2.

a) Una matriz cuadrada A es invertible si solo si $\det A \neq 0$.

Demostración:

Una matriz cuadrada A invertible es una matriz producto de matrices elementales:

$A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_m$, pues $\det A = \det E_1 \cdot \ldots \cdot \det E_m$

Por definición, las matrices elementales son regulares, pues por HI ser $\det E_i \; \forall i \in i, \cdot m$ va ser no nula, con lo que $\det A \neq 0$.

b) Si M y N son matrices cuadradas de la misma dimensión i son regulares: $\det M \neq 0$ y $\det N \neq 0$

Usando las propiedades de los determinantes tenemos que:

$\det MN = \det M \cdot \det N$, con lo que $\det MN \neq 0$ porque $\det M \neq 0$ y $\det N \neq 0$.

c) La inversa de la matriz MN es: $(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$

Demostración:

$(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$

$(MN)^{-1}(MN) = N^{-1} \cdot M^{-1}(M \cdot N)$

$(M \cdot N)^{-1}(MN) = N^{-1} \cdot (M^{-1} \cdot M) N = N^{-1} \cdot I \cdot N = I$

$(M \cdot N)^{-1}(MN) = 1$ $\quad (M \cdot N)^{-1}$ es la inversa de $M \cdot N$.

EXAMEN FINAL, ENERO 2014

1. Dos bases del mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Tomamos $v_1, \ldots, v_m$ i $w_1, \ldots, w_m$ bases de E con $m > m$

$w_1 = \alpha_1^1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_1^m v_m$

$w_2 = \alpha_2^1 v_1 + \ldots + \alpha_2 v_m$

$\vdots$

$w_m = \alpha_m^1 v_1 + \ldots + \alpha_m^m v_m$

Consideramos la combinación lineal:

$$\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m = 0$$

Que puede escribirse como:

$$\mu_1 (\alpha_1^1 v_1 + \ldots + \alpha_1^n v_n) + \mu_2 (\alpha_2^1 v_1 + \ldots + \alpha_2^n v_n) +$$

$$+ \ldots + \mu_m (\alpha_m^1 v_1 + \ldots + \alpha_m^n v_n) = 0$$

O bien:

$$v_1 (\alpha_1^1 \mu_1 + \ldots + \alpha_m^1 \mu_m) + \ldots +$$

$$+ v_n (\alpha_1^n \mu_1 + \ldots + \alpha_m^n \mu_m) = 0$$

Como por HI se ha definido el conjunto $v_1, \ldots, v_n$ como base, son linealmente independientes entonces:

$$\alpha_1^1 \mu_1 + \ldots + \alpha_m^1 \mu_m = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1^n \mu_1 + \ldots + \alpha_m^n \mu_m = 0$$

Pero si $m > n$, hay más incógnitas que ecuaciones con lo que hay alguna solución no trivial en contradicción de HI ya que estaban definidos como linealmente independientes.

En conclusión, es necesario $n = m$, c.q.d.

2. Una matriz inversa de una matriz A es la matriz B que cumpla:

$$B \cdot A = I = A \cdot B$$

La matriz B es la inversa de A y se puede escribir como A^{-1}.

La matriz inversa por la derecha de A es la matriz X que cumpla con:

$$X \cdot A = I$$

Análogamente, la matriz por la izquierda de A es la matriz Y que cumpla con:

$$A \cdot Y = I.$$

Si estas dos últimas existen, son las mismas:

$$X = X \cdot I = X \cdot (A \cdot Y) = (X \cdot A) \cdot Y = I \cdot Y = Y$$

Si A y B son dos matrices cuadradas de la misma dimensión y tienen inversa, su producto también tiene inversa:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A\ B)^{-1}(A\ B) = B^{-1} \cdot A^{-1} (A \cdot B) = I$$

Demostración

$$A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_m \qquad A^{-1} = E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1}$$

$$B = E_{m+1} \cdot \ldots \cdot E_s \qquad B^{-1} = E_s^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{m+1}^{-1}$$

$$A \cdot B = E_1 \cdot \ldots \cdot E_m \cdot E_{m+1} \cdot \ldots \cdot E_s$$

$$(E_1 \cdot \ldots \cdot E_s)^{-1} = E_s^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{m+1}^{-1} \cdot E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1$$
$$= B^{-1} \cdot A^{-1}$$

REEVALUACIÓN, FEBRERO 2014

1. $F = G \oplus H$: esto significa que

$\dim F = \dim G + \dim H$ y en consecuencia; es equivalente decir.

i) $G \cap H = \{0\}$

ii) $\forall v \in G + H$, sus componentes son únicas.

