Tema 3

Interpolació polinomial

Aproximació a partir d'una taula

2

Es disposa de dades referents a dues variables $\{x_i, y_i\}, \ i = 0, \dots m$. Se suposa que $x_0 < x_1 \dots < x_m$. Es vol saber quin valor de la variable y cal esperar per a un valor de $x = z$, on $z \in (x_0, x_m)$.

Exemple: punt de congelació d'un anticongelant a base d'una solució de glicerina en aigua.
Taula de valors del punt de congelació en graus Celsius (y), en funció de la concentració (%) de glicerina (x).

x	0	20	30	40	50	60	80
y	0	-4.8	-9.5	-15.4	-21.9	-33.6	-19.1

Es vol estimar el punt de congelació si la concentració és del 45% (en pes), és a dir $y(z)$ per a $z = 45$.

Aproximació lineal per mínims quadrats

Una primera aproximació és la recta de regresió: l'aproximació mínim quadràtica a les dades.
Si s'escriu en la forma

$$y = c_0 + c_1(x - \bar{x})$$

les equacions normals són diagonals:

$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i (x_i - \bar{x}) y_i \end{pmatrix} .$$

$$c_0 = \bar{y} \, , \quad c_1 = \frac{\sum_{i=0}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=0}^m (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = 40 \, , \quad \bar{y} = -14.9 \, , \quad \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 4200 \, , \quad \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -1464$$

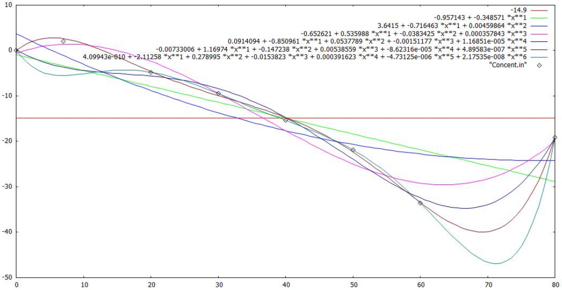
$$y = c_0 + c_1(x - \bar{x}) \ : \quad c_0 = \bar{y} = -14.9 \, , \ \ c_1 = -\frac{61}{175}$$

Així

$$y(45) = -14.9 - \frac{61}{175}(45 - 40) - 14.9 - \frac{61}{35} = -16.6429$$

Aproximacions polinomials per mínims quadrats

Es pot continuar cercant polinomis d'aproximació per mínims quadrats $p_n(x)$ de grau cada cop més alt



i calculant les aproximacions $p_n(z = 45)$:

n	0	1	2	3	4	5	6
$p_n(45)$	-14.9	-16.6429	-19.2871	-21.5683	-19.1435	-18.0256	-18.3252

Aproximació per interpolació

El polinomi d'aproximació mínim quadràtica $p(x) = p_6(x)$ de grau màxim $n = m = 6$ assoleixi exactament - interpola - els valors de la taula i té error quadràtic nul.

El polinomi interpolador $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$ compleix

$$p(0) = 0,\ p(20) = -4.8,\ p(30) = -9.5,\ p(40) = -15.4,$$
$$p(50) = -21.9,\ p(60) = -33.6,\ p(80) = -19.1.$$

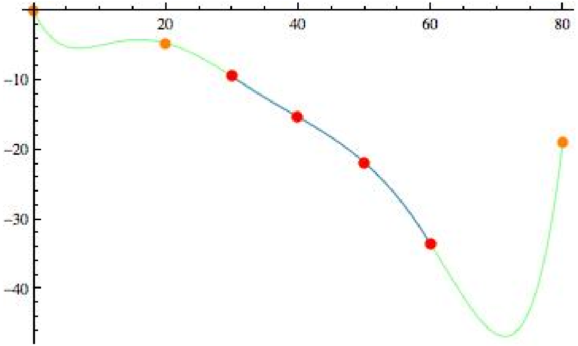
Els coeficients $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ satisfan el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{lcr}
a_0 & = & 0 \\
a_0 + a_1 20 + a_2 20^2 + a_3 20^3 + a_4 20^4 + a_5 20^5 + a_6 20^6 & = & -4.8 \\
a_0 + a_1 30 + a_2 30^2 + a_3 30^3 + a_4 30^4 + a_5 30^5 + a_6 30^6 & = & -9.5 \\
a_0 + a_1 40 + a_2 40^2 + a_3 40^3 + a_4 40^4 + a_5 40^5 + a_6 40^6 & = & -15.4 \\
a_0 + a_1 50 + a_2 50^2 + a_3 50^3 + a_4 50^4 + a_5 50^5 + a_6 50^6 & = & -21.9 \\
a_0 + a_1 60 + a_2 60^2 + a_3 60^3 + a_4 60^4 + a_5 60^5 + a_6 60^6 & = & -33.6 \\
a_0 + a_1 80 + a_2 80^2 + a_3 80^3 + a_4 80^4 + a_5 80^5 + a_6 80^6 & = & -19.1
\end{array}\right. ,$$

