PRINCIPIOS Y APLICACIONES DE LA FÍSICA

MARGENAU, H., WATSON, W.W. & MONTGOMERY, C.G

Barcelona, Reverté, 1960

Caps. 5-6-7 (págs. 60-105)

CINEMÁTICA Y DINÁMICA

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN DE LOS MOVIMIENTOS. CINEMÁTICA

5-1. Introducción. Describir el movimiento de un cuerpo no es más que hacer corresponder a cada instante la posición que en él ocupa. En el caso de un cuerpo extenso no es cosa fácil, ya que hay que tener en cuenta tanto su orientación respecto a otros objetos, como la posición instantánea, por ejemplo, de su centro de gravedad. La cuestión se simplifica al considerar cuerpos pequeños, llamados "masas puntuales", para los cuales no hace falta tener en cuenta su movimiento de rotación. En este capítulo nos ocuparemos, tan sólo, de las masas puntuales, llamadas también puntos materiales.

La parte de la Mecánica que estudia los movimientos independientes de las fuerzas que los originan, recibe el nombre de *Cinemática* (del griego *kinein,* moverse). Podemos aclarar su objeto con un ejemplo. Observemos una piedra que cae libremente. Conoceremos su movimiento cuando podamos decir dónde se encuentra en cada instante. Los datos obtenidos de la observación pueden recopilarse tal como se indica en la tabla 5-1, en donde la primera línea contiene instantes sucesivos a la iniciación del movimiento y la segunda las distancias correspondientes de la piedra al suelo. La tabla 5-1 puede decirse que representa la cinemática de la piedra.

TABLA 5-1

t	0	1 seg	2 seg	3 seg	4 seg	5 seg
y	122,5 m	117,6 m	102,9 m	78,4 m	44,1 m	0 m

Pero tener que hacer una tabla como ésta para cada clase de movimiento resulta incómodo, por lo que el físico aprovecha los métodos que le proporciona el matemático. Estos métodos son dos. El primero, trazar una *gráfica,* en la cual la distancia y a que está la piedra del suelo se toma en ordenadas, y el tiempo t en abscisas. El resultado lo tenemos en la figura 5-1. El otro método es hallar una función matemática de t que represente las distancias de la tabla 5-1. Ya veremos, más adelante, cómo puede conseguirse esto. De momento diremos que la fórmula

$$y = 122{,}5 - 4{,}9t^2 \tag{5-1}$$

reproduce todos los números de la tabla 5-1, como puede comprobar el estudiante.

La tabla 5-1, figura 5-1 y ecuación (5-1) son tres formas equivalentes de expresar el comportamiento cinemático de la piedra. De entre ellas resulta la más conveniente la ecuación (5-1). Normalmente, por tanto, querremos hallar el desplazamiento como función matemática del tiempo t para cualquier clase de movimiento.

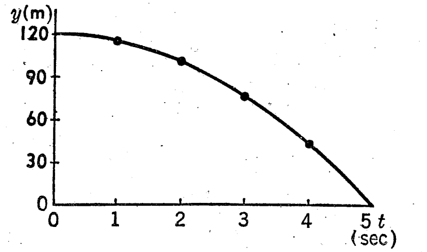

Fig. 5-1. Representación gráfica de las posiciones de una piedra que cae.

Sin embargo, no siempre los problemas que se nos presenten serán tan sencillos como el que acabamos de tratar. Si en lugar de haber dejado caer la piedra libremente la hubiéramos lanzado y, por tanto, describiera una trayectoria curvilínea, las entradas de la tabla 5-1 no nos bastarían, pues ahora es necesario especificar la posición horizontal (coordenada x) y la vertical (coordenada y) en cada instante t. La tabla contendrá, pues, *tres* filas, una para t, otra para x y otra para y. La representación gráfica contendrá *dos* curvas, una que será la representación de x respecto a t y la otra la de y respecto a t. Por último, necesitaremos dos fórmulas como ecuación (5-1), una para x y otra para y. De momento, sin embargo, volvamos al caso sencillo del movimiento rectilíneo.

5-2. Velocidad y aceleración: Derivación. Ordinariamente, la velocidad es la distancia recorrida en unidad de tiempo. Se mide en m/s, km/hora, cm/s o km/minuto. Esta definición es satisfactoria mientras la velocidad no cambie con el tiempo, o sea, si el movimiento es *uniforme.* No es este el caso del movimiento descrito en la tabla 5-1, ni lo es para muchos otros casos de movimiento. Podemos, en todo caso, hablar de velocidad *media* de la piedra y calcularla dividiendo la distancia total recorrida por el tiempo empleado en recorrerla. Poniendo una raya sobre el símbolo v para indicar que se trata de velocidad media, tendremos:

$$\bar{v} = 122{,}5 \text{ m}/5\ s = 24{,}5 \text{ m/s}$$

Resulta evidente que la velocidad media, calculada para el intervalo de 5 s, no es la misma que para cualquier intervalo parcial, pues fácil es ver que la velocidad media durante el primer segundo es de 4,9 m/s, durante el segundo es de 14,7 m/s, etc. En general, si t_1 y t_2 son dos instantes cualesquiera, de forma que $t_2 - t_1$ es el intervalo de tiempo entre ambos; si y_1 e y_2 son las posiciones que ocupaba la piedra en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, la velocidad media durante dicho intervalo es

$$\bar{v}_{21} = (y_2 - y_1)/(t_2 - t_1) \tag{5-2}$$

Esta fórmula puede también escribirse así:

$$y_2 - y_1 = \bar{v}_{21}\,(t_2 - t_1)$$

o, llamando s a la distancia recorrida y t al intervalo de tiempo y suprimiendo los subíndices de v,

$$s = \bar{v}t \tag{5-3}$$

Evidentemente, en la mayoría de los problemas de movimiento no basta conocer la velocidad media. Debemos introducir el concepto de velocidad *instantánea*. Ésta es la *velocidad media para un intervalo de tiempo muy pequeño*. Veamos qué sucede en la ecuación (5-2) cuando hacemos muy pequeña la diferencia $t_2 - t_1$. A primera vista puede parecer que $\bar{v}_{21}$ se haría muy grande; pero esto es erróneo ya que $y_2 - y_1$ también se hace muy pequeño y el cociente se mantiene finito. Usando la notación matemática para *límite*, definimos la velocidad instantánea v por la fórmula

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \tag{5-4}$$

o sea: v es el límite, cuando t_2 tiende a t_1, del cociente

$$(y_2 - y_1)/(t_2 - t_1)$$

Otra manera de dar esta definición es escribir Δy en lugar de $y_2 - y_1$ y Δt en lugar de $t_2 - t_1$, de forma que queda

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

El estudiante recordará, de sus conocimientos de matemáticas, que el segundo miembro de esta igualdad no es más que la *derivada* de y respecto a t,

$$\boxed{v = dy/dt}$$

Este resultado nos pone de manifiesto la ventaja que tiene el poner y en función de t tal como se expresa en la ecuación (5-1). Para obtener la velocidad instantánea, basta con derivar y respecto a t. Así pues, de la ecuación (5-1)

$$v = -4{,}9 \times 2t = -9{,}8t \tag{5-5}$$

Recordemos también que una derivada es un *valor de variación*; así pues, la velocidad puede definirse como la *variación temporal de espacio*. Los signos negativos de la última ecuación significan que y *disminuye* cuando aumenta el tiempo.

Sabemos que la derivada de una función en un punto es la *pendiente* que en dicho punto tiene su representación gráfica. Así, pues, la velocidad instantánea es la pendiente de la curva de la figura 5-1. El movimiento uniforme viene representado por una función de pendiente constante: $y = \text{const} \times t$, y como la constante es la derivada, será la velocidad.

La *unidad* de velocidad instantánea no será, como es lógico, diferente de la de velocidad media. Decir que la velocidad de una bala es de 80 km/min significa que *si* la bala se moviera durante 1 minuto a esta velocidad, *recorrería* 80 kilómetros.

La ecuación (5-5) nos indica que la velocidad es también función del tiempo. Cuando esto sea cierto diremos que el movimiento es *acelerado*, o no uniforme. La palabra "aceleración" la utilizaremos tanto para indicar aumento como disminución de velocidad. La aceleración instantánea es la *variación temporal de velocidad*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{5-6}$$

Luego será la *segunda* derivada del espacio (o desplazamiento) respecto al tiempo. En el caso de la ecuación (5-5), $a = -9{,}8$ unidades; el signo negativo indica que la velocidad *crece* en el sentido negativo de y.

Puesto que la aceleración es la variación de velocidad en unidad de tiempo, su unidad debe ser una unidad de velocidad dividida por una unidad de tiempo, como por ejemplo: el (metro por segundo) por segundo (abreviadamente m/s^2), o el (centímetro por segundo) por segundo (cm/s^2). Físicamente, imaginamos que un movimiento tiene una aceleración de a cm/s^2 cuando su velocidad crece en a cm/s en cada segundo.

En el movimiento que pusimos como ejemplo, la aceleración se mantenía constante con el tiempo; pero, en general, esto no es cierto. Cuando lo es, como en la caída libre; decimos que el movimiento es uniformemente acelerado, o que tiene aceleración constante.

5-3. Integración. En el capítulo anterior hemos visto cómo pueden hallarse la velocidad y la aceleración cuando se da el desplazamiento en función del tiempo, bien sea en forma de gráfica o en forma de función. Pero es más importante el problema de hallar la velocidad y el desplazamiento cuando se conoce la aceleración, pues, frecuentemente, se conoce la fuerza que actúa sobre una partícula, y por la segunda ley de Newton, discutida en el capítulo 2, la fuerza determina la aceleración. Veamos, pues, cómo podemos pasar de conocer a a conocer v e y.

El caso más sencillo es aquel en que $a = 0$, ya que entonces $v = \text{const}$, y el desplazamiento es vt. Si v no fuera constante, tendríamos que utilizar otro procedimiento. Supongamos que un automóvil parte del reposo y que un observador lee el cuentavelocidades a períodos iguales de tiempo (p. ej. cada 10 segundos). Se desea saber qué distancia se ha recorrido al cabo de un cierto tiempo. Ante todo, se prepara una tabla en donde figuren las velocidades medidas y los tiempos correspondientes. Con los datos de la tabla trazamos una gráfica como la de la figura 5-2. En esta gráfica, las ordenadas trazadas en los puntos de 20 s y 30 s por ejemplo, son las velocidades en estos instantes. El área rayada, como es el producto de la ordenada media entre dichos instantes y el intervalo de tiempo, representa, aproximadamente, la distancia recorrida durante los 10 segundos considerados. Si se trazan rectángulos similares para todos los intervalos, la suma de sus áreas es, aproximadamente, la distancia total recorrida. La única imprecisión que tenemos consiste en que la ordenada media no está bien definida.

Esta imprecisión podemos eliminarla subdividiendo las abscisas cada vez más, usando un gran número de intervalos y, por tanto, rectángulos muy estrechos. Pero en tal caso, la suma de las áreas de todos los rectángulos se hace igual al área bajo la curva. Luego resulta que: *el área comprendida entre la curva de velocidad, las ordenadas correspondientes a los instantes t_1 y t_2 y el eje de abscisas, es la distancia recorrida entre los instantes t_1 y t_2.* Recordemos que esta área es la integral.

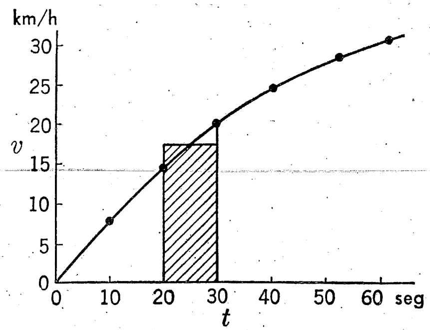

Fig. 5-2. Curva de velocidad.

$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

Ésta es, pues, la respuesta a nuestro problema: para obtener la distancia recorrida cuando conocemos la velocidad, la integramos respecto al tiempo. Así, pues,

$$x = \int v\,dt \qquad (5\text{-}7)$$

Esta integral la debemos transformar en definida poniéndole los límites t_1 y t_2, y x será la distancia recorrida entre t_1 y t_2. Más exactamente, es la diferencia entre el desplazamiento x_2 en el instante t_2 y el x_1 en el instante t_1.

De la misma manera que está relacionada x con v, lo está v con a. Como a está definido como dv/dt, tenemos:

$$v = \int a\,dt \qquad (5\text{-}8)$$

Sin embargo, este resultado no es tan sencillo como parece y hemos de tener cuidado al interpretarlo. Si los límites de la integral son otra vez t_1 y t_2, v será el incremento de velocidad entre dichos instantes, como x, en la ecuación (5-7), era el incremento de espacio recorrido que tenía lugar entre los instantes t_1 y t_2. Así, pues, convendrá sustituir las ecuaciones (5-7) y (5-8) por las siguientes fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \\ v_2 - v_1 &= \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}9)$$

Volviendo a la figura 5-2 observamos que la pendiente de la curva en cada instante es la aceleración. Si representamos gráficamente a en función de t, el área bajo la curva será la velocidad.

5-4. Ejemplos. *a)* La velocidad de un tren en diferentes instantes viene dada en la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Velocidad m/s.	0	2,4	4,8	7,2	9,0	10,2	11,1	11,4	11,4

Se desea conocer la aceleración del tren y el espacio recorrido en cada instante.

A la vista de la tabla aparecen varios hechos. Durante los 3 primeros minutos el tren gana incrementos iguales de velocidad y por tanto tiene aceleración constante, siendo su valor 2,4 m s^{-1} min^{-1}, que son 144 m/min^2 ó 0,40 m/s^2. Después de los 3 primeros minutos la aceleración disminuye y a los 7 minutos, se anula. Durante el octavo minuto, el movimiento es uniforme.

Para obtener la distancia recorrida podríamos proceder de la manera siguiente: la *velocidad media* durante el primer minuto es de 1,2 m/s; luego la distancia recorrida durante el primer minuto será 1,2 m/s × 60 s = 72 m. La velocidad media en el segundo minuto es de 3,6 m/s, y la distancia recorrida 216 m. Sumando estas distancias parciales obtenemos el espacio recorrido en cada instante.

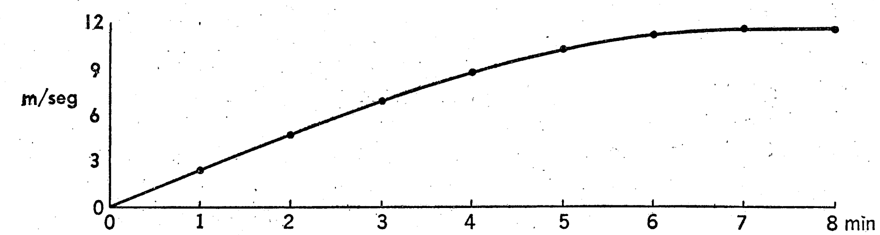

Fig. 5-3. Curva de velocidad.

Sin embargo, será mejor llevar los datos de la tabla a la gráfica de la figura 5-3. Hasta el tercer minuto la gráfica es una recta y, por lo tanto, la pendiente, que es la derivada, y en consecuencia la aceleración, es constante. La última parte de la curva es recta y horizontal y, por ello, característica de movimiento uniforme.

El espacio recorrido es el área bajo la curva. Hasta el final del tercer minuto podemos calcularlo utilizando la fórmula del área del triángulo; resulta:

$$1/2 \times 7{,}2 \text{ m/s} \times 3 \text{ min} = 10{,}8 \text{ m min/s} = 10{,}8 \times 60 \text{ m}$$

Para hallar el espacio recorrido hasta un instante posterior (cuando la gráfica ya no es recta) habría que medir el área.

b) Resulta más sencillo cuando se da v como función matemática de t. Supongamos que $v = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ en donde todas las c son constantes conocidas. Tenemos, inmediatamente $a = dv/dt = c_1 + 2c_2 t$. Por otra parte, el espacio recorrido entre los instantes t_1 y t_2, al cual llamamos $x_2 - x_1$, vemos que es:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)\,dt \\ &= \Big[c_0 t + {}^1\!/_2 c_1 t^2 + {}^1\!/_3 c_2 t^3\Big]_{t_1}^{t_2} \\ &= c_0 t_2 + {}^1\!/_2 c_1 t_2^2 + {}^1\!/_3 c_2 t_2^3 - c_0 t_1 - {}^1\!/_2 c_1 t_1^2 - {}^1\!/_3 c_2 t_1^3 \end{aligned}$$

Si quisiéramos hallar el espacio recorrido desde el principio, o sea desde el instante $t = 0$, bastará poner $t_1 = 0$ en el último resultado.

