Capítol 5

CONTRASTOS D'HIPÒTESIS

Recordem que en aquest capítol com en l'anterior nosaltres disposem de les dades provinents d'una observació $x_1, \ldots, x_n$ d'una mostra aleatòria simple $X_1, \ldots, X_n$ amb una distribució desconeguda. Aquesta distribució depèn d'un paràmetre que és el que volem estimar.

En aquest capítol introduïrem una nova tècnica: els contrastos d'hipòtesis. La idea dels contrastos d'hipòtesis és formular una certa hipòtesi i utilitzar les observacions que tenim, que és l'única informació que disposem, per decidir si tenim prous evidències per rebutjar o no la hipòtesi que hem formulat. No ens interessa tan la idea de calcular el valor del paràmetre com de decidir si pot ser certa o no alguna hipòtesi sobre ell.

Per exemple voldrem decidir si tenim prou evidències amb les dades que disposem per contestar si la mitjana de l'alçada dels nois d'una classe pot ser 175cm, o si l'alçada mitjana de les noies és inferior a la dels nois.

Exemple 51. Tirem 100 vegades una moneda i ens surten 45 cares i 55 creus. Volem saber si la moneda és perfecte. Cada tirada de la moneda la podem considerar com una realització d'una variable $Ber(p)$, on p és la probabilitat de treure una cara. Tenim per tant $X_1, ..., X_{100}$ una mostra aleatòria simple d'una distribució $Ber(p)$ i volem saber si $p = \frac{1}{2}$. És evident que si ens haguessin sortit 50 cares i 50 creus diríem que sí, però amb la relació $45 - 55$ obtinguda, què hem de fer?

Exemple 52. Imagineu que tenim una mostra aleatòria simple $X_1, ..., X_n$ d'una distribució $N(\mu, 16)$. Una possible hipòtesi és plantejar-nos si a partir de les observacions $x_1, ..., x_n$ podem acceptar que $\mu = 23$. Si per exemple les nostres observacions són $40, 42, 37$ i 45 ja es veu clarament que la μ no serà 23. Malauradament, a la vida, les coses no són tan clares i ens cal una tècnica que ens permeti donar una resposta amb un cert rigor.

Una qüestió semàntica: moltes vegades s'utilitzen els mots contrast i test indistintament.

5.1 Teoria general del contrast d'hipòtesis

Parlem en primer lloc dels nous conceptes que ens apareixeran quan vulguem realitzar un contrast d'hipòtesis, i de l'esquema que hem de seguir per resoldre un contrast.

1. En primer lloc hem de plantejar les hipòtesis. Hem de decidir quines seran les hipòtesis nul·la i alternativa que ens plantejarem.

   Definició 20. *La* **hipòtesi nul·la**, *que anomenarem* H_0, *és la hipòtesi de sortida. Representa la hipòtesis que mantindrem a no ser que les dades ens indiquin que és falsa. Si no rebutgem* H_0 *vol dir que les coses són com s'esperava que fossin i que la variabilitat observada és només una qüestió de casualitat. L'objectiu del contrast és rebutjar o no aquesta hipòtesi.*

   La **hipòtesi alternativa**, *l'anomenarem* H_1. *Si rebutgem* H_0 *ho farem a favor d'aquesta hipòtesi, és la que acceptem quan la hipòtesi esperada no és certa. Indica, en aquest cas, que hi ha un canvi i que les observacions reflecteixen aquest canvi.*

2. Dedidir el nivell de significació amb què treballarem.

   L'objectiu del contrast és decidir si rebutgem o no la hipòtesi nul·la. Fixeu-vos que quan prenguem aquesta decisió podem estar cometen errors. Veiem-ho amb la taula següent:

	No rebutjar H_0	Rebutjar H_0
H_0 certa	Decisió encertada	Error de tipus I
H_0 falsa	Error de tipus II	Decisió encertada

   Per tant, observem que quan prenem una decisió pot ser que cometem dos tipus d'errors diferents: si rebutgem H_0 quan és certa, o quan no rebutgem H_0 i aquesta és falsa.

   Nosaltres creiem que la hipòtesi nul·la és certa, aleshores si cometem l'error de no rebutjar H_0 quan és falsa (error del tipus I), no és un error tan greu, com el de rebutjar H_0 quan resulta que és certa. Per tant ens interessarà que l'error de tipus I sigui petit.

   Definició 21. *El* ***nivell de significació***, α, *és l'error màxim de tipus I que estem disposats a acceptar.*

   Els valors que són més usuals de nivells de significació són: 0.1, 0.05 o 0.01.

   Si per exemple fixem el nivell de significació $\alpha = 0.05$, estem dient que si decidim rebutjar la hipòtesi nul·la, la probabilitat que ens estiguem equivocant volem que sigui més petita que α. Dit d'una altra manera, que de cada 100 vegades que decidim rebutjar la hipòtesi nul·la només ens equivocarem en 5. No sabem però, la probabilitat d'equivocar-nos quan decidim acceptar la hipòtesi nul·la.

3. Determinar l'estadístic de contrast que utilitzarem.

   Definició 22. *Un* ***estadístic de contrast*** *és un estadístic del qual coneixem la distribució suposant que la hipòtesi nul·la* H_0 *és certa.*

4. Calcular el valor observat de l'estadístic de contrast.

   A partir de les observacions de què disposem podrem calcular un valor concret de l'estadístic de contrast. La idea és veure si aquest valor que hem observat és un valor poc o molt probable d'obtenir en el cas que la hipòtesi H_0 sigui certa.

5. Càlcul del p-valor i decisió.

   En el cas que la hipòtesi H_0 sigui certa coneixem la distribució de l'estadístic de contrast, i utilitzarem aquesta informació per determinar *com de probable* és obtenir el nostre valor observat en el cas que la hipòtesi H_0 sigui certa. El valor que utilitzarem per determinar-ho és l'anomenat p-*valor*.

   Definició 23. *El* p**-valor** *és la probabilitat d'obtenir un valor igual o més gran que el que hem obtingut amb la nostra mostra (*EC_{obs}*) si la hipòtesi* H_0 *és certa.*

   A partir d'aquesta definició, podem deduir que el fet que el p-valor sigui petit voldrà dir que el valor que hem observat és poc probable, i per tant que la hipòtesi nul·la és falsa i la decisió que prenem és rebutjar la hipòtesi nul·la. La probabilitat que ens equivoquem prenen aquesta decisió és exactament el p-valor. La conclusió és que si el p-valor és inferior al nivell de significació podem rebutjar H_0, ja que en el cas que ens equivoquéssim estaríem cometen un error inferior al nivell de significació.

