entonces $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$. Si empleamos el Algoritmo de Euclides para calcular el m.c.d.(a, m) lo único que necesitamos utilizar es m y r, pues m.c.d.(a, m) = m.c.d.(m, r). De forma análoga para calcular el m.c.d.(b, m) lo único que necesitamos utilizar es m y r, pues m.c.d.(b, m) = m.c.d.(m, r). Por lo tanto

$$\text{m.c.d.}(a, m) = \text{m.c.d.}(b, m) = \text{m.c.d.}(m, r).$$

Problema 15

Pruébese que si a, b son enteros positivos, $n \geq 1$ y $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$.

Solución

Sea d = m.c.d.(a, b), entonces $a = d.q$ y $b = d.q'$, con m.c.d.(q, q') = 1. Como $a^n \mid b^n$, se tiene que

$$q^n \mid q'^n,$$

luego $q^n = 1$ y así $q = 1$, por lo tanto $a = d$, entonces $a \mid b$.

Tema 2

Números primos y Teorema Fundamental de la Aritmética

Problema 1

Estúdiese

a) Si para cada m entero 2m y 4m + 3 son primos entre sí.

b) Si para cada m entero 2m + 1 y 3m + 2 son primos entre sí.

Solución

a) 2m y 4m + 3 no siempre son primos entre sí ya que si m = 3, 6 y 15 no son primos entre sí.

b) Puesto que

$$(-3)(2m + 1) + 2(3m + 2) = 1,$$

entonces 2m +1 y 3m + 2 son primos entre sí.

Problema 2

Supóngase que al aplicar el Algoritmo de Euclides para encontrar el m.c.d.(a, b), se obtiene que uno de los restos r_i es primo. Demuéstrese que m.c.d.(a, b) = r_i ó m.c.d.(a, b) =1.

Solución

Si al aplicar el Algoritmo de Euclides se encuentra que

$$a = bq_1 + r_1 \text{ con } 0 \le r_1 < b,$$
$$b = r_1q_2 + r_2 \text{ con } 0 \le r_2 < r_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{i-2} = r_{i-1}q_i + r_i \text{ con } 0 \le r_i < r_{i-1},$$

y r_i primo, entonces por el propio Algoritmo

$$\text{m.c.d.}(r_{i-1}, r_i) = \text{m.c.d.}(a, b).$$

Como r_i es primo, o bien r_{i-1} es divisible por r_i y en este caso m.c.d.$(r_{i-1}, r_i) = r_i$ o bien no es divisible y en este caso m.c.d.$(r_{i-1}, r_i) = 1$.

Problema 3

Sea p un número primo tal que $p > 3$. Demuéstrese que p se puede escribir de la forma

a) $4n + 1$ ó $4n + 3$ para algún $n \in \mathbf{N}$.

b) $6n + 1$ ó $6n + 5$ para algún $n \in \mathbf{N}$.

Solución

a) Como p es un entero entonces

$$p = 4n + r \quad \text{con} \quad 0 \le r < 4.$$

Si $r = 0$ ó 2, p sería divisible por 2, luego p es de la forma $4n + 1$ ó $4n + 3$.

b) Como p es un entero, se tiene que

$$p = 6n + r \quad \text{con} \quad 0 \le r < 6.$$

Si $r = 0, 2, 4$ entonces p sería divisible por 2, si $r = 3$, p sería divisible por 3, así que p sólo puede ser de la forma $6n + 1$ ó $6n + 5$.

Problema 4

Demuéstrese que los enteros de la forma $n^4 + 4$ con $n > 1$ o de la forma

$8^n + 1$ con $n \geq 1$ son compuestos.

Solución

Como $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$, entonces $n^4 + 4$ para $n > 1$ es un número compuesto.

Observemos que $8^n + 1 = 2^{3n} + 1$ y

$$2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1),$$

luego para cada $n \geq 1$, $8^n + 1$ es compuesto.

Problema 5

Demuéstrese que si $p \neq 5$ es un número primo impar, entonces $p^2 - 1$ ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Solución

Dado que todo número entero se puede escribir de la forma

$$5q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < 5,$$

entonces

$$p = 5q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < 5,$$

por ser p primo y distinto de 5 entonces r sólo puede ser 1, 2, 3 ó 4. Además como p es impar q es par si y sólo si r es impar. Así

$$p^2 = (5q + r)^2 = 25q^2 + r^2 + 10qr \quad \text{con} \quad 1 \leq r < 5,$$

luego

$$p^2 - 1 = 25q^2 + r^2 + 10qr - 1, \text{ y } p^2 + 1 = 25q^2 + r^2 + 10qr + 1.$$

Si $r = 1$, q es par, así $25q^2$ es divisible por 10, y por lo tanto $p^2 - 1$ es divisible por 10.

Si $r = 2$, q es impar, luego $25q^2 + 5$ es divisible por 10, y por tanto $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Si $r = 3$, q es par, así $25q^2 + 10$ es divisible por 10, y por tanto $p^2 + 1$ es divisible por 10.

Si $r = 4$, q es impar luego $25q^2 + 15$ es divisible por 10, y por tanto $p^2 - 1$ es divisible por 10.

Problema 6

Demuéstrese que si $p \geq q \geq 5$, p y q primos entonces $24 \mid (p^2 - q^2)$.

Solución

Como p y q son primos, entonces los podemos escribir de la forma

$$p = 12k + r \quad \text{con} \quad r = 1 \text{ ó } 5 \text{ ó } 7 \text{ ó } 11,$$

$$q = 12k' + r' \quad \text{con} \quad r' = 1 \text{ ó } 5 \text{ ó } 7 \text{ ó } 11.$$

Luego $p^2 = 144\,k^2 + 24\,kr + r^2$ y $q^2 = 144k'^2 + 24\,k'r' + r'^2$, por lo tanto

$$p^2 - q^2 = 144(k^2 - k'^2) + 24\,(kr - k'r') + (r^2 - r'^2),$$

así lo único que tendremos que demostrar es que $r^2 - r'^2$ es divisible por 24.

Ahora bien r^2 y r'^2 sólo pueden ser 1, 25, 49, 121 y cualquier diferencia entre ellos es siempre divisible por 24.

Problema 7

Demuéstrese que si $p = 2^k - 1$ es primo, entonces k es un entero impar, o bien $k = 2$.

Solución

Si $k \neq 2$ es par entonces $k = 2q$, $q \neq 1$ y así

$$p = 2^k - 1 = 2^{2q} - 1 = (2^q - 1)(2^q + 1),$$

como 2^q no es divisible por tres, entonces el número anterior $2^q - 1$ o el número posterior $2^q + 1$ será divisible por 3, luego 3 dividiría a p; así k tiene que ser impar.

Problema 8

Si p_n denota el n-ésimo primo, demuéstrese que ningún entero de la forma $P_n = (p_1 p_2 \ldots p_n) + 1$ es un cuadrado.

Solución

Todo número entero se puede escribir de la forma

$$4q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < 4.$$

Como los p_i son primos y $p_1 = 2$, entonces el producto $p_2 \ldots p_n$ es impar y se puede escribir o bien de la forma $4q + 1$ ó $4q + 3$. Así $p_1 p_2 \ldots p_n$ será de la forma

$$8q + 2 = 4(2q) + 2 \quad \text{o} \quad 8q + 6 = 4(2q + 1) + 2,$$

luego $(p_1 p_2 \ldots p_n) + 1$ tendrá la forma $4q + 3$.

Puesto que el cuadrado de todo número entero es de la forma $4k$ ó $4k + 1$, se tiene que P_n no puede ser un cuadrado.

Problema 9

Estúdiese si el número 811 es primo utilizando la criba de Eratóstenes.

Solución

La criba de Eratóstenes nos indica que, si no fuera primo, tendría que ser divisible por algún primo p menor que 29, pues

$$p \leq \sqrt{811} < 29.$$

Entonces sólo tendremos que ver si 811 es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ó 23. Como no es divisible por ninguno de estos números, 811 es primo.

Problema 10

Sea p un número primo y supongamos que p no divide a b. Pruébese que en la progresión aritmética

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots$$

existe un término a partir del cual, cada p términos, aparece un número que es divisible por p.

Solución

Como p es un número primo y p no divide a b, m.c.d.(p, b) = 1; así existirán enteros x e y tales que

$$px + by = 1 \qquad (10.1)$$

Sea $s_k = kp - ay$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; entonces $p \mid (a + s_k b)$ puesto que

$$a + s_k b = a + (kp - ay)b = a + kpb - ayb, \qquad (10.2)$$

y por (10.1) $by = 1 - px$, por lo tanto si sustituimos en (10.2)

$$a + s_k b = p(kb + ax).$$

Así cada p términos tenemos que el término

$$a + s_k b,$$

es divisible por p.

Problema 11

Suponiendo que la conjetura de Golbach, a saber que cada entero par mayor que dos es suma de dos primos, es cierta, demuéstrese que cada entero impar mayor que 5 es suma de tres primos.

Solución

Si suponemos que cada entero par mayor que dos es suma de dos primos, entonces

$$2n - 2 = p_1 + p_2 \text{ para cada } n \in \mathbf{N} \text{ y } n > 2.$$

Luego

$$2n = p_1 + p_2 + 2,$$

y

$$2n + 1 = p_1 + p_2 + 3,$$

así, cada entero impar mayor que 5 es suma de tres primos.

Problema 12

Si para todo primo $p \leq \sqrt[3]{n}$ se verifica que p no divide a n, entonces demuéstrese que n es primo o producto de dos primos.

Solución

Supongamos que n fuera producto de tres o más primos

$$n = p_1p_2p_3 \cdots p_s \quad \text{con} \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \leq p_s,$$

entonces

$$p_1^3 \leq p_1p_2p_3 \cdots p_s,$$

luego tomando raíces cúbicas en ambos miembros de la desigualdad se tendrá

$$p_1 = \sqrt[3]{p_1^3} \leq \sqrt[3]{p_1p_2p_3 \cdots p_s} = \sqrt[3]{n} \quad \text{y} \quad p_1 \mid n,$$

contradición. Luego n debe ser producto, a lo sumo, de dos números primos.

Problema 13

Supongamos que k, n $\in$ **N**. Pruébese que si n no es una k-potencia de un entero, entonces $\sqrt[k]{n}$ es irracional.

Solución

Si $\sqrt[k]{n}$ fuese racional, $\sqrt[k]{n} = \frac{b}{a}$ para algunos enteros a y b. Podemos suponer que a y b son primos entre sí, es decir que m.c.d.(a, b) = 1, porque si no, podemos factorizar a y b en primos por el Teorema Fundamental de la Aritmética, y eliminar los factores primos comunes. Entonces elevando a la potencia k la igualdad anterior:

$$n = \frac{b^k}{a^k},$$

y así $n.a^k = b^k$, luego $n \mid b^k$. Si factorizamos n en potencias de primos

$$n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s},$$

donde no todos los r_j, j =1,..., s pueden ser múltiplos de k, porque si lo fueran n sería una k-potencia de un entero. Sea r_i el primero que no lo es. Como $p_i^{r_i} \mid b^k$ se tiene que p_i debe aparecer en la descomposición en factores primos de b, así $b = p_i^t q$, siendo q primo con p_i, y $r_i < kt$, ya que r_i no es un múltiplo de k, luego

$$b^k = p_i^{kt} q^k,$$

y así

$$na^k = p_1^{r_1} \dots p_i^{r_i} \dots p_s^{r_s} a^k = p_i^{kt} q^k,$$

dividiendo por $p_i^{r_i}$ en ambos miembros se tiene

$$p_1^{r_1}\cdots p_{i-1}^{r_{i-1}}p_{i+1}^{r_{i+1}}\cdots p_s^{r_s}a^k = p_i^{kt-r_i}q^k,$$

luego $p_i \mid (p_1^{r_1}\cdots p_{i-1}^{r_{i-1}}p_{i+1}^{r_{i+1}}\cdots p_s^{r_s}a^k)$, por lo tanto $p_i \mid a^k$. Como p_i es primo, $p_i \mid a$, y como $p_i \mid b$, entonces hemos llegado a una contradicción con m.c.d.(a, b) =1, luego $\sqrt[k]{n}$ no puede ser racional.

Problema 14

Pruébese que si a, b son dos enteros tales que m.c.d.(a, b) =1, entonces

a) m.c.d.(2a + b, a + 2b) = 1 ó 3.

b) m.c.d.($a + b$, $a^2 + b^2$) = 1 ó 2.

c) m.c.d.($a + b$, $a^2 - ab + b^2$) = 1 ó 3.

Solución

a) Como a + 2b = (2a + b) + (b - a). Si d es un número positivo tal que $d \mid (2a + b)$ y $d \mid (a + 2b)$, entonces $d \mid (b - a)$, luego $d \mid (2a + b - b + a) = 3a$, así $d \mid 3a$, por lo tanto $d' = d$ ó $\frac{d}{3}$ dividirá al número a; como $d' \mid (b - a)$ entonces $d' \mid b$ y así d' = 1, puesto que m.c.d.(a, b) =1. Luego d =1 ó 3.

b) Puesto que $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$. Si $d \mid (a^2 + b^2)$ y $d \mid (a + b)$, con d positivo, entonces $d \mid 2b^2$, y $d' = d$ ó $\frac{d}{2}$ dividirá a b^2; como $d' \mid (a^2 + b^2)$ se tiene $d' \mid a^2$, y así d'=1 puesto que m.c.d.(a^2, b^2) =1. Como d' = 1, entonces d = 1 ó 2.

c) Como $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$. Si $d \mid (a + b)$ y $d \mid (a^2 - ab + b^2)$, con d positivo, se tiene que $d \mid 3ab$ y $d' = d$ ó $\frac{d}{3}$ dividirá al número ab. Entonces existe un número r que divide al número d' y tambien al número b, y tal que $\frac{d'}{r}$ divide al número a, por lo que $r \mid b$ y como $r \mid (a + b)$, se tiene que $r \mid a$.

Puesto que m.c.d.(a, b) = 1 se tiene que r = 1. Como $d' \mid a$ y $d' \mid (a + b)$ entonces $d' \mid b$, y así $d' = 1$ y $d = 1$ ó 3.

Tema 3

El Principio de Inducción

Problema 1

Demuéstrese que para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Solución

Denotemos por P(n) la propiedad

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Entonces P(1): $1 = 1^2$. Supongamos que P(k) es cierta, es decir,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2,$$

veamos entonces que P(k + 1) se satisface

$$P(k + 1): 1 + 2 + 3 + ... + (2(k+1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Como

$$1 + 2 + 3 + ... + (2(k + 1) - 1) = 1 + 2 + 3 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) =$$
$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para cada n.

Problema 2

Demuéstrese que para cada $n \geq 0$, el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

Solución

Sea P(n) la propiedad: $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13. Claramente P(0) se satisface ya que

$$4^1 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Supongamos que P(k) es cierta, y veamos que P(k + 1) se satisface. En efecto:

$$4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 4^{(2k+1)+2} + 3^{(k+2)+1} =$$

$$= 4^2 . 4^{2k+1} + 3 . 3^{k+2} = 4^2 (4^{2k+1} + 3^{k+2}) + 3^{k+2} (3 - 16) =$$

$$= 4^2 (13\,t) + 3^{k+2}(-13) = 13\,s,$$

ya que $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ es múltiplo de 13.

Entonces, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para cada n.

Problema 3

Supongamos que $S \subset \mathbf{N}$, $3 \in S$, y que si ($x \in S \Rightarrow x + 3 \in S$). Pruébese que $\{3n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset S$.

Solución

Sea P(n) la Propiedad: el número $3n \in S$. Claramente P(1) se satisface ya que $3 \in S$. Supongamos que P(k) se satisface o sea $3k \in S$, entonces

$$3k + 3 = 3(k + 1) \in \mathbf{S}.$$

Así P(k + 1) es cierta; luego P(n) se satisface para todo $n \in \mathbf{N}$, y por lo tanto

$$\{3n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset S.$$

Problema 4

Pruébese que para cada $n \in \mathbf{N}$

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución

Sea P(n) la propiedad

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Como $1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$, P(1) se satisface. Supongamos que es cierta P(k), entonces

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

luego P(k + 1) se satisface. Así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \in \mathbf{N}$.

Problema 5

Pruébese que para cada entero $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.$$

Solución

Sea P(n) la propiedad

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.$$

Como $1^3 = \left[\frac{1.2}{2}\right]^2 = 1$, P(1) se satisface. Supongamos que P(k) es cierta, entonces

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k\,(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{(k+1)^2\,(k^2 + 4k + 4)}{4} = \left[\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right]^2,$$

luego P(k +1) se satisface. Así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \geq 1$.

Problema 6

Pruébese que para cada entero $n \geq 0$, el número $n^4 - 4n^2$ es divisible por 3.

Solución

Sean P(n) la propiedad: el número $n^4 - 4n^2$ es divisible por 3; entonces como 0 es divisible por 3 se tiene que P(0) se satisface.

Supongamos que P(k) se satisface, entonces

$$(k+1)^4 - 4(k+1)^2 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - 4(k^2 + 2k + 1) =$$

$$= (k^4 - 4k^2) + (4k^3 + 6k^2 - 4k - 3) = (k^4 - 4k^2) + 3(2k^2 - 1) + 4k(k^2 - 1).$$

El primer término es divisible por 3 porque se satisface P(k); el segundo termino claramente es divisible por 3. Luego lo único que tenemos que demostrar es que $k(k^2 - 1)$ es divisible por 3.

Sabemos que $3 \mid [k^4 - 4k^2 = k^2(k^2 - 4)]$, luego $3 \mid k^2$ ó $3 \mid (k^2 - 4)$; así $3 \mid k$ ó $3 \mid (k + 2)$ ó $3 \mid (k - 2)$, o lo que es equivalente, $3 \mid k$ ó $3 \mid (k - 1)$ ó $3 \mid (k + 1)$; en cualquiera de los tres casos 3 divide a $k(k^2 - 1) = k(k - 1)(k + 1)$.

Así P(k + 1) es cierta, y por lo tanto, aplicando el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \geq 0$.

Problema 7

Pruébese que para cada entero $n \geq 2$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Solución

Sea P(n) la Propiedad la igualdad

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Entonces P(2) es cierta, ya que $\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$

Supongamos que se satisface P(k), entonces

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)\,k} + \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

luego P(k + 1) es cierta, y así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \geq 2$.

Problema 8

Pruébese que para cada $n \geq 10$, $2^n > n^3$.

Solución

Sea $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 10 \text{ y } 2^n > n^3\}$. Claramente $10 \in S$ ya que

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000.$$

Supongamos que $k \in S$, entonces

$$2^{k+1} = 2.\,2^k > 2k^3.$$

Luego para demostrar que $k + 1 \in S$ solo tendremos que probar que

$$2k^3 > (k+1)^3,$$

o lo que es lo mismo

$$2k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \text{ ó } k^3 - 3k^2 - 3k > 1 \text{ ó } k(k^2 - 3k - 3) > 1;$$

como $k \geq 10$, es sufiente demostrar

$$k^2 - 3k - 3 > 1 \quad \text{y así} \quad k^2 > 3(k-1),$$

y esto es cierto puesto que $k \geq 10$.

Entonces por el Principio de Inducción

$$S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 10\}.$$

Problema 9

Usando la Inducción Matemática pruébese que

a) $2n + 1 < n^2$ para todo $n \geq 3$.

b) $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$.

Solución

a) Sea $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3 \ \text{ y } \ 2n+1 < n^2\}$; entones $3 \in S$ ya que $2.3 + 1 < 3^2$. Supongamos que $k \in S$, luego

$$2(k+1)+1 = 2k+1+2 < k^2+2,$$

y para probar que $k + 1 \in S$ sólo se necesita demostrar que

$$k^2+2 < (k+1)^2 \ \text{ ó } \ k^2+2 < k^2+2k+1 \ \text{ ó } \ 1 < 2k,$$

que es claramente cierto puesto que $k \geq 3$; luego por el Principio de Inducción se tiene $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\}$.

b) Sea $T = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5 \ \text{ y } \ n^2 < 2^n\}$, entonces $5 \in T$ puesto que $25 < 2^5$. Supongamos que $k \in S$, luego

$$2^{k+1} = 2^k.2 > k^2.2,$$

y para probar que $k + 1 \in T$ solo habrá que demostrar que

$$2k^2 > (k+1)^2 \ \text{ ó } \ 2k^2 > k^2+2k+1 \ \text{ ó } \ k^2 > 2k+1,$$

que es cierto por el apartado a). Así por el Principio de Inducción,

$$T = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}.$$

Problema 10

Pruébese que para cada entero positivo n

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Solución

Sea P(n) la propiedad: la desigualdad

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n},$$

es cierta.

Entonces como $1 \leq 1 = 2 - 1$, P(1) se satisface. Supongamos que P(k) se satisface y que P(k+1) no se satisface

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}>2-\frac{1}{k+1},$$

luego se tendría

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2})-(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2})>$$

$$(2-\frac{1}{k+1})-(2-\frac{1}{k}),$$

por lo tanto

$$\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

así $k > (k+1)^2 - k(k+1) = (k+1)$, lo que es una contradicción , luego P(k + 1) es cierta, así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo n.

Problema 11

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sean $P_1(n)$ la afirmación $n^2 + n + 11$ es primo, y $P_2(n)$ la afirmación $3 \mid (3n+2)$.

a) Notemos que $P_1(1)$, $P_1(2)$,..., $P_1(9)$ son todos verdaderos. ¿Es $P_1(n)$ verdadero para cada n?.

b) Notemos que la implicación $P_2(k) \Rightarrow P_2(k+1)$ es verdadera para cada $k \in \mathbf{N}$. ¿Puede considerarse que $P_2(n)$ es verdadero para cada $n \in \mathbf{N}$?.

Solución

a) No es cierto, porque $P_1(10)$ sería "$10^2 + 10 + 11 = 121$ es un número primo", lo cual es falso, puesto que $121 = 11^2$.

b) No, porque en este caso $P_2(1)$ no se satisface ya que 3 no divide a $3.1 + 2 = 5$.

Problema 12

Sea a un número entero positivo. Vamos a demostrar usando el Principio Fuerte de Inducción que $a^{n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Si $n = 1$, $a^{1-1} = a^0 = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para k, $1 \le k < n$. Entonces

$$a^{n-1} = \frac{a^{n-2}a^{n-2}}{a^{n-3}} = \frac{1.1}{1} = 1,$$

así por el Principio Fuerte de Inducción $a^{n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. ¿Donde falla este argumento?.

Solución

Para que fuese cierto tendría que darse que $n - 2$ y $n - 3$ fueran números entre 0 y $n - 2$, pero si $n - 1 = 1$ se tiene que $n - 3$ sería -1 y -1 no está entre 0 y $n - 2$; luego no se puede aplicar la fórmula del enunciado.

Problema 13

Definimos la sucesión de números $t_1, t_2, t_3,...$ mediante

i) $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.

ii) $t_n = t_{n-3} + t_{n-2} + t_{n-1}$ para cada $n \ge 4$.

Usando la Inducción Matemática pruébese que $t_n < 2^n$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

Solución

Sea $S = \{ n \in \mathbf{N} \mid t_n < 2^n \}$. Entonces 1, 2 y 3 $\in$ S puesto que $t_1 = 1 < 2^1 = 2$, $t_2 = 2 < 2^2 = 4$, $t_3 = 3 < 2^3 = 8$. Supongamos que $n \ge 4$, y que $k \in S$ para todo

$1 \leq k < n$; entonces

$$t_n = t_{n-3} + t_{n-2} + t_{n-1},$$

y por tanto

$$t_n < 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^{n-3}(1 + 2 + 2^2) = 7 \,.\, 2^{n-3} < 8 \,.\, 2^{n-3} = 2^n.$$

Así, por el Principio Fuerte de Inducción, $S = \mathbf{N}$.

Tema 4

Ecuaciones Diofánticas

Problema 1

Calcúlense las soluciones enteras de las ecuaciones diofánticas

a) $28x + 36y = 44$.

b) $66x + 550y = 88$.

Solución

a) Vamos a calcular el m.c.d.(28, 36) para ello utilizaremos el Algoritmo de Euclides

$$28 = 36.0 + 28,$$

$$36 = 28.1 + 8, \tag{1.1}$$

$$28 = 8.3 + 4, \tag{1.2}$$

$$8 = 4.2,$$

luego d = m.c.d(28, 36) = 4 que divide a 44, luego la ecuación tiene solución. Si aplicamos el Algoritmo de resolución de ecuaciones diofánticas lineales, tenemos que, para encontrar una solución, necesitamos conocer q y w tales que

$$28q + 36w = 4.$$

Para ello de la expresión (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} 4 &= 28 - 8.3 = && \text{de (1.1)} \\ &= 28 - 3\,(36 - 28.1) = \\ &= 4.\,28 + (-3).36. \end{aligned}$$

Así q = 4 y w = -3, luego una solución será

$$x_0 = \frac{44q}{d} = 44 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{44w}{d} = -33,$$

de donde el conjunto de soluciones será

$$\{44 + \frac{36t}{4}, - 33 - \frac{28t}{4}\},$$

por lo tanto, para todo entero t existe una solución que tiene la forma

$$\{44 + 9t, - 33 - 7t\}.$$

b) El método a seguir es el mismo, calculamos el m.c.d.(66, 550)

$$\begin{aligned} 66 &= 0.550 + 66, \\ 550 &= 8.66 + 22, \qquad (1.3) \\ 66 &= 3.\,22, \end{aligned}$$

luego el m.c.d.(66, 550) = 22, que divide a 88, así la ecuación tiene solución.

Vamos a calcular q y w tales que

$$66\,q + 550\,w = 22.$$

De (1.3), 22 = (-8).66 + 1.550, luego q = -8, y w =1. Así una solución del sistema será

$$x_0 = \frac{88.\,(-8)}{22} = -32 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{88.1}{22} = 4\,,$$

y cualquier otra solución será de la forma

$$\{-32 + 25t, 4 - 3t\},$$

para cada número entero t.

Problema 2

Pruébese que la ecuación diofántica $ax + by + cz = n$ tiene solución entera si y sólo si m.c.d.(a, b, c) divide a n.

Solución

Sea d = m.c.d.(a, b, c). Como la ecuación $ax + by + cz = n$, tiene solución entera, entonces existen números x_0, y_0, z_0 tales que

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = n.$$

Como d divide a los números a, b y c, entonces d divide a n.

Recíprocamente, si d divide a n y $n = 0$, existe la solución trivial $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; y si $n \neq 0$, sea d' = m.c.d.(a, b); entonces existen x_1, y_1 tales que

$$d' = ax_1 + by_1. \tag{2.1}$$

Como d = m.c.d.(a, b, c) = m.c.d.(d', c) divide a n, existirá una solución w_1, z_1 de la ecuación $d'w + cz = n$, por lo tanto

$$d'w_1 + cz_1 = n, \tag{2.2}$$

así sustituyendo el valor de d' de (2.1) en (2.2) tenemos

$$ax_1w_1 + by_1w_1 + cz_1 = n,$$

por lo tanto $x_0 = x_1w_1$, $y_0 = y_1w_1$, $z_0 = z_1$ es una solución entera de la ecuación

$$ax + by + cz = n.$$

Problema 3

Para abonar una factura de 1840 ptas. se entregan libras esterlinas y dan la vuelta en marcos. Calcúlese las libras entregadas y los marcos devueltos, suponiendo que se ha entregado la cantidad mínima de libras necesarias para pagar y que la devolución sea en marcos (1 marco = 70 ptas. y 1 libra = 180 ptas.).

Solución

Si x es la cantidad de libras entregadas, e y es la cantidad de marcos devueltos tenemos la ecuación lineal

$$1840 = 180x + 70y.$$

Vamos primero a encontrar una solución de esta ecuación calculando el m.c.d.(180, 70),

$$180 = 70.2 + 40, \qquad (3.1)$$

$$70 = 40.1 + 30, \qquad (3.2)$$

$$40 = 30.1 + 10, \qquad (3.3)$$

$$30 = 10.3,$$

así m.c.d.(180, 70) = 10 que divide a 1840. De (3.3)

$$10 = 40 - 30 =$$

por (3.2) $\quad = 40 - (70 - 40) =$

$\quad = 2.40 - 70 =$

por (3.1) $\quad = 2(180 - 2.70) - 70 =$

$\quad = 2.180 - 5.70.$

Así una solución de nuestro sistema es

$$x_0 = \frac{1840.2}{10} = 368 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{1840\,(-5)}{10} = -920,$$

y cualquier otra solución será de la forma

$$\{368 + 7t, -920 - 18t\} \quad \text{con } t \in \mathbf{Z}.$$

Como el x que buscamos es el más pequeño valor positivo con

$$x.180 \geq 1840,$$

entonces

$$(368+7t)180 \geq 1840,$$
$$6624+126t \geq 184,$$
$$126t \geq -6440,$$
$$t \geq -51.$$

Dado que t tiene que ser mínimo, entonces t = -51, así x = 11 e y = -2, por lo que la cantidad de libras entregadas será 11 y la cantidad de marcos recibidos será de 2.

Problema 4

Una persona va a un supermercado y compra 12 litros de leche, unos de leche entera y otros de desnatada, por 1200 ptas. Si la leche entera vale 30 ptas. más por litro que la desnatada y ha comprado el mínimo posible de leche desnatada, ¿cuántos litros habrá comprado de cada una?.

Solución

Sea x el número de litros de leche entera e y el de leche desnatada. Supongamos que la leche desnatada vale z por litro, entonces del enunciado del problema tenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$x+y=12 \tag{4.1}$$

$$x(z+30)+y.z=1200, \tag{4.2}$$

si despejamos de (4.1) la y, y sustituimos en (4.2) tenemos

$$x.z+30\,x+(12-x)\,z=1200,$$
$$30\,x+12\,z=1200,$$

que es una ecuación lineal de la que habrá que calcular sus soluciones enteras.

Calculamos en primer lugar el m.c.d.(30, 12)

$$30=12.2+6, \tag{4.3}$$

$$12=6.2,$$

y así m.c.d.(30, 12) = 6 que divide a 1200, por lo que existen soluciones enteras. De (4.3)

$$6 = 30 + (-2).12,$$

luego una solución de la ecuación será

$$x_0 = \frac{1200.1}{6} = 200 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{1200\,(-2)}{6} = -400,$$

y cualquier otra solución será de la forma

$$\{200 + 2\,t, -400 - 5\,t\} \quad \text{con } t \in \mathbf{Z}.$$

Como 200 + 2 t tiene que ser menor o igual que 12,

$$200 + 2\,t \leq 12 \quad \Rightarrow \quad t \leq -94.$$

Así si $t = -94$, $x = 12$ e $y = 0$, y no habrá comprado leche desnatada que es contrario a las hipótesis del problema, luego $t = -95$, $x = 10$, $y = 2$ y $z = 75$, por lo tanto habrá comprado 10 litros de leche entera a 105 ptas. y dos de desnatada a 75 ptas.

Problema 5

Encuéntrese todas las soluciones en **N** de la ecuación

$$x^2 - y^2 = 252.$$

Solución

Vamos a aplicar el método de resolución de ecuaciones de la forma $x^2 - y^2 = n$.

Como $252 = 2^2.\ 3^2.\ 7$, 252 se puede factorizar como producto de dos números con la misma paridad de las siguientes formas

$$252 = 126.2 = 42.6 = 18.14.$$

De la primera pareja (126, 2) tenemos que una solución es

$$x = \frac{126+2}{2} = 64 \quad \text{e} \quad y = \frac{126-2}{2} = 62,$$

para la pareja (42, 6) se tiene

$$x = \frac{42+6}{2} = 24 \quad \text{e} \quad y = \frac{42-6}{2} = 18,$$

y de la pareja (18, 140) se tiene

$$x = \frac{18+14}{2} = 16 \quad \text{e} \quad y = \frac{18-14}{2} = 2,$$

luego estas serán todas las soluciones en **N** de la ecuación.

Problema 6

Estúdiese si son compuestos los números

a) 23711,

b) $2^{11} - 1$.

