SÍNTESI LÒGICA

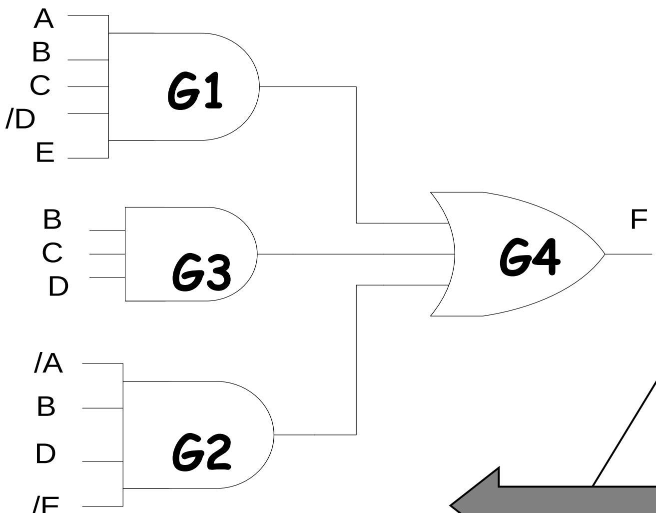
Índex de conceptes

- Mapes de Karnaugh
- Procediment sistemàtic, adjacències
- Simplificació per minterms
- Simplificació per maxterms
- Funcions incompletes
- Sistemes combinacionals

La implementació d'una funció lògica es pot realitzar de diferents formes:

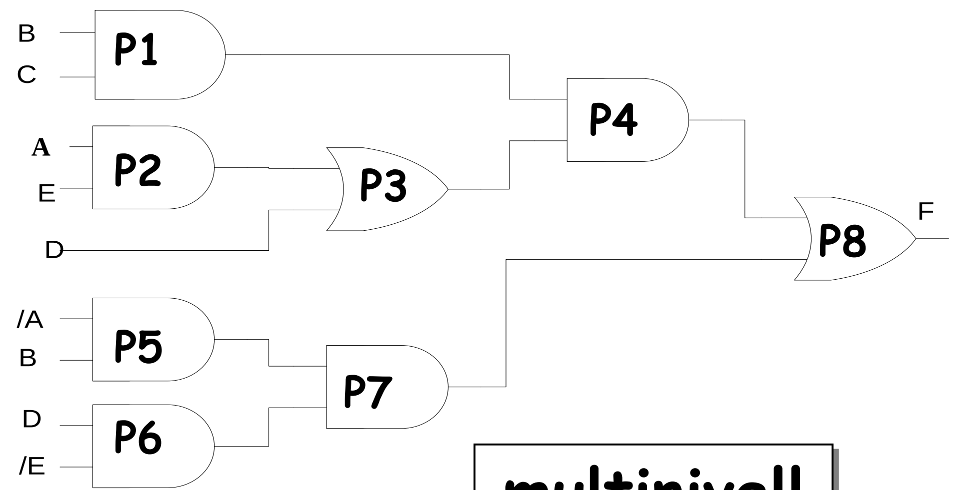
- funcions a dos nivells (més ràpida)
- funcions multinivell (pot ser més senzilla tecnològicament si utilitza un únic tipus de portes, menys cost)

F = A B C /D E + B C D + /A B D /E



2 nivells

F = (B C)((A E) + D) + (/A B)(D /E)

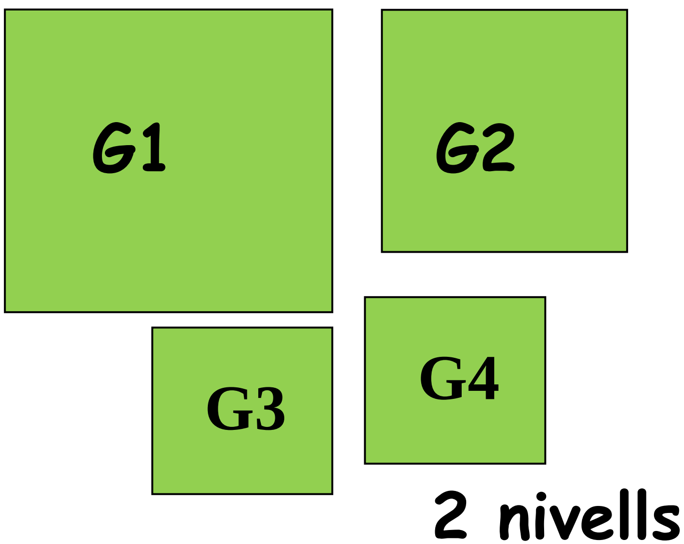


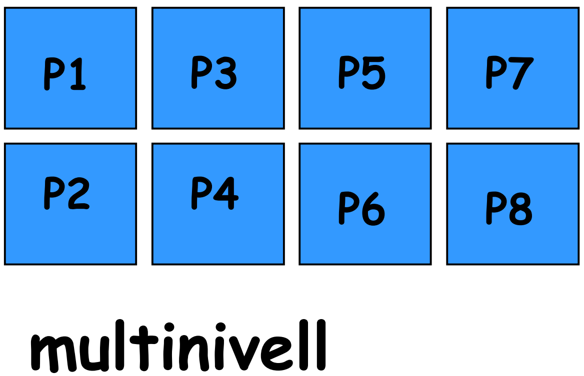
multinivell

Aplicant lleis d'àlgebra de Boole

Avantatges / Inconvenients
de cada estratègia de disseny combinacional

↑ Nivells => ↑ Retard ↓ Velocitat
↑ Nivells => ↓ # entrades ↓ Àrea [= Cost (mm^2 de Si)]
↓ # entrades => ↑ Regularitat (peces de puzzle + uniformes)
↓ # entrades=> ↓ Consum