Anem a veure amb un exemple com aplicar aquest esquema.

Exemple 53. *Hem preguntat a 15 alumnes d'una classe de periodisme quantes vegades han anar al cinema l'últim mes i les dades que hem obtingut són les següents:*

$$4\ 2\ 4\ 7\ 5\ 2\ 2\ 2\ 4\ 6\ 4\ 0\ 4\ 3\ 1$$

Creiem que la mitjana és 4, hi ha prou evidències per dir que no és cert? Suposem que les dades són normals i que la variància és 2.5.

1. En primer lloc hem de plantejar les hipòtesis. En el nostre cas volem saber si $\mu = 4$ o no, o sigui que les nostres hipòtesis seran

$$\begin{aligned} H_0&: \quad \mu = 4 \\ H_1&: \quad \mu \neq 4 \end{aligned}$$

2. Dedidir el nivell de significació amb què treballarem. Si no ens diuen cap valor, suposarem per defecte que $\alpha = 0.05$.

3. Determinar l'estadístic de contrast que utilitzarem.

   En el nostre cas podem agafar com a estadístic de contrast

$$\frac{\overline{X}_n - 4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

   recordem que a partir de les nostres dades $n = 15$ i $\sigma = 2.5$. Sota H_0 sabem que aquest estadístic té una distribució $N(0,1)$.

4. Calcular el valor observat de l'estadístic de contrast.

$$EC_{obs} = \frac{\overline{x} - 4}{\frac{2.5}{\sqrt{15}}}$$

   calculem $\overline{x} = 3.333$, i per tant $EC_{obs} = -1.0328$.

5. Càlcul del p-valor i decisió.

$$\begin{aligned} p - valor &= P(N(0,1) < -1.0328) + P(N(0,1) > 1.0328) = 2 \cdot (1 - P(N(0,1) < 1.0328)) \\ &= \texttt{2*(1-pnorm(1.0328))} = 0.3017. \end{aligned}$$

Com que el p-valor és més gran que 0.05, no podem rebutjar la hipòtesi nul·la.

Abans d'acabar aquest seguit de definicions i conceptes, encara ens falta afegir-ne un altre. En aquest exemple que acabem de veure hem fet un contrast del tipus

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu = 4 \\ H_1: &\quad \mu \neq 4 \end{aligned}$$

aquest tipus de contrast s'anomena **bilateral.** Podríem considerar també unes altres hipòtesis alternatives:

1. Si creiem que la mitjana és igual o més petita que 4 hem de plantejar el contrast

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu = 4 \\ H_1: &\quad \mu < 4 \end{aligned}$$

   d'aquesta manera en el cas que tinguem prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la acceptarem la hipòtesi alternativa com volíem.

2. Si creiem que la mitjana és igual o més gran que 4 hem de plantejar el contrast

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu = 4 \\ H_1: &\quad \mu > 4. \end{aligned}$$

   Fixeu-vos que sempre posem a la hipòtesi alternativa el que volem demostrar.

Aquests dos contrastos s'anomenen **unilaterals**.

5.2 Contrastos per a una població normal

Considerem en aquest apartat que tenim una mostra aleatòria simple $X_1, \dots, X_n$ que prové d'una distribució $N(\mu, \sigma^2)$. Pels contrastos que presentarem tot seguit seguirem el mateix esquema que hem presentat a l'apartat anterior.

5.2.1 Contrast sobre la mitjana quan la variància és coneguda.

La idea d'aquest test és contrastar la hipòtesi nul·la que serà que la mitjana sigui un valor μ_0 determinat.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} H_0: &\quad \mu = \mu_0 \\ H_1: &\quad \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

(b) $H_0: \quad \mu = \mu_0$
$H_1: \quad \mu > \mu_0$

(c) $H_0: \quad \mu = \mu_0$
$H_1: \quad \mu < \mu_0$

Independentment del test que triem fer, els següents punts de l'esquema seran exactament els mateixos en els tres casos.

2. Fixem el nivell de significació. Anomenarem al nivell de significació α. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

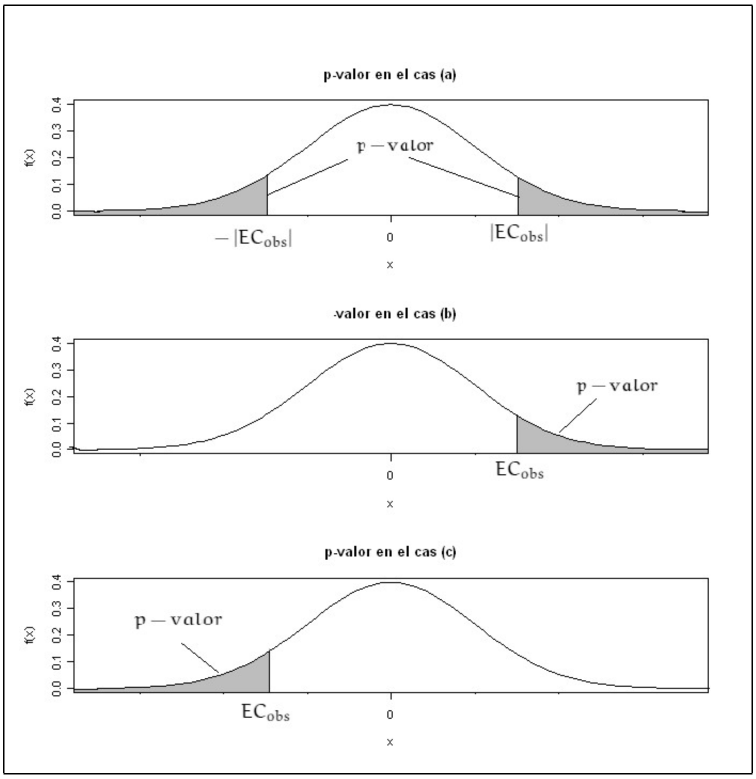
sabem que sota la hipòtesi nul·la H_0 la seva distribució és una $N(0,1)$.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.

$$EC_{obs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

hem de calcular per tant la mitjana mostral de les dades, i substituir la σ i la n pels valors que ens faciliti l'enunciat.

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat en el primer punt. Així doncs, tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat.



