Matrius i Vectors
Examen final, problemas

Enero 2018

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios.

Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F =< (0,1,0,1),(1,0,1,1) >, \quad G =< (-1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,2,2,1) >$$

y H, dado por la ecuación

$$H : x + y + z + t = 0.$$

Se pide determinar razonadamente:

(a) Bases y las dimensiones de F y G

(b) Una base o ecuaciones independientes de $F \cap H$ y $G \cap H$, así como sus dimensiones.

(c) Una base o ecuaciones independientes de $(F \cap H) + (G \cap H)$, así como su dimensión.

2.- Sean F_1, F_2, F_3 subespacios de dimensión uno de un espacio vectorial E, no dos coincidentes, y $v_i \in F_i$, $v_i \neq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Se pide demostrar:

(a) $2 \leq \dim(F_1 + F_2 + F_3) \leq 3$.

(b) v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes si y sólo si $\dim(F_1 + F_2 + F_3) = 3$.

(c) Si v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes entonces $F_1 \subset F_2 + F_3$, $F_2 \subset F_1 + F_3$ y $F_3 \subset F_1 + F_2$. Recíprocamente, si una de las anteriores inclusiones es cierta, entonces v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes.

(d) Calcular la dimensión de $F_1 + F_2 + F_3$ en las condiciones de (c).

3.- Sea A una matriz $n \times n$ no inversible.

(a) Demostrar que cualquiera que sea la matriz $n \times n$ B, ni AB ni BA tienen inversa.

(b) Demostrar que si C es una matriz regular $n \times n$, entonces la ecuación matricial

$$AX = C,$$

donde la matriz incógnita X es $n \times n$, no tiene solución.

4.- Se consideran dos vectores $v = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ y la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto (\det(u, v)), \det(u, w)), \end{aligned}$$

con los vectores tomados como columnas en los determinantes. Se pide:

(a) Demostrar que f es lineal.

(b) Calcular la matriz de f en la base canónica $(1, 0), (0, 1)$.

(c) Demostrar que f es biyectiva si y sólo si v, w son linealmente independientes.

(d) Determinar $\operatorname{rg} f$ y $\ker f$ en caso de ser $v = w \neq 0$.