Ejercicio 19. Establece criterios de divisibilidad que, dado un número entero $n \geqslant 1$ expresado en base 10, decidan cuándo este número es divisible por un entero d tal que $1 \leqslant d \leqslant 11$

Solución 19.

Sea n un entero cualquiera, supongamos que su representación decimal es $n = a_m a_{m-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0$, entonces, como ya vimos por el ejercicio 1, n se puede expresar también de la forma $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

Criterio de divisibilidad para 1: Cualquier número $n \in \mathbb{Z}$ es divisible por 1, pues n siempre se puede expresar como 1*n.

Criterio de divisibilidad para 2: Como 2|10, se sigue que 10 dividido entre 2 tiene resto 0, y por tanto $10 \equiv 0(mod 2)$. Luego, $10^k \equiv 0^k \equiv 0(mod 2)$ para k$\in \mathbb{N}$. Entonces $n \equiv a_0 + a_1 0 + a_2 0 + ... + a_m 0 \equiv a_0(mod 2)$. De esta forma, n es divisible por 2 sii su último dígito, es decir, a_0 es divisible por 2, esto es, $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Criterio de divisibilidad para 3: Volviendo a usar aritmética modular, tenemos que $10 \equiv 1(mod 3)$, con lo que $10^k \equiv 1^k \equiv 1(mod 3)$ para k $\in \mathbb{N}$.

Podemos escribir entonces $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv a_m 1 + a_{m-1} 1 + ... + a_3 1 + a_2 1 + a_1 1 + a_0(mod 3) \equiv a_m + a_{m-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1 + a_0(mod 3)$. De la última equivalencia deducimos que n es divisible por 3 sii la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Por otra parte, como $10 \equiv 1(mod 9)$, aplicando un razonamiento análogo llegamos a que n es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad para 4: Observemos que 4|100, con lo que $100 \equiv 0(mod 4)$. De esta manera, $10^k \equiv 0(mod 4)$ para $k \geqslant 2$. Luego, $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv a_m 0 + a_{m-1} 0 + ... + a_3 0 + a_2 0 + a_1 10 + a_0(mod 4) \equiv a_1 10 + a_0(mod 4)$, de forma que n es divisible por 4 sii $a_0 + a_1 10$ es divisible por 4. Pero eso es los dos últimos dígitos por los que está constituido n, de ahí que podamos establecer que n será divisible por 4 sii el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible por 4.

Criterio de divisibilidad para 5: Como 5|10, utilizando módulos, tenemos que $10 \equiv 0(mod 5)$. Luego, $10^k \equiv 0^k \equiv 0(mod 5)$ para k$\in \mathbb{N}$. Entonces $n \equiv a_0 + a_1 0 + a_2 0 + ... + a_m 0 \equiv a_0(mod 5)$. De esta forma, n es divisible por 5 sii su último dígito, es decir, a_0 es divisible por 5, esto es, $a_0 \in \{0, 5\}$.

Criterio de divisibilidad para 6: n es divisible por 6 si es divisible por 2 y 3. Esto se debe a que si $n \equiv 0(mod 2) y n \equiv 0(mod 3)$, entonces $n \equiv 0(mod 2 * 3 = 6)$, ya que 2 y 3 son coprimos entre sí.

Criterio de divisibilidad para 7: Teniendo en cuenta que $0 \equiv 3(mod 7)$ sea $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ divisible por 7, es decir, $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 7k$ para algún k$\in \mathbb{Z}$. Entonces, $n = 10(a_m 10^{m-1} + a_{m-1}10^{m-2} + ... + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) + a_0 = 7k$, y sumando y restando 20 a_0 a un lado tenemos $n = 10(a_m 10^{m-1} + a_{m-1}10^{m-2} + ... + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1) - 20a_0 + 20a_0 + a_0 = 7k \Rightarrow 10(a_m 10^{m-1} + a_{m-1}10^{m-2} + ... + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1 - 2a_0) = 7k - 21a_0 \equiv 0(mod 7)$. Así, n será divisible por 7 sii $10(a_m 10^{m-1} + a_{m-1}10^{m-2} + ... + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1 - 2a_0)$ es cero $mod 7$, que se traduce en que la resta del número sin su último dígito con el doble de éste sea múltiplo de 7.

Criterio de divisibilidad para 8: Se determina de forma análoga al criterio de divisibilidad para 4. Así, 8|1000, y $100 \equiv 0(mod 8)$, de manera que $10^k \equiv 0(mod 8)$ para $k \geqslant 3$. Luego, $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv a_m 0 + a_{m-1} 0 + ... + a_3 0 + a_2 100 + a_1 10 + a_0(mod 8) \equiv a_2 100 + a_1 10 + a_0(mod 8)$, de forma que n es divisible por 8 sii $a_0 + a_1 10 + a_2 100$ es divisible por 8. Pero eso es los tres últimos dígitos por los que está constituido n, de ahí que podamos establecer que n será divisible por 8 sii el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible por 8.

Criterio de divisibilidad para 10: Sabemos que $10 \equiv 0(mod 10)$. Luego, $10^k \equiv 0^k \equiv 0(mod 10)$ para k$\in \mathbb{N}$. Entonces $n \equiv a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv a_0 + a_1 0 + a_2 0 + ... + a_m 0 \equiv a_0(mod 10)$. De esta forma, n es divisible por 10 sii su último dígito, es decir, a_0 es divisible por 10, esto es, $a_0 = 0$.

Criterio de divisibilidad para 11: Observemos que $10 \equiv -1(mod 11)$, de forma que $10^k \equiv (-1)^k(mod 11)$ para k $\in \mathbb{N}$. Luego, $n \equiv a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + ... + a_m(-1)^m \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ... + a_m(-1)^m(mod 11)$, de manera que n es divisible por 11 sii la suma alternativa de sus dígitos, esto es,$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ... + a_m(-1)^m$ es divisible por 11.