Clase 11

Números Complejos

- Si $\mathbb{R}$ denota el cuerpo de los números reales, sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene: $x^2 \geqq 0$.
- Por lo tanto, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene soluciones en $\mathbb{R}$, es decir, en $\mathbb{R}$ no existe $\sqrt{-1}$.
- Para crear el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, que será un cuerpo que contiene a $\mathbb{R}$, comenzamos por decretar que existe en este cuerpo una raíz cuadrada de -1, es decir, un número que denotaremos i y que cumple:
- $$i^2 = -1.$$
- Llamaremos $\mathbb{C}$ al conjunto de todas las expresiones de la forma:
- $$a + b \cdot i \text{ , con } a, b \in \mathbb{R}$$
- donde $a + b \cdot i = a' + b' \cdot i \Leftrightarrow a=a'$ y $b=b'$, dotado de una extensión de las operaciones usuales de $\mathbb{R}$: suma, producto, resta y división por un elemento no nulo. En realidad, la posibilidad de "restar" y "dividir por un elemento no nulo" equivalen a decir que el 0 y el 1 también son neutros para la suma y el producto (respectivamente) en este conjunto de números, y que todo elemento de $\mathbb{C}$ posee un "opuesto respecto de la suma" y todo elemento no nulo un "inverso respecto del producto".

- Suma: $(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a+c) + (b+d)\,i$
- Como $0 = 0 + 0\,i$, vemos que es neutro de la suma: Puesto que $(a + b\,i) + 0 = (a+0) + (b + 0)\,i = a + b\,i$
- De aquí vemos que todo elemento de $\mathbb{C}$ tiene un opuesto para la suma:
- $(a + b\,i) + (-a - b\,i) = (a - a) + (b - b)\,i = 0 + 0\,i = 0$, y por lo tanto podemos restar: $(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a-c) + (b-d)\,i$
- Multiplicación: $(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = a\,c + a\,d\,i + b\,c\,i + b\,d\,i^2 =$
- $(a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,i.$
- Como $1 = 1 + 0\,i$, vemos que es neutro del producto: $(a + b\,i) \cdot 1 =$
- $(a + b\,i)\,(1 + 0\,i) = a + b\,i.$

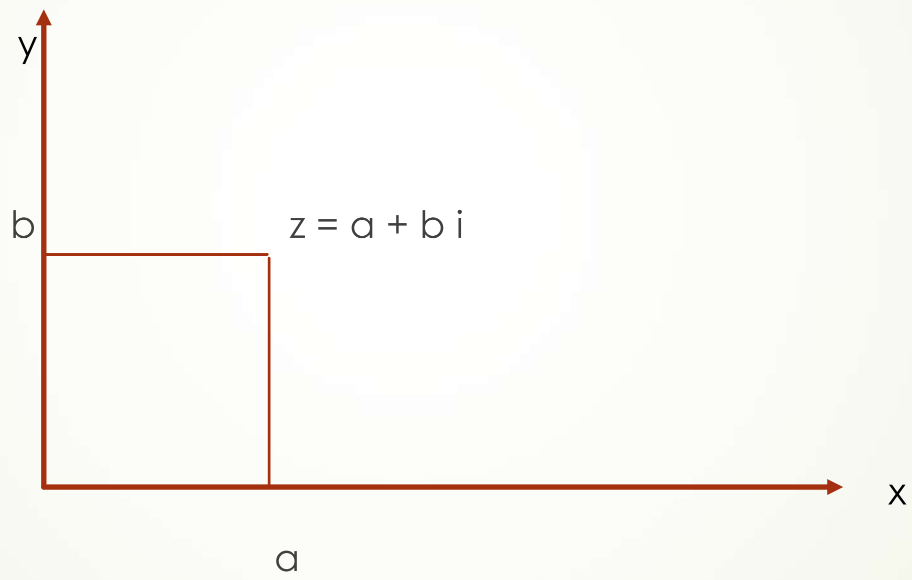
- Para ver que todo elemento no nulo de $\mathbb{C}$ posee un inverso respecto al producto, veamos directamente como calcular z/w para cualquier $w \neq 0$ (es decir: el producto de z por el inverso de w): Si $z = a + b \cdot i$ y $w = c + d \cdot i \neq 0$, se tiene:
- $$\frac{a+b\,i}{c+d\,i} = \frac{a+b\,i}{c+d\,i} \cdot \frac{c-d\,i}{c-d\,i} = \frac{(ac+bd)+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$
- Puede verse que estas operaciones siguen cumpliendo las propiedades básicas que ya sabemos que son ciertas en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Q}$ (conmutativa, asociativa, distributiva del producto respecto de la suma). Es importante destacar que la fórmula previa para la división aplicada al caso $a + b\,i = 1$ prueba que todo $w \neq 0$ de $\mathbb{C}$ posee inverso respecto al producto.
- Por todo esto, $\mathbb{C}$ dotado de las operaciones anteriores es un cuerpo tal que $\mathbb{R}$ es subcuerpo de $\mathbb{C}$ (y por lo tanto $\mathbb{Q}$ también). Lo llamaremos Cuerpo de los Números Complejos.