Solución

a) Lo primero que habrá que determinar es el menor entero q con $q^2 \geq 23711$, en este caso $q \geq 154$. Entonces habrá que tomar valores de q entre 154 y $\frac{23711+1}{2} = 11856$ y calcular $q^2 - 23711$ hasta que sea cuadrado:

$$154^2 - 23711 = 23716 - 23711 = 5,$$

$$155^2 - 23711 = 24025 - 23711 = 314,$$

$$156^2 - 23711 = 24336 - 23711 = 625 = 25^2,$$

puesto que se obtiene el primer cuadrado para 156, entonces

$$23711 = x^2 - y^2, x = 156, y = 25,$$

así

$$23711 = (x+y)(x-y) = 181 \,.\, 131.$$

Luego 23711 es compuesto.

b) Como en el caso anterior lo primero que habrá que determinar es el menor entero q con $q^2 \geq 2^{11} - 1$, en este caso $q \geq 46$. Entonces habrá que tomar valores entre 46 y $\frac{2^{11} - 1 + 1}{2} = 2^{10}$ y calcular

$$46^2 - (2^{11} - 1) = 2116 - 2047 = 69,$$

$$47^2 - (2^{11} - 1) = 2209 - 2047 = 162,$$

$$48^2 - (2^{11} - 1) = 2304 - 2047 = 257,$$

$$49^2 - (2^{11} - 1) = 2401 - 2047 = 354,$$

$$50^2 - (2^{11} - 1) = 2500 - 2047 = 453,$$

$$51^2 - (2^{11} - 1) = 2601 - 2047 = 554,$$

$$52^2 - (2^{11} - 1) = 2704 - 2047 = 657,$$

$$53^2 - (2^{11} - 1) = 2809 - 2047 = 762,$$

$$54^2 - (2^{11} - 1) = 2916 - 2047 = 869,$$

$$55^2 - (2^{11} - 1) = 3025 - 2047 = 978,$$

$$56^2 - (2^{11} - 1) = 3136 - 2047 = 1089 = 33^2.$$

Por lo tanto

$$2^{11} - 1 = (56 + 33)(56 - 33) = 89 \cdot 23, \text{ luego es compuesto.}$$

Problema 7

Demuéstrese que si m.c.d.(a, b) = d y $a^2 + b^2 = c^2$, entonces

$$\text{m.c.d.}(a, c) = \text{m.c.d.}(b, c) = d.$$

Solución

Sea λ = m.c.d.(a, b, c); entonces si d = m.c.d. (a, b), se tiene que $\lambda \mid d$. Por otro lado, como d divide a los números a y b se tiene que $d^2 \mid c^2$, y así $d \mid c$, luego $d \mid \lambda$ y por lo tanto $\lambda = d$. Si d^* = m.c.d. (b, c), se tiene que $\lambda \mid d^*$. Por otro lado como d^* divide a los números b y c se tiene que ${d^*}^2 \mid a^2$, y así $d^* \mid a$, luego $d^* \mid \lambda$ y por lo tanto $\lambda = d^*$. Análogamente se probaría que m.c.d.(a, c) = d. Luego

$$\text{m.c.d.}(a, c) = \text{m.c.d.}(b, c) = d.$$

Problema 8

Demuéstrese que no existe un triángulo Pitagórico cuya área sea igual a la longitud de la hipotenusa. Encontrar un triángulo rectángulo que sí lo verifique.

Solución

Si el triángulo tiene lados a, b, c y la hipotenusa es c se tiene

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Como el área del triángulo es

$$A = \frac{a \cdot b}{2},$$

se tiene que $c = \frac{a \cdot b}{2}$, luego $a \cdot b = 2c$. Por lo tanto

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4c = c\,(c+4).$$

Ahora bien

$$\text{m.c.d.}(c, c+4) = \text{m.c.d.}(c, 4) = 1, 2 \text{ ó } 4.$$

Si m.c.d.$(c, c+4) = 1$, c y $c+4$ tienen que ser cuadrados , luego $c = x^2$ para algún entero positivo x; de donde

$$c + 4 = x^2 + 4,$$

ahora bien si $c + 4$ fuese un cuadrado, entonces $c + 4 = y^2$ con $y > x$, luego $y = x + r$ con r entero positivo y entonces

$$y^2 = (x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2 \neq x^2 + 4$$

para cualquier par de números enteros positivos x, r, como se puede comprobar fácilmente.

Si m.c.d.$(c, c+4) = 2$ ó 4, $\frac{c}{2}, \frac{c+4}{2}$ ó $\frac{c}{4}, \frac{c+4}{4}$ tendrían que ser cuadrados, y razonando de forma análoga al caso anterior, se puede observar que no existen enteros $\frac{c}{2}, \frac{c}{2} + 2$ ó $\frac{c}{4}, \frac{c}{4} + 1$ que puedan ser ambos cuadrados.

Luego no hay enteros positivos a, b, c que verifiquen $a^2 + b^2 = c^2$ con $a{\cdot}b = 2c$.

Un ejemplo de números reales positivos a, b, c (no todos enteros) que verifican las dos relaciones anteriores es el siguiente:

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}},\ b = 4 \text{ y } c = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Problema 9

Pruébese que 3, 4, 5 es la única solución de $x^2 + y^2 = z^2$ en enteros positivos consecutivos.

Solución

Si x, y, z son tres enteros positivos consecutivos entonces se pueden escribir como $x = n - 1$, $y = n$ y $z = n + 1$ con $n > 1$; por lo que

$$(n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2,$$

así

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 1 + 2n,$$

luego

$$n(n - 4) = 0,$$

y la única solución con $n > 1$ es $n = 4$, por lo tanto $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$.

Problema 10

Encuéntrese todos los triángulos pitagóricos cuya área sea numéricamente igual a su perímetro.

Solución

Sean a, b y c los lados del triángulo siendo c la hipotenusa; entonces

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{10.1}$$

Puesto que el área tiene que ser igual al perímetro, se tiene

$$a + b + c = \frac{a \cdot b}{2} .$$

Entonces

$$c = \frac{a \cdot b}{2} - (a+b),$$

luego sustituyendo c en (10.1) se tiene

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{a \cdot b}{2} - (a+b)\right)^2,$$

y así

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{4} + (a+b)^2 - a \cdot b\,(a+b),$$

luego

$$0 = a \cdot b\left(\frac{a \cdot b}{4} + 2 - a - b\right),$$

como a y b son distintos de 0, $a{\cdot}b + 8 - 4a - 4b = 0$, por lo tanto

$$b\,(a-4) = 4a - 8 = 4\,(a-4) + 8,$$

y así $(b-4)(a-4) = 8$. En particular, $a - 4 \neq 0$, y además

$$b = 4 + \frac{8}{a-4}.$$

Como a - 4 tiene que dividir a 8,

$$a = 5, 6, 8 \text{ ó } 12.$$

Si	$a = 5,$	$b = 12$	y	$c = 13,$
	$a = 6,$	$b = 8$	y	$c = 10,$
	$a = 8,$	$b = 6$	y	$c = 10,$
	$a = 12,$	$b = 5$	y	$c = 13.$

Por lo tanto, esencialmente sólo hay dos soluciones, 5, 12, 13 y 6, 8, 10.

Problema 11

Pruébese que la ecuación diofántica $x^4 - 4y^4 = z^2$ no tiene ninguna solución con x, y, z enteros positivos.

Solución

Podemos escribir la ecuación de la forma

$$(2y^2)^2 + z^2 = (x^2)^2. \tag{11.1}$$

Si esta ecuación tiene una solución $(2y^2, z, x^2)$, podemos suponer que m.c.d.$(2y^2, z, x^2) = 1$, puesto que si esto no ocurre y d = m.c.d.(x, y), entonces podemos escribir

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \text{con m.c.d.}(x_1, y_1) = 1$$

y sustituyendo en (11.1) tendremos que $d^4(x_1^4 - 4y_1^4) = z^2$, luego $d^4 \mid z^2$, y por lo tanto $z = d^2 z_1$, así

$$(2y_1^2)^2 + z_1^2 = (x_1^2)^2, \tag{11.2}$$

donde m.c.d.$(2y_1^2, z_1, x_1^2) = 1$ ó 2.

Veamos que no puede ser 2. Si m.c.d.$(2y_1^2, z_1, x_1^2) = 2$, entonces 2 dividiría a x_1 y z_1, y podríamos expresar $x_1 = 2x_2$ y $z_1 = 2z_2$. De esta forma sustituyendo estos valores en la ecuación (11.2) y simplificando tendríamos

$$(y_1^2)^2 + z_2^2 = (2x_2^2)^2,$$

con m.c.d.$(y_1^2, z_2, 2x_2^2) = 1$, y por lo tanto obtendríamos una solución primitiva de la ecuación Pitagórica. Entonces y_1^2 y z_2 tendrían distinta paridad, pero esto es imposible ya que $(y_1^2)^2 + z_2^2$ es un número par. De esta forma hemos llegado a una contradicción. Por eso podemos suponer que existe una solución $(2y^2, z, x^2)$ de la ecuación (11.1) con

$$\text{m.c.d.}(2y^2, z, x^2) = 1.$$

Aplicando el método de resolución de ecuaciones Pitagóricas, como $2 \mid 2y^2$, si existieran soluciones de esta ecuación tendrían la forma

$$2y^2 = 2st,$$
$$z = s^2 - t^2,$$
$$x^2 = s^2 + t^2,$$

para enteros $s > t > 0$ tales que m.c.d. $(s, t) = 1$, s y t con distinta paridad.

Luego $y^2 = st$, y como s y t son primos entre si, entonces s y t son cuadrados; así

$$s = u^2 \quad \text{y} \quad t = w^2, \text{con } u \text{ y } w \text{ enteros},$$

luego tendríamos una solución de la ecuación

$$x^2 = u^4 + w^4,$$

lo que contradice el hecho de que esta ecuación no tiene solución en los enteros positivos.

Tema 5

Congruencias

Problema 1

a) Póngase un ejemplo donde no se verifique que si

$a^2 \equiv b^2$ mód(m), entonces $a \equiv b$ mód(m).

b) Estúdiese si es cierto que $a \equiv b$ mód(m) implica $a^2 \equiv b^2$ mód(m).

Solución

a) Sean $a = 5$, $b = 4$ y $m = 3$. Entonces $a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$. Por tanto

$$a^2 \equiv b^2 \text{ mód}(3),$$

pero en este caso $a - b = 1$, luego a y b no son congruentes módulo 3.

b) Si $a \equiv b$ mód(m), entonces m divide a $(a - b)$ y por tanto m divide a $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. De aquí obtenemos

$$a^2 \equiv b^2 \text{ mód}(m).$$

Problema 2

Demuéstrese que la diferencia de dos cubos consecutivos no puede ser múltiplo de 3.

Solución

Sean $x = (a+1)^3$ e $y = a^3$, entonces

$$x - y = (a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1.$$

Si suponemos que 3 divide a $(x - y)$, como 3 divide a $(3a^2 + 3a)$, entonces 3 tendría que dividir también a 1, lo que es absurdo.

Problema 3

Demuéstrese que $a^5 \equiv a \text{ mód}(10)$ para todo a.

Solución

Observemos que podemos escribir $(a^5 - a)$ de la forma

$$a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1),$$

y este número siempre es divisible por 2 ya que tiene dos factores que son números consecutivos. Como todo número se puede escribir en la forma

$$5k + r,$$

donde $r = 0, 1, 2, 3, 4$, entonces escribiremos $a = 5k + r$. Veamos que cualquiera que sea r, $(a^5 - a)$ siempre es divisible por 5.

Si $a = 5k$ es evidente.

Si $a = 5k + 1$ entonces $a - 1 = 5k$ y de la descomposición en factores de $(a^5 - a)$ se sigue que este número es divisible por 5.

Si $a = 5k + 2$ podemos escribir

$$a^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1),$$

y de nuevo $(a^5 - a)$ es divisible por 5.

Si $a = 5k + 3$ repitiendo el argumento anterior llegamos a que

$$a^2 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2),$$

y de nuevo queda demostrado lo que queríamos.

Por último, si $a = 5k + 4$, entonces $a + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$ y $(a^5 - a)$ es divisible por 5. Hemos probado entonces que es divisible por 2 y por 5, luego es divisible por 10 y de aquí

$$a^5 \equiv a \text{ mód}(10),$$

cualquiera que sea el número a.

Problema 4

Pruébese que si n es un entero impar entonces $n^2 \equiv 1 \text{ mód}(8)$.

Solución

Si n es impar se puede escribir en la forma $n = 2k + 1$, luego

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1) = (2k + 2)2k = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1),$$

y como $k(k + 1)$ es un número par, es de la forma $2k'$. Por tanto

$$n^2 - 1 = 8k',$$

es decir, $n^2 \equiv 1 \text{ mód}(8)$.

Problema 5

Demuéstrese que si $n \equiv 4 \text{ mód}(9)$, entonces el número n no se puede escribir como suma de tres cubos.

Solución

Supongamos que $n = a^3 + b^3 + c^3$. Como cada número entero se puede escribir en la forma

$$x = 3k + r,$$

con $r = 0, 1, 2$, cada uno de los cubos de la descomposición de n tendrá la forma

$$x^3 = (3k + r)^3 = 27k^3 + 27k^2r + 9kr^2 + r^3 = 9k' + r^3,$$

y por tanto $x^3 \equiv 0$ mód(9), $x^3 \equiv 1$ mód(9) ó $x^3 \equiv 8$ mód(9), según que r sea 0, 1 ó 2. Aplicando esto a los números a, b y c, vemos que la suma $a^3 + b^3 + c^3$ no puede ser nunca congruente con 4 mód(9).

Problema 6

Demuéstrese que si $a \equiv b$ mód(m_1) y $a \equiv b$ mód(m_2), entonces

$$a \equiv b \text{ mód(m.c.m.}(m_1, m_2)).$$

Solución

Del enunciado deducimos que los números m_1 y m_2 dividen a $(a - b)$ y, por tanto, $(a - b)$ es múltiplo común de m_1 y de m_2. Sin más que aplicar la definición de mínimo común múltiplo, obtenemos que $(a - b)$ es múltiplo del m.c.m.(m_1, m_2), por tanto se tiene que m.c.m.(m_1, m_2) divide a $(a - b)$, es decir

$$a \equiv b \text{ mód(m.c.m.}(m_1, m_2)).$$

Problema 7

Pruébese que si m.c.d.$(a, n) = 1$, entonces los enteros

$$c,\ c + a,\ c + 2a, \ldots,\ c + (n - 1)a,$$

forman un conjunto completo de residuos módulo n para cada c.

Solución

Como cada número de la forma $c + sa$, con $0 \leq s \leq n - 1$, es congruente mód(n) con un número q tal que $0 \leq q \leq n - 1$, lo único que hay que demostrar es que dos números distintos de la forma $c + sa$ no pueden ser congruentes mód(n). Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que

$$c + sa \equiv c + s'a \text{ mód}(n),$$

con $0 \leq s, s' \leq n - 1$, entonces

$$(c + sa) - (c + s'a) = (s - s')a = kn.$$

Como a y n son primos entre sí, se tiene que n debe dividir a $(s - s')$, lo que es imposible ya que s y s' son no negativos y menores que n. Por tanto $s = s'$.

Problema 8

Resuélvanse las siguientes congruencias:

a) $3x \equiv 1$ mód(19).

b) $2x \equiv 6$ mód(10).

Solución

a) La ecuación $3x \equiv 1$ mód(19) es equivalente a la ecuación diofántica lineal

$$19k + 3x = 1.$$

Como m.c.d(19, 3) = 1 y, obviamente 1 divide a 1, la ecuación tiene solución.

Aplicando el Algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de 19 y 3.

$$19 = 3.6 + 1,$$

$$3 = 1.3,$$

luego

$$1.19 + (-6).3 = 1,$$

y así una solución particular de la ecuación diofántica para x será

$$x_0 = \frac{(-6)\,1}{1} = -6,$$

y como las otras soluciones son de la forma

$$x = x_0 - \frac{t \cdot 19}{1}, \text{ con t número entero}$$

una solución positiva se obtendrá para $t = -1$, $x = 13$. La solución general es, pues, $x = 13 + 19s$, con s entero arbitrario.

b) Como $2x \equiv 6$ mód(10) es equivalente a la ecuación diofántica

$$10k + 2x = 6,$$

y m.c.d.(10, 2) = 2, que divide a 6, entonces la ecuación tiene solución.

Procediendo como en a) se tiene

$$10 = 5.2,$$

luego

$$10.1 + 2\,(-4) = 2,$$

y así una solución para x será

$$x_0 = \frac{-4 \cdot 6}{2} = -12,$$

y por tanto

$$x = -12 - \frac{t \cdot 10}{2},$$

y obtenemos una solución positiva para $t = -3$, $x = 3$. La solución general es, por tanto, $x = 3 + 5k$, donde k es un número entero arbitrario.

Problema 9

Resuélvase en x e y enteros el sistema

$x + 2y \equiv 3 \text{ mód}(7),$
$3x + y \equiv 2 \text{ mód}(7).$

Solución

Si multiplicamos la primera ecuación por -3 obtenemos

$$-3x - 6y \equiv -9 \text{ mód}(7),$$

y sumando esta nueva ecuación a la segunda se tiene

$$-5y \equiv -7 \text{ mód}(7),$$

es decir,

$$5y \equiv 0 \text{ mód}(7).$$

Así pues y es cualquier múltiplo de 7. Escribamos $y = 7k$; sustituyendo en la primera ecuación tenemos

$$x + 14k \equiv 3 \text{ mód}(7),$$

luego

$$x \equiv 3 \text{ mód}(7),$$

y por tanto $x = 3 + 7k'$. Las soluciones de este sistema tienen entonces la forma

$$x = 3 + 7k', \quad y = 7k,$$

para cualquier par de enteros k y k'.

Problema 10

Encuéntrese el menor número natural $n > 2$ tal que $2 \mid n$, $3 \mid (n+1)$, $4 \mid (n+2)$, $5 \mid (n+3)$ y $6 \mid (n+4)$.

Solución

El número n buscado es un número par tal que

$$n + 1 \equiv 0 \text{ mód}(3),$$

$$n + 2 \equiv 0 \text{ mod}(4),$$

$$n + 3 \equiv 0 \text{ mód}(5),$$

$$n + 4 \equiv 0 \text{ mód}(6),$$

sistema de ecuaciones equivalente a

$$n \equiv 2 \text{ mód}(3),$$

$$n \equiv 2 \text{ mód}(4),$$

$$n \equiv 2 \text{ mód}(5),$$

$$n \equiv 2 \text{ mód}(6),$$

entonces $n - 2$ es múltiplo de 3, 4, 5 y 6, y por tanto es múltiplo de m.c.m$(3, 4, 5, 6) = 60$. Luego el menor número natural n que satisface las condiciones del enunciado es 62.

Problema 11

Resuélvase el sistema de congruencias

$$x \equiv 2 \text{ mód}(5),$$
$$2x \equiv 1 \text{ mód}(7),$$
$$3x \equiv 4 \text{ mód}(11).$$

Solución

Como m.c.d(5, 7) = m.c.d(5, 11) = m.c.d(7, 11) = m.c.d(1, 5) = m.c.d(2, 7) = m.c.d(3, 11) = 1, podemos aplicar el Teorema Chino del Resto.

Una solución de la primera ecuación es 2, una solución de la segunda es 4 y una solución de la tercera es 5. Sean

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5.$$

Sea $m = 5.7.11 = 385$. Con la notación del Teorema Chino del Resto tenemos

$$t_1 = \frac{385}{5} = 77, \qquad t_2 = 55, \qquad t_3 = 35.$$

Por lo tanto tenemos que resolver cada una de las siguientes ecuaciones

$$77\, y_1 \equiv 1 \text{ mód}(5), \tag{11.1}$$

$$55\, y_2 \equiv 1 \text{ mód}(7), \tag{11.2}$$

$$35\, y_3 \equiv 1 \text{ mód}(11). \tag{11.3}$$

Como $75\, y_1 \equiv 0 \text{ mód}(5)$ restando esta ecuación de (11.1) obtenemos $2\, y_1 \equiv 1 \text{ mód}(5)$ y una solución de esta ecuación es $y_1 = 3$. Análogamente, puesto que $49\, y_2 \equiv 0 \text{ mód}(7)$ restándola a (11.2) obtenemos $6\, y_2 \equiv 1 \text{ mód}(7)$, y una solución es $y_2 = 6$. Por último como $33\, y_3 \equiv 0 \text{ mód}(11)$ restándola a (11.3) tenemos $2\, y_3 \equiv 1 \text{ mód}(11)$ y de aquí $y_3 = 6$.

Una solución particular del sistema será por tanto

$$x_0 = x_1.t_1.y_1 + x_2.t_2.y_2 + x_3.t_3.y_3 = 2.77.3 + 4.55.6 + 5.35.6 = 2832,$$

y la solución general será de la forma

$$x = 2832 + 385\,\lambda,$$

para cualquier λ entero.

Problema 12

a) Hállese el resto de dividir $23^{84\,292}$ entre 7.

b) Hállese el resto de dividir $113^{34\,291}$ entre 5.

Solución

a) Como $23 \equiv 2$ mód(7) entonces $23^3 \equiv 1$ mód(7). Puesto que $84\,292 = 28\,097\,.\,3 + 1$, podemos escribir

$$23^{84\,292} = 23^{28\,097\,.\,3}.\,23 \equiv 2 \text{ mód}(7)$$

luego el resto de la división es 2.

b) Como $113 \equiv 3$ mód(5) entonces $113^2 \equiv -1$ mód(5). Puesto que $34\,291 = 2.17\,145 + 1$, podemos escribir

$$113^{34\,291} = 113^{2.17\,145}.\,113,$$

y como $113^{2.17\,145} \equiv -1$ mód(5), entonces

$$113^{34\,291} \equiv (-1).3 \text{ mód}(5) \equiv 2 \text{ mód}(5),$$

luego el resto de la división es 2.

Problema 13

Demuéstrese que para todo n natural, $23^{3n+2} - 7n + 4$ no es múltiplo de 7.

Solución

Puesto que

$$23 \equiv 2 \text{ mód}(7), \quad 23^2 \equiv 4 \text{ mód}(7), \quad 23^3 \equiv 1 \text{ mód}(7),$$

entonces

$$23^{3n+2} = 23^{3n}.23^2 \equiv 4 \text{ mód}(7).$$

Por otra parte como

$$7n \equiv 0 \text{ mód}(7),$$

tenemos que

$$23^{3n+2} - 7n + 4 \equiv (4 - 0 + 4) \text{ mód}(7) \equiv 1 \text{ mód}(7),$$

luego para ningún n, los números de la forma dada pueden ser múltiplos de 7.

Problema 14

Supongamos que p es un número primo impar. Demuéstrese

a) $1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \text{ mód}(p)$,

b) $1^p + 2^p + ... + (p-1)^p \equiv 0 \text{ mód}(p)$.

Solución

Por el Pequeño Teorema de Fermat sabemos que

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ mód}(p), \qquad (14.1)$$

cuando $1 \leq a \leq p-1$, entonces

a) $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} \equiv (1 + \ldots^{p-1} \ldots + 1)$ mód(p)
$\equiv (p-1)$ mód(p)
$\equiv -1$ mód(p).

b) De (14.1) tenemos que

$$a^p \equiv a \text{ mód}(p), \qquad 1 \leq a \leq p-1,$$

y así

$$1^p + 2^p + \ldots + (p-1)^p \equiv (1 + 2 + \ldots + (p-1)) \text{ mód}(p) \equiv 0 \text{ mód}(p),$$

ya que la suma de la progresión aritmética del interior del paréntesis es igual a $p\frac{p-1}{2}$, que es múltiplo de p.

Problema 15

Demuéstrese que el recíproco del Pequeño Teorema de Fermat es falso calculando 2^{340} módulo 341.

Solución

En primer lugar comprobamos que 341 no es primo, puesto que es 11.31; como

$$2^{10} = 1\ 024 \equiv 1 \text{ mód}(341),$$

entonces

$$2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1 \text{ mód}(341),$$

y por lo tanto satisface el Pequeño Teorema de Fermat, a pesar de que 341 no es primo.

Problema 16

Demuéstrese que si p es un primo impar entonces $p \mid (2^{2p-1} - 2)$.

Solución

Por el Pequeño Teorema de Fermat sabemos que $2^{p-1} \equiv 1$ mód(p), luego $2^{2(p-1)} \equiv 1$ mód(p). Como $2 \equiv 2$ mód(p), entonces

$$2.2^{2(p-1)} = 2^{2p-1} \equiv 2 \text{ mód}(p),$$

y por tanto p divide a $2^{2p-1} - 2$.

Tema 6

Sistemas de Numeración y Criterios de Divisibilidad

Problema 1

Escríbanse en base 10 los siguientes números: $3541_7, 58321_{12}$ y 101111_2.

Solución

Basta expresar cada uno de esos números como suma de potencias de las respectivas bases y efectuar la suma:

$3541_7 = 1 + 4.7 + 5.7^2 + 3.7^3 = 1303,$

$58321_{12} = 1 + 2.12 + 3.12^2 + 8.12^3 + 5.12^4 = 117961,$

$101111_2 = 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + 0.2^4 + 1.2^5 = 47.$

Problema 2

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

a) $124_5 = x_9,$

b) $132_x = 330_5.$

Solución

a) Escribimos 124_5 en base 10:

$$124_5 = 4 + 2.5 + 1.5^2 = 39_{10},$$

y a continuación expresamos el número 39 en base 9. Utilizando el Algoritmo de Euclides tenemos

$$39 = 4.9 + 3,$$

$$4 = 0.9 + 4,$$

luego $39_{10} = 43_9$, y así pues $x = 43$.

b) Procediendo como en el apartado a) vemos que el número 330 en base 5 es el número decimal 90, por tanto hay que encontrar el x tal que $132_x = 90$, es decir

$$2 + 3.x + x^2 = 90.$$

La raíces de esta ecuación de segundo grado son 8 y -11. Luego el valor buscado es $x = 8$.

Problema 3

Calcúlese:

a) $13 + 23 + 33$,

a) 43.21,

donde todos los números están expresados en base 5.

Solución

Una forma de realizar estas operaciones consiste en expresar todos los números en base 10, efectuar la suma o el producto en esa base y expresar finalmente el resultado en base 5 de nuevo. Sin embargo no vamos a hacerlo así, ya que sumar o multiplicar en cualquier base es tan sencillo como en base 10.

a) Para calcular esta suma empezamos sumando las unidades de primer orden, en nuestro ejemplo 3 + 3 + 3, el resultado es 9, que en base 5 es 14. Por tanto la cifra de las unidades de primer orden de la suma será 4 y el 1 lo añadimos a la suma de las unidades de segundo orden, es decir 1 + 1 + 2 + 3 = 7, que es 12 en base 5. Por tanto

$$13_5 + 23_5 + 33_5 = 124_5.$$

b) Para calcular el producto se procede análogamente:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \underline{21} \\ 43 \\ \underline{141} \\ 2003 \end{array}$$

Problema 4

Demuéstrese que un entero escrito en base 7 es par si y sólo si la suma de sus cifras es par.

Solución

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el número en cuestión es positivo. Podemos escribir el número $n = (a_k \dots a_2\, a_1\, a_0)_7$ como

$$n = a_0 + a_1.7 + a_2.7^2 + \dots + a_k.7^k,$$

en base 10. Supongamos que n es par, entonces tiene que ser congruente con 0 módulo(2). Como

$$7 \equiv 1 \text{ mód}(2),$$

entonces

$$7^2 \equiv 1 \text{ mód}(2),$$

$$\dots$$

$$7^k \equiv 1 \text{ mód}(2),$$

por tanto

$$\left(n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 7^i\right) \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \bmod (2)\,, \tag{4.1}$$

y como, por hipótesis, n es par entonces la suma de los coeficientes a_i debe ser par. Recíprocamente si la suma de las cifras de n es par, por (4.1) vemos que n es par. Esto completa la demostración.

Comprobemos un ejemplo concreto. El número 1355_7 es par ya que $1 + 3 + 5 + 5 = 14$, que es par. Si escribimos 1355_7 en base 10 obtenemos el número

$$5 + 5.7 + 3.7^2 + 1.7^3 = 530,$$

que, evidentemente, es par.

Problema 5

Pruébese que todo número natural se puede escribir de modo único en la forma:

$$n = a_0 + 3.a_1 + 3^2.a_2 + \ldots + 3^k.a_k,$$

para algún k, donde $a_i = -1, 0, 1$, para $i = 0, 1, \ldots, k$.

Solución

Sabemos que cualquier número n se puede escribir de modo único en la forma

$$n = b_0 + 3.b_1 + 3^2.b_2 + \ldots + 3^{k'}.b_{k'}, \tag{5.1}$$

para algún k' con $0 \leq b_j < 3$. Sea j el primer subíndice para el que $b_j = 2$; escribiremos $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, \ldots, j\text{-}1$, y teniendo en cuenta que $b_j = 3 - 1$, tenemos que

$$3^j.b_j + 3^{j+1}.b_{j+1} = 3^j.(3 - 1) + 3^{j+1}.b_{j+1} = 3^j.(-1) + 3^{j+1}.(b_{j+1} + 1),$$

y así tomaríamos $a_j = -1$. Según los valores que tome $b_{j+1} + 1$ distinguimos diferentes casos.

Si $b_{j+1} + 1$ es 3 entonces $3^{j+1}.(b_{j+1} + 1) = 3^{j+2}$, y entonces tomamos $a_{j+1} = 0$.

Si $b_{j+1} + 1$ es 2 se procede como antes

$$3^{j+1}.2 + 3^{j+2}.b_{j+2} = 3^{j+1}.(3 - 1) + 3^{j+2}.b_{j+2} = 3^{j+1}.(-1) + 3^{j+2}(b_{j+2}+1),$$

y así tomaríamos $a_{j+1} = -1$.

Si $b_{j+1} + 1$ es 1 tomamos $a_{j+1} = b_{j+1} + 1$.

A continuación se procede del mismo modo con el coeficiente $b_{j+2} + 1$ ó b_{j+2}, según los casos, y así sucesivamente se llega a expresar n en la forma deseada donde k es k' o $k' + 1$, según que el término que aparece con $3^{k'}$ sea 0, 1 ó 2.

La unicidad de la forma de escribir el número n se deduce de la unicidad de la forma (5.1) y del procedimiento de obtención de los coeficientes a_i, que están unívocamente determinados.

Como ejemplo numérico concreto consideremos el número 385:

$$385 = 1 + 2.3 + 0.3^2 + 2.3^3 + 1.3^4 + 1.3^5,$$

y aplicando el proceso descrito arriba obtenemos

$$385 = 1 + (-1).3 + 1.3^2 + (-1).3^3 + (-1).3^4 + (-1).3^5 + 1.3^6.$$

Problema 6

a) Hállense los criterios de divisibilidad por 14 y por 9.

b) Aplíquense estos criterios para obtener la cifra designada por x tal que el número 68x062 sea divisible por 126.

Solución

a) Como $1 \equiv 1$ mód(9) y $10 \equiv 1$ mód(9), entonces $10^r \equiv 1$ mód(9) para todo r, luego

$$n = \sum_{i=0}^{t} a_i \cdot 10^i,$$

es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus cifras a_i es múltiplo de 9.

Calculamos ahora los restos módulo 14 de las potencias de 10:

$$1 \equiv 1 \text{ mód}(14),$$

$$10 \equiv -4 \text{ mód}(14),$$

$$10^2 \equiv 2 \text{ mód}(14),$$

$$10^3 \equiv -8 \text{ mód}(14),$$

$$10^4 \equiv 4 \text{ mód}(14),$$

$$10^5 \equiv -2 \text{ mód}(14),$$

$$10^6 \equiv 8 \text{ mód}(14).$$

De aquí en adelante se repiten los restos módulo 14, por lo tanto n será divisible por 14 si y sólo si

$$a_0 - 4.a_1 + 2.a_2 - 8.a_3 + 4.a_4 - 2.a_5 + 8.a_6 - 4.a_7 + ...,$$

es divisible por 14.

b) Para que 68x062 sea divisible por 126 tiene que serlo por 9 y por 14. Para lo primero es necesario que

$$6 + 8 + x + 0 + 6 + 2 = 22 + x,$$

sea múltiplo de 9. El único número de una cifra que satisface esta condición es 5. Así pues $x = 5$. Comprobamos ahora mediante el criterio obtenido en a), que el número 685062 es múltiplo de 14. En efecto

$$2 - 4.6 + 2.0 - 8.5 + 4.8 - 2.6 = -42,$$

es múltiplo de 14.

Problema 7

a) Hállense los criterios de divisibilidad por 4 y por 13.

b) Aplíquense estos criterios para determinar el mayor número de seis cifras divisible por 4 y por 13.

Solución

Sea

$$n = \sum_{i=0}^{t} a_i \cdot 10^i,$$

entonces

$$1 \equiv 1 \text{ mód}(4),$$

$$10 \equiv 2 \text{ mód}(4),$$

$$10^2 \equiv 0 \text{ mód}(4),$$

y por tanto

$$10^r \equiv 0 \text{ mód}(4),$$

para todo r mayor o igual que 2. Por consiguiente, n es múltiplo de 4 si y sólo si $a_0 + 2.a_1$ es múltiplo de 4. Análogamente

$$1 \equiv 1 \text{ mód}(13),$$

$$10 \equiv -3 \text{ mód}(13),$$

$$10^2 \equiv 9 \text{ mód}(13),$$

$$10^3 \equiv -1 \text{ mód}(13),$$

$$10^4 \equiv 3 \text{ mód}(13),$$

$$10^5 \equiv -9 \text{ mód}(13),$$

$$10^6 \equiv 1 \text{ mód}(13).$$

A partir de aquí se repiten los restos módulo 13. Entonces n es divisible por 13 si y sólo si

$$a_0 - 3.a_1 + 9.a_2 - 1.a_3 + 3.a_4 - 9.a_5 + a_6 - ...,$$

es múltiplo de 13.

b) Sea $n = a_0 + a_1.10 + ... + a_5.10^5$, un número de seis cifras múltiplo de 4 y 13. Por los criterios obtenidos en el apartado a) se tiene que

$$a_0 + 2.a_1$$

es múltiplo de 4, y

$$a_0 - 3.a_1 + 9.a_2 - a_3 + 3.a_4 - 9.a_5,$$

es múltiplo de 13. Como estamos buscando el mayor número de seis cifras con estas características, supongamos que $a_5 = a_4 = ... = a_2 = 9$, entonces hay que encontrar a_0 y a_1 de modo que $a_0 + 2.a_1$ sea múltiplo de 4, $a_0 - 3.a_1 + 18$ sea múltiplo de 13 y el número n sea máximo. Para ello damos a la cifra a_1 los valores 9, 8, 7,..., en la segunda condición y de ahí obtenemos posibles valores para la cifra a_0 y comprobamos si satisfacen la primera condición. Se llega a que la solución buscada es $a_1 = 6$ y $a_0 = 0$. Por tanto el número n es 999960.

