5. Probabilitat Condicionada

Universitat de Barcelona

Problema de l'accident i matrícula de tres zeros

Exemple (Accident)

Un vianant mor atropellat i el cotxe ha fugit. Un testimoni afirma que la matrícula tenia exactament tres zeros. La fiabilitat del testimoni és un 90%. Emprant la informació del testimoni, calculeu la probabilitat que la matrícula del cotxe de l'accident tingui exactament tres zeros.

Pregunta: Quina seria la probabilitat sense cap informació del testimoni?

Solució: La probabilitat que un cotxe tingui la matrícula amb tres zeros és: 0.0036.

Problema de les tres caixes i boles blanques i negres

Exemple (Caixes)

Suposeu tres caixes amb la següent composició de boles blanques i negres:

Caixa 1 (C1): NBB
Caixa 2 (C2): NNB
Caixa 3 (C3): NNN

Tirem un dau de sis cares:

$$\text{Si surt } 1,2,3 \longrightarrow \text{triem } C1$$
$$\text{Si surt } 4,\ 5 \longrightarrow \text{triem } C2$$
$$\text{Si surt } 6 \longrightarrow \text{triem } C3.$$

De la caixa escollida, triem a l'atzar una bola. Definim l'esdeveniment B si la bola és blanca i N si és bola negra.

Calculeu:

1. *Probabilitat de B.*
2. *Probabilitat de C1 quan sabem que la bola escollida és B.*

Probabilitat condicionada

- **Definició:** Sigui $P(A|B)$ la probabilitat de A condicionada a B,

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

suposant que $P(B) > 0$.

- **Conseqüències**: Assumim que $P(A)$, $P(B) > 0$,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \mid B)P(B) \\ P(A \cap B) &= P(B \mid A)P(A) \end{aligned}$$

Observació

Si $\Omega = \{\omega_i,\ i \in I\}$, I finit o numerable, aleshores $q_i := P(\{\omega_i|A\})$ és una probabilitat.

Exemple

El 80% dels clients d'un Frankfurt fan servir ketchup (K), el 75% fan servir mostassa(M) i el 65% fan servir tots dos ($K \cap M$). Quina és la probabilitat que un consumidor de ketchup faci servir mostassa? I que no en faci servir?

$$P(M|K) = \frac{P(M \cap K)}{P(K)} = \frac{0.65}{0,80} = 0.8125$$

I per tant, $P(M^c|K) = 1 - 0.8125 = 0.1875$.

Exemple

En el meu trajecte diari amb metro, hi ha 2 escales mecàniques, a i b. Definim

$$\begin{aligned} A &= \text{“escala a avariada”}, \\ B &= \text{“escala b avariada”}. \end{aligned}$$

Si $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ *i* $P(A \cap B) = 0.2$. $P(A)$ *és igual a* $P(A \mid B)$?

Independència

Els esdeveniments A i B són independents si es compleix qualsevol de les següents condicions

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Observacions

- Si $P(A), P(B) > 0$, és equivalent dir que

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ o } P(B \mid A) = P(B)$$

- Podem estendre la definció a més de dos esdeveniments. A, B, C són independents si 2 a 2 són independents

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Exemple

d_1, d_2 dos daus, definim $S = d_1 + d_2$ i $D = d_1 - d_2$. Són independents?

$$P(\{S = 2\}) = \frac{1}{36},\ P(\{D = -4\}) = \frac{2}{36}\ \textit{però}\ P(\{S = 2\} \cap \{D = -4\}) = 0$$

$\{S = 2\}$ *i* $\{D = -4\}$ *no són independents*

Exemple

En una estació, definim $A =$ "l'escala mecànica 1 està avariada" i $B =$ "l'escala mecànica 2 està avariada". Si $P(A) = P(B) = \frac{1}{1000}$. Quina és la probabilitat que les 2 escales estiguin avariades?

Compte! A, B, C poden ser independents 2 a 2 però no ho són tots 3.