- A la expresión $a + b \cdot i$ se la llama forma binómica del número complejo $z = a + b \cdot i$, y se llama a a parte real de z y a b parte imaginaria de z.
- Un número complejo $z \in \mathbb{R} \iff$ la parte imaginaria de z es 0.
- Definición: Si $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ llamamos Conjugado de z y lo denotamos $\bar{z}$ al número complejo $a - b \cdot i$.
- Observación: Es importante notar qué ocurre si multiplicamos un comlejo por su conjugado:
- $(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$, que es un número real y mayor o igual que 0.

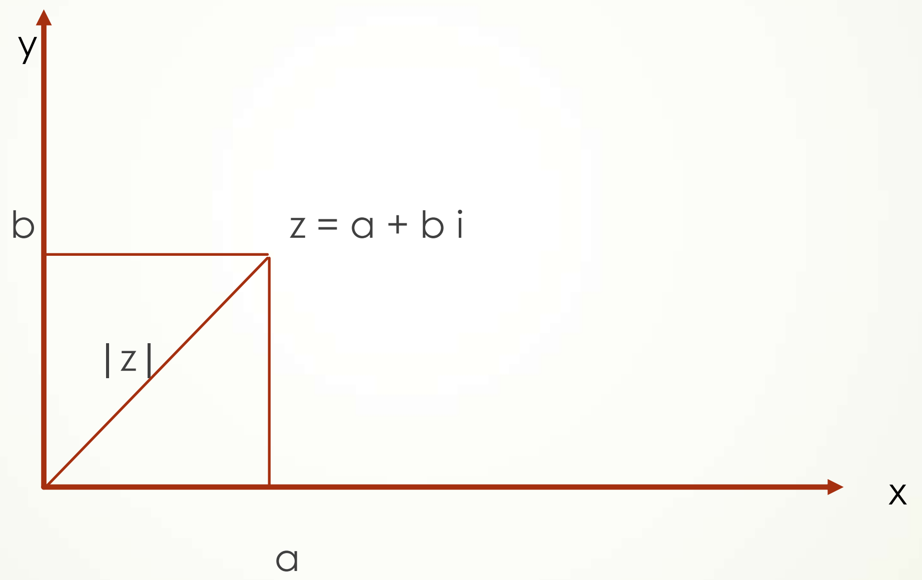
- Cálculo del inverso: Como ya mencionamos, el inverso de un número complejo $z = a + b \cdot i \neq 0$ se calcula como caso particular de la fórmula para la división, en la cual se utilizó el truco de multiplicar por el conjugado:
- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}$

