6

En els coeficients de les matrius, l'índex superior indica la fila i l'inferior la columna. Matriu $n \times m$ significa *amb n files i m columnes*.

6.1 Si

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, calculeu $A(0)$, $A(\alpha)A(\beta)$ i $A(\beta)A(\alpha)$; feu servir els resultats per calcular $A(\alpha)^n$, $A(\alpha)^{-1}$ i $A(\alpha)^{-n}$ $(= (A(\alpha)^{-1})^n)$, $n > 1$.

6.2 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu uma matriu 2×2, B, $B \neq 0$, de manera que $AB = 0$. Trobeu matrius 2×2, C i C', $C \neq C'$, de manera que $AC = AC'$.

6.3 Demostreu que si dues matrius $n \times n$, A i B, commuten, llavors

$$A^n B = BA^n, \quad n > 1,$$

i si A és regular,

$$A^{-1}B = BA^{-1},$$
$$A^{-n}B = BA^{-n}, \quad n > 1.$$

6.4 Si A i B son matrius $n \times n$, desenvolupeu

$$(A+B)^2, \quad (A+B)^3, \quad (A+B)(A-B).$$

Reescriviu els resultats en cas que A i B commutin.

6.5 Demostreu que si A és una matriu $n \times m$ i $\mathrm{rg}(A) < m$, llavors existeix una matriu $m \times 1$, B, $B \neq 0$, de manera que $AB = 0$. Deduïu d'aquest fet que en cas de ser $n = m$, A no és invertible.

6.6 Per quina matriu i per quin costat s'ha de multiplicar una matriu per obtenir

- la seva i-èsima fila,
- la seva j-èsima columna,
- la suma de les seves columnes?

6.7 Descriviu l'efecte de multiplicar una matriu $n \times m$, per la dreta, per la matriu $m \times m$: $A = (a^i_j)$ amb

$$a^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j + i = m + 1; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

6.8 Si

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculeu les potències A_4^n per a $n \geq 0$. Feu el mateix amb la matriu $m \times m$, $A_m = (a^i_j)$ definida per

$$a^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i+1; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

6.9 Siguin A, B, C les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu BA i resoleu l'equació matricial $AX = C$, on X és una matriu 3×3.
Calculeu AB i resoleu l'equació matricial $XA = C$, on X és una matriu 3×3.

6.10 En cas d'existir, trobeu la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.11 Si $A = (a^i_j)$ amb

$$a^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j, \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, $n > 1$, demostreu que

$$A^2 = (n-1)I + (n-2)A.$$

Aïlleu I de l'equació anterior, demostreu que A té inversa i calculeu-la.

6.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trobeu una matriu 2x2, $B \neq 0$, de manera que $AB = 0$

Sigui $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Aleshores $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

Trobeu matrius 2x2, C i C', $C \neq C'$ de manera que $AC = AC'$

$AC = AC' \rightarrow A(C' - C) = 0 \rightarrow A(C+B) = AC + \underset{0}{AB} = AC$

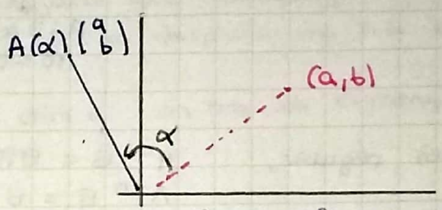
$A(C+B) = AC$

matriu C = C (qualsevol) $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

matriu $C' = C + B$ $C' = \begin{pmatrix} 5+1 & 4+1 \\ 6-1 & 3-1 \end{pmatrix}$

6.1. Si $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ calcula:

$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

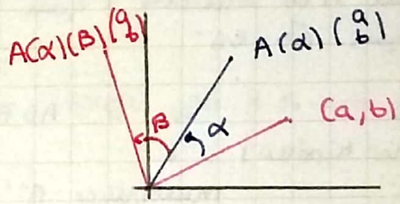


equival a fer una rotació

$A(\alpha)A(\beta)$ equival a aplicar una rotació d'α i després de β

$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$



ⓐ En aquest cas, les dues matrius commuten entre si.
És el mateix aplicar una rotació α i una rotació β que en l'ordre contrari.

