1

1.1 Es considera el conjunt dels parells de nombres reals (a_1, a_2) amb la suma habitual,

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

i el producte per escalars

$$b(a_1, a_2) = (ba_1, 0).$$

Determineu quines de les condicions de la definició d'espai vectorial es satisfan i quines no.

1.2 Resoleu, si són compatibles, els sistemes d'equacions lineals següents:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 28 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 1 \\ 2x - 13y + 2z = 1. \end{cases}$$

1.3 Discutiu en funció de a la compatibilitat del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + az = 10 \end{cases}$$

i resoleu-lo per als valors de a per als quals tingui solució.

1.4 Es considera el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}.$$

Determineu-ne la compatibilitat i els graus de llibertat en funció del paràmetre a, i resoleu-lo en els casos en que sigui compatible

1.5 Considerem el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + z = a \\ y + t = b \\ x + 2y + 3z + 4t = c \\ 2x + y + 4z + 3t = d \end{cases}.$$

Determineu-ne la compatibilitat i els graus de llibertat en funció dels paràmetres i resoleu-lo en el cas que sigui compatible.

1.6 Per a cada un dels sistemes d'equacions lineals que segueixen, trobeu quines condicions han de complir els paràmetres $a, b, c \in \mathbb{R}$ per tal que siguin compatibles i, en aquest cas, trobeu-ne la solució.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 5x + 3y + 3z = b \\ x + y - z = c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 5x + 3y + 4z = b \\ x + y - z = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = a \\ x - 2z + 3t = a \\ -x + 4y + 12z - t = b \\ 3x - 2y - 11z + 8t = c. \end{cases}$$

1.7 Discutiu i resoleu, en els casos compatibles, els sistemes d'equacions lineals següents

$$(i)\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+my+z=3 \\ 3x+y-mz=4 \end{cases}$$

$$(iii)\begin{cases} 2x-ay=1 \\ -x+2y-az=1 \\ -y+2z=1 \end{cases} \qquad (iv)\begin{cases} x+3y=2a \\ x+y=5 \\ 2ax+6y=a+3 \end{cases}$$

$$(v)\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases} \qquad (vi)\begin{cases} x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \\ x-y+3z=-3 \\ 4x+2y=a. \end{cases}$$

1.8 Determineu per a quins valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ és incompatible el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax+(a-3)y+z=2 \\ bx+(2b+5)y+2z=3 \end{cases}.$$

1.9 Determineu un polinomi de tercer grau $p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3$ tal que

$$p(1)=5, \qquad p(-1)=3, \qquad p(2)=9, \qquad p(-2)=16$$

Matrices y vectores.

PROBLEMAS. Lista 1

1.4. $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$

si $a = 1$, $1-a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1-a} & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1 \end{array}\right)$$

cambio del orden de las filas

$F_2 - F_1$

$F_3 - aF_1$

a) si $a \neq 0 \to 1$

$F_3 - (a+1) F_2$

$(\underbrace{0 \quad 1-a^2}$ $\quad a^2-1 \mid a+1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 1-a \end{array}\right)$$

a.1) $a \neq 1$, $1-a \neq 0$

$a^2 + a - 2 = 0$

$a = -2$

($a=1$ está excluido)

sistema incompatible

a.2) $a \neq 1$, $a \neq -2$ sistema compatible determinado

- $(-a^2+a+2) z = 1-a \to z = \dfrac{1-a}{-a^2+a+2}$
- $(1-a) y + (a-1) z = 0 \to (1-a) y + \dfrac{(a-1)(1-a)}{-a^2+a+2} = 0 \to$

$\to y = 0 - \dfrac{\cancel{(a-1)}(1-a)}{(a+2)(a-1)\cancel{(a-1)}} = \dfrac{-(1-a)}{-a^2-a+2}$

- $x = 1 - ay - z$

b) si $a = 1$ sistema compatible indeterminado (2 grados de libertad)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- $x = 1 - \underbrace{y - z}_{\text{libres}}$
- $y = y$
- $z = z$

Matrices y vectores

1.5.
$$\begin{cases} x + z = a \\ y + t = b \\ x + 2y + 3z + 4t = c \\ 2x + y + 4z + 3t = d \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 & c \\ 2 & 1 & 4 & 3 & d \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & 2 & 4 & c-a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & d-2a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c-a-2b \\ 0 & 0 & 2 & 2 & d-2a-b \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c-a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+b-c+d \end{array}\right)$$

- si $-a+b-c+d \neq 0$ $\quad \blacksquare = 0$ sistema incompatible
- si $-a+b-c+d = 0$ $\quad 0=0$ sistema compatible indeterminado con 1 grado de libertad

1.1.

Espai vectorial
- conjunt de vectors (a_1, a_2)
- operació interna (suma) $(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$
- operació externa (producte per escalars) $(a_1, a_2)\cdot b = (ba_1, 0)$

① Associativa de la suma:

$\forall (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2$

$$((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) + (c_1,c_2) = (a_1,a_2) + ((b_1,b_2)+(c_1,c_2))$$
$$(a_1+b_1, a_2+b_2) + (c_1,c_2) = (a_1,a_2) + (b_1+c_1, b_2+c_2)$$
$$(a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2) = (a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2)$$

② Element neutre de la suma:

$\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall (a_1,a_2) \in \mathbb{R}$ compleix $\vec{0} + (a_1,a_2) = (a_1,a_2)$

Dem: $(a_1,a_2) + (0,0) = (0+a_1, 0+a_2) = (a_1,a_2)$

③ Vector oposat.