de solució única:

$$a_0 = 4.09943 \cdot 10^{-10},\quad a_1 = -2.11258,\quad a_2 = 0.278995,\quad a_3 = -0.0153823,$$
$$a_4 = 3.91623 \cdot 10^{-4},\quad a_5 = -4.73125 \cdot 10^{-6},\quad a_6 = 2.17535 \cdot 10^{-8}$$

Aproximació per interpolació



$p(z) \approx -18.3252.$

Polinomi interpolador

Teorema d'existència i unicitat

Teorema: Donats $n+1$ punts (x_0, y_0),(x_1, y_1), . . ., (x_n, y_n), amb tots els nodes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ diferents, existeix un únic polinomi $p_n(x)$, de grau màxim n, tal que

$$p_n(x_i) = y_i \ , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \ .$$

Demostració: Sigui

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

el polinomi buscat. Els seus $n+1$ coeficients han de verificar el sistema lineal de $n+1$ equacions següent:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n & = & y_1 \\ \ldots & & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n & = & y_n \end{array} \right.$$

Polinomi interpolador

Teorema d'existència i unicitat (fi de la demostració)

El determinant del sistema és el determinant de Vandermonde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0, \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0 \, .$$

Com que Δ és diferent de zero si els nodes són diferents, el sistema d'equacions lineal plantejat és compatible i determinat i, per tant, el polinomi d'interpolació existeix i és únic.

Nota: Òbviament la demostració dóna un primer algorisme de càlcul del polinomi interpolador, tot i això hi ha maneres més eficients de calcular-lo.

Polinomi interpolador

Mètode de les diferències dividides

La idea és expressar el polinomi interpolador en els punts $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\}$ en la forma:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \,.$$

Resulta:

$$y_0 = p_n(x_0) = c_0$$
$$y_1 = p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_0 + c_1(x_1 - x_0)$$
$$y_2 = p_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$\ldots$$
$$y_n = p_n(x_n) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + \ldots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n - x_{n-1})$$

Polinomi interpolador

Mètode de les diferències dividides

Trobar $c_0, c_1, \ldots c_n$ és equivalent a resoldre el sistema lineal triangular $Ac = y$ on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & (x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad y^T = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

Resulta:

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad c_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}, \ldots$$

Polinomi interpolador

Mètode de les diferències dividides

Per calcular els c_j's es construiex l'esquema de diferències dividides:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_0 & f[x_0] = y_0 = c_0 & & & \\
 & & f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = c_1 & & \\
x_1 & f[x_1] = y_1 & & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = c_2 & \\
 & & f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} & & \\
x_2 & f[x_2] = y_2 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\
\vdots & \vdots & f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n]-f[x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}} & & \\
x_n & f[x_n] = y_n & & &
\end{array}
$$

Llavors: $c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j]$ per a $j = 0, 1, \dots, n$

Polinomi interpolador

Exemple: Punt de congelació de la glicerina

0	0						
		-0.24					
20	-4.8		$-0.007\bar{6}$				
		-0.47		$0.000041\bar{6}$			
30	-9.5		-0.006		$1.1\bar{6}\cdot 10^{-5}$		
		-0.59		0.0001		$-3.80\bar{5}\cdot 10^{-7}$	
40	-15.4		-0.003		$-2.1\bar{6}\cdot 10^{-5}$		$2.175347\bar{2}\cdot 10^{-8}$
		-0.65		$-0.0007\bar{6}$		$1.3597\bar{2}\cdot 10^{-6}$	
50	-21.9		-0.026		$5.991\bar{6}\cdot 10^{-5}$		
		-1.17		$0.0022291\bar{6}$			
60	-33.6		$0.0631\bar{6}$				
		0.725					
80	-19.1						