Síntesi a dos nivells

Utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole podem simplificar les funcions lògiques:

$$\mathrm{f} = \mathrm{A} + \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C} + \mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{D}} + \overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}$$

$$f = A + (A + \overline{A})\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B = B\cdot C + A(1+\overline{D}) + \overline{A}\cdot B =$$

$$= B\cdot C + A + \overline{A}\cdot B = (A + \overline{A}\cdot B) + B\cdot C = A + B + B\cdot C = A + B\cdot(1+B) = A + B$$

Mètodes sistemàtics per aplicar les lleis de l'Àlgebra de Boole i simplificar les funcions lògiques a dos nivells:

Mapes de Karnaugh

Mètode tabular o de Quine-McCluskey

Mapes de Karnaugh

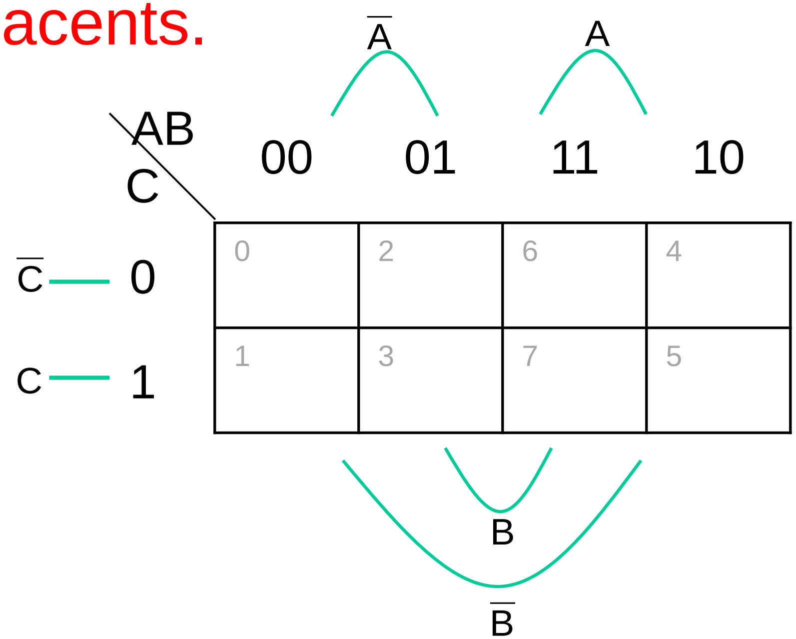
Són útils per a la simplificació a dos nivells.

Es poden considerar una representació gràfica de la taula de veritat de les funcions de commutació. Cadascuna de les files de la taula té una cel·la associada al mapa.

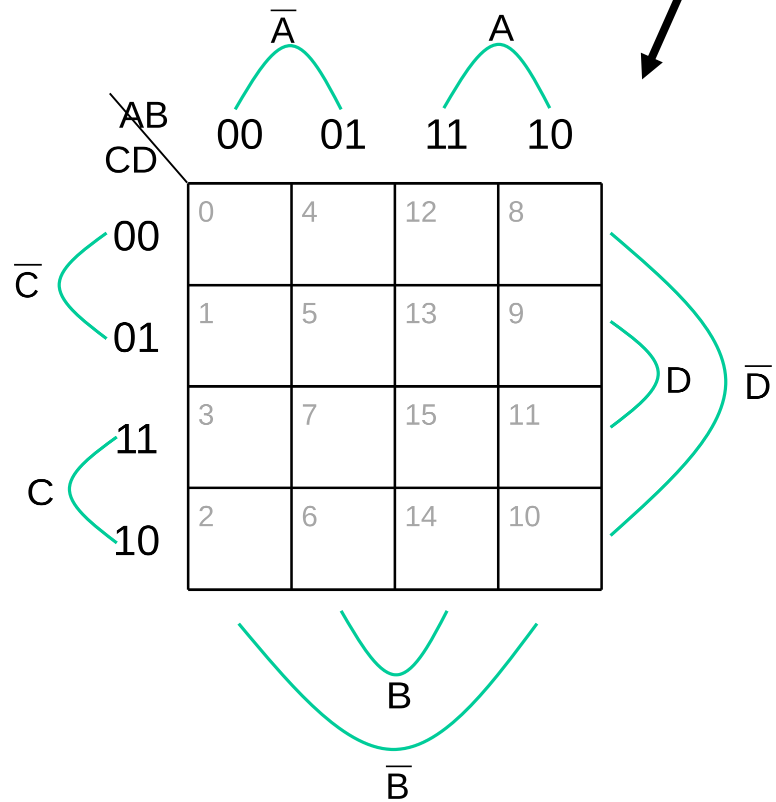
Per a realitzar aquesta representació cal que els termes canònics lògicament adjacents estiguin físicament adjacents a la representació. Això implica que la ordenació del diagrama **NO** és la natural.

Treballarem amb 3, 4 o 5 variables

El mapa de Karnaugh de 3 variables, considerat en 3D, és un cilindre, es a dir, els quadres dels costats esquerra i dreta són adjacents.

