Exercici 1 $\sigma = \{P^2, Q^1, f^1, g^2, h^3, a, b\}$ → aritat (número d'arguments)

Símbols de funció (o d'operador) → (f, g, h)

Símbols de constant (a, b, c, d, e)

Símbols de predicat (o de relació) → $(A, B, \ldots, Z)$

Definició: Si σ és un vocabulari, definim el conjunt dels σ-termes com el conjunt d'elements generats per les següents regles:

(T1) Tota variable és un terme → (u, v, x, y, z)

(T2) Tot símbol de constant de σ és un terme.

(T3) Si f és un símbol de funció de n arguments de σ i $t_1, \ldots, t_n$ són termes, llavors $f(t_1, \ldots, t_n)$ és un terme.

→ es poden operar amb variables o constants.

(1) a, $\cancel{a'}$, $\cancel{c}$, $\cancel{h}$, $\cancel{3}$, $\cancel{f}$, $f(a)$, $\cancel{f(a,b)}$, $\cancel{\alpha}$, x_{120}, z_3.

res; → res (no té interpretació en σ); símbol de constant $\notin \sigma$; f té aritat 1; no és res

(2) $h(x,b,y)$, $\underbrace{\cancel{h(x,b)}, \cancel{h(a,b)}}_{h \text{ té aritat } 2}$, $\cancel{g(a,3)}$, $\cancel{g(b)}$, $g(b,b)$, $\underbrace{\cancel{Q(x)}, \cancel{Qx}, \cancel{Pax}}_{\text{Segons les regles, no és possible que un símbol de predicat aparegui en un terme.}}$.

3 no és res en σ; g té aritat 1

LÒGICA I LLENGUATGES

(3) $\cancel{g(f(x))}$, $g(f(x),a)$, $\cancel{f(f(c))}$, $\cancel{g(f(x), Pax)}$

g té aritat 2; c no és cap constant a σ.; No és possible pel símbol de predicat

(4) $f(g(a,b))$ ✓ és terme

a l'aplicar a i b a g, obtenim 1 terme i f té aritat 1.

on avaluem la funció.

PROBLEMES

Llenguatges de predicats

Com escriure bé fórmules

Exercici 1. Determineu quines de les següents expressions són termes en el vocabulari $\sigma = \{P^2, Q^1, f^1, g^2, h^3, a, b\}$.

1. a, a', c, h, 3, f, $f(a)$, $f(a,b)$, α, x_{120}, z_3.
2. $h(x,b,y)$, $h(x,b)$, $h(a,b)$, $g(a,3)$, $g(b)$, $g(b,b)$, $Q(x)$, Qx, Pax.
3. $g(f(x))$, $g(f(x),a)$, $f(f(c))$, $g(f(x), Pax)$.

Exercici 2. Considereu el següent vocabulari $\sigma = \{R^2, Q^1, f^2, g^1, a, b\}$. Determineu quines de les següents expressions són σ-fórmules i quines són σ-fórmules atòmiques:

(a) $\forall x \forall y Rxy$ → σ-fórmula

(b) $\forall x Px$ → Res, ja que $P \nexists \sigma$.

(c) Rab → σ-fórmula atòmica (només apareix una relació i les constants on l'avaluem).

(d) $Qf(a, f(b))$ → Res, f té aritat 2

(e) $\neg Rxy$ → σ-fórmula

(f) $QRxy$ → Rxy no és terme

Relació de 2 termes. → Una relació no s'aplica a un booleà.

(g) $Rxy \wedge Qg(x)$ → σ-fórmula

(h) $\exists a Qa$ → No es pot quantificar sobre constants.

(i) $\forall a Rab$ → No es pot quantificar sobre constants. → només sobre variables.

(j) $Qf(a,b)$ → σ-fórmula atòmica

(k) $f(x,t) = g(x) + t$ → $t \nexists \sigma$

(l) $Qf(a, Rxy)$ → No és res, ja que no té sentit → no és terme

(m) $\forall x(Px \to (Qx \vee Rxy))$ → $P \nexists \sigma$

(n) $\forall x \exists y (Qx \to Rxy)$ → σ-fórmula

(o) $\forall x(Qx \to \exists y(Qx \vee Rxy))$ → σ-fórmula

(p) $\forall x \exists y Qy \to Rxy$ → σ-fórmula

(q) $x \to y$ → No és una fórmula perquè l'operador funciona només amb àtoms

(r) $\forall x(Qg(x) \to (Qx \wedge Rx))$ → A R li falta 1 argument.

