

Exercici 21. *Tenim certs objectes, no sabem en quin nombre.*

Si el dividim per 3, el residu és 2;

per 5, el residu és 3;

i per 7, el residu és 2.

Quin és el nombre?

Aquest problema va ésser plantejat per Sun Tsu, en el segle IV, en el llibre Sunzi Suanjing.

Solució 21.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \quad mcd(3, 5, 7) = 1 \Rightarrow \text{són coprimers.}$$

Definim:

$$m = [3, 5, 7] \Rightarrow M = 105$$

$$a = [2, 3, 2]$$

$$D = [35, 21, 15]$$

Resolem les congruències $D_i N_i \equiv a_i \pmod{m_i}$, $1 \leq i \leq 3$

$$N_1 :$$

$$35N_1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$35 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2N_1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$-1 \equiv 2^{-1} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^*$$

$$N_1 \equiv -2 \pmod{3}$$

$$N_2 :$$

$$21N_2 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$21 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$N_2 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$N_3 :$$

$$15N_3 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$15 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$N_3 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$x = \sum_{i=1}^3 D_i N_i = [(35)(-2)] + [(21)(3)] + [(15)(2)] = 23$$

La solució és $23 \equiv 23 \pmod{105}$.