**5.1** Demostreu que un espai vectorial de dimensió cinc no pot ser suma de dos subespais de dimensió dos. Demostreu que en un espai vectorial de dimensió cinc dos subespais de dimensió tres sempre tenen un vector no nul en comú.

**5.2** Demostreu que si $F$ i $G$ son subespais d'un espai vectorial $E$, $\dim F = 1$ i $F \not\subset G$, llavors $\dim(F + G) = \dim G + 1$.

**5.3** Demostreu que si $F$ i $G$ son subespais d'un espai vectorial $E$ de dimensió $n$, $\dim G = n-1$ i $F \not\subset G$, llavors $\dim(F \cap G) = \dim F - 1$.

**5.4** Siguin $F, G$ subespais de dimensió dos d'un espai $E$ , $F \neq G$. Demostreu que una i només una de ses següents alternatives es certa:

(a) $\dim F \cap G = 1$ i $\dim(F + G) = 3$.

(b) $\dim F \cap G = 0$ i $\dim(F + G) = 4$.

Doneu exemples de subespais de $\mathbb{R}^4$ en les condicions (a) i (b).

**5.5** Si $F, G$ són subespais de dimensió dos d'un espai $E$ de dimensió quatre, $F \neq G$, demostreu que $\dim F \cap G = 1$ o $E = F \oplus G$.

**5.6** Demostreu que vectors $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ són independents si y només si

$$\dim < u_1, \ldots, u_r > = r$$
$$\dim < v_1, \ldots, v_s > = s$$

i $< u_1, \ldots, u_r > \cap < v_1, \ldots, v_s >= \{0\}$.

**5.7** Demostreu que si $E$ és un espai vectorial i $F$ un subespai de $E$, llavors existeix un subespai $G$ de $E$ de manera que $E = F \oplus G$. (*Indicació:* amplieu una base de $F$ a base de $E$. $G$ s'anomena un *suplementari* de $F$).

**5.8** Siguin $F, G$ subespais d'un espai $E$, $u_1, \ldots, u_r$ una base de $F$ i $v_1, \ldots, v_s$ una base de $G$. Demostreu els vectors $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$, són base de $E$ si y només si

$$F \oplus G = E.$$

5.1. Demostrar que un espai vectorial de dimensió 5 no pot ser suma de dos espais de dimensió 2.

Suposem que existeix H, espai de dimensió 5 i F, G subespais de dim 2

$H = F + G$

Tenim que, per la fórmula de Grassmann:

$$\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$$
$$2 + 2 = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$$

veiem que $\dim(F+G) = \dim H = 5$, per tant:

$$2 + 2 = 5 + \dim(F \cap G) \rightarrow \dim(F \cap G) = -1$$

la intersecció de dos subespais no pot ser negativa:

contradicció

Per tant, no existeix cap espai H de dim 5, que sigui suma de dos subespais de dim 2

Demostrar que un espai vectorial de dimensió 5, dos subespais de dimensió 3 sempre tenen un vector no nul en comú

Sigui H un espai vectorial de dimensió 5

Siguin F, G subespais vectorials de dimensió 3

$F \subset H$, $G \subset H$, $F + G \subseteq H$

Per la fórmula de Grassmann tenim que:

$$\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$$
$$3 + 3 = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$$

Com que $F + G \subseteq H$, $\dim(F+G) \leq \dim H$, $\dim(F+G) \leq 5$. Com a màxim $\dim(F+G) = 5$

Llavors tenim $3 + 3 \leq 5 + \dim(F \cap G)$

$$\dim(F \cap G) \geq 1$$

La intersecció $F \cap G$ com a mínim tindrà dimensió 1, és a dir, serà un subespai engendrat per un únic vector. Aquest vector serà comú per F i G i no pot ser nul

5.3. Demostreu que si $F, G$ són subespais d'un espai vectorial $E$ de dimensió $n$, i $\dim G = n-1$ i $F \not\subset G$, aleshores $\dim(F \cap G) = \dim F - 1$

Suposem que $F, G \subset E$ subespais i volem veure que $\dim(F\cap G) = \dim F - 1$
$\dim E = n$
$\dim G = n-1$
$F \not\subset G$