Hauríem d'aplicar una relació a les variables.

Exercici 3. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats. (vocabulari a la següent pàgina)

(a) Dues rectes ortogonals tenen un punt en comú.
(b) Si dues rectes són paral·leles, no tenen cap punt en comú.
(c) Per un punt exterior a una recta passa una paral·lela a la recta.

Exercici 3

(a) $\forall x \forall y((Rx \wedge Ry \wedge Oxy) \to \exists z(Pz \wedge Tzx \wedge Tzy))$

(b) $\forall x \forall y(((Rx \wedge Ry) \wedge Pxy) \wedge \forall z(Pz \to \neg(Tzx \wedge Tzy)))$

(c) $\forall x \forall y((Px \wedge \neg Txy \wedge Ry) \to \exists z(Rz \wedge Pyz \wedge Txz))$

Exercici 4

(a) C: Miquel
P_x: "x és un bon professor" — la relació té 1 argument
} P_c (evaluem P amb la constant c).

(b) C: Laia
L_{xy} "x ha llegit y"
E_{xy}. "x ha escrit y"
Q_x: "x és de Sant Quirze"
M_x: "x és de Santa Maria"
A_x: "x és autor"
I_x: "x és un llibre"
} $\forall y((A_y \land (Q_y \lor M_y)) \to \forall z(I_z \land E_{yz} \to L_{cz}))$ → "Sigui quin sigui l'autor de SLQ o SLM, aleshores la Laia ha llegit els seus llibres".
Sense això també està bé

(c) I_x: "x és intel·ligent"
$f(x)$: "és el pare de x"
$g(x)$: "és la mare de x"
} $\forall x((I f(x) \land I g(x)) \to I x)$

(d) T_x: "x s'ha testejat"
P_x: "x és un programa"
F_x: "x funciona"
} $\forall x((P_x \land F_x) \to T_x)$

Per això, utilitzeu el següent vocabulari:

Px: "x és un punt"
Rx: "x és una recta",
Txy: "x pertany a y",
Pxy: "x,y són paral.leles",
Oxy: "x,y són ortogonals".
} Les relacions sempre en majúscules i indicant el # de variables.

Exercici 4. Formalitzeu les següents frases per mitjà de fórmules del llenguatge de predicats. → Constant

(a) El Miquel és un bon professor.

(b) La Laia ha llegit tots els llibres que han escrit els autors de Sant Quirze i de Santa Maria.

(c) Una persona és intel·ligent si la seva mare i el seu pare ho són.
→ és un altre objecte, necessitem funció, el resultat és un altre terme. No és cert/fals, és un altre objecte (una persona). Quan passem d'un objecte a cert/fals, llavors estem fent una relació

(d) Sense testar-lo, cap programa pot funcionar.
↳ Si un programa funciona és que s'ha testejat.

Exercici 5. Donades les fórmules següents:

(a) $\exists x \forall y Rxy$ → xy lligades (fórmula tancada)

(b) $\forall y(Rxy \land \exists y Py)$ → x lliure / y lligada (fórmula no tancada)

(c) $\forall x Px \lor \forall y Rxy$ → x lliure / y lligada
No està dins d'un universal

(d) $\forall x(Px \to (Qx \lor \forall y \exists x Rxy))$ → xy lligades → fórmula tancada

(e) $\exists x(Px \land \exists y(Qx \lor Rxy))$ → xy lligades

(g) $\forall y(Px \to Rxy)$ → x lliure / y lligada

(h) $\exists x(\exists x Rxy \land \neg Px)$ → y lliure / x lligada → fórmula tancada

(i) $\exists x(Rxx \lor \exists y(Py \land Rxy))$ → xy lligada → fórmula tancada

(j) $\forall x \exists y(Px \to (Qx \lor Rxy))$ → xy lligada → fórmula tancada

(k) $\forall x \exists y Rxy$ → xy lligada → fórmula tancada

1. Determineu-ne les ocurrències de les variables lliures i de les variables lligades. → tenen adavant un universal o un existeix (∃). → Si no té res al davant

2. Determineu-ne les fórmules tancades. → Si no té variables lliures.

Exercici 6. Sigui $\sigma = \{f^1, g^2, h^2, c, d\}$ i I la interpretació amb domini el conjunt nombres enters, definida com $I(f) =$ la funció successor, $I(g) = *$, $I(h) = +$, $I(c) = 2$ i $I(d) = 3$. Llavors, interpreteu els següents termes en I:
següent terme

(a) $f(c)$ → $I(f(c)) = \underline{\underline{3}}$
$I(c)=2$ i li apliquem $I(f)$

(b) $f(f(c))$ → $I(f(f(c))) = \underline{\underline{4}}$ $\big(I(f)(I(f(c))) = I(f)(3) = \underline{\underline{4}}$ $= \overline{f(f(c))}$
→ la barra vol dir fer la interpretació de la part de sota.

