

Exercici 26

La masovera se'n va al mercat. Es dijous i, per tant, compra nous. En tornar cap a casa, es dedica a comptar-les. Si les compta de 2 en 2, n'hi sobra 1; si les compta de 3 en 3, n'hi sobren 2; i així, fins que les compta de 7 en 7, i no n'hi sobra cap. Quantes nous ha comprat? (Informació extra: la masovera va al mercat cada dijous i a la seva fam'ília no els agraden les nous.)

Resolució:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

En aquest punt, en aquest últim sistema de congruències ja hi podem aplicar el Teorema Xinès del residu perquè 3, 4, 5 i 7 són coprimers entre ells.

Prenent, $c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 4, c_4 = 0, m_1 = 2, m_2 = 4, m_3 = 5, m_4 = 7$, obtenim que $m = 420, M_1 = 140, M_2 = 105, M_3 = 84, M_4 = 60$. Aleshores, per tal de calcular les n_i calculo els inversos de M_i en mòdul m_i , amb $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Després de fer els càlculs, s'obté $n_1 \equiv -1 \pmod{3}, n_2 \equiv 1 \pmod{4}, n_3 \equiv -1 \pmod{5}, n_4 \equiv 2 \pmod{7}$.

Aleshores aplicant que $x = \sum_{i=1}^4 c_i M_i n_i$, s'obté que

$$x \equiv -2 \cdot 140 + 3 \cdot 105 - 4 \cdot 48 + 0 \pmod{420} \equiv -301 \pmod{420} \equiv 119 \pmod{420}$$

Per tant, $x \equiv 119 \pmod{420}$.