Exercici 17. Siguin $n > 1$ un nombre natural i p el menor nombre natural primer que divideix n. Demostreu que si $p^3 > n$, llavors n és primer(i p=n) o bé $\frac{n}{p}$ és primer.

Solució. Sigui n un nombre major estrictament que 1 i pertanyent als naturals. Pel Teorema Fonamental de l'Aritmètica sabem que n és primer o és compost. Demostrarem l'enunciat per casos segons si n és primer o compost.

Si n és primer, la seva factorització és $n = 1 \cdot n$, i per tant n és el nombre primer més petit que divideix n (recordem que 1 no es considera primer i a més $n \neq$1, ja que $n >$1). Aleshores en efecte $n = p$.

En el cas de que n sigui compost, sabem que $n = p \cdot c$, $c \neq 1$ i $c \in$ Z. Tenim per hipòtesis que $p^3 > n$, que és el mateix que $p^3 > p \cdot c$. D'aquí obtenim $p^2 > c$, i alhora sabem que $p < c$, ja que p és el menor nombre natural primer que divideix n. Un altre cop pel Teorema Fonamental de l'Aritmètica, c pot ser primer o producte de primers. Però si c és producte de primers, ha de ser producte de primers majors que p, i alehores $c > (p + 1) \cdot (p + 1) = p^2 + 2p + 1$, i això contradiu $c < p^2$. Per tant $c = \frac{n}{p}$ és primer i queda l'enunicat demostrat.