6. Sigui $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$
$v_2 = e_1 - e_2 - e_3$
$v_3 = e_1 + e_2 + e_3$

formen una base β' de E.

Apliquem la reducció curta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Com tots els resultats després d'aplicar la reducció són diferents de 0, aleshores són vectors linealment independents.

La dimensió de E és 3.

Com que la dimensió del subespai coincideix amb la dimensió de la base, v_1, v_2, v_3 són base de E.

- Calculeu les coordenades de $v_1 + v_2 + 3v_3$ en les bases B i B'.

Sigui $w = v_1 + v_2 + 3v_3$

$w = (1,1,3)_{B'}$

$$P_{B' \to B} = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & 3v_3 \\ \end{array}$$

$$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $w = (1,1,3)_{B'}$

$w = (3,2,9)_B$