Derivació i integració numèrica

Introducció

Es vol calcular la derivada d'una funció f en una abscissa $a \in \mathbb{R}$ o la integral de f en un interval $[a, b]$:

$$f'(a)\ , \qquad \int_a^b f(x)dx$$

Dificultats:

- Es disposa d'una expressió de f, però és molt complicada.
- No es disposa de cap expressió de f, només un procediment per avaluar-la.
- Només es disposa d'una taula de valors de f, provinent de dades experimentals per exemple.

Proposta d'aproximacions:

$$f'(a) \approx p_n'(a)\ , \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

on $p_n(x)$ és el polinomi interpolador de grau màxim n a f en $n+1$ nodes escollits

Tema 4 (Part I)

Derivació numèrica

Derivació numèrica

Introducció

Se suposa f derivable en a i que, per tant, existeix el límit:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \; .$$

Una primera possible aproximació és:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad h \approx 0 \; ,$$

que coincideix amb la derivada en a del polinomi interpolador $p_1(x)$ a f en els nodes $x_0 = a, x_1 = a+h$:

$$f'(a) \approx p_1'(a) \; .$$

Derivació numèrica

Error de les fórmules de derivació per interpolació

La derivada de f en a s'aproxima per la derivada en a del polinomi interpolador $p_n(x)$ en els nodes escollits $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$$f'(a) \approx p_n'(a)\,.$$

Si es deriva la fórmula de l'error del polinomi interpolador en x

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\eta_x)}{(n+1)!} w_n(x)\,, \quad w_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,, \quad \eta_x \in < x_0, \ldots, x_n, x >$$

resulta

$$f'(x) - p_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{n+1}(\eta_x)}{(n+1)!}\right) w_n(x) + \frac{f^{n+1}(\eta_x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\left(w_n(x)\right).$$

Si $a \in \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ és un node, resulta l'error de la fórmula de derivació:

$$f'(a) - p_n'(a) = \frac{f^{n+1}(\eta_a)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\left(w_n(x)\right)_{|x=a}.$$

Fórmules de derivació numèrica

Fórmula de diferència finita endavant per a $f'(a)$

Nodes endavant amb pas h: $x_0 = a, x_1 = a + h$.
Polinomi interpolador i fórmula de derivació:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) \longrightarrow f'(a) \approx p_1'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Error:

$$f'(a) - p_1'(a) = \frac{f''(\eta_a)}{2!} w_1'(a) = -\frac{f''(\eta_a)}{2!} h$$

on la segona igualtat surt de derivar $w_1(x) = (x - a)(x - (a + h))$ a $x = a$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(\eta_a)}{2!} h, \quad \eta_a \in < a, a + h > .$$

Fórmules de derivació numèrica

Fórmula de diferència finita endarrere per a $f'(a)$

Nodes endarrera amb pas h: $\{x_0 = a, x_1 = a - h\}$.
Polinomi interpolador i fórmula de derivació:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}(x - a) \longrightarrow f'(a) \approx p_1'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Error:

$$f'(a) - p_1'(a) = \frac{f''(\eta_a)}{2!} w_1'(a) = \frac{f''(\eta_a)}{2!} h$$

on la segona igualtat surt de derivar $w_1(x) = (x - a)(x - (a - h))$ a $x = a$.

$$\frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a) - \frac{f''(\eta_a)}{2!} h, \quad \eta_a \in < a - h, a > .$$

Fórmules de derivació numèrica

Fórmula de diferència finita centrada per a $f'(a)$

Nodes centrats amb pas h: $\{x_0 = a - h, x_1 = a, x_2 = a + h\}$.
Polinomi interpolador i fórmula de derivació (exercici):

$$p_2(x) = f(a-h) + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}(x - (a-h)) + \\ + \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{2h^2}(x - (a-h))(x-a)$$

$$f'(a) \approx p_2'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Error:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + \frac{f'''(\eta_a)}{3!}h^2, \quad \eta_a \in < a-h, a+h > .$$

Fórmules de derivació numèrica

Fórmules de diferències finites per a $f'(a)$

Resumint, per calcular numèricament $f'(a)$ s'han trobat tres fórmules:

1. Diferència finita endavant

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(\eta_a)}{2!}h, \quad \eta_a \in < a, a+h > .$$

2. Diferència finita endarrere

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{h} = f'(a) - \frac{f''(\eta_a)}{2!}h, \quad \eta_a \in < a-h, a > .$$