(a) En aquest cas el p−valor serà

$$p - \mathrm{valor} = P(Z > |EC_{obs}|) + P(Z < -|EC_{obs}|) = 2 \cdot P(Z > |EC_{obs}|),$$

on $Z \sim N(0,1)$.

(b) En canvi, en aquest cas,

$$p - \mathrm{valor} = P(Z > EC_{obs}).$$

(c) I finalment en aquest cas,

$$p - \mathrm{valor} = P(Z < EC_{obs}).$$

En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

- Si p−valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la a favor de la hipòtesi alternativa.
- Si p−valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

Exemple 54. *Suposem que l'alçada d'una classe segueix una distribució normal i que sabem segur que la desviació estàndard val 4. Tenim, per tant, una mostra aleatòria simple* $X_1, ..., X_n$ *d'una distribució* $N(\mu, 16)$*. Creiem a més que la* $\mu = 175$*. Les nostres observacions són:*

$$180 \quad 165 \quad 168 \quad 192 \quad 195 \quad 187 \quad 181 \quad 177 \quad 175 \quad 186,$$

volem saber a partir d'aquestes observacions si podem acceptar que la $\mu = 175$ *o si hi ha prou evidències per dir que no és cert.*

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Com que només ens interessa saber si $\mu = 175$ o no, utilitzem un contrast bilateral:

$$\begin{array}{ll} H_0: & \mu = 175 \\ H_1: & \mu \neq 175 \end{array}$$

2. Com que no ens diuen el contrari, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Recordem que l'estadístic de contrast és

$$\frac{\overline{X}_n - 175}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

que sota la hipòtesi nul·la H_0 té una distribució normal estàndard.

4. Com que $\overline{x} = 180.6$, l'estadístic de contrast observat serà:

$$EC_{obs} = \frac{180.6 - 175}{\frac{4}{\sqrt{10}}} = 4.4271.$$

5. Calculem el p-valor

$$\begin{aligned} p - \mathrm{valor} &= P(Z > 4.4271) + P(Z < -4.4271) = 2 \cdot P(Z > 4.4271) \\ &= \texttt{2*(1-pnorm(4.4271))=0.0000095508}, \end{aligned}$$

on $Z \sim N(0,1)$. Com que $p - \mathrm{valor} < \alpha$ tenim prou evidències per rebutjar H_0 a favor de la hipòtesi H_1.

5.2.2 Contrast sobre la mitjana quan la variància és desconeguda.

La idea d'aquest test, igual que per l'anterior, és contrastar la hipòtesi nul·la que serà que la mitjana sigui un valor μ_0 determinat. Observeu que la principal diferència amb el contrast anterior és que canvi en l'estadístic de contrast.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí, com abans, ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents

   (a) $H_0: \quad \mu = \mu_0$
   $H_1: \quad \mu \neq \mu_0$

   (b) $H_0: \quad \mu = \mu_0$
   $H_1: \quad \mu > \mu_0$

   (c) $H_0: \quad \mu = \mu_0$
   $H_1: \quad \mu < \mu_0$

   Independentment del test que triem fer, els següents punts de l'esquema seran exactament els mateixos en els tres casos, exceptuant l'últim.

2. Fixem el nivell de significació. Anomenarem al nivell de significació α. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}$$

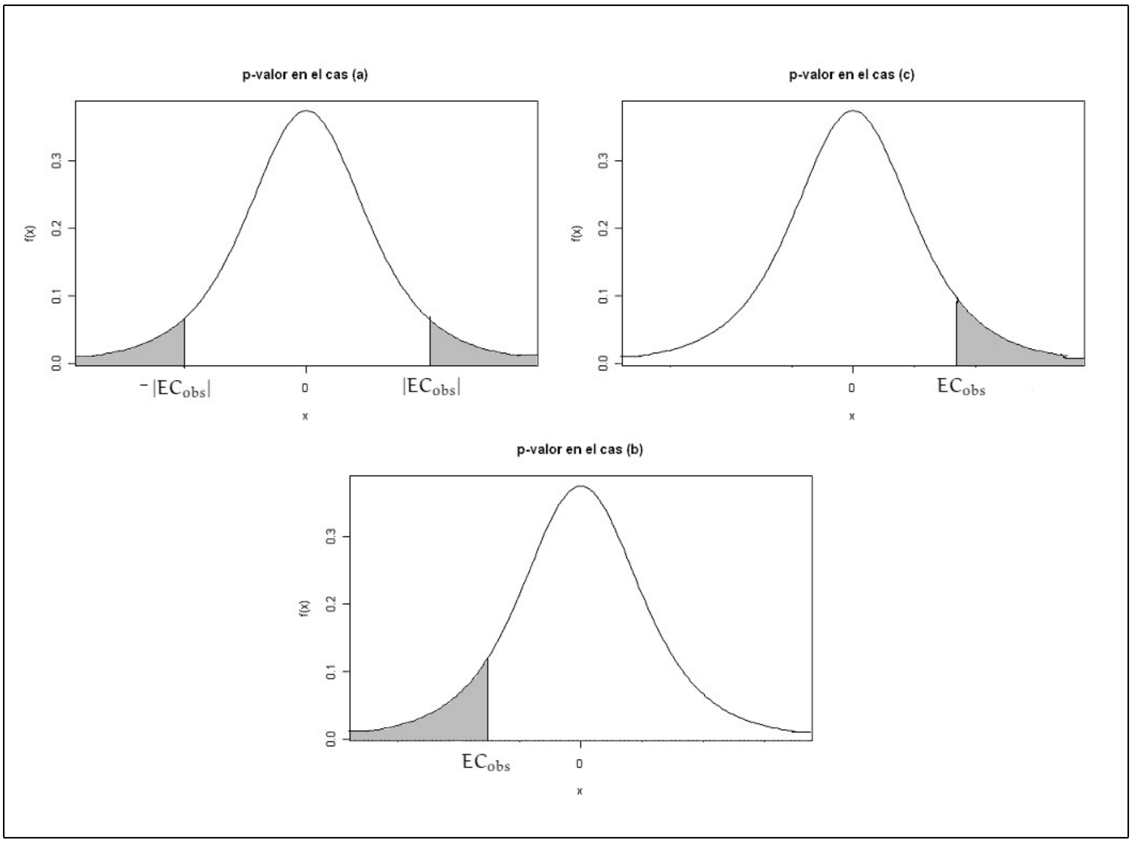
   sabem que sota la hipòtesi nul·la H_0 la seva distribució és una t de Student amb $n-1$ graus de llibertat. S_n és la desviació mostral.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.

$$EC_{obs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}},$$

   hem de calcular per tant la mitjana mostral i la desviació mostral a partir de les dades, i substituïr la n pel valor que ens faciliti l'enunciat.