5-5. Integración *(continuación)*. Los estudiantes que no hayan visto todavía integrales definidas pero que saben que la integración es la operación inversa de la diferenciación, pueden obtener los mismos resultados de la manera siguiente: si $v = dx/dt$, entonces

$$x = \int v\, dt \tag{5-7}$$

Análogamente, como $a = dv/dt$

$$v = \int a\, dt \tag{5-8}$$

A fin de calcular estas integrales, debemos dar los subintegrandos [v en la ecuación (5-7), a en la (5-8)] en función de t. Por ejemplo, supongamos que $a = ct^n$, en donde n es un número entero y c una constante dada. La ecuación (5-8) nos da entonces

$$v = \frac{ct^{n+1}}{n+1} + C$$

siendo C la constante de integración. Si en esta ecuación hacemos $t = 0$, queda $v_{t=0} = C$, y esto nos permite identificar C con v_0, que es la velocidad en el instante $t = 0$. Así, pues,

$$v = c\frac{t^{n+1}}{n+1} + v_0 \tag{5-7'}$$

Sustituyendo ésta en (5-7) resulta:

$$x = \int \left(c\frac{t^{n+1}}{n+1} + v_0\right) dt = \frac{ct^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + v_0 t + C$$

y haciendo $t = 0$, vemos que la actual $C = x_0$. Resulta, pues,

$$x = \frac{ct^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + v_0 t + x_0 \tag{5-8'}$$

5-6. Caída libre. Anteriormente a GALILEO GALILEI se creía que los cuerpos pesados caían más de prisa que los cuerpos ligeros. GALILEO demostró (partiendo de ciertas observaciones, dejando caer objetos desde la torre inclinada de Pisa) que tal creencia no estaba refrendada por los hechos. Desde luego, es cierto y está de acuerdo con la experiencia, que una pluma cae más lentamente que una bola de acero, pero esto no ocurre en el vacío. La resistencia del aire es quién produce la diferencia: en el vacío, todos los cuerpos caen "igualmente de prisa".

Esto no significa, sin embargo, que los cuerpos caigan con velocidad constante. El gran descubrimiento de GALILEO muestra que caen con *aceleración constante*. Mediante cuidadosas observaciones llevadas a cabo con el plano inclinado, el cual, según veremos en el párrafo 6-6, tiene por efecto reducir la aceleración a resultados mensurables manteniéndola constante, GALILEO determinó la aceleración en la caída libre de un cuerpo, encontrando que valía aproximadamente, 980 cm/s². A este valor se le acostumbra a llamar g. Varía ligeramente de un lugar a otro por las razones que más adelante veremos. Para nuestros fines actuales usaremos el valor que acabamos de dar.

Las *leyes de la caída libre* pueden ya desarrollarse fácilmente. Partiendo de

$$a = dv/dt = g, \text{ que es constante,} \tag{5-10}$$

tenemos, integrando,

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} g\, dt = g(t_2 - t_1) \tag{5-11}$$

Si el cuerpo parte del reposo, $v_1 = 0$ en el instante $t_1 = 0$, y tenemos,

$$v_2 = gt_2$$

que puede escribirse:

$$v = gt \tag{5-12}$$

ya que v_2 es la velocidad en el instante t_2 y ya no hay necesidad de conservar el subíndice.

También podemos integrar la ecuación $dv/dt = g$ tomando la integral indefinida

$$v = gt + \text{const} \tag{5-13}$$

siempre que no nos olvidemos de la constante. El significado físico de la constante de integración puede verse siempre por la expresión en que figura. En nuestro caso, la constante es igual a v cuando $t = 0$. Resulta, pues, ser la velocidad inicial, la cual podemos representar por v_1 como antes o, si queremos, por v_0. Usando esta última notación, la ecuación (5-13) toma la forma:

$$\boxed{v = v_0 + gt} \tag{5-14}$$

El espacio recorrido se obtiene mediante una nueva integración, tal como vimos en la ecuación (5-7). Tenemos, pues,

$$y = \int (v_0 + gt)dt = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 + \text{const}$$

o lo que es igual,

$$\boxed{y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2} \tag{5-15}$$

Obsérvese, también, que las ecuaciones (5-14) y (5-15) podrían haberse obtenido de las ecuaciones (5-7') y (5-8') sin más que hacer $x = y$, $c = g$ y $n = 0$.

Las ecuaciones (5-14) y (5-15) permiten el cálculo de la velocidad y del espacio recorrido en caída libre, en cualquier *instante*. No nos contestan la pregunta: ¿Qué velocidad adquiere un cuerpo que cae cuando ha recorrido una *distancia* dada? Para responder a esta pregunta obtendremos una fórmula válida, sin más que eliminar t entre las ecuaciones (5-14) y (5-15). De la ecuación (5-14),

$$t = \frac{v - v_0}{g}$$

y sustituyendo esta última en la ecuación (5-15), resulta:

$$y - y_0 = \frac{v_0(v - v_0)}{g} + \frac{1}{2}\, g\, \frac{(v - v_0)^2}{g^2} = \frac{1}{2}\, \frac{(v^2 - v_0^2)}{g}$$

Podemos simplificar este resultado llamando s al espacio recorrido en la caída $y - y_0$, y luego multiplicar los dos miembros de la ecuación por $2g$. Tenemos, entonces,

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2gs} \qquad (5\text{-}16)$$

Esta fórmula vale para *cualquier* movimiento uniformemente acelerado, sin más que sustituir g por el valor de su aceleración a.

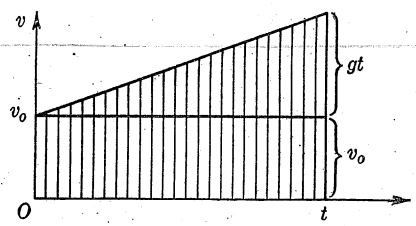

Fig. 5-4. Área rayada (distancia y-y_0) = = rectángulo (v_0t) + triángulo ($\frac{1}{2}t \cdot gt$).

Las ecuaciones (5-14), (5-15) y (5-16) contienen la teoría completa del movimiento uniformemente acelerado, del cual la caída libre es un caso particular. El estudiante debe aprenderlas de memoria. La ecuación (5-14) significa que la velocidad sufre aumentos iguales en iguales intervalos de tiempo; la (5-15) expresa que el área del triángulo es igual al semiproducto de su base por su altura (véase fig. 5-4); la (5-16) no tiene ya una interpretación tan sencilla.

5-7. Ejemplo. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s.

a) ¿Qué velocidad lleva a los 3 s?
b) ¿A qué altura se halla a los 3 s?
c) ¿A qué altura llegará?
d) ¿Cuánto tiempo estará en el aire?
e) ¿Qué velocidad llevará cuando haya subido 3 m?

Antes que nada debemos determinar cuál es el sentido que tomaremos como positivo. Tomemos las y positivas hacia arriba, como siempre. Entonces la aceleración g será negativa, o sea: $g = -980$ cm/s² $= -9{,}8$ m/s².

El apartado *a)* se contesta haciendo uso de la ecuación (5-14).

$$v = 20 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 3 \text{ s} = -9{,}4 \text{ m/s}$$

Luego la velocidad está dirigida hacia abajo y su magnitud es de 9,4 m/s.

La solución del apartado *b)* se basa en la ecuación (5-15). Aquí, $y_0 = 0$ y tenemos:

$$y = 20 \text{ m/s} \times 3 \text{ s} - 4{,}9 \text{ m/s} \times 9 \text{ s} = 15{,}9 \text{ m}$$

Cuando la piedra está en su posición de máxima altura, su velocidad es nula. El tiempo correspondiente lo despejamos de la ecuación (5-14), y tenemos:

$$0 = 20 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times t$$

de donde,

$$t = 20/9{,}8 = 2{,}04 \text{ s}$$

Para obtener la posición de la piedra en este instante, sustituímos t por 2,04 s en la ecuación (5-15), lo cual nos da $y = 40{,}8$ m $- 20{,}4$ m $= 20{,}4$ m como solución al apartado *c)*.

El apartado *d)* lo podemos contestar viendo que $y = 0$ cuando la piedra vuelve hacia el suelo. Así, pues, usando la ecuación (5-15), tenemos:

$$0 = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, $t = 0$ y $t = -2v_0/g$. La primera es trivial, pues corresponde al instante inicial, cuando se lanza la piedra. La segunda es la que nos interesa:

$$t = -\frac{40 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}} = 4{,}08 \text{ s.}$$

Ya vimos que el tiempo de subida era de 2,04 s y ahora vemos que el tiempo de bajada es igual al de subida.

La solución a la pregunta *e)* requiere el uso de la ecuación (5-16):

$$v^2 - (20 \text{ m/s})^2 = -19{,}6 \text{ m/s} \times 3 \text{ m}$$

Luego $v^2 = 341{,}2$ m²/s² y $v = 18{,}5$ m/s.

5-8. Movimiento en un plano. La velocidad y la aceleración como vectores. Hasta ahora solamente hemos considerado movimientos rectilíneos. El caso más general de movimiento no es el limitado a una línea recta, sino que tiene lugar en tres dimensiones y precisamos conocer x, y, z en cada instante. Un ejemplo de lo anteriormente dicho es el movimiento de un

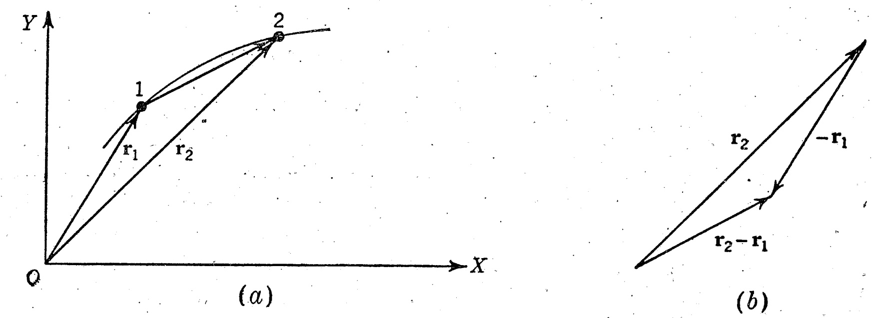

Fig. 5-5. La velocidad como vector.

proyectil, el cual describe una curva que se mantiene predominantemente en un plano vertical, pero se aparta de él a causa de la rotación de la Tierra. Este caso, de todas formas, es demasiado difícil para ser tratado en este libro, y como la desviación del plano original es muy pequeña y, por otra parte, muchos otros movimientos de interés tienen lugar en dos dimensiones, nos limitaremos a estudiar el *movimiento en un plano*.

Para ello, es necesario que tengamos en cuenta la naturaleza vectorial de la velocidad y la aceleración. En la figura 5-5 la curva representa la trayectoria de una partícula móvil. Los puntos 1 y 2 son sus posiciones en los instantes t_1 y t_2. En cada instante, el desplazamiento de la partícula del origen viene representado por un vector trazado desde el origen de coordenadas, tal como indican los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Las dos componentes rectangulares del vector $\mathbf{r}$ son x e y, que son funciones del tiempo.

La velocidad media se define exactamente igual que en la ecuación (5-2), salvo que hemos de sustituir el espacio unidimensional y por el vector de posición $\mathbf{r}$. Así, pues, la velocidad media de la partícula móvil entre las posiciones 1 y 2 es:

$$\mathbf{v}_{21} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} \qquad (5\text{-}17)$$

La diferencia del numerador es ahora una *diferencia de vectores;* luego $\mathbf{v}_{21}$ es un vector. Esta diferencia de vectores, como se ve en la figura 5-5*b*, es el vector que va del punto 1 al punto 2. Al dividir su longitud por $t_2 - t_1$, representará la velocidad media que buscamos. Para hallar la velocidad media en una trayectoria curvilínea deberemos utilizar siempre este procedimiento gráfico; no hay ninguna fórmula general que resuelva el problema.

A continuación definimos la velocidad *instantánea*, siempre de conformidad con nuestros anteriores desarrollos. Podemos aplicar la ecuación (5-4) sin más que sustituir y por $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{5-18}$$

Esto nos indica que hemos de formar el vector diferencia $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ cuando el punto 2 se va acercando al punto 1. Pero vemos que en el límite, la *dirección* de este vector será la tangente a la curva en el punto 1 y su longitud será infinitamente pequeña. Si dividimos su longitud por la otra cantidad infinitamente pequeña $t_2 - t_1$, resulta un cociente finito que no es más que la longitud de arco recorrido referida a la unidad de tiempo, y vendrá medido en cm/s, m/s o cualquier otra unidad similar. De aquí, el importante teorema:

La velocidad instantánea de una partícula que se mueve sobre una curva es un vector, tangente a la curva en el punto considerado y de magnitud igual a la longitud de arco recorrido referida a la unidad de tiempo.

A la longitud de arco recorrido referida a la unidad de tiempo, prescindiendo de la dirección, le llamamos *velocidad escalar;* es la magnitud del vector velocidad.

La ecuación (5-18) puede también escribirse en forma de derivada:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \tag{5-18'}$$

pero no debemos nunca olvidar el proceso mediante el cual se ha obtenido la *diferencial de un vector* $d\mathbf{r}$.

La aceleración también es un vector. Podemos definirlo, formalmente, como antes:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \tag{5-19'}$$

pero para ver su significado debemos escribirla en forma más explícita, de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{5-19}$$

La figura 5-6*a* nos muestra todo lo que esta expresión entraña. Las velocidades, construídas de acuerdo con el teorema que acabamos de demostrar, se trazan en los puntos 1 y 2. La ecuación (5-19) nos exige formar su diferencia, y así lo hacemos en la figura 5-6*b*. El vector $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$,

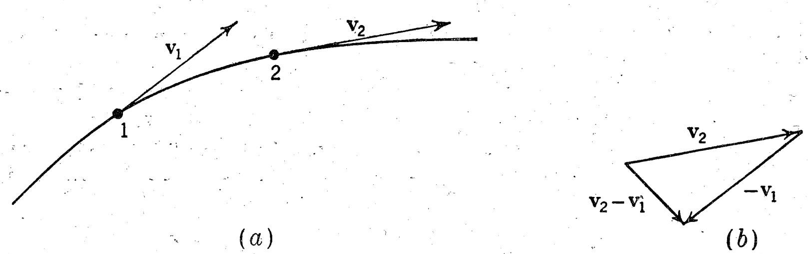

Fig. 5-6. La aceleración como vector.

dividido por $t_2 - t_1$, es la aceleración media durante el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2. La aceleración *instantánea* en el instante t_1, se obtiene acercando el punto 2 al punto 1. Mientras hacemos esto, el vector diferencia $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ va cambiando de dirección mientras disminuye su magnitud, y no podremos decir, en general, cuál será su posición límite. Solamente será posible en ciertos tipos especiales de movimiento, tal como el que estudiaremos en el próximo párrafo.

Si el movimiento es rectilíneo, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ están sobre la misma recta, y la definición (5-19) se reduce a la ordinaria de la ecuación (5-6).

Finalmente, digamos unas palabras acerca de la velocidad *relativa*. Es este un término que se usa para describir el movimiento de un objeto respecto a otro. Supongamos que un cuerpo A tenga, en un instante dado, una velocidad $\mathbf{v}_A$ y un cuerpo B tenga, en el mismo instante dado,

una velocidad $\mathbf{v}_B$, estando ambas velocidades referidas a un mismo sistema de referencia como, por ejemplo, la superficie terrestre. La velocidad relativa de B respecto a A es, entonces, $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$. Por ejemplo, si un avión tiene una velocidad de 400 km/hora hacia el Norte (referida al suelo) mientras sopla viento del Oeste de velocidad 100 km/hora, la velocidad del avión relativa al aire es $\sqrt{400^2 + 100^2}$ km/hora y su dirección forma un ángulo $\vartheta = \text{arc tg } 100/400$ con el Norte.

En realidad, *todas las velocidades son relativas.* La teoría de la relatividad nos dice que es imposible saber si un cuerpo está en reposo o no lo está.

5-9. Movimento circular uniforme; aceleración. El movimiento plano más sencillo es el giro de una partícula a velocidad escalar constante, como es el caso de una piedra en una honda o el de una partícula de polvo en el

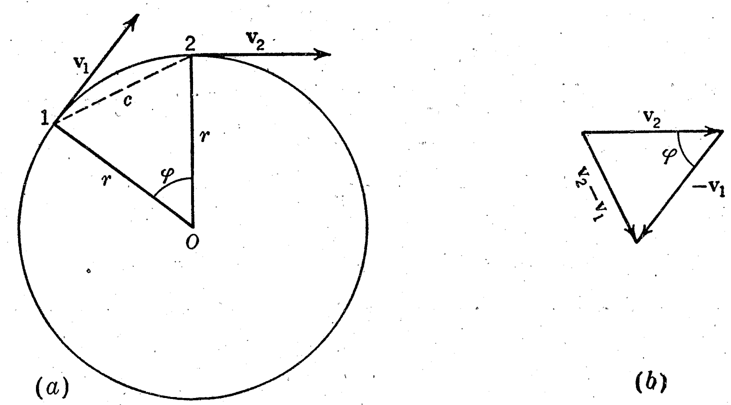

Fig. 5-7. Aceleración en un movimiento circular uniforme.

borde de la hélice de un avión. Su trayectoria es una circunferencia y, en tiempos iguales, recorre arcos de circunferencia iguales. A este movimiento se le llama *movimiento circular uniforme*.

A pesar de este nombre no se trata, en realidad, de un movimiento uniforme pues la partícula, según veremos, tiene aceleración. En efecto: la velocidad escalar es constante; pero como el vector velocidad cambia continuamente de dirección, el *vector aceleración* no es nulo. Para ver esto, consideremos la figura 5-7*a*.