Apliquem la fórmula de Grassmann $\dim F\cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G)$

$\dim F\cap G = \dim F + n - 1 - \dim(F+G)$

Com que $G$ està inclòs en $F+G$, $\dim(F+G)$ val $n$ o $n-1$

- Si $\dim(F+G)$ val $n-1$, tenim que $\left.\begin{array}{l} G \subset F+G \\ \dim G = \dim F+G \end{array}\right\}$ $G = F+G \to F \subset G$ (cas exclòs per la hipòtesi)

- Si $\dim(F+G)$ val $n$:

$\dim F\cap G = \dim F + n - 1 - n = \dim F - 1$, tal com volíem demostrar

5.5. Si $F, G$ són subespais vectorials de dimensió 2 d'un espai $E$ de dimensió 4, $F \neq G$ demostreu que $F\cap G = 1$ o $E = F \oplus G$

Suposem que $F, G \subset E$ subespais i volem demostrar que $\dim F\cap G = 1$ o $E = F\oplus G$,
$\dim E = 4$ és a dir, $E = F+G$
$\dim F = \dim G = 2$
$F \neq G$

Per demostrar que $E = F\oplus G$, n'hi ha prou amb demostrar dues de les tres afirmacions següents.

1) $E = F+G$
2) $\{0\} = F\cap G$
3) $\dim E = \dim F + \dim G \to 4 = 2+2$ (demostrat)

Per tant, demostrarem que o $\dim F\cap G = 1$ o $F+G = E$

Per Grassmann: $\dim F\cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G)$
Com que $F \subset F+G \to \dim(F+G) \geq 2$

- Si $\dim(F+G) = 2$, $\left.\begin{array}{l} F \subset F+G \\ \dim F = \dim F+G \end{array}\right\}$ $F = F+G = G$ cas exclòs per la hipòtesi

- Si $\dim(F+G) = 3 \to \dim(F\cap G) = 1$
- Si $\dim(F+G) = 4 \to F+G = E$

5.6. Demostreu que els vectors $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ son independents si i només si $\dim \langle u_1, \dots, u_r \rangle = r$, $\dim \langle v_1, \dots, v_s \rangle = s$ i $\langle u_1 \dots u_r \rangle \cap \langle v_1, \dots, v_s \rangle = \{0\}$

$\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ conjunt de vectors independents $\longleftrightarrow \begin{cases} \dim \langle u_1, \dots, u_r \rangle = r \\ \dim \langle v_1, \dots, v_s \rangle = s \\ \langle v_1, \dots, v_s \rangle \cap \langle u_1 \dots u_r \rangle = \{0\} \end{cases}$

$\leftarrow$ $\dim \langle u_1, \dots, u_r \rangle = r \to u_1, \dots, u_r$ independents

$\dim \langle v_1, \dots, v_s \rangle = s \to v_1, \dots, v_s$ independents

$\dim (\langle u_1, \dots, u_r \rangle + \langle v_1, \dots, v_s \rangle) = r+s$

"

$\dim (\langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle) \to$ són base (són generadors i independents)

$u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ són independents

$\to$ suposem $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ independents i volem veure que:

a) $\dim \langle u_1, \dots, u_r \rangle = r$

Com que $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ un subconjunt d'aquests vectors serà independent.

$v_1, \dots, u_r$ són vectors independents $\to \dim \langle u_1, \dots, u_r \rangle = r$

b) $\dim \langle v_1, \dots, v_s \rangle = s$

Com que $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ són independents, aleshores $v_1, \dots, v_s$ independents $\to \dim \langle v_1, \dots, v_s \rangle = s$

c) $\langle v_1, \dots, v_s \rangle \cap \langle u_1, \dots, u_r \rangle = \{0\}$

Apliquem la fórmula de Grassmann:

$\dim (F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim (F + G)$

$\dim (\langle U \rangle \cap \langle V \rangle) = \dim \langle U \rangle + \dim \langle V \rangle - \underbrace{\dim \langle v_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle}_{\text{com que són ind dim } r+s} =$

$= r + s - (r+s) = 0$

5.7. Demostreu que si E és un espai vectorial i F és un subespai de E, aleshores existeix un subespai G de E de manera que $E = F \oplus G$

· mètode 1: (reducció de generadors)

Suposem que E és un espai vectorial i F és un subespai de E i volem veure que existeix un subespai G tal que $E = F \oplus G$

Considerem un subespai $G \subseteq E$ tal que $E = F + G$, com $G = E$

Sigui $v_1, \dots, v_n$ base de G i $w_1, \dots, w_n$ base de F.

