Exercici 23.

(a) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

Siguin $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ el conjunt de les classes residuals mòdul 7, cadascuna de les quals té un representant $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. És correcte agafar uns altres representants de cada classe residual sumant o restant 7 tantes vegades com es vulgui als respresentants inicials. Aleshores, $r \in \{0, 1 + 7 \cdot 2, 2 + 7, 3, 4 + 7 \cdot 2, 5 + 7, 6\} \Rightarrow r \in \{0, 15, 9, 3, 18, 12, 6\}$. Reordenant, tenim $r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

En conseqüència, es té que qualsevol nombre enter a és congruent mòdul 7 amb un nombre r. Per tant, $a \equiv r(mod 7), \forall r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Aleshores, per la definició de congruència, $7|a - r \Rightarrow$ existeix un únic nombre enter q tal que $a - r = 7q \Rightarrow a = 7q + r$, amb $r \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

□

(b) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9\}$.

Aquesta demostració és similar a la de l'apartat (a).

Siguin $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ el conjunt de les classes residuals mòdul 7, cadascuna de les quals té un representant $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. És correcte agafar uns altres representants de cada classe residual sumant o restant 7 tantes vegades com es vulgui als respresentants inicials. Aleshores, $r \in \{0, 1 - 7, 2 + 7, 3, 4 - 7, 5 - 7 \cdot 2, 6\} \Rightarrow r \in \{0, -6, 9, 3, -3, -9, 6\}$. Reordenant, tenim $r \in \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9\}$.

En conseqüència, es té que qualsevol nombre enter a és congruent mòdul 7 amb un nombre r. Per tant, $a \equiv r(mod 7), \forall r \in \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9\}$. Aleshores, per la definició de congruència, $7|a - r \Rightarrow$ existeix un únic nombre enter q tal que $a - r = 7q \Rightarrow a = 7q + r$, amb $r \in \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9\}$.

□

(c) Demostreu que per a tot nombre enter a, existeixen nombres enters únics q, r tals que $a = 7q + r$ i $r \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$.

Aquesta demostració és una altra vegada similar a la de l'apartat (a).

Siguin $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ el conjunt de les classes residuals mòdul 7, cadascuna de les quals té un representant $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. És correcte agafar uns altres representants de cada classe residual sumant o restant 7 tantes vegades com es vulgui als respresentants inicials. Aleshores, $r \in \{0, 1 + 7 \cdot 104, 2 + 7, 3, 4 + 7 \cdot 11, 5 + 7 \cdot 34, 6 + 7 \cdot 3\} \Rightarrow r \in \{0, 729, 9, 3, 81, 243, 27\}$. Reordenant, tenim $r \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$.

En conseqüència, es té que qualsevol nombre enter a és congruent mòdul 7 amb un nombre r. Per tant, $a \equiv r(mod 7), \forall r \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$. Aleshores, per la definició de congruència, $7|a - r \Rightarrow$ existeix un únic nombre enter q tal que $a - r = 7q \Rightarrow a = 7q + r$, amb $r \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$.

□