

En el que segueix, $\mathbb{R}[X]_n$ denota l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i grau no superior a n .

10.1 Determineu si són lineals les aplicacions $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donades per les regles

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= (z - x, x - y, y - z) \\g(x, y, z) &= (z - x - 1, x + y, y - z) \\h(x, y, z) &= (zx, xy, yz).\end{aligned}$$

Escriviu-ne la matriu relativa a la base canònica en cas afirmatiu.

10.2 Es consideren espais vectorials E , amb base e_1, e_2, e_3 , i F , amb base v_1, v_2, v_3, v_4 . Escriu la matriu, relativa a aquestes bases, de l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow F$$

que compleix

$$\begin{aligned}f(e_1) &= v_1 - v_2 + v_3 \\f(e_2) &= 2v_1 + v_2 - v_4 \\f(e_3) &= 3v_2 - 2v_3 - v_4.\end{aligned}$$

Determineu la imatge de $w = e_1 + 3e_2 + 2e_3$ i tots els vectors que tenen la mateixa imatge que w .

10.3 Es considera un espai vectorial E , amb base e_1, e_2, e_3 , i l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que compleix $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ i $f(e_3) = 0$. Escriu-ne la matriu relativa a la base citada. Demostreu que $f^3 = 0$.

10.4 Es considera un espai vectorial E , amb base e_1, e_2, e_3 , i l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que compleix

$$\begin{aligned}f(e_1) &= e_1 - e_2 + e_3 \\f(e_2) &= 2e_1 + e_2 - e_3 \\f(e_3) &= 3e_1 - 2e_2 - 6e_3.\end{aligned}$$

Escriviu-ne la matriu relativa a la base citada. Determineu els vectors $v \in E$ que compleixen $f^2(v) = f(v)$.

10.5 Demostreu que l'aplicació derivació

$$\begin{aligned}\partial : \mathbb{R}[X]_3 &\longrightarrow \mathbb{R}[X]_3 \\P(X) &\longrightarrow dP(X)/dX\end{aligned}$$

és lineal, calculeu-ne la matriu relativa a la base $1, X, X^2, X^3$, així com les matrius, relatives a la mateixa base, de ∂^2 i ∂^3 .

10.6 Demostreu que l'aplicació

$$\begin{aligned}\delta : \mathbb{R}[X]_3 &\longrightarrow \mathbb{R}[X]_3 \\ P(X) &\longrightarrow XdP(X)/dX - 2P(X)\end{aligned}$$

és lineal, calculeu-ne la matriu relativa a la base $1, X, X^2, X^3$. Calculeu totes les solucions en $\mathbb{R}[X]_3$ de l'equació diferencial $XdP(X)/dX - 2P(X) = X^3$.

10.7 Calculeu el rang, el nucli i la imatge de l'aplicació lineal de l'exercici 10.2.

10.8 Calculeu els rangs, els nuclis i les imatges de les aplicacions lineals de l'exercici 10.5.