- Si $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ són linealment independents, $\dim(F \cap G) = 0$ i ja hem acabat
- Si $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ no són linealment independents, aleshores existeix $v_i$, amb $v_i \neq 0$, tal que $v_i = a_1 w_1 + \dots + a_m v_m$. Llavors prenem $G' = G \setminus \langle v_i \rangle$
  - si $\dim(G' \cap F)$ és 0, ja hem acabat
  - si $\dim(G' \cap F)$ és diferent de 0, prenem $v_i'$ i $G'' = G' \setminus \langle v_i' \rangle$.

    Repetim el procés anàlogament fins que la intersecció sigui 0.

· mètode 2: (ampliar bases)

Suposem que E és un espai vectorial i que F és un subespai de E i volem veure que existeix un subespai G tal que $E = F \oplus G$

Considerem base de F $u_1, \dots, u_r$

Podem ampliar-la a base de E. Sigui $u_1, \dots u_r, v_1, \dots, v_s$ base de E. Aleshores $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ generen E i són linealment independents

Sigui $G = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, volem comprovar que $E = F \oplus G$

- $F + G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle = E$
- $F \cap G = 0 \rightarrow$ si no fos 0, $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ no serien base de E

Anna Josè Campabadal                                                                                    MAVE

5.4. Siguin $F, G$ subespais de dimensió 2 d'un espai $E$, $F \neq G$. Demostreu que una i només una de les següents alternatives és certa.
a) $\dim F \cap G = 1$ i $\dim (F+G) = 3$
b) $\dim F \cap G = 0$ i $\dim (F+G) = 4$

Sabem que $F$ i $G$ són subespais de dimensió 2
Com que $F \subset F+G$ i $G \subset F+G$, com a mínim $F+G$ valdrà 2.
sabem més que això

· Si $\dim F+G = 2$. Apliquem Grassmann
$\dim F + \dim G = \dim (F+G) + \dim (F \cap G)$
$2 + 2 = 2 + \dim (F \cap G) \rightarrow \dim (F \cap G) = 2$

Tenim que $\dim (F \cap G) = \dim F = \dim G$, per tant $F = G$ són iguals, cosa que contradiu l'enunciat. OK!
Per tant, amb les condicions proposades per l'enunciat, la dim $F+G$ no pot valer dos.

· Si $\dim F+G = 3$. Apliquem Grassmann
$\dim F + \dim G = \dim (F+G) + \dim (F \cap G)$
$2 + 2 = 3 + \dim (F \cap G) \rightarrow \dim (F \cap G) = 1$

Per tant, si la $\dim (F+G) = 3$ aleshores $\dim (F \cap G) = 1$
sempre tindrem aquest cas?

· Si $\dim F+G = 4$. Apliquem Grassmann
$\dim F + \dim G = \dim (F+G) + \dim (F \cap G)$
$2 + 2 = 4 + \dim (F \cap G) \rightarrow \dim (F \cap G) = 0$

Per tant, si la $\dim (F+G) = 4$, aleshores $\dim (F \cap G) = 0$

Com que $\dim (F+G)$ val 3 o 4, però no pot valer 3 i 4 alhora, sempre serà certa només una de les alternatives. I per què no hi ha més alternatives?

Exemple de subespai en les condicions (a).
$F = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\} \rightarrow \dim 2$
$G = \{(1,0,0,0), (0,0,1,0)\} \rightarrow \dim 2$

$F \cap G = \{(1,0,0,0)\} \rightarrow \dim 1$
$F + G = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ dim 3

Exemple de subespai en les condicions (b)
$F = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\} \rightarrow \dim 2$
$G = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\} \rightarrow \dim 2$

$F \cap G = \{0\} \rightarrow \dim 0$
$F + G = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\} \rightarrow \dim 4$