3. Diferència finita centrada

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a) + \frac{f'''(\eta_a)}{3!}h^2, \quad \eta_a \in < a-h, a+h > .$$

Fórmules de derivació numèrica

Diferència finita centrada per a $f''(a)$

Nodes: $\{x_0 = a - h, x_1 = a, x_2 = a + h\}$.
Polinomi interpolador i fórmula de derivació (exercici):

$$p_2(x) = f(a-h) + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}(x - (a-h)) + \\ + \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{2h^2}(x - (a-h))(x - a)$$

$$f''(a) \approx p_2''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Es pot deduir aquesta fórmula d'error:

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \frac{1}{12} f^{iv}(\eta_a)\, h^2, \quad \eta_a \in < a-h, a+h > .$$

Fórmules de derivació numèrica

Exemple 1: Usain Bolt corrent 100m

L'any 2009 (a Berlín), el velocista Usain Bolt va situar el record dels 100 metres en 9.58 segons. Les dades de la cursa foren les següents:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$t(x)$	0	1.85	2.89	3.78	4.64	5.49	6.31	7.11	7.92	8.74	9.58

on la primera fila indica la distància x recorreguda en metres i la segona el temps t emprat en segons.

Es vol aproximar la velocitat i l'acceleració

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

en diferents moments de la cursa.

Fórmules de derivació numèrica

Exemple 1: Usain Bolt corrent 100m

Amb derivació numèrica cap endarrere

$$v(t_i) = \frac{dx}{dt}(t_i) \approx \frac{x(t_i) - x(t_i - h)}{h}, \quad 0 < i \leq 10, \quad h = 10$$

es pot obtenir una taula de velocitats (en m/s) a temps t_i (o a distància x_i).

Similarment, utilitzant derivació numèrica cap endarrere sobre la taula de velocitats acabada d'obtenir,

$$a(t_i) = \frac{dv}{dt}(t_i) \approx \frac{v(t_i) - v(t_i - h)}{h}, \quad 0 < i \leq 10, \quad h = 10$$

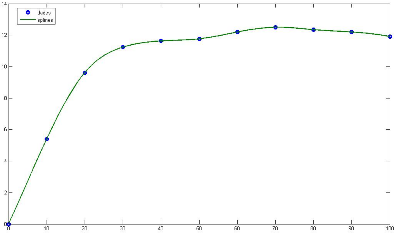
es pot obtenir la taula d'acceleracions (en m/s^2) a temps t_i (o a distància x_i).

A contiuació, es representen aquestes taules de velocitats i acceleracions amb les gràfiques obtigudes per interpolació polinomial.

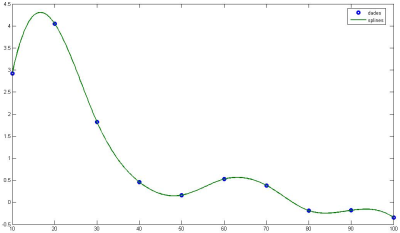
Fórmules de derivació numèrica

Exemple 1: Usain Bolt als 100m

t	0.000	1.850	2.890	3.780	4.640	5.490	6.310	7.110	7.920	8.740	9.580
x	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000	70.000	80.000	90.000	100.000
v	0.000	5.405	9.615	11.236	11.628	11.765	12.195	12.500	12.346	12.195	11.905
a		2.922	4.048	1.821	0.456	0.161	0.525	0.381	-0.191	-0.184	-0.346



Gràfica de la velocitat



Gràfica de l'acceleració

Fórmules de derivació numèrica

Exemple: Derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ en 0.5

Es calcula numèricament la derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ en $a = 0.5$ amb les fórmules de diferències finites trobades, operant amb precisió doble i prenent $h = 10^{-6}$:

$f'(a) \approx 0.968913266924387$ (fórmula de diferències endavant)
$f'(a) \approx 0.968911576471054$ (fórmula de diferències endarrere)
$f'(a) \approx 0.968912421697721$ (fórmula de diferències centrades)

La derivada calculada analíticament $f'(a) = 2a\cos a^2 = \cos 0.25 = 0.968912421710645$ s'aproxima millor per la fórmula amb difererències centrades.

