# IC amb condicions de normalitat per a una mostra

## IC per a la mitjana amb variància coneguda

En un exemple ja hem obtingut:

$$S(x) = \left[ \bar{x}_n - \eta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_n + \eta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

amb $\nu([-\eta_\alpha, \eta_\alpha]) = \alpha$ , on $\nu$ és la llei $N(0,1)$.

## IC per a la mitjana amb variància desconeguda

Tenim la funció pivotant segënt:

$$\nu \sim \pi(x,\mu) = \sqrt{n-1}\ \frac{\bar{x}_n - \mu}{s_n} \sim t_{(n-1)}.$$

Com que una $t$ de Student és simètrica al voltant del zero, escollim $\eta_\alpha > 0$ tal que $\nu([-\eta_\alpha, \eta_\alpha]) = \alpha$. Aleshores,

$$P_\theta \left( x \in \mathbb{R}^n,\ -\eta_\alpha \leq \sqrt{n-1}\ \frac{\bar{x}_n - \mu}{s_n} \leq \eta_\alpha \right) = \alpha,$$

i, per tant, l'interval de confiança per $\mu$ és

$$S(x) = \left[ \bar{x}_n - \eta_\alpha \frac{s_n}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x}_n + \eta_\alpha \frac{s_n}{\sqrt{n-1}} \right].$$

## IC per a la variància

Considerem la funció pivotant

$$\nu \sim \pi(x,\sigma^2) = \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

Com que una $\chi^2$ de Pearson no és simètrica, escollim dos reals positius $\zeta_\alpha < \eta_\alpha$ tal que

$$P_\theta \left( x \in \mathbb{R}^n,\ \zeta_\alpha \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq \eta_\alpha \right) = \alpha.$$

Habitualment s'escullen aquests dos valors de forma que compleixin:

$$P_\theta \left( x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq \zeta_\alpha \right) = P_\theta \left( x \in \mathbb{R}^n,\ \eta_\alpha \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \right) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Així, l'interval de confiança per a la variància $\sigma^2$ és

$$S(x) = \left[ \frac{ns_n^2}{\eta_\alpha},\ \frac{ns_n^2}{\zeta_\alpha} \right].$$

## RC per a la mitjana i la variància

Tenim que

$$\nu \sim \pi(x,\theta) = \left(\sqrt{n}\ \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma}, \frac{ns_n^2}{\sigma^2}\right)$$

és una funció pivotant amb lleis normal $N(0,1)$ i $\chi^2_{(n-1)}$, respectivament, i a més, independents.
S'han de trobar $\zeta_\alpha, \eta_\alpha, \kappa_\alpha > 0$, $\eta_\alpha < \kappa_\alpha$, tal que

$$P_\theta\left(x \in \mathbb{R}^n,\ -\zeta_\alpha \leq \sqrt{n}\ \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma} \leq \zeta_\alpha, \quad \eta_\alpha \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq \kappa_\alpha\right) = \alpha.$$

Existeixen moltes possibilitats per determinar aquests tres valors, per exemple, denotant $\nu_1 \sim N(0,1)$ i $\nu_2 \sim \chi^2_{(n-1)}$, els podem escollir de manera que compleixin

$$\nu_1([-\zeta_\alpha, \zeta_\alpha]) = \sqrt{\alpha} \qquad \text{i} \qquad \nu_2([0,\eta_\alpha]) = \nu_2([\kappa_\alpha, \infty)) = \frac{1-\sqrt{\alpha}}{2}.$$

Aleshores, la regió de confiança per $(\mu, \sigma^2)$ serà

$$S(x) = \left[\bar{x}_n - \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \zeta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \times \left[\frac{ns_n^2}{\kappa_\alpha}, \frac{ns_n^2}{\eta_\alpha}\right].$$

# IC amb condicions de normalitat per a dues mostres independents

## IC per a la diferència de mitjanes amb variàncies conegudes

Per un corol·lari sabem que

$$\bar{x}_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \qquad \text{i} \qquad \bar{y}_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

i a més són independents. Utilitzant les propietats de la normal resulta que

$$\nu \sim \pi(x, y, \mu_1 - \mu_2) = \frac{\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1),$$

i, per tant, ja tenim una funció pivotant.