$A(\alpha)A(-\alpha) = A(\alpha - \alpha) = A(0) = I$
$A(\alpha)^{-1} = A(-\alpha)$
$A^n(\alpha) = A(n\alpha)$
$A^{-n}(\alpha) = A(-n\alpha)$

! **POTÈNCIES DE MATRIUS**

$B^n = \underbrace{B \ldots B}_{n \text{ vegades}}$

$B^0 = I$

$B^{-n} = (B^{-1})^n = \underbrace{B^{-1} \ldots B^{-1}}_{n \text{ vegades}}$

6.3. Demostreu que si dues matrius $n\times n$, A i B, commuten, llavors:

$$A^n B = B A^n \quad , \quad \text{amb } n \geq 1$$

Suposem que A i B són dues matrius $n\times n$ i que A i B commuten, és a dir, $A\cdot B = B\cdot A$. Volem demostrar que $A^n B = BA^n$ amb $n \geq 1$

$$A^n B = \underbrace{A \dots A}_{n \text{ vegades}} \cdot B = \underbrace{A \dots}_{n-1 \text{ vegades}} A\, B\, A = \dots = B\, \underbrace{A \dots}_{n \text{ vegades}} A = B A^n$$

· demostració per inducció.

· Cas base: sigui $n = 1$

$A^n B = B A^n \rightarrow AB = BA$, és cert perquè les dues matrius commuten

· cas inductiu: suposem que és cert per $n-1$: $A^{n-1} B = B A^{n-1}$ i volem veure que és cert per n: $A^n B = B A^n$

$$A^n B = A^{n-1} \cdot A \cdot B = A^{n-1} \cdot B \cdot A = B A^{n-1} \cdot A = B A^n$$

(A i B commuten, $AB = BA$) (per hipòtesi d'inducció)

I si A és regular, $A^{-1} B = B A^{-1}$

$A^{-n} B = B A^{-n}$, $n \geq 1$

Suposem que A és invertible i que A commuta amb B, és a dir, $AB = BA$. Volem demostrar que $A^{-1}B = BA^{-1}$

$BA = AB$ (cert per hipòtesi) $\Rightarrow B = ABA^{-1} \Rightarrow A^{-1}B = BA^{-1}$

(multiplicar A^{-1} a l'esquerra) (multiplicar A^{-1} a la dreta)

si s'aplica $A^n B = BA^n$, s'obté $A^{-n} B = BA^{-n}$

6.8. Si

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Calculeu les potències n per A_4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Cada vegada que multipliquem, la diagonal d'uns es desplaça una fila cap a baix

· Es pot extrapolar per una matriu quadrada de dim n on tots són 0 menys una diagonal de 1 una fila per sota de la diagonal.

matriu $m \times m$, $A_m = (a^i_j)$ on $a^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i+1 \\ 0, & \text{en altres casos.} \end{cases}$

6.9. Siguin A, B, C matrius quadrades (3x3)
Calculeu BA i resoleu l'equació matricial $AX=C$, on X és una matriu 3x3

$A = (—)$, $B = (—)$, $C = (—)$

Calcula BA. $Ax = C \rightarrow B(Ax) = BC \rightarrow (BA)x = BC$

$BA = Id$ $\qquad x = BC$

Calculeu AB i resoleu l'equació matricial $XA = C$, on X es una matriu 3x3

$AB = Id$ $\qquad XA = C \rightarrow (XA)B = CB \rightarrow X(AB) = CB \rightarrow X = CB$

Matrius i vectors.

6.11. Si $A = (a_{ij})$ amb $(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$

$i, j = 1 \dots n$ amb $n > 1$. Demostrar que $A^2 = (n-1) I + (n-2) A$

A és una matriu $n \times n$ (quadrada), amb 0 a la diagonal i la resta 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ 1 & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ 1 & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 \\ n-2 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

- quan vull obtenir un element de la diagonal, he de sumar 1 n-1 vegades, perquè tinc 1 zero (els dos zeros estan a la mateixa posició)
- quan vull obtenir un element que no està a la diagonal, he de sumar 1 n-2 vegades, perquè tinc 2 zeros (els dos zeros estan en diferent posicions)

$$(n-1) I + (n-2) A = (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (n-2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n-2 & n-2 \\ n-2 & 0 & n-2 \\ n-2 & n-2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 \\ n-2 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

Aïlleu I de l'equació anterior, demostreu que A té inversa i calculeu-la.

$$A^2 = (n-1) I + (n-2) A$$

$$(n-1) I = A^2 - (n-2) A$$

$$I = \frac{1}{(n-1)} \left(A^2 - (n-2) A \right) = \underbrace{\frac{1}{n-1} \left(A - (n-2) I \right)}_{A^{-1}} A$$

per extreure factor comú hem de tenir en compte que A està multiplicant per la dreta → extraiem factor comú per la dreta

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \left(1A - (n-2) I \right)$$

si quan extraiem factor comú "desapareix" la matriu queda I multiplicant

6.4. Si A i B són matrius $n \times n$, desenvolupeu $(A+B)^2$, $(A+B)^3$, $(A+B)(A-B)$

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$
- $(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B) = (A^2 + AB + BA + B^2)(A+B) = A^3 + A^2B + ABA + ABB + BAA + BAB + B^2A + B^3$
- $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$