Fórmules de derivació numèrica

Exemple: Derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ en 0.5

Els càlculs de $f'(0.5)$ per diferències dividides endavant per a diversos valors del pas h, cada cop més petits, es recullen en la taula següent amb els seus errors absoluts:

h	$f'(1.5)$	e_a
10^{-1}	1.048702740205670	$0.7979 \cdot 10^{-1}$
10^{-2}	0.977323034988178	$0.8411 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	0.969757222665041	$0.8348 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	0.968996938665034	$0.8452 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	0.968920873770096	$0.8452 \cdot 10^{-5}$
10^{-6}	0.968913266924387	$0.8452 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}	0.968912505505681	$0.8380 \cdot 10^{-7}$
10^{-8}	0.968912436394298	$0.1468 \cdot 10^{-7}$
10^{-9}	0.968912394760934	$-0.2695 \cdot 10^{-7}$
10^{-10}	0.968912450272086	$0.2856 \cdot 10^{-7}$
10^{-11}	0.968911062493305	$-0.1359 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	0.968891633590374	$-0.2079 \cdot 10^{-4}$

Com més petit sigui el pas, millor hauria de ser l'aproximació de $f'(a)$ però això queda emmascarat pels efectes de les cancel·lacions.

Fórmules de derivació numèrica

Errors de truncament i arrodoniment: pas òptim

Si en l'avaluació de la funció es coment un error d'arrodoniment fitat per ε i es té en compte l'error de truncament de la fórmula de derivació, s'obté la fita següent de l'error absolut total:

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| = \left| f'(a) - \frac{f(a+h) + e1 - f(a) - e_2}{h} \right| \leq$$

$$\leq \left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| + \left| \frac{e_2 - e_1}{h} \right| \leq \frac{M_2}{2} h + \frac{2\varepsilon}{h} \,, \quad M_2 = \max_{x \in (a, a+h)} |f''(x)|$$

Es considera com a pas òptim, el pas següent que minimitza la fita anterior:

$$h^{\text{op}} = \left(\frac{4\varepsilon}{M_2} \right)^{1/2} .$$

En l'exemple 2, $M_2 = 2$ i $\varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-16}$ si es treballa amb precisió doble:

$$h^{\text{op}} = \left(\frac{4 \cdot \frac{1}{2} 10^{-16}}{2} \right)^{1/2} \approx 10^{-8} \,,$$

d'acord amb els càlculs representats en la taula anterior.

Mètodes d'extrapolació per a derivació numèrica

Introducció

El càlcul numèric de derivades (i també, integrals) es redueix a aproximar un límit de la forma

$$F(0) = \lim_{h \to 0} F(h)$$

per a una determinada funció $F(h)$ del pas.
Pendre valors de h massa petits no es considera una bona estratègia degut als efectes cancel·lació.

Es volen millorar les aproximacions, sense prendre h massa petit, suposant que es coneix una expressió asimptòtica de l'error comès:

$$F(h) = F_0 + a_0 h^{p_0} + a_1 h^{p_1} + \cdots \ , \quad (a_j \neq 0) \ .$$

L'extrapolació es basa en el fet següent:
Si $F(h) = F(0) + ah^p$, llavors $F(qh) = F(0) + aq^p h^p$ i tenim:

$$F(h) + \frac{F(h) - F(qh)}{q^p - 1} = F(0) \ .$$

Mètodes d'extrapolació per a derivació numèrica

Extrapolació repetida de Richardson

La fórmula de diferencia finita endavant per aproximar $F(0) = f'(a)$

$$F(h) \equiv \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es pot desenvolupar en sèrie de Taylor, si f és prou diferenciable:

$$F(h) = f'(a) + \frac{h}{2} f''(a)h + \frac{h^2}{6} f'''(a)h^2 + \cdots \equiv f'(a) + a_0 h^{p_0} + a_1 h^{p_1} + \cdots \quad (a_j \neq 0)$$

La fórmula té errors d'ordres $p_0, p_1, \ldots$ en h (si $f''(a) \neq 0, \;\; p_0 = 1$, ...)
Si es calculen $F(h_0), F(qh_0), F(q^2 h_0), F(q^3 h_0), \ldots$, es poden considerar recurrentment les succesions extrapolades:

$$F_0(h) = F(h)\,, \quad F_{j+1}(h) = F_j(h) + \frac{F_j(h) - F_j(qh)}{q^{p_j} - 1} \equiv F_j(h) + \frac{\Delta}{q^{p_j} - 1}\,,$$

que tenen errors d'ordres $p_j, p_{j+1}, \ldots$ en h cada cop més alts:

$$F_j(h) = f'(a) + a_j^{(j)} h^{p_j} + a_j^{(j+1)} h^{p_{j+1}} + \cdots \; .$$

Notació alternativa: $F_j(h) = F_j[h, qh, \ldots, q^j h]$.