Obsérvese que el ejemplo numérico se ha resuelto para utilizar los criterios de divisibilidad obtenidos en a). Podríamos haber encontrado mucho más fácilmente n procediendo así: como el mayor número de seis cifras es 999999, calculamos su resto módulo 52:

$$999999 \equiv 39 \text{ mód}(52),$$

y por tanto $999999 - 39 = 999960$, es el número buscado.

Problema 8

Considérese el número $n = 123456789101112...100$, donde los números escritos son los naturales de 1 a 100 sin espacios entre ellos. Estúdiese si n es divisible por 9.

Solución

Sabemos que n es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 9. Esto podemos expresarlo diciendo que un número es congruente con la suma de sus cifras módulo 9. Por lo tanto n será divisible por 9 si y sólo si

$$1.21 + 2.20 + 3.20 + ... + 9.20,$$

lo es. Pero el valor de la suma es 901, que no es divisible por 9. Por consiguiente, el número n no es divisible por 9.

Problema 9

Dado un número natural $n = a_t a_{t-1} ... a_1 a_0$, demuéstrese

a) n es divisible por 2 si y sólo si a_0 es par.

b) n es divisible por 4 si y sólo si el número $a_1 a_0$ lo es.

c) n es divisible por 5 si y sólo si a_0 es 0 ó 5.

Solución

a) Sabemos que $1 \equiv 1$ mód(2) y $10^r \equiv 0$ mód(2), para todo $r \geq 1$. Por tanto n es divisible por 2 si y sólo si a_0 lo es, es decir si y sólo si a_0 es par.

b) Por el problema 7 sabemos que $4 \mid 10^i$ para todo $i \geq 2$. Entonces n es divisible por 4 si y sólo si $4 \mid (a_0 + 10.a_1)$. Pero $a_0 + 10.a_1$ es precisamente el número $a_1 a_0$.

c) Como 10^r es múltiplo de 5 para todo $r \geq 1$, tenemos que n es divisible por 5 si y sólo si a_0 lo es. Es decir si y sólo si a_0 es 0 ó 5.

Problema 10

a) Obténgase una generalización del criterio de divisibilidad por k de un número entero n escrito en base b, y como consecuencia

b) Obténgase un criterio de divisibilidad de n_9 por 8.

c) Estúdiese si 53286_9 es divisible por 8.

Solución

a) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que n es positivo y

$$n = a_0 + a_1.b + a_2.b^2 + \dots + a_t.b^t.$$

Calculamos entonces los restos de dividir b^i por k, para $i = 0, 1, \dots, t$. Sean

$$b^i \equiv r_i \text{ mód}(k),$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{t} a_i \cdot b^i \equiv \sum_{i=0}^{t} a_i \cdot r_i \bmod (k),$$

luego n será divisible por k si y sólo si $\sum_{i=0}^{t} a_i \cdot r_i$ es congruente con 0 módulo k, es decir si y sólo si la suma anterior es divisible por k.

b) Como $9^i \equiv 1 \text{ mód}(8)$ para todo i natural tenemos que todos los r_i son iguales a 1. Por lo tanto un número n, escrito en base 9, es divisible por 8 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 8.

c) Aplicando el criterio de b) al número dado obtenemos

$$5 + 3 + 2 + 8 + 6 = 24,$$

que es múltiplo de 8. Por lo tanto el número 53286_9 lo es.

Tema 7

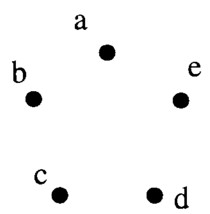
Grafos, Digrafos y Multigrafos

Problema 1

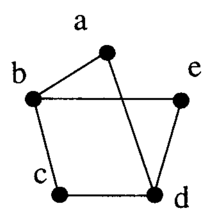
Dado el grafo G = (V, E) donde V = {a, b, c, d, e} y E = {ab, bc, be, cd, de, ad}, constrúyase una representación gráfica de G.

Solución

Hemos de representar cada vértice por un punto:



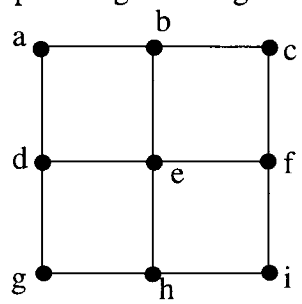
A continuación se representa cada arista por una línea uniendo los puntos que representan los extremos de dicha arista:



La figura anterior es una representación gráfica del grafo G. Por supuesto no es la única solución posible.

Problema 2

Sea G el grafo dado por la siguiente figura:



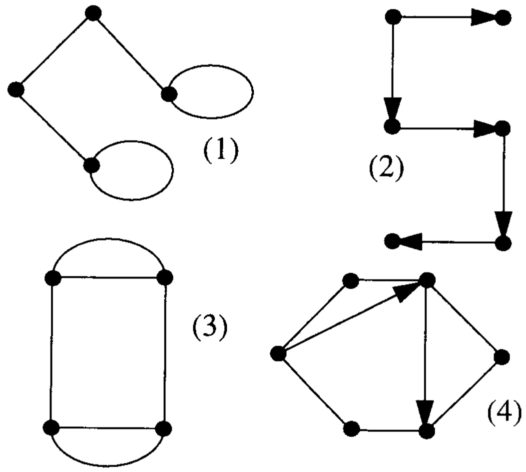
Escríbase explícitamente el conjunto de vértices y de aristas de G.

Solución

El conjunto de vértices del grafo G es {a, b, c, d, e, f, g, h, i}. El conjunto de aristas del grafo viene dado por los pares de vértices unidos por una línea de la figura. Por tanto el conjunto de aristas es: {ab, ad, bc, be, cf, de, dg, ef, eh, fi, gh, hi}.

Problema 3

Dígase cuál de los diagramas siguientes corresponde a un multigrafo, a un pseudografo y a un digrafo:



Solución

El diagrama (1) corresponde a un pseudografo, ya que tal diagrama posee lazos por lo que no representa un grafo.

El diagrama (2) representa un digrafo pues todas las aristas están orientadas.

El diagrama (3) es la representación gráfica de un multigrafo, hay vértices que están unidos por más de una arista y por tanto no representa un grafo.

El diagrama (4) no representa un grafo pues existen aristas orientadas, ni un digrafo pues hay aristas que no están orientadas. Tal diagrama no representa ningún objeto que se pueda catalogar dentro de los conceptos de grafo, digrafo, pseudografo, multigrafo o combinaciones de los anteriores como pseudomultidigrafo.

Problema 4

Sea R una relación de orden sobre un conjunto finito V. Se define el pseudodigrafo $G_R = (V, E)$ de la relación R como el grafo cuyo conjunto de vértices es V y el conjunto de aristas está formado por los pares de vértices relacionados por la relación R. Es decir, si x e y son elementos de V, xy es una arista de G_R si y sólo si xRy.

(a) Pruébese que G_R así definido es un pseudodigrafo.

(b) Dado un pseudodigrafo G, ¿qué condiciones debe cumplir G para ser el pseudodigrafo de una relación de orden?

Solución

(a) Para probar que G_R es un pseudodigrafo hemos de probar que no existen varias aristas con los mismos extremos. Ahora bien este hecho está garantizado gracias a la propiedad antisimétrica de las relaciones de orden.

(b) Dada una relación de orden R el pseudodigrafo G_R verifica:

1. Para cada vértice existe un lazo cuyo extremo es dicho vértice a causa de la propiedad reflexiva de las relaciones de orden.

Además en virtud de la propiedad transitiva:

2. Si xy es una arista de G_R y yz es otra arista entonces xz es también una arista de G_R.

Recíprocamente, todo pseudodigrafo que verifique las propiedades 1 y 2 es el pseudodigrafo de una relación de orden. En efecto, sea G un pseudodigrafo que verifique las propiedades 1 y 2. Definimos la siguiente relación R en el conjunto de vértices de G:

Dados x e y dos vértices de G, x está relacionado con y por R, es decir, xRy si existe una arista de G cuyo origen es x y su fin es y.

Hemos de probar que R es relación de orden:

1. R es reflexiva gracias a la propiedad 1.

2. R es antisimétrica a causa de ser G un pseudodigrafo y estar prohibido que dos aristas diferentes tengan los mismos extremos.

3. R es una relación transitiva por la propiedad 2.

Por la definición de R se verifica que G y G_R son el mismo grafo con lo cual G es el grafo de una relación de orden.

Problema 5

Dados los grafos de la siguiente figura:

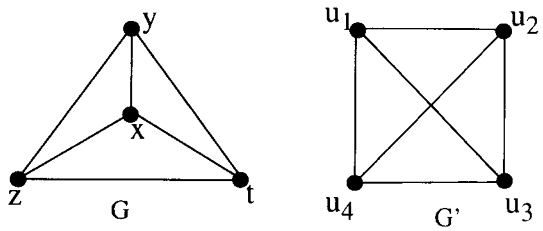


Figura 2.1.7

Un isomorfismo entre G y G' viene determinado por la siguiente biyección f: V(G) $\rightarrow$ V(G'):

$$f(x) = u_1, f(y) = u_2, f(z) = u_3, f(t) = u_4.$$

Constrúyase un isomorfismo g de G a G' diferente de f.

Solución

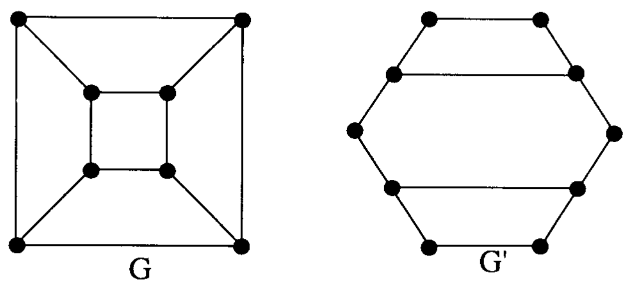
Sea g:V(G) $\rightarrow$ V(G') la biyección definida del siguiente modo:

$$f(x) = u_2, f(y) = u_1, f(z) = u_3, f(t) = u_4.$$

La biyección g define un isomorfismo de G en G', pues vértices adyacentes en G se transforman en vértices adyacentes en G' y las preimágenes de vértices adyacentes de G' son vértices adyacentes de G.

Problema 6

Pruébese que el grafo G de la figura siguiente no es isomorfo a G'.

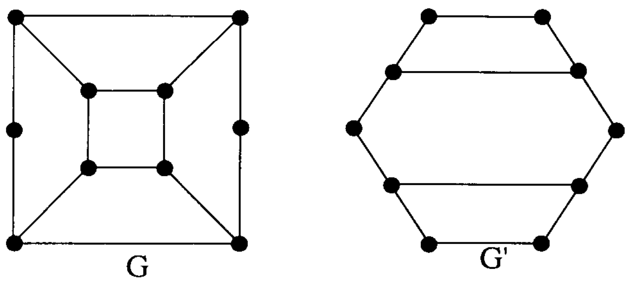


Solución

Si G y G' fueran isomorfos debería existir una biyección entre el conjunto de vértices de G y el de G'. En particular G y G' deberían tener el mismo número de vértices. Sin embargo G tiene 8 vértices y G tiene 10, con lo que es imposible que exista tal biyección y los dos grafos no son isomorfos.

Problema 7

¿El grafo G de la figura siguiente es isomorfo a G'?.



Solución

Obsérvese que G y G' tienen el mismo número de vértices, luego existen biyecciones entre los vértices de G y de G'. Sin embargo un isomorfismo entre G y G' debe enviar vértices con grado dos a vértices con grado dos. Por tanto el número de vértices de grado dos en G y G' debería ser el mismo si fueran isomorfos. Ahora bien el número de vértices con grado dos en G es dos y en G' es seis. Luego G y G' no son isomorfos.

Problema 8

Un isomorfismo de un grafo en sí mismo se denomina automorfismo. Pruébese que la composición de aplicaciones define una operación en el conjunto de automorfismos de un grafo. Pruébese que el conjunto de automorfismos de un grafo forma un grupo con la operación composición. Tal grupo se denomina el grupo de automorfismos de un grafo. El grupo de automorfismos de un grafo es útil para detectar si dos grafos son isomorfos, pues en tal caso los grupos de automorfismos deben ser isomorfos.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo y Aut(G) el conjunto de automorfismos de G. Sean f y g dos automorfismos de G, por ser f y g biyecciones de V en V, $g \circ f$ es una biyección de V en V. Además como f y g son automorfismos, si v y w son vértices de G, v y w son adyacentes si sólo si f(v) y f(w) lo son, y f(v) y f(w) son adyacentes si y sólo si g(f(v)) y g(f(w)) son adyacentes. Entonces $g \circ f$ es un automorfismo.

Hemos de ver que el conjunto Aut(G) con la operación composición tiene estructura de grupo:

1. La operación es asociativa por serlo la composición de biyecciones entre conjuntos.

2. El elemento neutro es el automorfismo id de G definido por la siguiente biyección:

$$\text{para cada vértice } v \text{ se define } id(v) = v.$$

Se trata claramente de un automorfismo pues evidentemente v y w son adyacentes si sólo si $id(v) = v$ es adyacente a $id(w) = w$. Por otra parte id es el elemento neutro pues para todo automorfismo de G, f, $id \circ f = f \circ id = f$.

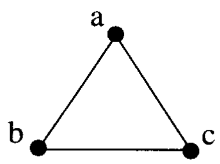
3. Dado un automorfismo f de G el automorfismo f^{-1}, definido por la biyección inversa de la biyección f, es el elemento inverso para la composición de automorfismos. Es decir, f^{-1} está definido del siguiente modo:

$$f^{-1}(v) = w \text{ si sólo si } f(w) = v.$$

Evidentemente f^{-1} es un automorfismo de G, pues por ser f automorfismo dos vértices de G, v, w, son adyacentes si y sólo si f(v) y f(w) lo son y, por tanto, dos vértices de G, $u = f(v)$ y $t = f(w)$ son adyacentes si y sólo si $v = f^{-1}(u)$ y $w = f^{-1}(t)$ son adyacentes. Por último, es claro que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ por la propia definición de f^{-1}.

Problema 9

Hállense todos los subgrafos del grafo:



Solución

Realizaremos la lista de subgrafos de grafo de la figura por orden creciente al número de aristas:

1. Subgrafos con cero aristas:

1.1. Con un vértice:

grafo 1.1.1: ({a}, ∅), grafo 1.1.2: ({b}, ∅), grafo 1.1.3: ({c}, ∅).

1.2. Con dos vértices:

grafo 1.2.1: ({a, b}, ∅), grafo 1.2.2: ({b, c}, ∅), grafo 1.2.3: ({a, c}, ∅).

1.3. Con tres vértices:

grafo 1.3.1: ({a, b, c}, ∅).

2. Subgrafos con una arista:

Por tener una arista deben tener al menos dos vértices (los extremos de dicha arista).

2.1. Subgrafos con dos vértices:

grafo 2.1.1: ({a, b}, {ab}), grafo 2.1.2: ({b, c}, {bc}), grafo 2.1.3: ({a, c}, {ac}).

2.2. Subgrafos con tres vértices:

grafo 2.2.1: ({a, b, c}, {ab}), grafo 2.2.2: ({a, b, c}, {bc}), grafo 2.2.3: ({a, b, c}, {ac}).

3. Subgrafos con dos aristas:

Por tener dos aristas deben tener tres vértices:

grafo 3.1.1: ({a, b, c}, {ab, bc}), grafo 3.1.2: ({a, b, c}, {ab, ac}), grafo 3.1.3: ({a, b, c}, {ac, bc})

4. Subgrafos con tres aristas:
El único subgrafo con tres aristas del grafo G es el propio G.

Problema 10

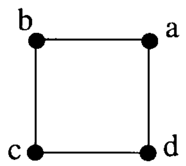
Pruébese que todo grafo completo es regular. Obténgase un ejemplo de grafo regular no completo.

Solución

En primer lugar se probará que todo grafo completo es regular:

Sea G un grafo completo con r vértices. Todo vértice de G debe ser adyacente a cualquier otro vértice de G por lo tanto tal vértice tiene grado r-1. Así pues G es un grafo donde todos los vértices tienen grado r-1, luego es regular.

En segundo lugar el grafo de la siguiente figura es regular, pues todos sus vértices tienen grado dos, sin embargo no es completo pues los vértices a y c no son adyacentes.



Problema 11

(a) Pruébese que para todo grafo G = (V, E) se verifica:

$$\#E \leq \frac{1}{2}\,\#V\,(\#V-1).$$

(b) Sea G = (V, E) un grafo tal que

$$\#E = \frac{1}{2}\,\#V\,(\#V-1).$$

Pruébese que G es un grafo completo.

Solución

Sea G = (V, E) un grafo con r vértices. Es claro que el grafo completo, K_r, es el grafo que tiene más aristas entre todos los grafos con r vértices pues tiene todas las aristas posibles que unen cada pareja de vértices. Así se verifica:

$$\#E \leq \text{número de vértices de } K_r.$$

Además si $\#E$ = número de vértices de K_r, G debe tener todas las aristas posibles y por tanto tener todos sus vértices unidos por una arista, luego G sería isomorfo a K_r.

Así para probar (a) y (b) basta verificar que K_r tiene $\frac{1}{2}\, r\,(r-1)$ aristas. Obsérvese que cada vértice x de K_r es extremo de r-1 aristas que tienen por extremos a x y a todos los r-1 vértices de K_r diferentes de x. Así hay r-1 aristas por cada uno de los r vértices, pero de este modo contamos dos veces cada arista (una vez por cada extremo). Resultan así $\frac{1}{2}\, r\,(r-1)$ aristas.

Problema 12

Demuéstrese que todos los subgrafos (k - 2)-regulares de K_k son isomorfos a K_{k-1}, para k impar.

Solución

Sea G = (V, E) un subgrafo de K_k que sea (k-2)-regular, con k un número impar. Por ser G (k - 2)-regular, G debe tener al menos k-1 vértices. En efecto, dado un vértice cualquiera de G, v, deben existir k-2 vértices distintos de v adyacentes, pues G es (k - 2)-regular. Supongamos que G tuviera k vértices. Para ser G (k - 2)-regular, para cada vértice de K_k debe existir una única arista de K_k que no pertenezca a G y tenga tal vértice por extremo. Ya que cada arista de K_k que no pertenece a G tiene dos extremos, se obtiene:

$$\#E = (\text{Número de aristas de } K_k) - \frac{k}{2}.$$

Pero como $\#E$ es un número entero y k es impar la igualdad anterior no es posible. Así pues $\#V = k - 1$.

Sea v el vértice de K_k que no pertenece a V. Todas las aristas de K_k cuyos extremos están en V deben pertenecer a E. En efecto si w es un vértice de V la arista vw no pertenece a E. Como en K_k hay k - 1 aristas con extremo w y en G debe haber k - 2, entonces todas las aristas de K_k con uno de sus extremos w y el otro diferente de v deben estar en G. Por tanto todos los elementos de V son adyacentes y G es completo con k - 1 vértices. Luego G es isomorfo a K_{k-1}.

Problema 13

Encuéntrese un subgrafo 2-regular de K_4 no isomorfo a K_3.

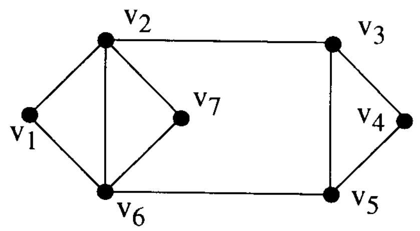
Solución

Tomemos $K_4 = (\{a, b, c, d\}, \{ab, bc, cd, da, ac, bd\})$. El subgrafo G de K_4 definido por $G = (\{a, b, c, d\}, \{ab, bc, cd, da\})$ es 2-regular y no es isomorfo a K_3, pues tiene cuatro vértices en lugar de tres.

Tema 8 Grafos eulerianos y hamiltonianos

Problema 1

Sea G el grafo, de la figura siguiente:



Encuéntrese en G:

(a) Un camino que conecta v_1 y v_4.

(b) Un camino simple de longitud 5 entre v_1 y v_4.

(c) Un camino de longitud 6 entre v_1 y v_4.

(d) Un camino cerrado con origen en v_4 de longitud 6.

(e) Un ciclo de longitud 3, otro de longitud 4 y otro de longitud 6.

(f) Un circuito de longitud 9.

Solución

Como G es un grafo, para describir caminos sobre él basta enumerar los vértices por los que pasa dicho camino.

(a) Camino que conecta v_1 con v_4:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

(b) Camino simple de longitud 5 entre v_1 y v_4:

$$(v_1, v_2, v_7, v_6, v_5, v_4).$$

(c) Camino de longitud 6 entre v_1 y v_4:

$$(v_1, v_2, v_7, v_6, v_5, v_3, v_4),$$

y observamos que el camino anterior también es simple.

(d) Camino cerrado de longitud 6 con origen en v_4:

$$(v_4, v_3, v_2, v_1, v_6, v_5, v_4),$$

y observamos que el camino anterior es simple, se trata por tanto de un ciclo.

(e) Un ciclo de longitud 3:

$$(v_1, v_2, v_6, v_1).$$

Un ciclo de longitud 4:

$$(v_2, v_6, v_5, v_3, v_2).$$

Un ciclo de longitud 6:

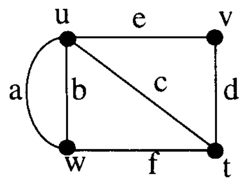
$$(v_4, v_3, v_2, v_1, v_6, v_5, v_4).$$

(f) Un circuito de longitud 9:

$$(v_2, v_1, v_6, v_7, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_2).$$

Problema 2

Sea G el multigrafo de la figura:



Encuéntrese:

(a) Un ciclo de longitud dos.

(b) Un circuito de longitud seis.

Solución

Por tratarse de un multigrafo describiremos los caminos escribiendo también las aristas:

(a) (u, a, w, b, u).

(b) Como el grafo G tiene seis aristas un circuito con seis aristas es un circuito euleriano. Además el grafo G es conexo y el vértice w tiene grado tres (no par), lo que nos indica (por el Teorema de Euler) que no tiene circuitos eulerianos (de longitud seis).

Problema 3

Pruébese que un multigrafo es un grafo si y sólo si no tiene ciclos de longitud dos.

Solución

Supongamos que G es un multigrafo que no es grafo, entonces existen al menos dos aristas a, b, con los mismos extremos u,v. Por tanto (u, a, v, b, u) es un ciclo de longitud dos. Recíprocamente, si (u, a, v, b, u) es un ciclo de longitud dos en un multigrafo G, entonces las aristas a y b de dicho ciclo tienen los mismos extremos u y v, con lo cual el multigrafo G no es un grafo.

Problema 4

Pruébese que en un grafo conexo $G = (V, E)$ se verifica:

$$\#V - 1 \leq \#E.$$

Solución

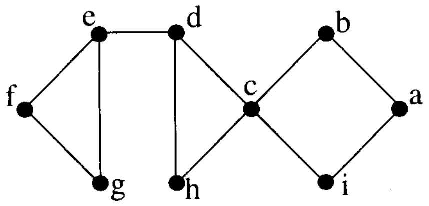
Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Demostraremos la fórmula por inducción sobre $\#V$. Si $\#V=1$, debe ser $\#E = 0$, con lo que trivialmente se verifica la fórmula. Supongamos ahora que $\#V>1$. Sea v un vértice de G. Como $\#V>1$ existe en G un vértice, w, distinto de v y como G es conexo debe existir un camino, c, de v a w. Por tanto v tiene grado mayor que uno. Así pues todo vértice de G tiene grado mayor que cero. Supongamos que un vértice, t, de G tiene grado 1 y sea x la única arista que tiene a t por extremo en G. Entonces el grafo $(V-\{t\}, E-\{x\})$ tiene $\#V-1$ vértices y es conexo, luego por la hipótesis de inducción se tiene: $\#(V-\{t\}) - 1 \leq \#(E-\{x\})$, luego $\#V-2 \leq \#E -1$, o bien $\#V-1 \leq \#E$. Por último, supongamos que todos los vértices de G tienen grado mayor que 1. Entonces por el Primer Teorema de la Teoría de Grafos:

$$2\#V \leq \text{Suma de los grados de los vértices de } G = 2\#E.$$

Luego en este caso $\#V \leq \#E$ y con más razón $\#V - 1 \leq \#E$.

Problema 5

Sea G = (E, V) un grafo conexo. Se llama punto de corte a un vértice v de G de modo que el subgrafo G_v de G con vértices V - {v} y cuyas aristas son aquéllas de E cuyos vértices están en V - {v} no es conexo. Se llama un itsmo a una arista a de G de modo que el grafo (V, E - {a}) no es conexo. Hállense los puntos de corte y los itsmos del grafo G = (V, E) representado en la figura siguiente:



Solución

Puntos de corte:

e, pues G_e no es conexo, ya que, en G_e no existe ningún camino con extremos f y c.

d, pues G_d no es conexo por análogo motivo que G_e.

c, pues G_c no es conexo pues en tal grafo los vértices i y f no pueden conectarse con ningún camino.

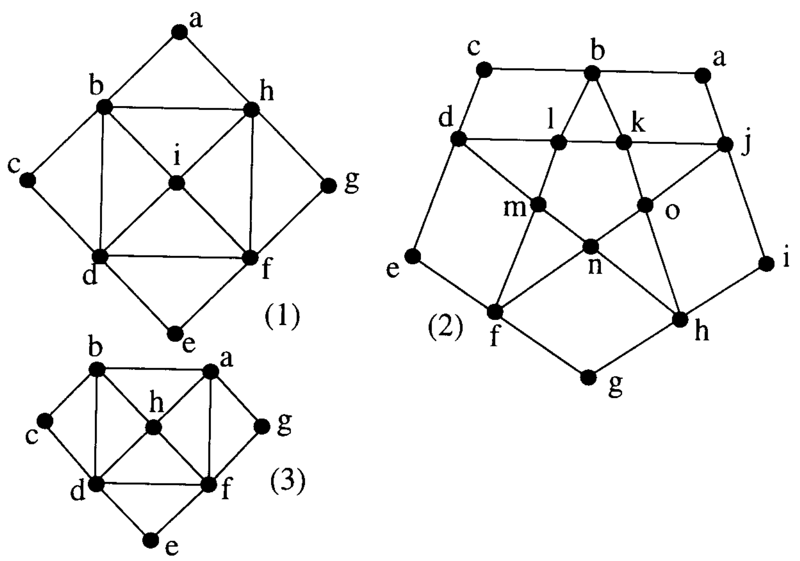
Itsmos:

La arista ed: en efecto, en el grafo (V, E - {ed}) no existe ningún camino que una los vértices c y f.

Es fácil observar que los puntos de corte e itsmos considerados son los únicos existentes en el grafo G.

Problema 6

Determínese cuáles de los siguientes grafos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin dibujar dos veces la misma arista:



En los casos afirmativos encuentre el modo de dibujarlos con las propiedades deseadas.

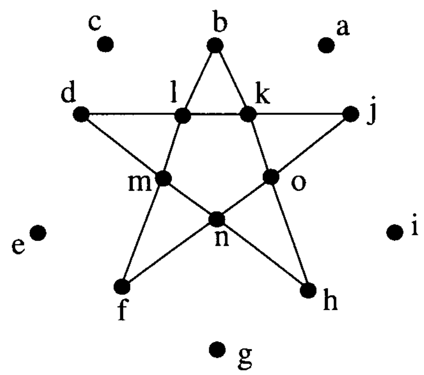
Solución

El hecho de que un grafo pueda dibujarse sin levantar el lápiz del papel y sin dibujar dos veces la misma arista es equivalente a encontrar en tal grafo un circuito o un camino euleriano. Por tanto, una condición necesaria y suficiente para la existencia de tal modo de dibujo es, en virtud del Teorema de Euler, que o bien todos los vértices deben tener grado par, o bien todos menos dos tienen grado par.

(1) El grafo de este caso tiene más de dos vértices con grado impar: b, d, f y h. Con lo cual no es posible dibujarlo como se exige en el enunciado del problema.

(2) En este caso todos los vértices tienen grado par luego existe un modo de dibujar el grafo (2) sin levantar el lápiz del papel, sin dibujar dos veces la misma arista y empezando y acabando en el mismo vértice. Para encontrar tal método de dibujo basta describir un circuito euleriano y para encontrar tal circuito emplearemos el algoritmo dado por la demostración del Teorema de Euler:

Partimos de un circuito, por ejemplo: (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a). A continuación se eliminan del grafo las aristas recorridas por el circuito anterior, resultando el nuevo grafo:



Hemos de construir ahora un circuito que posea algún vértice que pase por el primer circuito construido: (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a), por ejemplo:

(b, l, m, f, n, o, j, k, l, d, m, n, h, o, k, b).

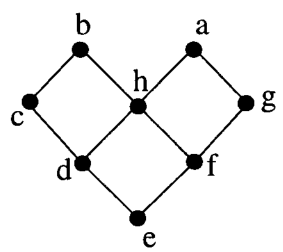
El nuevo circuito recorre las aristas del grafo (2) que no recorría el primer circuito, así un circuito euleriano se obtendrá uniendo los dos circuitos construidos:

(a, b, l, m, f, n, o, j, k, l, d, m, n, h, o, k, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a).

(3) El grafo (3) posee exactamente dos vértices cuyo grado es impar: f y d. Por lo tanto existe un camino euleriano que comienza en d y acaba en f. Para encontrar el camino euleriano se comienza encontrando un camino que una d con f sin pasar dos veces por la misma arista, por ejemplo:

(d, b, a, f).

A continuación construimos a partir del grafo (3) otro grafo suprimiendo las aristas recorridas por el camino anterior:



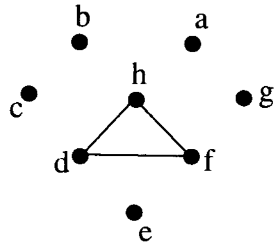
Ahora encontramos un circuito en el nuevo grafo:

(a, h, b, c, d, e, f, g, a).

Se une el nuevo circuito al primer camino, obteniendo:

(d, b, a, h, b, c, d, e, f, g, a, f).

Volvemos a suprimir en el grafo (3) las aristas del último camino obtenido, el resultado es:

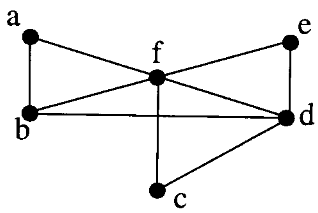


De nuevo buscamos un circuito, (f, h, d, f), en el grafo anterior. Como el circuito (f, h, d) recorre todas las aristas del grafo (3) que restaban, el camino que se consigue al unir dicho circuito con (d, b, a, h, b, c, d, e, f, g, a, f) es el camino buscado:

(d, b, a, h, b, c, d, e, f, h, d, f, g, a, f).

Problema 7

Una compañía de autopistas ha contratado a una empresa de seguridad para que patrulle la red de autopistas cuyo mapa está esquematizado en el siguiente grafo:

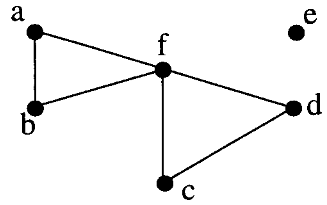


La empresa de seguridad quiere realizar el servicio con un solo vehículo y quiere determinar la existencia de un recorrido de la red de modo que se vigilen los tramos de autopista una única vez. ¿Existe tal recorrido?. ¿Cuál es?. ¿Es solución única?.

Solución

El recorrido pedido es un camino o circuito euleriano. Como en el grafo de la red de autopistas existen exactamente dos vértices con grado impar: b y f, se tiene que el recorrido buscado existe.

Para encontrar el camino euleriano comenzamos por buscar un camino que una b y f y que no repita aristas, por ejemplo: (b, d, e, f). A continuación consideramos un nuevo grafo obtenido eliminando las aristas recorridas por el camino anterior:



Se debe encontrar ahora un circuito en el nuevo grafo que pase por alguna de los vértices del primer camino, por ejemplo: (d, f, a, b, f, c, d). Como este último circuito recorre todas las aristas que faltaban, tenemos que un camino euleriano es:

(b, d, f, a, b, f, c, d, e, f).