En la posición 1, la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}_1$, tangencial a la circunferencia. En el 2 es $\mathbf{v}_2$, y los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tienen la misma longitud v. Para hallar la aceleración [cfr. ec. (5-19)] formaremos primero el vector $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Esto lo hacemos en la figura 5-7*b*. Obsérvese que el ángulo φ en la figura 5-7*b* es igual al φ de la figura 5-7*a*, pues los vectores velocidad son perpendiculares a los radios r. Considerando triángulos semejantes, podemos decir que:

$$\text{Longitud de } \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1/\text{longitud de } \mathbf{v}_1 = c/r$$

llamando c a la cuerda dibujada en línea de trazos en la figura 5-7*a*. La longitud de $\mathbf{v}_1$ es v, y la de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ la representaremos por Δv. Entonces:

$$\Delta v = cv/r \tag{5-20}$$

Según la definición de aceleración [véase también ec. (5-19)] la magnitud de **a** es:

$$a = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta v}{t_2 - t_1} \tag{5-21}$$

Veamos, pues, qué le pasa a Δv cuando $t_2 \to t_1$. Evidentemente, el ángulo φ se hace cada vez menor y c, en la figura 5-7*a*, a medida que se hace más pequeño, va tendiendo al arco s entre los puntos 1 y 2. En otras palabras: en el límite, $c \to s = v\,(t_2 - t_1)$. Luego por la ecuación (5-20):

$$\lim_{t_2 \to t_1} \Delta v = \frac{v^2(t_2 - t_1)}{r}$$

y en vista de la ecuación (5-21), que nos dice que $a = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{v^2(t_2 - t_1)}{r(t_2 - t_1)}$,

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}} \tag{5-22}$$

Ésta nos da la magnitud de **a**.

Su dirección puede hallarse de la manera siguiente: cuando t_2 tiende a t_1, el ángulo φ tiende a cero. Por tanto, la dirección de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, que es la de **a**, tiende a ser perpendicular a $\mathbf{v}_1$. Examinando la figura 5-7*a* vemos que si **a** es perpendicular a $\mathbf{v}_1$, estará dirigido hacia O. Luego hemos demostrado que:

Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una aceleración de magnitud v^2/r, la cual está siempre dirigida hacia el centro del círculo.

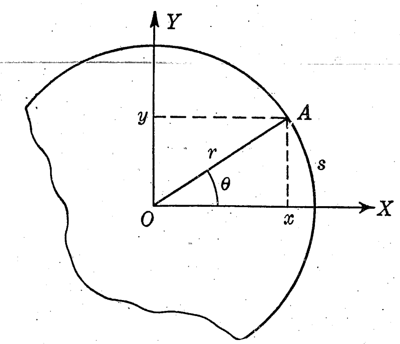

Fig. 5-8. x e y en el movimiento circular uniforme.

Esta aceleración, aun cuando tenga magnitud constante, cambia continuamente de dirección y, por tanto, no es un vector constante. Se le llama *aceleración centrípeta* (del latín *centrum*, centro; y *petere*, buscar).

Para comprender el significado físico de este resultado debe observarse que si la partícula no tuviera aceleración se movería a lo largo de la tangente en el sentido de $\mathbf{v}_1$. Para mantenerla sobre la circunferencia, debe aplicársele una aceleración hacia el centro.

5-10 Movimiento circular uniforme *(continuación)*. La posición de la partícula puede estudiarse de distintas maneras. La más sencilla es introducir un ángulo ϑ, como se hace en la figura 5-8, el cual mide el ángulo que forman el radio vector de la posición instantánea de la partícula A con el eje X. Supongamos ϑ medido en radianes. La variación temporal de ϑ

$$\omega = d\vartheta/dt \tag{5-23}$$

recibe el nombre de *velocidad angular* de A. Aun cuando puede demostrarse que es un vector, su naturaleza vectorial no nos concierne aquí. Si el movimiento es circular uniforme, ω debe ser constante.

El intervalo de tiempo durante el cual A da una vuelta completa, recibe el nombre de *período;* será:

$$\boxed{P = 2\pi/\omega} \tag{5-24}$$

ya que una vuelta completa corresponde a un ángulo 2π. El recíproco del período es el número de vueltas, o ciclos, por segundo; se le llama *frecuencia* de giro. Se representa por f.

$$\boxed{f = 1/P = \omega/2\pi} \tag{5-25}$$

De aquí resulta que *la velocidad angular es el producto de* 2π *por la frecuencia.*

Además, si el radio de la circunferencia es r y el arco limitado por el eje X y A es s, resulta de la figura 5-8 que

$$\boxed{s = r\vartheta} \tag{5-26}$$

Puesto que la velocidad escalar de A es $ds/dt = v$, la ecuación (5-23) combinada con la ecuación (5-26) nos dice que:

$$\boxed{v = r\,d\vartheta/dt = r\omega} \tag{5-27}$$

Las ecuaciones de (5-23) a (5-27), aun siendo tan sencillas y deduciéndose tan fácilmente, son tan frecuentemente usadas en Física que el estudiante debe estudiar a fondo su significado hasta conseguir manejarlas con absoluta soltura.

En lugar de utilizar el ángulo ϑ, también se puede expresar el movimiento por medio de sus coordenadas rectangulares x e y, como se indica en la figura 5-8. En ella vemos que

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

Recordando las fórmulas:

$$\frac{d(\cos\vartheta)}{d\vartheta} = -\,\mathrm{sen}\,\vartheta \qquad \frac{d(\mathrm{sen}\,\vartheta)}{d\vartheta} = \cos\vartheta$$

y también

$$\frac{d(\cos\vartheta)}{dt} = \frac{d(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{dt}$$

encontramos,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\,r\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt} = -\,r\omega\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \frac{dy}{dt} &= r\omega\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

Éstas son, respectivamente, las componentes x e y de la velocidad **v**, o sea, v_x y v_y. De estas dos ecuaciones deducimos:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$$

que es la misma que la ecuación (5-27).

Derivando otra vez las ecuaciones (5-29) obtenemos las componentes de la aceleración:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -r\omega^2\cos\vartheta = -\frac{v^2}{r}\cos\vartheta \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2 \operatorname{sen}\vartheta = -\frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}30)$$

Obsérvese cómo concuerda esto con las conclusiones del párrafo anterior. En efecto,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}$$

En virtud de las relaciones (5-24), (5-25) y (5-27) la aceleración centrípeta también puede expresarse de las siguientes maneras equivalentes:

$$a = v^2/r = \omega^2 r = 4\pi^2 f^2 r = 4\pi^2 r/P^2 = v\omega \qquad (5\text{-}31)$$

PROBLEMAS

1. El extremo del vástago de un émbolo tarda 1/2 s en recorrer los 1,5 m que hay desde el centro al extremo de su carrera. ¿Cuál es su velocidad media: *a)* durante el primer 1/2 s; *b)* durante el primer segundo; *c)* durante el primer 1,5 s; *d)* durante los dos primeros segundos?

2. Experimentalmente encontramos que un cierto movimiento viene representado por la fórmula

$$x = 4\,\text{m} + 2\,\text{m/s} \times t + 3\,\text{m/s}^2 \times t^2 - 1\,\text{m/s}^3 \times t^3$$

expresando t en segundos. Hállense la velocidad y la aceleración, en cualquier instante, por derivación. Trácense tres gráficas en papel cuadriculado representando x, v y a en función de t desde 0 hasta 4 s.

3. Contando el número de cuadrados limitados por la curva a del problema 2, demostrar que

$$\int_0^{4\text{s}} a\,dt = v - v_0$$

a los 4 s. Téngase en cuenta que cuando a se hace negativa, el área entre la curva y el eje de las t también debe tomarse negativa.

4. Contando el número de cuadrados bajo la curva v del problema 2, demostrar que

$$\int_0^{4\text{s}} v\,dt = x - x_0$$

5. Un cuerpo se mueve a lo largo del eje X con una aceleración

$$a = +6\,\text{cm/s}^3 \times t$$

midiendo t en segundos. A las doce (12:00) en punto está 50 cm a la derecha del origen y tiene una velocidad de 10 cm/s dirigida hacia la *izquierda*. Hállense la velocidad y posición del cuerpo a las 12:00:02, y a las 12:00:04.

6. Calcular la velocidad media del cuerpo del problema 5 para los siguientes intervalos de tiempo: *a)* de 12:00:00 a 12:00:02; *b)* de 12:00:02 a 12:00:04; *c)* de 12:00:00 a 12:00:04.

7. Un cuerpo que se mueve en línea recta con una velocidad de 50 m/s empieza a perder velocidad de manera uniforme. Al cabo de 3 s su velocidad es de 20 m/s. *a)* ¿Qué tiempo transcurrirá hasta que el cuerpo se detenga? *b)* ¿Qué camino habrá recorrido el móvil antes de pararse?

8. Un cierto movimiento viene representado por $x = A$ sen ωt siendo $A = 20$ cm,

$$\omega = 3 \text{ radián/s}$$

a) Represéntese gráficamente x en función de t. *b)* Calcúlese v y represéntese v en función de t. *c)* Calcúlese a y represéntese a en función de t.

9. Repítase el problema 8 tomando ahora $x = A$ *sen* $(\omega t - \alpha)$. Tómense los mismos valores para A y ω y tómese $\alpha = \pi/4$.

10. Trácese una gráfica, *a)* de a en función de t; *b)* v en función de t; *c)* x en función de t para un movimiento uniformemente acelerado.

11. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 400 m/s. *a)* ¿Dónde estará al cabo de 5 s? *b)* ¿Cuánto tiempo estará subiendo? *c)* ¿A qué altura llegará? *d)* ¿Con qué velocidad chocará con el suelo? (Despréciese la resistencia del aire.)

12. Desde el borde de un precipicio se lanza verticalmente hacia abajo una piedra con una velocidad inicial de 10 m/s. ¿Cuándo y a qué velocidad alcanzará el fondo del precipicio que está a 150 m? (Despréciese la resistencia del aire.)

13. Un pequeño cuerpo se desliza hacia abajo y sin rozamiento por una pista inclinada 30° respecto a la horizontal Hallar: *a)* Su velocidad al cabo de 4 s. *b)* La distancia recorrida en el cuarto segundo.

14. Para hallar la profundidad de un pozo tiramos una piedra dentro de él. Se percibe el ruido del choque con el fondo 4 s después de haberla soltado. *a)* Calcúlese la profundidad del pozo suponiendo que el sonido se propaga con velocidad infinita. *b)* Calcúlese la profundidad del pozo suponiendo que la velocidad del sonido es de 300 m/s. (Esto nos lleva a una ecuación cuadrática.)

15. Un tren de carga parte del reposo y alcanza una velocidad de 15 km/hora cuando lleva recorridos 3 km a aceleración constante. *a)* Hallar dicha aceleración. *b)* Expresarla en m/s².

16. Un globo se eleva verticalmente a una velocidad de 5 m/s y cuando está a una altura de 20 m, suelta un saco de arena de 5 kg. *a)* Calcular la posición y velocidad del saco en los siguientes tiempos a partir del lanzamiento: 1/4 s, 1/2 s, 1 s, 2 s. *b)* ¿Cuánto tiempo tardará el saco en llegar al suelo? *c)* ¿Con qué velocidad chocará?

17. ¿Qué velocidad alcanza un cuerpo al caer 120 m partiendo del reposo? (Despréciese la resistencia del aire.)

18. ¿En qué cantidad aumenta la velocidad de caída de un cuerpo al recorrer 120 m si la velocidad inicial era de 5 m/s?

19. La velocidad de un cuerpo crece con la distancia según la ley $v = bx$, donde b es constante. Calcúlese la aceleración en un punto cualquiera x. (NOTA: Téngase en cuenta que $dv/dt = dv/dx \cdot dx/dt = v\,dv/dx$.)

20. La ley de Galileo para la caída libre puede escribirse: $v = \text{const} \times t$. Primeramente, en una formulación errónea, Galileo propuso la ley $v = \textit{const} \times x$, siendo x la distancia de caída. Demostrar que esto no corresponde a una aceleración constante; demostrar que nos llevaría a la fórmula $x = Ae^{bt}$, en donde A y b son constantes.

21. Una partícula describe un movimiento circular uniforme de período 2 s en un círculo vertical de radio 1,5 m. En el instante $t = 0$ está en el punto más alto del círculo y moviéndose hacia la derecha. ¿Cuál es la velocidad media: *a)* durante el primer medio segundo; *b)* durante el primer segundo; *c)* durante una vuelta?

22. La velocidad de un avión relativa al viento es de 490 km/hr Norte. El viento tiene una velocidad de 70 km/hr del Noroeste. Hallar la velocidad del avión respecto al suelo.

23. Un bote cruza un río de 1 km de ancho navegando contra corriente, de forma que se mueve hacia el punto de la orilla contraria que está justo en frente del punto de partida. La corriente tiene una velocidad de 5 km/hr y la travesía dura 15 minutos. ¿Qué ángulo forma la quilla con la orilla? ¿Cuál es la velocidad del bote relativa al agua? ¿Qué distancia recorre en realidad?

24. Supóngase que las gotas de lluvia caen verticalmente hasta el suelo. ¿Por qué debe correr una persona bajo la lluvia inclinando hacia delante su paraguas? (Determínese la velocidad *relativa* de una gota respecto al corredor.)

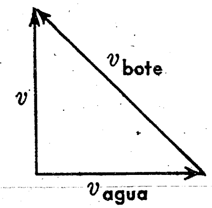

Fig. 5-9. Problema 23.

25. Calcúlese la aceleración centrípeta de la partícula del problema 21.

26. Un cuerpo que describe un movimiento circular uniforme tiene un período de 6 s y una velocidad escalar de 4 m/s. Calcúlese su frecuencia, su velocidad angular y su aceleración centrípeta.

27. Hállese la aceleración de una partícula que se mueve sobre una circunferencia de 20 cm de radio. En un instante dado su velocidad escalar es de 37,5 cm/s y va aumentando a razón de 25 cm/s^2 a lo largo de la trayectoria. (NOTA: La aceleración total es el vector suma de la aceleración centrípeta y de la aceleración a lo largo de la trayectoria.)

28. CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695), estableció lo siguiente en forma de anagrama: Si un cuerpo se mueve sobre la circunferencia de un círculo con una velocidad escalar igual a la que adquiriría cayendo a lo largo de medio radio del círculo, entonces su aceleración centrípeta es igual a la aceleración en caída libre. Probarlo.

CAPÍTULO 6

FUERZA Y ACELERACIÓN. DINÁMICA[1]

Inercia

6-1. Introducción. Primera y segunda ley de Newton. La primera ley de Newton establece que un cuerpo, sobre el cual no actúe ninguna fuerza, se mueve con velocidad constante. La velocidad debe considerarse en su sentido vectorial, y el movimiento, por tanto, tendrá lugar a lo largo de una línea recta. Es muy raro encontrar un movimiento libre de fuerzas; el movimiento real de las llamadas estrellas "fijas", las cuales están muy lejos del resto de la materia atractiva, será una buena aproximación de tal movimiento. Los movimientos ordinarios están todos sujetos a fuerzas de rozamiento, y esto hace que sean ejemplos, tan sólo aproximados, de la primera ley de Newton.

Según la segunda ley de Newton, la fuerza resultante aplicada a un cuerpo (más exactamente, a un punto material) lo acelera, y la aceleración es proporcional a la fuerza. La fuerza y la aceleración son vectores, y la palabra "proporcional" implica igualdad de dirección y proporcionalidad de las magnitudes, ya que los vectores se dice que solamente son proporcionales si tienen la misma dirección. Por fuerza, se entiende la suma o resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo. La primera ley vemos que es un caso particular de la segunda y ya no la volveremos a considerar en lo sucesivo.

Al estudiar la Estática, en el capítulo 3, se hizo un estudio de las condiciones bajo las cuales un cuerpo puede estar sin aceleración. En el capítulo 5 la aceleración y la velocidad se analizaron desde el punto de vista de la Cinemática, o sea, sin hacer referencia a las fuerzas. Hemos visto cómo pueden deducirse las velocidades y posiciones de una partícula cuando se da la aceleración. A través de este procedimiento es como establecemos contacto con la segunda ley de Newton, ya que la ley nos da la aceleración cuando se conocen las fuerzas, y combinando esto con lo que vimos en el capítulo anterior podemos deducir de las fuerzas dadas todos los aspectos del movimiento. El objeto de este capítulo es estudiar métodos para conseguirlo.

La segunda ley de Newton, que es quizá la más amplia generalización y el teorema más útil de toda ciencia natural, puede expresarse en la forma siguiente:

$$\boxed{\mathbf{F} \propto ma}$$

1 El estudiante debe repasar el párrafo 2-2.

donde **F** es la fuerza resultante, m la masa del punto material y **a** su aceleración. Pero decir que una cantidad es proporcional a otra, es decir, que es igual a esta otra multiplicada por una constante. Luego

$$\mathbf{F} = km\mathbf{a} \tag{6-1}$$

siendo k una constante que por el momento queda indeterminada. Su valor depende de las unidades que tomemos para **F** y m. Pongamos de manifiesto el significado de la ecuación (6-1) con el siguiente experimento (fig. 6-1).

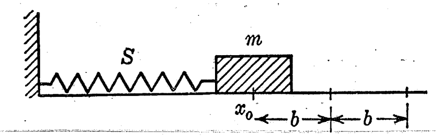

Fig. 6-1. Comprobación de la segunda ley de Newton.

Un resorte descansa sobre una mesa lisa horizontal. Su extremo izquierdo está fijo en una pared inmóvil, mientras el derecho está unido a una masa m que puede deslizarse sin rozamiento sobre la mesa.