Módulo y Argumento de un Número Complejo: Forma Polar

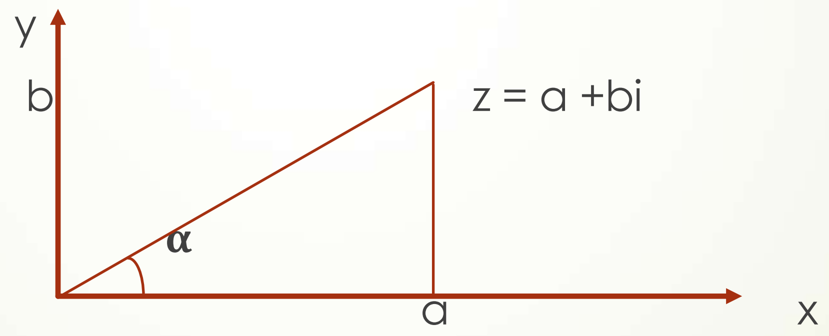
- Comenzamos por representar a un número complejo $z = a + b\,i$, es decir, con parte real a y parte imaginaria b, como el punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, el eje de las x corresponde a la parte real y el eje de las y a la parte imaginaria de los números complejos. Por lo tanto, hemos pasado de la “recta real” al ”plano complejo”, y la recta real se identifica en este plano con el eje de las x.


y
b
z = a + b i
x
a

- De esta forma, identificamos a los complejos con los puntos de $\mathbb{R}^2$, los cuales a su vez pueden expresarse mediante coordenadas polares.
- Módulo: Si P = (a,b) $\in \mathbb{R}^2$ es el punto correspondiente a z = a + b i, el módulo de z, que denotaremos $|z|$, es la longitud del segmento OP donde O = (0,0). Por el teorema de Pitágoras vemos que:
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Observamos que $|z| \geqq 0$ y que $|z| = 0 \Leftrightarrow z=0$. También tenemos la igualdad:
- $z \cdot \bar{z} = (a + b\,i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 = |z|^2$.


y
b
z = a + b i
| z |
x
a

- <u>Argumento</u>: Si P =(a,b) es el punto que representa a z = a + b i, el argumento de z es el ángulo que forman el semieje positivo de las x con el vector $\overrightarrow{OP}$. Está bien definido excepto para z = 0.
- Si llamamos $\boldsymbol{\alpha}$ al argumento se tiene: tg $\boldsymbol{\alpha}$ = b/a ⇨ $\boldsymbol{\alpha}$ = arctg (b/a).



- Definición: Si $z = a + b\,i$ y $|z|$ es el módulo de z y $\boldsymbol{\alpha}$ su argumento (suponemos $z \neq 0$) decimos que $|z|$, $\boldsymbol{\alpha}$ son la forma polar del número complejo z. Es decir, la forma polar de $z = a + bi$ viene dada por las coordenadas polares del punto $P = (a,b)$.
- Notación: Denotamos $r_{\boldsymbol{\alpha}}$ al número complejo de módulo $r \geqq 0$ y argumento $\boldsymbol{\alpha}$. Nótese que siempre puede reducirse $\boldsymbol{\alpha}$ de modo que cumpla:
- $0 \leqq \boldsymbol{\alpha} \leqq 2\,\pi$.
- Si un complejo z tiene forma polar $r_{\boldsymbol{\alpha}}$ vemos que su forma binómica es $a + bi$ con $a = r \cdot \cos \boldsymbol{\alpha}$ y $b = r \cdot \sin \boldsymbol{\alpha}$.

- Raíces de la unidad:
- Veamos como describir el producto y el cociente de números complejos utilizando su forma polar. Haciendo uso de las fórmulas trigonométricas para el coseno y el seno de una suma y de una resta se ve que se cumple:
- Si $z_1 = r_{1_{\alpha_1}}$ y $z_2 = r_{2_{\alpha_2}}$ $\Rightarrow$ $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha_1 + \alpha_2}$
- Y si $z_2 \neq 0$: $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2)_{\alpha_1 - \alpha_2}$
- De aquí se deduce la fórmula para la potencia de un número complejo (en forma polar):
- $z = r_\alpha \Rightarrow z^n = {r^n}_{n\cdot\alpha}$