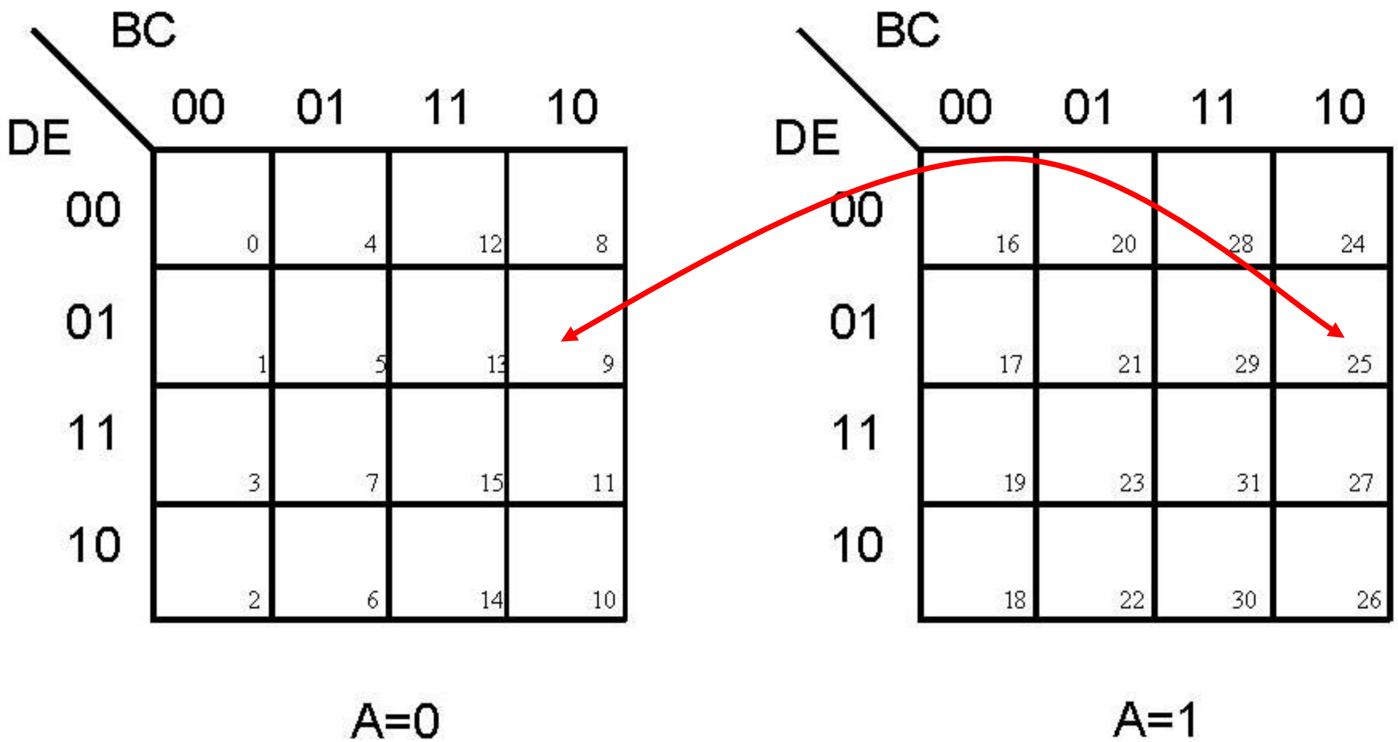


distribució de les variables al mapa



Al mapa de 4 variables: a més, els termes de dalt i de baix també són adjacents (una esfera).

Per treballar amb 5 variables, cal utilitzar dos mapes de 4 variables i considerar **que un està a sobre de l’altre**: a més de les anteriors del mapa de 4 variables, dues cel·les, una de cada mapa, situades una sobre l’altra, també són adjacents.



Per més variables ja no és útil.

Hem de col·locar al mapa els 1's o els 0's de la taula de la veritat. Es col·loca un 1 per representar un minterm, o es col·loca un 0 per representar un maxterm.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5: 1	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14: 1	10

$m_5 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$ i $m_{14} = A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4: 0	12	8
01	1	5	13	9: 0
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$M_9 = \overline{A} + B + C + \overline{D}$ i $M_4 = A + \overline{B} + C + D$

Una vegada col·locats al mapa, aquest es podrà utilitzar per simplificar visualment, **sense necessitats de fer àlgebra**.

Simplificació com a **suma de productes**

Es considera que una funció està simplificada quan (expressada com a suma de productes):

1. No hi ha cap altre expressió equivalent constituïda per menys productes.
2. No hi ha cap altre expressió equivalent amb el mateix nombre de productes però amb menys literals.

Nota: estem trobant una expressió mínima, no l'expressió mínima.

Recordem que cada *minterm* correspon a un 1 de la funció.

Exemple

L'adjacència de termes permet eliminar variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5: 1	13: 1	9
11	3	7: 1	15: 1	11
10	2: 1	6: 1	14	10

$$\bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD = B\bar{C}D(\bar{A} + A) + BCD(\bar{A} + A) =$$
$$= B\bar{C}D + BCD = BD(\bar{C} + C) = BD$$

$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} = \bar{A}C\bar{D}(\bar{B} + B) = \bar{A}C\bar{D}$$

- Amb quatre termes adjacents podem eliminar dues variables.