Demostración:

i) $F = G \oplus H \Leftrightarrow G \cap H = \{0\}$

$\dim F = \dim G + \dim H$

Aplicando gauss:

$\dim G + H = \dim G + \dim H - \dim G \cap H$

$\dim G \cap H = 0 \rightarrow G \cap H = \{0\}$

ii) cogemos un vector $v \in F$, y suponemos los componentes v_1 y v_2; también w_1, w_2

$v = v_1 + v_2$, $v_1 \in G$ $v_2 \in E$ $\qquad v = w_1 + w_2$, $w_1 \in G$ $w_2 \in E$

$v_1 + v_2 = w_1 + w_2$

$v_1 - w_1 = w_2 - v_2$ pero por HI : $v_1 - w_1 = 0 \rightarrow v_1 = w_2$

$w_2 - v_2 = 0 \rightarrow v_2 = w_2$

2. A y B matrices de dimensión $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} = \left(a_j^i \right)_{\substack{i=1 \ldots n \\ j=1 \ldots m}}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & & b_1^p \\ & & \\ b_\ell^1 & & b_\ell^p \end{pmatrix} = \left(b_j^i \right)_{\substack{i=1 \ldots p \\ j=1 \ldots \ell}}$$

$$a_1^1 b_1^1 + a_1^2 \cdot b_2^1 + a_1^3 \, b_3^1$$

$$A \cdot B = \left(c_s^k \right)$$

$$c_m^p = \sum_{i=1}^{n} a_m^i \cdot b_i^p$$

$$\boxed{c_m^1 = \sum_{i=1}^{n} a_m^i \cdot b_i^1}$$

Si $\exists A^{-1} \Longrightarrow$ Rg n

EXAMEN FINAL, GENER 2013

1. FORMULA DE GRASSMAN PARA SUBESPACIOS:

Sea E_1, E_2 sub espacios vectoriales

$$\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

Demostración:

Si nombramos $m = \dim E_1 \cap E_2$, $r = \dim E_1$, $s = \dim E_2$, $t = \dim E_1 + E_2$; queremos ver $t = r + s - m$

Tomamos $v_1, .., v_m$ base $E_1 \cap E_2$, i la ampliamos a base de E_1: $v_1, .., v_m, u_{m+1}, .., u_r$, y análogamente para E_2: $v_1, .., v_m, w_{m+1}, .., w_s$

Queremos ver que la base de $E_1 + E_2$ es: $v_1, .., v_m, u_{m+1}, .., u_r, w_{m+1}, .., w_s$.

Si son base, habrá que demostrar que son linealmente independientes y que generan el subespacio $E_1 + E_2$.

i) $v_1, .., v_m, u_{m+1}, .., u_r, w_{m+1}, .., w_s$ generan $E_1 + E_2$.

Tomamos vector $x \in E_1 + E_2$, $x = y + z$, $y \in E_1$ y $z \in E_2$

E_1 $\quad y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i u_i \qquad$ E_2 $\quad z = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i + \sum_{i=m+1}^{s} l_i w_i$

$x = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i u_i + \sum_{i=m+1}^{s} l_i w_i$, de manera que cualquier

vector $\in E_1+E_2$ se puede escribir como combinación lineal de

$<(v_1, .., v_m, u_{m+1}, .., u_r, w_{m+1}, .., w_s)>$

ii) $v_1, .., v_m, u_{m+1}, .., u_s, w_{m+1}, .., w_r$ son linealmente independientes.

$x = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i v_i = - \sum_{i=m+1}^{s} l_i w_i$, $x \in E_1 \cap E_2$, pues: $\exists\, \varphi_i$, $i = .., m$

tal que:

E_1 $\quad \sum_{i=1}^{m} \varphi_i v_i + \sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i u_i = 0$, como por HI este conjunto de vectores es base de $\underline{E_1}$, son linealmente independientes

E_2 En el caso particular de $x = 0$.

$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i + \sum_{i=m+1}^{s} l_i v_i = 0$ como por HI este conjunto de vectores es base de E_2, son linealmente independientes. $\square$

2. La matriz inversa de una matriz cuadrada $A_{m \times m}$ es la matriz B que cumple:

$$B \cdot A = I_m = A \cdot B$$

Si la matriz A tiene inversa se dice que es regular, y sólo existe, si existe, una única matriz inversa de la matriz A.

Demostración: si suponemos que B y C son inversas de A:

$$B = I \; B = (C \cdot A) \cdot B = C \; (A \cdot B) = C \; I = C \quad c.q.d.$$

A la matriz inversa la escribimos A^{-1}.

Una manera de calcular la matriz inversa es conseguir la matriz escalonada por filas equivalente a la matriz: $(A \mid I_m)$.

Cuando se llega al resultado $(I_m \mid B)$, B resulta ser la inversa de A.

REEVALUACIÓN, ENERO 2013.

1.

SISTEMA DE GENERADORES (de un espacio vectorial): un sistema de generadores de un espacio vectorial es un conjunto de vectores con los que cualquier vector del espacio vectorial se puede escribir como combinación lineal de estos.

BASE DE UN ESPACIO: un conjunto de vectores de un espacio vectorial E son base de este espacio si cumplen:

i) generadores de E.

ii) un conjunto de vectores linealmente independiente.

Todo sistema de generadores tiene base.

Demostración (para espacios finitamente engendrados)

Si tenemos $\langle\langle v_1, .., v_m \rangle\rangle$ queremos ver que contienen una base. Si $\langle\langle v_1, .., v_m \rangle\rangle$ son linealmente independientes, ya son base.
Si el conjunto son linealmente dependientes $m > 1$ pues si $m = 1$, $v = 0$, el espacio engendrado por $v = 0$, $E = \{0\}$ no tiene base porque el único sistema de generadores es $v = 0$ y es ligado. Si hay un vector v_m combinación lineal de los demás se puede sacar del sistema y el resto $\langle\langle v_1, .., v_{m-1} \rangle\rangle$ continúan siendo un sistema de generadores por su definición.
Si se repite esta argumentación hasta un sistema independiente, y tenemos base.