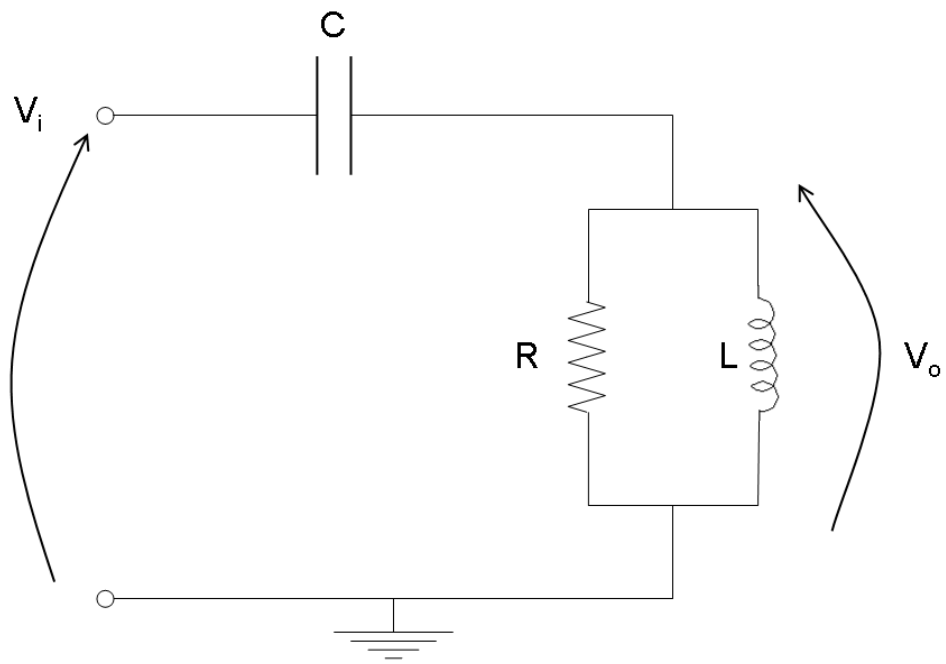
Problema resolt del tema 6: Senyals, transferència i resposta

PR_T6:

Amb el circuit de la figura:

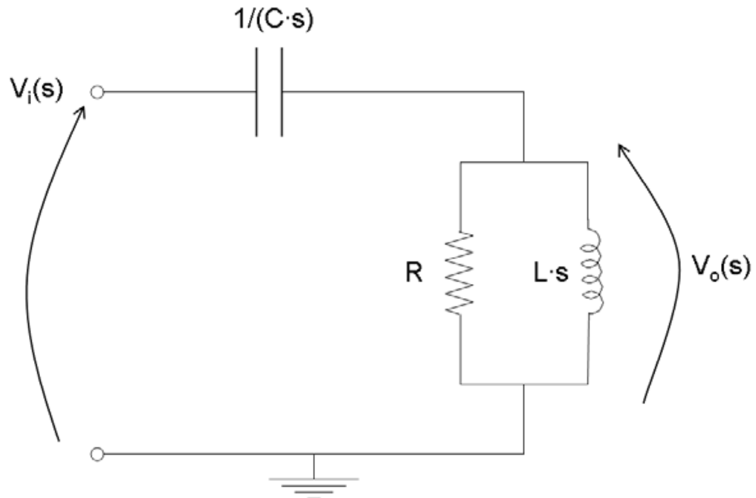
a) Resol el circuit a l’espai de Laplace (doneu totes les tensions i els corrents del circuit). Preneu condicions inicials nul·les.
b) Calcula la funció de transferència del circuit amb sortida V_o i entrada V_i.
c) Obtenir el senyal d’entrada a l’espai temporal per una entrada esglaó, d’amplada V. Preneu condicions inicials nul·les. (Preneu els valors següents: R = 1 kΩ, L = 0.8 mH, C = 1 nF).



Resolució:

a) Resol el circuit a l'espai de Laplace (doneu totes les tensions i els corrents del circuit). Preneu condicions inicials nul·les.