Clase 12

- Podemos "invertir" esta fórmula para determinar lar raíces n-ésimas de la unidad, es decir, los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n = 1$:
- ${r^n}_{n \cdot \boldsymbol{\alpha}} = 1_0 \iff r = 1$ y $n \cdot \boldsymbol{\alpha} = 2 \cdot k \cdot \pi$, para algún $k \in \mathbb{Z} \iff$
- $r = 1$ y $\boldsymbol{\alpha} = (2 \cdot k \cdot \pi)/n$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Por lo tanto, las raíces n-ésimas de la unidad son complejos $z_0, z_2, \ldots, z_{n-1}$ con forma polar: $z_k = 1_{2k\pi/n}$, $k = 0,1,\ldots, n-1$. Por lo tanto, expresadas en forma binómica son:
- $$z_k = \cos(2k\pi/n) + i \cdot \sin(2k\pi/n)$$

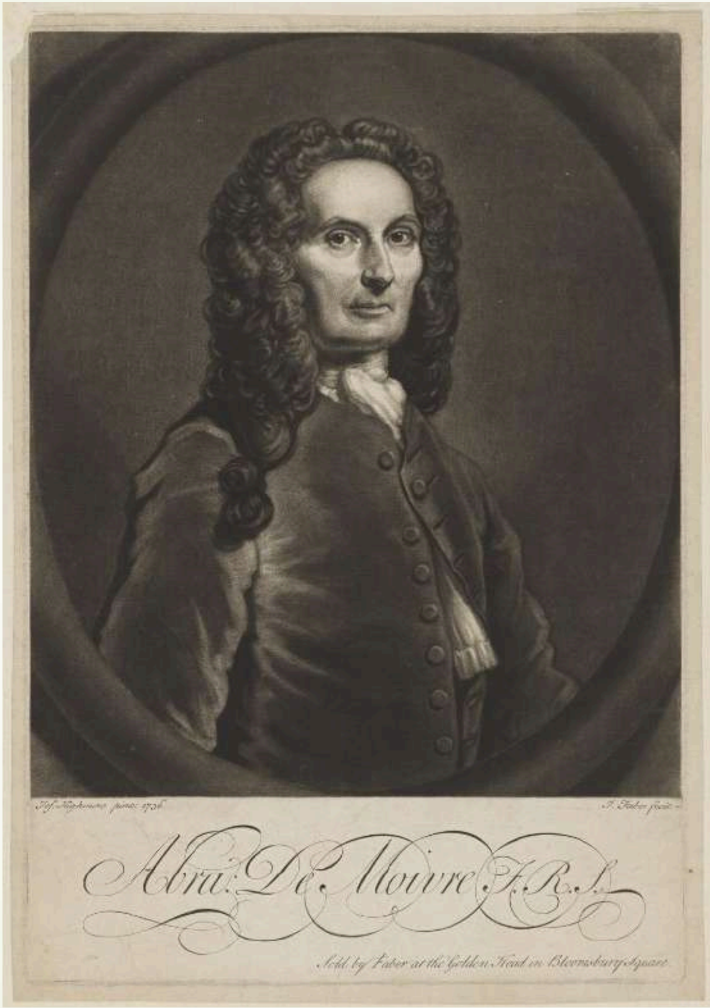
- Veamos de qué polinomios a coeficientes en $\mathbb{Z}$ son raíces las raíces n-ésimas de la unidad. Claramente si **ζ** es raíz n-esima de la unidad, es raíz de:
- $$x^n - 1 = 0$$
- Con lo cual, si n >1, también es raíz de:
- $$\frac{x^n - 1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots + x + 1$$
- En general, este último polinomio no es irreducible, pero para el caso n=p primo se puede ver que sí lo es.
- Para n > 1 decimos que **ζ** es raíz n-ésima primitiva de la unidad si se cumple que $\boldsymbol{\zeta}^n = 1$ y n es el mínimo exponente positivo con esta propiedad.

- Para el caso n=p primo puede verse que si se cumple $\zeta^p=1$ y $\zeta \neq 1$ entonces automáticamente ζ es raíz p-ésima primitiva de la unidad. También, el conjunto de todas las raíces p-esimas primitivas es: ζ, ζ^2,…..ζ^{p-1} y todas ellas son raíces del polinomio irreducible: $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots \ldots + x + 1$.
- Estas raíces p-ésimas primitivas de la unidad son, en forma polar:
- $z_k = 1_{\frac{2\pi k}{p}}$ con k=1,2,…, p-1.
- En el caso de un n > 1 arbitrario, puede verse que hay exactamente φ(n) raíces n-ésimas primitivas de la unidad, las cuales son en forma polar:
- $z_k = 1_{\frac{2\pi k}{n}}$ con k=1,2,…, n cumpliendo mcd(k,n)=1.