- Els termes adjacents només es diferencien en una variable: amb dos termes adjacents podem eliminar una variable i, per tant, simplificar-lo.

$$f(A,B,C,D) = \Sigma m(2,5,6,7,13,15) =$$

Exemple

AB / CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5: 1	13: 1	9
11	3	7: 1	15: 1	11
10	2: 1	6: 1	14	10

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}C\overline{D} + BD$$

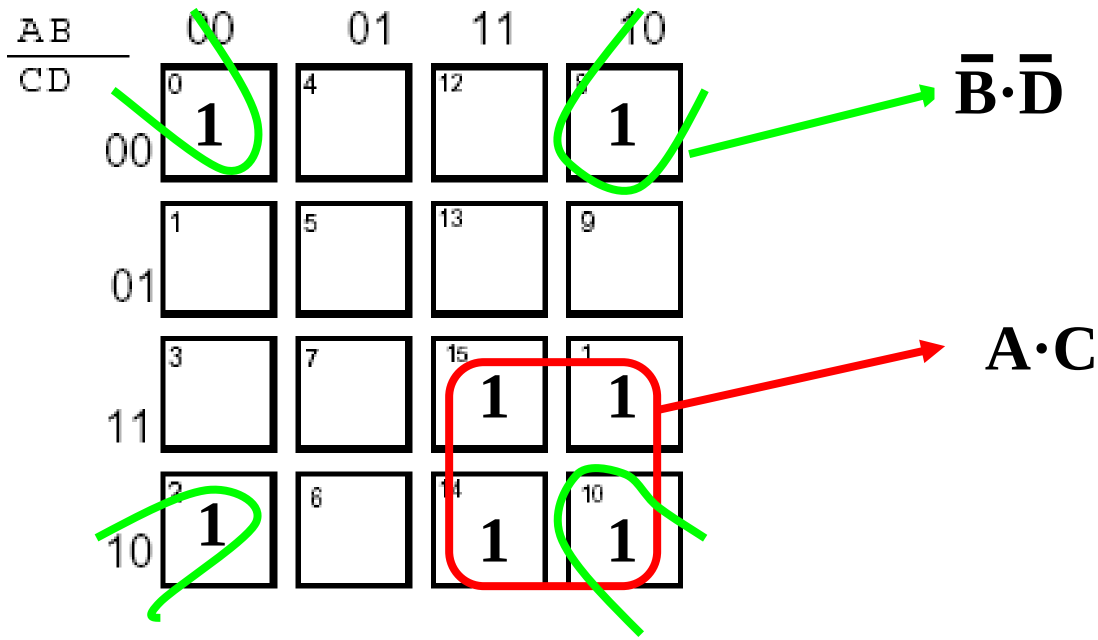
El procediment sistemàtic és:

1. S'agafen tots els 1s que no es poden agrupar amb res
2. Es formen tots els grups de dos 1s que no poden formar cap grup de quatre
3. Es formen tots els grups de quatre 1s que no poden formar cap grup de vuit
4. .... i així successivament
5. El mètode acaba quan s'han cobert tots els 1s

L'agrupació de termes es fa sempre en potències de 2 (2, 4 8, 16, ...).

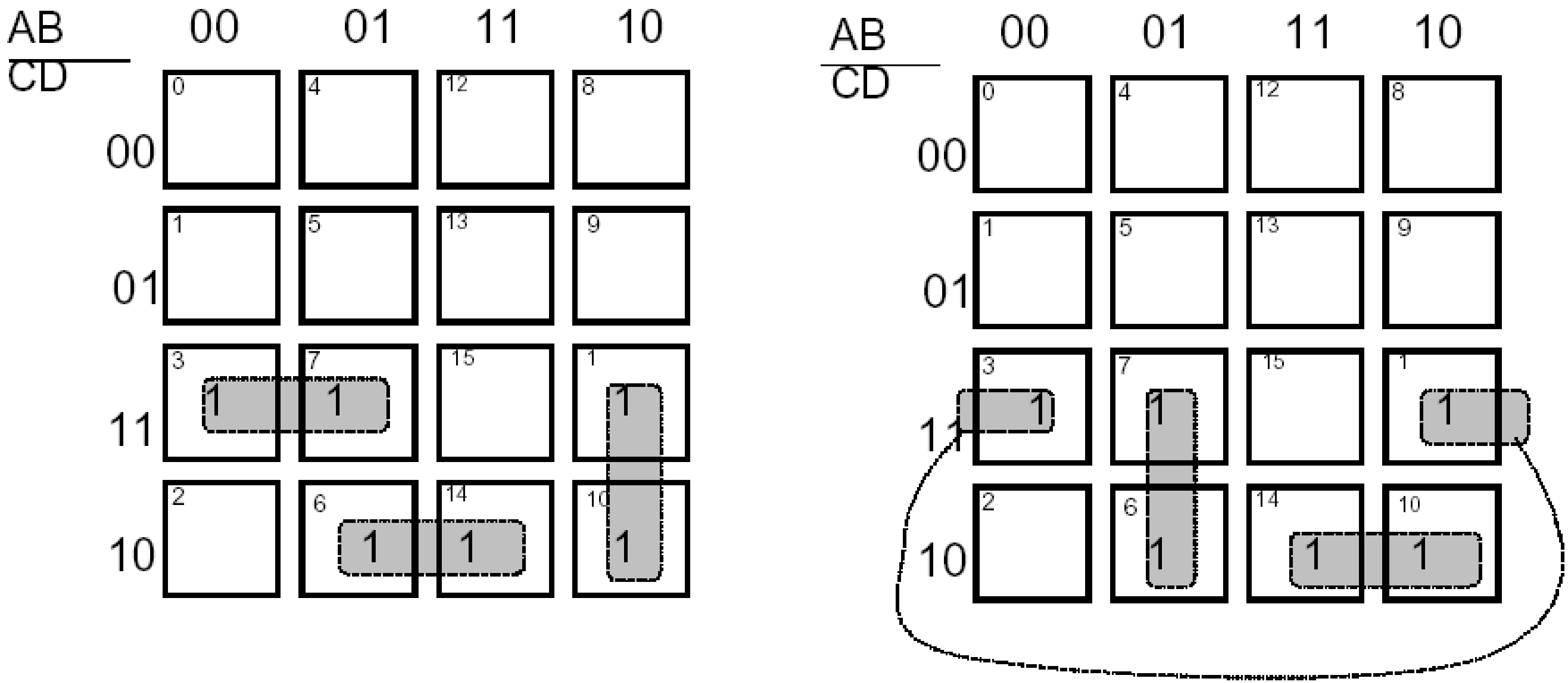
Un mateix 1 es pot agafar totes les vegades que sigui necessari per fer simplificacions

