Exercici 28. Calcula, "a mano", las potencias siguientes: $5^{2010}(mod 11)$, $6^{40}(mod 33)$, $7^{135}(mod 10)$, $30^{45}(mod 15)$.

Solució 28.

(a) $5^{2010}(mod 11)$

Para este ejercicio podemos aplicar el Teorema de Euler que dice: si a, p son números enteros con $p > 1$, sea $\varphi(p)$ el número euler de p (que entonces valdría p-1), se cumple que:

$$a^{\varphi(p)} \equiv 1(mod p)$$

sin olvidar que se debe cumpler también $mcd(a, p) = 1$.

En este caso vemos que sí podemos aplicar el Teorema de Euler. Ya que $mcd(5, 11) = 1$ y $11 > 1$.

Entonces tenemos:

$\varphi(11) = 10 \Rightarrow 5^{10} \equiv 1(mod 11)$

Queremos encontrar x, que vale:

$5^{2010} \equiv x(mod 11)$

Entonces:

$5^{2010} \equiv (5^{10})^{201} \equiv 1^{201}(mod 11) \equiv 1(mod 11)$

Entonces, el modulo es $x = 1$.

(b) $6^{40}(mod 33)$

En este caso, tenemos: $mcd(6, 33) = 3$, y $33 > 1$, como no cumple la condicion necesaria, podemos reescribirlo de la siguiente manera segun el Teorema Chino del Resto:

$6^{40} \equiv (mod 33) \Rightarrow \begin{cases} 6^{40} \equiv x(mod 11) \\ 6^{40} \equiv x(mod 3) \end{cases}$

Ahora es resolver el sistema, aplicamos Teorema de Euler:

$\varphi(11) = 10 \Rightarrow 6^{10} \equiv 1(mod 11)$

Tenemos:

$6^{40} \equiv (6^{10})^4 \equiv 1^4(mod 11) \equiv 1(mod 11)$

Vemos que la otra congruencia el modulo nos da 0, ya que $6^{40} \equiv 3^{80} \equiv 0(mod 3)$

Ahora es encontrar una x que cumpla las dos congruencias definidas anteriormente, como en la congruencia de módulo 11 nos da 1, podemos sumarle 11 porque sigue de la misma clase, entonces:

$6^{40} \equiv 12(mod 11)$

Vemos que sí cumple las dos congruencias:

$6^{40} \equiv 12(mod 11)$

$6^{40} \equiv 12(mod 3)$

Entonces, tenemos finalmente:

$6^{40} \equiv 12(mod 33)$

Tenemos solución de módulo, con $x = 12$.

(c) $7^{135}(mod 10)$

Tenemos: $mcd(7, 10) = 1, y 10 > 1$

Aplicamos Teorema de Euler:

$\varphi(10) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = 1 \cdot 4 = 4 \Rightarrow 7^4 \equiv 1(mod 10)$

Si queremos encontrar x: $7^{135} \equiv x(mod 10)$

$7^{135} \equiv (7^4)^{33} \cdot 7^3 \equiv 1^{19} \cdot 343(mod 10) \equiv 343(mod 10) \equiv 3(mod 10)$

Tenemos solución de módulo, con $x = 3$.

(d) $30^{45}(mod 15)$

En este caso, nos fijamos en que 30 divide a 15, entonces : s $30^{45}(mod 15) \equiv (30(mod 15))^{45}(mod 15) \equiv 0^{45}(mod 15) \equiv 0(mod 15)$

Entonces, modulo $x = 0$.