Exercici 18. Resoleu el sistema de congruències

$$3x \equiv 2 \pmod 4,\ 4x \equiv 7 \pmod{15},\ 5x \equiv -1 \pmod{17}.$$

Solució 18.

$$\begin{cases} 3x \equiv 2, & \pmod 4 \xrightarrow{-1\equiv 3^{-1}\in(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}})^*} X \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4 \\ 4x \equiv 7, & \pmod{15} \xrightarrow{4\equiv 4^{-1}\in(\frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}})^*} X \equiv 4\cdot 7 \equiv 13 \pmod{15} \\ 5x \equiv -1, & \pmod{17} \xrightarrow{7\equiv 5^{-1}\in(\frac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}})^*} X \equiv 7\cdot(-1) \equiv 2-7 \equiv 10 \pmod{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \equiv 2 (\text{mod } 4) \\ X \equiv 13 (\text{mod } 15) \\ X \equiv 10 (\text{mod } 17) \end{cases}$$

$mcd(4,15,17) = 1 \Rightarrow$ són coprimers. Definim:

$$m = [4,15,17] \Rightarrow M = 1020$$
$$a = [2,13,10]$$
$$M(diferent) = [255,68,60]$$

Resolem les congruències $M_i\ N_i \equiv a_i \pmod{m_i}$, $1 \le i \le 3$

$$N_1 :$$
$$255N_1 \equiv 2 \pmod 4$$
$$255 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow 3\mathrm{N}_1 \equiv 2 \pmod 4$$
$$-1 \equiv 3^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}})^*$$
$$N_1 \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4$$

$$N_2 :$$
$$68N_2 \equiv 13 \pmod{15}$$
$$68 \equiv 8 \pmod{15} \Rightarrow 8\mathrm{N}_2 \equiv 13 \pmod{15}$$
$$2 \equiv 8^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}})^*$$
$$N_2 \equiv 13 \cdot 2 \equiv 11 \pmod{15}$$

$$N_3 :$$
$$60N_3 \equiv 10 \pmod{17}$$
$$60 \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow 9\mathrm{N}_3 \equiv 10 \pmod{17}$$
$$2 \equiv 9^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}})^*$$
$$N_3 \equiv 10 \cdot 2 \equiv 3 \pmod{17}$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} M_i N_i = [(2)(255)] + [(68)(11)] + [(60)(3)] = 1438$$

La solució és $1438 \equiv 418 \pmod{1020}$.