5. Calculem el $p-$valor i prenen una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat. Així doncs tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat en el primer punt.



(a) En aquest cas el $p-$valor serà

$$p - \text{valor} = P(t_{n-1} > |EC_{obs}|) + P(t_{n-1} < -|EC_{obs}|) = 2 \cdot P(t_{n-1} > |EC_{obs}|),$$

on t_{n-1} és una t Student amb $n - 1$ graus de llibertat.

(b) En canvi, en aquest cas,

$$p - \text{valor} = P(t_{n-1} > EC_{obs}).$$

(c) I finalment en aquest cas,

$$p - \text{valor} = P(t_{n-1} < EC_{obs}).$$

En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

- Si $p-$valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la.
- Si $p-$valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

Exemple 55. *Tornem a l'exemple anterior, amb les mateixes condicions però suposem ara que no coneixem el valor de la variància. Recordem que les nostres observacions són:*

$$180 \quad 165 \quad 168 \quad 192 \quad 195 \quad 187 \quad 181 \quad 177 \quad 175 \quad 186,$$

volem saber a partir d'aquestes observacions si podem acceptar que la $\mu = 175$ *o si hi ha prou evidències per dir que no és cert.*

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa.

$$\begin{aligned} H_0&: \quad \mu = 175 \\ H_1&: \quad \mu \neq 175 \end{aligned}$$

2. Com que no ens diuen el contrari, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Recordem que en aquest cas l'estadístic de contrast és

$$\frac{\overline{X}_n - 175}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}$$

que sota la hipòtesi nul·la H_0 té una distribució t de Student amb $n-1$ graus de llibertat.

4. Com que $\overline{x} = 180.6$ i $s = 9.2433$, l'estadístic de contrast observat serà:

$$EC_{obs} = \frac{180.6 - 175}{\frac{9.2433}{\sqrt{9}}} = 1.8175.$$

5. Calculem el p-valor segons la hipòtesi fixada:
En aquest cas el p−valor serà

$$\begin{aligned} p - valor &= P(t_9 > 1.8175) + P(t_9 < -1.8175) = 2 \cdot P(t_9 > 1.8175) \\ &= \texttt{2*(1-pt(1.8175,9))= 0.1025}, \end{aligned}$$

on t_9 és una t de Student amb 9 graus de llibertat. Observem que com que $p-valor > 0.05 = \alpha$ no podem rebutjar H_0.

5.2.3 Contrast sobre la variància.

La idea d'aquest test és contrastar la hipòtesi nul·la que serà que la variància sigui un valor σ_0^2 determinat.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} H_0&: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1&: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} H_0&: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1&: \quad \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} H_0&: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1&: \quad \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{aligned}$$

Independentment del test que triem fer, els següents punts de l'esquema seran exactament els mateixos en els tres casos.

2. Fixem el nivell de significació. Anomenarem al nivell de significació α. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$$

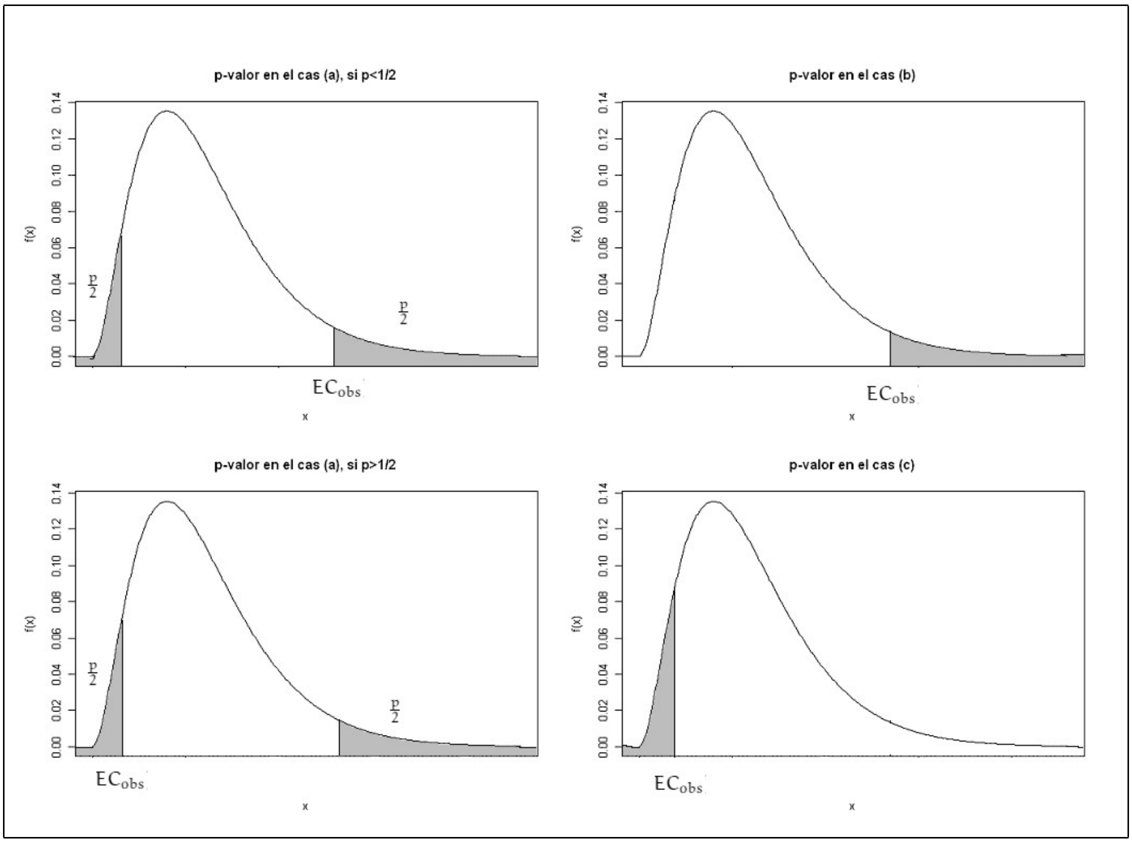
sabem que sota la hipòtesi nul·la H_0 la seva distribució és una χ_{n-1}^2.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.

$$EC_{obs} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2,$$

hem de calcular per tant la mitjana mostral de les dades i a on x_i denota les dades que ens donarà l'enunciat.

