

Exercici 10.

Heu comprat llapis a 1,01 € i retoladors a 1,40€. Si en total, us heu gastat 29,93 €, quants llapis i quants retoladors heu comprat?

Solució 10.

Segui x el nombre de llapis i y el nombre retoladors tenim que:

$$1,01x + 1,40y = 29,93 \Leftrightarrow 101x + 140y = 2993$$

Per tant, hem de resoldre l'ecuació diofantina per a saber la quantitat de llapisos i retoladors que he comprat.

Aplicant Euclides calculem $\text{mcd}(101, 140)$:

$$\begin{aligned} 140 &= 1 \times 101 + 39 \Rightarrow \text{mcd}(101, 140) = \text{mcd}(101, 39) \\ 101 &= 2 \times 39 + 23 \Rightarrow \text{mcd}(101, 39) = \text{mcd}(39, 23) \\ 39 &= 1 \times 23 + 16 \Rightarrow \text{mcd}(39, 23) = \text{mcd}(23, 16) \\ 23 &= 1 \times 16 + 7 \Rightarrow \text{mcd}(16, 23) = \text{mcd}(16, 7) \\ 16 &= 2 \times 7 + 2 \Rightarrow \text{mcd}(16, 7) = \text{mcd}(2, 7) \\ 7 &= 3 \times 2 + 1 \Rightarrow \text{mcd}(7, 2) = \text{mcd}(1, 2) = 1 \end{aligned}$$

Contruïm l'identitat de Bezout:

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \times 2 \Leftrightarrow \\ 1 &= 7 - 3(16 - 2 \times 7) = -3 \times 16 + 7 \times 7 \Leftrightarrow \\ 1 &= -3 \times 16 + 7(23 - 16) = -10 \times 16 + 7 \times 23 \Leftrightarrow \\ 1 &= -10(39 - 23) + 7 \times 23 = -10 \times 39 + 17 \times 23 \Leftrightarrow \\ 1 &= -10 \times 39 + 17(101 - 2 \times 39) = 17 \times 101 - 44 \times 39 \Leftrightarrow \\ 1 &= 17 \times 101 - 44(140 - 101) = -44 \times 140 + 61 \times 101 \end{aligned}$$

Aplicant la fórmula per a resoldres l'ecuació diofantines:

Sent $d = \text{mcd}(a, b) | c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = dk \Rightarrow k = \frac{c}{d}$ i $d = am + bn$. Tenim que $x_0 = m \frac{c}{d}$ i $y_0 = n \frac{c}{d}$

Per tant:

$$x_0 = 66 \frac{2993}{1} \text{ i } y_0 = -44 \frac{2993}{1} \Rightarrow x_0 = 182573 \text{ i } y_0 = -131692$$

I totes les solucions seria:

$$\left. \begin{aligned} x &= 182573 + n140 \\ y &= -131692 - n101 \end{aligned} \right\} \forall n \in \mathbb{Z}$$

Busquem les solucions positives per a x i y :

$$\begin{aligned} 182573 + n140 &> 0 \Leftrightarrow n101 > -182573 \Leftrightarrow n > -182573/140 \simeq -1304.09 \\ -131692 - n101 &> 0 \Leftrightarrow -n101 > 131693 \Leftrightarrow n < -131693/101 \simeq -1303.89 \end{aligned}$$

Observem que l'únic valor enter dins dels dos intervals és -1304, per tant:

$$x_{-1304} = 182573 - 1304 \times 140 = 13 \text{ i } y_{-1304} = -131692 + 1304 \times 101 = 12$$

He comprat 13 llapisos i 12 retoladors.