9 Exercicis i problemes

9.1 Trobeu per a quins valors dels paràmetres les matrius següents tenen inversa i calculeu-la:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & a & a & a \\ a & 3 & a & a \\ a & a & 3 & a \\ a & a & a & 3 \end{pmatrix}.$$

9.2 Discutiu, segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$, el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a^2 & 1+a^2 \\ 2 & 2 & 2+2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.3 Per a cada un dels sistemes d'equacions lineals que segueixen, trobeu, sense usar reducció, quines condicions han de complir els paràmetres $a, b, c \in \mathbb{R}$ per tal que siguin compatibles i, en aquest cas, trobeu-ne la solució.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=a \\ 5x+3y+3z=b \\ x+y-z=c \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+2y+z=a \\ 5x+3y+4z=b \\ x+y-z=c \end{cases} \quad \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}.$$

9.4 Es consideren els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = <(1,-1,-1,-1),(1,-1,3,1),(1,-1,1,0)>$$

y G, donat per les equacions

$$x+y+z-2t=0 \quad , \quad 2x-y-2z+4t=0.$$

Sense usar reducció, calculeu unes equacions de F, així com bases i les dimensions de F y G; determineu $F \cap G$ y $F+G$, mitjançant una base o un sistema d'equacions, i doneu-ne les dimensions.

9.1. Trobeu per a quins valors dels paràmetres les matrius següents tenen inversa i calculeu-la

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0 + abc + abc - 0b^2 - 0c^2 - 0a^2 = 2abc$

perquè la matriu sigui invertible $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c \neq 0$

suposem que el determinant $A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{2abc} \underbrace{\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}}$$

Matriu transposada de la matriu d'adjunts: → primer trasposo i després calculo els adjunts

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

adj. $0 : -c^2$

adj a : $a \cdot 0 - bc = -bc$

adj b : $ac - b \cdot 0 = ac$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

adj a : $0 \cdot a - bc = -bc$

adj 0 : $0 - b^2 = -b^2$

adj c : $0 \cdot c - ab = -ab$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

adj b : $ac - 0b = ac$

adj c : $0 \cdot c - ab = -ab$

adj $0 = -a^2$

signes de la matriu d'adjunts.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$A=\begin{array}{c}\\ + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \end{array}\\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{b} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$ → calcular el rang segons el paràmetre b.

Desenvolupem el determinant per la primera columna:

$$\det A = 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} + b \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1+b$$

Com que són dues matrius triangulars, el determinant és el producte de les diagonals

$\det A = 1+b$

- si $b \neq -1$, aleshores $\det A \neq 0$ → $\text{rang } A = 5$

Si $b = -1$, aleshores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

↳ menor d'ordre $4 \neq 0$ (calculat anteriorment

$\text{rang } A = 4$

Scanned by CamScanner

9.4. Es consideren subespais de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \langle (1,-1,-1,-1),\ (1,-1,3,1),\ (1,-1,1,0) \rangle$$

$$G = \begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ 2x - y - 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

1) Base i dimensió de F:

$$F = \langle (1,-1,-1,-1),\ (1,-1,3,1),\ (1,-1,1,0) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

dim F = rang matriu

↳ det d'ordre $2 \neq 0$ → Cal calcular els orlats
- si són diferents de 0 (almenys 1) → rang 3
- si són iguals a 0 → rang 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Com que els dos orlats valen 0, el rang de la matriu és 2

dim F = 2

base de F → vectors involucrats en el menor d'ordre $2 \neq 0$

$\{(1,-1,3,1),\ (1,-1,1,0)\}$

2) Equacions de F: necessitem 2 equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ 1 & -1 & & \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

→ det $\neq 0$ n'hi ha prou amb anular els orlats per tenir una matriu de rang 2

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ y & z & t \end{vmatrix} = -t - z - y + 3t = 0 \to \boxed{y + z - 2t = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & z & t \end{vmatrix} = t + z - x - 3t = 0 \to \boxed{x - z + 2t = 0}$$

$$F = \begin{cases} y + z - 2t = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

3) Base i dim de G: $G = \begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ 2x - y - 2z + 4t = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

menor d'ordre 2 $\neq 0$ → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ → rg 2

dim G = 2

Per calcular la base de G:
- escollim un menor maximal diferent de 0 (en aquest cas el de la dim)
- passem a l'altre membre les incògnites no involucrades
- resolem el sistema per Cramer (per les incògnites involucrades

$$\begin{cases} \boxed{x+y}+z-2t=0 \\ \boxed{2x-y}-2z+4t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-z+2t \\ 2x-y=2z-4t \end{cases} \rightarrow \text{resolució per Cramer}$$

$$x=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} -z+2t & 1 \\ 2z-4t & -1 \end{vmatrix} \qquad y=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 1 & -z+2t \\ 2 & 2z-4t \end{vmatrix}$$

· Donem valors arbitraris a z i t per calcular la base.

· si $z=1, t=0 \rightarrow (1/3, -4/3, 1, 0)$

$$x=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{3} \qquad y=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=\frac{-4}{3}$$

· si $z=0, t=1 \rightarrow (-2/3, 8/3, 0, 1)$

$$x=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=\frac{-2}{3} \qquad y=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=\frac{8}{3}$$

base de G = $\{(1/3, -4/3, 1, 0), (-2/3, 8/3, 0, 1)\}$

3) Suma: F+G   reunir generadors i treure base

$$\begin{array}{cccc|c} + & - & + & - & \\ \hline 1 & -1 & 3 & 1 & - \\ 1 & -1 & 1 & 0 & + \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & - \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 & 1 & + \end{array}$$

menor ≠ 0 d'ordre 3

④ Calculem el det mitjançant d'ordre 4 amb el desenvolupament de la darrera columna.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1/3 & -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{9}-\frac{8}{9}-\frac{8}{3}\right)+\left(-1-4-\frac{1}{3}+1-\frac{4}{3}+1\right)=0$$

La dimensió de F+G no és 4

Com que el menor més gran diferent de 0 és d'ordre 3, aleshores rg = 3 = dim F+G

vectors que formen la base → vectors involucrats en el menor ≠ 0 escollit.

base F+G = $\{(1,-1,1,0), (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 0), (\frac{-2}{3}, \frac{8}{3}, 0, 1)\}$

5) Intersecció $F \cap G$ reunir equacions i treure'n un sistema d'equacions linealment independents

$$F \cap G \left\{ \begin{array}{l} x \quad - z + 2t = 0 \\ \quad y + z - 2t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0 \\ 2x - y - 2z + 4t = 0 \end{array} \right.$$

④ per Grassmann sabem que:

dim F + dim G = dim $F+G$ + dim $F \cap G$

$2 + 2 = 3$ + dim $F \cap G$ → dim $F \cap G = 1$

Cal veure que el determinant de la matriu de coeficients és 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

→ com que dues columnes són iguals per alternància, det = 0

↳ $F \cap G$ no té dim 4

· si trobem un menor $\neq$ d'ordre 3, aleshores dim $F \cap G = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 + 1 - 0 - 1 = 1 \neq 0$$

↳ la dim $F \cap G = 3$

· equacions de $F \cap G$ → equacions involucrades en el menor $\neq 0$ →

$$F \cap G \left\{ \begin{array}{l} x - z + 2t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \end{array} \right.$$