El primer pas consisteix en transformar el circuit a l'espai de Laplace, tenint en compte que a l'enunciat del problema ens indiquen que prenguem condicions inicials nul·les. Llavors, el circuit queda de la següent forma:



Per resoldre el circuit, només hem de fer el mateix que fem amb circuits que només tenen resistències (tant el condensador com la bobina ara es consideren com resistències, però amb valors $1/Cs$ i Ls respectivament).
Es pot resoldre de diferents formes. Una és simplement aplicant les lleis de Kirchhoff, com sempre. Jo ho faré d'altres forma. Primer calculem la impedància equivalent de R i L (estan en paral·lel):

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L \cdot s} = \frac{R + L \cdot s}{R \cdot L \cdot s} \quad \Rightarrow Z_p = \frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s}$$

Aquesta resistència es troba en sèrie amb el condensador. Per tant, la resistència total serà:

$$Z_T = \frac{1}{C \cdot s} + Z_p = \frac{1}{C \cdot s} + \frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s} = \frac{R + L \cdot s + C \cdot R \cdot L \cdot s^2}{C \cdot s \cdot (R + L \cdot s)} = \frac{s^2 \cdot C \cdot R \cdot L + s \cdot L + R}{s \cdot (R \cdot C + s \cdot L \cdot C)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right)}$$

Ara podem calcular el corrent que travessa Z_T, ja que coneixem la tensió aplicada (V_i). Aquest corrent serà el mateix que el que travessa el condensador i també Z_p:

$$I_T = \frac{V_i}{Z_T} = \frac{V_i}{R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right)}} = V_i \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Ara també podem calcular la tensió que cau a Z_P, que serà la mateixa que la que cau a R i a L:

$$V_P = V_o = I_T \cdot Z_P = \frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s} \cdot V_i \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{s \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} = V_i \cdot \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Ara només ens resta obtenir els corrents que passen per R i L. Com que coneixem V_P, llavors és fàcil obtenir aquests corrents amb la llei d’Ohm:

$$I_R = \frac{V_P}{R} = V_i \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$I_L = \frac{V_P}{L \cdot s} = V_i \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

b) Calcula la funció de transferència del circuit amb sortida V_o i entrada V_i.

Recordar primer, que la funció de transferència s’ha d’obtenir amb condicions inicials nul·les. Com a l’apartat anterior ja hem resolt el circuit amb aquesta suposició, es pot obtenir la funció de transferència immediatament:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_P}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

c) Obtenir el senyal d’entrada a l’espai temporal per una entrada esglaó, d’amplada V. Preneu condicions inicials nul·les. (Preneu els valors següents: R = 1 kΩ, L = 0.8 mH, C = 1 nF).

A l’espai de Laplace, un senyal esglaó d’amplada V ve donat per: $V_i = \frac{V}{s}$

Com que ens diuen que prenem condicions inicials nul·les, podem fer servir directament la funció de transferència. Per tant, el senyal de sortida a l’espai de Laplace serà:

$$V_o = H(s) \cdot V_i = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} \cdot \frac{V}{s} = V \cdot \frac{s}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Per obtenir el senyal a l'espai temps, haurem de antitransformar aquesta expressió. Com que *V* és una constant, haurem d'antitransformar:

$$\frac{s}{s^2 + s\cdot\frac{1}{R\cdot C}+\frac{1}{L\cdot C}}$$

Per això, seguirem el mètode general que s'ha explicat a classe. Per tant, el primer pas és trobar les arrels (pols) del polinomi del denominador (treballem amb units del SI):

$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-\frac{1}{R\cdot C}\pm\sqrt{\frac{1}{R^2\cdot C^2}-4\cdot\frac{1}{L\cdot C}}}{2}=\frac{-10^6\pm\sqrt{10^{12}-5\cdot 10^{12}}}{2}=\frac{-10^6\pm\sqrt{-4\cdot 10^{12}}}{2}$$