Argumentant com a l'exemple, podem trobar un real positiu $\zeta_\alpha$ tal que $\nu([-\zeta_\alpha, \zeta_\alpha]) = \alpha$ i, aleshores, l'interval de confiança per a $\mu_1 - \mu_2$ és

$$S(x) = \left[\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} - \zeta_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} + \zeta_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

## IC per a la diferència de mitjanes amb la mateixa variància desconeguda

Per diferents resultats tenim que

$$\frac{\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

i

$$\frac{n_1\ s_{n_1}^2}{\sigma^2} + \frac{n_2\ s_{n_2}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_{n_1})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y}_{n_2})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

són independents. Aleshores, per les propietats de la t-Student la funció següent és pivotant

$$\begin{aligned} \nu &\sim \pi(x, y, \mu_1 - \mu_2) \\ &= \frac{\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 s_{n_1}^2 + n_2 s_{n_2}^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}. \end{aligned}$$

Podem escollir un real positiu $\zeta_\alpha$ tal que $\nu([-\zeta_\alpha, \zeta_\alpha]) = \alpha$ i, aleshores, obtenim l'interval de confiança per a $\mu_1 - \mu_2$ següent

$$\begin{aligned} S(x) = \Bigg[&\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} - \zeta_\alpha\sqrt{\frac{(n_1+n_2)(n_1 s_{n_1}^2 + n_2 s_{n_2}^2)}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}, \\ &\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} + \zeta_\alpha\sqrt{\frac{(n_1+n_2)(n_1 s_{n_1}^2 + n_2 s_{n_2}^2)}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}\Bigg]. \end{aligned}$$

## IC per a la diferència de mitjanes amb diferents variàncies desconegudes

En aquest cas no tenim una resolució exacta del problema i el que es fa és donar solucions aproximades. Nosaltres donarem alguns breus comentaris extrets del llibre de Vélez i García.

Si la mida de les mostres no és gaire petita ($n_1, n_2 \geq 15$) es substitueix $\sigma_1^2$ i $\sigma_2^2$ per les variàncies mostrals corregides respectives, obtenint que

$$\frac{\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\tilde{s}_{n_2}^2}{n_2}}}$$

es comportarà aproximadament com una nornal $N(0,1)$.

En canvi, en el cas que la mida d'una mostra sigui petita, s'empra que la quantitat anterior es comporta aproximadament com una $t_{(n)}$ on $n$ és l'enter més pròxim a

$$\frac{\left(\frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\tilde{s}_{n_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1+1}\left(\frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2+1}\left(\frac{\tilde{s}_{n_2}^2}{n_2}\right)^2} - 2.$$

## IC per a la raó de variàncies

Un resultat previ ens dóna una funció pivotant

$$\nu \sim \pi\left(x, y, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \frac{n_1 s_{n_1}^2 (n_2-1)\sigma_2^2}{n_2 s_{n_2}^2 (n_1-1)\sigma_1^2} = \frac{\tilde{s}_{n_1}^2 \sigma_2^2}{\tilde{s}_{n_2}^2 \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}.$$

Com que una $F$ de Fisher no és simètrica, per trobar l'interval de confiança buscarem dos nombres reals positius $\zeta_\alpha, \eta_\alpha$ tal que

$$\nu([0, \zeta_\alpha]) = \frac{1-\alpha}{2} \qquad \text{i} \qquad \nu([\eta_\alpha, \infty)) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Per tant, l'interval per a la raó és

$$S(x) = \left[\frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{\eta_\alpha \tilde{s}_{n_2}^2}, \frac{\tilde{s}_{n_1}^2}{\zeta_\alpha \tilde{s}_{n_2}^2}\right].$$