(c) $g(f(c), f(d))$ → $I(g(\overline{f(c)}^{3}, \overline{f(d)}^{4})) = 3 \cdot 4 = \underline{\underline{12}}$

(d) $h(f(c), f(d))$ → $I(h(\overline{f(c)}^{3}, \overline{f(d)}^{4})) = 3 + 4 = \underline{\underline{7}}$

(e) $h(f(f(c)), f(f(f(d))))$ → $I(h(\underbrace{f(f(c))}_{4}, f(f(f(d))))) = 4 + 6 = \underline{\underline{10}}$ (4, 5, 6)

Exercici 7

(a) Si $I(Px) = V \Rightarrow y = -\sqrt{x}$ satisfà que $\underbrace{I(\neg Py \wedge Qxf(y \cdot y))}_{\text{conclusió}} = \underline{\underline{V}} \Rightarrow \underline{\underline{I(\varphi) = V.}}$

Demostracions amb aquest estil

(b) $x := -5$, Existeix un y que: $y \geq 0$ i que satisfaci que $x = y^2$?

el quadrat d'un nombre no pot donar un negatiu.

$I(\varphi) = F$ ja que si $I(Px) = V \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ i $x < 0$. Sigui un $y \in \mathbb{R}$, $I(\neg Py) = V \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 0 \underset{\text{Per tant}}{\Rightarrow} x < 0 \leq y^2 \Rightarrow x \neq y^2 \Rightarrow I(Qxf(y,y)) = \underline{\underline{F}}$ Llavors, hem vist que $I(\varphi) = V \to F = \underline{\underline{F}}$

Exercici 7. (a) Considerem el vocabulari $\sigma = \{f^2, P^1, Q^2\}$ y la σ-interpretació I definida per:

- domini de I = els nombres reals,
- $I(f) = \times$, → multiplicació
- $I(P) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,
- $I(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$. → Qxy = "x és igual a y" $Qxf(y,y)$ = "x és igual a y^2"

Considerem la fórmula $\varphi = \forall x(Px \to \exists y(\neg Py \wedge Qxf(y, y)))$. Llavors, determineu si $I(\varphi) = V$. ($x = y \cdot y$; Universal d'una variable)

(b) Definim la σ-interpretació I' definida per:

- domini de I' = els nombres reals,
- $I'(f) = \times$,
- $I'(P) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
- $I'(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$.

Aleshores, determineu si $I'(\varphi) = V$.

Exercici 8. Considerem el vocabulari $\sigma = \{a, b, P^1, Q^1, R^2\}$ y la σ-interpretació I definida per:

- domini de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $I(a) = 2$, $I(b) = 5$,
- $I(P) = \{2, 5\}$, → $\bar{P}_2 = V$, $\bar{P}_3 = F$, $\bar{R}_{15} = V$
- $I(Q) = \{3, 4, 5\}$,
- $I(R) = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Llavors, avalueu les següents fórmules en interpretar-les en I:

→ després de les barres podem posar el valor de la veritat

(1) $I(Pa \wedge \neg Rab) = \bar{P}_2 \wedge \neg \bar{R}_{25} = V \wedge V = \underline{\underline{V}}$

(2) $I(\forall x(Rxx \to Qx))$, $= F$, per $n = 1$: $V \to F \Rightarrow \underline{\underline{F}}$

(3) $I(\forall x(Px \vee Qx \vee Rxx)) = \underline{\underline{V}}$, sempre es satisfà per algunes de les clàusules: $n=1 \to \bar{R}_{11} = V$
$n=2 \to \bar{P}_2 = V$
$n=3 \to \bar{Q}_3 = V$
$n=4 \to \bar{R}_{44} = V$
$n=5 \to \bar{R}_{55} = V$ (o $\bar{Q}_5$)

Intentem trobar un valor on sigui fals.

