

Exercici 22. Aplicant les regles de Davis i Putnam, decidir si les següents fórmules són satisfactibles.

- (1)  $(\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge A$ .
- (2)  $A \wedge B \wedge C$ .
- (3)  $(A \vee B) \wedge \neg B$ .
- (4)  $(A \vee B) \wedge (C \vee B) \wedge \neg C \wedge \neg B$ .
- (5)  $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge C$ .
- (6)  $(A \vee \neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge B \wedge \neg A$ .
- (7)  $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg A)$ .
- (8)  $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)$ .

**Solució:** (1) Aplicant la regla  $(CE)_A$  a l'entrada, obtenim la fórmula  $B \wedge \neg B$ . Ara, aplicant la regla  $(CE)_B$ , obtenim  $\square$ . Per tant, la fórmula d'entrada  $(\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge A$  és contradicció.

(2) Aplicant la regla  $(CE)_A$  a l'entrada, obtenim la fórmula  $B \wedge C$ . Ara, aplicant la regla  $(CE)_B$ , obtenim  $C$ . Finalment, aplicant la regla  $(CE)_R$ , obtenim  $\blacksquare$ . Per tant, la fórmula d'entrada és satisfactible.

(3) Aplicant la regla  $(CE)_{\neg B}$  a l'entrada, obtenim la fórmula  $A$ . Aplicant ara  $(PU)_A$ , obtenim  $\blacksquare$ . Per tant, la fórmula d'entrada és satisfactible.

(4) Aplicant la regla  $(CE)_{\neg C}$  a l'entrada, obtenim la fórmula

$$(A \vee B) \wedge B \wedge \neg B.$$

Ara, aplicant  $(PU)_A$ , obtenim  $B \wedge \neg B$ . Finalment, aplicant  $(CE)_B$ , obtenim  $\square$ . Per tant, la fórmula d'entrada és contradicció.

(5) Aplicant la regla  $(CE)_C$  a l'entrada, obtenim la fórmula

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B).$$

Ara, aplicant  $(PU)_B$ , obtenim  $\blacksquare$ . Per tant, la fórmula d'entrada és satisfactible.

(6) Aplicant la regla  $(CE)_B$  a l'entrada, obtenim la fórmula

$$(A \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge \neg A.$$

Ara, aplicant  $(CE)_{\neg A}$ , obtenim

$$(C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D).$$

Ara, aplicant la regla de resolució (respecte a  $C$  i  $\neg C$ ), obtenim

$$\neg D \vee D.$$

Finalment, aplicant la regla de la tautologia, obtenim ■. Per tant, la fórmula d'entrada és satisfactible.

(7) Aplicant la regla  $(PU)_{\neg C}$  a l'entrada, obtenim la fórmula

$$A \vee B.$$

Ara, aplicant  $(PU)_A$ , obtenim ■. Per tant, la fórmula d'entrada és satisfactible.

(8) En aquest cas, només podem aplicar la regla de resolució, prenent per exemple les clàusules  $(A \vee B)$  i  $(\neg A \vee B)$ . El resolvent d'aquestes dues clàusules és  $B$ . Per tant, aplicant la regla de resolució a l'entrada, obtenim:

$$B \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B).$$

Aplicant ara la regla  $(CE)_B$ , obtenim la fórmula

$$\neg C \wedge C.$$

Finalment, aplicant  $(CE)_C$ , obtenim □. Per tant, la fórmula d'entrada és contradicció.