La solución no es en modo alguna única, para obtener un camino euleriano distinto, por ejemplo se puede unir de modo diferente el camino (b, d, e, f) con el circuito (d, f, a, b, f, c, d), obteniéndose:

(b, f, c, d, f, a, b, d, e, f).

Problema 8

Los siguientes resultados sobre grafos son conocidos:

(a) Si un grafo G es euleriano todo vértice de G tiene grado par.

(b) Si un grafo G tiene un camino euleriano no cerrado entonces G tiene exactamente dos vértices con grado impar.

(c) Si todos los vértices de un grafo conexo tienen grado par entonces dicho grafo es euleriano.

(d) Si un grafo conexo tiene exactamente dos vértices con grado impar entonces admite un camino euleriano no cerrado.

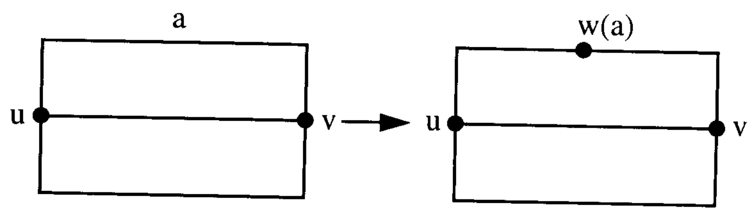
¿Los resultados (a), (b), (c) y (d) son válidos sustituyendo la palabra grafo por multigrafo?.

Solución

Sea M = (V, E) un multigrafo. La siguiente construcción será útil: Sea a una arista de M con extremos u y v. Se define d(a)(M) como el multigrafo obtenido a partir de M suprimiendo la arista a, añadiendo un nuevo vértice w(a) y dos aristas que unen w(a) con u y con v, es decir,

$$d(a)(M) = (V \cup \{w(a)\}, E \cup \{w(a)u, w(a)v\}).$$

Gráficamente una representación de d(a)(M) se consigue añadiendo un punto sobre la arista a que representará al nuevo vértice w(a).



A partir de un multigrafo M = (V, E) se construye del siguiente modo un grafo que se llamará G(M): Sea E(m) = $\{e_1, ..., e_r\}$ el subconjunto de E formado por aquellas aristas que tienen los mismos vértices que otras aristas distintas de M. Se define

$$G(M) = d(e_1) \ldots d(e_r)(M).$$

Gráficamente G(M) se obtiene de M dibujando un punto que representará un nuevo vértice sobre cada arista de M que posea los mismos extremos que otra arista distinta.

Un multigrafo se dice euleriano si posee un circuito euleriano:

(a) Hemos de probar que si un multigrafo M es euleriano todo vértice de M tiene grado par.

Todo camino en M define de forma inmediata un camino en G(M) y es obvio observar que si existe un circuito euleriano en M existirá entonces un circuito euleriano en G(M). Por tanto todo vértice de G(M) tienen grado par y como todo vértice de M tiene grado igual al grado de algún vértice de G(M), todos los vértices de M tienen grado par.

(b) En este caso se ha de probar que si un multigrafo M tiene un camino euleriano no cerrado entonces M tiene exactamente dos vértices con grado impar.

Un camino euleriano no cerrado en M induce en G(M) un camino euleriano no cerrado y por tanto en G(M) hay exactamente dos vértices con grado impar. Ahora bien los vértices de G(M) que no son vértices de M tienen todos grado dos, por lo que G(M) tienen exactamente dos vértices con grado impar.

(c) Se tiene que demostrar que si todos los vértices de un multigrafo conexo tienen grado par entonces dicho mutigrafo es euleriano.

Sea M un multigrafo conexo con todos los vértices de grado par. Entonces G(M) es conexo y tiene todos los vértices de grado par, luego G(M) es euleriano. Ahora bien el circuito euleriano de G(M) se convierte en un circuito euleriano de M.

(d) Es análogo a (c).

Problema 9

Pruébese que en un grafo G = (V, E) que posee k componentes conexas se verifica la siguiente desigualdad:

$$\#E \leq \frac{1}{2} (\#V - k)(\#V - k + 1).$$

Como consecuencia pruébese que si G = (V, E) verifica:

$$\#E > \frac{1}{2} (\#V - 1)(\#V - 2),$$

entonces G es conexo.

Solución

Sea G = (V, E) un grafo con k componentes conexas. Para probar la desigualdad:

$$\#E \leq \frac{1}{2} (\#V - k)(\#V - k + 1),$$

razonaremos por inducción sobre k.

Para k = 1, la desigualdad fue probada en el problema 11 (a) del Tema anterior.

Supongamos que la desigualdad se verifica para grafos con k-1 componentes conexas. Llamaremos $G_{k-1} = (V_{k-1}, E_{k-1})$ a un subgrafo de G formado por k-1 componentes conexas de G y designaremos por $G_1 = (V_1, E_1)$ al subgrafo de G formado por los vértices y aristas que no están en G_{k-1}. Como G_{k-1} tiene k-1 componentes conexas y G es conexo se tiene:

$$\#E_{k-1} \leq \frac{1}{2}(\#V_{k-1} - k + 1)(\#V_{k-1} - k + 2),$$

$$\#E_1 \leq \frac{1}{2}(\#V_1 - 1)\#V_1.$$

Dado que $\#V_{k-1} + \#V_1 = \#V$ y $\#E_{k-1} + \#E_1 = \#E$, se obtiene:

$$\#E \leq \frac{1}{2}[(\#V_{k-1} - k + 1)(\#V_{k-1} - k + 2) + (\#V_1 - 1)\#V_1].$$

Teniendo en cuenta que $\#V_{k-1} < \#V$ se tiene que $\#V_{k-1} - k + 2 \leq \#V - k + 1$. Por otra parte, $\#V_1 \leq \#V - k + 1$ pues en cada componente conexa de V debe haber al menos un vértice. Sustituyendo tenemos:

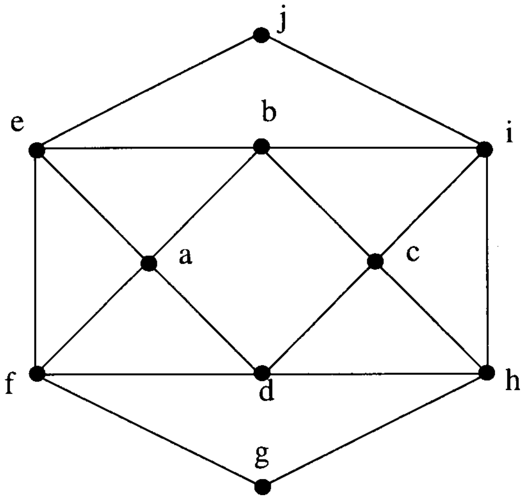
$$\#E \leq \frac{1}{2}[(\#V_{k-1} - k + 1)(\#V - k + 1) + (\#V_1 - 1)(\#V - k + 1)] =$$

$$= \frac{1}{2}(\#V_{k-1} - k + 1 + \#V_1 - 1)(\#V - k + 1) =$$

$$\frac{1}{2}(\#V - k)(\#V - k + 1).$$

Problema 10

Encuéntrese para el grafo de la figura siguiente:



un circuito euleriano distinto de

$$c = (a, f, d, h, c, i, h, g, f, e, j, i, b, e, a, b, c, d, a),$$

con origen y fin en el vértice a.

Solución

Obsérvese que el circuito c finaliza con el camino cerrado, f = (a, b, c, d, a), con el que se recorren las aristas ab, bc, cd, da. Ahora bien, podemos recorrer tales aristas con otro camino cerrado con origen y fin en a:

$$g = (a, d, c, b, a).$$

Sustituyendo en c el camino f por g obtenemos un nuevo circuito euleriano:

(a, f, d, h, c, i, h, g, f, e, j, i, b, e, a, d, c, b, a).

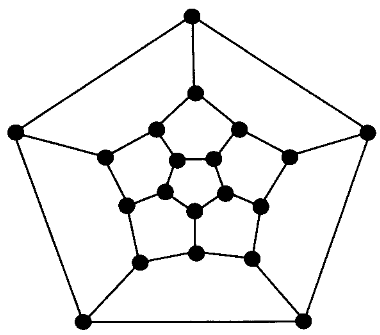
Por supuesto hay muchas más soluciones. Por ejemplo:

(a, b, c, d, a, f, d, h, c, i, h , g, f, e, j, i , b, e, a),

(a, b, i, h, g, f, d, h, c, b, e, j, i, c, d, a, e, f, a).

Problema 11

Encuéntrense un ciclo hamiltoniano para el grafo de la figura siguiente:



Solución

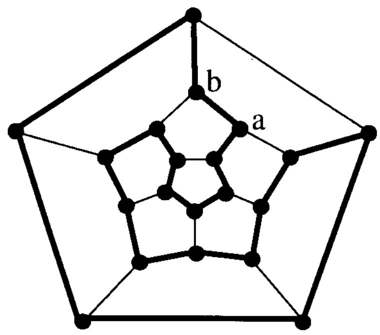
En las figuras de la página siguiente hemos trazado con linea más gruesa las aristas que recorren tres ciclos hamiltonianos distintos del grafo del enunciado.

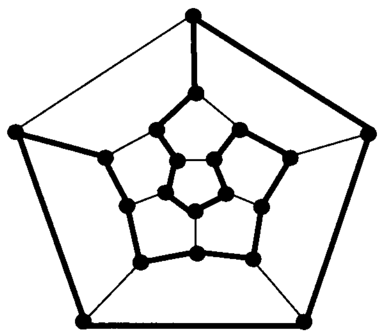
A continuación daremos el método desarrollado por Sir William Hamilton para obtener y describir ciclos hamiltonianos de tal grafo. Se basa en utilizar un método para describir un camino simple. Supongamos que un camino simple llega al vértice v recorriendo una arista wv. Situemos un observador en el vértice v de espaldas a la arista wv. Entonces el camino puede avanzar por la arista con extremo v distinta de vw situada a la derecha del observador o bien por la arista con extremo en v situada a la izquierda. Designaremos por D tomar la arista de la derecha y por I tomar la arista de la izquierda. Así el primer camino de la siguiente figura, suponiendo que comienza en el vértice a y continúa por el vértice b, se denotará por:

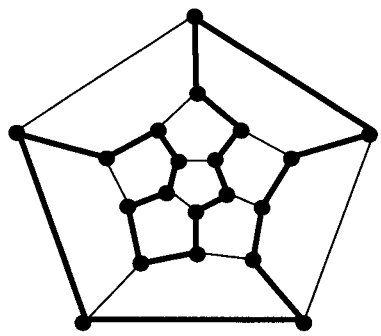
IDIDDDIIIDIDIDDDIIID,

Consideremos ahora el conjunto de palabras formadas con las dos letras I y D. Obsérvese que cada palabra representa un camino una vez elegidos los dos primeros vértices que tiene que recorrer. Además todo camino simple da lugar a una palabra, sin embargo hay palabras que dan lugar a caminos no simples. Para conseguir eliminar las palabras que no dan caminos simples definimos una relación de equivalencia entre palabras: dos palabras son equivalentes si existen dos caminos con el mismo principio y el mismo fin representados cada uno por cada una de las palabras dadas.

Con tal relación de equivalencia tenemos las siguientes ecuaciones (se utiliza la siguiente notación $D^r = D \ldots^r \ldots D$ e $I^r = I \ldots^r \ldots I$):







$$D^5 = I^5 = 1,$$
$$DI^2D = IDI,$$
$$ID^2I = DID,$$
$$DI^3D = I^2,$$
$$ID^3I = D^2.$$

Así se tiene

$$1 = D^5 = D^2D^3 = ID^3ID^3 = (ID^3)^2 = (I(ID^3I)D)^2 = (I^2D^3ID)^2 = (I^2(ID^3I)DID)^2 = (I^3D^3(ID)^2)^2.$$

La palabra $(I^3D^3(ID)^2)^2$ está compuesta por 20 letras y como no tiene ninguna parte en su composición que sea igual a 1 representa un ciclo hamiltoniano (compruébelo gráficamente en un caso concreto). Otras palabras que representen ciclos hamiltonianos se obtendrán leyendo la palabra $(I^3D^3(ID)^2)^2$ a partir de cualquier letra intermedia y en cualquiera de los dos sentidos:

$$(I^3D^3(ID)^2)^2 = \mathrm{IIIDDDIDI}\mathbf{D}\mathrm{IIIDDDIDID},$$

empezando a leer por la D en negrita se obtienen

DIIIDDDIDIDIIIDDDIDI y

DIDIDDDIIIDIDIDDDIII.

Con algunos conocimientos de teoría de grupos es fácil comprobar que éstas son las únicas palabras que representan ciclos hamiltonianos y así obtener todos. En efecto el grupo con presentación

$$(D, I: D^5 = I^5 = 1, DI^2D = IDI, ID^2I = DID, DI^3D = I^2, ID^3I = D^2),$$

es el grupo de movimientos directos de un dodecaedro. Dado que un ciclo hamiltoniano recorre todos los vértices del dodecaedro en particular pasa por dos vértices antipodales. Así se puede probar que diez letras consecutivas de la palabra que define un ciclo hamiltoniano determinan un elemento de orden dos en el grupo de movimientos del dodecaedro. Para finalizar bastará conocer la expresión de los 15 elementos de orden dos en palabras formadas por los generadores D e I.

Problema 12

Pruébese que todo grafo completo es hamiltoniano

Solución

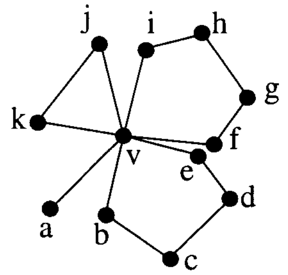
Sea K_r el un grafo completo con r vértices: $v_1, v_2, ..., v_r$. Por ser K_r un grafo completo existen las aristas: $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{r-1}v_r, v_rv_1$. Por tanto se tiene el siguiente ciclo en K_r:

$$(v_1, v_2, ..., v_r, v_1),$$

que es claramente un ciclo hamiltoniano.

Problema 13

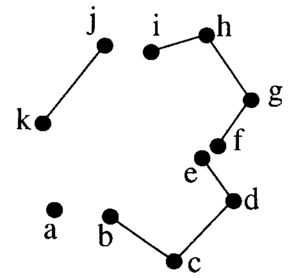
Sea G = (E, V) el grafo de la figura:



Sea G' el subgrafo de G cuyos vértices son V - {v} y sus aristas son todas las de E que no tienen por extremo a v. ¿Cuántas componentes conexas tiene G'?.

Solución

El grafo G' representado en la figura siguiente tiene cuatro componentes conexas cuyos conjuntos de vértices son: {a}, {b, c, d, e}, {f, g, h, i}, {j, k}. Así pues v es un punto de corte de G.



Problema 14

¿El grafo G del problema anterior es hamiltoniano? Pruébese que todo grafo con un punto de corte no es hamiltoniano.

Solución

Es conocido el siguiente resultado: Si G = (V, E) es un grafo hamiltoniano con más de dos vértices, entonces para un subconjunto de vértices U, el subgrafo de G cuyos vértices son los de V - U y sus aristas son las de G que tienen extremos en V - U y que llamaremos G_U, tiene a lo más #U componentes. En particular, si U consta de un único vértice entonces G_U debe tener una única componente conexa, es decir, G_U es conexo. Por tanto si G es hamiltoniano con más de dos vértices G no puede contener puntos de corte. Si G tiene uno o dos vértices y es hamiltoniano debe ser isomorfo a alguno de los grafos siguientes: ({a}, ∅) o ({a, b}, {ab}), que no tienen puntos de corte. Por último, el grafo del problema tiene el punto de corte v con lo que no es hamiltoniano.

Problema 15

Sea G un grafo con p vértices. Vamos a considerar matrices, S_n, de orden $p \times p$ cuyas entradas serán conjuntos de caminos simples de longitud n. La matriz S_1 se define del siguiente modo: la entrada (i, j) está formada por el conjunto $\{(v_i, v_j)\}$ si v_i y v_j son adyacentes (y así (v_i, v_j) es un camino simple de longitud 1), el resto de las entradas son el conjunto vacio. Definiremos S_n, $n \leq p-1$, a partir de S_{n-1} y S_1 (definición por recurrencia):

- la entrada (r, s) de la matriz S_n es

$\{(w_1, ..., w_n, v)$: donde el camino $(w_1,..., w_n)$ pertenece a la entrada (r, t) de S_{n-1}, (w_n, v) pertenece a la entrada (t, s) de S_1, $v \notin \{w_1, ..., w_n\}$, $t \in \{1, ..., n\}\}$.

a) Pruébese que la entrada (i, j) de la matriz S_n es el conjunto de los caminos simples de longitud n con extremos los vértices v_i y v_j.

Definimos S_p a partir de S_{p-1} y S_1:

- la entrada (r, s) de la matriz S_p es

$\{(w_1, ..., w_p, v)$: donde el camino $(w_1, ..., w_p)$ pertenece a la entrada (r, t) de S_{p-1}, (w_p, v) pertenece a la entrada (t, s) de S_1, $v \notin \{w_2, ..., w_p\}$, $t \in \{1, ..., p\}\}$.

b) Pruébese que el grafo G es hamiltoniano si y sólo si S_p tiene entradas en la diagonal principal que no son el conjunto vacio.

Solución

a) Razonaremos por inducción sobre n. Por la definición de S_1 la entrada (i, j) de tal matriz es el conjunto formado por el camino (v_i, v_j), si tal camino existe. Por tanto tal entrada está formada por todos los caminos simples de v_i a v_j de longitud 1.

Supongamos ahora que a) es cierto para la matriz S_{n-1}. La entrada (r, s) de S_n tiene por entradas el conjunto formado por los caminos: $(w_1, ..., w_n, v)$, donde el camino $(w_1, ..., w_n)$ pertenece a la entrada (r, t) de S_{n-1}, (w_n, v), que pertenece a la entrada (t, s) de S_1, $v \notin \{w_1, ..., w_n\}$ y $t \in \{1, ..., n\}$. Por la hipótesis de inducción el camino $(w_1, ..., w_n)$ es simple, y por la condición $v \notin \{w_1, ..., w_n\}$ se tiene que cada camino $(w_1, ..., w_n, v)$ de la entrada (r, s) es simple. También por la hipótesis de inducción $w_1 = v_r$ y por la definición de S_1 se tiene que $v = v_s$, por tanto los caminos de la entrada (r, s) son caminos simples entre v_r y v_s y obviamente tienen longitud n. Por último todo camino simple de longitud n entre v_r y v_s, $(v_r = u_1, ..., u_{n-1}, u_n = v_s)$, se puede descomponer en un camino simple de longitud n-1 entre v_r y un vértice v_t, con v_t distinto de v_r y v_s, $(v_r = u_1, ..., u_{n-2}, u_{n-1} = v_t)$, y un camino de longitud uno $(v_t = u_{n-1}, u_n = v_s)$. Así pues $(v_r = u_1, ..., u_{n-1}, u_n = v_s)$ pertenece a la entrada (r, s) de S_n.

b) Sea $c = (w_1, ..., w_{p-1}, v)$ un elemento de una de las entradas de la diagonal de la matriz S_p. El camino c por estar en una entrada de la diagonal es un camino cerrado, es decir $w_1 = v$. Además c es un ciclo pues (w_1, ..., w_{p-1}) es un camino simple. Como c tiene longitud p (=número de vértices de G), c es un ciclo hamiltoniano. Si alguna entrada de la diagonal es no vacía entonces G posee un ciclo hamiltoniano con lo cual G es hamiltoniano y recíprocamente, pues todos los ciclos hamiltonianos se componen de un camino simple de longitud p-1 al que se le añade una arista que vuelve al vértice de origen.

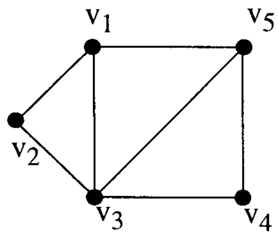
El método ofrecido en el apartado b) para conocer si un grafo es hamiltoniano es ineficaz, pues con el crecimiento del número de vértices de un grafo el volumen de cálculos que obliga a realizar hace el problema prácticamente intratable.

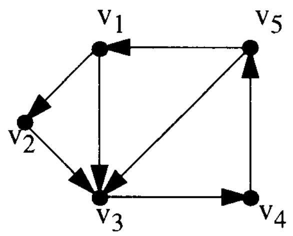
Tema 9

Exploración de grafos

Problema 1

Hállese la matriz de adyacencia de los siguientes grafo y digrafo:





Solución

Para el grafo de la figura la matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el digrafo la matriz es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Hállese la matriz de adyacencia del grafo completo K_r, para r mayor o igual a 1. Caracterícense algebraicamente las matrices de adyacencia de los grafos r-regulares.

Solución

Como en el grafo K_r cada par de vértices están unidos por una arista, la matriz de adyacencia de K_r es (a_{ij}) donde $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} = 1$, si $i \neq j$.

En la matriz de adyacencia de un grafo el grado del vértice i-ésimo se lee sobre la matriz sumando los elementos de la fila i-ésima o bien sumando los elementos de la columna i-ésima. Puesto que la matriz de adyacencia de un grafo es simétrica el resultado con ambos métodos es el mismo. Un grafo es r-regular si cada vértice tiene grado r, por tanto la caracterización en términos matriciales es que la suma de las entradas de cada fila (o equivalentemente la suma de las entradas de cada columna) sea r.

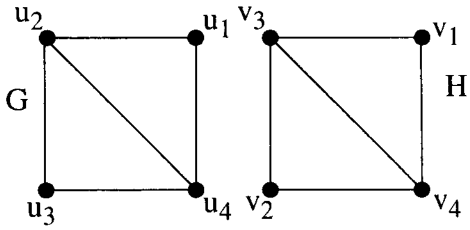
Problema 3

Pruébese que las matrices A y B son matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

Los grafos cuyas matrices de adyacencia son A y B serán designados por G y H respectivamente y están representados gráficamente en la siguiente figura:



Sean $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ los vértices de G y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ los vértices de H. La figura sugiere la siguiente biyección entre los conjuntos de vértices para conseguir el isomorfismo pedido: $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_2$, $f(u_4) = v_4$. Es fácil comprobar que f es un isomorfismo del grafo G al H. Obsérvese que f cambia el segundo vértice de G por el tercero de H y el tercero de G por el segundo de H. Por tanto H se obtiene de G cambiando el segundo vértice por el tercero y el tercero por el segundo, por lo tanto la matriz B se obtiene a partir de la matriz A permutando la segunda columna por la tercera y la tercera por la segunda columna y después cambiando del mismo modo las filas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Problema 4

Establézcase un criterio algebraico para determinar si dos matrices dadas son las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos.

Solución

El ejercicio anterior nos sugiere el siguiente criterio:

Dos matrices $n \times n$ A y B son las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos si y sólo si existe una biyección f del conjunto $\{1, 2,..., n\}$ en si mismo, de modo que si en A cambiamos la columna i por la columna f(i),

$i = 1, \ldots, n$, y a continuación la fila i por la fila f(i), $i = 1, \ldots, n$, se obtiene la matriz B.

En efecto, sean G y H dos grafos con n vértices que son isomorfos. Supongamos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es el conjunto de vértices de G y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es el conjunto de vértices de H. Entonces existe una biyección g de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en $\{v_1, \ldots, v_n\}$. La biyección g define una biyección f de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en si mismo de modo que $g(u_i) = v_j$, si sólo si $f(i) = j$. Sea A la matriz de adyacencia de G y f(A) la matriz obtenida a partir de A cambiando la columna i por la f(i) y la fila i por la f(i). Hemos de probar que f(A) es la matriz de adyacencia de H. Sea a_{rs} la entrada de la fila r y la columna s de f(A), a_{rs} es igual a la entrada en la fila $f^{-1}(r)$ y la columna $f^{-1}(s)$ de la matriz A. Por tanto a_{rs} es uno si y sólo si los vértices $u_{f^{-1}(r)}$ y $u_{f^{-1}(s)}$ son adyacentes y como g es un isomorfismo de grafos $u_{f^{-1}(r)}$ y $u_{f^{-1}(s)}$ son adyacentes si sólo si v_r y v_s son adyacentes, luego la entrada de la matriz de adyacencia de H en el lugar (r, s) coincide con a_{rs}.

Recíprocamente supongamos que G y H son dos grafos de modo que las matrices de adyacencia respectivas, A y B, verifican el criterio anterior. Sean como antes $\{u_1, \ldots, u_n\}$ el conjunto de vértices de G y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ el conjunto de vértices de H. Sea f la biyección que relaciona las matrices A y B y g la biyección de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en $\{v_1, \ldots, v_n\}$ definida del siguiente modo: $g(u_i) = v_j$ si $f(i) = j$. Es sencillo comprobar que g define un isomorfismo entre los grafos G y H.

Problema 5

Defínase la matriz de adyacencia para multigrafos y pseudografos. Caracterícense algebraicamente las matrices de pseudografos que no son grafos y de multigrafos que no son grafos.

Solución

Sea G un multigrafo y sea $\{v_1, \ldots, v_p\}$ el conjunto de vértices de G. Se denomina matriz de adyacencia de G a la matriz $M = (m_{ij})$ de orden $p \times p$ cuyas entradas son:

$$m_{ij} = \text{número de aristas cuyos vértices son } v_i \text{ y } v_j,\ i \neq j,$$

$$m_{ii} = 0.$$

Como consecuencia directa de la definición, M es la matriz de un multigrafo que no es un grafo si sólo si alguna de las entradas no nulas de M no vale uno.

Sea G un pseudografo y sea $\{v_1,..., v_p\}$ el conjunto de vértices de G. Se denomina matriz de adyacencia de G a la matriz $M = (m_{ij})$ de orden $p \times p$ cuyas entradas son:

$$m_{ij} = 1 \text{ si } v_iv_j \text{ es una arista de } G, \; i \neq j.$$

$$m_{ij} = 0 \text{ si } v_iv_j \text{ no es una arista de } G, \; i \neq j.$$

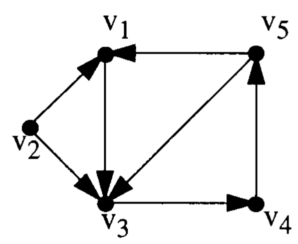
$$m_{ii} = m \text{ si existen } m \text{ lazos en } G \text{ cuyo extremo es } v_i.$$

$$m_{ii} = 0 \text{ si no existe un lazo en } G \text{ cuyo extremo es } v_i.$$

Como consecuencia directa de la definición, M es la matriz de un pseudografo que no es un grafo si y sólo si, alguna de las entradas de la diagonal principal de M no vale cero.

Problema 6

En el digrafo siguiente:



¿existe algún camino entre v_5 y v_2?. Respóndase primero utilizando matrices de adyacencia y el resultado que afirma: la entrada (i, j) de la potencia r-ésima de la matriz de adyacencia es el número de caminos de longitud r del vértice i-ésimo al j-ésimo; y después sin hacer uso de tales matrices. Respóndase a las mismas cuestiones para el digrafo del Problema 1.

Solución

La matriz de adyacencia del digrafo de la figura es:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que el digrafo tiene 5 vértices y si entre dos vértices existe un camino debe existir también un camino simple, si existe un camino de v_5 a v_2 debe existir también un camino de longitud menor o igual a 5. Por tanto bastará observar si la entrada (5, 2) de la matriz $M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5$ es o no nula.

$$M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

La entrada (5, 2) de la matriz $M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5$ es cero por lo que no existe ningún camino en el digrafo de v_5 a v_2.

Sin utilizar la matriz de adyacencia, la no existencia de caminos de v_5 a v_2 es obvia, observando que el vértice v_2 no es fin de ninguna arista del digrafo.

Para el digrafo del Problema 1 la matriz de adyacencia es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

En este caso la matriz $B + B^2 + B^3 + B^4 + B^5$ es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} .$$

Como la entrada (5, 2) es no nula se tiene que existen caminos de v_5 a v_2.

Sin utilizar la matriz de adyacencia basta observar el grafo para encontrar el camino (v_5, v_1, v_2) de v_5 a v_2. Sin embargo la matriz anterior también nos informa de que hay exactamente un camino de longitud menor que cinco de v_5 a v_2.

Problema 7

Sea G un grafo y M la matriz de adyacencia de G. Se suponen conocidos los siguientes resultados de teoría de grafos:

a) La entrada (i, j) de la matriz M^n es el número de caminos de longitud n con extremos v_i y v_j.

b) Supongamos que G tiene p vértices. Sea $C = M^p + M^{p-1} + ... + M$. Existe un camino entre v_i y v_j si y sólo si la entrada en el lugar (i,j) de la matriz C no es nula.

c) Si C es la matriz definida en b), el grafo G es conexo si sólo si todas las entradas de C son no nulas.

Con la definición de matriz de adyacencia del problema 5 para multigrafos y pseudografos ¿son ciertos los resultados a), b) y c) suponiendo que G es un multigrafo o un pseudografo?.

Solución

a) Sea G un multigrafo o pseudografo con $p > 0$ vértices. Razonaremos por inducción sobre el número de vértices del grafo. Hemos de probar el resultado para $p = 1$. Las matrices de adyacencia posibles son:

$M_0 = [0]$ si G es un multigrafo,

$M_k = [k]$, con k un número entero positivo, si G es un pseudografo.

Para M_0 se tiene que $M_0{}^n = [0]$, para cualquier n, lo que corresponde al hecho de que nunca existen caminos entre v_1 y v_1 con longitud mayor que cero si G es un multigrafo con un único vértice. Supongamos ahora que la matriz de adyacencia es M_k. Tenemos $(M_k)^n=[k^n]$. Sean $a_1,\ldots, a_k$ las m aristas con origen y extremo el único vértice de G. Hay tantos caminos en G de longitud n como n-tuplas ordenadas de las k aristas $a_1, \ldots, a_k$, luego tal número es el número de variaciones con repetición de k elementos de orden n, es decir, k^n, que coincide con el valor de la única entrada de $(M_k)^n$.

Supongamos que para $p = r - 1$ se verifica el teorema. Llamaremos $m_{ij}{}^{(k)}$ a la entrada en el lugar (i, j) de la matriz M^k, es decir $M^k = (m_{ij}{}^{(k)})$. Por la hipótesis de inducción, $m_{ij}{}^{(r-1)}$ es el número de caminos distintos de longitud r-1 en G de v_i a v_j. Puesto que $M^r = M^{r-1}M$, tenemos que

$$m_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^{p} m_{ik}^{(r-1)} m_{kj} , \qquad (7.1)$$

Cada camino de v_i a v_j de longitud r consiste en un camino de v_i a un cierto vértice v_k de longitud $r - 1$ seguido de una arista de v_k a v_j (obsérvese que si G es un pseudografo v_k puede ser igual a v_j) . Entonces por cada arista con un extremo en v_j, es decir, por cada $m_{kj} \neq 0$, obtenemos $m_{ik}{}^{(r-1)}$ caminos diferentes de longitud r de v_i a v_j pasando por v_k. Por tanto de la fórmula (7.1) se obtiene a).

b) Sea G un multigrafo o un pseudografo con p vértices y sean v_i y v_j dos vértices de G. Si v_i y v_j están conectados existe un camino simple entre ellos. Por ser simple tal camino tiene longitud menor que p y así alguna de las entradas (i, j) de M^r, con r menor que p, no es nula. Como todas las entradas de M^r, para cualquier r, son positivas, la entrada (i, j) de C es no nula. El recíproco es también evidente.

c) Es consecuencia inmediata de b) y de la definición de multigrafo o pseudografo conexo (existe un camino que conecta cualquier par de vértices).

Problema 8

Pruébese que todo subgrafo conexo de un árbol es también un árbol.

Solución

Sea A un árbol y S un subgrafo conexo de A. Todo ciclo en un subgrafo es también un ciclo en el grafo que lo contiene, por tanto, como A no posee ciclos entonces S tampoco. Al ser S conexo y sin ciclos se trata de un árbol.

Problema 9

Pruébese que todo grafo conexo con menor número de aristas que de vértices debe ser un árbol.

Solución

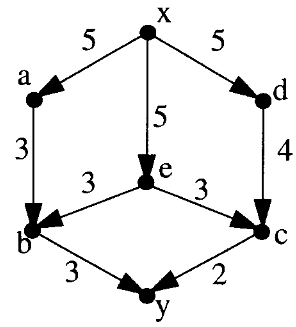
Sea $G = (V, E)$ un grafo con $\#E < \#V = n$. Razonaremos por inducción sobre el número n. Si $n = 1$, el grafo G es de la forma $(\{v\}, \emptyset)$ que es un árbol puesto que es conexo y sin ciclos. Supongamos que el resultado es cierto para grafos con $n - 1$ vértices.