$$f = \sum_4 m(0,2,8,10,11,14,15) =$$



Les simplificacions no son úniques (en aquest cas són equivalents)

$$f = \sum m(3, 6, 7, 10, 11, 14)$$



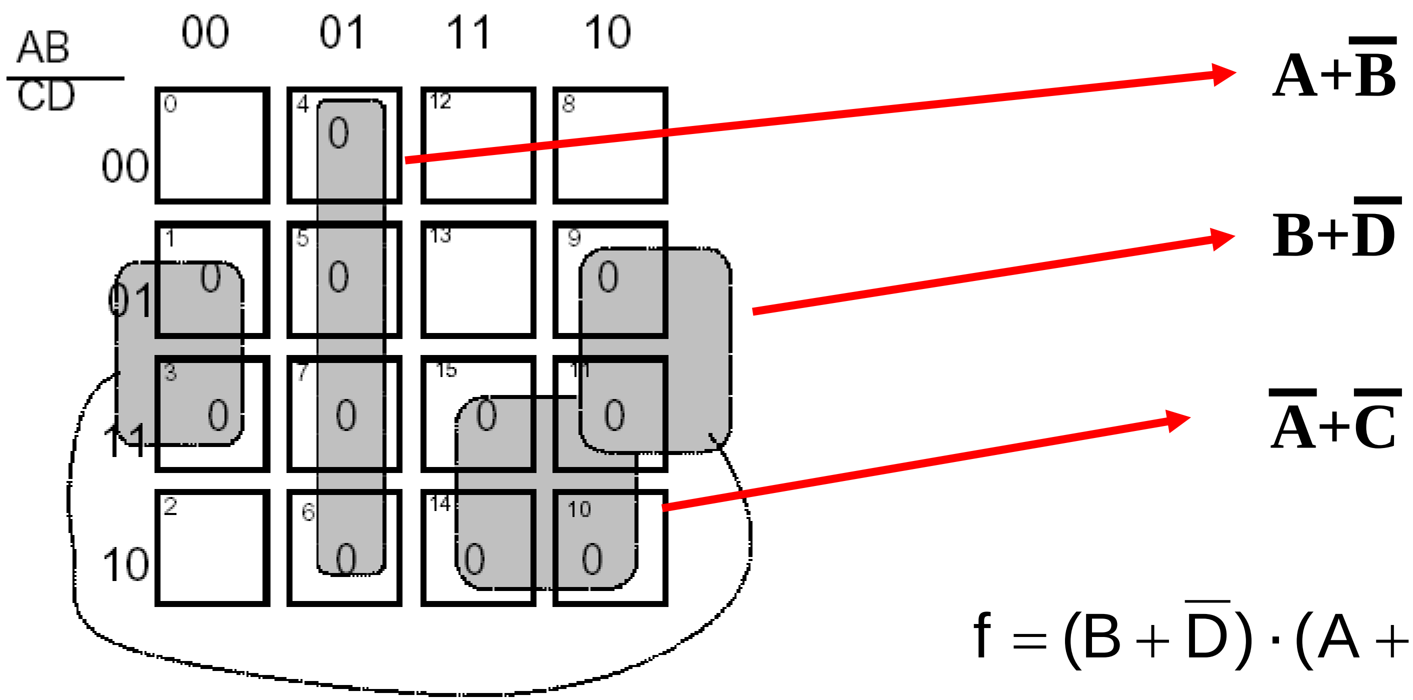
$$(a) \quad \rightarrow \quad f = \overline{A} \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$(b) \quad \rightarrow \quad f = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D$$

Simplificació com a **producte de sumes**

Aquí cada maxterm correspon a un 0 a la funció i hem de recordar quina relació hi ha entre minterms i maxterms. La resta del procediment és igual al descrit per als minterms.