Exemple

Dau de 4 cares. Esdeveniments: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$

Exemple

S'estima que el 48% dels graus són obtinguts per dones i que el 17.5% de tots els graus són en Economia. El 4.7% de tots els graus corresponen a les dones que es graduen en Economia.

Són els esdeveniments "El graduat és una dona" i "El graduat ho és en Economia" independents?

Propietats

- $\emptyset$ i Ω són independents de tots els altres.
- A és independent de si mateix si i només si $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$
- A i B són independents $\Leftrightarrow$ A^c i B són independents $\Leftrightarrow$ A i B^c són independents $\Leftrightarrow$ A^c i B^c són independents

Teorema de les probilitats compostes

Teorema

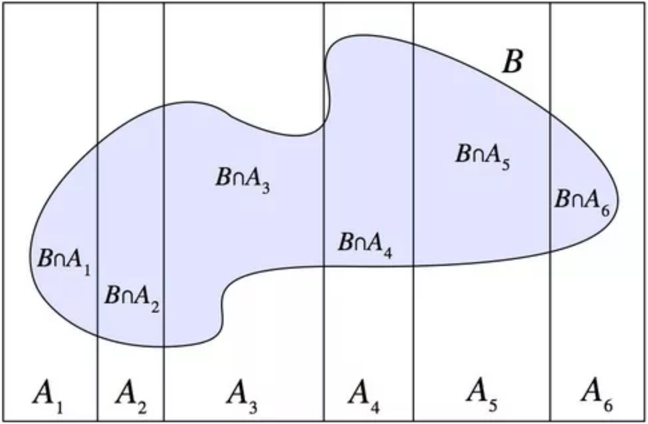
$E_1, E_2, \ldots, E_k$ són esdeveniments tals que $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k-1}) > 0$ aleshores,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_3 \mid E_2 \cap E_1) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot P(E_{k-1} \mid E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_{k-2}) \cdot P(E_k \mid E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_{k-1})$$

Exemple

Tenim 5 urnes. L'urna 1 amb 1 bola blanca(B) i 4 negres(N), la segona amb 2B i 3N, la tercera amb 3B i 2N, la quarta amb 4B i 1 N i la cinquena amb 5B. Traiem una bola de la primera urna i la posem a la segona, traiem després una bola de la segona i la posem a la tercera i així fins el final. Quina és la probabilitat que totes les boles que hem tret siguin blanques?

Teorema de la Probabilitats Totals



Teorema

Sigui $E_1, \ldots E_k$ una partició tal que $P(E_i) > 0$ $i = 1, \ldots, k$ aleshores per A un esdeveniment qualsevol

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$

Exemple

Tenim una urna amb 6 boles numerades de l'1 al 6. Fem una extracció i pintem de negre tantes boles com diu el nombre. Després fem una altra extracció. Quina és la probabilitat que aquesta segona sigui blanca?

Solució: $\frac{5}{12}$

Fórmula de Bayes

La idea és

- Coneixem $P(A_i)$ i $P(B|A_i)$.
- Volem calcular $P(A_i|B)$

Teorema

Siguin $E_1, \ldots E_k$ partició de Ω i B un esdeveniment tals que $P(B)$, $P(E_i) > 0$ $i = 1, \ldots, k$. Aleshores per qualsevol $i = 1, \ldots, k$

$$P(E_i|B) = \frac{P(B|E_i) \cdot P(E_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Exemple

Exemple

S'ha desenvolupat un procediment per detectar un tipus particular d'artritis en individus de més de 50 anys d'edat.
Un 10% dels individus d'aquest grup d'edat pateixen la malaltia.
Quan s'aplica el procediment a individus amb la malaltia confirmada el diagnòstic és correcte en el 85% dels casos.
El procediment es posa a prova amb individus sans de la mateixa edat i obtenim falsos positius del 4%.

Quina és la probabilitat que un individu pateixi artritis si el procediment ha donat positiu?