Si és cert, o hem de fer per tots els membres del domini.

$= V$, en tot D, $n \in D$, sempre $\exists\, p \in D$ que satisfà la fórmula. $n:1 \to \bar{R}_{11} = V$, $n:2 \to \bar{R}_{22} = V$, $n:3 \to \bar{R}_{33} = V$, $n:4 \to \bar{R}_{44} = V$, $n:5 \to \bar{R}_{55} = V$ //

(4) $I(\forall x \exists y Rxy,)$

(5) $I(\exists x \forall y (Rxy \vee Ryx))$ $= F$, no hi ha cap $n \in D$ que $\forall p \in D$ faci veritat la fórmula: $n:1 \to \bar{R}_{12} \vee R_{21} = F$, $n:2 \to \bar{R}_{21} \vee R_{12} = F$, $n:3 \to \bar{R}_{32} \vee R_{23} = F$, $n:4 \to \bar{R}_{41} \vee R_{14} = F$, $n:5 \to \bar{R}_{25} \vee R_{52} = F$ //

Exercici 9. Considerem la següent taula:

	1	2	
	3	4	
			5

Exy: "x sobre y"

Fxy: "x i y mateixa fila"

Considerem el vocabulari $\sigma = \{E^2, F^2\}$ y la σ-interpretació I definida de la següent manera:

- domini de $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $I(E) = \{(x, y) : x$ està per sobre de y a la taula (no necessàriament a la mateixa columna) $\}$
- $I(F) = \{(x, y) : x \neq y$ i x, y són a la mateixa fila de la taula $\}$

Llavors, avalueu les següents fórmules en interpretar-les en I:

En un $\forall$ per demostrar que és fals, trobar un exemple. → Fals. $n:1 \to E(1,2) = F$, $n:2 \to E(2,1) = F$, $n:3 \to E(3,4) = F$, $n:4 \to E(4,3) = F$, $n:5 \to E(5,5) = F$ // Alternativa: $I(E(y,x)) = F$, $y = x$

→ Probar

(1) $I(\exists x \forall y Exy)$

(2) $I(\forall x \exists y Eyx)$

Intentar trobar una x tal que $\forall y\ \bar{E}(y,x) = F$. $x = 1$, $\bar{E}(y,1) = F\ \forall y$.

(3) $I(\exists x \forall y \neg Fyx) = V$ — $n:5 \to q=1: \neg F_{51} = V$, $q=2: \neg F_{52} = V$, $q=3: \neg F_{53} = V$, $q=4: \neg F_{54} = V$, $q=5: \neg F = V$ //

Trobar una x que tingui totes les y's certes.

(4) $I(\exists x \exists y \exists z (Fxy \wedge Exz))$ — $x=2$, $y=1$, $z=4$: $I(F(2,1) \wedge E(2,4)) = V$

(5) $I(\exists x \forall y (\neg Exy \wedge \neg Fxy)) = V$ — $n:5 \to q=1: I(\neg E(5,1) \wedge F(5,1)) = V$, $q=2: I(\neg E(5,2) \wedge F(5,2)) = V$, $q=3: I(\neg E(5,3) \wedge F(5,3)) = V$, $q=4: I(\neg E(5,4) \wedge F(5,4)) = V$, $q=5: I(\neg E(5,5) \wedge F(5,5)) = V$ //

→ falta la 'c':

Exercici 10. Sigui $\sigma = \{P^1, Q^1, R^2\}$. Determineu si els següents parells de fórmules són lògicament equivalents: → Regles de conversió

1. $\neg\forall x(Px \to Qx)$, $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$. → $\neg\forall x(Px \to Qx) \equiv \neg\forall x(\neg Px \vee Qx) \equiv \exists x \neg(\neg Px \vee Qx) \equiv \exists x(Px \wedge \neg Qx)$ => Lògicament equivalents
2. $\varphi_1 = \forall x(Px \vee Qx)$ (cert), $\varphi_2 = \forall x Px \vee \forall x Qx$ (fals). → Domini: $I = \{0,1\}$, $I(P) = \{0\}$, $I(Q) = \{1\}$, $I(\forall x(Px \vee Qx)) = V$, $I(\forall x Px) = F$ i $I(\forall x Qx) = F \to I(\forall x Px \vee \forall x Qx) = F \vee F = F$
3. $\varphi_1 = \neg\exists x \forall y Rxy$, $\varphi_2 = \forall x \exists y \neg Rxy$. → $\neg\exists x \forall x Rxy \equiv \forall x \neg\forall y Rxy \equiv \forall x \exists y \neg Rxy$ => Lògicament equivalents
4. $\varphi_1 = \neg\exists x \forall y (Px \wedge \neg Rxy)$, $\varphi_2 = \forall x \exists y (Px \to Rxy)$. → $\neg\exists x \forall y(Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \neg\forall y(Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \exists y \neg(Px \wedge \neg Rxy) \equiv \forall x \exists y(\neg Px \vee Rxy) \equiv \forall x \exists y(Px \to Rxy) \equiv \varphi_2$ (lògicament equivalents)
5. $\varphi_1 = \forall x(Px \to Qc)$, $\varphi_2 = (\forall x Px) \to Qc$.

