LÒGICA I LLENGUATGES

CURSO 2022-23

SEGUNDA PRUEBA PARCIAL DE PROBLEMAS (Grupo A)

(a) Consideremos el vocabulario $\sigma = \{c, f^1, P^1, Q^2\}$ y la σ-interpretación I definida de la siguiente forma:

- dominio de $I = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $I(c) = 3$,
- $I(P) = \{2, 3\}$,
- $I(Q) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4), (4,4)\}$,
- $I(f)(1) = 2, I(f)(2) = 2, I(f)(3) = 1, I(f)(4) = 3$.

Determinar entonces, razonando la respuesta, si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en I:

(1) $Pc \to \exists y Qyc$,

(2) $\exists x Qf(x)x$,

(3) $\forall x(Qf(x)x \to Qxx)$,

(4) $\forall x \forall y(Qxy \leftrightarrow Pf(x))$,

(5) $\forall x \exists y(Qxy \wedge Py)$.

(7,5 puntos)

(b) Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1 = \forall x(Bx \to \exists y \neg Axy)$,

$\varphi_2 = \forall x(\neg Dx \to Bx)$,

$\varphi_3 = \forall y \exists z(\neg Dy \vee \neg Ayz)$,

$\varphi = \neg \exists z \forall y Azy$.

Se pide entonces:

(1) Obtener formas clausales de las fórmulas φ_1, φ_2 y φ_3.

(2) Demostrar por resolución que φ es consecuencia lógica de las fórmulas φ_1, φ_2 y φ_3.

(2,5 puntos)

Solución:

(a) (1) es falsa, pues $\overline{P}\overline{c} = \overline{P}3$ es verdadera, y sin embargo no existe ningún $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\overline{Q}y3$ sea verdadera, por lo que $I(\exists y Qyc) = F$. Así pues, $I(Pc \to \exists y Qyc) = V \to F = F$.

(2) es verdadera, tomando $x = 1$, ya que tenemos que $\overline{f}(1) = 2$ y $\overline{Q}21 = V$.

(3) es verdadera. Para demostrarlo, comprobamos que todos los valores posibles de x en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ hacen verdadera la fórmula $(Qf(x)x \to Qxx)$. Para $x = 1$, tenemos que $(Qf(1)1 \to Q11) = (Q21 \to Q11) = V \to V = V$. Si $x = 2$, tenemos que $(Qf(2)2 \to Q22) = (Q22 \to Q22) = V \to V = V$. Si $x = 3$, tenemos que $(Qf(3)3 \to Q33) = (Q13 \to Q33) = F \to F = V$. Y si $x = 4$, tenemos que $(Qf(4)4 \to Q44) = (Q34 \to Q44) = V \to V = V$.

(4) es falsa, ya que si tomamos $x = 3$ e $y = 2$, tenemos que $\overline{Q}32 = V$, pero $\overline{Pf}(3) = \overline{P}1 = F$.

(5) es falsa, ya que para $x = 4$ tenemos que $\overline{Q}44 = V$, pero $\overline{Q}4y = F$ para $y = 1, 2, 3$. Entonces, como $\overline{P}4$ es falsa, deducimos que $\forall x \exists y (Qxy \wedge Py)$ es falsa.

(b) (1) Tenemos $(\varphi_1)^{cl} = \forall x(\neg Bx \vee \neg Axf(x))$,

$(\varphi_2)^{cl} = \forall x(Dx \vee Bx)$,

$(\varphi_3)^{cl} = \forall y(\neg Dy \vee \neg Ayg(y))$.

(b) (2) Tenemos que considerar las formas clausales del apartado (a) y una forma clausal de $\neg\varphi$. Tenemos entonces que $\forall y Acy$ es una forma clausal de $\neg\varphi$. Ahora, consideramos los núcleos de las formas clausales obtenidas:

$\neg Bx \vee \neg Axf(x)$,

$Dx \vee Bx$,

$\neg Dy \vee \neg Ayg(y)$,

Acy.

Recordemos que cuando se aplica el algoritmo de resolució, tenemos que renombrar las variables que se repiten en las cláusulas. Entonces, reemplazamos $Dx \vee Bx$ por $Du \vee Bu$, y reemplazamos Acy por Acv . Por tanto, tenemos las siguientes entradas para la resolución:

1. $\neg Bx \vee \neg Axf(x)$
2. $Du \vee Bu$
3. $\neg Dy \vee \neg Ayg(y)$
4. Acv

Resolviendo 1 y 4, obtenemos:

5. $\neg Bc$

ya que $Axf(x)$ y Acv son unificables por $\{x = c, v = f(c)\}$.

A continuación, resolviendo 2 y 5, obtenemos:

6. Dc

ya que Bu y Bc son unificables por $\{u = c\}$.

Ahora, resolviendo 3 y 6, obtenemos:

7. $\neg Acg(c)$

ya que Dy y Dc son unificables por $\{y = c\}$.

Finalmente, resolviendo 4 y 7, obtenemos:

8. $\square$

ya que Acv y $Acg(c)$ son unificables por $\{v = g(c)\}$.