Por ser G conexo todos sus vértices deben tener grado mayor que cero y por tanto al menos uno de ellos debe tener grado uno, en caso contrario, de cada vértice saldrían al menos dos aristas y así el número de aristas sería mayor o igual al de vértices. Sea v el vértice de G con grado uno y vw la única arista de G que tiene por extremo a v. El grafo $H = (V - \{v\}, E - \{vw\})$ tiene $n - 1$ vértices. Por ser G conexo H también es conexo, en efecto dados dos vértices de H, a, b, existe un camino simple en G que los conecta, por ser dicho camino simple y ser sus extremos a y b (diferentes ambos de v) tal camino no contiene a la arista vw y por tanto es también un camino en H. Como H es conexo y tiene n-1 vértices se trata de un árbol.

Veamos ahora que G es un árbol. Si existe un ciclo en G no puede contener la arista vw pues todo camino cerrado que contiene tal arista debe contener al menos dos veces a w con lo que no sería un ciclo. Por tanto, el ciclo considerado es también un ciclo de H, lo que es imposible por ser H un árbol.

Problema 10

Dado el digrafo etiquetado de la siguiente figura:

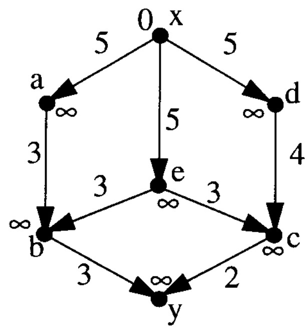


Encuéntrese, utilizando el Algoritmo de Dijkstra, la distancia entre el vértice x y el vértice y. Hállese también el camino de longitud mínima que realiza la distancia entre x e y.

Solución

Sea G = (V, E) el digrafo de la figura.

Paso 1: Se etiquetan todos los vértices con ∞ salvo x que es etiquetado con 0. Es decir se define L: $V \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ por $L(x) = 0$ y $L(z) = \infty$, para todo vértice z de G distinto de x. Gráficamente:



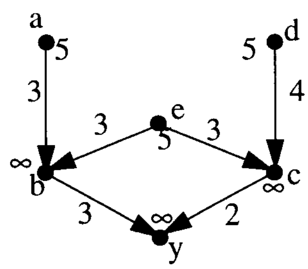
Hacemos T = V.

Paso 2: Encuéntrese el vértice v de G con etiqueta L(v) mínima. En este caso es obviamente v = x.

Paso 3: Como $v = x \neq y$ debemos pasar al paso 4.

Paso 4: Para todo vértice de T tal que exista una arista con origen en v = x, y fin en w si L(w) > L(v) + d(vw) (donde d(vw) es la etiqueta de la arista vw) se redefine L(w) por L(v) + d(vw). En nuestro caso a, e y d están en las condiciones pedidas, así definimos L(a) = 0 + 5 =5, L(e) = 0 + 5 y L(d) = 0 + 5.

Paso 5: Se redefine T = V - {x} = {a, b, c, d, e, y} y se vuelve al paso 2. Gráficamente

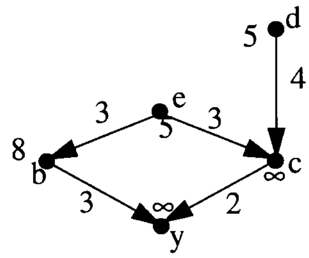


Paso 2: Buscamos el vértice v de T con etiqueta mínima, por ejemplo v = a.

Paso 3: Como $v = x \neq y$ debemos pasar al paso 4.

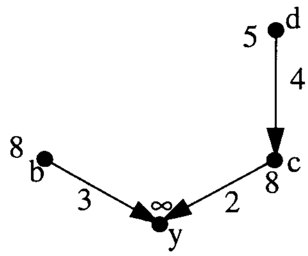
Paso 4: Para todo vértice de T que sea adyacente con v = a, si L(w) > L(v) + d(vw) se redefine L(w) por L(v) + d(vw). En este caso se redefine L(b) = 8.

Paso 5: T = {b, c, d, e, y} y se vuelve al paso 2.

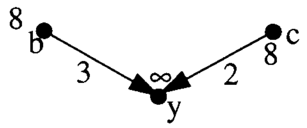


Paso 2: v = e.

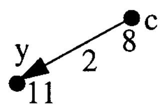
Después de los pasos 3, 4 y 5 se obtiene T= {b, c, d, y} y



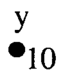
Paso 2: v = d.
Pasos 3, 4 y 5: T = {b, c, y} y:



Paso 2: v = b.
Pasos 3, 4 y 5: T = {c, y} y:



Paso 2: v = c.
Pasos 3, 4 y 5: T = {y}.



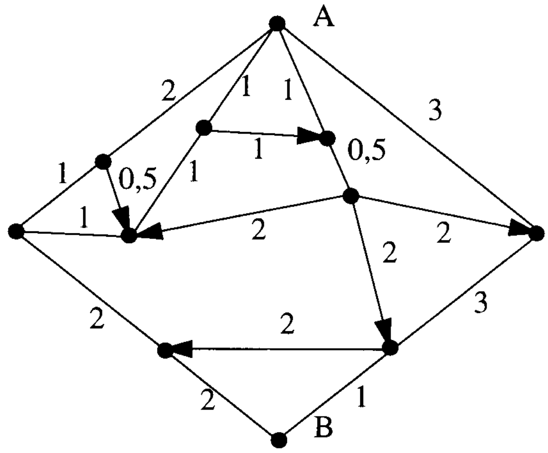
Paso 2: v = y.

Paso 3: Como v = y que es el punto con quien se quiere hallar la distancia con x tenemos: distancia de x a y es L(y) = 10.

El camino que realiza de longitud mínima entre x e y es (x, e, c, y).

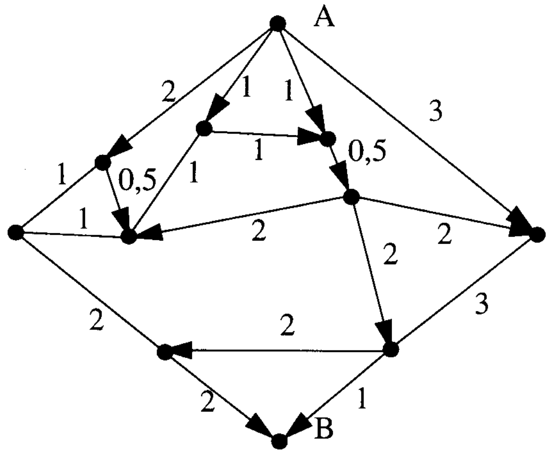
Problema 11

El siguiente mapa representa las calles de una ciudad entre A y B. La etiqueta representa la longitud de cada calle y algunas de ellas tienen dirección única como muestra la flecha de la figura. Encuéntrese la distancia de A a B.

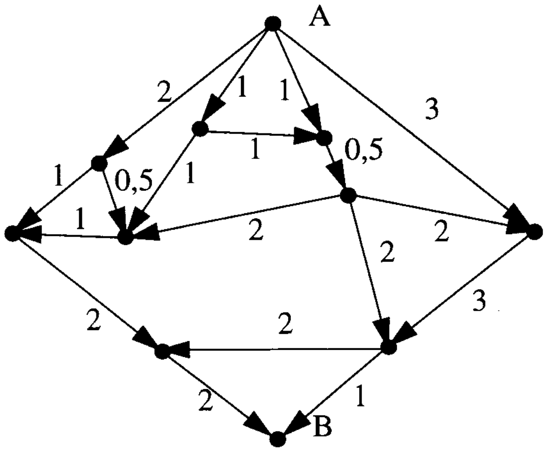


Solución

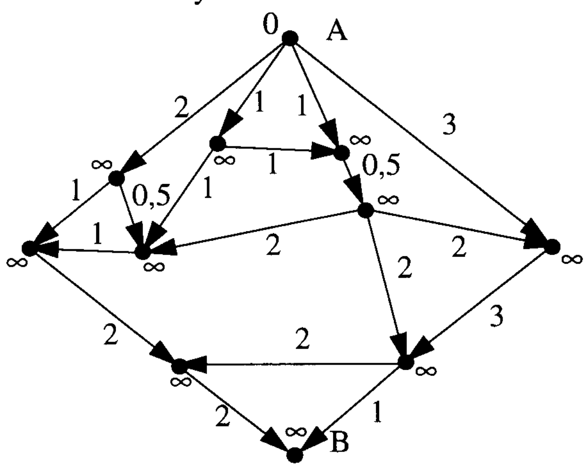
La distancia mínima de A a B es la longitud de un camino de A a B lo que fuerza un determinado sentido de recorrido para ciertas aristas:

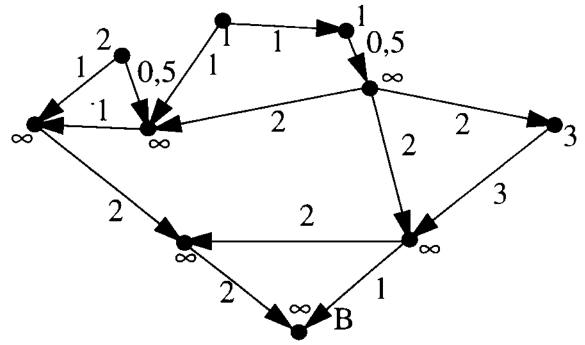


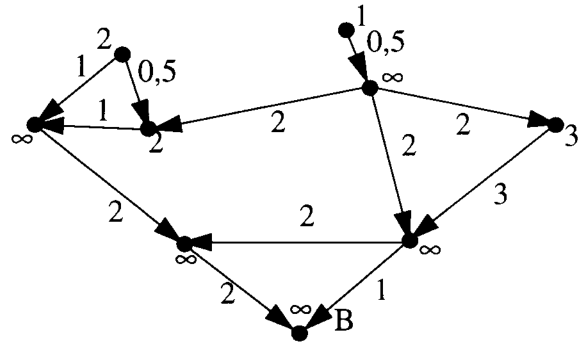
Ademas, la distancia es la longitud del camino de longitud mínima, con lo que el sentido de recorrido de otras aristas, por un camino con tal propiedad, también queda determinado:

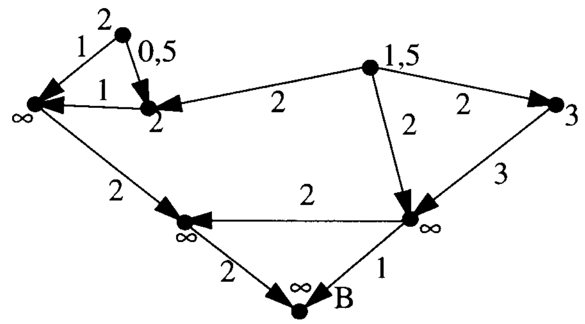


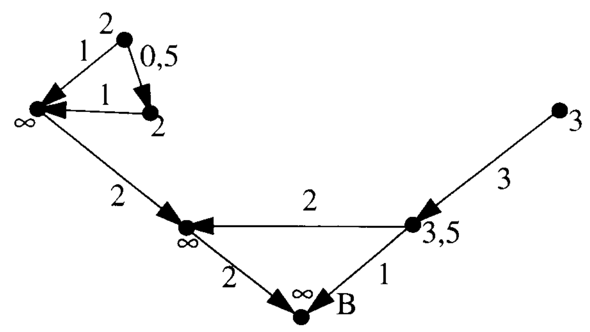
Con las anteriores consideraciones el problema se reduce a encontrar la distancia entre dos vértices de un digrafo. A continuación describimos graficamente las etapas del Algoritmo de Dijkstra aplicado al digrafo anterior para hallar la distancia entre A y B:

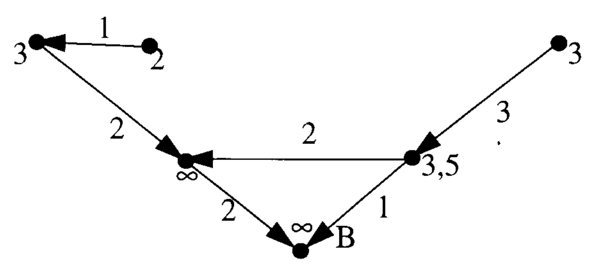


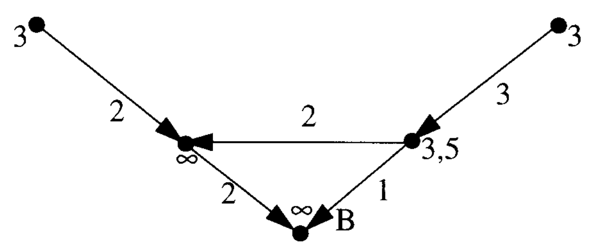

2
1
0,5
1
1
1
1
0,5
∞
1
∞
∞
2
2
2
3
2
3
2
∞
∞
2
1
∞
B

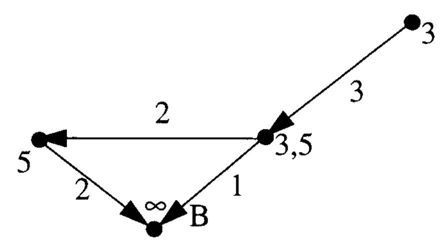

2
1
0,5
1
0,5
∞
1
∞
2
2
2
2
3
2
3
2
∞
∞
2
1
∞
B

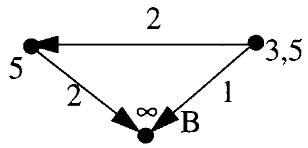

2
1
0,5
1,5
1
∞
2
2
2
2
3
2
3
2
∞
∞
2
1
∞
B

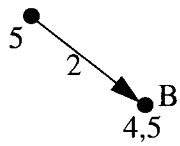

2
1
0,5
1
∞
2
3
3
2
2
3,5
2
∞
1
∞
B


1
3
2
3
3
2
2
3,5
2
∞
1
∞
B


3
3
3
2
2
3,5
2
∞
1
∞
B


3
3
2
3,5
5
2
1
∞
B





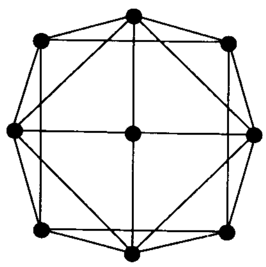
La distancia de A a B es 4,5.

Tema 10

Mapas y Coloraciones

Problema 1

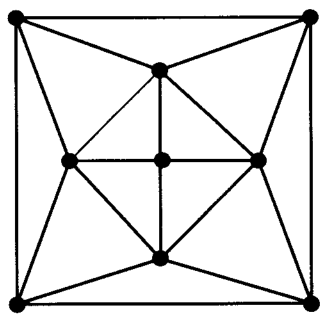
Demuéstrese que el grafo de la siguiente figura es plano:



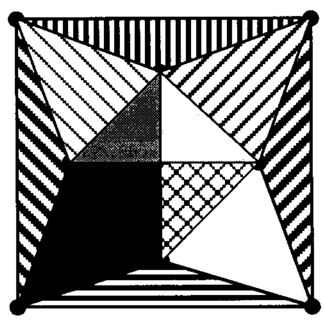
Encuéntrese un mapa que lo represente y el pseudomultigrafo dual de tal mapa.

Solución

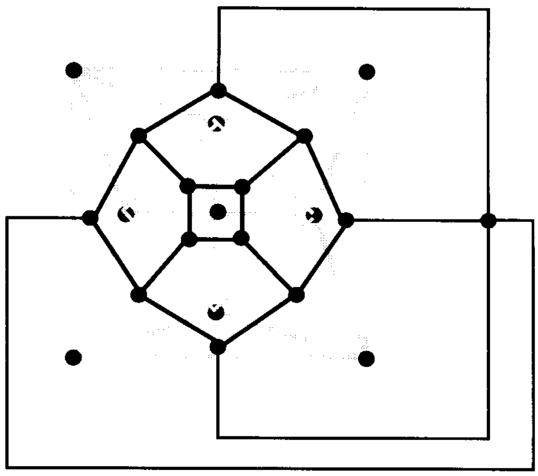
Es evidente que el grafo dado es isomorfo al de la figura siguiente:



el cual es plano. Un mapa que lo representa es

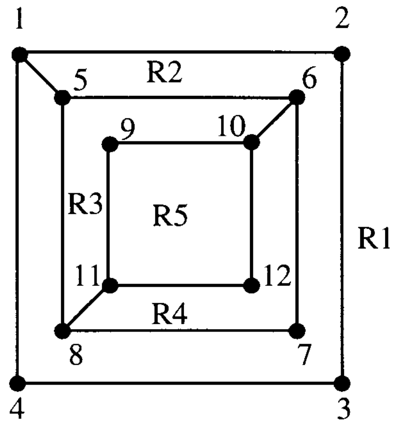


que divide al plano en las trece regiones señaladas con distinta trama más la región exterior. El pseudografo dual de este mapa, representado con trazo más fino, es



Problema 2

En el mapa de la figura calcúlense los grados de todas las regiones.



Solución

Los caminos que bordean las respectivas regiones son

R_1: $(1, 2, 3, 4, 1)$, R_2: $(1, 2, 3, 4, 1, 5, 8, 7, 6, 5, 1)$,
R_3: $(5, 6, 10, 9, 11, 8, 5)$, R_4: $(6, 7, 8, 11, 12, 10, 6)$,
R_5: $(9, 10, 12, 11, 9)$.

Por lo tanto, los grados son

$$gr(R_1) = 4,\ gr(R_2) = 10,\ gr(R_3) = 6,\ gr(R_4) = 6,\ gr(R_5) = 4.$$

Problema 3

Demuéstre el Teorema análogo al Primer Teorema de la Teoría de Grafos para pseudomultigrafos. A continuación usando tal generalización pruébese el Teorema análogo para mapas utilizando el pseudomultigrafo dual de un mapa.

Solución

Sea M = (V, E) un pseudomultigrafo. A partir de él vamos a obtener un grafo G(M). Sean u y v dos vértices unidos por más de una arista. Realizamos entonces el proceso descrito en el Problema 8 del Tema 8, aplicado a todas las aristas múltiples.

Consideremos ahora un lazo de M. Sean u su vértice y e su arista. Suprimamos la arista e y añadamos un vértice nuevo, w, y dos aristas nuevas, uw y wu. Procederemos así con todos los lazos de M. Una vez finalizados ambos procesos se obtiene un grafo G(M) = (V', E').

Para demostrar que

$$\sum_{i=1}^{p} gr(v_i) = 2\,\#E,$$

donde p = #V, basta comprobar que cada uno de los pasos descritos antes alteran los dos miembros de esa igualdad en la misma cantidad.

En efecto, en cada paso de ambos procesos se suprime una arista, se añaden dos nuevas y se añade un nuevo vértice de grado 2. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{p} gr(v_i)$ y 2#E aumentan en dos unidades en cada paso. Al final tenemos G(M) = (V', E'), y para este grafo

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2\,\#E',$$

donde n = #V', y por consiguiente, la igualdad también es cierta para el pseudomultigrafo M.

Consideremos ahora un mapa M. Construyamos su pseudomultigrafo dual G_M. Como el número de regiones de M es igual al número de vértices de G_M y el grado de cada región coincide, por construcción de G_M, con el grado del vértice asociado a esa región, se tiene que la suma de los grados de las regiones de un mapa es igual al doble del número de aristas del pseudomultigrafo que representa.

Problema 4

Demuéstre la Fórmula de Euler para mapas conexos que representen multigrafos, pseudografos o pseudomultigrafos.

Solución

Consideremos el caso más general: los pseudomultigrafos. Sean M un mapa y V, E y R, sus conjuntos de vértices, aristas y regiones respectivamente. Sea M* = (V, E) el pseudomultigrafo que representa M. Sea G(M*) = (V', E') el grafo obtenido a partir de M* mediante el procedimiento descrito en el problema anterior.

Para demostrar que la Fórmula de Euler es válida para el mapa M, basta comprobar que cada uno de los pasos necesarios en la construcción de G(M*) no altera la cantidad #V - #E + #R.

En cada paso (eliminación de lazos y aristas múltiples) suprimimos una arista, añadimos dos aristas nuevas y un nuevo vértice. Además el número de regiones no cambia. Por tanto, la cantidad anterior permanece constante en cada paso.

Al final del proceso llegamos al grafo G(M*) = (V', E'), representado por un mapa con #V' vértices, #E' aristas y #R regiones. Para este mapa la Fórmula de Euler es cierta, es decir

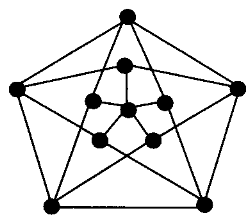
$$\#V' - \#E' + \#R = 2,$$

y por lo tanto, para el mapa M inicial se tiene que

$$\#V - \#E + \#R = 2.$$

Problema 5

¿El grafo de la figura siguiente es plano?



Solución

Tenemos que $\#V = 11$ y $\#E = 20$. Además se observa que no contiene ningún subgrafo isomorfo a K_3 y es conexo. En esta situación sabemos que una condición necesaria y suficiente para que un grafo sea plano es que

$$\#E \leq 2\,\#V - 4,$$

pero en el grafo que consideramos $\#E = 20$ mientras que el miembro de la derecha es

$$2.11 - 4 = 18,$$

luego la condición no se satisface y, por lo tanto, el grafo no es plano.

Problema 6

Establézcase qué grafos completos son planos y cuáles no.

Solución

Un grafo es completo si cada par de vértices son los extremos de una arista del grafo. Consideremos el grafo completo K_n con n vértices. El número de aristas de este grafo será el número de combinaciones de n elementos tomados de dos en dos, C(n, 2), es decir

$$\#E = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Una condición necesaria para que un grafo conexo con más de dos vértices sea plano es que

$$\#E \leq 3\,\#V - 6.$$

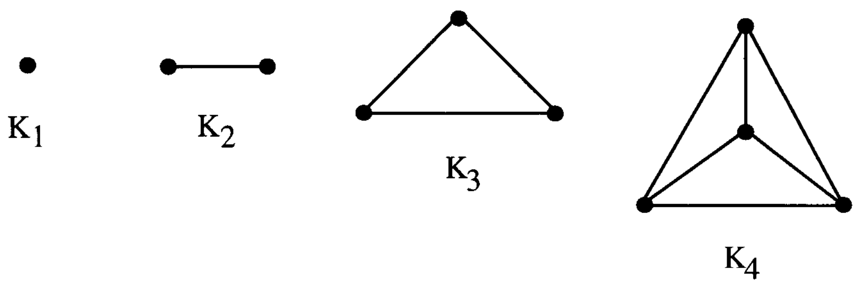
Sustituyendo #V y #E por los valores en nuestro caso tenemos que

$$n\,(n-1) \leq 6n - 12,$$

$$n^2 - 7n + 12 \leq 0,$$

lo que se cumple para $n = 3, 4$. Para cualquier otro número natural n mayor que 4, $n^2 - 7n + 12$ es estrictamente mayor que 0, y entonces K_n no es plano.

Los casos K_1 y K_2 son evidentemente planos. Por tanto los únicos grafos completos planos son los K_n para $n = 1, 2, 3$ y 4.

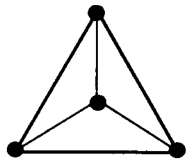


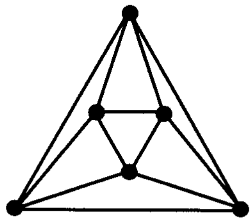
Problema 7

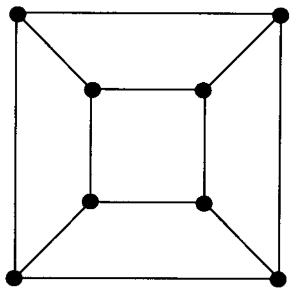
Hállense los pseudomultigrafos duales de los cinco mapas que representan los poliedros regulares. ¿Se obtiene algún grafo que no esté representado en tales mapas?

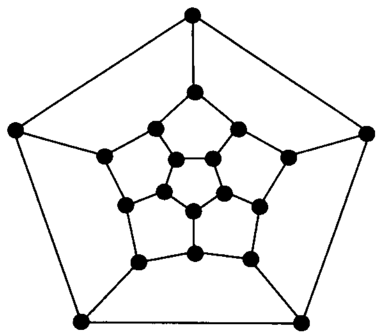
Solución

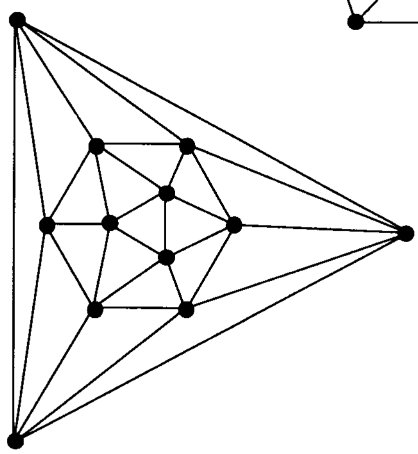
Sea $G = (V, E)$ el grafo representado por el mapa de cada poliedro.











Designaremos a cada poliedro por $M = (v, e, r)$, donde $v = \#V$, $e = \#E$, y r es el número de regiones del mapa. Contando los vértices, aristas y regiones en la figura, y dando a M como subíndice la letra inicial del poliedro correspondiente, tenemos

Tetraedro, G_T: $M_T = (4, 6, 4)$, grafo dual G_T^*.

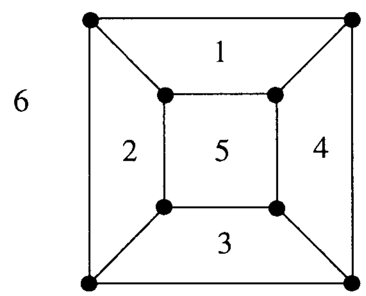
Hexaedro, G_H: $M_H = (8, 12, 6)$, grafo dual G_H^*.

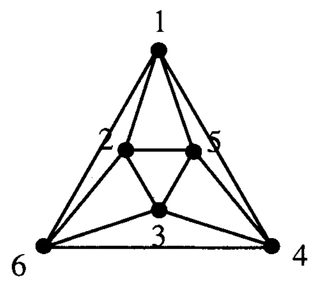
Octaedro, G_O: $M_O = (6, 12, 8)$, grafo dual G_O^*.

Dodecaedro, G_D: $M_D = (20, 30, 12)$, grafo dual G_D^*.

Icosaedro, G_I: $M_I = (12, 30, 20)$, grafo dual G_I^*.

Se verifica que G_T^* es isomorfo a G_T, G_H^* es isomorfo a G_O, G_O^* es isomorfo a G_H, G_D^* es isomorfo a G_I, G_I^* es isomorfo a G_D. Para probar que G_T^* es isomorfo a G_T, basta observar que G_T es isomorfo a K_4 y que M_T tiene cuatro regiones y que cada región es contígua a las otras tres, es decir, G_T^* es isomorfo también a K_4. Dado que G_T es isomorfo a K_4 y G_T^* es isomorfo también a K_4, entonces G_T es isomorfo a G_T^*. El resto de los isomorfismos se definen directamente, por ejemplo, para el isomorfismo de G_H^* a G_O, tómese el sugerido por la siguiente figura:





Problema 8

Pruébese que en todo grafo plano conexo existe al menos un vértice cuyo grado es, a lo más, cinco.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo con al menos tres vértices. Por el Primer Teorema de la Teoría de Grafos tenemos que la suma de los grados de los vértices es el doble que el número de aristas $\#E$. Sea $\#V = n$. Por hipótesis G es plano, por tanto

$$\#E \leq 3n - 6.$$

Supongamos que para todo vértice v_i, con $i = 1, ..., n$, $gr(v_i) \geq 6$. Entonces

$$\#E \geq 3n,$$

lo que contradice que G sea plano. Deducimos que no todos los vértices pueden tener grado estrictamente mayor que cinco, y por lo tanto existe al menos un vértice en G cuyo grado es, a lo más, cinco.

Problema 9

Hállese una condición necesaria y suficiente sobre r para que K_r sea bipartito.

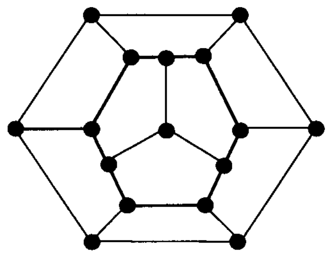
Solución

El grafo K_2 es evidentemente bipartito. Consideremos K_3. Sean sus vértices v_1, v_2 y v_3. Evidentemente (v_1, v_2, v_3, v_1). Así pues, K_3 no es bipartito.

Sea el grafo K_r con $r > 3$. Cualquier subconjunto de tres vértices de K_r forman un subgrafo isomorfo a K_3, por tanto K_r tampoco es bipartito. Concluimos que el único grafo completo bipartito es K_2.

Problema 10

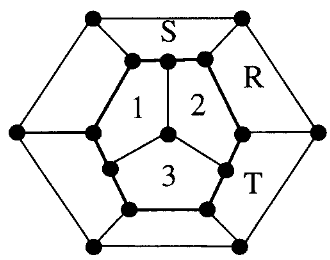
Considérese el mapa de la siguiente figura:



Pruébese que son necesarios más de tres colores para colorear las regiones de modo que dos regiones adyacentes tengan colores diferentes.

Solución

Consideremos las tres regiones centrales. Puesto que cada una de ellas es adyacente a las otras dos, se necesitan tres colores para distinguirlas. Llamemos a tales tres colores 1, 2 y 3 y coloreemos como sugiere la siguiente figura:



Supongamos ahora que el mapa se pudiera colorear con dichos tres colores. A R le hemos de asignar el color 3 ó 1 (pues es adyacente a una región coloreada con 2). Si se le asigna el color 1 entonces S no puede ser coloreada ni con 1, ni con 2, ni con 3, y si se le da el color 3 ocurre lo mismo con T, luego son precisos más de tres colores.

Problema 11

Pruébese que un multigrafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Solución

Sea M un multigrafo. A partir de él vamos a obtener un grafo G*(M). Consideremos uno de los pares de vértices, u y v, unidos por más de una arista. Sea e una cualquiera de estas aristas. Suprimimos esta arista, añadimos dos vértices nuevos, a y b, y tres aristas nuevas ua, ab y bv. Realizamos este proceso para todas las aristas uv y para todos los pares de vértices con aristas múltiples. Se obtiene así un grafo G*(M).

Es evidente que M es bipartito si y sólo si G*(M) lo es. En efecto, si M es bipartito los vértices u y v son de colores diferentes. Entonces dando al vértice nuevo a el color de v y al vértice b el color de u se tiene que G*(M) es bipartito.

Por último, G*(M) es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar. Consideremos cualquier ciclo de M que contenga la arista uv. En G*(M) corresponde a un ciclo que contiene a las aristas ua, ab y bv. Por tanto la paridad de ambos ciclos es la misma. Como esto es cierto en todos los pasos necesarios en la construcción de G*(M), concluimos que M es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Problema 12

Dado un mapa encuentre una condición necesaria y suficiente para que necesite más de dos colores para colorear sus regiones.

Solución

Razonaremos sobre el pseudomultigrafo dual del mapa. Tal pseudomultigrafo debe admitir una coloración de sus vértices con dos colores, es decir, debe ser bipartito. Así una condición necesaria y suficiente para que un mapa sea coloreable con dos colores es que el pseudgrafo dual sea bipartito, o bien, que posea todos los ciclos de longitud par.

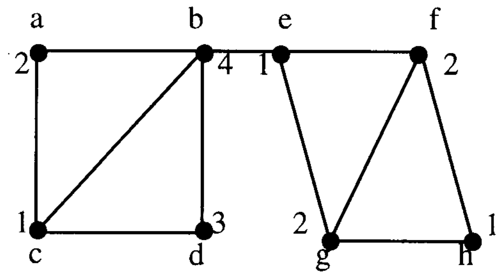
Problema 13

Prúebese que cinco colores son suficientes para colorear todo mapa plano (Teorema de los Cinco Colores).

Solución

El problema es equivalente a colorear el pseudomultigrafo dual del mapa. En lo que sigue utilizaremos la palabra grafo, en lugar de pseudomultigrafo, por brevedad. Necesitaremos algunos preliminares.

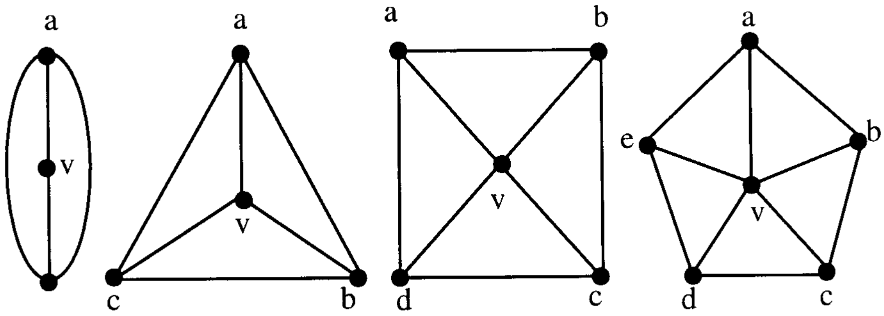
a) Sea G un grafo donde se han coloreado sus vértices. Consideremos dos colores diferentes, x y x'. Sea H(x, x') el subgrafo formado por todos los vértices con colores x y x', y todas las aristas que unen dos vértices con estos colores. En la figura se muestra un ejemplo, donde el número indica el color de cada vértice.