El polinomi interpolador és:

$$\begin{aligned} p_6(x) \quad = \quad & -0.024x - 0.007\bar{6}x(x-20) + 4.1\bar{6}\cdot 10^{-5}x(x-20)(x-30) \\ & +1.1\bar{6}\cdot 10^{-5}x(x-20)(x-30)(x-40) \\ & -3.80\bar{5}\cdot 10^{-7}x(x-20)(x-30)(x-40)(x-50) \\ & +2.175347\bar{2}\cdot 10^{-8}x(x-20)(x-30)(x-40)(x-50)\ . \end{aligned}$$

Aproximació del punt de fusió de la glicerina amb una concentració del 45%

$$p_6(45) = -18.325232\ .$$

Polinomi interpolador

Avaluació

Un cop tenim el poliomi interpolador $p(x)$, com s'avalua de forma eficient en $x = z$? L'algorisme de Horner permet avaluar polinomis minimitzant les operacions. $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ es pot escriure en la forma: $p(x) = (\ldots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$.

- $pz = a_n$.
- Per a $k = n-1, \ldots 0$, fem $pz \leftarrow pz \cdot z + a_k$.
- $p(z) = pz$.

Si $p(x)$ s'escriu com en el mètode de diferencies dividides

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_2(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

aleshores es pot generalitzar:

- $pz = c_n$.
- Per a $k = n-1, \ldots 0$, $pz \leftarrow pz \cdot (z - x_k) + c_k$.
- $p(z) = pz$.

Polinomi interpolador

Exemple: Punt de congelació de la glicerina

$$\begin{aligned} p_6(x) &= -0.024x - 0.007\bar{6}x(x-20) + 4.1\bar{6}\cdot 10^{-5}x(x-20)(x-30) \\ &\quad +1.1\bar{6}\cdot 10^{-5}x(x-20)(x-30)(x-40) \\ &\quad -3.80\bar{5}\cdot 10^{-7}x(x-20)(x-30)(x-40)(x-50) \\ &\quad +2.175347\bar{2}\cdot 10^{-8}x(x-20)(x-30)(x-40)(x-50)(x-60)\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(x) &= (((((((2.175347\bar{2}\cdot 10^{-8}(x-60) - 3.80\bar{5}\cdot 10^{-7})(x-50) + +1.1\bar{6}\cdot 10^{-5})(x-30) \\ &\quad +4.1\bar{6}\cdot 10^{-5}) - 0.007\bar{6}) - 0.0007)(x-20) - 0.024)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pz &= 2.175347\bar{2}\cdot 10^{-8} \\ pz &= (-15)pz - 3.80\bar{5}\cdot 10^{-7} = -7.06857639\cdot 10^{-7} \\ pz &= (-5)pz + 1.1\bar{6}\cdot 10^{-5} = 4.70095486\cdot 10^{-6} \\ pz &= 5pz + 4.1\bar{6}\cdot 10^{-5} = 6.5171441\cdot 10^{-5} \\ pz &= 15pz - 0.007 = -6.68909505\cdot 10^{-3} \\ pz &= 25pz + 0.024 = -0.407227376 \\ pz &= 45pz = -18.3252319 = p_6(45) \end{aligned}$$

Polinomi interpolador

Error

Quan les dades $\{x_i, y_i\}$, $i = 0, \dots n$ corresponen a una funció $f(x)$: $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$,, es pot donar una aproximació de l'error comès en altres abscisses x?

Si se suposa que f és regular (prou derivable amb continuïtat) es pot establir un fórmula per a aquest error:

Teorema: Sigui f una funció que té les seves $n+1$ derivades contínues en l'interval $[a, b]$, i sigui M_{n+1} una fita superior de $|f^{(n+1)}(x)|$ a l'interval $[a, b]$. Sigui p_n el polinomi interpolador de f en $(n+1)$ nodes $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ donats, de forma que $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Llavors, per a tot $x \in [a, b]$ existeix un $\xi_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0) \cdots (x - x_n)|$$

Polinomi interpolador

Error

1. L'error en els nodes d'interpolació és zero.
2. Si $f(x)$ és un polinomi de grau màxim n, l'error és zero.
3. Fitació general:
   Si $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$, i $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ per tot $x \in [a, b]$, llavors:
   $$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$
4. Fitació particular (nodes equiespaiats):
   Si $x_i = x_0 + i \cdot h$ per $i = 0, 1, \ldots, n$, amb $h = \frac{(b-a)}{n}$, i $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ per a tot $x \in [a, b]$, llavors:
   $$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.$$