Extrapolació de Richardson

Exemple: Derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ en 0.5

Taula d'extrapolació de Richardson: $h_0 = 10^{-4}$, $q = 10$, $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$.

h	$F_0[h]$	$\frac{\Delta}{9}$ $F_1[h, qh]$	$\frac{\Delta}{99}$ $F_2[h, qh, q^2h]$	$\frac{\Delta}{999}$ $F_3[h, qh, q^2h, q^3h]$
10^{-1}	1.048702740205670			
10^{-2}	0.977323034988178	0.969391956630679		
10^{-3}	0.969757222665041	0.968916576851359	0.968911775035406	
10^{-4}	0.968996938665034	0.968912462665034	0.968912421107596	0.968912421754315

Taula d'errors respecte a la derivada exacta $F(0) = f'(0.5) = 0.968912421710645$.

h	$E_0[h]$	$E_1[h, qh]$	$E_2[h, qh, q^2h]$	$E_3[h, qh, q^2h, q^3h]$
10^{-1}	$0.7979 \cdot 10^{-1}$			
10^{-2}	$0.8411 \cdot 10^{-2}$	$0.4879 \cdot 10^{-3}$		
10^{-3}	$0.8448 \cdot 10^{-3}$	$0.4155 \cdot 10^{-5}$	$-0.6467 \cdot 10^{-6}$	
10^{-4}	$0.8452 \cdot 10^{-4}$	$0.4095 \cdot 10^{-7}$	$-0.6031 \cdot 10^{-9}$	$0.4367 \cdot 10^{-10}$

Observi's el comportament dels errors en cada columna: en la primera es van dividint aproximadament per $q = 10$, en la segona per $q^2 = 100$, en la tercera per $q^3 = 1000$. La primera té errors d'ordre h; la segona, d'ordre h^2; la tercera d'ordre h^3.
L'extrapolació repetida permet trobar aproximacions millors treballant amb h no tan petites i així evitar els efectes de les cancel·lacions.

Tema 4 (Part II)

Integració numèrica

Integració numèrica

Introducció

Per calcular la integral

$$I = \int_a^b f(x)dx \ ,$$

calen mètodes numèrics d'integració quan:

- encara que es conegui una expressió per a f, no es disposa d'una funció primitiva $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$;
- només es disposa d'una taula de f en abscisses equidistants provinent de resultats experimentals, per exemple.

Aquests mètodes es basen en l'aproximació de la integral de la funció per la integral de polinomis interpoladors p_n de grau màxim n a f en abscisses equidistants a $[a, b]$:

$$\int_a^b p_n(x)dx \quad \approx \int_a^b f(x)dx \ .$$

Integració numèrica

Fórmula del trapezi

La denotarem per $T(f, a, b)$.
Consisteix en integrar el polinomi d'interpolació de grau màxim 1 en els nodes $x_0 = a$ i $x_1 = b$ i calcular l'àrea del trapezi de bases $f(a)$ i $f(b)$ i alçada $b - a$. Usant $h = \frac{b-a}{2}$,

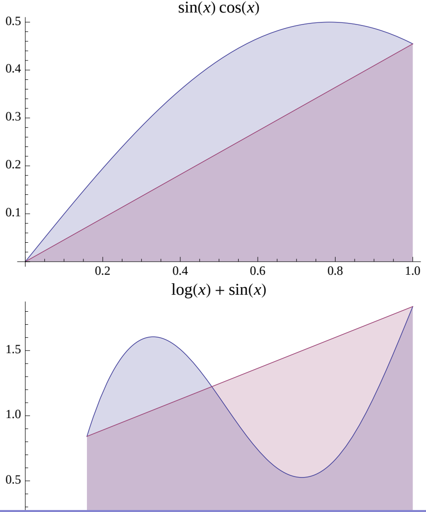
$$T(f, a, b) = \int_a^b (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{h}(x - a))dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right].$$

Es pot deduir la fórmula d'error:

$$T(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f''(\eta)}{12}h^3, \quad \eta \in [a, b].$$

Integració numèrica

Il·lustració de la fórmula del trapezi



Integració numèrica

Fórmula de Simpson

La denotarem per $S(f, a, b)$.
Consisteix en integrar el polinomi d'interpolació de grau 2 en els nodes $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. Usant $h = \frac{b-a}{2}$,

$$\int_a^b \left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)\right) dx$$