5. Calculem el p−valor i prenem una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat. Així doncs tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat en el primer punt.



(a) En aquest cas el p−valor serà una mica complicat de calcular, ja que la distribució χ^2 no és simètrica.

$$\text{a) } p - \text{valor} = \begin{cases} 2 \cdot P(\chi^2_{n-1} > EC_{obs}) & \text{si} \quad p = P(\chi^2_{n-1} > EC_{obs}) < \frac{1}{2} \\ 2 \cdot P(\chi^2_{n-1} < EC_{obs}) & \text{si} \quad p = P(\chi^2_{n-1} > EC_{obs}) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) En canvi, en aquest cas,

$$p - \text{valor} = P(\chi^2_{n-1} > EC_{obs}).$$

(c) I finalment en aquest cas,

$$p - \text{valor} = P(\chi^2_{n-1} < EC_{obs}).$$

En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

- Si p−valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la.
- Si p−valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

Exemple 56. *Tornem a l'exemple anterior, amb les mateixes condicions, tenim una mostra aleatòria simple* $X_1, ..., X_n$ *d'una distribució* $N(\mu, \sigma^2)$.

$$180 \quad 165 \quad 168 \quad 192 \quad 195 \quad 187 \quad 181 \quad 177 \quad 175 \quad 186,$$

volem saber a partir d'aquestes observacions si podem acceptar que la $\sigma^2 = 36$ *o si hi ha prou evidències per dir que no és cert.*

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa.

$$\begin{array}{ll} H_0: & \sigma^2 = 36 \\ H_1: & \sigma^2 \neq 36 \end{array}$$

2. Com que no ens diuen el contrari, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Recordem que en aquest cas l'estadístic de contrast és

$$EC = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

que sota la hipòtesi nul·la H_0 té una distribució χ^2_{n-1}.

4. Com que $\overline{x} = 180.6$, l'estadístic de contrast observat serà:

$$EC_{obs} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 180.6)^2 = 23.733.$$

5. Calculem el p-valor segons les hipòtesis fixades:
Com que $P(\chi^2_9 > 23.733) = 0.0047 < \frac{1}{2}$,

$$\begin{array}{rcl} p - valor & = & 2 \cdot P(\chi^2_9 > 23.733) = \\ & = & \texttt{2*(1-pchisq(23.733,9))= 0.009488}, \end{array}$$

Com que $p - valor = 0.0094 < 0.05 = \alpha$ tenim prou evidències per rebutjar H_0.

5.3 Contrast sobre una proporció

De la mateixa manera que quan hem estudiat intervals de confiança, hem construït un interval per la proporció, també podem fer constrastos de la proporció. Així doncs, considerem una mostra aleatòria simple $X_1, \ldots, X_n$ que prové d'una distribució $Ber(p)$. L'esquema que seguirem per construïr aquest constrast és el mateix que en els casos anteriors.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí, com abans, ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{ll} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p \neq p_0 \end{array}$$

(b) $\begin{array}{ll} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p > p_0 \end{array}$

(c) $\begin{array}{ll} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p < p_0 \end{array}$

Independentment del test que triem fer, els següents punts de l'esquema seran exactament els mateixos en els tres casos.

2. Fixem el nivell de significació. Anomenarem al nivell de significació α. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p_0)}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}}$$

sabem que sota la hipòtesi nul·la H_0 la seva distribució, quan el valor n és gran és una $N(0, 1)$. Observem que la distribució d'aquest estadístic no és ben bé una normal, però quan n és gran, l'aproximació que obtenim és prou bona.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.

$$EC_{obs} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - p_0)}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}},$$

hem de calcular només la mitjana mostral, que serà de fet la proporció de la mostra i obtenir el valor de n que ens faciliti l'enunciat.

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat. Així doncs tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat en el primer punt.

   (a) En aquest cas el $p-$valor serà

   $$p - valor = P(N(0, 1) > |EC_{obs}|) + P(N(0, 1) < -|EC_{obs}|) = 2P(N(0, 1) > |EC_{obs}|),$$

   (b) En canvi, en aquest cas,

   $$p - valor = P(N(0, 1) > EC_{obs}).$$

   (c) I finalment en aquest cas,

   $$p - valor = P(N(0, 1) < EC_{obs}).$$

   En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

   - Si $p-$valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la.
   - Si $p-$valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

Exemple 57. *Volem saber la proporció de joves entre 15 i 29 anys que llegeixen algun diari cada dia. Creiem que hi ha més d'un 25% de joves que llegeixen algun diari cada dia. Agafem 100 joves a l'atzar i en trobem 20 que sí que en llegeixen algun cada dia. Si fixem un nivell de significació* $\alpha = 0,02$, *què podem dir de la nostra hipòtesi?*

Podem pensar que cada jove és una variable aleatòria de Bernoulli $\mathrm{Ber}(p)$ on p és la probabilitat que llegeixi algun diari cada dia.

1. Establim les hipòtesis nul·la i alternativa. Volem fer el contrast

$$H_0: \; p = 0.25 \quad \text{contra } H_1: \; p > 0.25.$$

2. Determinem l'estadístic de contrast.

$$\mathrm{EC} = \frac{\sqrt{100}(\overline{X}_n - 0.25)}{\sqrt{0.25 \cdot (1 - 0.25)}}$$

que es comporta aproximadament com una $N(0,1)$.

3. Calculem l'estadístic de contrast observat. Com que $\overline{x} = \frac{20}{100} = 0.2$ ens queda que

$$\mathrm{EC}_{obs} = \frac{\sqrt{100}(0.2 - 0.25)}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75}} = -1.1547.$$

4. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió.

$$p - \mathrm{valor} = P(N(0,1) > -1.1547) = \texttt{1-pnorm(-1.1547)} = 0.87589$$

i, per tant, no podem rebutjar la hipòtesi nul·la. No hi ha prou evidències per suposar que la proporció és superior al 25%.

5.4 Contrast sobre la mitjana per a mostres grans

El problema que se'ns planteja ara, és com hem de fer un contrast quan tenim mostres grans $n > 30$, però no coneixem la distribució de la nostra mostra. En aquest cas podem fer constrastos per l'esperança de qualsevol distribució utilitzant el teorema del límit central.

Considerem una mostra aleatòria simple $X_1, ..., X_n$ ($n > 30$) d'una variable X amb distribució desconeguda i $E(X) = \mu$ (no cal suposar normalitat).