Consideremos, primero, qué ocurre cuando *fuerzas diferentes* pueden actuar sobre la misma masa m. Llevemos la masa hacia la derecha hasta una distancia b más allá de x_0 que es el punto en el cual el resorte no ejerce fuerza alguna. En virtud de la ley de Hooke el resorte tira con una fuerza proporcional a b, por ejemplo: 2 kg. Al soltar la masa, vuelve hacia x_0 con una aceleración inicial que será, por ejemplo, de 5 cm/s². Llevemos ahora la masa hasta una distancia $2b$ más allá de x_0. Al soltarla en este punto, donde la fuerza es el doble que antes, la aceleración inicial resulta ser de 10 cm/s², lo cual está de acuerdo con la ecuación (6-1). En general, un desplazamiento inicial $n \times b$ al cual corresponde una fuerza de $n \times 2$ kg, produce una aceleración inicial de $n \times 5$ cm/s². Obsérvese que tanto **F** como **a** están dirigidas hacia la izquierda.

Ahora, realicemos una serie de experimentos en los cuales la fuerza se mantiene constante, pero se le hace actuar sobre *masas diferentes*. Esto se puede conseguir alargando siempre el resorte en la misma cantidad b y haciendo que la fuerza de 2 kg que ejerce acelere, sucesivamente, masas diferentes. Al doblar m, **a** valdrá 2,5 cm/s²; al reducir m a la mitad, **a** valdrá 10 cm/s², etc. La ecuación (6-1) también implica esto.

En estos experimentos no se movió con aceleración constante ninguna de la masas, ya que como la fuerza disminuía al disminuir la extensión del resorte, la aceleración también disminuía. En particular, en el instante en que las masas pasaban por el punto x_0, la fuerza era nula. De aquí concluímos que, en este instante, la aceleración de todas las masas era nula momentáneamente y su velocidad era uniforme.

6-2. El significado de la masa. Ha llegado el momento en que debemos establecer más claramente qué significa *masa*. Aun cuando masa y peso se midan corrientemente en kg, son dos cosas totalmente distintas. La masa de un objeto es la misma en cualquier parte del Universo; su peso es diferente, por ejemplo, en la Luna que en la Tierra.

La masa es idéntica a la inercia; sin embargo, esta aseveración difícilmente la define, puesto que la palabra "inercia" es igualmente vaga. La masa tiene que ver con la dificultad de *acelerar* un cuerpo. En lo que sigue daremos lo que se

llama una definición *operacional* de masa, o sea: una definición, no solamente con palabras sino referida a operaciones experimentales; una definición que tiene, además, la ventaja de permitir una definición cuantitativa de masa. Se basará en la segunda ley de Newton.

Consideremos tres cuerpos, a los cuales numeraremos con los números 1, 2 y 3, y vamos a hallar sus masas. Unamos cada uno de ellos al extremo del resorte de la figura 6-1, alarguemos el resorte a la misma distancia b más allá de su punto neutro y midamos la aceleración inicial. A pesar de las dificultades prácticas que surjan, este experimento puede, en principio, realizarse siempre. Llamemos a_1, a_2, a_3 a las aceleraciones de los tres cuerpos. De la ecuación (6-1), $F = km_1a_1 = km_2a_2 = km_3a_3$. Luego

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}; \qquad \frac{m_3}{m_1} = \frac{a_1}{a_3} \tag{6-2}$$

Las masas son inversamente proporcionales a las aceleraciones. Todas las razones de masas podrán, pues, determinarse. Si tomamos m_1 como unidad de masa, las masas vienen definidas por las relaciones (6-2). Por medio de experimentos de este tipo pueden determinarse todas las masas por comparación con una unidad de masa o con una masa patrón.

Los patrones de masa se usan en Física, si bien la comparación se acostumbra a hacer por procedimientos más prácticos. El *kilogramo* patrón es un cilindro de platino que se conserva en Sèvres, Francia. La libra patrón en Westminster, Inglaterra. Uno y otra se hallan cuidadosamente protegidos contra toda influencia corrosiva.

6-3. Unidades de fuerza. Ya hemos visto una unidad de fuerza el kilogramo. Vimos que era la fuerza con que la gravedad atraía a una masa de un kilogramo. Luego 1 kg de fuerza comunica a 1 kg de masa una aceleración de 9,8 m/s². Sustituyamos esto en la ecuación (6-1). Tendremos:

$$1\text{kg-fuerza} = k \times 1\ \text{kg-masa} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

Para igualar numéricamente esta ecuación, deberíamos dar a la constante k el valor numérico $1/g = 1/9{,}8$. Pero esto no es siempre conveniente.

Para evitarlo podemos introducir una nueva unidad de fuerza, tomada de tal manera que la constante k valga la unidad. Esta nueva unidad de fuerza será, evidentemente, *la fuerza que aplicada a una masa de 1 kg le comunica una aceleración de 1 m/s²*, según resulta de la ecuación (6-1). Recibe el nombre de *newton*. Como 1 kg-fuerza comunica una aceleración de 9, 8 m/s² a una masa de 1 kg, 1 kg-fuerza debe ser igual a 9,8 newton. El newton es la unidad *absoluta* de fuerza, el kilogramo, la unidad *gravitatoria*. Cuando la fuerza se expresa en unidades absolutas, la segunda ley de Newton se escribe así:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \quad \text{(forma absoluta)} \tag{6-3}$$

Cuando **F** se expresa en unidades gravitatorias, debemos insertar el factor $1/g$; es decir, m debe sustituirse por P/g, donde P es el peso en kilogramo-fuerza, numéricamente igual a la masa en kilos. La fórmula, pues, queda

$$\mathbf{F} = \frac{P}{g}\,\mathbf{a} \quad \text{(forma gravitatoria)} \qquad (6\text{-}4)$$

En esta ecuación, tanto P como $\mathbf{F}$ se miden en kilogramo-fuerza, mientras g y $\mathbf{a}$ tienen las unidades de aceleración. Esta forma de la segunda ley de Newton se emplea corrientemente en ingeniería.

El estudiante debe ya saber distinguir claramente entre un kilogramo-masa y un kilogramo-fuerza; un kilogramo-fuerza es tan distinto de un kilogramo-masa como lo es el Polo Norte del polo acuático. Si la palabra kilogramo se refiere a masa o a fuerza, ya quedará claro en el texto; cuando pueda haber confusión especificaremos más diciendo: kilogramo-masa o kilogramo-fuerza.

También debe entenderse que *la distinción entre gravitatoria y absoluta* se *aplica solamente a las fuerzas,* no a las masas. En este libro no emplearemos unidades gravitatorias de masa. Para resolver problemas en los que se deba hacer uso de la segunda ley de Newton tenemos los dos procedimientos siguientes:

1. Expresemos, primero, todas las fuerzas en unidades absolutas, recordando que 1 gramo-fuerza es igual a 980 *dina* y que 1 kilogramo-fuerza es igual a 9,8 newton. Luego, usemos la segunda ley de Newton en la forma (6-3). Las soluciones vendrán dadas en unidades absolutas. Si precisamos los resultados en unidades gravitatorias, dividimos los resultados de las fuerzas por g.

2. Exprésense fuerzas $\mathbf{F}$ y masas (hablando con precisión, pesos) P en kilogramos y utilícese la ecuación (6-4).

Ejemplos. *a)* Una locomotora es capaz de ejercer una tracción máxima de 2 toneladas. ¿Qué velocidad comunicará a un tren de carga, que pesa 300 toneladas, en una distancia de 1 km, si parte del reposo, la vía es horizontal y el tren está sometido a una fuerza de frotamiento de 5 kg por tonelada de peso?

La fuerza que actúa sobre el tren es una tracción hacia adelante de 2 000 kg, menos la tracción hacia atrás debida al rozamiento y que vale 300×5 kg $=$ $= 1\,500$ kg; la resultante es una fuerza de 500 kg que equivalen a 4 900 newton. La masa del tren es

$$300 \times 1\,000 \text{ kg} = 300\,000 \text{ kg}$$

Ahora podemos aplicar el procedimiento 1. Utilizando la ley de Newton en su forma (6-3) tenemos:

$$4\,900 \text{ newton} = 300\,000 \text{ kg} \times a$$
$$a = 49/3\,000 \text{ newton/kg} = 49/3\,000 \text{ m/s}^2$$

ya que un newton, según su definición, es 1 kg-masa $\times$ 1 m/s². Si queremos usar el procedimiento 2 usaremos la ecuación (6-4) de la siguiente manera:

$$500 \text{ kg} = \frac{300\,000 \text{ kg}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = a$$
$$a = 49/3\,000 \text{ m/s}^2$$

Para hallar la velocidad adquirida por el tren durante 1 km, utilizaremos la ecuación (5-16),

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

en este caso $v_0 = 0$. Luego

$$v^2 = 98/3\,000 \text{ m/s}^2 \times 1\,000 \text{ m} = 32{,}67 \text{ (m/s)}^2$$
$$v = 5{,}7 \text{ m/s}$$

b) Un avión que pesa en total 1 tonelada está sometido a las siguientes fuerzas: la tracción de su hélice, $F_1 = 1\,000$ kg (cfr. fig. 6-2); su peso P; la acción del aire sobre él, $F_2 = 500$ kg; hallar su aceleración en ese instante.

El primer paso es calcular la fuerza resultante aplicada al avión. Se puede hacer gráficamente o por componentes. P es, claro está, 1 000 kg. Usando el método de las *componentes* obtenemos para la componente horizontal de la resultante (en el sentido de la fuerza propulsora),

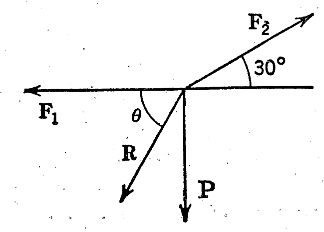

Fig. 6-2. Problema *b*).

$$R_x = F_1 - F_2 \cos 30^\circ = 567 \text{ kg}$$

y para la componente hacia abajo,

$$R_y = P - F_2 \operatorname{sen} 30^\circ = 750 \text{ kg}$$

La resultante es una fuerza de $\sqrt{(567)^2 + (750)^2}$ kg $= 940$ kg en una dirección que forma un ángulo ϑ con F_1, tal que tg $\vartheta = 750/567 = 1{,}32$. Las tablas trigonométricas nos dan para ϑ un valor de unos 53°. La aceleración está en esta dirección.

Su magnitud se calcula por la segunda ley de Newton. Si utilizamos el procedimiento 1 debemos convertir las fuerzas en unidades absolutas. Como

$$940 \text{ kg} = 9\,212 \text{ newton}$$

tenemos de la ecuación (6-3),

$$9\,212 \text{ kg} \times \text{m/s}^2 = 1\,000 \text{ kg} \times a$$
$$a = 9{,}2 \text{ m/s}^2$$

El procedimiento 2 nos lleva al mismo resultado mediante la ecuación (6-4):

$$940 \text{ kg} = \frac{1\,000 \text{ kg}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}\, a$$
$$a = 9{,}2 \text{ m/s}^2$$

6-4. Unidades métricas de fuerza. Vamos a concretar brevemente las unidades métricas de fuerza. Hay dos sistemas métricos, el *cgs* llamado *cegesimal* y el *mks* llamado *Giorgi.* También entre los sistemas gravitatorios tenemos uno *cgs* y otro *mks,* al cual también se le suele llamar *técnico* o *terrestre.*

En el sistema *cgs absoluto,* la unidad de longitud es el centímetro, la unidad de masa el gramo y la de tiempo el segundo, surge como derivada la unidad absoluta de fuerza a la cual llamamos *dina* (del griego *dynamos,* fuerza). Se define como la fuerza que aplicada a una masa de 1 g, le comunica una aceleración de 1 cm/s^2.

En el sistema *cgs gravitatorio,* la unidad de fuerza es el *gramo-fuerza* o *pond.* Es igual a g dinas (o sea, 980 dinas aproximadamente) puesto que la fuerza gravitatoria aplicada a una masa de 1 g le produce una aceleración de g cm/s^2.

En el sistema *mks absoluto* o *Giorgi,* la unidad absoluta de fuerza es el *newton,* que se define como la fuerza que aplicada a una masa de 1 kg le comunica una aceleración de 1 m/s^2.

En el sistema *mks gravitatorio, técnico* o *terrestre* la unidad de fuerza es el *kilogramo-fuerza,* llamado hoy en día *kilopond.* Es la atracción de la gravedad sobre una masa de 1 kg y será, evidentemente, igual a 9,8 newton, ya que $g = 9{,}8$ m/s^2.

De entre estos cuatro sistemas de unidades, el más importante es el *Giorgi,* ya que da lugar a las llamadas unidades "prácticas" eléctricas, que estudiaremos más adelante. El sistema *cgs absoluto* también se usa muy corrientemente en Física. En cambio, los sistemas gravitatorios tienen actualmente muy poca importancia y los hemos mencionado, únicamente para completar este tema, pero no se utilizarán en la resolución de los problemas de este texto.

Estas unidades se mencionan en forma sistemática en la tabla 6-1.

TABLA 6-1. UNIDADES DE FUERZA

	cgs	*mks*
Absoluto	dina	newton
Gravitatorio	gramo	kilogramo

Los sistemas de unidades absolutas tienen las siguientes ventajas: permiten el uso de la ley de Newton en su forma sencilla (6-3); al ser diferentes los nombres de las unidades de fuerza de los correspondientes a las unidades de masa no puede haber confusión entre tales magnitudes físicas, que son fundamentalmente distintas.

Ejemplos. *a)* Convertir un *newton* en dinas y en kilopond.

$$1 \text{ newton} = \frac{1 \text{ kg} \times 1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2} = \frac{1\,000 \text{ g} \times 100 \text{ cm}}{1 \text{ s}^2} = 10^5 \text{ dinas}$$

$$= \frac{1 \text{ newton}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}102 \text{ kilopond}$$

b) La Luna gira alrededor de la Tierra a una distancia de $3{,}84 \times 10^5$ km con un período de 28 días. Hallar la fuerza con que la atrae la Tierra. Masa de la Luna: $7{,}36 \times 10^{22}$ kg.

En virtud de lo dicho en el párrafo 5-10, la Luna tiene una aceleración centrípeta $a = 4\pi^2 r/P^2 = 2{,}6 \times 10^{-3}$ m/s^2. Para que tenga esta aceleración, la Tierra debe atraerla con una fuerza

$$ma = 7{,}36 \times 10^{22} \text{ kg} \times 2{,}6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 1{,}91 \times 10^{20} \text{ newton}$$
$$= 7{,}36 \times 10^{25} \text{ g} \times 0{,}260 \text{ cm/s}^2 = 1{,}91 \times 10^{25} \text{ dinas}$$

6-5. La fuerza de la gravedad. La Gravedad, que significa atracción de la Tierra, da a todos los cuerpos que caen la misma aceleración. Esto es un hecho que resulta de la observación. ¿Significa esto que la fuerza de la gravedad es la misma para todos los cuerpos? La ley de Newton nos dice que no, ya que si $F = ma$, la fuerza de la gravedad debe ser proporcional a la masa del cuerpo que cae. Esta sencilla conclusión, ha dado origen a muchas elucubraciones filosóficas y a muchas confusiones. Resulta sorprendente ver cómo la fuerza de la gravedad se ajusta en forma tan precisa a la masa de un objeto, puesto que la mayoría de las fuerzas son totalmente independientes de las masas a las que están aplicadas. La fuerza elástica del resorte considerado en el párrafo 6-1, depende totalmente de las características del resorte, pero no de la masa a la cual está sujeto. Como ya dijimos, la fuerza de la gravedad que actúa sobre un objeto es su peso. Lo que hemos venido a decir es que el peso es proporcional a la masa.

Los físicos han dudado, a veces, de que esta proporcionalidad pudiera ser cierta. En 1830 el famoso matemático FRIEDRICH BESSEL demostró que era tan exacta, por lo menos, cuanto pudieran serlo las medidas; pero no hubo ninguna explicación teórica satisfactoria de esta coincidencia hasta que, en el presente siglo, surgió la teoría general de la Relatividad.

TABLA 6-2. VALORES DE g EN DIFERENTES PUNTOS DE LA SUPERFICIE TERRESTRE

Lugar	*Latitud*	*Altitud, m*	*g, cm/s²*
Polo Norte	90°00′	0	983,1
Glaciar Karajak, Groenlandia	70°27′	20	982,5
Chicago	41°47′	182	980,3
Nueva York	40°49′	38	980,3
Monte Hamilton, California	37°20′	1 282	979,7
Zona del Canal de Panamá	8°55′	6	978,2
Ecuador	0°00′	0	978,1

El peso de un cuerpo de masa m es, evidentemente,

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} \tag{6-5}$$

si lo expresamos en unidades absolutas. Si m está dada en gramos y g se considera que es 980 cm/s^2, P vendrá dado en dinas. Si m se da en kilogramos y $g = 9{,}8$ m/s^2, P vendrá dado en newtons. La dirección y sentido de $\mathbf{P}$ son los de $\mathbf{g}$, o sea, hacia abajo.

Una aplicación de estos principios la tenemos en la máquina de Atwood (GEORGE ATWOOD, 1746-1807). Consiste en una polea que consideraremos sin masa ni rozamiento, con una cuerda flexible (véase fig. 6-3). En los extremos de la cuerda tenemos las masas m_1 y m_2. La mayor de ellas será acelerada hacia abajo y la otra hacia arriba. Determinando las aceleraciones de las dos masas, puede calcularse g con bastante precisión. Veamos la teoría de la máquina:

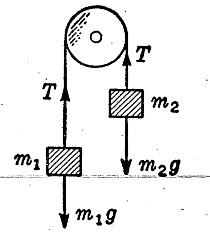

Fig. 6-3. Máquina de Atwood.