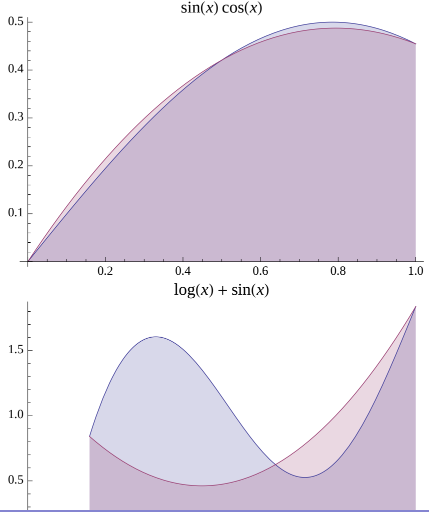
$$S(f, a, b) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right].$$

Es pot deduir la fórmula d'error:

$$S(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5, \quad \eta \in [a, b].$$

Integració numèrica

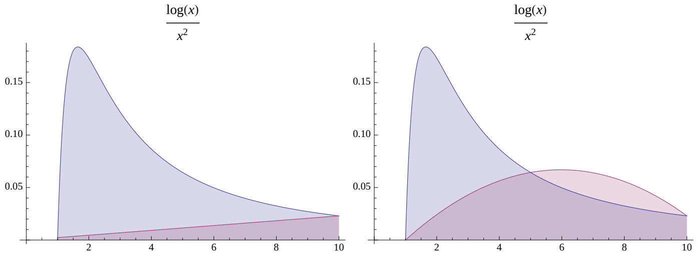
Il·lustració de la fórmula de Simpson



Integració numèrica

Problema

Quan l'interval $[a, b]$ és gran o la funció sembla lluny de ser lineal o quadràtica, les aproximacions de les fórmules de trapezis i Simpson a la integral són molt dolentes:



Trapezis Simpson

A continuació, es proposen procediments d'aproximació millors.

Fórmules compostes o regles d'integració numèrica 26

Regla dels trapezis

Per calcular $\int_a^b f(x)dx$ es divideix l'interval $[a, b]$ en N subintervals de la mateixa amplada $h = \frac{b-a}{N}$ i llavors s'usa la fórmula dels trapezis en cadascun d'ells. Usant
$x_0 = a < x_1 = a + h < x_2 = a + 2h < \cdots < x_{N-1} = a + (N-1)h < x_N = b$,
es troba la regla dels trapezis amb pas h:

$$T(h) := T_N(f, a, b) = \sum_{i=0}^{N-1} T(f, x_i, x_{i+1}) = \frac{b-a}{2N}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + f(b)\right],$$

Es pot deduir la fórmula d'error:

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{12} f''(\eta)\, h^2, \ \eta \in (a, b).$$

Fórmules compostes o regles d'integració numèrica 27

Regla de Simpson

Per calcular $\int_a^b f(x)dx$ es trosseja l'interval $[a, b]$ en N subintervals iguals d'amplada $H = 2h = \frac{b-a}{N}$ i després s'usa la fórmula de Simpson en cadascun d'ells. Usant $x_0 = a < x_1 = a+h < x_2 = a+2h < \cdots < x_{2N-1} = a+(2N-1)h < x_{2N} = b$, es troba la regla dels Simpson amb pas h:

$$S(h) := S_N(f, a, b) = \sum_{i=0}^{N-1} S\left(f, x_{2i}, x_{2i+2}\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(a+(2i+1)h) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+2ih)) + f(b)\right] .$$

º Es pot deduir la fórmula d'error:

$$S(h) = \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{180}\, f^{\prime V}(\eta)\, h^4,\ \eta \in (a, b).$$

Fórmules compostes o regles d'integració numèrica

Aplicació de la regla dels trapezis a $I = \int_0^{0.5} 2x\cos(x^2)dx$

Resultats $T(h)$ d'aproximar I per la regla dels trapezis amb passos $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ i errors $E(h) = T(h) - I$ respecte a $I = \sin 0.25 = 0.247403959255452 29$.