L'esquema que plantejarem és molt similar a tots els anteriors.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí, com abans, ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{array}$$

(c) $\begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{array}$

Independentment del test que triem fer, els següents punts de l'esquema seran exactament els mateixos en els tres casos.

2. Fixem el nivell de significació. Anomenarem al nivell de significació α. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}$$

sabem utilitzant el teorema del límit central que sota la hipòtesi nul·la H_0 la seva distribució es comporta com una $N(0,1)$. S_n és la desviació mostral.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.

$$EC_{obs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}},$$

hem de calcular per tant la mitjana mostral i la desviació mostral a partir de les dades, i substituïr la n pel valor que ens faciliti l'enunciat.

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat. Així doncs tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat en el primer punt.

   (a) En aquest cas el $p-$valor serà

   $$p - valor = P(N(0,1) > |EC_{obs}|) + P(N(0,1) < -|EC_{obs}|) = 2 \cdot P(N(0,1) > |EC_{obs}|),$$

   (b) En canvi, en aquest cas,

   $$p - valor = P(N(0,1) > EC_{obs}).$$

   (c) I finalment en aquest cas,

   $$p - valor = P(N(0,1) < EC_{obs}).$$

   En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

   - Si $p-$valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la.
   - Si $p-$valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

Exemple 58. *Volem estudiar el temps de vida –el temps que poden funcionar fins a espatllar-se– d'una certa classe de bombetes. Hem observat els temps de vida de 1.000 bombetes i hem obtingut unes observacions* $x_1, ..., x_{1000}$ *tals que* $\overline{x} = 1.840$ *i* $s^2 = 96,5$. *Creiem que podem afirmar que la durada mitjana és superior a* 1.850 *amb un nivell de significació de* $0,05$.

En principi no sabem si la distribució del temps de vida d'una bombeta segueix una distribució normal, però com que la mostra és molt gran podem fer un contrast d'hipòtesis. Plantegem el contrast

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa.

$$H_0: \ \mu = 1.850 \quad \text{contra } H_1: \ \mu > 1.850.$$

2. Fixem el nivell de significació: $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}$$

a partir del teorema del límit central sabem que sota la hipòtesi nul·la H_0 la seva distribució es comporta com una $N(0,1)$.

4. Calculem el valor l'estadístic de contrast observat

$$EC_{obs} = \frac{1.840 - 1.850}{\frac{\sqrt{96.5}}{\sqrt{999}}} = -32,175.$$

5. Calculem el p−valor i prenem una decisió. El p−valor és

$$p - valor = P(N(0,1) > -32.175) = \texttt{1-pnorm(-32.175)} = 1.$$

I no podem rebutjar la hipòtesi nul·la, és a dir, no tenim prou evidències per dir que la mitjana no és 1.850.

5.5 Contrastos per a dues mostres normals

Ara considerarem dues mostres, i a més suposarem que les dades que tenim no són aparellades. Si ens trobéssim en aquest cas, ho tractaríem com hem fet en el cas dels intervals de confiança, considerant la diferència de les dues mostres i treballant amb una única mostra.

Durant aquest apartat estarem en la següent situació: considerem dues mostres aleatòries simples independents entre elles $X_1, \ldots, X_n$ i $Y_1, \ldots, Y_m$ i que provenen respectivament de distribucions $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ i $N(\mu_y, \sigma_y^2)$.

5.5.1 Contrast sobre la diferència de mitjanes $\mu_x - \mu_y$, cas de variàncies σ_x^2 i σ_y^2 conegudes.

Utilitzarem aquest contrast per veure si les mitjanes de les dues mostres són iguals, en el cas que les variàncies siguin conegudes.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents:

   (a) Cas bilateral:
   $$H_0: \ \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \ \mu_x - \mu_y \neq 0.$$

   (b) Cas unilateral:
   $$H_0: \ \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \ \mu_x - \mu_y > 0.$$

(c) Cas unilateral:

$$H_0: \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \mu_x - \mu_y < 0.$$

Observeu que $\mu_x - \mu_y = 0$ és equivalent a escriure $\mu_x = \mu_y$.

2. Fixem el nivell de significació. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\left(\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

que segueix una distribució normal estàndard sota la hipòtesi nul·la (recordeu-ho de quan hem estudiat els intervals de confiança).

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.

$$EC_{obs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\left(\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

5. Calculem el p−valor i prenem una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat. Així doncs, tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat en el primer punt.

(a) En aquest cas el p−valor serà

$$p - valor = P(N(0,1) > |EC_{obs}|) + P(N(0,1) < -|EC_{obs}|) = 2 \cdot P(N(0,1) > |EC_{obs}|),$$

(b) En canvi, en aquest cas,

$$p - valor = P(N(0,1) > EC_{obs}).$$

(c) I finalment en aquest cas,

$$p - valor = P(N(0,1) < EC_{obs}).$$

En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

- Si p−valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la.
- Si p−valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

Exemple 59. *Les notes de l'examen d'Estadística segueixen una distribució normal amb variància* 1.21 *i les notes de l'examen de Probabilitats també segueixen una distribució normal però amb variància* 1. *Creiem que no hi ha diferència entre la mitjana de les notes. Per comprovar-ho farem un contrast d'hipòtesis amb un nivell de significació de* 0.1 *per a la diferència de mitjanes.*

Per fer-ho disposem de les notes de dos grups diferents d'estudiants:

Estadística	4.17	6	4.67	4.83	5	6.5	4	5.5	5.17	5.33	2.33	7.50	7
Probabilitats	5.1	5.2	4.1	4.9	2.3	4.3	3	3	5.1	4.9	4.1		

1. Plantegem el contrast

$$H_0: \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \mu_x - \mu_y \neq 0.$$

2. Fixem el nivell de significació. L'enunciat ens diu que $\alpha = 0.1$.

3. Determinem l'estadístic de contrast

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\left(\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

   que segueix una distribució $N(0,1)$.

4. Com que tenim que

$$n = 13,\ \sigma_x^2 = 1.21,\ m = 11 \text{ i } \sigma_y^2 = 1.$$

   i podem calcular

$$\overline{x} = 4.86 \quad \text{i} \quad \overline{y} = 4.18.$$

   Aleshores el valor de l'estadístic de contrast observat pren el valor

$$EC_{obs} = \frac{4.86 - 4.18}{\left(\frac{1.21}{13} + \frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1.5853.$$

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió.

$$\begin{aligned} p-valor &= 2 \cdot P(N(0,1) > |EC_{obs}|) = 2 \cdot P(N(0,1) > 1.5853) \\ &= \texttt{2*(1-pnorm(1.5853))} = 0.1128. \end{aligned}$$

Per tant, com que $p - valor > \alpha$ no hi ha prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la, i no podem dir que les mitjanes de les notes siguin diferents.