El grafo H(1, 2) contiene los vértices a, c, e, f, g y h, y las aristas ac, eg, ef, gh y fh. Es claro que H(1, 2) no es conexo. Si H(x, x') no es conexo, designaremos la componente conexa que contiene a un vértice v por $H_v(x, x')$. En el ejemplo anterior, $H_a(1, 2)$ es el subgrafo formado por los vértices a y c, y la arista ac.

En una componente $H_v(x, x')$ los vértices coloreados con el color x pueden ser recoloreados con el color x', y viceversa, y el grafo total G sigue siendo un grafo coloreado. Observemos que si un vértice v' de H(x, x') no pertenece a $H_v(x, x')$, el cambio de colores efectuado en los vértices de $H_v(x, x')$ no afecta a su color.

b) Recordemos el resultado del Problema 8: todo grafo plano contiene al menos un vértice de grado a lo más cinco. Por lo tanto cualquier grafo contiene como subgrafo alguna de las cuatro configuraciones de la figura.

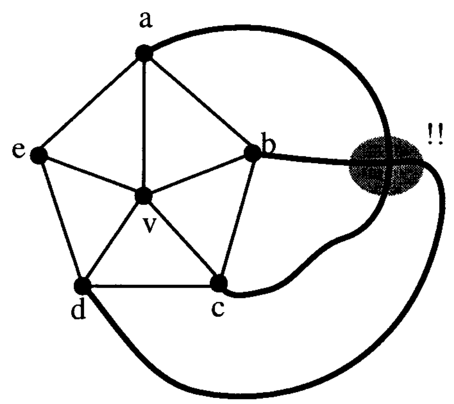


(1) (2) (3) (4)

La demostración del Teorema se realiza por inducción sobre el número de vértices de G. Para $n \leq 4$, el Teorema es trivialmente cierto.

Sea $4 < n$. Como hemos visto en b) el grafo G contiene como subgrafo una de las configuraciones (1)-(4). Eliminemos el vértice v de esa configuración y las aristas que llegan a él. Por la hipótesis de inducción, el grafo resultante es coloreable con 5 colores, que llamaremos 1, 2,..., 5. Se añade ahora el vértice v, al cual hay que asignarle uno de esos cinco colores. Para las configuraciones (1), (2) y (3), esto es posible, pues basta dar a v un color diferente a los utilizados en los vértices a, b, c y d. Así pues, supongamos que G contiene la configuración (4) y los cinco vértices a, b, c, d y e, tienen los colores 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

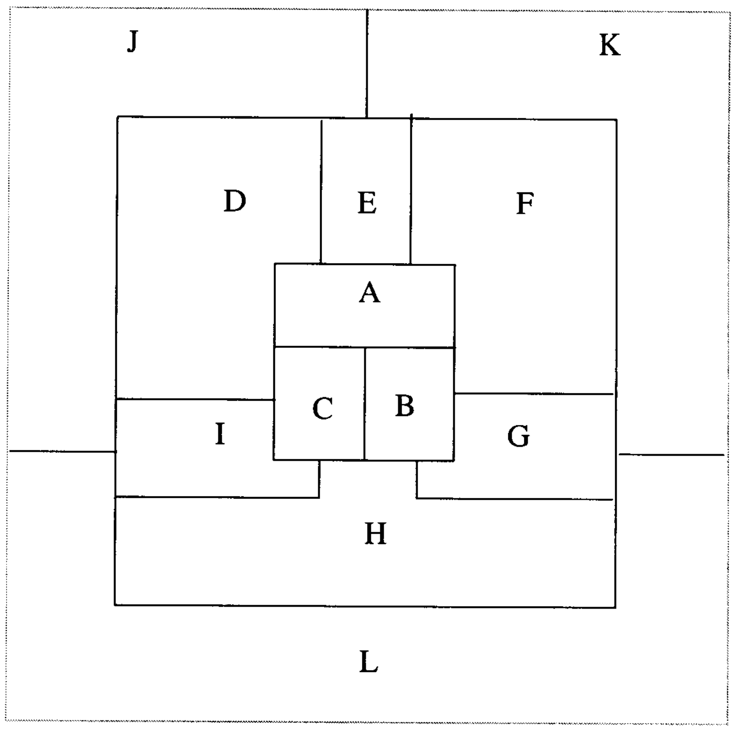
No puede ocurrir que los vértices a y c pertenezcan a la misma componente de H(1, 3) y *a la vez* los vértices b y d pertenezcan a la misma componente de H(2, 4), ya que por ser G un grafo plano, esto exigiría que ambas componentes tuvieran un vértice común, lo cual es imposible.



Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que el vértice a no pertenece a $H_c(1, 3)$. Por lo indicado en a) podemos asignar al vértice c el color 1, y recolorear todos los vértices de $H_c(1, 3)$, sin afectar a los colores de los vértices a, b, d y e. Podemos, por tanto, asignar al vértice v el color 3 que ha quedado disponible, y el Teorema está completamente demostrado.

Problema 14

Sea el mapa de la figura, donde cada región es contigua a otras cinco. Coloréese usando cuatro colores.

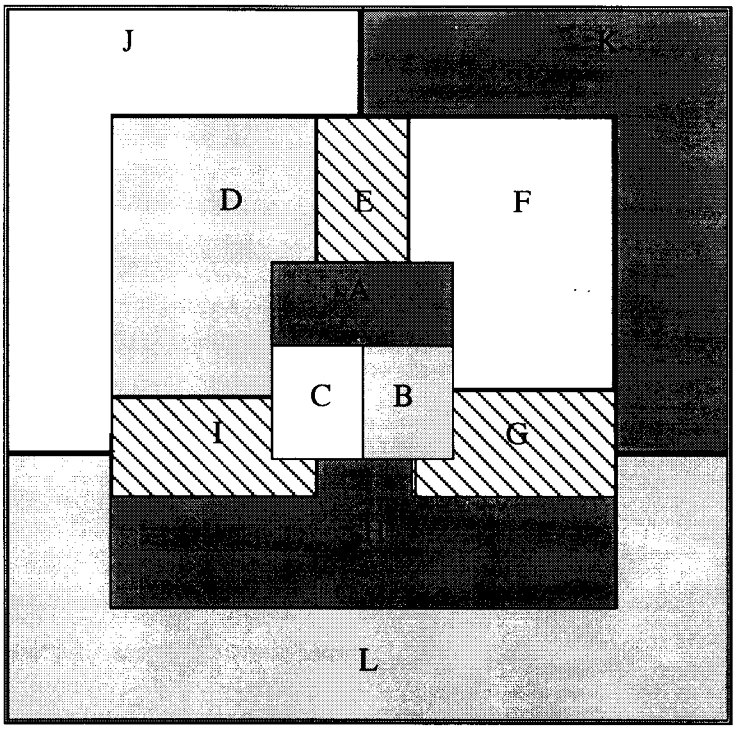


Solución

Asignemos los colores 1, 2 y 3 a las regiones A, B y C, respectivemente. Las regiones D, F y H son, cada una, contiguas a dos de estas regiones, pero no a una tercera. Asignemos, por tanto, el color de la región no contigua, es decir, a D el color 2, a F el color 3 y a H el color 1.

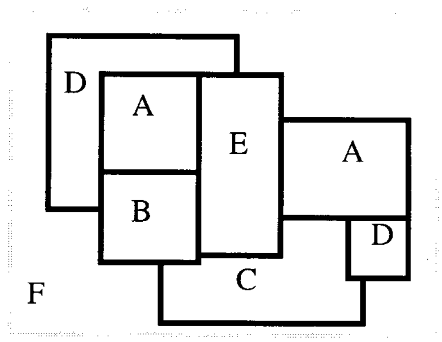
Consideremos las regiones E, G y I. Cada una es contigua a otras tres ya coloreadas. Le asignamos entonces el cuarto color disponible, esto es, el color 4.

Por último, las regiones J, K y L son, cada una, contiguas a tres regiones, donde en cada caso, estas tres regiones están coloreadas con dos colores, el 4 y otro. Para la región J disponemos de los colores 1 y 3, para la región K de los colores 1 y 2 y para la región L tenemos los colores 2 y 3. Así pues, tenemos dos posibilidades de colorear una de ellas. Una vez fijado el color de una de la regiones consideradas, los colores de las otras dos están determinados, ya que las tres regiones son contiguas entre sí. En la figura se ve el resultado final de la coloración.



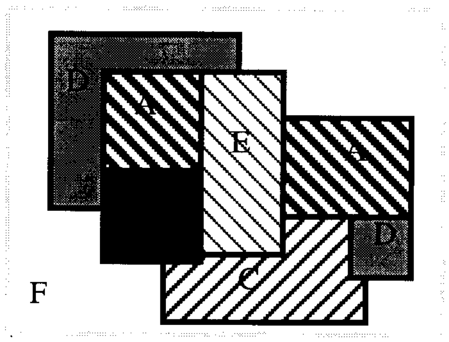
Problema 15

Compruébese que en el Teorema de los Cuatro Colores las regiones deben ser conexas, considerando el mapa de la figura. ¿Cuántos colores son necesarios para colorearlo?



Solución

Las regiones A, B, C y E deben se coloreadas con cuatro colores, ya que cada una es contigua con las otras tres. Sean sus colores 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Consideremos la región D. Es contigua a las regiones A, B, C y E. Por tanto, exige un color distinto a los anteriores. Sea 5 este color. Por último consideremos la región exterior F. Obsérvese que es contigua a las otras cinco, por lo que exige un sexto color. Luego necesitamos seis colores para colorear este mapa.



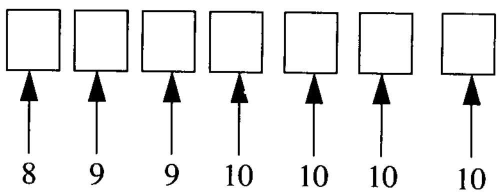
Tema 11 Técnicas básicas

Problema 1

Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número de 0 al 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?

Solución

Supongamos que tenemos 7 cajas como muestra la figura. La primera se puede llenar con enteros entre 2 y 9, la segunda y tercera con enteros entre 1 y 9, y las cuatro restantes con enteros entre 0 y 9



Cantidad de números permitidos
que puede haber en cada casilla

Por el Principio de Multiplicación, se tendrá que hay

$$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6480000,$$

posibles números de télefono.

Problema 2

Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más que una sola vez en la combinación de cada cerradura. Por ejemplo 23-8-6 es una combinación posible, pero 23-8-23 no. ¿Cuántas cerraduras con combinaciones diferentes pueden construirse?

Solución

Consideremos cada combinacion como un conjunto de tres casillas donde se pueden introducir números del 0 al 99. Hay 100 formas de elegir los números de la primera casilla (0-99). Puesto que están prohibidas las repeticiones, hay 99 formas de elegir el número de la segunda casilla y por lo tanto hay 98 para la última. Por el Principio de Multiplicación habrá

$$100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200,$$

combinaciones distintas.

Problema 3

¿Cuántos habitantes debe tener una ciudad para asegurar que hay al menos dos habitantes cuyas tres iniciales del nombre y de los dos apellidos coinciden?. Se supone que sólo se considera el primer nombre propio y 26 letras en el alfabeto.

Solución

Puesto que tanto el nombre de pila como los dos apellidos pueden comenzar por cualquiera de las 26 letras del alfabeto, por el Principio de Multiplicación tenemos

$$26.26.26 = 17\,576,$$

conjuntos ordenados distintos de tres iniciales. Por el Principio de Distribución el número mínimo de habitantes necesarios para garantizar que existen dos con las mismas iniciales será 17 577.

Problema 4

En un Torneo deportivo ocho equipos juegan por el procedimiento de todos contra todos a una sola vuelta. Los partidos terminan necesariamente con la victoria de uno de los dos equipos. Demuéstrese que al final del Torneo, o bien hay un único equipo con i victorias, para todo i con $0 \leq i \leq 7$, o bien hay, al menos, dos equipos con el mismo número de victorias.

Solución

En primer lugar calculamos el número de partidos que se juegan en el Torneo. Cada equipo juega contra otros siete rivales. Por tanto hay 28 partidos diferentes.

Consideremos los puestos de la clasificación final como cajas etiquetadas con los números 0, 1, 2,..., 7, según el número de victorias. Observemos que la suma de estos números es precisamente 28. Como hay ocho equipos podemos distribuirlos en cajas distintas. Por lo tanto es posible que para cada i, con $0 \leq i \leq 7$, haya un solo equipo con i victorias.

Supongamos ahora que esto no ocurre. Entonces existe al menos un número i_0, con $0 \leq i_0 \leq 7$, tal que ningún equipo ha obtenido i_0 victorias. Consideremos las otras siete cajas etiquetadas como antes. Al distribuir los ocho equipos en las siete cajas, el Principio de Distribución nos asegura que al menos dos equipos estarán en la misma caja. Es decir, al menos dos equipos habrán obtenido el mismo número de victorias.

Problema 5

El temario de una oposición consta de diez temas. Cada opositor debe contestar a tres temas distintos elegidos por sorteo. Suponiendo que el número de opositores presentados ha sido 721, demuéstrese que

a) Al menos a 17 opositores, el sorteo les adjudicó los dos primeros temas iguales.

b) Al menos 9 opositores debieron contestar el mismo primer tema y el mismo tercer tema.

c) Al menos a dos opositores les coincidieron los tres temas y en el mismo orden.

Solución

Haremos uso de los Principios de Multiplicación y de Distribución. En primer lugar estudiamos cuántos resultados distintos son posibles en el sorteo de los temas.

Para el primer tema tenemos 10 posibles. Una vez sorteado el primer tema, quedan 9 para el segundo y, por último, 8 para el tercero. Por el Principio de Multiplicación se tiene

$$10.9.8 = 720,$$

resultados distintos. Si consideramos solamente el resultado de los dos primeros temas, vemos que hay 90 posibles resultados.

a) En este caso no se distingue el orden del sorteo de los dos primeros temas. Por tanto habrá 45 resultados distintos. Como $721 = 45.16 + 1$, el Principio de Distribución asegura que habrá al menos 17 opositores que se han examinado de los mismos dos primeros temas.

b) Por el enunciado de este caso, vemos que ahora sí influye el orden de los temas. Por el Principio de Multiplicación tenemos $10.9 = 90$ posibles resultados del sorteo, para los temas primero y tercero. Como $721 = 90.8 + 1$, por el Principio de Distribución concluimos que hay un subconjunto con, al menos 9 opositores, que satisface las condiciones.

c) Por último, como $721 = 720.1 + 1$, nuevamente el Principio de Distribución nos asegura que hay al menos dos opositores que tuvieron los tres temas iguales y en el mismo orden.

Problema 6

Dada una sucesión de números naturales $n_1, n_2, ..., n_k$, demuéstrese que existe un subconjunto de números consecutivos tales que su suma es un múltiplo de k.

Solución

Consideremos las sumas

$S_1 = n_1,$

$S_2 = n_1 + n_2,$

$S_3 = n_1 + n_2 + n_3,$

...

$S_k = n_1 + n_2 + ... + n_i + ... + n_k.$

Calculamos ahora los restos de S_i módulo k. Si para algún i el resto es 0, entonces S_i es múltiplo de k y está demostrado lo que queríamos. Si ningún resto es 0, entonces habrá, a lo más, k - 1 restos distintos. Por el Principio de Distribución, habrá al menos dos sumas, S_{j_1} y S_{j_2}, con el mismo resto. Entonces

$$S_{j_2} - S_{j_1} = n_{j_1+1} + \dots + n_{j_2},$$

es un múltiplo de k.

Problema 7

Un directivo de una empresa visitó 39 oficinas distintas en 26 días consecutivos. Se supone que cada día visitó un número entero positivo de oficinas y no repitió ninguna visita. Demuéstrese que hubo un periodo de días consecutivos en los que visitó exactamente 12 oficinas.

Solución

Dividamos el conjunto de 26 días en dos periodos iguales. Por el Principio de Distribución en uno de estos dos periodos visitó k oficinas, con $k \leq 19$. Como sabemos que cada día visitó al menos una oficina se tiene que $13 \leq k \leq 19$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que este periodo es la primera mitad, es decir los días 1, 2,..., 13. Sea n_i el número de oficinas que visitó el día i. Por el Problema anterior, en el conjunto $n_1, n_2, \dots, n_{12}$, existe un subconjunto de números consecutivos, cuya suma es un múltiplo de 12. Observemos que esta suma es menor que k. Por tanto, el único múltiplo de 12 posible es precisamente 12, y hemos demostrado que hubo un periodo de días consecutivos en los que el directivo visitó exactamente 12 oficinas.

Problema 8

Un conjunto P de ocho personas tienen un total de 14 casas y todos tienen al menos una casa. Demuéstrese que para cada n, con $1 \leq n \leq 13$, existe un subconjunto de personas que tienen exactamente n casas.

Solución

Sea c_i, para $1 \leq i \leq 8$, el número de casas que tiene la persona i. Sea C el conjunto formado por los c_i. Sea A un subconjunto de C. Designaremos la suma de los elementos de A por S_A. Observemos que si existe un subconjunto A de C, tal que $S_A = n$, entonces para el complementario se tiene que $S_{C-A} = 14 - n$. Por tanto basta probar el resultado para los n tal que $1 \leq n \leq 7$.

Recordemos una consecuencia del Problema 6: si X es un conjunto de n números naturales, entonces existe un subconjunto Y de X, tal que S_Y es un múltiplo de n. En nuestro caso necesitamos demostrar que es precisamente n, para lo cual bastará comprobar que S_Y es menor que 2n.

Aplicaremos este resultado tomando como X diferentes conjuntos, según los valores de n.

Para n = 7, sea $X = C - \{c\}$, donde c es un elemento cualquiera de C. Es claro que X tiene siete elementos y $S_X \leq 13$. Existe un subconjunto Y de X tal que S_Y es múltiplo de 12 y como $S_Y < S_X$, entonces necesariamente es 12.

Dividamos C en cuatro pares de números. Por el Principio de Distribución, uno de los pares, que designaremos por A, satisface que $4 \leq S_A$, y por tanto, $S_{X-A} \leq 10$. Luego para n = 6 tomamos X = C - A.

Sea c un elemento cualquiera de C - A. El conjunto $M = C - A - \{a\}$, tiene cinco elementos y $S_M \leq 9$. Entonces para n = 5, tomamos como X el conjunto M.

Dividamos ahora C en dos mitades. Por el Principio de Distribución, una de estas mitades, que llamaremos B, satisface que $S_B \leq 7$. Como B tiene cuatro elementos, tomando X = B, hemos resuelto el caso n = 4.

Volvamos al conjunto C - A, del caso n = 6. Dividimos este conjunto en dos mitades. Al menos una de ellas, que llamaremos D, satisface que $S_D \leq 6$. Como D tiene tres elementos entonces, para el caso n = 3, X es el conjunto D.

Por último, consideremos los números c_i de C. Es evidente que existen al menos dos de ellos, que podemos suponer c_1 y c_2, tales que $c_1 = c_2 = 1$. De no ser así, $32 \leq S_C$, en contradicción con los datos. Es obvio que los conjuntos $\{c_1\}$ y $\{c_1, c_2\}$, satisfacen la condición para los casos n = 1 y n = 2.

Problema 9

Sean S y T dos conjuntos finitos con $|S| > k|T|$, y sea f una aplicación de S a T. Demuéstrese que al menos uno de los subconjuntos $f^{-1}(t)$, donde $t \in T$, tiene más de k elementos.

Solución

Sea f una aplicación, $f : S \to T$. Puesto que por hipótesis $|S| > k|T|$, es evidente que $\{A_t = f^{-1}(t) | t \in T\}$ define una partición del conjunto S en n subconjuntos, con $n \leq |T|$. Entonces, por el Principio de Distribución, alguna de las contraimágenes $f^{-1}(t)$ tiene al menos $|S| / n$ elementos. Luego

$$\frac{|S|}{n} \geq \frac{|S|}{|T|} > k,$$

es decir, $f^{-1}(t)$ tiene más de k elementos.

Problema 10

Una compañía de ordenadores necesita un director y un subdirector comercial. Hay cinco candidatos. ¿Cúantas combinaciones se pueden hacer con los candidatos para realizar la selección?

Solución

Por el Principio de Multiplicación, hay cinco formas de elegir un director, y para cada una de éstas hay 4 formas de elegir un subdirector. Por tanto hay 5.4 posibilidades. Es decir, si se elige un director se tienen 4 candidatos para un subdirector, si se efectua esto con cada uno de los candidatos se tendrá que hay

$$4+4+4+4+4 = 5 \cdot 4 = 20,$$

maneras de llevar a cabo la selección.

Problema 11

Un pianista ha ensayado durante 112 horas a lo largo de 12 días (se supone que cada día lo ha hecho un número entero de horas). Demuéstrese que hubo un par de días consecutivos donde ensayó al menos 19 horas en total.

Solución

Numeremos los días $\{1, 2, 3,...,12\}$ y consideremos los subconjuntos $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{7,8\}, \{9,10\}, \{11,12\}$. Puesto que se deben distribuir las 112 horas entre estos subconjuntos y $112 = 6.18 + 4$, aplicando el Principio de Distribución, se tiene que hay dos días en los que ensayó al menos 19 horas.

Problema 12

Sea un conjunto $\{a_1, a_2,..., a_9\}$ de números naturales diferentes cuya suma es 90. Demuéstrese que existen en este conjunto cuatro números cuya suma es al menos 40.

Solución

Sea $\{a_1,..., a_9\}$ una lista de números naturales tales que $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, con $\sum_{i=1}^{9} a_i = 90$, entonces existe una suma de cuatro de tales números con valor mayor o igual a 40. En efecto, formemos las sumas

$$s_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}, \quad i=1,..., 6,$$

$$s_7 = a_7 + a_8 + a_9 + a_1,$$

$$s_8 = a_8 + a_9 + a_1 + a_2,$$

$$s_9 = a_9 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Se observa en las anteriores sumas, que cada número a_i aparece cuatro veces, luego

$$\sum_{i=1}^{9} s_i = \sum_{i=1}^{9} 4a_i = 4\sum_{i=1}^{9} a_i = 4 \cdot 90.$$

Si se calcula el valor promedio

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} s_i}{9} = \frac{4 \cdot 90}{9} = 40 > 39,$$

se tiene, por el Principio de Distribución, que existe un s_i tal que $s_i \geq 40$.

Problema 13

Sea $n \geq 2$ un número natural, A el conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ y B un subconjunto de A con $n+1$ elementos.

a) Demuéstrese que B contiene al menos dos números que son primos entre sí.

b) Demuéstrese que B contiene al menos dos números tales que uno divide al otro.

Solución

a) Supongamos que $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}\}$. Sean $S_1 = \{1, 3, ..., 2k - 1, ..., 2n - 1\}$ y $S_2 = \{2, 4, ..., 2k, ..., 2n\}$, evidentemente $|S_1| = |S_2| = n$.

Formemos el conjunto, de pares de elementos de S_1 y S_2,

$$S = \{(2k - 1, 2k) \mid k = 1, ..., n\}.$$

Sea $f : B \to S$ la aplicación que hace corresponder a cada elemento b de B el par ordenado donde se encuentra como factor . Puesto que $|B| > |S|$, por el Problema 9, $f^{-1}(t)$, $t \in S$, consta de al menos dos elementos, b_i y b_j de B, tales que su imagen está en el mismo par de S. Por tanto, teniendo en cuenta que $b_i \neq b_j$, entonces $b_i = 2k - 1$ y $b_j = 2k$, o viceversa. Pero b_i y b_j son primos entre sí. En efecto, existen enteros s y t, (-1) y 1 respectivamente, tales que

$$sb_i + tb_j = 1,$$

$$(-1)(2k - 1) + (1)(2k) = 1.$$

b) Sea $b_i \in B$, sabemos que $b_i = 2^{k_i}.n_i$, donde n_i es impar. Sea

$$f : B \to T = \{1, 3, ..., 2n - 1\},$$

tal que $b_i \to f(b_i) = n_i$. Evidentemente $|B| = n + 1$ y $|T| = n$. Por el Problema 9, $f^{-1}(t)$, $t \in T$, consta de al menos dos elementos. Sean dichas contraimágenes b_i y b_j, entonces

$$\begin{array}{l} b_i = 2^{k_i} n_i \\ b_j = 2^{k_j} n_i \end{array} \qquad \frac{b_i}{b_j} = \frac{2^{k_i}}{2^{k_j}},$$

Puesto que $b_i \neq b_j$ entonces $k_i \neq k_j$. Si $k_i > k_j$ se tendrá que 2^{k_j} divide a 2^{k_i} y por lo tanto $b_j \mid b_i$, y si $k_j > k_i$ entonces $b_i \mid b_j$.

Tema 12

Permutaciones, Variaciones y Combinaciones

Problema 1

Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida.

a) ¿Cuántos números se pueden formar?

b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?

Solución

a) La cantidad de números que se pueden formar de cinco cifras con las dadas es igual al número de variaciones de 6 elementos tomados de cinco en cinco:

$$V(6,5) = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720,$$

números que se pueden formar.

b) De los números que se pueden formar, con las cifras dadas, sólo son divisibles por cuatro aquellos que acaban en 12, 24, 32, 52 y 72. Por tanto, dado un número de cinco cifras, formado con las seis dadas, si las últimas terminan en 2 y 4, sólo quedan tres posiciones para completar dicho número. Entonces, se podrán formar con las cifras $\{1, 3, 5, 7\}$, $V(4, 3)$ números que son múltiplos de 4.

$$\{1, 3, 5, 7\} \quad \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{2}\boxed{4} \longrightarrow V(4, 3)$$

Efectuando un proceso análogo al anterior, para los números con las otras terminaciones, obtenemos que hay $5.V(4, 3) = 120$ números.

Un número es múltiplo de dos si es divisible por 2, es decir, en nuestro caso si termina en 2 ó 4. Para formar los números pedidos, tanto en un caso como en el otro, hay que tener en cuenta que queda fija la última cifra del número y las cuatro restantes se pueden llenar con alguna de las otras cinco del conjunto dado, por tanto se podran formar $2.V(5, 4)$ números que son múltiplos de 2.

$$\{1, 2, 3, 5, 7\} \quad \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{4} \longrightarrow V(5, 4)$$

$$\{1, 3, 4, 5, 7\} \quad \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{2} \longrightarrow V(5, 4)$$

es decir, 240 números.

Problema 2

¿Cuántas permutaciones del conjunto de las letras a, b, c, d, e, satisfacen las siguientes condiciones:

a) La letra b está en segunda posición.

b) La letra a está en primera posición y la d en la cuarta.

c) La letra a está en primera posición o la d en la cuarta.

d) La letra a no está en primera posición ni la d en la cuarta.

e) La letra a no está en primera posición o la d no está en cuarta?

Solución

a) Al quedar fija la letra b podemos permutar las otras cuatro. El número de permutaciones será, por tanto

$$P_4 = 4! = 24.$$

b) En este caso tenemos fijas dos letras. Se permutan las otras tres y entonces el número buscado es

$$P_3 = 3! = 6,$$

permutaciones.

c) Supongamos que la letra a está en primera posición y las otras cuatro en cualquiera de las posiciones restantes. Por el apartado a) tenemos 24 permutaciones que satisfacen estas condiciones. Si fijamos la d en cuarta posición, repitiendo el razonamiento, tenemos otras 24 permutaciones. Ahora bien, entre las 24 primeras están incluidas las permutaciones que tienen una d en cuarta posición, y entre las 24 segundas están incluidas las que tienen una letra a en primera posición. Por lo tanto, las permutaciones que tienen simultáneamente una a en primera posición y una d en cuarta se han contado dos veces, y este número ha sido calculado en b). Luego el resultado será

$$24 + 24 - 6 = 42,$$

permutaciones.

d) Observemos que este caso incluye todas las permutaciones no consideradas en el caso c). Como el total de permutaciones de cinco elementos es $P_5 = 120$, tenemos

$$120 - 42 = 78,$$

permutaciones que satisfacen las condiciones del enunciado.

e) Este caso incluye las permutaciones distintas a las del caso b), es decir

$$120 - 6 = 114,$$

permutaciones.

Problema 3

Una persona planea invitar a sus n amigos a jugar al póker una vez por semana. Sabiendo que es capaz de poder invitar en cada ocasión a un subconjunto de tres personas diferentes durante dos años completos

a) ¿Cuál es, como mínimo, el número n?

b) Para el n obtenido en el apartado anterior, ¿cuál es el número máximo de partidas posibles en las anteriores condiciones sin que coincidan dos amigos prefijados?

Solución

a) Puesto que hay 104 semanas en dos años, el número de subconjuntos distintos de tres elementos que tiene un conjunto de n elementos debe ser mayor o igual que 104. Por tanto $C(n, 3) \geq 104$, o bien

$$n(n-1)(n-2) \geq (104.6 = 624),$$

condición que se satisface para $n \geq 10$. Así pues, está persona tiene, como mínimo, 10 amigos.

b) Numeremos los diez amigos $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Supongamos que los dos que no deben coincidir son los dos últimos. Con los ocho restantes pueden organizarse $C(8, 3) = 56$ partidas diferentes. Calculamos a continuación todos los subconjuntos de dos elementos dentro del conjunto de estas ocho personas, es decir, $C(8, 2) = 28$. Entonces se organizan 28 partidas en las que se incluye al amigo a_9, y otras tantas con el amigo a_{10}, pero no el a_9. En total pueden organizarse

$$56 + 28 + 28 = 112,$$

partidas diferentes sin que coincidan los dos amigos prefijados.

Problema 4

Cinco joyeros quieren guardar las joyas en una caja de seguridad. Desean poder abrir la caja siempre que estén, al menos, tres presentes. Para ello proponen adquirir una caja que tenga un cierto número de cerraduras diferentes, de modo que cada uno reciba distintas llaves, pudiendo recibir dos joyeros distintos una llave de la misma cerradura. ¿Cuál es el número mínimo de cerraduras necesario y el número de llaves que cada uno recibirá?

Solución

Cada dos joyeros no pueden reunir las llaves de todas las cerraduras. Por otra parte, cada llave que les falta sí la tiene cualquier otro subconjunto de dos joyeros, ya que los cuatro tienen las llaves suficientes para abrir la caja. Concluimos que hay tantas cerraduras, al menos, como subconjuntos de dos joyeros puedan formarse, es decir $C(5,2) = 10$ cerraduras.

Veamos ahora el número mínimo de llaves que debe tener cada joyero. Cada uno debe tener al menos una llave diferente a las que tienen cualquier subconjunto de otros dos joyeros. De no ser así, o esos otros dos tendrían todas las llaves necesarias, y esto no es posible, o la unión de los tres no tendría las llaves necesarias, y hemos llegado de nuevo a una contradicción. Por tanto, el número buscado es $C(4,2) = 6$ llaves.

De paso deducimos que hay que encargar $6.5 = 30$ llaves de 10 cerraduras diferentes, es decir 3 llaves iguales de cada cerradura.

Problema 5

Un Departamento de Matemáticas se compone de dos Catedráticos, nueve Profesores Titulares, dos Asociados y tres Ayudantes. Se desea formar una Comisión de cuatro Profesores. ¿Cuántas Comisiones diferentes pueden formarse en cada uno de los siguientes casos:

a) La Comisión tiene, al menos, un Profesor de cada tipo.

b) Al menos un Catedrático debe formar parte de la Comisión.

c) Exactamente dos Profesores Titulares deben formar parte.

Solución

a) Como tiene que haber un Profesor de cada tipo, por el Principio de Multiplicación tenemos

$$2.\,9.\,2.\,3 = 108,$$

Comisiones distintas.

b) Dividimos este caso en dos subcasos:

i) Exactamente un solo Catedrático está en la Comisión.

ii) Los dos Catedráticos forman parte de la Comisión.

i) Tenemos dos posibles elecciones para el Catedrático presente y

C(9+2+3, 3) posibles elecciones para los restantes miembros. Por el Principio de Multiplicación

$$2.\ C(14, 3) = 2.364 = 728,$$

Comisiones distintas.

ii) En este caso sólo quedan dos puestos libres, que pueden ser cubiertos por Profesores de cualquiera de los otros tipos. Tenemos entonces C(14, 2) formas de elegirlos. Es decir, 91 Comisiones con dos Catedráticos.

Por el Principio de Adición se tiene 728 + 91 = 819, Comisiones diferentes en las que, al menos, hay un Catedrático.

c) Hay C(9, 2) maneras de elegir dos Profesores Titulares y C(7, 2) maneras de elegir los restantes dos miembros. Por el Principio de Multiplicación tenemos

$$C(9, 2).\ C(7, 2) = 36.21 = 756,$$

Comisiones en las condiciones requeridas.

Problema 6

Un Comité de selección entrevista a cinco candidatos para un puesto de trabajo. El Comité entrega al final una lista con las personas que propone. ¿Cuántas listas distintas puede entregar en los siguientes casos?

a) La lista ordena a los candidatos en los puestos uno a cinco.

b) El Comité selecciona un primer candidato, un segundo y un tercero.

c) El Comité indica un subconjunto de tres candidatos aceptables.

d) El Comité decide proponer a un candidato para el puesto y seleccionar un subconjunto de dos suplentes.

