

1. Trobeu els polinomis de Taylor d'ordre 4 de les funcions següents en el punt que s'indica:

(a) $f(x) = \sin(x^2)$ en el punt $a = 0$,

(b) $f(x) = x \ln x$ en el punt $a = 1$,

2. (a) Calculeu les fórmules de Taylor amb restes de Lagrange d'ordres 3 i 5, de la funció $f(x) = \cos(x)$.

(b) Demostreu que per a tot $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es compleix

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

3. Sigui $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.

(a) Calculeu els polinomis de Taylor d'ordre 2 i 3, i els corresponents termes complementaris de Lagrange, en el punt $a = 0$.

(b) Deduïu que $\frac{1}{2} \leq \ln(1 + \sin 1) \leq \frac{2}{3}$.

4. a) Trobeu el polinomi de Taylor de segon grau, $p_2(x)$, al voltant de $x_0 = 0$ per a la funció $f(x) = e^x \cos x$.

b) Useu $p_2(0.5)$ per aproximar $f(0.5)$. Trobeu una cota de l'error $|f(0.5) - p_2(0.5)|$ usant la fórmula de l'error i compareu-la amb l'error real.

c) Trobeu una cota de l'error $|f(x) - p_2(x)|$ en l'interval $[0, 1]$.

d) Quants termes hauríem de sumar per calcular $f(0.5)$ amb un error més petit de 10^{-4} ?

5. Proveu les desigualtats següents:

(a) $1 + x/2 - x^2/8 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$, per a tot $x > 0$,

(b) $x^2 - x^6/6 < \sin(x^2) < x^2$, per a tot $x \neq 0$.

6. Demostreu que, per a tot $x \in \mathbb{R}$, es satisfà la desigualtat

$$0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq \frac{e^{|x|}}{24} x^4.$$

7. Utilitzeu els desenvolupaments de Taylor adjunts per a calcular els límits següents:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - (x-1)}{(x-1)^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x) \log\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$

8. Siguin $m, n \geq 1$ nombres naturals. Discutiu l'existència dels límits següents i calculeu el seu valor quan existeixin.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((1+x)^{1/2} - 1 - \frac{x}{2}\right)^{6m}}{x^n}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)^{2m}}{(1 - \cos x)^n}.$$

9. Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 4 de la funció $y(x)$ en el punt $x_0 = 0$ si sabem que $y(x)$ satisfà el problema de valors inicials

$$\begin{cases} y'(x) &= (x+1)y, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

10. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

- (a) Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 3 de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $a = 0$.
(b) Demostreu les desigualtats

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (c) Calculeu el valor del límit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x^2/2}{(\sin x)^3}.$$