Polinomi interpolador

Exemple: interpolació de grau màxim 6 de les funcions sinus i cosinus

Si s'interpolen les funcions sinus i cosinus a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ per un polinomi de grau màxim 6 emprant nodes equiespaiats, quin és l'error màxim comès?
Solució: Tant per a $f(x) = \sin x$ com per a $f(x) = \cos x$, es pot fitar la derivada setena per $M_7 = 1$. Llavors, per a qualsevol punt $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, es pot fitar l'error comès per

$$|f(x) - p_6(x)| \leq \frac{1}{4 \cdot 7} \left(\frac{\pi/2}{6} \right)^7 \leq 3.02 \cdot 10^{-6} .$$

Exercici: Quants nodes equiespaiats necessitaríem perquè l'error comès en qualsevol punt de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sigui més petit que 10^{-10}?
Resposta: 11 nodes (grau màxim 10). Doncs el valor de $\frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{(n+1)}$ per a $n = 9$ és de l'ordre de 10^{-9} i el de $n = 10$ és $0.3x10^{-10}$.

Polinomi interpolador

Fenomen de Runge

És cert que l'aproximació del polinomi interpolador millora a l'augmentar el nombre de nodes (i per tant el grau de p_n)?

Exemple (C. Runge(1901)) Sigui $p_n(x)$ el polinomi interpolador de la funció

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

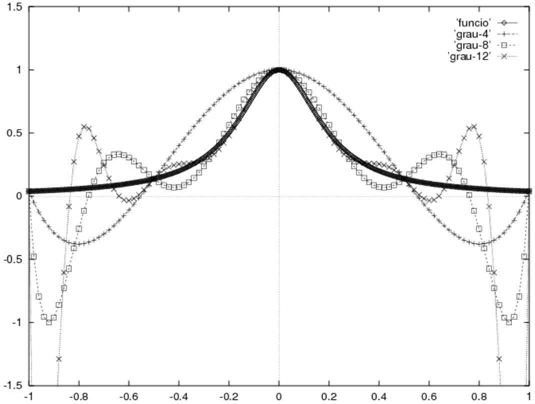
en els punts equiespaiats $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

$$\text{Llavors, si } 0.73 \leq |x| < 1, \sup_{n \geq 0} |f(x) - p_n(x)| = \infty.$$

és a dir l'error prop de l'origen és petit, però prop de -1 i 1 augmenta amb n.

Polinomi interpolador

Fenomen de Runge



A la figura hi ha representats la funció $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ i els seus polinomis d'interpolació de graus màxims 4, 8 i 12.

Polinomi interpolador d'Hermite

Definició general

Si es coneix la informació següent d'una funció f en els nodes $x_i,\ i = 0, \ldots n$:

$$\begin{cases} x_0 \longrightarrow f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(m_0)}(x_0) \\ x_1 \longrightarrow f(x_1), f'(x_1), \ldots, f^{(m_1)}(x_1) \\ \qquad \ldots \\ x_n \longrightarrow f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(m_n)}(x_1) \end{cases}$$

es vol trobar el polinomi interpolador d'Hermite generalitzat que compleixi totes aquestes condicions, és a dir,

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)\ ,\ \ j = 0, ..., m_i$$

Polinomi interpolador d'Hermite

Exemple

En la taula següent, es té la informació següent de la funció f i de les seves derivades:

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = -1$
f	0	0	-1
f'	1	1	
f''	0		

Com que es disposa de 6 dades, cal cercar un polinomi p de grau màxim 5 que les interpoli:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 \\ p''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 \end{aligned}$$

Això és, que compleixi totes les condicions:

$$p(0) = p(1) = 0, \quad p(-1) = -1, \quad p'(0) = p'(1) = 1, \quad p''(0) = 0.$$

Polinomi interpolador d'Hermite

Exemple

Resulta el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned}
p(0) = 0 \mapsto \quad & a_0 = 0 \\
p(1) = 0 \mapsto \quad & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\
p(-1) = -1 \mapsto \quad & a_0 - a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = -1 \\
p'(0) = 1 \mapsto \quad & a_1 = 1 \\
p'(1) = 1 \mapsto \quad & a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 1 \\
p''(0) = 0 \mapsto \quad & 2a_2 = 0
\end{aligned}$$

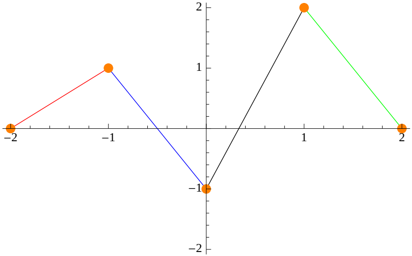
$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{9}{4} \quad a_4 = -\frac{1}{2} \quad a_5 = \frac{7}{4}$$

Nota: Hi ha una modificació del mètode de les diferències dividides que permet calcular més eficientment el polinomi d'Hermite.