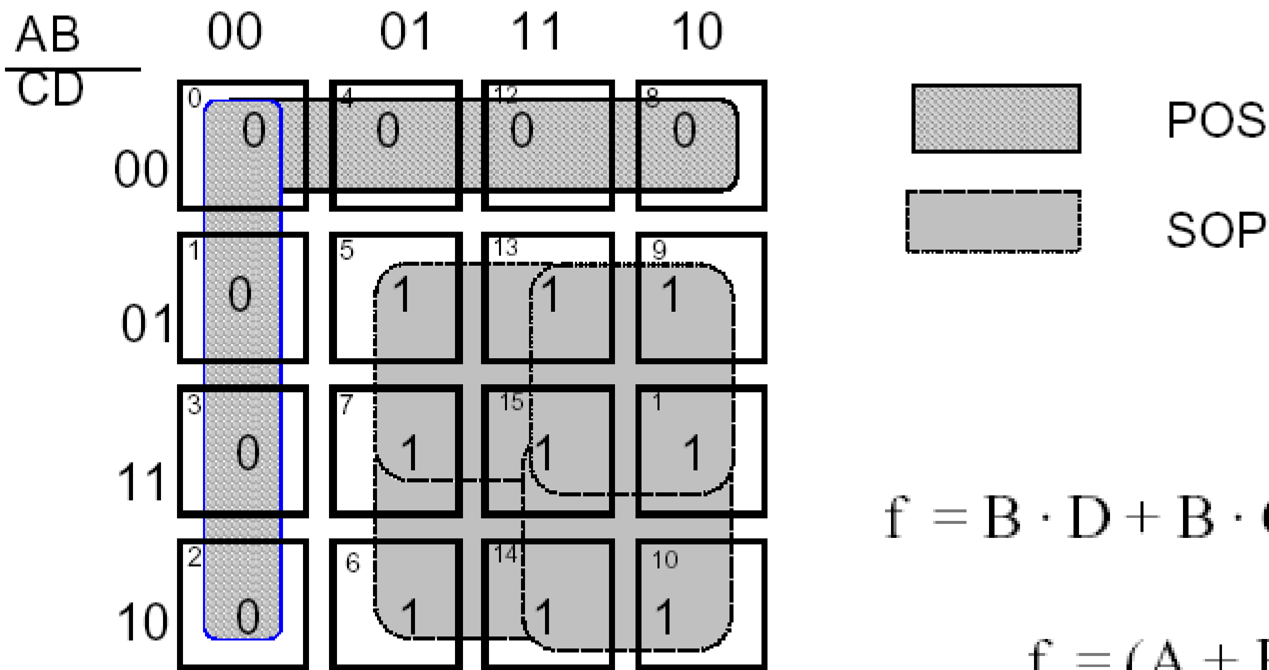
$$f = \prod M\,(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15)$$



$$f = (B+\overline{D})\cdot(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+\overline{C})$$

Les simplificacions com a suma de productes o com a producte de sumes no tenen per què ser iguals en la seva complexitat.

$$f = \sum m(5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15) = \prod M(0, 1, 2, 3, 4, 8, 12)$$



$$f = B \cdot D + B \cdot C + A \cdot D + A \cdot C$$

$$f = (A + B) \cdot (C + D)$$

Funcions especificades incompletament

En alguns casos existeixen determinades combinacions dels bits d'entrada que no es donaran mai.

De cara a les simplificacions les podem interpretar com a 1 o com a 0, segons ens interessi i sense pressuposar el seu valor.

Per això utilitzarem la lletra 'x' per posar al mapa de Karnaugh

La representació com a SOP és: Σ_{Φ} o $+\Phi$

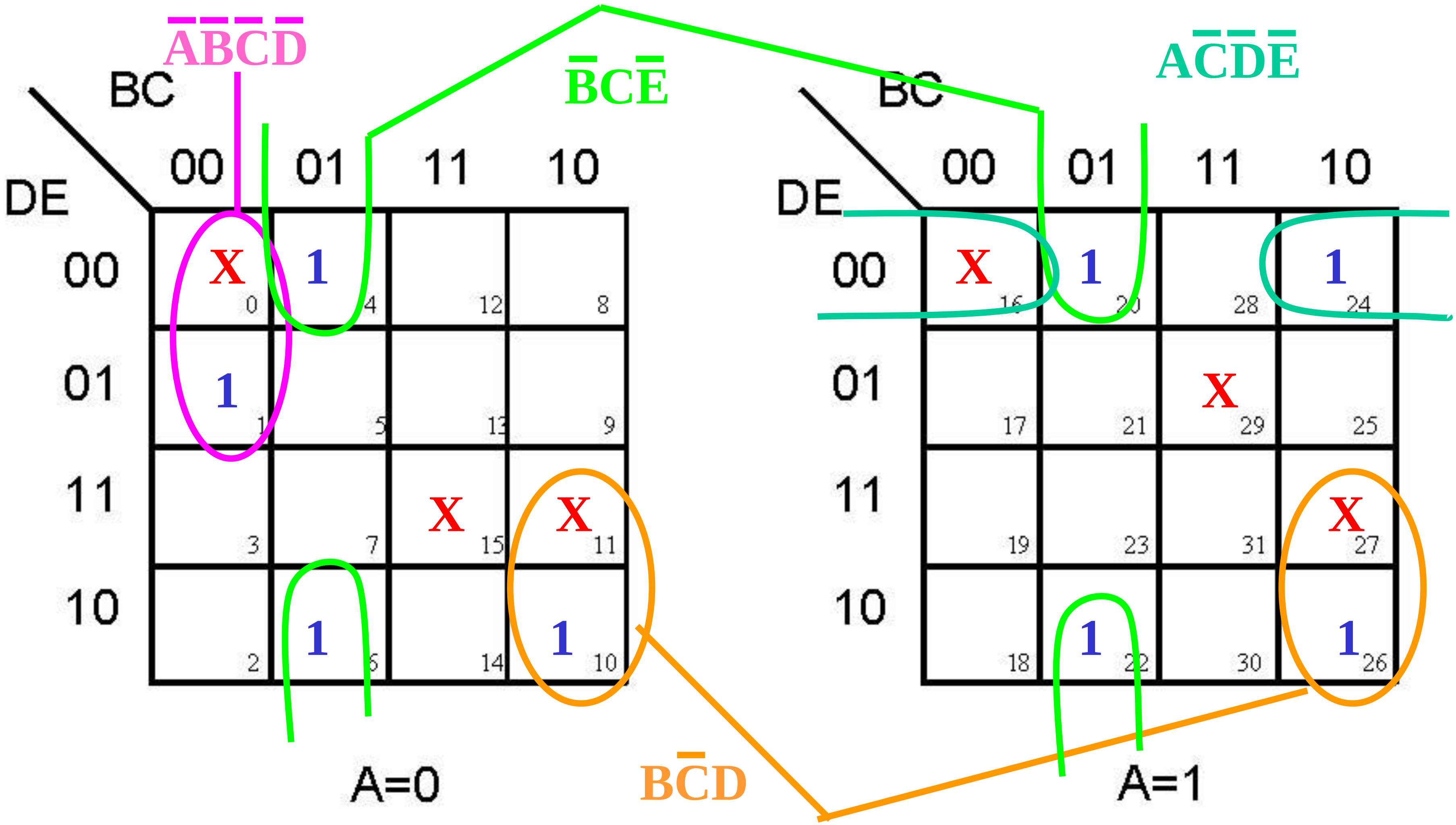
La representació com a POS és: Π_{Φ} o $\cdot\Phi$

