

# Matemàtica Discreta

Curs 2021/2022

## Llista 3 - Combinatòria

1. Siguin  $\sigma$  i  $\tau$  les permutacions de  $S_7$  següents:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Calculeu  $\sigma \circ \tau$  i  $\tau \circ \sigma$ . ¿Són iguals?

ii) Determineu  $\sigma^{-1}$  i  $\tau^{-1}$ .

iii) ¿Commuten entre  $\sigma$  i  $\tau^{-1}$ ?

2. Siguin  $\sigma$  i  $\tau$  dues permutacions de  $S_n$  i sigui  $\gamma = \sigma \circ \tau$ . Demostreu que  $\gamma^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ . Calculeu  $\gamma$  y  $\gamma^{-1}$  en el cas  $n = 4$ , amb

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Siguin  $\sigma$  i  $\tau$  dues permutacions de  $S_n$  i sigui  $\gamma = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ . Demostreu que  $\gamma^k = \sigma \circ \tau^k \circ \sigma^{-1}$ , per a tot enter  $k$ .

4. Donades les permutacions

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

busqueu una permutació  $\gamma$  tal que  $\gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma = \beta$ . Feu el mateix amb

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Calculeu la signatura de les permutacions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\sigma$  de l'exercici anterior.

6. Calculeu  $\tau \circ \sigma^{-1}$  on

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Doneu un exemple de dues permutacions de  $S_9$ , una parell i l'altre senar, que commutin.

8. Demostreu que en un conjunt de 30 persones en el que totes coneixen a algú, sempre hi ha, com a mínim, dues que coneixen al mateix nombre de persones.

9. En l'assignatura de Matemàtica Discreta s'han matriculat 92 alumnes. Demostrea que algun mes es celebren al menys 8 aniversaris i que, pel contrari, algun mes es celebren a molt 7 aniversaris.

10. ¿Quants nombres enters entre 1 i 1000 (s'inclou el 1 i el 1000) no són divisibles ni per 3, ni per 7 ni per 11?

11. Quants nombres naturals entre 602 i 1002 no són divisibles ni per 3 ni per 5 ni per 7.

12. En una classe que hi ha 67 estudiants, 41 saben anglès, 20 saben francès i 10 coneixen ambdues llengües. Quants estudiants no coneixen cap de les dues? Si a més hi ha 12 estudiants que parlen rus, dels quals 7 parlen anglès, 5 parlen francès i tres les tres llengües, quants estudiants no parlen cap de les tres llengües?

- 13.** De quantes formes podem escollir un conjunt de 5 cartes en un joc de 52 cartes de tal forma que hi hagi al menys una carta de cada pal?
- 14.** Una clau es fabrica fent varies incissions de profunditat variable. Si cada incissió té 8 profunditats possibles, quantes incissions necessitem fer per tenir un milió de claus diferents.
- 15.** En el si d'un grup de 20 persones, cal escollir un president, un tresorer i un secretari. De quantes formes es pot fer aquesta elecció?
- 16.** Un equip de futbol disposa de 3 porters, 6 defenses, 8 centrals i 5 davanterers. Quantes alineacions de 1 porter, 3 defenses, 4 centrals i 3 davanterers es poden fer?. Quantes alineacions es poden fer si tots els jugadors llevat els porters poden jugar en qualssevol posició?.
- 17.** Calcula el nombre de cadenes de ceros i uns de longitud  $n$  que es poden fer amb exactament  $k$  ceros.
- 18.** De quantes formes podem sentar a 8 persones en una taula rodona suposant que:
- i) Totes les cadires són diferents.
  - ii) Les cadires no es distingeixen entre si, però ens importa qui està a la dreta i qui a l'esquerra de cadascú.
- 19.** De quantes formes podem alinear  $n$  boles blanques iguals i  $m$  boles negres iguals de tal forma que totes les boles negres estiguin juntes. Si les boles estan numerades, quantes formes diferents hi ha ?
- 20.** De quantes formes es poden col·locar 17 nois i 13 noies en una fila de forma que no hi hagi dues noies juntes.
- 21.** Quants resultats diferents podem obtenir en tirar d'una sola vegada 11 daus.
- 22.** De quantes formes podem repartir 6 boles numerades en 10 caixes ? I si en cada caixa podem posar com a màxim una bola? En ambdós casos, què passaria si les boles fossin indistingibles.
- 23.** De quantes formes podem escollir un conjunt ordenat de  $k$  enters no consecutius entre 1 i  $n$ ?
- 24.** Quantes paraules de 14 lletres es poden fer amb les lletres

AAAABUTTIOPRRS

De totes elles calcular:

- i) Quantes no tenen dues T consecutives.
- ii) Quantes tenen totes les vocals juntes.
- iii) Quantes tenen totes les vocals en ordre alfabètic.
- iv) Quantes tenen totes les vocals juntes i en ordre alfabètic.

- 25.** a) Quants nombres de 5 xifres diferents no tenen ni el 2 ni el 4 ni el 6.
- b) Tenim 4 vocals i 4 consonants diferents. Quantes paraules de 8 lletres es poden fer si no poden anar juntes ni dues vocals ni dues consonants.
- c) Un noi ha d'escollir 13 samarretes entre 25. De les 25 n'hi ha 5 que li agraden. De quantes formes ho pot fer triant les que li agraden?
- d) De quantes formes podem posar 15 boles blanques iguals i 5 boles negres numerades en 10 caixes de forma que en una caixa no hi pot haver més d'una bola negra.
- e) Quantes paraules diferents que comencin amb vocal es poden fer amb

*A, E, I, P, D, P, F, G, D, T, P*

- 26.** Entre 20 persones es repartiran 4 premis. Calcula de quantes formes es pot fer si

- a) Una persona només pot rebre un premi
- b) Una persona pot rebre més d'un premi

primer suposant que els premis són diferents i després en el cas en el que són iguals.

- 27.** Hem de seure 5 nois i 4 noies en una fila de 9 butaques numerades. De quantes formes ho podem fer si:

- a) Les noies ocupen butaques parells.
- b) Dues noies no poden estar juntes.

- 28.** 4 llibres de matemàtiques, 6 de física i 2 de química s'han de posar en una prestatgeria. De quantes formes es pot fer si:

- a) Els llibres de cada matèria han d'estar junts i tots els llibres són diferents.
- b) Els llibres de matemàtiques han d'estar junts i els llibres de cada matèria són idèntics.

- 29.** Busca el coeficient de  $x^2yz^4$  en el desenvolupament de  $(x + y + z)^7$ .

- 30.** Busca el coeficient de  $x^5z^7$  en el desenvolupament de  $(x + z)^{12}$ .