5.5.2 Contrast sobre la diferència de mitjanes $\mu_x - \mu_y$, cas de variàncies σ_x^2 i σ_y^2 desconegudes però iguals.

Volem, igual que en el test anterior, fer un contrast per la diferència de mitjanes però en aquest cas no coneixem el valor de les variàncies respectives tot i que sabem que són iguals.

Diem ara que $\sigma^2 = \sigma_y^2 = \sigma_x^2$.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents, seran de fet els mateixos que en el cas anterior:

   (a) Cas bilateral:

$$H_0: \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \mu_x - \mu_y \neq 0.$$

   (b) Cas unilateral:

$$H_0: \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \mu_x - \mu_y > 0.$$

   (c) Cas unilateral:

$$H_0: \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \mu_x - \mu_y < 0.$$

Observeu que $\mu_x - \mu_y = 0$ és equivalent a $\mu_x = \mu_y$.

2. Fixem el nivell de significació. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast. En aquest cas no podem utilitzar el mateix estadístic de contrast que hem fet servir en el cas anterior perquè no coneixem el valor de la variància, i per tant haurem d'utilitzar les variàncies mostrals.
$$EC = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\left(nS_X^2 + mS_Y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$
que sota la hipòtesi nul·la H_0 té una distribució t de Student amb $n + m - 2$ graus de llibertat –recordeu que això ja ens apareixia quan fèiem intervals de confiança.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.
$$EC_{obs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\left(ns_x^2 + ms_y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$
per això necessitem calcular les mitjanes $\overline{x}$ i $\overline{y}$ i les variàncies mostrals s_x^2 i s_y^2. Els valors n i m ens els donarà l'enunciat.

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió. En aquest últim punt sí que és important tenir en compte quines són les hipòtesis que hem plantejat. Així doncs tindrem tres casos diferents depenent de les hipòtesis que haguem triat en el primer punt.

   (a) Cas bilateral:
   $$H_0: \ \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \ \mu_x - \mu_y \neq 0.$$
   El $p-$valor és
   $$p - valor = P(t_{n+m-2} > |EC_{obs}|) + P(t_{n+m-2} < -|EC_{obs}|) = 2 \cdot P(t_{n+m-2} > |EC_{obs}|).$$

   (b) Cas unilateral:
   $$H_0: \ \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \ \mu_x - \mu_y > 0.$$
   El $p-$valor és
   $$p - valor = P(t_{n+m-2} > EC_{obs}).$$

   (c) Cas unilateral:
   $$H_0: \ \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1: \ \mu_x - \mu_y < 0.$$
   El $p-$valor és
   $$p - valor = P(t_{n+m-2} < EC_{obs}).$$

   En tots tres casos, però la decisió que prenem és:

   - Si $p-$valor $< \alpha$ rebutgem la hipòtesi nul·la.
   - Si $p-$valor $> \alpha$ no tenim prou evidències per rebutjar la hipòtesi nul·la.

5.5.3 Contrast sobre la raó de variàncies

Ens plantegem ara si les variàncies de les dues mostres són iguals. Per comprovar-ho fem el següent contrast.

En aquest cas l'esquema del contrast sobre la raó de variàncies és el següent:

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa. Aquí ens podem plantejar tres tests lleugerament diferents:

   (a) Cas bilateral:
   $$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \text{contra } H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1.$$
   (b) Cas unilateral:
   $$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \text{contra } H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} > 1.$$
   (c) Cas unilateral:
   $$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \text{contra } H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < 1.$$

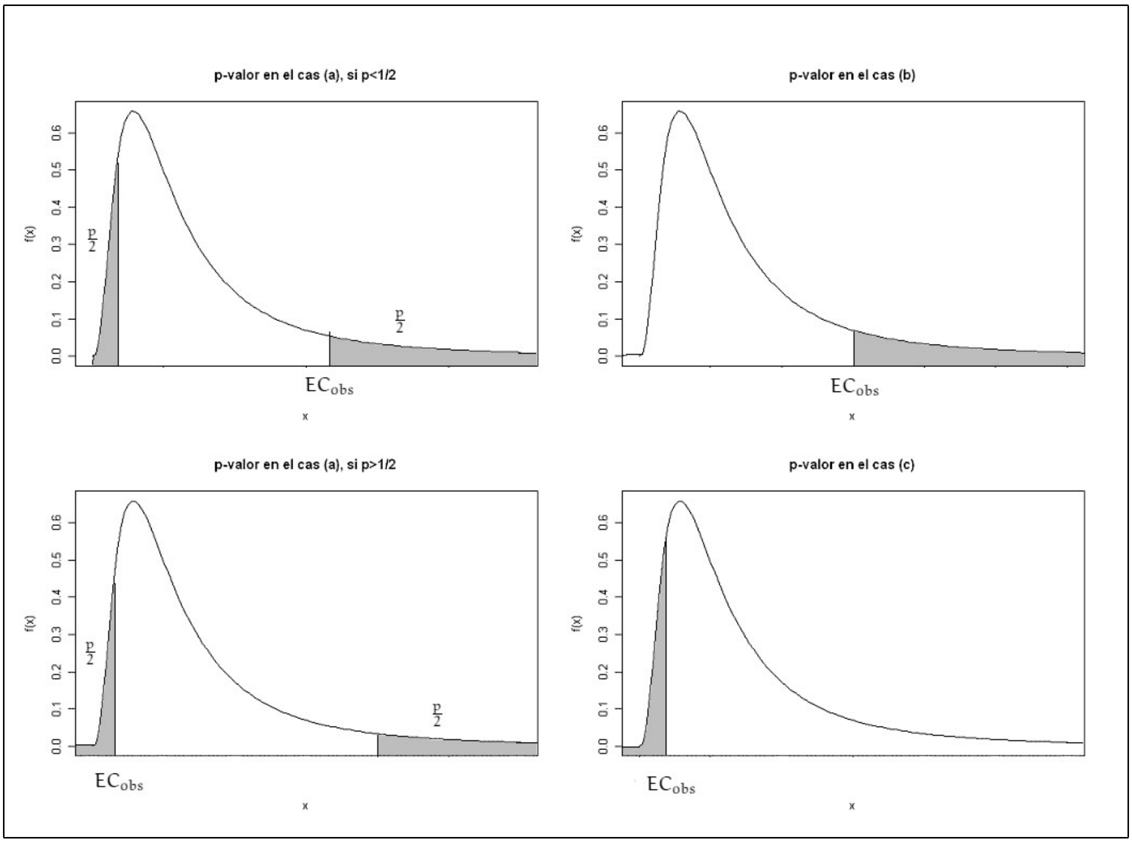
   Per tant, observem que $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1$ és equivalent a escriure que $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