Solució: 0.7025

Alguns exemples

Problema Màquines

Exemple

Tenim tres màquines C1, C2 i C3 amb productivitats respectives del 20%, el 30% i el 50% per rodes petites. Definim l'esdeveniment

$$A = \text{'la roda és defectuosa'}$$

i sabem que

$$\begin{aligned} P(A|C1) &= 0.01 \\ P(A|C2) &= 0.02 \\ P(A|C3) &= 0.03 \end{aligned}$$

Trobem una roda defectuosa. Quina és la probabilitat que vingui de la màquina C1?

Solució: 0.087.

Problema Test Malaltia

Exemple

En Jon passa per davant de l'hospital i li ofereixen fer-li un test (gratuït) per una malaltia molt infreqüent de la qual no hi ha cap sospita que ell en sigui portador.

La prevalença de la malaltia en la població és de 1 de cada 10000. La potència del test és del 90% (és a dir la $P(+|malalt) = 0.9$). El test té un 10% de possibilitats de fals positiu (és a dir la $P(+|no\ malalt) = 0.1$). Resulta que en Jon es fa la prova i li surt positiu.

Quina és la probabilitat que tingui la malaltia?

Solució: 0.00893.

Problema de les accions

Exemple

Una agència de qualificació examina les accions d'un gran nombre d'empreses. Quan es va investigar el comportament d'aquestes accions l'any passat, es va descobrir que el 25% van experimentar un creixement del seu valor clarament superior a la mitjana, el 25% clarament inferior i el 50% restant es van mantenir al voltant de la mitjana.

El 40% de les accions que van créixer clarament per sobre de la mitjana van ser classificades com "bones adquisicions" per l'agència, al igual que el 20% de les que van créixer al voltant de la mitjana i el 10% de les que van tenir un creixement clarament inferior a la mitjana.

a) *Quina és la probabilitat que una acció triada a l'atzar hagi estat classificada com una "bona adquisició" per part de l'agència?*

b) *I que una acció triada a l'atzar d'entre les classificades com una "bona adquisició" hagi crescut clarament per sobre de la mitjana del mercat?*

Solució: 0.44444.

Problema de Monty Hall (comentat al Sunday New York Times, July 21, 1991)

Monty Hall és un programa de TV de USA. Al final del programa, al concursant li ofereixen triar entre tres portes: A, B, C, amb la informació que darrera d'una d'elles hi ha un cotxe i que cada una de les altres amaga una cabra.

Tries una porta, per exemple la A, però abans d'obrir-la, el presentador (que sap on hi ha el cotxe) obre una de les altres portes on hi ha una cabra i et diu: "Veus, aquí hi ha una cabra, vols canviar la porta que havies triat?"

Quina és la millor estratègia per aconseguir el cotxe? És millor canviar de porta?

Problema de Monty Hall (Solució.)

Definició d'esdeveniments:

- T_A, T_B, T_C triem portes A, B, C;
- C_A, C_B, C_C cotxe és a A, B, C;
- P_A, P_B, P_C presentador obre porta A, B, C;
- E és èxit, guanyem el cotxe.

1. Si el presentador no fes res:

$$E = (T_A \cap C_A) \cup (T_B \cap C_B) \cup (T_C \cap C_B)$$

$$P(E) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Problema de Monty Hall (Solució.)

1. No canviem porta:

$$E = [(T_A \cap C_A \cap P_B) \cup (T_A \cap C_A \cap P_C)] \cup [(T_B \cap C_B \cap P_A) \cup (T_B \cap C_B \cap P_C)] \cup [(T_C \cap C_C \cap P_A) \cup (T_C \cap C_C \cap P_B)]$$

$$P(E) = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ja que $P(T_A \cap C_A \cap P_B) = P(P_B \mid T_A \cap C_A) \cdot P(T_A \cap C_A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}$.

2. Si canviem porta:

$$E = [(T_A \cap C_C \cap P_B) \cup (T_A \cap C_B \cap P_C)] \cup [(T_B \cap C_C \cap P_A) \cup (T_B \cap C_A \cap P_C)] \cup [(T_C \cap C_B \cap P_A) \cup (T_C \cap C_A \cap P_B)]$$

$$P(E) = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{9}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

ja que $P(T_A \cap C_C \cap P_B) = P(T_A \cap C_C) = \frac{1}{9}$.