- [Raíz n-ésima de un número complejo]()
-
- Dado cualquier $z \in \mathbb{C}$ usando la fórmula para las potencias de un complejo podemos calcular las raíces n-ésimas de z tal como hicimos para el 1:
- w es raíz n-esima de z, con $w = r'_{\boldsymbol{\alpha}'}$ y $z = r_{\boldsymbol{\alpha}}$ ⇨ $w^n = (r'_{\boldsymbol{\alpha}'})^n = r'^{n}_{n\cdot\boldsymbol{\alpha}'} = r_{\boldsymbol{\alpha}}$ ⇨
- $r' = \sqrt[n]{r}$ y $\boldsymbol{\alpha}' = \frac{\boldsymbol{\alpha}+2\,k\,\pi}{n}$, k = 0, 1,….., n-1. La última igualdad sale de identificar dos ángulos que difieren en un múltiplo de 2π de donde $\boldsymbol{\alpha}'$ debe cumplir:
- $n\cdot\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} + 2\,k\,\pi$.

- De aquí obtenemos la Fórmula de De Moivre para las raíces n-ésimas de un número complejo z = r (cos $\boldsymbol{\alpha}$ + i sin $\boldsymbol{\alpha}$):
- $\sqrt[n]{z} \;=\; \sqrt[n]{r}$ (cos ($\frac{\alpha+2\,k\,\pi}{n}$) + i sin ($\frac{\alpha+2\,k\,\pi}{n}$)) , k=0,1,…., n-1.
- De aquí se desprende que para todo z ≠ 0, z ∊ ℂ, z posee exactamente n raíces n-ésimas en ℂ. En particular, el polinomio:
- $x^n - z = 0$
- descompone totalmente (es decir, en factores de grado 1) sobre ℂ.
- Que lo mismo ocurre para todos los polinomios a coeficientes en ℂ es un resultado que fue conjeturado en 1629 por A. Girard y fue finalmente demostrado por C.F. Gauss (el Príncipe de las Matemáticas) en 1799:

- Teorema Fundamental del Álgebra: Si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio de grado $n > 0$, existen $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r \in \mathbb{C}$ raíces de $P(x)$ con multiplicidades $e_1, e_2, \ldots, e_r$ tales que: $e_1 + e_2 + \ldots + e_r = n$, es decir que $P(x)$ descompone totalmente en $\mathbb{C}$:
- $P(x) = A\,(x - \boldsymbol{\alpha}_1)^{e_1}\,(x - \boldsymbol{\alpha}_2)^{e_2} \ldots\ldots (x - \boldsymbol{\alpha}_r)^{e_r}$.
- Observación: Como ya sabemos, el enunciado análogo es falso en $\mathbb{Q}[x]$ o en $\mathbb{R}[x]$, como se ve con el ejemplo del polinomio $x^2 + 1$, que es irreducible sobre ambos cuerpos.


Abra: De Moivre F.R.S.
Sold by Faber at the Golden Head in Bloomsbury Square

A. De Moivre

A. Girard

C. F Gauss

“Princeps Mathematicorum”

- Observación: En general, no es tarea fácil hallar las raíces complejas de un polinomio en $\mathbb{C}[x]$. Si es de grado 2, tenemos la resolvente de la cuadrática para expresar las raíces en función de los coeficientes.
- Si el polinomio tiene coeficientes enteros, si tuviera raíces racionales estas se pueden encontrar examinando un conjunto finito de "candidatas" mediante el siguiente método, creado por C. F. Gauss:
- Criterio de Gauss: Sea P(x) un polinomio coeficientes en $\mathbb{Z}$:
- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$
- de grado positivo. Si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}$ es raíz de P(x), escrita como $\boldsymbol{\alpha} = \frac{u}{v}$ con u,v enteros coprimos $\Rightarrow$ $u \mid a_0$ y $v \mid a_n$.