2. Fixem el nivell de significació. Recordem que si no es diu res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast. Com ja vam veure quan estudiàvem intervals de confiança, tenim que
   $$\frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{nS_X^2}{\sigma_x^2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sigma_y^2}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}_m\right)^2 = \frac{mS_Y^2}{\sigma_y^2}$$
   segueixen distribucions χ_{n-1}^2i χ_{m-1}^2, respectivament, i a més a més són independents, de manera que
   $$\frac{\frac{nS_X^2}{(n-1)\sigma_x^2}}{\frac{mS_Y^2}{(m-1)\sigma_y^2}} = \frac{\sigma_y^2\widetilde{S}_X^2}{\sigma_x^2\widetilde{S}_Y^2}$$
   té una distribució F de Fisher amb $n-1$ i $m-1$ graus de llibertat, és a dir una $F_{n-1,m-1}$. Aleshores, podem agafar com a estadístic de contrast
   $$EC = \frac{\widetilde{S}_X^2}{\widetilde{S}_Y^2},$$
   que sota la hipòtesi nul·la H_0 segueix una distribució F de Fisher amb $n-1$ i $m-1$ graus de llibertat.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat.
   $$EC_{obs} = \frac{\widetilde{s}_x^2}{\widetilde{s}_y^2},$$
   per tant necessitem calcular les variàncies mostrals corregides.

5. Calculem el p−valor i prenem una decisió. Com que la distribució F no és simètrica és una mica més difícil donar el p−valor en el cas bilateral. De totes maneres finalment s'obté.



(a) Cas bilateral. Per a la hipòtesi alternativa $H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1$,

- Quan $p = P(F_{n-1,m-1} > EC_{obs}) < \frac{1}{2}$ el p−valor es calcula com

$$p - valor = 2 \cdot P(F_{n-1,m-1} > EC_{obs})$$

- Quan $p = P(F_{n-1,m-1} > EC_{obs}) > \frac{1}{2}$ el p−valor es calcula com

$$p - valor = 2 \cdot P(F_{n-1,m-1} < EC_{obs}).$$

(b) Cas unilateral. Per a la hipòtesi alternativa $H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} > 1$

$$p - valor = P(F_{n-1,m-1} > EC_{obs}).$$

(c) Cas unilateral. Per a la hipòtesi alternativa $H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < 1$

$$p - valor = P(F_{n-1,m-1} < EC_{obs}).$$

Exemple 60. Estem estudiant si la longitud de les ales d'una determinada espècie d'insectes depèn de l'altitud. Per fer-ho agafem 10 individus al nivell del mar i 11 individus a una altitud de 1.000 metres. Obtenim els resultats següents:

Nivell del mar:	2.5	2.8	3.1	2.4	3.3	3.6	3	2.9	2.7	3	
1.000 metres:	2.4	3.2	2.6	2.3	2.9	2.8	2.2	3	2.5	2.4	2.8

Suposem que tenim normalitat. Volem comparar les mitjanes de les dues poblacions. Observeu en primer lloc que les dades no són aparellades.

Per resoldre aquest problema hem de fer dos contrastos. Farem primer el contrast per veure si podem suposar que les variàncies són iguals.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa.

$$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \text{contra } H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1.$$

2. Fixem el nivell de significació. Recordem com que no ens diuen res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\widetilde{S}_X^2}{\widetilde{S}_Y^2}$$

que sota la hipòtesi nul·la té una distribució F de Fisher amb 9 i 10 graus de llibertat.

4. Calculem l'estadístic de contrast observat. Per a les nostres dades obtenim

$$\begin{aligned} n &= 10, \ \ \overline{x} = 2.93, \ \ \widetilde{s}_x^2 = 0.129;, \\ m &= 11, \ \ \overline{y} = 2.64, \ \ \widetilde{s}_y^2 = 0.100. \end{aligned}$$

i, per tant,

$$EC_{obs} = 1.28.$$

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió.

Com que $P(F_{9,10} > 1.28) =$ `1-pf(1.28,9,10)` $= 0.3512531 < \frac{1}{2}$ el $p-$valor es calcula com

$$p-valor = 2 \cdot P(F_{9,10} > 1.28) = \texttt{2*(1-pf(1.28,9,10))} = 0.7025.$$

Per tant, com que $p-valor > \alpha$ no rebutgem la hipòtesi nul·la, és a dir, acceptem que les variàncies són iguals.

Ara volem comparar les mitjanes dels dos grups. Estem per tant en un cas de comparació de mitjanes amb variàncies iguals, ho acabem de comprovar, però desconegudes.

1. Plantegem les hipòtesis nul·la i alternativa.

$$H_0 : \ \mu_x - \mu_y = 0 \quad \text{contra } H_1 : \ \mu_x - \mu_y \neq 0.$$

2. Fixem el nivell de significació. Recordem com que no ens diuen res, suposem que $\alpha = 0.05$.

3. Determinem l'estadístic de contrast.

$$EC = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\left(nS_X^2 + mS_Y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

que sota la hipòtesi nul·la H_0 té una distribució t de Student amb $n + m - 2 = 19$ graus de llibertat.

4. Calculem a partir de les nostres dades el valor que pren l'estadístic de contrast . Tenim les mitjanes i les variàncies mostrals calculades del contrast anterior.

$$\mathsf{EC}_{\mathsf{obs}} = 1.92778.$$

5. Calculem el $p-$valor i prenem una decisió.

$$p - \text{valor} = 2 \cdot P(t_{19} > 1.92778) = \texttt{2*(1-pt(1.92778,19))} = 0.06896557.$$

No rebutgem la hipòtesi nul·la, és a dir, finalment decidim que amb el nivell de significació escollit no hi ha prou evidències que ens diguin que les dues poblacions són diferents ja que $p - \text{valor} > \alpha$.