→ Demostrem que és fals: Domini $I = \{0,1\}$, $I(c) = 0$, $I(P) = \{0\}$, $I(Q) = \{1\}$

→ $\forall x(Px \to Qx) \equiv \bar{P}_0 \to \bar{Q}_0 = V \to F \Rightarrow F$

$(\forall x Px) \to Qx \Rightarrow \forall x Px = F \Rightarrow F \to I(c) = V$

No són equivalents.

(*) $\forall y(\neg Py \to \forall y \exists x Qyx) \equiv \forall y \forall z (Py \vee Qzf(z))$

(**) $\exists x \forall y(\forall z(Pyz \vee Sxy) \to \forall u Qyu) \equiv \forall y \forall z \forall t ((\neg Pyf(y) \vee Qyz) \wedge (\neg Pyf(y) \vee \neg Rg(y)y)) \wedge (\neg Sg(y)y \vee Qyz) \wedge (\neg Sg(y)y \vee \neg Rg(y)y))$ Falta desenvolupar.

4 clàusules

Demostrem que és fals: Buscar aquestes interpretacions: Domini $I = \{0,1\}$, $I(P) = \{1\}$, $I(Q) = \{1\}$ → Per $x=1$: $\bar{P}_1 \to \bar{Q}_1 = V$, però $\exists x Px \to \forall x Qx \Rightarrow V \to F = F$

$\bar{P}_1 = V$

$\bar{Q}_0 = F$

6. $\varphi_1 = \exists x(Px \to Qx)$, $\varphi_2 = \exists x Px \to \forall x Qx$.

Transformar existencials a universals

Tots els universals davant.

no pot tenir existencials, ha de tenir clàusules o conjuncions de clàusules.

Exercici 11. Calculeu formes clausals de les següents fórmules:

(a) $\exists x Px \wedge \neg \exists x \forall y Rxy$, $\equiv \exists x Px \wedge \forall x \neg \forall y \neg Rxy \equiv P(c) \wedge \forall u \exists y \neg\neg Ruy \equiv Pc \wedge \forall u \exists y Ruy \equiv Pc \wedge \forall u Ruf(u) \equiv \forall u (Pc \wedge Ruf(u))$

(b) $\exists x \forall y Rxy \to \exists y \forall x Rxy$, $\equiv \exists x \forall y Rxy \to \exists y \forall x Rxy \equiv \neg \exists x \forall y Rxy \vee \exists y \forall x Rxy \equiv \forall x \exists y \neg Rxy \vee \forall x Rxf(x) \equiv \forall x \neg Rxf(x) \vee \forall x Rxf(x) \equiv$
$\equiv \forall x \forall y (\neg Rxf(x) \vee Ryf(y))$.

Sempre que la relació tingui 2 variables, la segona com a funció.

y y y

(c) $\forall x(\forall y(Py \to Qxy) \to \forall y Qyx)$, $\equiv \forall x(\forall y(\neg Py \vee Qxy) \to \forall y Qyx) \equiv \forall x(\neg \forall y(\neg Py \vee Qxy) \vee \forall y Qyx) \equiv \forall x(\exists y(Py \wedge \neg Qxy) \vee \forall y Qyx) \equiv$
$\equiv \forall x((Pf(x) \wedge \neg Qxf(x)) \vee \forall y Qyx) \equiv \forall x((Pf(x) \vee \forall y Qyx) \wedge (\neg Qxf(x) \vee \forall y Qyx)) \equiv$
$\equiv \forall x \forall y (Pf(x) \vee Qyx) \wedge \forall x \forall y (\neg Qxf(x) \vee Qyx)$

(*) (d) $\forall y(\neg Py \to \forall y \exists x Qyx)$,

(**) (e) $\exists x \forall y(\forall z(Pyz \vee Sxy) \to \forall u Qyu)$.

