2.1 Discutiu sistemes d'equacions, si cal, per determinar quins dels següents conjunts de vectors de $\mathbb{R}^3$ són de vectors independents.

(a) $\{(3,1,2),(1,-4,0),(1,7,2)\}$

(b) $\{(1,1,2),(1,-4,2),(1,7,2)\}$

(c) $\{(2,1,2),(1,3,2),(0,0,0)\}$

Doneu una relació de dependència en cas que no ho siguin.

2.2 El mateix de l'exercici 2.1 per a

(a) $\{(2,5,2),(-1,-4,2),(1,2,4)\}$

(b) $\{(2,1,2),(5,-4,2),(1,7,4)\}$

2.3 Demostreu que dos vectors són linealment dependents si i només si un d'ells és múltiple de l'altre.

2.4 Doneu un exemple de tres vectors linealment dependents de $\mathbb{R}^3$ un dels quals no sigui combinació lineal dels altres.

2.5 Demostreu que polinomis $P_1(X),\ldots,P_s(X)$ de graus diferents dos a dos ($\operatorname{gr} P_i(X) \neq \operatorname{gr} P_j(X)$ si $i \neq j$) són linealment independents. (*Indicació:* ordeneu-los per graus decreixents)

2.6 Demostreu que les funcions e^x, e^{2x}, e^{3x} són linealment independents. (*Indicació:* suposeu que una combinació lineal de les funcions val zero i deriveu-la dues vegades).

2.7 Siguin $u_1, u_2, \cdots, u_k$ vectors linealment independents. Definim

$$v_1 = u_1, \quad v_j = u_1 - \sum_{i=2}^{j} u_i \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Estudieu si els vectors $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ són linealment independents.

2.8 A $\mathbb{R}^n$ considerem els vectors $u_1 = (1,1,0,\cdots,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0,\cdots,0,0)$, $\cdots$, $u_{n-1} = (0,0,\cdots 1,1)$, $u_n = (1,0,\cdots,0,1)$. Determineu per a quins valors de n són linealment independents.

2.9 Determineu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són subespais (doneu una demostració en cas afirmatiu i un contraexemple en cas negatiu):

(a) $\{(x,y,z) | 2x+3y-z=0\}$

(b) $\{(x,y,z) | x-2y-z=1\}$

(c) $\{(x,y,z) | x-y-z=0, y+2z=0\}$

2.10 El mateix de l'exercici 2.9 per a :

(a) $\{(x,y,z) | 2x+3y-z \leq 0\}$

(b) $\{(x,y,z) | x-2y-z=0, x+y-z=0, 2x-y-2z=0\}$

(c) $\{(x,y,z)|x-y-z=0, x^2-6xy+9y^2=0\}$

2.11 Demostreu que els polinomis $P(X)$ que satisfan l'equació diferencial

$$X\frac{dP(X)}{dX} - P(X) = 0$$

formen un subespai de l'espai dels polinomis.

2.12 Determineu una base de cadascun dels subespais de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} F &= <(1,3,-3,1),(3,1,-1,3),(1,1,-1,1)> \\ G &= <(1,3,-3,1),(1,0,-1,1),(1,1,-1,2)> . \end{aligned}$$

Determineu si el vector $(1,1,-1,1)$ pertany a F i si pertany a G i en cas afirmatiu expresseu-lo com combinació lineal de la base trobada.

2.13 El mateix de l'exercici 2.12 per a

$$\begin{aligned} F &= <(1,3,-3,1),(1/3,1,-1,0),(1,3,-3,2)> \\ G &= <(1,1,1,1),(3,1,0,3),(1,-1,0,1)> . \end{aligned}$$

2.14 Determineu a i b per tal que els vectors

$$(1,1,0,a),\ (3,-1,b,-1),\ (-3,5,a,-4) \in \mathbb{R}^4$$

siguin linealment dependents. Expresseu, en aquests casos, un d'ells com a combinació lineal dels altres.

2.15 Calculeu les components del vector $(6,9,14)$ en les bases de $\mathbb{R}^3$:

(i) $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$,

(ii) $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$,

(iii) $((1,1,1),(1,1,2),(1,2,3))$.

2.16 Demostreu que $\{\,(0,1,-2,1),\ (1,1,2,-1),\ (1,0,0,1),\ (2,2,0,-1)\,\}$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Expresseu el vector $(4,2,-1,5)$ com combinació lineal d'aquesta base.

2.17 Sigui u_1,u_2,u_3,u_4 una base d'un espai vectorial E de dimensió 4. Estudieu si els vectors $w_1 = u_1-u_3+2u_4$, $w_2 = 2u_1+3u_2+u_3+u_4$, $w_3 = u_1+3u_2+2u_3-u_4$ i $w_4 = u_1+u_2+u_4$ són linealment independents. Extraieu-ne un conjunt maximal de vectors linealment independents i construïu una base de E que contingui els vectors escollits.

2.18 Siguin E un espai vectorial, F i G dos subespais vectorials de E. Sigui $u_1,\ldots,u_r$ una base de F, $v_1,\ldots,v_s$ una base de G. Proveu que $F \subset G$ si, i només si, $\mathrm{rg}\{u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\} = s$.