Introducció al Càlcul Diferencial **Matemàtiques**

Exercicis: Llista 4 - Continuitat II Tardor 2020-21

1. Demostreu que

(a) El polinomi $x^4 - 3x - 1$ té almenys dues arrels real.

(b) L'equació $e^x = x^2$ té solució a l'interval $(-1, 0)$.

2. Demostreu que tota funció contínua $f : [0,1] \to [0,1]$ té un punt fix.

Nota: Un punt fix de f és un punt x del domini de f tal que $f(x) = x$.

3. Sigui $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ funció contínua tal que $f(2) = 2$ i $f(-2) = -2$. Demostreu que l'equació $x^2 + (f(x))^2 = 4$ té almenys dues solucions a l'interval $[-2, 2]$.

4. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Demostreu que f és acotada.

5. Sigui l'equació $e^x + \sin x = \pi$.

(a) Demostreu que té una única solució positiva ($x_0 > 0$).

(b) Doneu un interval de longitud menor que 1 que contingui aquesta solució.

6. Sigui $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Demostreu que f és acotada. Té f necessàriament màxim absolut en $(0, 1]$?

7. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua no acotada ni inferiorment ni superiorment. Demostreu que f s'anul·la en infinits punts. Proveu que això no és cert per a les funcions $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb les mateixes condicions.