8

8.1 Descomposeu en producte de transposicions les permutacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

i doneu-ne els signes.

8.2 Com es modifica el determinant d'una matriu $n \times n$ en invertir l'ordre de les seves columnes?

8.3 Demostra, directament de la definició de determinant, que el determinant d'una matriu triangular (superior o inferior) és el producte dels elements de la diagonal.

8.4 Demostra que el determinant d'una matriu quadrada i el de la matriu que s'obté d'ella fent reducció curta de columnes, són iguals tret del signe.

8.5 Calculeu els determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

utilitzant els exercicis 8.3 i 8.4.

8.6 Calculeu el determinant de la matriu $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb $a_i^j = \min\{i, j\}$.

8.7 Resoleu l'equació

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

8.8 Calculeu el determinant següent, per a $n \geq 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-3 & 2n-2 \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

8.9 Sigui

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Proveu que $\det A_n = b^{n-1}(na+b)$.

8.2. Com es modifica el determinant d'una matriu $n\times n$ en invertir l'ordre de les seves columnes?

Sigui $A = (A_1 \dots A_n)$

$$\det(A_n \dots A_1) = \varepsilon_\sigma \det(A_1 \dots A_n) \quad \text{amb } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

↳ cal calcular el signe de la permutació

· exemples:

si $n=2$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\ominus$

si $n=3$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\ominus$

si $n=4$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\oplus$

si $n=5$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\oplus$

Alternança 2p - 2imp - 2p...

• Si n és imparell $\begin{pmatrix} 1 \dots & \frac{n+1}{2}-1 & \frac{n+1}{2} & \frac{n+1}{2}+1 & \dots & n \\ n \dots & \frac{n+1}{2}+1 & \frac{n+1}{2} & \frac{n+1}{2}-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon_\sigma = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$

· si n parell $\quad \varepsilon = (-1)^{n/2}$

8.8. Calculeu el determinant següent, per a $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-3 & 2n-2 \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

↓ Si restem una fila a l'anterior, ens dona tot uns (menys la primera fila)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

↳ el determinant d'aquesta matriu dóna 0 (perquè té files repetides → alternada)

· per a $n \geq 3 \Rightarrow \det = 0$

per a $n=2$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

8.9. Sigui

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

↳ matriu quadrada amb $a+b$ a la diagonal i a a la resta.

Proveu que $\det A_n = b^{n-1}(na+b)$

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & a & & & a+b \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{restem a} \\ \text{la primera} \\ \text{columna} \\ \text{la segona}}}{=} \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ -b & a+b & a & \cdots & a \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & a & a & & a+b \end{vmatrix} = b\cdot D_{n-1} + b \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a+b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a & & & a+b \end{vmatrix}}_{\substack{\text{tota la diagonal} \\ a+b \text{ (menys la} \\ \text{primera posició)}}}$$

$$= b\cdot D_{n-1} + b \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots\, 0 & b \end{vmatrix} = b\, D_{n-1} + a\, b^{n-1}$$

↓ restem la primera columna a totes les altres.

Dem per inducció

- cas base $n=2$

$$\begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = b(2a+b) \;\rightarrow\; n=2 \quad b^{n-1}(na+b)\ ✓$$

- cas inductiu

Suposem cert per $n-1$, és a dir, $D_{n-1} = b^{n-2}((n-1)a+b)$ i volem veure

$$\det = b^{n-1}(na+b)$$

$$\det = b^{n-1}(na+b) = b\,[b^{n-2}((n-1)a+b)] + a\cdot b^{n-1} =$$

$$= b^{n-1}((n-1)a+b) + b^{n-1}\cdot a = b^{n-1}(na-b)$$

8.10. Determinant de Vandermonde

Demostreu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & (a_n) \\ (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 & \cdots & (a_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & (a_3)^{n-1} & \cdots & (a_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

restem a cada fila l'anterior multiplicada per a_1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_2-a_1) & (a_3-a_1) & \cdots & (a_n-a_1) \\ \vdots & & & & \\ 0 & (a_2-a_1)(a_2)^{n-3} & & \cdots & (a_n-a_1)(a_3)^{n-3} \\ 0 & (a_2-a_1)(a_2)^{n-2} & & \cdots & (a_n-a_1)(a_n)^{n-2} \end{vmatrix} =$$

↳ La resta d'elements de la columna són 0

$$= \begin{vmatrix} (a_2-a_1) & (a_3-a_1) & \cdots & (a_n-a_1) \\ (a_2-a_1)a_2 & (a_3-a_1)a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ (a_2-a_1)(a_2)^{n-3} & (a_3-a_1)(a_3)^{n-3} & \cdots & (a_n-a_1)(a_n)^{n-3} \\ (a_2-a_1)(a_2)^{n-2} & (a_3-a_1)(a_3)^{n-2} & \cdots & (a_n-a_1)(a_n)^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-1)}_{\text{he tret factor comú de cada columna}} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}}_{V_{n-1}} = V_n$$

$$V_n = (a_2-a_1(a_3-a_1)\cdots(a_n-1)\,(V_n-1)$$

Proposta per inducció $\quad V_n = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$

8.7. Resoleu l'equació

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

Per alternància, si tenim dues files iguals det = 0

- si $x=0$, aleshores la primera i la segona fila són iguals (tot 1), i, per tant det = 0
- si $x = 1$, aleshores la primera fila i la tercera són iguals, det = 0
- si $x = 2$, aleshores la primera i la quarta files són iguals, det = 0

⋮

- si $x = n-1$, $n-(n-1) = 1$, per tant la última fila són tot 1 i és igual que la primera, det = 0

Solucions → $x \in \mathbb{N}$ tals que $0 \leq x \leq n-1$

→ Cal comprovar que són les úniques solucions

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}}_{C_2-C_1 \quad C_3-C_1 \quad C_n-C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -x & & & \vdots \\ 1 & & 1-x & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & & & & n-1-x \end{vmatrix} =$$

resto la primera columna a totes les altres

Matriu triangular inferior → el determinant és el producte dels elements de la diagonal

$$= 1(-x)(1-x)\cdots(n-1-x) = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N} \text{ tals que } 0 \leq x \leq n-1$$