Exercici 12. Fent servir l'algorisme d'unificació, determineu si els següents parells d'àtoms són unificables:

(1) Pa, Pb → No és unificable, constants diferents.

(2) Qax, Qxx → Unificable ($x=a$)

(3) $Raxf(x), Rayy$ → No és unificable, $x=y$ $f(x)=y$ → evaluant: $x = f(x)$!!! una funció evaluant una variable, no pot ser igual a la pròpia variable.

(4) $Rxyz, Ruh(v,v)u$ → Unificable ($x=u$, $y=h(v,v)$, $z=u$) $\Rightarrow Rxyz\{x=u, y=h(v,v), z=u\} = Ruh(v,v)u$

(5) $Ravf(v), Rauu$ → No unificable, $v=u$, $f(v)=u$ (igual que el 3) ↳ $Ruh(v,v)u\{x=u, y=h(v,v), z=u\} = Ruh(v,v)u$.

(6) $Rh(x,x)g(y)z, Rh(a,v)g(b)f(w)$ → Unificable ($a=x$, $v=x$, $b=y$, $f(w)=z$.

(7) $Rvvz, Ruh(u,u)x$ → No unificable, $v=u$, $z=x$, $v=h(u,u)$ $\Rightarrow u = h(u,u)$!!!

Exercici 13. Determineu els resolvents de les següents clàusules;

$$\varphi_1 = \neg Pxyu \vee \neg Pyzv \vee \neg Pxvw \vee Puzw,$$

$$\varphi_2 = Pg(x,y)xy.$$

les variables no són iguals entre elles.

Exercici 14. Demostrar per resolució que la clàusula buida $\square$ es dedueix de les següents clàusules:

$$\varphi_1 = Pxf(x)b,$$

$$\varphi_2 = \neg Qx \vee \neg Qy \vee \neg Pxf(y)z \vee Qz,$$

$$\varphi_3 = Qa,$$

$$\varphi_4 = \neg Qb.$$

Exercici 15. Demostrar per resolució que la clàusula buida $\square$ es dedueix de les següents clàusules:

$$\varphi_1 = Paz,$$

Ex 13. Repàs teoria: $\varphi_1 = \psi_1 \vee \varphi_1'$ → Unificar una fórmula amb la negada de l'altre

$\varphi_2 = \neg\psi_2 \vee \varphi_2'$ ψ_1, ψ_2 són unificables.

Una resolvent (no totes) serà: $\psi_1 = Pxyv$

$\psi_2 = Pg(x_2,y_2)x_2y_2$

substitució

$\lambda = \{y_1 = x_2, v = y_2, x_1 = g(x_2,y_2)\}$

$\psi_1\lambda = Pg(x_2,y_2)x_2y_2 = \psi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2$ són unificables

Resolvent és $(\varphi_1' \vee \varphi_2')\lambda = \neg Px_2zv \vee \neg Pg(x_2,y_2)vw \vee Py_2zw$.

es 'perd' una part de φ_1.

(*) (a) $\varphi_1 \equiv \forall x \forall y (\neg(Px \wedge Syc) \vee Rxy) \equiv \forall x \forall y (\underline{\neg Px \vee \neg Syc \vee Rxy})$

$\varphi_2 \equiv \underline{Sac} \wedge \underline{\neg Rba}$

$\varphi \equiv \neg Pb$

(b) Demostrem per resolució que φ_1, φ_2 i φ dedueixen $\square$.

1. $\neg Px \vee \neg Syc \vee Rxy$
2. Sac
3. $\neg Rba$
4. Pb
5. $\neg Px \vee Rxa$ (1,2) $\{y=a\}$
6. $\neg Pb$ (3,5) $\{x=b\}$
7. $\square$ (4,6)

hem de demostrar $\neg\varphi$.