Spline interpolador

Motivació i exemple bàsic

Augmentar el nombre de punts i buscar un polinomi de grau cada cop més gran pot no ser una bona idea. Una alternativa consisteix a buscar una malla de polinomis de grau baix que assoleixin punts consecutius de les dades i imposar algunes condicions de regularitat a la funció global.



Un exemple simple és l'spline lineal que es mostra en la figura. Entre cada dos nodes es proposa un polinomi de grau màxim 1 (una recta) i configura l'exemple més bàsic d'spline interpolador.

Spline cúbic interpolador

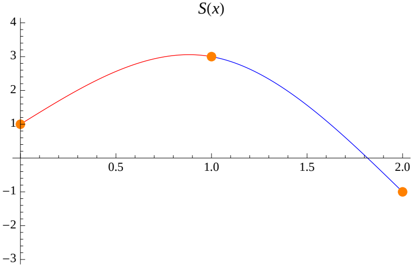
Definició

Un dels splines interpoladors més emprat és el format amb polinomis cúbics, de grau màxim 3: spline interpolador cúbic.

$$\{x_i, y_i = f(x_i)\}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Es tracta d'una funció $S : [a, b] \in \mathbb{R}$ tal que:

- $S|_{x \in [x_i, x_{i+1}]} := s_i(x)$ és un polinomi de grau màxim ≤ 3,
- S és dues vegades derivable a tot l'interval (a, b).



Spline cúbic interpolador

Coeficients i condicions

S'observa que:

- Nombre de coeficients a determinar: $4n$, ja que calen 4 coeficients per cadascun dels n polinomis de grau màxim 3,
- Nombre de condicions:
  - Node inicial i final: 2 condicions.
  - Continuitat en els nodes interiors: $2 \times (n-1)$ condicions.
  - Derivades primeres en els nodes interiors: $n-1$ condicions.
  - Derivades segones en els nodes interiors: $n-1$ condicions.

Total número de condicions: $2+2(n-1)+(n-1)+(n-1)=4n-2$.

Resten dos graus de llibertat!! ($4n$ - $(4n-2)$ =2)

Spline cúbic interpolador

Condicions de tancament

Es fan servir tres tipus de condicions de tancament per fixar els coeficients lliures dels splines cúbics.

- Clamped o extrems d'Hermite:

$$S'(x_0) = f'(x_0)\ ,\quad S'(x_n) = f'(x_n)$$

- Free o extrems naturals:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

- Periòdiques (només si $f(x_0) = f(x_n)$):

$$S'(x_0) = S'(x_n) \text{ i } S''(x_0) = S''(x_n)$$

Spline cúbic interpolador

Exemple

Es considera la taula d'interpolació:

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
f	1	3	-1

Es vol trobar l'spline cúbic $S(x)$ a l'interval $[0,2]$ de forma que $S|_{x\in[0,1]}(x) := s_1(x)$ i $S|_{x\in[1,2]}(x) := s_2(x)$ siguin polinomis de grau màxim ≤ 3:

$$s_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$s_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

S'imposen les condicions següents:

- Node inicial i final: $a_0 = 1$ i $b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 = -1$.
- Continuïtat en els nodes interiors ($x_1 = 1$): $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3$ i $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 3$.
- Derivabilitat primera en el node interior ($x_1 = 1$): $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = b_1 + 2b_2 + 3b_3$
- Derivabilitat segona en el node interior ($x_1 = 1$): $2a_2 + 6a_3 = 2b_2 + 6b_3$

Spline cúbic interpolador

Exemple

El sistema a resoldre, usant condicions de tancament naturals, és:

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 1\\
&b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 = -1\\
&a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3\\
&b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 3\\
&a_1 + 2a_2 + 3a_3 - (b_1 + 2b_2 + 3b_3) = 0\\
&2a_2 + 6a_3 - (2b_2 + 6b_3) = 0\\
&2a_2 = 0\\
&2b_2 + 12b_3 = 0
\end{aligned}
$$

de solució:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{7}{2},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{3}{2}\ ,\quad b_0 = -2,\ b_1 = \frac{25}{2},\ b_2 = -9,\ b_3 = \frac{3}{2}\ .$$

$$s_1(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^3\ ,\quad s_2(x) = -2 + \frac{25}{2}x - 9x^2 + \frac{3}{2}x^3\ .$$

Spline interpolador

Exemple