h	$T(h)$	$E(h)$
$\frac{1}{2}$	0.242228105427661	$-0.5176 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{4}$	0.245869991551343	$-0.1534 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{8}$	0.247005736315713	$-0.3982 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{16}$	0.247303489036110	$-0.1005 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{32}$	0.247378784649082	$-0.2517 \cdot 10^{-4}$
$\frac{1}{64}$	0.247397662039145	$-0.6297 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{128}$	0.247402384727953	$-0.1575 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{256}$	0.247403565608961	$-0.3936 \cdot 10^{-6}$
$\frac{1}{512}$	0.247403860842262	$-0.9841 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{1024}$	0.247403934651404	$-0.2460 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{2048}$	0.247403953103740	$-0.6151 \cdot 10^{-8}$
$\frac{1}{4096}$	0.247403957716827	$-0.1538 \cdot 10^{-8}$

Observi's que els errors es divideixen per aproximadament 4 quan dividim el pas per 2 i que cal un pas força petit per assegurar 8 dígits fraccionaris: $h = \frac{1}{4096}$ amb $N + 1 = 2049$ avaluacions de la funció integrand.

Extrapolació per a integrals

Mètode de Romberg

La regla dels trapezis permet aproximar $T(0) = I = \int_a^b f(x)dx$.
La fórmula d'Euler-Mclaurin indica que, si f és prou diferenciable, genèricament:

$$T(h) = I + a_0 h^{p_0} + a_1 h^{p_1} + \cdots \ (a_j \neq 0) \ ,$$

té errors d'ordres $p_0 = 2, p_1 = 4, \ldots$ en h, i es pot usar l'extrapolació repetida de Richardson.
Si es calculen $T(h_0), T(qh_0), T(q^2 h_0), T(q^3 h_0), \ldots, T(q^n h_0)$, es poden considerar recurrentment les succesions extrapolades del mètode de Romberg:

$$T_0(h) = T(h) \ , \quad T_{j+1}(h) = T_j(h) + \frac{T_j(h) - T_j(qh)}{q^{p_j} - 1} \equiv T_j(h) + \frac{\Delta}{q^{p_j} - 1} \ ,$$

que tenen errors d'ordres $p_j = 2j + 2, p_{j+1} = 2j + 3, \ldots$ cada cop més alts:

$$T_j(h) = I + a_j^{(j)} h^{p_j} + a_{j+1}^{(j)} h^{p_{j+1}} + \cdots \ .$$

Notació alternativa: $T_j(h) = T_j[h, qh, \ldots, q^j h]$.

Mètode d'extrapolació per a integrals

Aplicació del mètode de Romberg a $I = \int_0^{0.5} 2x\cos(x^2)dx$

Taula d'extrapolació de Richardson: $h_0 = \frac{1}{16}$, $q = 2$, $p_0 = 2$, $p_1 = 4$, $p_2 = 6$.

h	$T_0[h]$	$\overset{\Delta}{3}$ $T_1[h, qh]$	$\overset{\Delta}{15}$ $T_2[h, qh, q^2h]$	$\overset{\Delta}{63}$ $T_3[h, qh, q^2h, q^3h]$
$\frac{1}{2}$	0.242228105427661			
$\frac{1}{4}$	0.245869991551343	0.247083953592570		
$\frac{1}{8}$	0.247005736315713	0.247384317903836	0.247404342191254	
$\frac{1}{16}$	0.247303489036110	0.247402739942910	0.247403968078848	0.247403962140556

Taula d'errors respecte a $I = 0.247403959255 45229$.

h	$E_0[h]$	$E_1[h, qh]$	$E_2[h, qh, q^2h]$	$E_3[h, qh, q^2h, q^3h)]$
$\frac{1}{2}$	$-0.5176 \cdot 10^{-2}$			
$\frac{1}{4}$	$-0.1534 \cdot 10^{-2}$	$-0.3200 \cdot 10^{-3}$		
$\frac{1}{8}$	$-0.3982 \cdot 10^{-3}$	$-0.1964 \cdot 10^{-4}$	$0.3829 \cdot 10^{-6}$	
$\frac{1}{16}$	$-0.1005 \cdot 10^{-3}$	$-0.1219 \cdot 10^{-5}$	$0.8824 \cdot 10^{-8}$	$0.2886 \cdot 10^{-9}$

S'observa el comportament dels errors en cada columna: en la primera es van dividint aproximadament per $q^2 = 4$, en la segona per $q^4 = 16$, en la tercera per $q^6 = 64$. La primera té errors d'ordre h^2; la segona, d'ordre h^4; la tercera d'ordre h^6.
L'extrapolació repetida permet trobar aproximacions millors treballant amb h no tan petites i així evitant molts càlculs: la funció integrand cal avaluar-la només 9 vegades en comptes de 2049!