(**) (a) $\varphi_1 \equiv \forall x (\exists y Ty \vee \neg Bx)$; $(\varphi_1)^{cl} = \forall x (Tf(x) \vee \neg Bx) \equiv \forall x (\neg Bx \vee Tf(x))$

també pot ser una constant

$\varphi_2 \equiv \exists x Bx$, $(\varphi_2)^{cl} = Bc$

$\varphi_3 = \neg\exists x (Tx \wedge Cx)$; $(\varphi_3)^{cl} = \forall x (\neg Tx \vee \neg Cx)$

(b)
1. $\neg Bx \vee Tf(x)$
2. Bc
3. $\neg Tx_1 \vee \neg Cx_1$
4. Cx_2
5. $Tf(c)$ (1,2) $\{x=c\}$
6. $\neg Cf(c)$ (3,5) $\{x_1=f(c)\}$
7. $\square$ (4,6) $\{x_2=f(c)\}$

!! $c=f(c)$ NO es pot fer, segurament sigui perquè haviem d'haver canviat de variable

→ $x=g(x,y)$ tampoc.

→ No seria possible unificar

↳ $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\varphi$ és contradicció $\Rightarrow \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vDash_R \varphi$.

resolvent

$\varphi_2 = \neg Pf(f(a))a,$

$\varphi_3 = \neg Pxg(y) \vee Pf(x)y.$

(*) Exercici 16. Considerem les següents fórmules:

$\varphi_1 = \forall x \forall y ((Px \wedge Syc) \to Rxy),$

$\varphi_2 = \exists x (Sxc \wedge \neg Rbx),$

$\varphi = \neg Pb.$ Si hi hagués un $\forall x$ no té perquè ser el mateix que el $\forall x$ de φ_1, per tant a l'aplicar l'algorisme de resolució hem de canviar els noms de les variables

Llavors, es demana;

(a) Calcular formes clausals de φ_1 i φ_2.

(b) Demostrar per resolució que φ és conseqüència lògica de φ_1 i φ_2.

(**) Exercici 17. Considerem les següents fórmules:

$\varphi_1 = \forall x \exists y (Bx \to Ty),$

$\varphi_2 = \exists x Bx,$

$\varphi_3 = \neg\exists x (Tx \wedge Cx),$

$\varphi = \exists x \neg Cx.$ → $\neg\varphi \equiv \forall x Cx$

(1) Calculeu formes clausals de φ_1, φ_2 i φ_3.

(2) Demostrar per resolució que φ és conseqüència lògica de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Exercici 18. Considerem la fórmula $\varphi = (\exists x (Px \wedge Qx) \wedge \forall x (Px \to Rx)) \to \exists x (Qx \wedge Rx)$. Llavors, es demana:

(a) Calcular una forma clausal de $\neg\varphi$,

(b) Fent servir l'algorisme de resolució, demostrar que φ és una tautologia.

(a) $\varphi = (\exists x (Px \wedge Qx) \wedge \forall x (Px \to Rx)) \to \exists x (Qx \wedge Rx)$

comprovar

elimino implicacions

$\neg\varphi = \neg((\exists x (Px \wedge Qx) \wedge \forall x (\neg Px \vee Rx)) \to \neg\exists x (Qx \wedge Rx)))$

lleis de Morgan i doble negació

$\neg\varphi = (\exists x (Px \wedge Qx) \wedge \forall x (\neg Px \vee Rx)) \wedge \forall x (\neg Qx \vee \neg Rx)$

no tenen perquè ser els mateixos, hem de canviar de variable.

$\neg\varphi = ((Pc \wedge Qc) \wedge \forall x (\neg Px \vee Rx)) \wedge \forall y (\neg Qy \vee \neg Ry)$

aquí, substituïm la variable lligada 'x' al quantificador existencial per una nova constant 'c'

$\neg\varphi = \forall x \forall y ((Pc \wedge Qc) \wedge (\neg Px \vee Rx) \wedge (\neg Qy \vee \neg Ry))$

movem els quantificadors universals a l'esquerra

$\neg\varphi = \forall x \forall y \underbrace{((Pc) \wedge (Qc) \wedge (\neg Px \vee Rx) \wedge (\neg Qy \vee \neg Ry))}_{\text{Forma clausal de } \neg\varphi}$

(b) (1) Pc (input)

(2) Qc (input)

(3) $\neg Px \vee Rx$ (input)

(4) $\neg Qy \vee \neg Ry$ (input)

(5) Rc (com $\{Pc, Px\}$ és unificable per $x=c$, resolem (1) i (3)).

(6) $\neg Rc$ (com $\{Qc, Qy\}$ és unificable per $y=c$, resolem (2) i (4)).

(7) $\square$ ((5) i (6) formen un par contradictori)

Per tant, φ es una tautología. ($\neg\varphi$ és contradicció)