Problema de l'estudiant deshonest

Exemple

La probabilitat que un estudiant sigui deshonest (per exemple, copiar en un examen) és molt baixa, suposem 0.01*.*
La probabilitat que no n'hi hagi cap en una classe de n pot arribar a ser molt baixa.

Solució: Suposem A_i indica l'estudiant i de la classe es deshonest.
$P(A_i) = 0.01$, de manera que la probabilitat que no sigui deshonest és

$$P(A_i^c) = 1 - 0.01 = 0.99.$$

La probabilitat que no n'hi hagi cap en un grup de n serà (suposem independència)

$$P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = P(A_1^c) \ldots P(A_n^c) = (0.99)^n$$

Problema de l'estudiant deshonest (cont.)

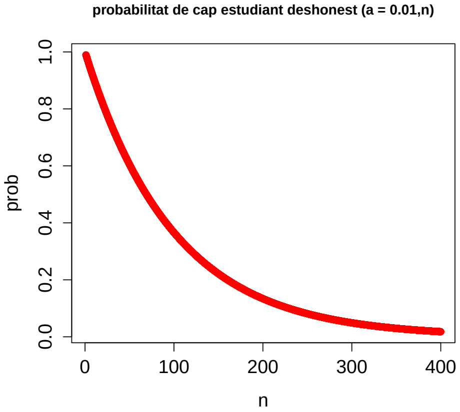


Figura: Probabilitat de cap deshonest en classe de mida n

Problema de seguretat en un tren d'alta velocitat

En l'accident de l'Alvia del 24 de Juliol, 2013. És culpa del maquinista o de l'empresa per deixar tota la responsabilitat de la seguretat en el maquinista?

`http://ccaa.elpais.com/ccaa/2013/08/21/galicia/1377109645_517548.htm`

"Por el contrario, el sistema de seguridad convencional, el ASFA con que operaba el Alvia de Santiago, precisa de señales visibles en la via que sean percibidas e interpretadas por el maquinista."

Si $a = P(A_i) = 0.001$, probabilitat de distracció del maquinista en dia i.

Probabilitat d'accident en n repeticions del viatge?

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = 1 - (1-a)^n$$

Problema de seguretat en un tren d'alta velocitat (cont.)

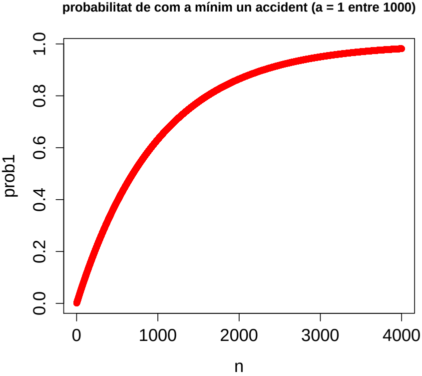


Figura: Molt improbable que passi en un dia, però molt improbable que NO passi en molts dies!

Solució exemples introductoris

Exemple (Accident)

Suposem els esdeveniments:

$A =$ *"Testimoni diu que la matrícula té tres zeros"*

$B =$ *"La matrícula té tres zeros".*

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\bar{B})\cdot P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.9\cdot 0.0036}{0.9\cdot 0.0036 + 0.1\cdot(1-0.0036)} = 0.03 \end{aligned}$$

Solució exemples introductoris

Exemple (Caixes)

- *Per calcular* $P(B)$ *emprem la Llei de les Probabilitats Totals*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|C1)P(C1) + P(B|C2)P(C2) + P(B|C3)P(C3) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{9} \approx 0.44. \end{aligned}$$

- *Per calcular* $P(C1 \mid B)$ *emprem el T. de Bayes*

$$\begin{aligned} P(C1|B) &= \frac{P(P|C1)P(C1)}{P(B|C1)P(C1) + P(B|C2)P(C2) + P(B|C3)P(C3)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$