Solución

a) El número de listas, en estas condiciones, coincide con el número de formas de ordenar un conjunto de cinco elementos, es decir, es el número de permutaciones de cinco elementos, $P_5 = 120$.

b) En este caso se seleccionan ordenadamente tres personas del conjunto de cinco. El número de formas posibles es V(5, 3) = 60.

c) El número buscado coincide con el número de subconjuntos de tres elementos que se pueden formar con un conjunto de cinco elementos, esto es $C(5, 3) = 10$.

d) Cualquiera de los cinco candidatos podría ser propuesto. Para formar el subconjunto de los suplentes disponemos entonces de cuatro personas. Por el Principio de Multiplicación $5.C(4, 2) = 5.6 = 30$.

Problema 7

Sea $\sigma = (x_1, x_2,..., x_{10})$ una sucesión finita, donde los x_i son ceros o unos, y donde hay exactamente cinco ceros y cinco unos. Demuéstrese que existe alguna sucesión finita, σ', de esos números, de la forma

$$\sigma' = (x_i, x_{i+1},..., x_{10}, x_1, x_2,..., x_{i-1}), \text{ para algun } 1 < i \leq 10, \qquad (7.1)$$

tal que los elementos de σ y σ' coinciden en, al menos, cinco posiciones.

Solución

Hay exactamente nueve sucesiones de la forma (7.1), de la dada. Consideremos un elemento cualquiera, x_i, de σ. Es evidente que coincide con otros cuatro elementos de otras tantas sucesiones y no coincide con cinco elementos en las restantes. Como este razonamiento se puede aplicar a cualquiera de los elementos de σ, tendremos un total de $4.10 = 40$ coincidencias. Puesto que hemos comparado nueve sucesiones con σ, por el Principio de Distribución debe existir alguna que tiene más de $40 / 9$ coincidencias. Es decir, existe alguna sucesión σ' de la forma (7.1) que tiene, al menos, cinco coincidencias con σ.

Problema 8

Sean σ_1 y σ_2 dos sucesiones distintas de ceros y unos en las mismas condiciones del Problema anterior. Demuéstrese que existe alguna sucesión de la forma (7.1) de los elementos de σ_2 cuyos números coinciden con los de σ_1 en al menos cinco posiciones.

Solución

Si σ_2 es una sucesión de la forma (7.1) de σ_1 estamos exactamente en las hipótesis del Problema anterior. Supongamos que no es así. Consideremos σ_2

y sus nueve sucesiones de la forma (7.1). Al comparar cada elemento de σ_1 con el correspondiente de cada una de estas diez sucesiones, observamos que hay cinco coincidencias y cinco diferencias. El total de coincidencias será, por tanto, 5.10 = 50. Como hay diez sucesiones, por el Principio de Distribución existe alguna de ellas cuyos elementos que coinciden con los de σ_1 en cinco o más posiciones.

Problema 9

Sea $\sigma\in S_n$. Se define σ^0 como la permutación identidad

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 12...n \\ 12...n \end{pmatrix}.$$

Para k > 0 se define $\sigma^k = \sigma.\sigma...\overset{k}{\dots}.\sigma$ (k-ésima potencia de σ). Consideremos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix}.$$

a) Determínense todos los elementos de S_5 que son potencias de σ.

b) Calcúlese σ^{268}.

Solución

a) Vamos a calcular las primeras potencias de la permutación σ:

$$\sigma^2 = \sigma.\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 42135 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \sigma.\sigma^2 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 42135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 15342 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^4 = \sigma.\sigma^3 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 15342 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 32415 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^5 = \sigma.\sigma^4 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 32415 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 45132 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^6 = \sigma.\sigma^5 = \begin{pmatrix} 12345 \\ 35412 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 45132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix},$$

por lo tanto tenemos que $\sigma^6 = \sigma^0$. Luego σ genera un subgrupo (cíclico) de S_5 de orden 6, es decir, si $\rho \in S_5$ y es una potencia entera m de σ, $\rho = \sigma^m$, entonces, por el Algoritmo de División, se podrá escribir en la forma $\sigma^m = \sigma^{6.q+r}$, donde q es un entero y $0 \leq r \leq 6$. Luego $\sigma^m = \sigma^r$, y ρ será alguna de las potencias de σ calculadas anteriormente.

b) Puesto que $\sigma^6 = \sigma^0$, entonces se tiene

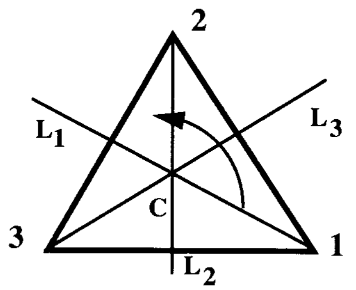
$$\sigma^{268} = \sigma^{6.44+4} = \sigma^4.$$

Problema 10

Hállese la composición de las simetrías

$$r_3 \bullet R_2 \bullet r_1 \bullet R_1 \bullet r_{2,}$$

donde $(r_3, r_2, r_1, R_1, R_2)$ son las simetrías del triángulo



donde:

I = Simetría identidad $\qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

r_1 = Reflexión en L_1 $\qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

r_2 = Reflexión en L_2 $\qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

r_3 = Reflexión en L_3 $\qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

R_1 = Rotación $\qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(sentido de avance contrario a la dirección de las agujas del reloj de $2\pi/3$),

R_2 = Rotación $\qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(sentido de avance contrario a la dirección de las agujas del reloj de $4\pi/3$).

Solución

Sustituyendo las expresiones dadas para las diferentes simetrías se obtiene:

$$r_3 \bullet R_2 \bullet r_1 \bullet R_1 \bullet r_2 =$$

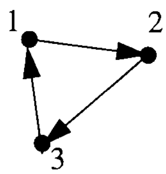
$$r_3 \bullet R_2 \bullet r_1 \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} = r_3 \bullet R_2 \bullet r_1 \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} =$$

$$r_3 \bullet R_2 \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = r_3 \bullet R_2 \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} = r_3 \bullet R_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} = r_2,$$

Problema 11

Se puede asociar un digrafo a cada permutación $\sigma \in S_n$ como sigue. Se representa cada elemento $i \in \{1, 2, ..., n\}$ por un punto. Este conjunto de puntos define el conjunto de vértices del digrafo. Entonces, para cada i, se dibuja un segmento dirigido de i a $\sigma(i)$. Por ejemplo, para la permutación $\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$, tenemos el digrafo

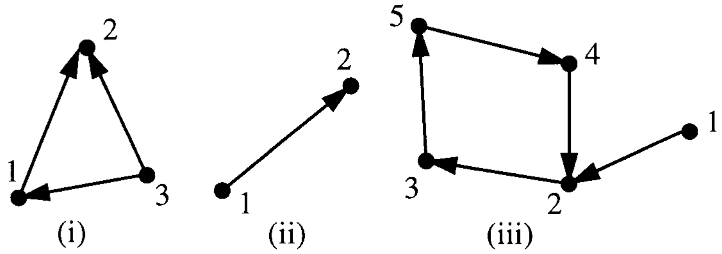


Nota: En realidad cada permutación define un "pseudomultigrafo" pues pueden aparecer lazos y aristas múltiples.

a) Dibújese el digrafo asociado a la permutación

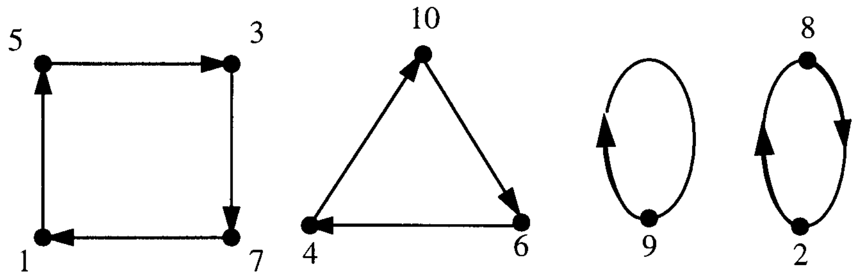
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 7 & 10 & 3 & 4 & 1 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Representan los siguientes digrafos algún tipo de permutación?



Solución

a) El digrafo asociado a dicha permutación tiene cuatro componentes conexas, que corresponden a los ciclos de la misma. Estas componentes son



b) Los digrafos dados no representan ningún tipo de permutación. La razón es que una permutación es una biyección y mueve cada vértice, en la dirección de la flecha, a la localización del vértice adyacente. Así pues, de cada vértice debe salir sólo una arista y sólamente debe llegarle una. Por tanto, en (i) falla porque el punto 2 es la imagen de dos puntos y él no tiene imagen, en (ii) falla puesto que el punto 2 no tiene imagen y el (iii) falla debido a que el punto 2 es imagen de dos puntos y el punto 1 no es imagen de ninguno.

Problema 12

Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja.

a) ¿Cuántas manos de bridge son posibles?

b) ¿De cuántas formas puede una persona dar 6 cartas de picas y 5 de corazones?

Solución

a) El número de manos posibles es igual al número de combinaciones de 52 elementos tomados de 13 en 13, es decir:

$$C(52, 13) = \frac{52!}{(52-13)!\,13!} = 635\,013\,559\,597.$$

b) Partimos la baraja en tres grupos: picas, corazones y el resto de las cartas. Hay C(13, 6) formas de excoger las seis cartas de picas de las trece que hay. Se tienen C(13, 5) formas de elegir cinco cartas de corazones de las trece que hay en la baraja. Falta, por tanto, coger dos cartas del resto de 26 que quedan y esto se puede realizar de C(26, 2) formas. Luego por el Principio de Multiplicación se tiene que hay

$$C(13, 6) \cdot C(13, 5) \cdot C(26, 2) = 1716 \cdot 1287 \cdot 325 = 717\,759\,900,$$

formas de dar el tipo de mano que nos piden.

Problema 13

En un muestreo realizado por cierto partido político antes de unas elecciones 25 personas responden de la siguiente manera: 12 responden sí, 8 responden no y 5 están indecisos. ¿De cuántas formas se puede obtener este resultado?

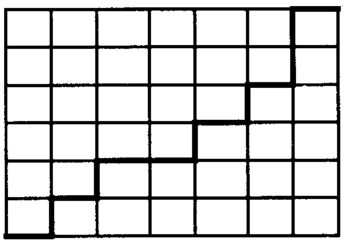
Solución

Se colocan en 25 casillas las respuestas de la encuesta. Existen C(25, 12) formas de colocar los sí en las casillas, quedando 13 casillas en cada caso sin rellenar. Por lo tanto hay C(13, 8) formas de colocar en esas casillas los 8 no y C(5,5) de colocar los indecisos. Luego por el Principio de Multiplicación hay

C(25, 12).C(13, 8).C(5, 5) = 6 692 786 100, formas de que se dé dicho resultado.

Problema 14

La cuadícula de la figura representa unas cuantas calles dentro de una pequeña ciudad. Existen diferentes formas para ir desde el ángulo Suroeste al punto Noreste. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas de viaje son hacia el este y hacia el norte. ¿Cuántos caminos posibles existen?



Solución

Cada ruta desde el punto Suroeste al punto Noreste, consiste en desplazarse 13 segmentos de los pequeños rectángulos en que está dividido el mapa: de ellos 7 van hacia el este y 6 hacia el norte. Cada ruta puede representarse por una cadena formada por 13 letras: 7 E y 6 N. Por ejemplo la cadena que representa el camino de la figura estará codificada de la forma:

ENENEENENENNE.

Una cadena de este tipo está completamente especificada si se indican qué posiciones ocupan las 7 N de las 13 de la cadena. Entonces cada ruta corresponde a un subconjunto de 7 elementos tomado de un conjunto de 13, luego hay

$$C(13,7) = \frac{13!}{6!7!} = 1\,716,$$

caminos posibles.

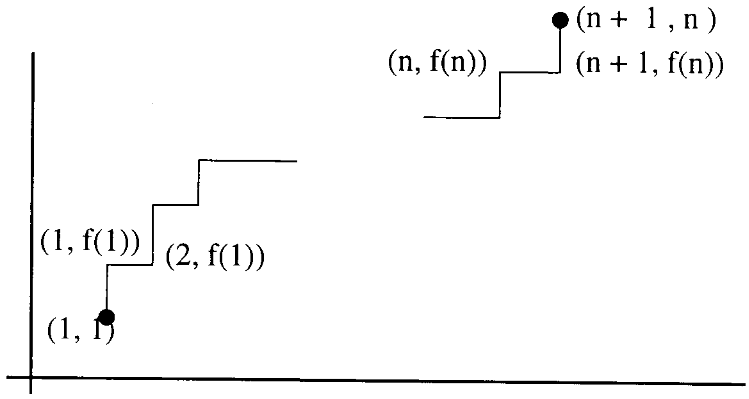
De lo visto hasta aquí se puede sacar la siguiente conclusión: Si la cuadrícula anterior está formada por una malla (m+1 calles verticales por n+1 calles horizontales), entonces el número de caminos desde el punto Suroeste al punto Noreste es igual al número de cadenas de longitud m+n con m 'E' y n 'N', es decir, es igual a C(m+n, m) o C(m+n, n).

Problema 15

¿ Cuál es el número de funciones monótonas crecientes de { 1, 2,..., n } en sí mismo?

Solución

Una función monótona f(t) de dicho tipo se puede representar por un camino poligonal mínimo, en una red cuadrada del tipo del Problema anterior: conectando el punto (1, 1) al punto (1, f(1)), el punto (1, f(1)) al punto (2, f(1)), el punto (2, f(1)) al punto (2, f(2)) y así sucesivamente hasta llegar al punto (n, f(n)) que se conecta al punto (n + 1, f(n)) y éste al punto (n, n + 1) , como se muestra en la figura.



Por lo tanto el número de funciones pedidas es igual al número de caminos mínimos para ir de (1, 1) a (n + 1, n), es decir, $\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$.

Problema 16

Dados n objetos distintos, cada uno disponible en gran cantidad, ¿Cúal es el número de formas de elegir m de los n objetos, si se debe elegir al menos un objeto de cada tipo?.

Solución

El problema también se puede plantear de la forma equivalente: Si m y n son enteros positivos con $m \geq n$, ¿cúal es el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m,$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son números naturales?

Puesto que $m \geq n$, primero se elige un objeto de cada uno de los n objetos, -esto sólo se puede realizar de una forma-, y a continuación se eligen m - n de los objetos restantes de cualquier forma. Entonces, teniendo en cuenta que la solución de este último problema es $C(n + (m - n) - 1, m - n) = C(m - 1, m - n)$, por el Principio de Multiplicación, la solución buscada será

$$1.C(m - 1, m - n) = C(m - 1, m - n).$$

Problema 17

a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9 999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?

b) ¿Cuántos de los números enteros hallados en a) tienen todos sus dígitos distintos de cero?

Solución

a) Si se consideran n casillas en donde se pueden introducir números enteros comprendidos entre 0 y 9, entonces la cantidad de números enteros, tales que la suma de sus dígitos es exactamente k, es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k,$$

es decir,

$$C(n+k-1, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

En nuestro caso hemos de considerar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, por tanto el número pedido es $C(4+9-1, 9) = 220$, menos el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, $C(3+9-1, 9) = 55$. Esto se debe a que en el primer caso se han incluido los números que empiezan por 0 y cuyas siguientes cifras suman 9. Luego tendremos que hay

$$C(4+9-1, 9) - C(3+9-1, 9) = 220 - 55 = 165 \text{ números.}$$

b) La solución del problema planteado en este apartado es equivalente a determinar el número de soluciones naturales de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

que por el Problema anterior es igual a $C(9-1, 9-4) = 56$.

Problema 18

En una heladería se sirven 7 tipos de helados.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 12 helados?

b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 12 helados para que haya al menos uno de cada tipo?

Solución

a) Sea x_i el número de helados del tipo i, $1 \leq i \leq 7$, que se han elegido entre los doce, entonces

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 12,$$

luego el número de formas de elegir dichos helados es

$$C(7+12-1, 12) = C(18, 12).$$

b) Por el Problema 16 el número de modos de seleccionar dichos helados es

$$C(12 - 1, 12 - 7) = C(11, 5).$$

Problema 19

En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados dañados. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo. ¿Cuántas muestras contienen

a) tres circuitos defectuosos,

b) al menos un circuito defectuoso?

Solución

a) Si la muestra contiene tres circuitos defectuosos, entonces contiene además cuatro circuitos no defectuosos. Luego hay C(10, 3) formas de coger tres circuitos defectuosos y C(90, 4) de elegir exactamente cuatro circuitos no defectuosos. Se tiene, por el Principio de Multiplicación, que hay

$$C(10, 3) \cdot C(90, 4) = 306\,622\,800,$$

muestras con tres circuitos defectuosos.

b) Consideremos el complementario del conjunto de muestras que contienen al menos uno defectuoso. Dicho conjunto está formado por muestras sin circuitos defectuosos. Puesto que hay 90 computadores sin circuitos defectuosos, habrá C(90, 7) muestras que no poseen circuitos defectuosos. Sabiendo que hay C(100, 7) muestras en total, se tiene entonces que hay

$$C(100,7) - C(90, 7) = 8\,536\,185\,240,$$

muestras con al menos un circuito defectuoso.

Tema 13 Teorema del Binomio

Problema 1

Utilizando el Teorema del Binomio demuéstrese que

$$\binom{n}{0}(1-p)^n + \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} + \dots$$
$$+ \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p) + \binom{n}{n}p^n = 1,$$

donde n es un número natural y p es un número real con $0 \leq p \leq 1$.

Solución

Sustituyendo en la fórmula del Teorema del Binomio,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

x por 1-p e y por p, donde $0 \leq p \leq 1$, se tiene

$$[(1-p)+p]^n = \binom{n}{0}(1-p)^n + \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p + \ldots$$
$$+\binom{n}{n-1}(1-p)\,p^{n-1} + \binom{n}{n}p^n,$$

y como $[(1 - p) + p]^n = 1^n = 1$ queda demostrada la identidad del enunciado.

Problema 2

¿Cuál es el coeficiente de x^6 en el producto $(1 - x + x^3)(3 + 2x)^5$?

Solución

Observemos que el término que contiene a x^6 en este producto se obtiene como

$$-x\, c_5\, x^5 + x^3\, c_3\, x^3 = (-c_5 + c_3)\, x^6,$$

donde c_5 y c_3 son los coeficientes de x^5 y x^3 en el desarrollo de $(3 + 2x)^5$, es decir

$$c_5 = \binom{5}{0} \cdot 2^5 = 2^5 = 32,$$

$$c_3 = \binom{5}{2} 2^3 3^2 = 10 \cdot 8 \cdot 9 = 720,$$

por tanto, el coeficiente de x^6 en el producto será $-32 + 720 = 688$.

Problema 3

Determínese el coeficiente x^8y^5 en la expansión de $(6x + y / 9)^{13}$.

Solución

Por el Teorema del Binomio, el coeficiente de x^8y^5 será

$$\binom{13}{5} \cdot 6^8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^5 = 36608.$$

Problema 4

Demuéstrese que

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k} = (n+2)\, 2^{n-1}.$$

Solución

Escribiremos el número combinatorio n sobre k como C(n, k). Sea S la suma $\sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k}$. Observemos que

$$S = C(n, 0) + 2\,C(n, 1) + 3\,C(n, 2) + ... + (n+1)\,C(n, n),$$
$$S = (n+1)\,C(n, n) + n\,C(n, n-1) + ... + C(n, 0),$$

y teniendo en cuenta que $C(n, i) = C(n, n - i)$ resulta

$$2S = (n+2) \sum_{i=0}^{n} C(n, i) = (n+2)\; 2^n,$$

y, por tanto, $S = (n+2)\, 2^{n-1}$.

Problema 5

Sea n un número natural. Demuéstrese que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Solución

Escribamos el número combinatorio como C(2n, n). Este número expresa el número de subconjuntos distintos de n elementos que tiene un conjunto de 2n elementos.

Sea A un conjunto cuyos elementos son $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Podemos escribir este conjunto como unión de los subconjuntos, A_1 y A_2, formados por los elementos $x_1, \ldots, x_n$, y $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$, respectivamente. Cada subconjunto B de A con n elementos se puede expresar como $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, donde el primer paréntesis es un subconjunto con k elementos, $0 \leq k \leq n$, y el segundo paréntesis es un subconjunto con n - k elementos. Fijemos ahora k, $0 \leq k \leq n$. El número de subconjuntos distintos de A_1 con k elementos es C(n, k). Análogamente, el número de subconjuntos distintos de n - k elementos de A_2 es C(n, n - k). Luego el número de subconjuntos distintos de A con n elementos, de los cuales k de ellos pertenecen a A_1, será, por el Principio de Multiplicación, $C(n, k).C(n, n - k) = (C(n, n - k))^2$. Por tanto, el número buscado, por el Principio de Adición, será

$$C^2(n, 0) + C^2(n, 1) + \ldots + C^2(n, n),$$

de donde se sigue la igualdad.

Problema 6

Demuéstrese la siguiente identidad de números combinatorios, con k y n enteros.

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Solución

Basta desarrollar los números combinatorios

$$(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = n\binom{n-1}{k}.$$

Problema 7

Sean n y k números naturales.

a) Exprésese k^3 como una combinación lineal de los números combinatorios C(k, 1), C(k, 2) y C(k, 3) con coeficientes enteros.

b) Encuéntrese una fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Solución

a) Hay que encontrar tres números enteros a, b y c, tales que

$$k^3 = a\,C(k, 1) + b\,C(k, 2) + c\,C(k, 3).$$

Sea k = 1. Obviamente, C(k, 2) y C(k, 3) no tienen sentido.Tenemos

$$1^3 = a\,C(1, 1),$$

y de aquí, a = 1.

Si k = 2, C(k, 3) no está definido. Tenemos en este caso

$$2^3 = a\,C(2,1) + b\,C(2, 2) = 2a + b\,.$$

Sea k mayor o igual que 3. Desarrollemos los C(k, i) para i = 1, 2, 3.

$$k^3 = a \cdot k + b \cdot \frac{k(k-1)}{2} + c \cdot \frac{k(k-1)(k-2)}{6},$$

y efectuando las operaciones del miembro de la derecha obtenemos

$$k^3 = \frac{c \cdot k^3 + (3b - 3c)k^2 + (6a - 3b + 2c)k}{6}.$$

Igualamos ahora ambos miembros considerados como polinomios en k. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$c = 6$,

$3b - 3c = 0$,

$6a - 3b + 2c = 0$,

cuya solución es $a = 1, b = 6$ y $c = 6$. Observemos que $a = 1$ y $a = 1, b = 6$, son soluciones en los casos $k = 1$ y $k = 2$, respectivamente. Luego hemos encontrado la combinación lineal buscada.

b) Por el apartado anterior podemos escribir

$$\begin{aligned} S = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = {} & 1\,C(1,1) + \\ & 1C(2,1) + 6\,C(2,2) + \\ & 1C(3,1) + 6\,C(3,2) + 6\,C(3,3) + \ldots + \\ & 1C(n,1) + 6\,C(n,2) + 6\,C(n,3), \end{aligned}$$

que podemos agrupar así

$$S = \sum_{k=1}^{n} C(k,1) + 6 \sum_{k=2}^{n} C(k,2) + 6 \sum_{k=3}^{n} C(k,3),$$

entonces

$$S = C(n+1, 2) + 6\,C(n+1, 3) + 6\,C(n+1, 4),$$

y desarrollando el miembro de la derecha y simplificando se obtiene

$$S = (C(n+1, 2))^2 .$$

Comprobemos la igualdad para el caso $n = 6$. La suma de los seis primeros cubos es

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441,$$

y $(C(7, 2))^2 = 21^2 = 441$.

Problema 8

Calcúlese el valor de la suma

$$S = C(n, 0) + 3\,C(n, 1) + \dots + (2n + 1)\,C(n, n).$$

Solución

$$S = C(n, 0) + 3\,C(n, 1) + \dots + (2n + 1)\,C(n, n),$$
$$S = (2n + 1)\,C(n, n) + (2n - 1)\,C(n, n - 1) + \dots + C(n, 0),$$

y puesto que $C(n, k) = C(n, n - k)$, se tiene

$$2S = (2n + 2) \sum_{i=0}^{n} C(n, i),$$

es decir

$$S = (n + 1)\,2^n.$$

Problema 9

Dése una fórmula mediante coeficientes binomiales para

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n - 1).n,$$

y exprésese la suma en función de n.

Solución

Como $2\,C(k, 2) = k\,(k - 1)$, podemos escribir

$$S = 2 \sum_{k=2}^{n} C(k, 2) = 2\, C(n + 1, 3),$$

y desarrollando el coeficiente binomial, se obtiene

$$S = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Problema 10

Pruébese que para todo m, n, k ∈ **N**, $k \leq n$, m se satisface la siguiente identidad

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k},$$

conocida como identidad de Vandermonde.

Solución

Puesto que

$$(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^m (1 + x)^n,$$

desarrollando ambos miembros y utilizando el desarrollo del binomio se tiene

$$\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right) =$$

$$=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\left[\binom{m}{0}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{0}\right]x+$$
$$+\left[\binom{m}{0}\binom{n}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{0}\right]x^2+\ldots+\binom{m}{m}\binom{n}{n}x^{m+n}.$$

Comparando ahora los coeficientes de x^r de ambos miembros se tiene

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$

Problema 11

Si una partida de bridge es una partición ordenada de 52 cartas en cuatro grupos de 13 cartas cada uno, ¿de cuántas formas distintas puede iniciarse una partida de bridge ?

Solución

Dados n objetos de k tipos (donde se supone que dos objetos del mismo tipo son indistinguibles), con n_i objetos del tipo i, para $1 \leq i \leq k$ y con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, entonces hay $\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_k!}$ formas diferentes de ordenar los n objetos. En nuestro caso n = 52, y $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 13$. Luego el número de manos distintas de bridge es

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = \frac{52!}{(13!)^4} = 5.3645 \cdot 10^{28}.$$

Problema 12

Una mano de bridge tiene distribución $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ con $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$, y $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 13$. Si hay n_1 cartas de un palo, n_2 de otro palo, etc. ¿Cuál es el número de manos de brige con distribución $\{5, 4, 2, 2\}$?

Solución

La distribución $\{5, 4, 2, 2\}$ significa que en cada mano que nos interesa hay 5 cartas de un palo, 4 de otro y 2 de cada uno de los palos restantes, luego por el Principio de Multiplicación, teniendo en cuenta que hay 4 palos, el número total de manos con esa distribución será

$$4.3 \cdot \; C(13, 5) \cdot C(13, 4) \cdot C(13, 2) \cdot C(13, 2) =$$

$$= 12 \binom{13}{5} \binom{13}{4} \binom{13}{2}^2 .$$

Problema 13

¿De cuántas formas se puede distribuir un conjunto con 2n elementos en n conjuntos de 2 elementos?

Solución

Sea $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ una n-tupla ordenada de conjuntos de dos elementos, formada con los 2n elementos dados. Sabemos por el Problema 11 que hay

$$\frac{(2n)!}{2! \overset{n}{\ldots} 2!} = \frac{(2n)!}{2^n},$$

de tales n-tuplas.

Como lo que se pide es el número de particiones no ordenadas, teniendo en cuenta que hay n! permutaciones en cada n-tupla, se tendrá en total que el número de particiones desordenadas de dos elementos es

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Problema 14

Pruébese la identidad del Problema 10:

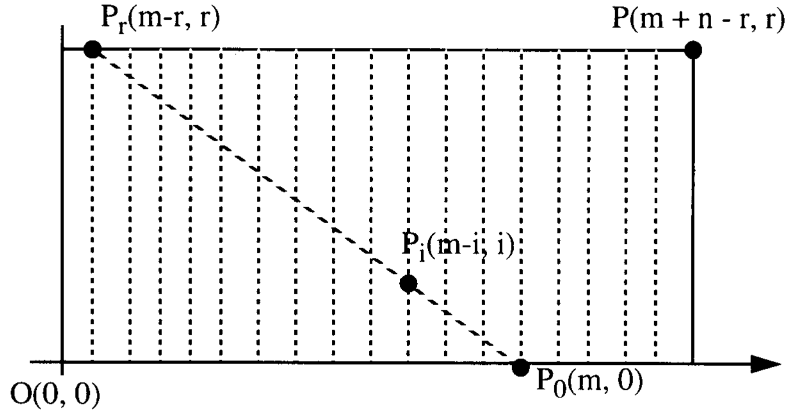
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k},$$

utilizando métodos combinatorios.

Solución

Consideremos la malla rectangular de la figura

El número de caminos de longitud mínima que van del punto O(0, 0) al



P(m+n-r, r), siguiendo la dirección este-norte, por el Problema 14 del Tema 12 es igual a

$$\binom{m+n-r+r}{r} = \binom{m+n}{r}.$$

Vamos ahora a calcular este número de otra forma. Consideremos el segmento de línea uniendo $P_0(m, 0)$, $P_1(m - 1, 1)$,..., $P_r(m - r, r)$, como muestra la figura. Cada una de las rutas de longitud mínima desde O a P pasa a través de uno y sólo un P_i $(i = 0, 1, ..., r)$ sobre el segmento de línea. El número de tales caminos pasando por $P_i(m - i, i)$ es

$$\binom{m-i+i}{i}\binom{(m+n-r-m+i)+(r-i)}{r-i} = \binom{m}{i}\binom{n}{r-i},$$

y aplicando el Principio de Adición se tiene la identidad propuesta.

Problema 15

Pruébese que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n},$$

si m y n son enteros no negativos.

Solución

Sea m un entero no negativo cualquiera. Vamos a probar la igualdad para cualquier entero no negativo n utilizando el método de inducción.

Si $n = 0$ se verifica la igualdad:

$$\binom{m+0}{0} = \binom{m+1}{0}.$$

Supongamos que el resultado es verdadero para todos los valores enteros 1, 2,..., t. Se debe probar que la igualdad es válida para t +1, es decir, hay que probar que

$$\sum_{k=0}^{t+1}\binom{m+k}{k} = \binom{m+t+2}{t+1}.$$

Pero

$$\sum_{k=0}^{t+1}\binom{m+k}{k}=\left(\sum_{k=0}^{t}\binom{m+k}{k}+\binom{m+t+1}{t+1}\right)=$$
$$=\left(\binom{m+t+1}{t}+\binom{m+t+1}{t+1}\right),$$

(por la hipótesis de inducción) y

$$\binom{m+t+1}{t}+\binom{m+t+1}{t+1}=\binom{m+t+2}{t+1},$$

por la Fórmula de Pascal.

Tema 14

Principio de Inclusión-Exclusión

Problema 1

¿De cuántas formas se puede dar una mano de póker (constituida por cinco cartas de una baraja estandar) de modo que contenga al menos una carta de cada palo?

Solución

Sea S el conjunto de las manos de póker (formadas por cinco cartas). Para un $x \in S$ dado se definen las propiedades P_1, P_2, P_3 y P_4, como sigue:

$$P_1 := \{x \text{ no tiene corazones}\}$$
$$P_2 := \{x \text{ no tiene tréboles}\}$$
$$P_3 := \{x \text{ no tiene diamantes}\}$$
$$P_4 := \{x \text{ no tiene picas}\}.$$

Para cada i = 1, 2, 3, 4, sea $S_i = \{x \in S | \text{ x tiene la propiedad } P_i\}$. Entonces,

$$P = S'_1 \cap S'_2 \cap S'_3 \cap S'_4 = \{x \in S \mid x \text{ no tiene la propiedad } P_i,\ 1 \leq i \leq n\},$$

donde la prima en los conjuntos S_i indica que son los complementarios en S relativos a las propiedades P_i. Luego P es el conjunto de manos de póker que contienen al menos una carta de cada uno de los palos.

Vamos a ver ahora cuántos elementos tiene P (que denotaremos por $| P |$). Por el Principio de Inclusión-Exclusión se tiene

$$|P| = |S| - \sum_{i=1}^{4} |S_i| + \sum |S_i \cap S_j| - \sum |S_i \cap S_j \cap S_k| +$$
$$+ |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|,$$

donde la segunda suma, de la derecha de la igualdad, se toma sobre las seis combinaciones de orden dos, $\{i, j\}$, de $\{1, 2, 3, 4\}$ y la tercera suma se toma sobre las cuatro combinaciones de orden 3, $\{i, j, k\}$, de $\{1, 2, 3, 4\}$. Puesto que

$$| S_i | = C(39, 5),$$
$$| S_i \cap S_j | = C(26, 5),$$
$$| S_i \cap S_j \cap S_k | = C(13, 5),$$

con $1 \leq i < j \leq 4$, y $| S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 | = 0$, entonces

$$| P | = C(52, 5) - 4C(39, 5) + 6C(26, 5) - 4\,C(13, 5) + 0 = 685\,464.$$

Problema 2

Usese el Principio de Inclusión-Exclusión para obtener el número de aplicaciones suprayectivas de $\{1,2,..., m\}$ en $\{1,2,..., n\}$, donde $m \geq n$.