$$f(A,B,C,D,E) = \Sigma_m(1,4,6,10,20,22,24,26) + \Phi(0,11,15,16,27,29)$$

ABCDE	f
00000	X
00001	1
00010	0
00011	0
00100	1
00101	0
00110	1
00111	0
01000	0
01001	0
01010	1
01011	X
01100	0
01101	0
01110	0
01111	X

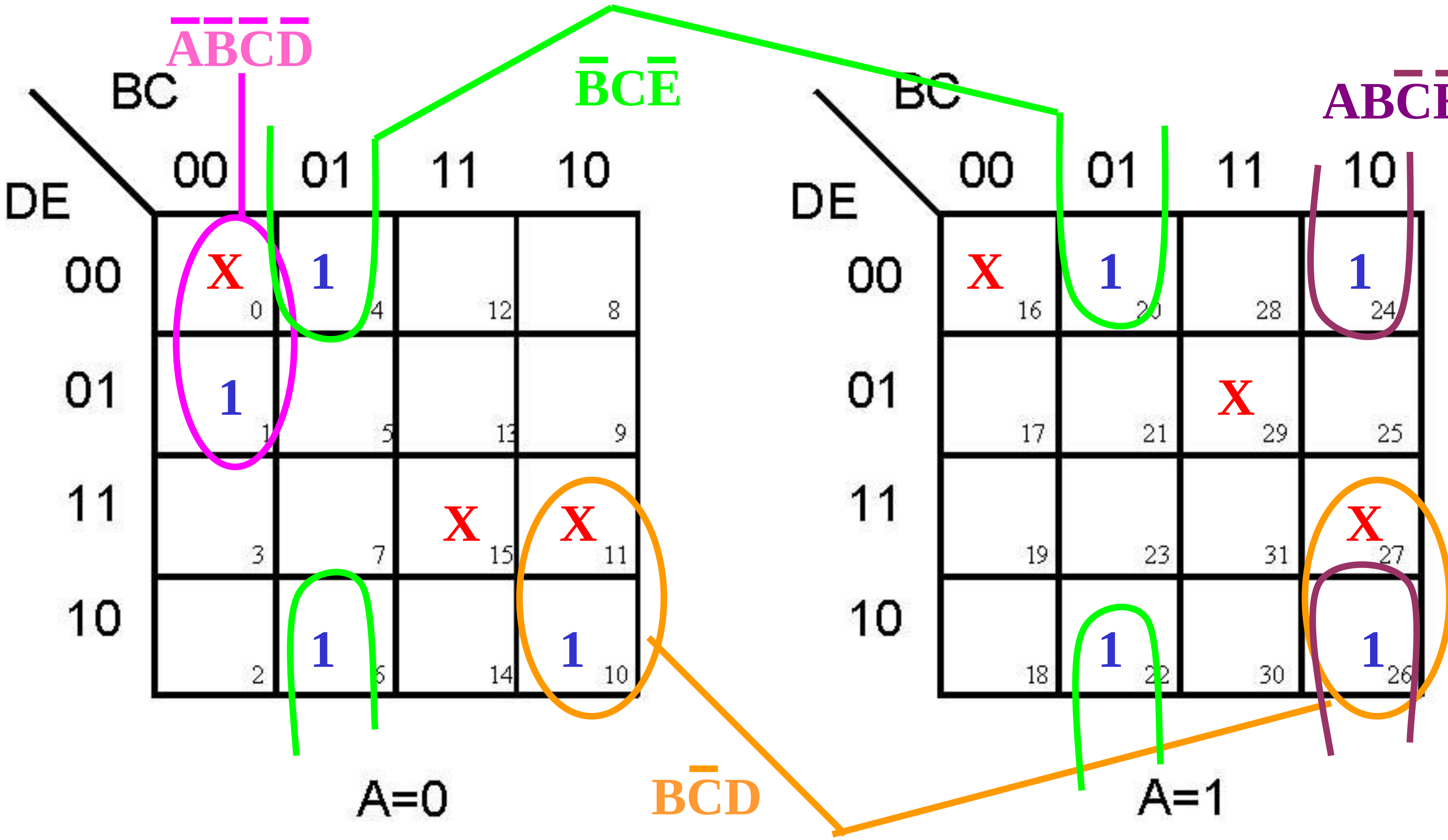
ABCDE	f
10000	X
10001	0
10010	0
10011	0
10100	1
10101	0
10110	1
10111	0
11000	1
11001	0
11010	1
11011	X
11100	0
11101	X
11110	0
11111	0

$$f(A,B,C,D,E) = \Sigma_m(1,4,6,10,20,22,24,26) + \Phi(0,11,15,16,27,29)$$



$$f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + \overline{B}\cdot C\cdot\overline{E} + B\cdot\overline{C}\cdot D$$

$$f(A, B, C, D, E) = \sum m\,(1, 4, 6, 10, 20, 22, 24, 26) + \sum \phi\,(0, 11, 16, 27)$$



$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{E} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{E} + B \cdot \overline{C} \cdot D$$

Sistemes combinacionals

Com hem vist, qualsevol sistema digital es pot implementar mitjançant portes lògiques a dos nivells, però el circuit resultant pot ser molt complex, amb moltes entrades i difícil de realitzar a la pràctica.