Per tant, les dues solucions són:

$$s_1=-0.5\cdot 10^6+j\cdot 10^6$$
$$s_2=-0.5\cdot 10^6-j\cdot 10^6$$

D'aquesta forma, el polinomi del denominador es pot posar com: $(s-s_1)\cdot(s-s_2)$

El segon pas consisteix en obtenir la funció a transformar en la forma de suma de termes 1/(*s*+*a*), ja que això es pot antitransformar fàcilment. Per tant, intentem fer:

$$F(s)=\frac{s}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}=\frac{A}{(s-s_1)}+\frac{B}{(s-s_2)}$$

Només hem d'obtenir *A* i *B*. I això ja s'ha vist a classe:

$$A=F(s)\cdot(s-s_1)\Big|_{s=s_1}=\frac{s}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}\cdot(s-s_1)\Bigg|_{s=s_1}=\frac{s_1}{(s_1-s_2)}=\frac{-0.5\cdot 10^6+j\cdot 10^6}{(2\cdot j\cdot 10^6)}=0.5+j\cdot 0.25$$

(aquí hem utilitzat dues relacions relacionades amb j:

$$j\cdot j=-1$$
$$\frac{1}{j}=-j$$

La primera relació és evident sabent que $j=\sqrt{-1}$, mentre que la segona és fàcil de veure (multipliqueu i dividiu per *j*).
)

Fent el mateix per B:

$$B = F(s)\cdot(s-s_2)\Big|_{s=s_2} = \frac{s}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}\cdot(s-s_2)\Bigg|_{s=s_2} = \frac{s_2}{(s_2-s_1)} = \frac{-0.5\cdot10^6 - j\cdot10^6}{(-2\cdot j\cdot10^6)} = 0.5 - j\cdot0.25$$

Per tant, el nostre senyal de sortida a l'espai de Laplace queda com:

$$V_o(s) = V\cdot\left(\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}\right) = V\cdot\left(\frac{0.5+j\cdot0.25}{s-\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)}+\frac{0.5-j\cdot0.25}{s-\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)}\right)$$

Ara podem fer l'antitransformació:

$$V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot\left(\left(0.5+j\cdot0.25\right)\cdot e^{\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)t}+\left(0.5-j\cdot0.25\right)\cdot e^{\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)t}\right)$$

Hem de desenvolupar aquesta expressió per tal d'eliminar els termes amb *j*. A l'espai temporal, el senyal ha de ser real (no complexe):

$$V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot\left(0.5\cdot\left(e^{\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)t}+e^{\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)t}\right)+j\cdot0.25\cdot\left(e^{\left(-0.5\cdot10^6+j\cdot10^6\right)t}-e^{\left(-0.5\cdot10^6-j\cdot10^6\right)t}\right)\right)=$$
$$= u(t)\cdot V\cdot\left(0.5\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\left(e^{j\cdot10^6\cdot t}+e^{-j\cdot10^6\cdot t}\right)+j\cdot0.25\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\left(e^{j\cdot10^6\cdot t}-e^{-j\cdot10^6\cdot t}\right)\right)=$$

Ara fem ús de les següent relacions:

$$e^{j\cdot a} = \cos(a)+j\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

Per tant:

$$V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(0.5\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)+\cos\left(-10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(-10^6\cdot t\right)\right)+j\cdot0.25\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)-\cos\left(-10^6\cdot t\right)-j\cdot\sin\left(-10^6\cdot t\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot0.5\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)+\cos\left(10^6\cdot t\right)-j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)+j\cdot0.25\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)-\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(0.5\cdot2\cdot\cos\left(10^6\cdot t\right)+j\cdot0.25\cdot2\cdot j\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)$$
$$\Rightarrow V_o(t) = u(t)\cdot V\cdot e^{-0.5\cdot10^6\cdot t}\cdot\left(\cos\left(10^6\cdot t\right)-0.5\cdot\sin\left(10^6\cdot t\right)\right)$$

Ara ja hem pogut posar l'expressió només en termes reals, i per tant ja hem acabat de resoldre aquest apartat.