4.13. Considerem a $\mathbb{R}^4$ els subespais vectorials donats per

$\rightarrow H = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z=0, y+z+t=0, x+2z+t=0 \}$ o bé : $H = \begin{cases} x-y+z = 0 \\ y+z+t=0 \\ x+2z+t=0 \end{cases}$

$\rightarrow F_a = \langle (1,1,2,1), (0,2,0,1), (-1,3,a,1) \rangle$.

(i) Bases de cada un d'ells, segons els valors del paràmetre a.

$F_a = \langle (1,1,2,1), (0,2,0,1), (-1,3,a,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{I} \rightarrow$ El subespai generat pel conjunt dels primers vectors és el mateix que el subespai generat pel conjunt dels últims vectors.

$\rightarrow$ base de F_a $\rightarrow$ Si $a=-2 \rightarrow \{ (1,1,2,1), (0,2,0,1) \}$

$\rightarrow$ Si $a \neq -2 \rightarrow \{ (1,1,2,1), (0,2,0,1), (0,0,2+a,0) \} =$

$= \{ (1,1,2,1), (0,2,0,1), (0,0,1,0) \}$.

$$H = \begin{cases} x-y+z = 0 \\ y+z+t=0 \\ x+2z+t=0 \end{cases} \xrightarrow{F_3=F_3-F_1} \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+z+t=0 \\ \cancel{y+z+t=0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ graus de llibertat = nº incògnites − nº equacions independents.

$\Rightarrow$ Tindrem dos graus de llibertat.

Agafem com a variables z i t.

$\rightarrow t=1, z=0$ $\qquad$ $\rightarrow t=0, z=1$

$(-1,-1,0,1)$ $\qquad$ $(-2,-1,1,0)$

$\Rightarrow$ Base de H: $\{ (-2,-1,1,0), (-1,-1,0,1) \}$.

(ii) Trobeu equacions per F_a, segons els valors del paràmetre a.

(1) F_a $(a=-2)$

$F_a = \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & z-2x & t-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{z-2x}_{=0} & \underbrace{t-\frac{y+x}{2}}_{=0} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Equacions de $F_a\ (a=-2)$ = $\begin{cases} z-2x=0 \\ t-\frac{y+x}{2}=0 \end{cases}$

(2) F_a $(a \neq -2)$

$F_a = \langle (1,1,2,1),\ (0,2,0,1),\ (0,0,1,0) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z-2x & t-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z-2x & t-\frac{y+x}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Equació de $F_a\ (a \neq -2)$: $t - \frac{y+x}{2} = 0$

(iii) Trobeu els subespais $H \cap F_a$ i $H + F_a$ en cada cas. Doneu-los per equacions implícites i determineu bases de cada un d'ells.

F_{-2}: • $H \cap F_{-2}$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ \cancel{x + 2z + t = 0} \\ -x - y - 2t = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} H \\ \\ F_{-2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Solució: } x=y=z=t=0$$

$H \cap F_{-2} = \{(0,0,0,0)\} \to \dim 0$.

• $H + F_{-2}$: Per Grassmann: $\Rightarrow \dim(H+F_{-2}) = \underset{(2)}{\dim(H)} + \underset{(2)}{\dim(F_{-2})} - \underset{(0)}{\dim(H \cap F_{-2})}$

$\Rightarrow \dim(H+F_{-2}) = 4 - 0 = 4$

$\Rightarrow H + F_{-2} = \mathbb{R}^4$ → base canònica

→ no tenim equacions.

$\Rightarrow$ Si el subespai té la mateixa dimensió que l'espai → necessàriament és l'espai (base canònica) (no tenim equacions)

Fa: • $H \cap Fa$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ \cancel{x + 2z + t = 0} \\ -x - y - 2t = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right] H \\ \left.\right] Fa \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ -2y + z - 2t = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right.$$

Sigui $t = 1$ $\quad (-1, -1, 0, 1)$

$H \cap Fa = \{(-1, -1, 0, 1)\}$. dim = 1.

Per Grassman: $\dim(F_a + H) = \underset{(3)}{\dim(Fa)} + \underset{(2)}{\dim(H)} - \underset{1}{\dim(Fa \cap H)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(Fa + H) = 3 + 2 - 1 = 4 \Rightarrow$ estem a $\mathbb{R}^4$.

$\Rightarrow F + H = \mathbb{R}^4$. $\rightarrow$ base canònica

$\rightarrow$ no tenim equacions.