Se aplica la segunda ley de Newton a cada una de las dos masas separadamente. La primera está sometida a dos fuerzas, $m_1\mathbf{g}$ y $\mathbf{T}$, siendo $\mathbf{T}$ la tensión de la cuerda que soporta m_1. La resultante hacia abajo es $m_1\mathbf{g} - \mathbf{T}$. En una cuerda flexible, este valor de la tensión se transmite, inalterado, al otro lado de la polea, donde actúa sobre m_2. Llamando a_1 y a_2 a las aceleraciones hacia abajo de las dos masas y aplicando la ecuación (6-3) a cada una de las masas, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} m_1g - T &= m_1a_1 \\ m_2g - T &= m_2a_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}6)$$

Pero si la cuerda es inextensible, $a_2 = -a_1$. Haciendo esta sustitución y restando la segunda ecuación de la primera, tenemos:

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a_1$$

y, por tanto,

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

Obsérvese que si las masas son casi iguales, a_1 es muy pequeña y, por consiguiente, fácilmente mensurable.

6-6. Más sobre rozamiento. En el párrafo 3-12 se mencionaron los aspectos más sencillos de la fuerza de rozamiento. Vamos a ver ahora cómo puede medirse dicha fuerza. Existen ciertas regularidades, a las cuales se les suele llamar *leyes del rozamiento,* que resultan de la observación y que vamos ahora a discutir. La palabra "leyes" debe usarse con reservas, ya que los hechos que definen sólo se cumplen entre ciertos límites.

Un ejemplo de la primera lo tenemos en el caso de un ladrillo que empujamos sobre una superficie rugosa. Experimentalmente resulta que la fuerza de rozamiento es la misma tanto si el ladrillo está apoyado sobre su cara ancha como sobre la estrecha. Luego, en general, *la fuerza de rozamiento es independiente de la superficie de contacto.*

Veamos ahora la segunda: Si un cuadro, con su superficie plana horizontal, se carga con pesos y se le arrastra sobre una superficie horizontal no pulimentada, resulta que la fuerza retardadora de rozamiento es proporcional al peso total. Luego *la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza total normal al plano.* La fuerza de rozamiento es siempre paralela al plano y la representaremos por $F_{\parallel}$; la fuerza normal, que puede ser o no el peso del objeto que queremos mover (puede haber una presión adicional contra el plano) vendrá representada por $F_{\perp}$. La relación entre estas dos fuerzas puede expresarse en la siguiente forma:

$$F_{\parallel} = \mu F_{\perp} \qquad (6\text{-}7)$$

La constante μ, que depende de la naturaleza de las *dos* sustancias en contacto, recibe el nombre de "coeficiente de rozamiento". Se ha determinado su valor para un gran número de pares de sustancias, algunos de los cuales podemos ver en la tabla 6-3. En el párrafo 3-12 se llamó la atención acerca de la circunstancia de que el rozamiento cinético era algo menor que el rozamiento estático. Para ser precisos, debemos distiguir entre μ_{cin} y μ_{est}; este último es algo mayor que el primero, pero a los efectos de este libro podemos despreciar la diferencia.

TABLA 6-3. COEFICIENTES DE ROZAMIENTO

Metal sobre madera seca de encina	0,50
Metal sobre madera de encina mojada	0,25
Metal sobre metal, sin lubricante	0,18
Metal sobre metal, lubricado	0,03
Acero sobre ágata	0,20
Cuero sobre madera	0,35
Cuero sobre metal	0,56

Apliquemos estas consideraciones a un problema muy corriente: el movimiento de un cuerpo que resbala por un plano inclinado (cfr. fig. 6-4). Si es m su masa y ϑ el ángulo del plano inclinado, la fuerza normal al plano inclinado es $mg \cos \vartheta$, mientras que la componente de la fuerza a lo largo del plano es mg sen ϑ. La componente $mg \cos \vartheta$ aplicada al cuerpo es neutralizada por otra fuerza igual y contraria ejercida por el plano (no está dibujada en la figura). La fuerza de rozamiento que se opone a la fuerza mg sen ϑ que impele al cuerpo hacia la parte baja del plano, es $\mu mg \cos \vartheta$ en virtud de la ecuación (6-7). La segunda ley de Newton, aplicada en el sentido del movimiento es, pues,

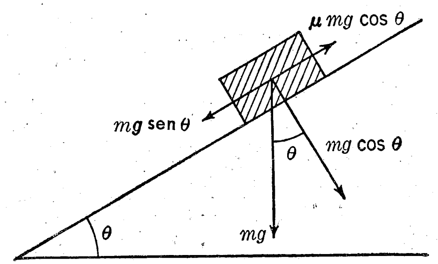

Fig. 6-4. Movimiento en un plano inclinado.

$$mg \text{ sen } \vartheta - \mu mg \cos \vartheta = ma$$

y despejando a resulta:

$$a = g(\text{sen } \vartheta - \mu \cos \vartheta) \qquad (6\text{-}8)$$

Si $\vartheta = 90°$, $a = g$ como era de esperar. Pero si $\vartheta = 0$, la ecuación (6-8) parece indicarnos una aceleración hacia arriba, lo cual no tiene sentido; debemos siempre recordar que el rozamiento se *opone* siempre al movimiento y no puede producir movimiento por sí mismo. La ecuación (6-8) será, pues, correcta mientras nos dé un movimiento en la dirección y sentido de la fuerza aceleradora.

¿Cuándo será nula a? Según la ecuación (6-8) ocurre cuando sen $\vartheta - \mu \cos \vartheta = 0$ y resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$\text{tg } \vartheta = \mu \qquad (6\text{-}9)$$

El ángulo ϑ definido por esta expresión recibe el nombre de *ángulo límite de reposo*. La última ecuación nos da un método útil para medir μ: se varía el ángulo del plano inclinado desde el valor 0 hasta aquel en que se inicia el deslizamiento. La tangente de este ángulo es el coeficiente (estático) de rozamiento.

Por último, la ecuación (6-8) también nos dice lo que ocurriría en ausencia de rozamiento. Cuando $\mu = 0$, $a = g$ sen ϑ. Ésta es la relación que permitió a GALILEO determinar g. La velocidad de caída de los cuerpos es tan grande que resulta difícil medir g directamente. En cambio a se puede hacer tan pequeña como queramos sin más que disminuir ϑ suficientemente y podremos medirla fácilmente. El movimiento de la caída de un cuerpo por un plano inclinado, es también, uniformemente acelerado, pero el valor de la aceleración se ha disminuído.

6-7. Análisis dimensional. Hemos insistido repetidas veces en que, en todas las ecuaciones de Física, ambos miembros deben medirse en las mismas unidades. Sin embargo, aun debe haber una mayor homogeneidad en estas ecuaciones, como es que las cantidades de uno y otro miembro deben tener la *misma naturaleza física*. No se puede igualar una fuerza a una distancia, como no se puede igualar una vaca a un caballo. El estudiante que sea rápido de comprensión podrá evitar errores. Un procedimiento sistemático para ver si las ecuaciones son correctas o no desde este punto de vista es el "análisis dimensional".

Las tres cantidades básicas en Mecánica son la longitud, el tiempo y la masa. Las designaremos por L, T y M respectivamente. A partir de estas tres, podemos obtener cualquiera de las otras. Por ejemplo, la velocidad es una longitud dividida por un tiempo. Se dice que tiene como *dimensiones físicas* $[LT^{-1}]$. Luego la dimensión física de la cantidad 30 km/h es $[LT^{-1}]$. Los corchetes se usan para indicar que LT^{-1} representa solamente la dimensión física y que no se tienen en cuenta los valores numéricos.

La dimensión de una superficie es $[L^2]$, la de una aceleración $[LT^{-2}]$, la de una fuerza en un sistema absoluto $[MLT^{-2}]$, etc. Cuando las cantidades están afectadas de algún exponente, las dimensiones físicas están también afectadas del mismo exponente. En resumen, que toda ecuación usada en Física debe tener las mismas dimensiones en ambos miembros. Comprobemos, por ejemplo la ecuación (5-16) para el movimiento uniformemente acelerado, $v^2 = 2as$. Tenemos,

$$[L^2T^{-2}] = [LT^{-2}]\,[L]$$

lo cual es, evidentemente, correcto.

Fácil es ver que la ley de Newton en su forma absoluta, ecuación (6-3), es también correcta ya que, en cierto modo, define las dimensiones físicas de F. En cambio, en su forma gravitatoria, presenta características interesantes. Supongamos que escribimos:

$$F = \frac{P}{g}\,a$$

y consideremos P como peso (fuerza) y g como un número. Tenemos entonces,

$$[MLT^{-2}] = [MLT^{-2}]\,[LT^{-2}]$$

lo cual es incorrecto. En cambio, la ecuación dimensional es correcta si a g le damos las dimensiones de una aceleración. En lo sucesivo, en todos los ejemplos de análisis dimensional, supondremos escrita la ley de Newton en su forma absoluta, con lo que evitaremos tal ambigüedad.

Las consideraciones de este tipo son tanto más útiles cuantas más cantidades físicas (energía, impulso, potencia) se introduzcan. Cada una de ellas tiene sus dimensiones características.

6-8. Resumen de las unidades de fuerza. En este capítulo hemos presentado cuatro unidades de fuerza y hemos recordado dos unidades de masa.

1. En el sistema cgs la unidad de masa es siempre el gramo. La unidad de fuerza puede ser la absoluta (dina) o la gravitatoria (pond). Si utilizamos la unidad absoluta, la segunda ley de Newton toma la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Una dina es la fuerza que a una masa de 1 g le comunicaría la aceleración de 1 cm/s². Un pond es igual a 980 dinas.

2. En el sistema mks la unidad de masa es el kilogramo. La unidad de fuerza puede ser o la absoluta (newton) o la gravitatoria (kilopond). Un newton es la fuerza que a una masa de un kilogramo le comunicaría la aceleración de 1 m/s². Un kilopond es igual a 9,8 newtons.

6-9. Limitaciones a la segunda ley de Newton. Las anteriores discusiones presuponen que no hay duda alguna acerca de a, aceleración del cuerpo. Pero podemos ver que a se mide siempre con *relación a alguna otra cosa*. Cuando cae un cuerpo tiene una aceleración g respecto a la Tierra. Como la Tierra gira alrededor de su eje, un punto que se halle en reposo en su superficie tendrá una aceleración respecto a una estrella fija y, por tanto, la aceleración del cuerpo que cae, considerada respecto a la estrella fija, será diferente de g.

Consideremos otro ejemplo: En un avión que cayera hacia el suelo, los pasajeros tendrían una aceleración nula respecto al avión, pero tendrían una aceleración g respecto a la Tierra.

Las experiencias realizadas con cuerpos móviles nos indican que: *La aceleración que figura en la segunda ley de Newton debe ser relativa a un cuerpo que no tenga aceleración.* Pero ahora podríamos preguntar: ¿Cómo podemos asegurar que un cuerpo que parece no tener aceleración, no la tiene respecto a objetos que estén tan lejanos que no se ven? Esta clase de preguntas serán contestadas cuando veamos la teoría de la relatividad en el párrafo 7-9.

Evidentemente, la Tierra no es un "sistema de referencia" adecuado para medir a, ya que cada punto de su superficie, excepto los Polos, tienen una aceleración centrípeta $\omega^2 R$. En donde

$$\omega = 2\pi \text{ por día} = (2\pi/86\,400)\text{s}^{-1} \qquad \text{y} \qquad R = 6{,}4 \times 10^8 \text{ cm}$$

y, por tanto, tenemos para el Ecuador, donde la aceleración es máxima, 3,5 cm/s². En muchos casos podremos despreciar esta aceleración, si bien para trabajos precisos debemos tenerla en consideración. Ya se dirán más cosas acerca de esto en el próximo capítulo. Ahora supondremos que *en primera aproximación* la aceleración a que aparece en la ley de Newton, está referida a la superficie terrestre.

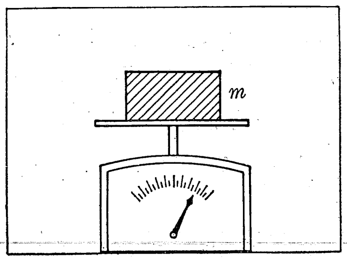

Fig. 6-5. Ascensor descendiendo.

¿Cuál es el peso aparente de un objeto colocado en un ascensor cuando éste desciende con una aceleración a? Consideremos la figura 6-5. Sea m la masa del objeto colocado en el platillo de una báscula de resorte. Las fuerzas que sobre él actúan son mg hacia abajo y la reacción del platillo hacia arriba. Llamemos F a esta última. La aceleración que hay que utilizar en este ejemplo es la relativa a la Tierra, a, y no la relativa al ascensor (que es nula). Luego tenemos

$$mg - F = ma$$

El peso aparente del cuerpo es F, fuerza de la báscula. Éste es igual a $m(g - a)$. Si $a = g$, el cuerpo no tendría peso aparente.

PROBLEMAS

1. En el Observatorio Lick, Mt. Hamilton, Calif., la aceleración de la gravedad resulta ser de 979,7 cm/s². ¿Cuál es el valor de g en pies/s² en dicha localidad?

2. En un experimento análogo al descrito en el párrafo 6-1, tenemos un resorte y cuatro masas m_1, m_2, m_3, m_4. Al alargar 15 cm el resorte, comunica a las masas aceleraciones instantáneas de 25 cm/s², 15 cm/s², 35 cm/s² y 50 cm/s², respectivamente. Si tomamos m_1 como masa patrón, calcular las masas de m_2, m_3 y m_4 en función de ella.

3. Un resorte de constante $k = 100$ newton/m se emplea en un experimento análogo al del párrafo 6-1. Si al soltar el resorte tras alargarlo 4 cm, da a la masa una aceleración instantánea de 25 cm/s², ¿cuánto vale m?

4. Una masa de 3 kg que se mueve inicialmente hacia la derecha, se encuentra sometida a una fuerza de 4,5 newton hacia la izquierda. Vuelve a su posición inicial 5 s después de empezar a actuar la fuerza. Hállese su velocidad inicial. ¿Dónde y cuándo invertirá el sentido de movimiento?

5. Un automóvil que pesa 1,5 toneladas corre a 100 km/h. Se le frena y vuelve al reposo con aceleración constante después de haber recorrido 50 m. Hallar la fuerza de freno del automóvil.

6. Una pelota que pesa 100 g se deja caer desde lo alto de una torre que tiene una altura de 150 m. Al pie de la torre, un hombre detiene la pelota aplicándole una fuerza constante vertical hacia arriba. *a)* ¿Cuál es la velocidad que lleva la pelota un instante antes de cogerla? *b)* ¿Qué fuerza hay que aplicarle para detenerla a una distancia de 1/2 m? (Despréciese la resistencia del aire.)

7. Un hombre hace girar una masa de 200 g atándola con una cuerda de 1 m de longitud. Si la masa tarda 1,5 s en dar una vuelta completa, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

8. En un instante dado, un avión que pesa 2 toneladas tiene una aceleración dirigida horizontalmente hacia adelante de 1,5 m/s². Si la fuerza de arrastre de su hélice es de 500 kg, hallar la magnitud y dirección de la fuerza que debe ejercer el aire sobre el avión, a fin de mantenerlo en este nivel de vuelo.

9. Una máquina de Atwood (véase párr. 6-5) consiste en dos masas suspendidas por una polea sin masa con una cuerda flexible. Si una de las masas pesa 7 kg y tiene una aceleración hacia arriba de 3 m/s², hallar la otra masa.

10. Hallar, en función de g, m_1, m_2, una expresión para la tensión T de la cuerda de la máquina de Atwood descrita en el párrafo 6-5.

11. Un bloque resbala por un plano inclinado con velocidad constante cuando la inclinación es de 12°. Si aumentamos la inclinación a 25°, ¿Cuál será la aceleración del mismo bloque por el plano?

12. Una masa m resbala por un plano inclinado sin rozamiento, de pendiente ϑ y longitud d. Hallar su velocidad en la parte baja del plano. Demostrar que es igual a la velocidad de caída que adquriría cayendo una distancia igual a la altura del plano.

13. Un bombero, que pesa 75 kg, se desliza por un poste vertical con una aceleración media de 3,6 m/s². ¿Qué fuerza media debe ejercer sobre el poste durante su descenso?

14. Un cuerpo de masa 0,5 kg está sobre una mesa horizontal sin rozamiento. ¿Qué fuerza horizontal hay que aplicarle para que adquiera una aceleración de 0,3 m/s²? Si la fuerza se le aplica hacia abajo formando un ángulo de 60° respecto a la horizontal, ¿qué magnitud debe tener la fuerza?

15. Un cuerpo que pesa 73 g parte del reposo desde lo alto de un plano inclinado de 2 m de longitud y que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si el cuerpo invierte 8 s en llegar a la base, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre él y el plano?

16. Un bloque de madera se coloca sobre un plano inclinado ajustable y el ángulo de inclinación ϑ se va aumentando gradualmente hasta que el bloque empieza a resbalar. Si $\vartheta = 23°$ en este punto ¿cuál es el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano?