Els sistemes complexos es dissenyen de forma jeràrquica o modular. Estan formats per subsistemes, que a la seva vegada, poden estar constituïts per mòduls amb funcions ben determinades i, els quals, es poden realitzar amb dos nivells de portes.

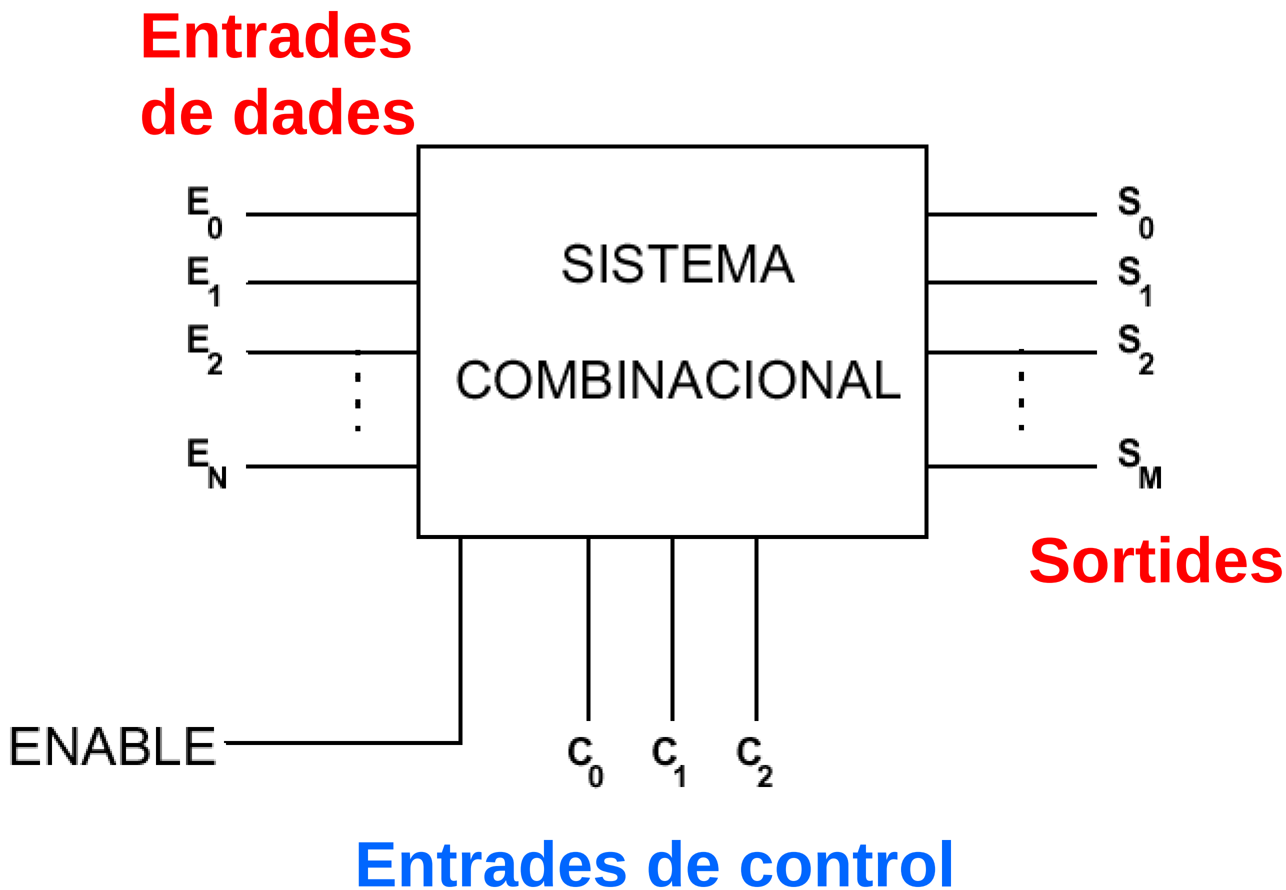
Un sistema digital en el qual la sortida només depèn de l'estat de les variables d'entrada i no depèn d'estats anteriors s'anomena sistema **combinacional** (combinació de les variables d'entrada).

Sistemes combinacionals

Els mòduls poden ser circuits combinacionals ad hoc (dissenyats específicament) i *circuits combinacionals estàndard*, destacant els que realitzen tasques de:

- Codificació, com els descodificadors
- Adreçament i commutació entre senyals, com els multiplexors
- Comparació, tal dits comparadors
- Funcions aritmètiques, com els sumadors i restadors

Aquests mòduls, a més de terminals de dades (entrades i sortides) i terminals de polarització (alimentació elèctrica), acostumen a tenir entrades de control, que poden modificar la funcionalitat del mòdul, o també activar o inhibir el mateix.


Entrades
de dades
E0
E1
E2
EN
SISTEMA
COMBINACIONAL
S0
S1
S2
SM
Sortides
ENABLE
C0
C1
C2
Entrades de control

Un exemple d'entrades de control que fan una tasca molt concreta d'activació e inhibició son:

- ENABLE: Activa el mòdul si està a 1 (i amb $\overline{\text{ENABLE}}$ el mòdul és actiu quan val 0)
- DISABLE: Desactiva el mòdul si està a 1 (i amb $\overline{\text{DISABLE}}$ el mòdul es desactiva quan val 0)