LLISTA 10

EXERCICI 1:

a) $f(x,y,z) = (z-x,\ x-y,\ y-z)$

$v,u \in \mathbb{R}^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ haurem de veure que $\boxed{\begin{matrix} f(v)+f(u) = f(v+u) \\ \lambda f(v) = f(\lambda v) \end{matrix}}$?

$v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$
$u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

FARÉ EL EXERCICI

1) $\cdot\ f(u+v) = f(v_1+u_1,\ v_2+u_2,\ v_3+u_3) = (u_3+v_3-u_1-v_1,\ u_1+v_1-u_2-v_2,\ u_2+v_2-u_3-v_3)$

$\cdot\ f(u)+f(v) = f(u_1,u_2,u_3)+f(v_1,v_2,v_3) = (u_3-u_1,\ u_1-u_2,\ u_2-u_3) + (v_3-v_1,\ v_1-v_2,\ v_2-v_3)$

2) $\cdot\ \lambda f(v) = \lambda(f(v_1,v_2,v_3)) = \lambda(v_3-v_1,\ v_1-v_2,\ v_2-v_3)$

$\cdot\ f(\lambda v) = f(\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) = (\lambda v_3 - \lambda v_1,\ \lambda v_1 - \lambda v_2,\ \lambda v_2 - \lambda v_3)$

Per acabar de comprovar si és una aplicació lineal mirem:

$\boxed{f(0) = (0,0,0)}$ si no es compleix, no és aplicació lineal

$f(0,0,0) = (0-0,\ 0-0,\ 0-0) = (0,0,0)$ ✓

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ on $f(e_1) = (-1,1,0)$ la 1ra columna

Matriu relativa a la base canònica

b) $g(x,y,z) = (z-x-1,\ x+y,\ y-z)$

Haurem de veure $\begin{matrix} f(v)+f(u) = f(v+u) \\ \lambda f(v) = f(\lambda v) \end{matrix}$ → ens adonarem que no es compleix

Per demostrar-ho, hem de posar contraexemples:

El més clar que ens fa veure que NO és lineal és que

$g(0,0,0) = (-1,0,0) \neq (0,0,0)$

c) $h(x,y,z) = (zx, xy, yz)$

Aquí hem de tornar a veure que NO és aplicació lineal.

Exemple de contraexemple:

Agafem $u, v \in \mathbb{R}^3$ $\quad u(1,0,0)$ $\quad v(0,1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} h(u) = 0 \\ h(v) = 0 \end{array}\right\} (0,0,0)$$ ← No és el mateix

$h(v+u) = h(1,1,0) = (0,1,0)$

EXERCICI 2:

Pel que ens han dit de $f(e_1)$, $f(e_2)$ i $f(e_3)$, podem escriure la matriu relativa a l'aplicació:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ (comprovem que la primera columna correspon a $f(e_1)$)

Maneres de determinar la imatge de w $\quad (w = e_1 + 3e_2 + 2e_3)$ $\quad w = (1,3,2)_e$

1) utilitzant la matriu

$$(\text{matriu})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{el vector } w} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}}_{f(w)}$$

2) utilitzant les propietats de les aplicacions lineals:

$f(w) = f(e_1 + 3e_2 + 2e_3) = f(e_1) + 3f(e_2) + 2f(e_3) =$

$(v_1 - v_2 + v_3) + 3(2v_1 + v_2 - v_4) + 2(3v_2 - 2v_3 - v_4) = 7v_1 + 8v_2 - 3v_3 - 5v_4$

Trobar els vectors que tenen la mateixa imatge que w (millor utilitzem la matriu aquí)

$$(\text{matriu})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$ traiem el següent sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -x + y + z = 8 \\ x - 2z = -3 \\ -y - z = -5 \end{cases}$$

Calcular la matriu relativa a una base tenint una aplicació

Tindrà tantes columnes com aplicacions i tantes files com components té cada aplicació (bueno, el nombre total que hi ha, és a dir, si $f(e_1) = v_1 + v_2$ i $f(e_2) = v_2 - v_3$, hi haurà 2 columnes ($f(e_1)$ i $f(e_2)$) i 3 files (v_1, v_2, v_3))

Ex. $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ i $f(e_3) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trobar f^3

$f^3 = f \circ f \circ f$

Si tenim la matriu, com que apliquem l'aplicació 3 cops, és com si multipliquessim la matriu per si mateixa tres cops.

Ex.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trobar vectors v que compleixin $f^2(v)=f(v)$.

$f^2(v)=f(v) \Rightarrow M\cdot M\cdot v = M\cdot v.$

Per tant el que es fa és trobar la matriu. i anomenar $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Ex. $f(e_1)=e_1-e_2+e_3$ $\quad f(e_2)=2e_1+e_2-e_3$ $\quad f(e_3)=3e_1-2e_2-6e_3$

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-2\\1&-1&-6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-2\\1&-1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-2\\1&-1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-2\\1&-1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-19\\-4&1&7\\-4&7&41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{matrix}2x+y-19z\\-4x+y+7z\\-4x+7y+41z\end{matrix}\begin{matrix}=x+2y+3z\\=-x+y-2z\\=x-y-6z\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow\begin{matrix}x-y-21z=0\\-3x+9z=0\\-5x+8y+47z=0\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-21&0\\-3&0&9&0\\-5&8&47&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-21&0\\0&-3&-54&0\\0&3&-58&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&-21\\0&-3&-54\\0&0&\end{pmatrix}$$