17. En un experimento como el de GALILEO (véase párr. 6-6) se observa una masa que se desliza por un plano inclinado casi desprovisto de rozamiento ($\vartheta = 20°$), con una aceleración de 3,7 m/s². Calcular, a partir de estos datos, la aceleración g de la gravedad.

18. Calcular, en el sistema que se indica en la figura 6-6, las aceleraciones de las masas y las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas si el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre el bloque de 10 kg y la superficie es 0,2.

19. Un bloque de masa m se lanza hacia arriba por un plano inclinado de pendiente ϑ con una velocidad inicial v_0. ¿Qué espacio recorrerá hacia arriba? ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que vuelva de nuevo al pie del plano?

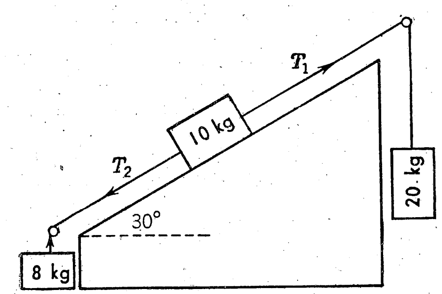

Fig. 6-6. Problema 18.

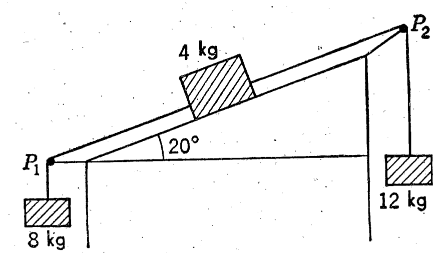

Fig. 6-7. Problema 21.

20. Un bloque de masa 1,5 kg se desliza por un plano inclinado ($\vartheta = 25°$). Si el coeficiente de rozamiento es 0,4, hallar la aceleración del bloque.

21. Calcular la aceleración del sistema que se indica en la figura 6-7 partiendo el movimiento del reposo. El coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la masa de 4 kg y el plano es 0,2. (Supóngase que no hay rozamiento en las poleas.)

22. Un bloque de 100 g está, inicialmente, en reposo sobre una mesa. Si se le aplica una fuerza horizontal de 40 000 dinas durante 2 s. ¿A qué distancia de su posición inicial volverá a pararse? Tómese el coeficiente de rozamiento por deslizamiento igual a 0,3.

23. Se aplica una fuerza de 5×10^4 dinas a un bloque de 50 g, el cual a su vez empuja a otro de 30 g. Si los bloques se mueven sobre una superficie sin frotamiento, ¿qué fuerza ejerce el uno sobre el otro?

Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque de 50 g y la superficie es de 0,3 y el del otro bloque y la superficie es 0,4, hállese la aceleración del sistema y la fuerza que un bloque ejerce sobre el otro.

24. Un ascensor de 5 000 kg sube con una aceleración de 2 m/s². Hállese la tensión del cable.

25. Dos masas m_1 y m_2 unidas mediante una cuerda flexible se colocan sobre un par de planos inclinados, tal como se indica en la figura 6-9. No hay rozamiento en el punto A. Hallar la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda. ¿Cuál debería ser la relación entre masas y ángulos para que el sistema estuviese en equilibrio?

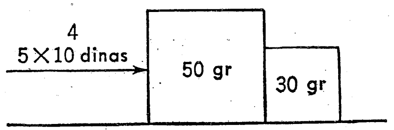

Fig. 6-8. Problema 23.

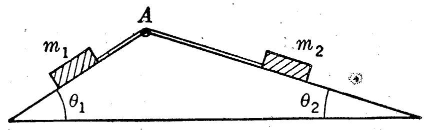

Fig. 6-9. Problema 25.

26. Un bloque rectangular de masa 1 kg se acelera sobre una superficie horizontal mediante una fuerza de 40 kg que forma con la horizontal un ángulo de 60°. Si el coeficiente de rozamiento es 0,5, ¿cuánto tiempo debe estar aplicada la fuerza para comunicar al bloque una velocidad de 6,5 m/s?

27. Sobre una mesa lisa tenemos un bloque de 6,5 kg sobre el cual se ejerce una tracción mediante una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y en el otro extremo cuelga un peso de 1,5 kg. Si el sistema parte del reposo y el peso de 1,5 kg está, inicialmente, a 2 m del suelo, hallar el tiempo que transcurre hasta que el peso llegue al suelo. ¿Cuál es la velocidad del sistema en este instante?

28. Una masa de 2,5 kg cuelga de un dinamómetro, el cual, a su vez, está colgado del techo de un ascensor. ¿Qué indicará el dinamómetro: *a)* si el ascensor sube con una velocidad constante de 7 m/s; *b)* si el ascensor baja con una aceleración de 1 m/s²; *c)* si el ascensor sube con una aceleración de 0,5 m/s²; *d)* si se rompe el cable y el ascensor cae libremente?

29. Una plomada está colgada del techo de un vagón de ferrocarril. ¿Qué ángulo ϑ formará con la vertical cuando el tren tenga una aceleración de 3 m/s²? Hállese la fórmula general que nos dé ϑ en función de a. (Este dispositivo constituye tipo sencillo de acelerómetro.)

30. Demostrar que v^2/r tiene las dimensiones de una aceleración.

31. Tomando como básicas las dimensiones de longitud, tiempo y fuerza, hállense las dimensiones de la masa.

CAPÍTULO 7

MOVIMIENTOS ESPECIALES EN EL PLANO

7-1. Movimiento de un proyectil en el vacío. Todos los movimientos estudiados hasta ahora tenían lugar a lo largo de una línea recta; eran movimientos unidimensionales. Ahora vamos a estudiar los movimientos en un plano, los cuales requieren el estudio, no de una, sino de dos coordenadas. El más importante de estos movimientos es el de un cuerpo disparado por un cañón.

Cualitativamente, podemos considerar el movimiento como la superposición de un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical de caída libre.

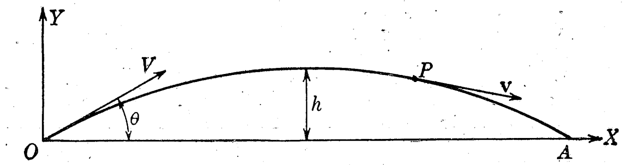

Fig. 7-1. Movimiento de un proyectil.

La figura 7-1 nos muestra que el cuerpo se mueve hacia la derecha con velocidad constante $V_x = V \cos \vartheta$, mientras que verticalmente sube con velocidad $V_y = V \operatorname{sen} \vartheta$ y al mismo tiempo cae con una aceleración g, o sea, con una velocidad gt. Sugerimos al estudiante que construya un diagrama en el que componga esas velocidades en cada instante para hallar la velocidad resultante.

Vamos, ahora, a analizar matemáticamente el movimiento. Supongamos que se lanza un cuerpo, que consideraremos como una partícula, en una dirección que forma un ángulo ϑ con la horizontal, siendo V su velocidad inicial (cfr. figura 7-1). Tomemos el origen de coordenadas rectangulares en el punto de disparo. En un instante cualquiera de su movimiento (por ejemplo, en el punto P) el proyectil está sometido a una sola fuerza, a saber, su peso mg, el cual actúa verticalmente hacia abajo. Por tanto, si resolvemos su aceleración en P en una componente $a_y = d^2y/dt^2$ según el eje Y y otra $a_x = d^2x/dt^2$ según X, tendremos por la segunda ley de Newton

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{7-1}$$

De aquí, obtendremos por integración la velocidad y la posición. El vector **v**, que es tangente a la trayectoria, tiene como componentes $v_y = dy/dt$ y $v_x = dx/dt$

y el vector de posición tiene como componentes y y x. De la primera integración resulta

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1 \qquad \frac{dx}{dt} = c_2 \tag{7-2}$$

Las constantes c_1 y c_2 que son matemáticamente arbitrarias, las determinaremos de forma que cumplan las condiciones iniciales de nuestro problema. Hemos supuesto que, en el instante $t = 0$, v_x vale $V \cos \vartheta$ y que v_y vale V sen ϑ. Haciendo $t = 0$ en las ecuaciones (7-2) vemos que

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = c_1 \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = c_2$$

Así pues $c_1 = V$ sen ϑ y $c_2 = V \cos \vartheta$, con lo que las ecuaciones (7-2) toman la forma definida

$$\frac{dy}{dt} = v_y = -gt + V \operatorname{sen} \vartheta \qquad \frac{dx}{dt} = v_x = V \cos \vartheta \tag{7-3}$$

De estos resultados vemos que la velocidad vertical es la de un movimiento de caída libre, con la velocidad inicial V sen ϑ superpuesta; la velocidad horizontal permanece constante e igual a su valor inicial. La ausencia de "interferencias" entre los dos movimientos recibe, a veces, el nombre de "independencia de los movimientos verticales y horizontales". No es más que una consecuencia de la naturaleza vectorial de la aceleración. Para obtener la posición instantánea del proyectil, integraremos una vez más las ecuaciones (7-3). Resulta

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + V \operatorname{sen} \vartheta\, t + c_3$$
$$x = V \cos \vartheta\, t + c_4$$

Las nuevas constantes c_3 y c_4 se determinan, de nuevo, en conformidad con las condiciones iniciales. Puesto que tanto x como y son nulas en el instante $t = 0$, las constantes deben anularse. Y así nos queda

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + V \operatorname{sen} \vartheta \cdot t \qquad x = V \cos \vartheta \cdot t \tag{7-4}$$

Las ecuaciones (7-4) reciben el nombre de ecuaciones del movimiento del proyectil; nos dan su posición en cada instante t.

Sin embargo, estas ecuaciones no nos muestran cuál es la forma de la trayectoria. Para verlo, debemos eliminar t entre las ecuaciones (7-4). De la segunda tenemos $t = x/V \cos \vartheta$; y al sustituir esta expresión en la primera de las ecuaciones (7-4) resulta

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{V^2 \cos^2 \vartheta} + x \operatorname{tg} \vartheta \tag{7-5}$$

la cual es la ecuación de una parábola de eje paralelo al eje de las Y.

7-2 Tiempo de vuelo. Alcance de los proyectiles. El tiempo de vuelo se obtiene fácilmente de las ecuaciones (7-4). La coordenada y es nula en dos instantes: en el inicial y cuando el proyectil vuelve a alcanzar el suelo. Correspondiendo a este hecho, la ecuación

$$0 = -\tfrac{1}{2}gt^2 + V \operatorname{sen} \vartheta \cdot t$$

tiene dos soluciones, $t = 0$ y $t = 2V$ sen ϑ/g. Esta última, debe ser el tiempo de vuelo.

El instante en que el proyectil alcanza la altura máxima es aquel para el cual $v_y = 0$. De las ecuaciones (7-3) se ve que es el instante $t = V$ sen ϑ/g la mitad del tiempo de vuelo. Podemos concluir diciendo que el tiempo de subida es igual al tiempo de descenso cuando no hay rozamiento. Si se tuviera en cuenta la resistencia del aire, esto no sería rigurosamente cierto.

El *alcance* (A en la fig. 7-1) es la distancia x entre el punto de disparo y el punto en que el proyectil alcance el suelo, o sea, x en el instante $t = 2V$ sen ϑ/g. De las ecuaciones (7-4), resulta

$$A = \frac{2V^2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{g} = \frac{V^2}{g} \operatorname{sen} 2\vartheta \tag{7-6}$$

ya que sen $2\vartheta = 2$ sen $\vartheta \cos \vartheta$. El alcance depende de la velocidad inicial V y de ϑ, ángulo de elevación. Si, para una V dada, queremos obtener el alcance *máximo*, ϑ debe ser igual a 45°, ya que sen 90° es el valor máximo de la función seno. También se puede obtener A haciendo $y = 0$ en la ecuación (7-5) y despejando x.

La elevación máxima del proyectil, h, es la distancia y en el instante $t = V$ sen ϑ/g; puede hallarse sustituyendo este valor de t en las ecuaciones (7-4).

$$h = -\frac{1}{2}\, g\, \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{g^2} + V \operatorname{sen} \vartheta\, \frac{V \operatorname{sen} \vartheta}{g} = \frac{1}{2}\, \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{g} \tag{7-7}$$

También puede obtenerse de la ecuación de la trayectoria; si el máximo de la ecuación (7-5) se determina por derivación, resulta lo mismo.

El punto de mira para bombardeo es un instrumento óptico que utiliza los principios básicos del párrafo anterior. Para comprender su funcionamiento, consideremos un avión en vuelo horizontal (fig. 7-2). Supóngase que su altura sobre el suelo es h y su velocidad V. El blanco B se halla delante, formando su visual desde el avión un ángulo φ con la dirección de vuelo. El bombardero debe saber a qué valor de φ debe soltar la bomba. Despreciando el rozamiento con el aire, la bomba describiría la segunda mitad de una trayectoria parabólica. Si emplea t segundos en caer al suelo desde una altura h tendremos

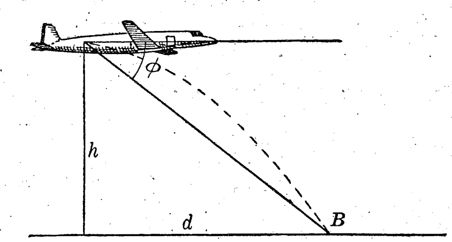

Fig. 7-2. Bomba lanzada desde un avión.

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{o} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Durante este tiempo t recorre una distancia $d = Vt$ según la horizontal y

$$d = V \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ahora bien, tg $\varphi = h/d$; luego el ángulo correcto de lanzamiento es

$$\varphi = \text{arc tg}\, \frac{h}{d} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{hg}{2V^2}} \tag{7-8}$$

Un punto de mira automático no solamente ajusta el anteojo para el valor correcto del ángulo φ (h y V le han sido fijadas mediante conexiones con el altímetro y el contador de revoluciones) sino que además hace correcciones para la velocidad del viento, desviación del vuelo horizontal, resistencia del aire y otros factores.

La verdadera trayectoria de un cuerpo en el aire viene dada cualitativamente por la curva rellena de la figura 7-3. Para grandes velocidades de lanzamiento, la asimetría es considerable, el

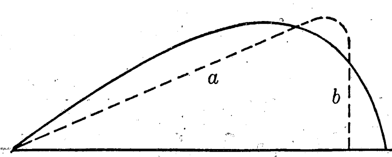

Fig. 7-3. Trayectoria real.

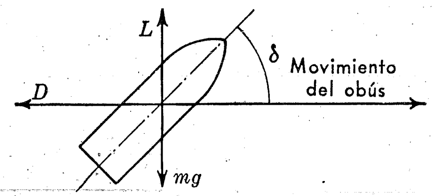

Fig. 7-4. Fuerzas que actúan sobre una granada.

alcance es menor que el dado por la ecuación (7-6) y la altura alcanzada es menor que la definida por la ecuación (7-7). Incluso antes de GALILEO, el interés sobre la balística ya era grande y se ha podido recoger mucha información acerca de las verdaderas trayectorias de proyectiles, pero el análisis se basaba en la siguiente suposición, que es interesante pero incorrecta: la trayectoria, que es la línea punteada de la figura 7-3, consiste en una parte recta, *a*, en la cual el movimiento es "violento", o no natural; y una parte curvada hacia abajo, *b*, que representa el movimiento natural en el sentido de Aristóteles.

7-3 Balística exterior. La parte de la Mecánica que estudia el movimiento de proyectiles en todos sus aspectos, recibe el nombre de *balística exterior* para distinguirla de la balística interior que estudia el comportamiento de los proyectiles en el interior de los cañones. El problema general del movimiento de los proyectiles, es demasiado difícil y complicado para ser tratado en este libro. Sin embargo, los principios físicos y la manera de enfocar el problema son muy interesantes y pueden ser descritos brevemente. Uno de los asuntos principales es la resistencia del aire.

La resistencia del aire depende de la velocidad y de la forma y tamaño del objeto móvil. En la figura 7-4 hemos dibujado una granada en movimiento hacia la derecha. El eje de la granada forma un ángulo δ, llamado "ángulo de ataque" con la dirección de movimiento. Las tres fuerzas que sobre él actúan son su peso mg, la fuerza de freno D debida a la resistencia del aire y la fuerza del viento que tiende a levantarlo L, debida principalmente a la diferencia de presiones en el aire que está por encima y por debajo del proyectil. Con todo esto, podemos establecer las ecuaciones de las cuales podemos deducir el movimiento (segunda ley de Newton),

$$m \frac{dv_x}{dt} = -D$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = L - mg$$

Aun cuando estas ecuaciones parezcan sencillas, hay que tener en cuenta que D y L son funciones de v_x y también de δ. En la figura 7-5 tenemos una gráfica de D en función de v_x para un valor fijo de δ. Resulta interesante observar que para velocidades próximas a la del sonido, D se hace muy grande. Las ecuaciones anteriores no pueden resolverse por procedimientos generales conocidos. Para resolverlas hay que utilizar los llamados "métodos numéricos", los cuales realizan la sustitución de D y L mediante gráficas y tablas y la integración mediante un proceso de sumación. Las modernas máquinas calculadoras electrónicas son una gran ayuda en la teoría de la balística.

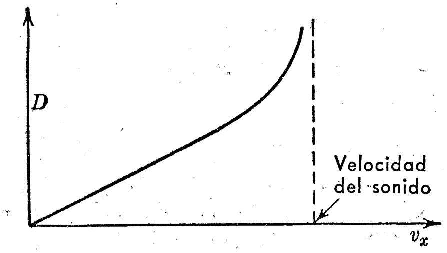

Fig. 7-5. Fuerza de freno en función de la velocidad del proyectil.