Solución

Sea S el conjunto de aplicaciones definidas en $\{1, 2,..., m\}$ y con valores $\{1, 2,..., n\}$. Se sabe que $| S | = n^m$. Sea

$$S_i = \{f \in S \mid f^{-1}(\{i\}) = \emptyset\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por el Principio de Inclusión-Exclusión el problema estará resuelto cuando se calcule

$$|S'_1 \cap S'_2 \cap ... \cap S'_n|.$$

Sea r un número entero, $1 \leq r \leq n$, y sea $\{i_1, i_2,..., i_r\}$ una combinación de orden r de $\{1, 2,..., n\}$, entonces $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap ... \cap S_{i_r}|$ es el número de funciones f de $\{1, 2,..., m\}$ en $\{1, 2,..., n\}$, tal que $f^{-1}(\{i_k\}) = \varnothing$, donde $1 \leq k \leq r$. Por tanto, hay $n - r$ formas de elegir cada imagen $f(x)$. Entonces

$$\left|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_r}\right| = (n-r)^m,$$

de donde

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} S'_i\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |S_i| + \ldots + (-1)^r \sum \left|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_r}\right| + \ldots$$
$$+ (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n| =$$

$$= n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - C(n, 3)(n-3)^m + \ldots + (-1)^r C(n, r)$$
$$(n-r)^m + \ldots + (-1)^n C(n, n)(n-n)^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C(n, k)(n-k)^m.$$

Problema 3

¿Cuántos enteros m de 1 al 1 000 no son divisibles por 3, 7 u 11?

Solución

Sea $S = \{1, 2,..., 1000\}$, y n un elemento de S. Se definen los subconjuntos de S siguientes:

$$P_1 = \{n \in S \mid n \text{ es divisible por } 3\},$$
$$P_2 = \{n \in S \mid n \text{ es divisible por } 7\},$$
$$P_3 = \{n \in S \mid n \text{ es divisible por } 11\}.$$

Para cada $1 \leq i \leq 3$, sea

$$S_i = \{x \in S \mid x \text{ tiene la propiedad } P_i\},$$

entonces $P = S'_1 \cap S'_2 \cap S'_3 = \{x \in S \mid x \text{ no es divisible por } 3, 7 \text{ u } 11\}$.

Vamos a ver ahora cuántos elementos tiene P. Por el Principio de Inclusión-Exclusión se tiene

$$|P| = |S| - \sum_{i=1}^{3} |S_i| + \sum |S_i \cap S_j| - |S_1 \cap S_2 \cap S_3| =$$

$= |S| - (|S_1| + |S_2| + |S_3|) + |S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_2 \cap S_3| - |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$.

Sabemos que

$$|S_1| \text{ es el mayor entero } \leq \frac{1000}{3},$$

$$|S_2| \text{ es el mayor entero } \leq \frac{1000}{7},$$

$$|S_3| \text{ es el mayor entero } \leq \frac{1000}{11},$$

luego

$$|S_1| = 333, \quad |S_2| = 142, \quad |S_3| = 90,$$

$$|S_1 \cap S_2| = |\{n \in S \mid n \text{ es divisible por m.c.m.}(3, 7)\}| =$$

$$= |\{n \in S \mid n \text{ es divisible por } 21\}| = \text{mayor entero} \leq \frac{1000}{21},$$

de donde $|S_1 \cap S_2| = 47$,

$$|S_1 \cap S_3| = |\{n \in S \mid n \text{ es divisible por m.c.m.}(3, 11) = 33\}| =$$

$$= \text{mayor entero} \leq \frac{1000}{33},$$

luego $| S_1 \cap S_3 | = 30$ y de forma análoga se obtiene que $| S_2 \cap S_3 | = 12$.

Por último

$$| S_1 \cap S_2 \cap S_3 | = | \{n \in S \mid n \text{ es divisible por m.c.m.}(3, 7, 11)\} | =$$

$$= \text{mayor entero} \leq \frac{1000}{231},$$

es decir $| S_1 \cap S_2 \cap S_3 | = 4$. Por tanto

$$| P | = 1000 - (333 + 142 + 90) + (47 + 30 + 12) - 4 = 520.$$

Problema 4

Represéntese la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ mediante un diagrama de tablero de ajedrez. ¿Es una desordenación?

Solución

Una permutación de n objetos es equivalente a colocar n piezas sobre un tablero de dimensiones $n \times n$, de forma que no se encuentren dos piezas en la misma fila o columna. Para una desordenación, evidentemente, las piezas no pueden estar sobre la diagonal principal.

El diagrama asociado a la permutación dada es el siguiente:

	1	2	3	4	5
1			**T**		
2					**T**
3	**T**				
4				**T**	
5		**T**			

Luego no es una desordenación, puesto que hay un elemento en la diagonal principal del tablero.

Problema 5

Encuéntrese el número de permutaciones de {1, 2,..., 7} para las cuales son fijos tres números.

Solución

Sea d(n) = {número de permutaciones de n objetos que no dejan ningún elemento fijo}, es decir, de desordenaciones. Sea S el conjunto de todas las permutaciones de {1, 2,..., n}. Puesto que hay C(n, 3) formas de elegir tres elementos que se van a quedar fijos en una permutación de n objetos de S, se tiene para el resto de los elementos d(n-3) desordenaciones. Luego por el Principio de Multiplicación habrá C(n, 3)d(n-3) permutaciones que dejan tres puntos fijos. Como

$$d(n) = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

en nuestro caso n = 7, el número de permutaciones que dejan tres puntos fijos es:

$$C(7,3)\,d(7-3) = C(7,3)\,d(4) = \binom{7}{3}\left(4!\sum_{j=0}^{4}\frac{(-1)^j}{j!}\right).$$

Problema 6

Si una Escuela de Idiomas tiene 100 alumnos de los cuales 60 estudian inglés, 20 francés, 20 alemán, 10 cada par de las lenguas anteriores y 5 las tres lenguas. ¿Cuántos estudiantes quedan que no estudian dichas lenguas?

Solución

Primeramente se definen los conjuntos: S es la población de estudiantes

$S_I = \{ x \in S \mid x \text{ estudia inglés} \}$,

$S_F = \{ x \in S \mid x \text{ estudia francés} \}$,

$S_A = \{ x \in S \mid x \text{ estudia alemán} \}$.

Evidentemente

$|S| = 100,\ |S_I| = 60,\ |S_F| = |S_A| = 20,$

$|S_I \cap S_F| = |S_I \cap S_A| = |S_F \cap S_A| = 10,$

$|S_I \cap S_F \cap S_A| = 5,$

entonces, por el Principio de Inclusión-Exclusión, el número de estudiantes que no estudian ninguno de los idiomas anteriores es

$$100 - (60 + 20 + 20) + (10 + 10 + 10) - 5 = 25.$$

Problema 7

¿Cuántas soluciones enteras posee la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20,$$

con $0 \leq x_i \leq 8$?

Solución

Sabemos que el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k,$$

es $\binom{n+k-1}{k}$ (*) . Sea S el conjunto de todas las soluciones enteras con $x_i \geq 0$. Entonces por (*)

$$|S| = \binom{6+20-1}{20}.$$

Sea

$$S_i = \{x \in S \mid x_i > 8\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Por (*) se tiene que

$$|S_i| = \binom{6+(20-9)-1}{20-9} = \binom{16}{11}, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

y de la misma manera se tiene

$$|S_i \cap S_j| = \binom{(20-9-9)+6-1}{20-9-9} = \binom{7}{2},$$

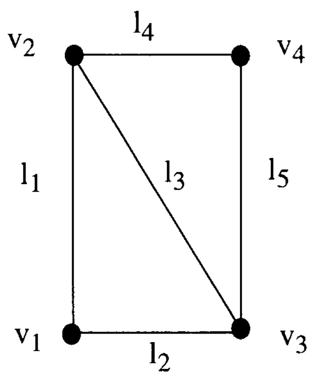
para i, j = 1, 2,..., 6. Ahora observamos que los términos de la forma $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}|$ no aparecen en la Fórmula del Principio de Inclusión-Exclusión para $k \geq 3$. En efecto, si una solución está en tres o más S_i, la suma de los respectivos x_i excederá a 20, lo que es imposible. Entonces el número de soluciones, con $0 \leq x_i \leq 8$, será

$$\left|\bigcap_{i=1}^{6} S'_i\right| = \binom{25}{20} - \binom{6}{1}\binom{16}{1} + \binom{6}{2}\binom{7}{2},$$

por el Principio de Inclusión- Exclusión.

Problema 8

De cuántas maneras se pueden colorear los cuatro vértices del grafo de la figura con n colores, tal que los vértices, con un lado en común, tengan colores distintos.



Solución

Sea S = {Formas de colorear los vértices}. Evidentemente $|S| = n^4$, ya que, hay n colores para colorear cada vértice. Sea S_i = {coloraciones | los vértices de los extremos de l_i son de un mismo color}, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Entonces, $|S_i| = n^3$, puesto que dos vértices conectados por l_i son de un sólo color y los otros dos vértices pueden tomar, cada uno, cualquiera de los colores, luego

$$\sum_{i=1}^{5} |S_i| = 5 \cdot n^3.$$

De forma semejante $|S_i \cap S_j| = n^2$ y $\sum |S_i \cap S_j| = \binom{5}{2} n^2$. Puesto que los lados l_1, l_2, l_3 interrelacionan 3 vértices (pero no los 4) se tendrá: $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = n^2$ (uno de los colores para los vértices v_1, v_2, v_3, y uno de los colores para el vértice v_4), y de idéntica forma se tiene $|S_3 \cap S_4 \cap S_5| = n^2$. Cualquier otro conjunto de tres lados interrelacionan los cuatro vértices y entonces para estos lados se tiene $|S_i \cap S_j \cap S_k| = n$.

Luego $\sum|S_i \cap S_j \cap S_k| = 2n^2 + (\binom{5}{3} - 2)\, n$.

Para los conjuntos de 4 o más lados se tiene que todos los vértices están interrelacionados y así $\sum|S_i \cap S_j \cap S_k \cap S_l| = \binom{5}{4}n$. Por último, para el conjunto de 5 lados tendremos $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5| = n$.

Por tanto la respuesta buscada es

$$\left|\bigcap_{i=1}^{5} S'_i\right| = n^4 - 5n^3 + \binom{5}{2}n^2 - \left[2n^2 + (\binom{5}{3} - 2)\, n\right] + \binom{5}{4}n - n =$$

$$n^4 - 5n^3 + 8n^2 - 4n.$$

A este último polinomio en n se le denomina polinomio cromático del grafo.

Tema 15

Recursividad y Relaciones Recurrentes

Problema 1

Sea S el conjunto formado por las letras a, b, c. Designamos por S_n al conjunto de cadenas de longitud n formadas con las letras de S, y por P_n al subconjunto de S_n formado por las cadenas que tienen un número par de letras a consecutivas. Sea p(n) el número de elementos de P_n. Obténgase una relación de recurrencia para p(n).

Solución

Sea $Q_n \subset S_n$ el subconjunto de S_n que no contiene cadenas de orden n con un número par de a consecutivas y s(n) el número de elementos de Q_n. Se tiene para los primeros valores de n:

$$Q_0 = \{\text{la cadena vacía}\}, \quad s(0) = 1,$$

$$Q_1 = S, \quad s(1) = 1,$$

$$Q_2 = \{ab, ac, bc, \ldots\} = S_2 - \{aa\}, \quad s(2) = 3^2 - 1 = 8.$$

Vamos ahora a contar las palabras de Q_n, $n \geq 2$. Si en Q_n una palabra termina en b, puede estar precedida por cualquiera de Q_{n-1}. Luego s(n-1) palabras de Q_n terminan en b. Si una palabra de Q_n termina en c, de forma análoga al caso anterior, hay s(n-1) palabras que terminan en c. Si una palabra de Q_n termina en a, entonces las dos últimas letras tienen que ser ca o ba, y éstas pueden verse precedidas por cualquiera de Q_{n-2}. Luego habrá 2s(n-2) palabras que terminan en a. Por tanto,

$$s(n) = s(n-1) + s(n-1) + 2s(n-2) = 2s(n-1) + 2s(n-2), \quad n \geq 2.$$

Sabemos que hay 3^n - s(n) palabras en S_n que tienen un número par de letras a consecutivas. Haciendo $p(n) = 3^n - s(n)$ y sustituyendo en la relación de recurrencia para las s

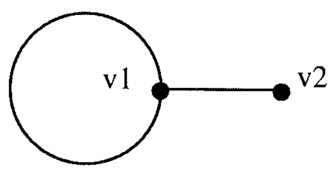
$$3^n - p(n) = 2(3^{n-1} - p(n-1)) + 2(3^{n-2} - p(n-2)).$$

se encuentra la expresión buscada, después de despejar p(n):

$$p(n) = 3^{n-2} + 2p(n-1) + 2p(n-2).$$

Problema 2

Sea el pseudografo G de la figura :



La matriz de adyacencia de a dicho pseudografo es $M(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Pruébese que

$$M^n(\alpha) = \begin{bmatrix} fib(n) & fib(n-1) \\ fib(n-1) & fib(n-2) \end{bmatrix}, \text{ (para } n \geq 3),$$

donde fib(n) es la sucesión de Fibonacci.

Solución

Calculemos las primeras potencias de la matriz M:

$$M^2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M^3(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M^4(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

Se ve fácilmente que la estructura de $M^n(\alpha) = \begin{bmatrix} m_{11}(n) & m_{12}(n) \\ m_{21}(n) & m_{22}(n) \end{bmatrix}$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11}(n-1) + m_{11}(n-2) & m_{11}(n-1) \\ m_{11}(n-1) & m_{11}(n-2) \end{bmatrix}, \quad \text{para } n \geq 3,$$

vamos a probarlo utilizando el método de inducción. Sean $T = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\}$ y S el subconjunto de los números naturales para los que se verifica la expresion de M^n. Evidentemente $3 \in S$. Supongamos que es válida para $k\text{-}1 \in S$. Vamos a ver que entonces es válida para k, con lo que se habrá probado la relación para todo número natural $n \geq 3$, es decir $S \equiv T$. Por la hipótesis de inducción

$$M^{n-1} = \begin{bmatrix} m_{11}(n-2) + m_{11}(n-3) & m_{11}(n-2) \\ m_{11}(n-2) & m_{11}(n-3) \end{bmatrix},$$

puesto que $M^n = MM^{n-1}$, se tiene

$$M^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}(n-2) + m_{11}(n-3) & m_{11}(n-2) \\ m_{11}(n-2) & m_{11}(n-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11}(n-2) + m_{11}(n-3) + m_{11}(n-2) & m_{11}(n-2) + m_{11}(n-3) \\ m_{11}(n-2) + m_{11}(n-3) & m_{11}(n-2) \end{bmatrix},$$

pero se sabe por la hipótesis de inducción que

$$m_{11}(n-1) = m_{11}(n-2) + m_{11}(n-3),$$

luego sustituyendo en la matriz anterior se tiene la expresión buscada para M^n.

Problema 3

Sea $g(n)$ el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos, donde ambos números son naturales, $n \geq k$, y k fijo. Obténgase una relación de recurrencia para $g(n)$.

Solución

Sea $S = \{1, 2,..., n\}$, $n > k$. Consideremos los subconjuntos $B(k)$ de $S - \{x\}$, de k elementos, donde x es un elemento fijo y arbitrario de S. Puesto que $S-\{x\}$ contiene $n - 1$ elementos, habrá $g(n - 1)$ subconjuntos de cardinal k. Sumando sobre los n elementos x que se pueden elegir se tiene un total de $ng(n-1)$ subconjuntos de cardinal k. Sin embargo, los $ng(n - 1)$ subconjuntos no son distintos. Por tanto se deben determinar el número de veces que cada subconjunto $B(k)$ aparece.

Dado un subconjunto de k elementos $B(k)$ de $S - \{x\}$, con $x \in S - B(k)$, se puede elegir x de $n - k$ formas. Luego el número de subconjuntos distintos de k elementos, $B(k)$, es

$$g(n) = \frac{ng(n-1)}{(n-k)},$$

que es la relación de recurrencia buscada.

Evidentemente, g(n) coincide con C(n, k), número de combinaciones de n elementos tomados de k en k.

Problema 4

Encuéntrese una fórmula para la función g(n) definida del modo siguiente:

i) $g(1) = 1$,

ii) $g(n) = g(n-1) + 2n - 1$, para $n > 1$.

Solución

Se puede ver que los primeros valores que toma g(n) son

$$g(2) = g(1) + 4 - 1 = 4,$$
$$g(3) = 9,$$
$$g(4) = 16.$$

Por tanto se puede conjeturar que $g(n) = n^2$. En efecto,

$$\begin{aligned} g(n) &= g(n-1) + 2n - 1 \\ &= g(n-2) + 4n - 4 \\ &= g(n-3) + 6n - 9 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= g(1) + 2(n-1)n - (n-1)^2 = n^2. \end{aligned}$$

Queda por ver que $g(n) = n^2$ es una función $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ que satisface la relación con la condición inicial dada. Para ello aplicamos el Principio de Inducción.

Sea g una función que verifica i) y ii) y sea

$$S = \{ n \in \mathbf{N} \mid g(n) = n^2 \},$$

entonces $g(1) = 1$, $1 \in S$. Si $k \in S$ para algún k arbitrario, $k \geq 1$, vamos a probar que $k+1 \in S$, luego por el Principio de Induccion $S = \mathbf{N}$. En efecto, por la relación de recurrencia se tiene que

$$g(k+1) = g(k) + 2(k+1) - 1 = g(k) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Problema 5

Dada la relación de recurrencia:

i) $h(1) = 1$,

ii) $h(n) = 2h(n-1) + 1$, para $n > 1$,

obténgase una solución.

Solución

Podemos ver que los primeros valores que toma la función h son:

$$h(1) = 1,$$
$$h(2) = 3,$$
$$h(3) = 7,$$
$$h(4) = 15,$$

de los cuales se puede conjeturar que

$$h(n) = 2^n - 1.$$

En efecto, utilizando la relación recurrente dada, se tiene

$$\begin{aligned} h(n) &= 2h(n-1) + 1 \\ &= 2(2h(n-2) + 1) + 1 = 2^2h(n-2) + 2 + 1 \\ &= 2^2(2h(n-3) + 1) + 2 + 1 = 2^3h(n-3) + 2^2 + 2 + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= 2^{n-1}h(1) + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = \frac{1\,(2^n - 1)}{2-1} = 2^n - 1, \end{aligned}$$

y, efectivamente, la función $h(n)$ tiene la forma predicha.

Procedamos por inducción para demostrar que esta solución satisface las condiciones dadas. Sea S el conjunto de los enteros positivos para los cuales $h(n) = 2^n - 1$, entonces se tiene

1) $1 \in S$,

2) si $k \in S$ para un k arbitrario, $k \geq 1$, es decir, $h(k) = 2^k - 1$,

3) entonces, si se verifica la formula para $h(k + 1)$, se tiene que $k + 1 \in S$ y por el Principio de Inducción podemos afirmar que $S = \mathbf{N}$. En efecto, la relación de recurrencia dada en el enunciado para la función h(n) nos permite comprobar que

$$h(k+1) = 2h(k) + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Problema 6

Resuélvanse las siguientes relaciones recurrentes:

i) $r(n) = 6\, r(n-1) - 11\, r(n-2) + 6\, r(n-3)$,

con las condiciones iniciales

$r(1) = 2$, $r(2) = 6$ y $r(3) = 20$.

ii) $r(n) = 3\, r(n-1) + r(n-2) - 3\, r(n-3)$,

$r(1) = 3$, $r(2) = 15$ y $r(3) = 12$.

iii) $r(n) = 1/2(r(n-1) + r(n-2))$,

$r(1) = 0$ y $r(2) = 1$.

Solución

i) En este caso la ecuación característica es $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, que tiene por raíces: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$. Por tanto la solución general será

$$r(n) = c_1(1) + c_2\, 2^n + c_3\, 3^n,$$

puesto que

$$r(1) = c_1(1) + c_2\, 2 + c_3\, 3 = 2,$$

$$r(2) = c_1(1) + c_2\, 2^2 + c_3\, 3^2 = 6,$$

$$r(3) = c_1(1) + c_2\, 2^3 + c_3\, 3^3 = 20,$$

resolviendo dicho sistema respecto a las incógnitas c_1, c_2 y c_3, se tiene $c_1 = 1, c_2 = -1$ y $c_3 = 1$. Entonces la solución particular buscada es

$$r(n) = 1 - 2^n + 3^n.$$

ii) La ecuación característica $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, asociada a la ecuación recurrente tiene las raíces: $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 3$. La solución general es

$$r(n) = c_1(1) + c_2(-1)^n + c_3 3^n.$$

De la cual se obtiene, teniendo en cuenta los valores iniciales de la función r(n), el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas c_1, c_2 y c_3:

$$r(1) = 3 = c_1(1) + c_2(-1) + c_3(3),$$

$$r(2) = 15 = c_1(1) + c_2(-1)^2 + c_3(3)^2,$$

$$r(3) = 12 = c_1(1) + c_2(-1)^3 + c_3(3)^3.$$

Resolviendo dicho sistema se obtiene que $c_1 = 27/4$, $c_2 = 39/8$ y $c_3 = 3/8$. Luego la solución particular buscada es

$$r(n) = \frac{27}{4} + \frac{39}{8}(-1)^n + \frac{3}{8}3^n.$$

iii) La ecuación característica es $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, que tiene las raíces: $b_1 = 1$ y $b_2 = -(1/2)$.

La solución general de la ecuación recurrente será

$$r(n) = c_1(1) + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene

$$r(1) = 0 = c_1 + c_2(-1/2),$$

$$r(2) = 1 = c_1 + c_2(-1/2)^2,$$

que proporciona los valores: $c_1 = 4/6$ y $c_2 = 4/3$. Luego la solución particular buscada será

$$r(n) = \frac{4}{6} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

Problema 7

Se sabe que si la ecuación característica, asociada a una la relación recurrente lineal, tiene t raíces reales distintas, $b_1, b_2, \ldots, b_t$, entonces la solución general es de la forma:

$$r(n) = c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + \ldots + c_t b_t^n;$$

y si alguna de las raíces (reales) aparece repetida, (p. ej. b_i aparece m_i veces) la solución general es de la forma:

$$r(n) = c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + \ldots + (c_{i1} + c_{i2} n + \ldots + c_{im_i} n^{m_i - 1}) b_i^n + \ldots + c_k b_k^n,$$

con $1 \leq k \leq t$.

Aplíquese este último resultado para resolver la relación de recurrencia lineal siguiente:

$$r(n) = 2r(n-1) + 4r(n-2) - 8r(n-3),$$

con condiciones iniciales:

$$r(1) = 2, \quad r(2) = 4 \quad \text{y} \quad r(3) = 12.$$

Solución

La ecuación característica asociada es $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$, que tiene por raíces: $b_1 = -2$, $b_2 = 2$ (doble), por tanto la solución general es

$$r(n) = c_1(-2)^n + (c'_1 + c'_2 n)\, 2^n.$$

Las condiciones iniciales definen un sistema de ecuaciones lineales para los parámetros c_1, c'_1 y c'_2:

$$r(1) = 2 = c_1(-2) + (c'_1 + c'_2)\, 2,$$

$$r(2) = 4 = c_1(-2)^2 + (c'_1 + c'_2(2))\, 2^2,$$

$$r(3) = 12 = c_1(-2)^3 + (c'_1 + c'_2(3))\, 2^3,$$

que resolviendolo proporciona $c_1 = -1 / 8$, $c'_1 = 5 / 8$, $c'_2 = 1 / 4$, y por tanto las solución particular buscada es

$$r(n) = \frac{-1}{8}(-2)^n + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}n\right) 2^n.$$

Problema 8

(Torres de Hanoi). Consideremos un tablero con tres pequeñas estacas verticales (etiquetadas e_1, e_2, e_3). Se dispone de n discos que tienen un agujero central de diámetro superior al diámetro de las estacas. Los discos tienen todos diámetros diferentes y están etiquetados por tamaño decreciente como $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Los discos están ensartados en e_1 y se pretende moverlos a e_3, utilizando e_2 como auxiliar, mediante las siguientes reglas:

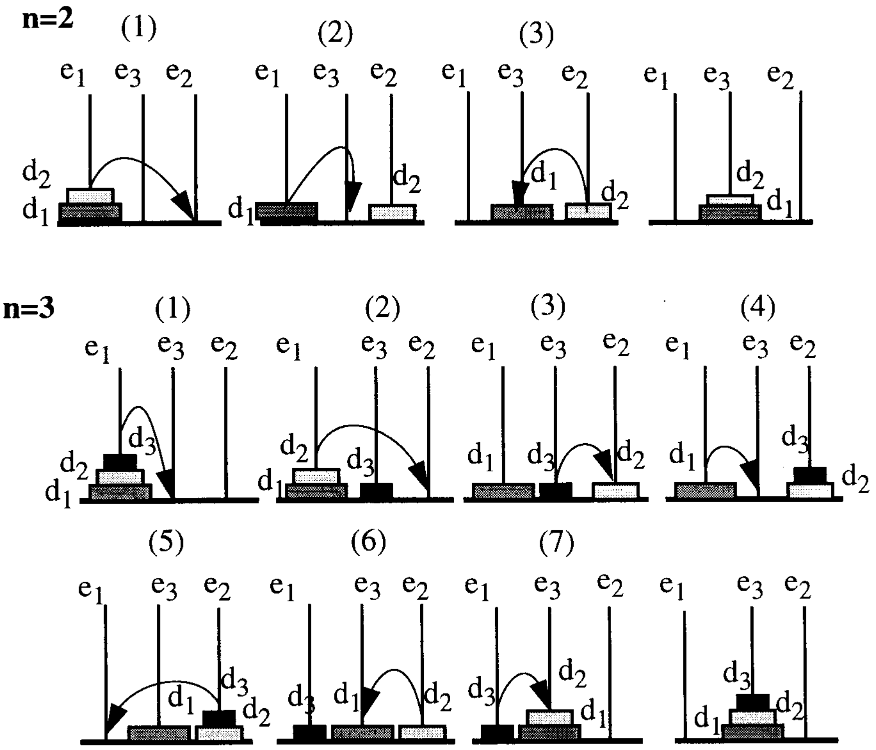
i) Cada movimiento consiste en transferir el disco que se encuentra en la parte superior de una estaca a otra estaca diferente.

ii) Está prohibido colocar encima de un disco otro de mayor diámetro.

Obténganse las condiciones iniciales y la relación de recurrencia para el número mínimo de movimientos, $h(n)$, necesarios para hacer el traslado de los discos de e_1 a e_3.

Solución

Es evidente que si sólo hay un disco $h(1) = 1$. El procedimiento para los casos para $n = 2, 3$, está indicado en las figuras siguientes, donde se ve claramente que $h(2) = 3$ y $h(3) = 7$:



Supongamos que para pasar n - 1 dicos de una estaca a otra con un nímero mínimo de movimientos se necesitan h(n - 1) pasos. Para encontrar el procedimiento cuando se tienen n discos es el siguiente

1) Se trasladan los n - 1 discos $\{d_2, d_3,..., d_n\}$ desde la estaca e_1 a otra estaca, siguiendo el proceso que da h(n-1) pasos. (Véase por ejemplo los tres primeros pasos de n = 3).

2) Se mueve d_1 desde e_1 a la estaca que ha quedado vacía (ver los pasos cuatro y cinco del diagrama de h(3)).

3) Se trasladan los discos $d_2, d_3,..., d_n$ desde la estaca donde se encuentren a la estaca donde se encuentra d_1.

El número de movimientos requeridos en los pasos 1), 2) y 3) son respectivamente h(n - 1), 1 y h(n - 1). Luego se han efectuado

$$h(n-1)+1+h(n-1)=2h(n-1)+1,$$

movimientos.

De hecho para transferir, cualquiera que sea el modo, los n discos, el disco d_1 se tiene que mover a una estaca vacía y esto es posible sólo cuando se ha efectuado el primer paso. Luego cualquiera que sea el método para llevar a cabo todo el proceso se necesitan como mínimo $2h(n-1)+1$ movimientos.

Recordemos que en el Problema 5 se ha calculado de forma explícita la solución de esta relación de recurrencia con la condición inicial dada.

Problema 9

Tenemos un círculo dividido en n sectores, $n \geq 1$, los cuales se colorean con k colores distintos, $k \geq 3$, de forma que cada sector es coloreado con un color distinto que el de los dos contiguos. Si r(n) es el número de formas de llevar a cabo tal coloración,

a) Calcúlese $r(1), r(2), r(3)$.

b) Encuéntrese una relación recurrente para r(n), $n \geq 4$.

Solución

a) Del enunciado del problema resulta evidente que hay

$r(1) = k$ formas de colorear el círculo,

$r(2) = k(k-1)$ formas de colorear los dos sectores, k para el primero y k-1 para el segundo, como consecuencia del Principio de Multiplicación.

$r(3) = k(k-1)(k-2)$ formas de colorear el círculo con los tres colores, k para el primero, k-1 para el segundo y k-2 para el tercero, por el mismo Principio.

b) Si en el círculo cortamos a lo largo de la línea de separación de los sectores n y 1, entonces el proceso de coloración de los sectores se puede hacer de modo que es más fácil obtener una expresión para el número de formas de llevarlo a cabo.

El primer sector se puede colorear con k colores, el segundo con todos los colores menos con el color del sector 1, el tercero con todos los colores menos el del sector 2, etc., y el último con todos los colores menos el del sector n-1. Luego por el Principio de Multiplicación, el número de formas de llevar a cabo el proceso de coloración es, $k(k-1)(k-1)...(k-1) = k(k-1)^{n-1}$. En este proceso se pueden considerar dos casos

i) Aquel proceso de coloración en el cual el sector 1 y n reciben colores diferentes.

ii) Aquel proceso de coloración donde los sectores 1 y n reciben el mismo color . Para este segundo caso existe una biyección entre la forma de llevar a cabo la coloración y el proceso de colorear un círculo dividido en n-1 sectores con n-1 colores distintos. Entonces, por el Principio de Adición, se tiene

$$r(n) + r(n-1) = k(k-1)^{n-1}, \qquad n \geq 4.$$

Problema 10

Dada la relación recurrente lineal de primer orden con coeficientes variables y no homogénea

$$r(n) = a(n)\, r(n-1) + b(n), \quad r(0) = c \text{ (constante)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

obténgase la expresión general de r(n).

Solución

La sustitución sucesiva en la propia relación de recurrencia proporciona la forma de la solucion:

$r(0) = c,$

$r(1) = a(1)\, r(0) + b(1) = a(1)\, c + b(1),$

$r(2) = a(2)\, r(1) + b(2) = a(2)\, a(1)\, c + a(2)\, b(1) + b(2),$

$r(3) = a(3)\, r(2) + b(3) = a(3)\, a(2)\, a(1) c + a(3)\, a(2)\, b(1) + a(3)\, b(2) + b(3),$

....

$$\begin{aligned} r(n) = {} & (a(n)\, a(n-1) \ldots a(2)\, a(1))\, c + \\ & + (a(n)\, a(n-1) \ldots a(3)\, a(2))\, b(1) + \\ & + (a(n)\, a(n-1) \ldots a(4)\, a(3))\, b(2) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a(n)\, b(n-1) + b(n), \end{aligned}$$

para n = 1, 2,... Es decir

$$r(n) = a(n)\, a(n-1) \ldots a(2)\, a(1)\, c + \sum_{s=1}^{n-1} a(n)\, a(n-1) \ldots a(s+1)\, b(s) + b(n).$$

Dicha solución tiene la forma usual para una relación de recurrencia lineal, con una parte que es la solución de la homogénea y otra que es la solución particular.

Problema 11

Dada la integral $I(n) = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx$, obténgase una relación de recurrencia lineal, mediante integración por partes, y aplíquense los resultados del Problema anterior para obtener una solución.

Solución

Realizando la integración por partes de I(n), se obtiene

$$I(n) = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx = e^{-1}\int_0^1 x^n \frac{d}{dx}(e^x)\, dx =$$

$$= e^{-1}\,[x^n e^x]_0^1 - e^{-1}\int_0^1 n x^{n-1} e^x dx.$$

Luego

$$I(n) = 1 - n\, I(n-1), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

La expresión que da la solución del sistema lineal, en el Problema anterior, aplicada a este caso nos da, teniendo en cuenta que ahora $a(n) = -n$ y $b(n) = 1$,

$$I(n) = (-n)(-(n-1))\ldots(-2)(-1)c + \sum_{s=1}^{n-1} (-n)\,(-(n-1))\ldots(-(s+1))\,1 + 1 =$$

$$= (-1)^n n!c + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{n-s} n(n-1)\ldots(s+1) + 1.$$

Puesto que conocemos en este caso el valor de c,

$$c = I(0) = e^{-1}\int_0^1 e^x dx = 1 - e^{-1},$$

tenemos

$$I(n) = (-1)^n n!(1 - e^{-1}) + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{n-s} n(n-1)\ldots(s+1) + 1.$$