$\forall (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ es compleix $\quad (a_1,a_2) + (-a_1,-a_2) = \vec{0}$
$$(a_1-a_1, a_2-a_2) = \vec{0}$$

④ Commutativa de la suma:

$\forall (a_1,a_2), (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (b_1,b_2)+(a_1,a_2)$
$$(a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1, b_2+a_2)$$

⑤ Distributiva de la suma:

$\forall a \in \mathbb{R}$

$\forall (a_1,a_2), (b_1,b_2)\ \mathbb{R}^2 \quad a((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = a(a_1,a_2) + a(b_1,b_2)$
$$a(a_1+b_1, a_2+b_2) = (a\cdot a_1, 0) + (ab_1, 0)$$
$$(a(a_1+b_1), 0) = (aa_1 + ab_1, 0)$$
$$(aa_1 + ab_1, 0) = (aa_1+ab_1, 0)$$

⑥ Distributiva del producte

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}$ $\quad (a+b)(a_1,a_2) = a(a_1,a_2) + b(a_1,a_2)$

$\forall\ (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad ((a+b)a_1, 0) = (aa_1, 0) + (ba_1, 0)$

$\quad (aa_1 + ba_1, 0) = (aa_1 + ba_1, 0)$

⑦ Associativa del producte

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ $\quad (ab)\cdot(a_1,a_2) = a(b(a_1,a_2))$

$\forall\ (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad ((ab)a_1, 0) = a(ba_1, 0)$

$\quad (aba_1, 0) = (aba_1, 0)$

⑧ Existència d'un element neutre pel producte

$\forall\ (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad 1(a_1,a_2) = (a_1,a_2)$

$\quad (a_1, 0) = (a_1,a_2) \rightarrow$ contradicció

1.2. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 28 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \\ 2 & -13 & 13 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \\ 0 & -7 & 9 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 9 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

S.C. Indeterminat

$z = \lambda$

$y = -\dfrac{16 - 9\lambda}{7}$

$x = \dfrac{6 + 13\lambda}{7}$

$\begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 14 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & -13 & 13 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \\ 0 & -9 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

S. Incompatible

$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 1 \\ 2x - 13y + 2z = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -13 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \end{array}\right)$$

S. Comp. Det

$z = \dfrac{2}{7}$

$y = \dfrac{11}{49}$

$x = \dfrac{54}{49}$

Matrius i vectors

1.3. $\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + az = 10 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & a & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -11 & a-5 & 15 \end{array}\right) \rightarrow 3F_3 - 11F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3a+7 & 100 \end{array}\right)$$

- si $3a + 7 = 0$ → sistema incompatible
  $a = -7/3$

- si $3a+7 \neq 0$ sist. compatible determinat
  $a \neq -\frac{7}{3}$

1.6. a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 5x + 3y + 3z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & b - \frac{5}{3}a \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & c - \frac{1}{3}a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & b - \frac{5}{3}a \\ 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array}\right)$$

- $c + b - 2a \neq 0$ → S. Compatible Det.
- $c+b - 2a = 0$ → S. Comp Ind.

b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ 5x + 3y + 4z = b \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 4 & b \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -1 & 4 & a-3c \\ 0 & -2 & 9 & b-5c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -1 & 4 & a-3c \\ 0 & 0 & 1 & b+c-2a \end{array}\right) \rightarrow \text{sempre SCD}$$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = a \\ x - 2z + 3t = a \\ -x + 4y + 12z - t = b \\ 3x - 2y - 11z + 8t = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 & a \\ -1 & 4 & 12 & -1 & b \\ 3 & -2 & -11 & 8 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 15 & 3 & a+b \\ 0 & -8 & -20 & -4 & c-3a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-3a \end{array}\right)$$

SCI quan $b+a = c-3a = 0$

S. Incompatible	S. Comp. Det	S. Comp. Ind.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \blacksquare/0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$
$0z = \blacksquare$	$z = 0$ $z = \blacksquare$	$0z = 0$ es compleix $\forall z$ (variable libre)

1.9. $P(x) = a + bx + cx^2 + dx$

$P(1) = a + b + c + d = 5$
$P(-1) = a - b + c - d = 3$
$P(2) = a + 2b + 4c + 8d = 9$
$P(-2) = a - 2b + 4c - 8d = 16$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -9 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 11 \end{array}\right)$$

- $-12d = 11 \to d = -\frac{11}{12}$
- $3c - \frac{6 \cdot 11}{12} = 3$

  $c = \frac{17}{6}$
- $-2b + \frac{2 \cdot 11}{12} = -2 \qquad b = \frac{23}{12}$
- $a = 5 - \frac{46}{12} = \frac{7}{6}$

1.8. Determineu per a quins valors a, b el sistema és incompatible

$$\begin{cases} ax + (a-3)y + z = 2 \\ bx + (2b+5)y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a-3 & 1 & 2 \\ b & 2b+5 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & a-3 & 1 & 2 \\ 0 & ab+5a-3b & 2a-b & 3a-2b \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} ab + 5a - 3b = 0 \\ 2a - b = 0 \rightarrow b = 2a \end{cases}$$, comprovar que $3a - 2b \neq 0$

$a \cdot 2a + 5a - 3(2a) = 0 \rightarrow 2a - a = 0$

1) $a = 0$
$b = 2a = 0$ → comprovem que $3a - 2b \neq 0$
$0 - 0 = 0$ contradicció

$a = 0, b = 0$ no fan incompatible el sistema.

2) $a = \frac{1}{2}$, $b = 2a = 1$

→ comprovem que $3a - 2b \neq 0$
$3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 \neq 0$

$a = \frac{1}{2}, b = 1$ fan incompatible el sistema