7-4. Movimiento vertical de una gota de lluvia. Los cuerpos, al caer, están sujetos, no solamente a su peso, sino también a la fuerza retardadora debida a la resistencia del aire. Ésta es tanto mayor, cuanto mayor sea la velocidad del cuerpo que cae, y para pequeñas velocidades es proporcional a v. Sea m la masa de una gota de lluvia y tomemos como positivos los desplazamientos hacia abajo, con lo que la segunda ley de Newton quedará en la forma.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv \tag{7-9}$$

en donde b es la fuerza de rozamiento por unidad de velocidad. Mientras $mg > bv$, dv/dt será positiva y v crecerá. Finalmente, sin embargo, dv/dt se anulará y la gota caerá con velocidad constante. Esta "velocidad de régimen" se alcanza cuando $bv = mg$; luego

$$v_t = \frac{mg}{b} \tag{7-10}$$

Para cualquier cuerpo al caer, obtendríamos un resultado análogo. Una persona que cayera desde una altura muy grande, alcanzaría una velocidad de régimen de unos 250 km/h. El paracaídas no es más que un dispositivo que hace muy grande la constante b.

7-5. Fuerzas centrípeta y centrífuga. Una atracción de feria que va desapareciendo ya, es la rueda horizontal, consistente en un disco horizontal giratorio. Cuando el disco alcanza una velocidad de giro suficiente, las personas que en él estaban sentadas, salen proyectadas hacia afuera y si les preguntamos por qué, dirán que debido a la "fuerza centrífuga". Veremos que esto es un error, pero analicemos antes la situación.

Supongamos, para mayor sencillez, un objeto unido a un eje vertical S (figura 7-6) mediante una cuerda y que gire alrededor de S con velocidad constante v, manteniéndose en un plano horizontal. La longitud de la cuerda la representamos por r y la superficie en que tiene lugar el movimiento la supondremos perfectamente lisa, o sea sin rozamiento. La masa no tendrá, pues, ninguna aceleración vertical; su peso viene neutralizado por el soporte de la superficie.

Sabemos, por lo visto en el párrafo 5-9, que la masa tiene una aceleración *centrípeta* de magnitud v^2/r. Esto significa que debe existir una fuerza que proporcione esta aceleración. Por la ley de Newton sabemos que dicha fuerza debe tener el valor mv^2/r, en unidades absolutas; y debe de estar dirigida en la misma dirección y sentido de la aceleración, o sea que debe ser *centrípeta* (del latín *petere*, buscar). Esta fuerza la da la cuerda la cual, estando tensa, tira de la masa hacia O. La tensión será, pues, igual a mv^2/r, lo cual podríamos comprobar intercalando un dinamómetro entre O y m.

Es cierto, desde luego, que la masa tiene una tendencia centrífuga mientras gira; por eso, al romperse la cuerda, se aleja moviéndose a lo largo de una tangente. Pero esto ocurre, precisamente, cuando la cuerda deja de aplicar la fuerza centrípeta y la masa debe llevar un movimiento sin fuerzas a lo largo de una línea recta, según nos indica la primera ley de Newton. Por tanto, no hay ninguna *fuerza centrífuga* aplicada a la masa m.

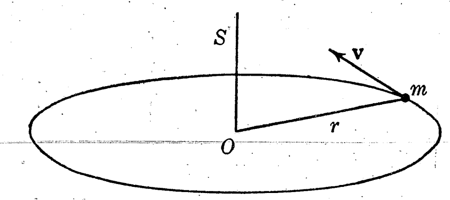

Fig. 7-6. Masa giratoria.

Análogamente, la persona de la rueda giratoria no estaba empujada hacia afuera de la rueda por ninguna fuerza centrífuga; empezó a deslizarse porque el rozamiento, que al principio daba la fuerza *centrípeta* necesaria para mantenerla en un estado de aceleración centrípeta, no era ya suficiente para ello. O sea que empezó a deslizarse en el momento en que mv^2/r (m es su masa) se hizo mayor que la fuerza de rozamiento. Pero ésta es igual a μmg, según vimos en el párrafo 6-6, en donde μ es el coeficiente de rozamiento. Luego el deslizamiento tiene lugar en el instante en que

$$\frac{mv^2}{r} = \mu mg \tag{7-11}$$

o bien, como $v = \omega r$, cuando $\omega = \sqrt{\mu g/r}$. Si la velocidad angular y la distancia del centro, r, estuviesen determinadas, podríamos usar la rueda para medir μ. De este resultado vemos, también, que una persona sentada cerca del centro tardará más en ser disparada (necesitará una ω mayor) que otra sentada cerca del borde de la rueda.

Hemos visto que la masa m de la figura 7-6 se halla sometida solamente a una fuerza centrípeta. Consideremos ahora el eje S alrededor del cual gira m. La cuerda tira de él, luego S está sometido a una fuerza *centrífuga* aplicada en O. Esta fuerza centrífuga es la reacción, en el sentido dado en la tercera ley de Newton, de la fuerza centrípeta aplicada a m; no está aplicada a m, como tampoco está aplicada a S la fuerza centrípeta. En resumen: El cuerpo giratorio está sometido a una fuerza centrí*peta*, mientras que el centro al cual está unido el cuerpo soporta una fuerza centrí*fuga*. Corrientemente, como en el ejemplo que nos ocupa, la fuerza centrífuga que actúa sobre S viene neutralizada por otra fuerza debida al soporte de S que lo mantiene fijo, por lo que la fuerza resultante aplicada a S es nula. Por tanto, S no tiene aceleración.

7-6. Movimiento en las curvas. Los mismos principios se aplican al movimiento de los automóviles y trenes en las curvas. En la figura 7-7*a* tenemos el conjunto formado por un eje, dos ruedas y una carga, moviéndose sobre una curva cuyo centro de curvatura está a una distancia R a la derecha y en el plano

del diagrama. Tanto da que se esté moviendo hacia el lector o en sentido opuesto. El centro de gravedad C, deberá estar sometido a una fuerza resultante mv^2/R dirigida hacia la derecha,[1] pero físicamente tenemos dos fuerzas aplicadas a C: el peso mg, que está dirigido verticalmente, hacia abajo y la reacción de la carretera, F, cuya magnitud, dirección y sentido se ajustan de forma que hagan posible el movimiento. Dicho de otra forma, F debe ser tal que al sumarla vectorialmente con mg, resulte una fuerza mv^2/R hacia la derecha, como se indica en la figura 7-7*b*.

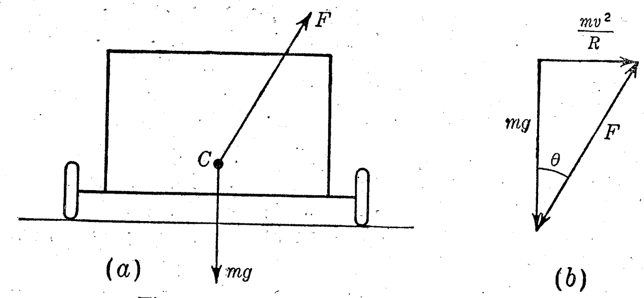

Fig. 7-7. Automóvil tomando una curva.

¿Puede dar esta fuerza F la carretera? Como F tiene una componente *paralela* a la superficie de la carretera, es el rozamiento quien debe dar esa parte de F. Por una parte (véase fig. 7-7*b*) la componente paralela de F es mv^2/R. Por otra, el valor máximo del rozamiento es μmg. Luego el automóvil se mantendrá en la carretera mientras

$$\frac{v^2}{R} < \mu g \tag{7-12}$$

Si la carretera es resbaladiza, sería peligroso llevar una gran velocidad como también lo sería si R fuese pequeño.

El peralte de las carreteras evita tales peligros. Evidentemente, si en la figura 7-7 ponemos la superficie de la carretera perpendicular a F, como en la figura 7-8, el rozamiento no interviene en absoluto; el coche ejerce una fuerza contra la carretera que es algo mayor que su peso. Obsérvese que en la figura 7-8 los vectores **F** y mg son exactamente iguales a los de la figura 7-7; tan sólo ha cambiado la orientación del coche. El ángulo de peralte, ϑ, es el mismo que el indicado en la figura 7-7*b*.

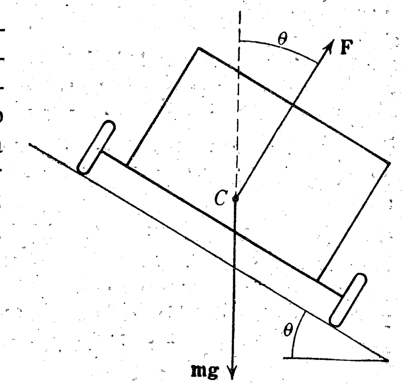

Fig. 7-8. Carretera peraltada.

$$tg\,\vartheta = \frac{v^2}{Rg} \tag{7-13}$$

[1] Esto se estudia con más precisión en el párrafo 9-4.

El ángulo ϑ, necesario para un peralte adecuado, varía con la velocidad.

Para realizar un análisis más preciso de este problema, deberíamos tener en cuenta los pares tan bien como las fuerzas. En realidad, la fuerza de la carretera no está aplicada en el centro de masas como hemos supuesto en la figura 7-7; está aplicada en los puntos de contacto de la carretera con los neumáticos, tal como se indica en la figura 7-9. En cada punto de contacto tenemos dos componentes de la fuerza. A fin de obtener el resultado mv^2/R hacia la derecha, debe cumplirse.

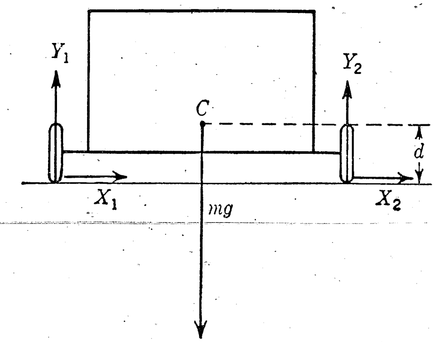

Fig. 7-9. Coche sobre una carretera sin peralte.

$$Y_1 + Y_2 - mg = 0$$
$$X_1 + X_2 = \frac{mv^2}{R}$$

Incluso teniendo el coche una aceleración centrípeta, la suma de todos los momentos respecto a C debe ser nula, ya que el coche no debe girar en el plano del diagrama. Así, pues, queda

$$X_1 d + X_2 d + Y_2 \frac{l}{2} - Y_1 \frac{l}{2} = 0$$

en donde l es la longitud del eje y d la altura de C sobre el suelo. Resolviendo las tres últimas ecuaciones encontramos

$$Y_1 = \frac{mg}{2} + \frac{mv^2}{R}\frac{d}{l}$$
$$Y_2 = \frac{mg}{2} - \frac{mv^2}{R}\frac{d}{l}$$

Las reacciones en las dos ruedas no son iguales. Cuando Y_2 se hace negativa, el coche vuelca. Esto ocurre cuando

$$\frac{v^2}{R} \geq \frac{gl}{2d} \qquad (7\text{-}14)$$

Aquí podemos ver la ventaja de una d pequeña y una l grande.

7-7. Efecto de la rotación de la Tierra sobre g. Hemos dicho que el peso de un objeto, mg, es la fuerza de la atracción de la Tierra sobre él y está dirigida verticalmente hacia abajo. Vamos a ver que esto no es rigurosamente cierto. En la figura 7-10, P es un punto de la superficie terrestre a una latitud L. En el punto P tenemos un cuerpo de masa m colocado en el platillo de una balanza. *Si la Tierra no girase,* el cuerpo estaría en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas:

1. La atracción de la Tierra, mg_0, hacia su centro O.
2. El empuje del platillo, W_0, que es igual y opuesto a mg_0.

Pero como la Tierra gira, m tiene una aceleración hacia Q y, por tanto, debe actuar una fuerza mv^2/r en la dirección de la flecha punteada. La atracción de la Tierra queda invariada por la rotación, luego la fuerza (1) sigue siendo mg_0 y sigue estando dirigida hacia O. Pero, en cambio, W_0 se convierte en W, fuerza que al sumarla (vectorialmente) con mg_0 nos dará la fuerza mv^2/r dirigida hacia Q. El vector *opuesto* a W recibe el nombre de peso de la masa m y se hace igual a mg. No está dirigido hacia O, sino hacia M (la distancia entre O y M está muy exagerada en la figura; es de unos 11 km para $L = 45°$).

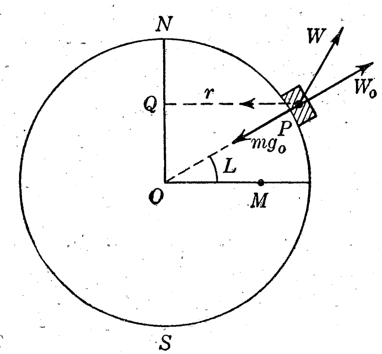

Fig. 7-10. Efecto de la rotación de la Tierra sobre la "gravedad".

La relación vectorial entre g y g_0 viene indicada en la figura 7-11. Aplicando el teorema del coseno resulta de la figura

$$g^2 = g_0^2 + \frac{v^4}{r^2} - 2g_0 \frac{v^2}{r} \cos L$$

o, en función de la velocidad angular ω de la Tierra y de su radio R

$$g^2 = g_0^2 + R^2\omega^4 \cos^2 L - 2g_0R\omega^2 \cos^2 L \qquad \text{ya que} \qquad r = R \cos L.$$

El segundo término del segundo miembro es mucho menor que los otros y puede, por tanto, despreciarse. Así, pues

$$g^2 \simeq g_0^2 \left(1 - 2\frac{R}{g_0}\omega^2 \cos^2 L\right)$$

aproximadamente, o, en virtud del teorema del binomio

$$g \simeq g_0 - R\omega^2 \cos^2 L \qquad (7\text{-}15)$$

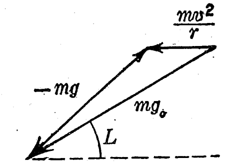

Fig. 7-11. Relación entre g y g_0.

La reducción del valor de g_0 es máxima en el Ecuador ($L = 0$), y nula en los polos. Es aleccionador para el estudiante examinar la tabla 6-2 para ver si este efecto es observable o no. La cantidad g_0 recibe el nombre de "verdadero valor de la aceleración gravitatoria"; varía con la altitud y un poco con la distribución local de rocas en la superficie terrestre. Para una mayor extensión de esta materia, consúltese el capítulo 11.

7-8. Otros ejemplos. Para que un avión gire horizontalmente sin deslizamiento, debe formar un ángulo con la horizontal tal que la reacción del aire sobre el avión, F, al componerse con su peso dé una resultante mv^2/r como se indica en la figura 7-12.

En el batidor de la leche se hace girar muy rápidamente una mezcla de partículas coloidales. Las partículas más densas, por requerir una fuerza mv^2/r mayor

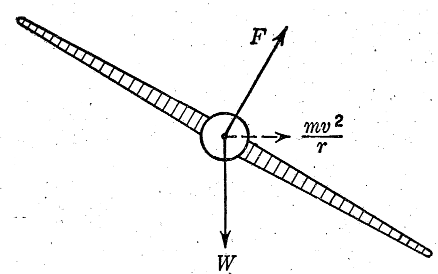

Fig. 7-12. Avión en vuelo curvo.

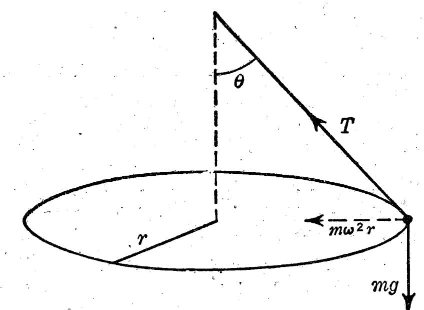

Fig. 7-13. Péndulo cónico simple.

que las otras, ejercen una fuerza *centrífuga* mayor sobre el medio que tiende a mantenerlas en su sitio. Como el medio es flúido, no puede proporcionar la reacción a esta fuerza y las partículas se mueven hacia el exterior, tanto más de prisa cuanto más densas sean. Como la leche es más densa que la nata, en la proximidad de la pared exterior de la centrifugadora tendremos una concentración de leche mayor que en la región central, donde tendremos la nata.

En Química Orgánica y Biología se usan las "ultracentrifugadoras" para fines análogos. Algunas giran estando suspendidas en el aire y alcanzan velocidades angulares de hasta 1 millón de revoluciones por minuto.

El péndulo cónico simple consta de un hilo que soporta una masa la cual debe girar manteniéndose sobre una circunferencia horizontal (cfr. fig. 7-13). La tensión T y el peso mg dan una resultante (flecha punteada) igual a $m\omega^2 r$. Resolviendo las fuerzas, tenemos

$$\left.\begin{aligned} mg &= T \cos \vartheta \\ m\omega^2 r &= T \operatorname{sen} \vartheta \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}16)$$

Pero si l es la longitud del hilo, $r = l \operatorname{sen} \vartheta$ y obtenemos al eliminar T de las ecuaciones (7-16)

$$\cos \vartheta = \frac{g}{\omega^2 l} \quad (7\text{-}17)$$

Cuanto mayor sea ω, mayor será el ángulo ϑ.

El truco de poner un líquido en un cubo y hacer girar a éste en un círculo vertical sin que se salga el líquido, se puede explicar muy fácilmente. Al pasar el cubo por la posición más alta, el líquido se halla sometido a dos fuerzas hacia abajo, su peso y el empuje E del fondo del cubo contra él. Estas dos fuerzas, al sumarse, deben darnos la fuerza mv^2/r. Luego

$$mg + E = \frac{mv^2}{r}$$

Cuando $v^2/r = g$, E vale cero y el cubo no ejerce fuerza alguna sobre el líquido. Para velocidades menores, se saldría. Pero E no puede ser negativo a menos que el objeto contenido en el cubo estuviera pegado a él. Sin embargo, de nuestra ecuación resulta que E es negativo cuando

$$mg > \frac{mv^2}{r}$$

Luego el líquido se saldrá si $v^2 < rg$.

7-9. La Teoría de la Relatividad. Imaginemos estar viajando en una astronave, lo suficientemente lejos de la Tierra para no estar ya sometidos a la gravedad. Las leyes del movimiento que observáramos ¿serían diferentes de las que conocemos?

NEWTON da la solución en lo que se refiere a la ley de la fuerza. En la Tierra, esta ley es $F = ma$. Pero para medir a en la astronave, precisamos un sistema de referencia, es decir, un sistema de coordenadas que nos permita determinar distancias y, por tanto, velocidades y aceleraciones. Este sistema debe ser diferente del usado en la Tierra, puesto que debe sernos válido al hacer medidas en la astronave. Para comparar las leyes, por tanto, deberemos introducir *dos* sistemas de referencia.

Entre ambos existe una relación muy sencilla. Sean x, y, z, los ejes del sistema rectangular fijo en el laboratorio de la Tierra. Un punto del eje de las x que esté a 1 000 km del origen, tendrá $x = 1\,000$ km. Supongamos ahora que la astronave lleve, solidaria a ella, otro sistema de ejes, cuyo origen esté fijo en la astronave. Las distancias medidas respecto a este sistema las representaremos por x', y', z'. Si la astronave se mueve con velocidad constante v a lo largo del eje x del sistema del laboratorio, el origen del sistema de la astronave estará en el punto vt en el instante t (suponiendo que los dos orígenes coincidieran en el instante $t = 0$). Un objeto, colocado en el punto x' por el viajero de la astronave, estará a una distancia $x' + vt$ del origen del sistema xyz y el observador de la Tierra llamaría x a esta distancia. Luego

$$x' = x - vt \quad (7\text{-}18)$$

Esta ecuación, que relaciona la distancia en un sistema con la correspondiente en el otro, forma una especie de diccionario cinemático que se usa para traducir medidas de uno a otro sistema. Aun cuando sea tan sencilla, es de gran interés y recibe el nombre de *transformación de Galileo.*

Veamos qué ocurre con la ley $F = ma$. ¿Tiene F el mismo valor en ambos sistemas? Evidentemente $a = d^2x/dt^2$, mientras que la aceleración observada por el ocupante de la astronave es $a' = d^2x'/dt^2$. Pero si derivamos dos veces la ecuación (7-18) obtenemos d^2x/dt^2, *siempre y cuando sea v constante.* La fuerza es, pues, la misma, si la astronave se mueve con velocidad constante y extendiendo este argumento veríamos que todas las otras leyes mecánicas, basadas en la de Newton, son iguales para ambos observadores si v es constante.

Los sistemas sin aceleración, reciben el nombre de sistemas *inerciales.* Un punto de referencia fijo a la Tierra, es casi un sistema inercial, si la aceleración debida a la rotación de la Tierra es pequeña. Un cohete que se mueva con velocidad constante, es un sistema inercial; en cambio, no lo será un cohete en movimiento acelerado. El resultado que hemos encontrado, lo podemos enunciar de la siguiente manera: Las leyes de Newton son válidas en todos los sistemas inerciales.

La observación lo corrobora. El tirón brusco que experimentamos cuando arranca o se para un tren, indica la existencia de una fuerza no newtoniana puesta en juego por el hecho de que el tren ha dejado de ser un sistema inercial. Las fuerzas centrífugas pueden, también, atribuirse a esta causa. El carácter de estas fuerzas ficticias parece ser que es el hecho de ser proporcionales a las masas a las cuales están aplicadas. Pero eso ocurre también con la gravedad. ¿Podría ser, entonces, que la gravedad fuera también una fuerza ficticia que resulta del hecho de que las observaciones se hacen en un sistema de referencia incorrecto? Consideraciones de este tipo llevaron a EINSTEIN a la Teoría de la Relatividad Generalizada, la cual afirma esta cuestión. Pero volvamos a cuestiones más sencillas y examinemos las consecuencias de la "invariancia" de las leyes de Newton para todos los sistemas inerciales.

Por una parte es una ventaja, puesto que significa que tan sólo tenemos que aprender un sistema de leyes y podemos aplicarlas a muchos casos. La Física se distingue de las otras disciplinas por el hecho de no tener que cambiar sus leyes de un ejemplo a otro. Pero tras esta ventaja acecha lo que muchas mentalidades consideran una desventaja: si las leyes son las mismas para todos los sistemas inerciales, todos ellos serán equivalentes desde un punto de vista dinámico; tan bueno es uno como otro y no podremos decir qué sistema está en reposo y cuál en movimiento. Ésta es, quizá, la consecuencia más importante de nuestro estudio. Podemos enunciarla diciendo: Las leyes de Newton son incapaces de determinar la condición de reposo absoluto; todos los movimientos son relativos. Éste es uno de los resultados obtenidos por la Teoría de la Relatividad.

A principios del siglo veinte surgió una dificultad muy peculiar. Habían sido descubiertas otras leyes físicas, entre ellas la de la propagación de la luz, que no conservaba su forma para todos los sistemas inerciales. Al aplicar la transformación de x a x' mediante la ecuación (7-18), las leyes cambiaban. Fallaba la Teoría de la Relatividad.

Esto les indicó a EINSTEIN y a otros, que en la teoría había algún error. Quizá fuera natural sospechar de las leyes. Pero experimentos muy precisos[1] las comprobaron como buenas. EINSTEIN postuló que la transformación (7-18) era errónea, que las nociones que tan arraigadas teníamos acerca de los sistemas en movimiento, eran falsas. Aún más que eso: demostró las transformaciones que rehabilitaban la Teoría de la Relatividad. Pero antes de escribirlas, comentemos un aspecto de la transformación de Galileo que puede haber pasado desapercibido.

La ecuación (7-18) nos dice que las distancias medidas, x y x', son diferentes en diferentes sistemas inerciales. Por otra parte, hay dos cosas que cambian en todo sistema, distancia y tiempo. En cambio el tiempo, aparece solamente representado por t, nunca por t'. Esto refleja lo que creían GALILEO y NEWTON: el tiempo es el mismo en todos los sistemas inerciales.

EINSTEIN encontró que las relaciones del tipo (7-18) no podían ser válidas para la relatividad *a menos que en ellas figurase el tiempo*. En efecto, tuvo que escribir dos ecuaciones en lugar de la (7-18):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \qquad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \tag{7-19}$$

En donde c es la velocidad de la luz en el vacío, 3×10^{10} cm/s.

La primera de éstas es análoga a la (7-18); en efecto, se reduce a la ecuación de Galileo cuando $v \ll c$, ya que entonces la raíz del denominador tiende a 1. es una buena aproximación. La segunda de las ecuaciones (7-19) nos indica que el tiempo no transcurre de la misma forma en dos sistemas inerciales. El tiempo medido con un reloj en la astronave, t', es diferente del tiempo, t, medido por el observador de la Tierra con su reloj, independientemente de la precisión con que estén ajustados estos relojes. En cambio, la diferencia entre t' y t no es muy grande para velocidades ordinarias, ya que si $v \ll c$ y x no es demasiado grande, podemos poner, muy aproximadamente, $t' = t$, de acuerdo con (7-19). Y esto es, precisamente, lo que implica la transformación de Galileo.

---

1 El estudiante puede ver los experimentos de MICHELSON y MORLEY en cualquier libro de Física Moderna.

En cambio, en el campo de la Astronomía y de la Física atómica la importancia de las ecuaciones (7-19), llamadas transformaciones de Lorentz-Einstein, es enorme. Los electrones y las estrellas pueden moverse con velocidades del orden de la de la luz y ocurren toda clase de fenómenos paradójicos a primera vista. Relojes que se mueven rápidamente, se hacen lentos; objetos que se muevan rápidamente, se contraen en la dirección del movimiento e incrementan su masa; dos acontecimientos que se aprecian como simultáneos en un sistema aparecen como sucesivos en otro. Cada uno de estos fenómenos es consecuencia de las transformaciones de Einstein-Lorentz y han sido verificados experimentalmente. El "sentido común" no puede probar que sean falsos; en cambio, estos hechos demuestran lo falible que ha resultado ser el sentido común como guía.

La importancia de estos efectos se nos hará evidente, más adelante, cuando estudiemos los aceleradores de partículas atómicas.

PROBLEMAS

1. Un rifle colocado horizontalmente a 1 m sobre el nivel del suelo, dispara una bala con una velocidad inicial de 600 m/s. En el mismo instante se deja caer libremente otra bala desde una altura de un metro. ¿Qué bala llegará antes al suelo? ¿A qué distancia del fusil irá a parar la bala disparada? (Despréciese la resistencia del aire.)

2. Una granada se dispara con un ángulo de 40° y una velocidad inicial de 800 m/s. Despreciando la resistencia del aire, hallar el alcance y la máxima altura de su trayectoria.

3. Un proyectil se dispara con un ángulo de 35° y una velocidad inicial de 1 km/s. Despreciando la resistencia del aire, hállense el alcance y la máxima altura de la trayectoria. El proyectil recorre 2 m dentro del cañón. ¿Qué fuerza constante, en newtons, se necesita para lanzarlo y durante qué tiempo actuará esta fuerza? (La masa del proyectil es de 100 kg.)

4. Un bloque de hielo se desliza por un tejado de 7 m de longitud y 30° de inclinación respecto a la horizontal. El borde del tejado está a 10,7 m del suelo y separado 30 cm de la pared de la casa. Si el hielo parte del reposo desde la parte más alta del tejado y el coeficiente de rozamiento es 0,1. ¿A qué distancia de la pared del edificio chocará el hielo con el suelo?

5. Un avión de bombardeo pica hacia el suelo con un ángulo de 60° y una velocidad de 675 km/h. El avión suelta la bomba a una altura de 400 m. *a)* Calcúlese el tiempo que transcurre hasta que la bomba llega al suelo. *b)* Hállese la distancia entre el punto directamente debajo del avión en el momento de soltar la bomba y el punto en que ésta alcanza el suelo.

6. Una granada del calibre 50 se dispara hacia arriba con un ángulo de 30° directamente a la izquierda de un bombardero que vuela horizontalmente a 1 700 m de altura con una velocidad de 500 m/s, falla el blanco al que apuntaba y cae al suelo. Suponiendo nulo el rozamiento del aire y una velocidad inicial de 400 m/s ¿en qué punto chocará el proyectil con el suelo?

7. Un proyectil disparado desde el suelo con un ángulo de 30° respecto a la horizontal tiene una velocidad inicial de 350 m/s. *a)* ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad inicial? *b)* ¿A qué altura llegará? *c)* ¿Qué tiempo permanecerá en el aire? *d)* ¿Cuál es su alcance?

8. Haciendo uso de la ecuación (7-5) determínense las expresiones generales para el alcance y altura máxima del proyectil en función de ϑ. (SUGERENCIA: Cuando y es máxima, $dy/dx = 0$).

9. Haciendo $dR/d\vartheta$ igual a cero en la ecuación (7-6), demostrar que el alcance máximo, se obtiene para $\vartheta = 45°$.

10. Una masa m_1, lanzada desde el origen en el instante $t = 0$, está inicialmente apuntando a otra masa m_2 colocada en el punto (x', y'). Si a m_2 se la deja caer libremente en el instante $t = 0$, demostrar que las masas chocarán en el aire. Hállese la expresión que dé el tiempo de choque.

11. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial V que forma un ángulo ϑ con el suelo. El proyectil alcanza su altura máxima h y vuelve al suelo al cabo de T segundos de haber sido disparado. Despreciando la resistencia del aire trácense aproximadamente, tomando el tiempo t en abscisas, las siguientes gráficas: *a)* la altura y en función de t; *b)* la componente vertical de la velocidad v_y en función de t; *c)* la componente horizontal de la velocidad v_x en función de t; *d)* la aceleración a del proyectil en función de t.

12. El valor de b de la ecuación (7-10) es, aproximadamente de 0,01 g/s para una gota de lluvia de diámetro 2 mm. Hállese su velocidad de régimen.

13. En una carretera se debe construir una curva circular de 130 m de radio. Debe diseñarse de forma que la puedan tomar a 50 km/h. Determínese el ángulo de peralte apropiado.

14. Un muchacho y su bicicleta pesan 65 kg y van a una velocidad de 3 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y el suelo es de 0,4, determínese el radio del menor círculo que puede describir sin deslizamiento sobre suelo horizontal. ¿Qué ángulo formarán con el suelo, el muchacho y la bicicleta, al describir dicho círculo?

15. Un ferrocarril se mueve por una vía coincidente con el Ecuador terrestre en el sentido opuesto a la rotación de la Tierra. Cuando el tren está parado, un dinamómetro colgado del techo de uno de los coches y que soporta una cierta masa, señala P' kg. Si el tren se mueve con una velocidad v, demuéstrese que el dinamómetro indicará aproximadamente

$$P = P'\left(1 + \frac{2v\omega}{g}\right)$$

en donde ω es la velocidad angular de la Tierra y g la aceleración de la gravedad.

16. Un hombre hace girar un objeto de masa M en un círculo vertical con una velocidad angular ω, siendo l la longitud de su brazo. Hallar la fuerza ejercida por su brazo: *a)*, en lo alto del círculo; *b)*, en la parte baja del círculo; *c)*, cuando el brazo está horizontal.

17. Un avión de 2 toneladas, riza el rizo con una velocidad de 320 km/h. ¿Cuál es el radio del mayor círculo que puede describir el avión sin tener tendencia a caer desde el punto más alto?

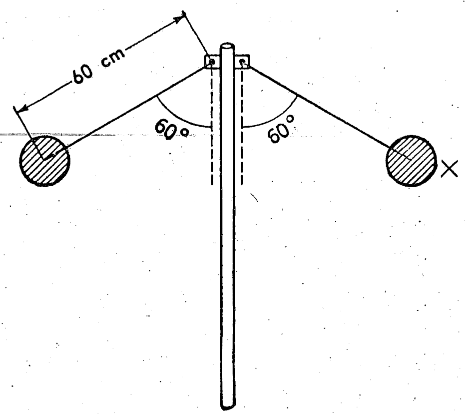

Fig. 7-14. Problema 20.

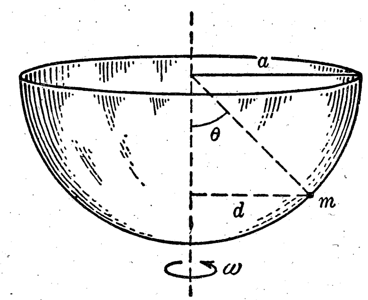

Fig. 7-15. Problema 21.

18. Un hombre que pesa 60 kg salta de un avión y cae en el espacio soportado por un paracaídas de 20 kg. La fuerza retardadora del aire sobre el paracaídas es proporcional a la velocidad. El paracaidista llega al suelo con velocidad constante igual a la que habría adquirido si cayera sin paracaídas desde una altura de 2,7 m. ¿Cuál es el valor de b para el hombre y el paracaídas?

19. Un vagón de ferrocarril que está aislado de la luz y del sonido exteriores, se mueve con velocidad constante v sobre una vía circular de radio R que está peraltada en un ángulo $\vartheta =$ $=$ arc. $tg\ v^2/gR$. *a)* ¿En qué dirección apuntará una plomada suspendida del techo del vagón? *b)* ¿Qué experimento puede realizar un hombre para demostrar que está acelerado respecto a la Tierra? (Se supone que *no* conoce el valor de g).

20. Las bolas de un regulador de una máquina de vapor (véase fig. 7-14) pesan 4 kg cada una. Despreciando el peso de los brazos, hállese la velocidad angular del regulador. ¿Cuál es la tensión en los brazos soportantes?

21. Una taza semi-esférica de radio a gira alrededor de su eje vertical con velocidad angular ω (véase fig. 7-15). Si se coloca una bola de masa m en la taza giratoria se encontrará, finalmente, en un punto a una distancia d del eje. Hállese d en función de ω.

22. Intégrese la ecuación (7-9) para obtener

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)$$

23. Las ecuaciones (7-19) indican que un objeto móvil se acorta dividiendo su longitud en reposo por el factor $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ siendo v su velocidad. Esto puede demostrarse rigurosamente. Calcúlese el acortamiento de un plano de longitud 70 m que se mueve a 500 km/h; de un cohete de 30 m de longitud que se mueve a 5 000 km/h; de un electrón (diámetro 10^{-10} cm) que se mueve con una velocidad igual a la mitad de la velocidad de la luz.

24. Según las más modernas teorías, las estrellas más distantes se alejan de nosotros con una velocidad próximamente igual a la velocidad de la luz c. ¿Cuál sería su forma respecto a un observador terrestre?