Escriviu els resultats en cas que A i B commutin

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

6.5. Demostreu que si A és una matriu $n \times m$ i $rg(A) < m$, llavors existeix una matriu $m \times 1$, B, $B \neq 0$, de manera que $AB = 0$

$\left.\begin{array}{l} A \text{ matriu } n \times m \\ \text{rang}(A) < m \end{array}\right\} \Rightarrow$ existeix una matriu $m \times 1$ (B) tal que $B \neq 0$, $AB = 0$

$$\underset{n \times m}{A} \; \underset{m \times 1}{B} = \underset{n \times 1}{0}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sistema d'equacions homogeni

↓

Sistema compatible → sistema compatible determinat → solució única $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

→ sistema compatible indeterminat → existeixen solucions $B \neq 0$

Com que tenim nº incògnites $= m$ i rang$(A) < m$, llavors nº incògnites > rang A, per tant estem davant d'un sistema compatible indeterminat

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \exists \text{ sol. } \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}} \neq 0 \rightarrow \exists\, B \neq 0 \text{ tal que } AB = 0$$

Sist. C. I

Deduïu d'aquest fet que si $n = m$, A no és invertible. (Dem per reducció a l'absurd)

Suposem A invertible. $(\exists A^{-1})$

Sabem $\exists B$, tal que $AB = 0$ amb $B \neq 0$

$$B = A^{-1} A B = A^{-1} \cdot 0 = 0 \rightarrow B = 0 \text{ (contradicció)}$$

6.6. Per quina matriu i per quin costat s'ha de multiplicar una matriu per obtenir

a) la seva fila i-èsima:

$$\underbrace{(\_\_\_\_)}_{n} \; n\Big\{\Big(\overbrace{\qquad\qquad}^{m}\Big) \to \text{fila } i \;=\; \underbrace{(\text{fila } i)}_{m}$$

$1\times n \qquad n\times m \qquad 1\times m$

$(0, \dots \overset{i)}{1}, \dots 0)$

n columnes

multiplico a l'esquerra per una matriu de dim $1\times n$ amb un 1 a la posició a_i i zeros en la resta

b) la seva j-èsima columna:

m → columna j

$n\times m \qquad m\times 1 \qquad = \qquad n\times 1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} j)$$

multiplico a la dreta per una matriu de dim m files $m\times 1$ amb un 1 a la posició a^j, zeros en la resta

c) la suma de les seves columnes:

$n\times m \qquad m\times 1 \qquad = \qquad n\times 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \to m \text{ files}$$

multiplico per la dreta per una matriu $m\times 1$ amb tot 1

6.7. Descriviu l'efecte de multiplicar una matriu $n\times m$ per la matriu $m\times m$ $A=(a_j^i)$ amb

$$a_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } j+i = m+1; \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

La matriu A és $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ (té uns a la diagonal de a_1^m a a_m^1 i 0 en la resta)

Exemples en 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'efecte que produeix és reordenar els elements de la fila de manera que:

$a_1^i = b_m^i$, $a_m^i = b_1^i$, $a_2^i = b_{m-1}^i \dots$ i així successivament

on a_j^i són els elements de A i b_j^i els de la solució

Anna Josè Campabadal MAVE

5.8 Siguin F, G subespais d'un espai E
$u_1 \dots u_r$ són una base de F
$v_1 \dots v_s$ són una base de G
Demostreu que els vectors $u_1 \dots u_r\ v_1 \dots v_s$ són base de E si i només si $F \oplus G = E$

10

$\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ base de $E \leftrightarrow F \oplus G = E$

$\Rightarrow$ Suposem que $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ base de E (són independents i generen E)
F subespai de E de dim r
G subespai de E de dim s

$F+G = \langle u_1, \dots, u_r\rangle + \langle v_1, \dots, v_s\rangle = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\rangle = E$

$F+G=E \rightarrow \dim(F+G) = \dim E = r+s$

Apliquem la fórmula de Grassmann
$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G)$
$\dim(F \cap G) = r+s-(r+s) = 0$

Tenim que $\left.\begin{array}{l} F+G=E \\ \dim(F\cap G) = 0 \end{array}\right\}$ i això implica $F \oplus G = E$

OK

$\Leftarrow$ Suposem que $F \oplus G = E$; volem veure que $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ són base de E

Tenim que $F+G=E$
$F \cap G = 0$
$F = \langle u_1, \dots, u_r\rangle$ on $u_1, \dots, u_r$ independents i $\dim F = r$
$G = \langle v_1, \dots, v_s\rangle$ on $v_1, \dots, v_s$ independents i $\dim E = s$

$F+G = \langle u_1, \dots, v_r\rangle + \langle v_1, \dots, v_s\rangle = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\rangle = E$
Tenim que $\langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\rangle$ són generadors de E

Tot conjunt de generadors de E conté una base. Si el nombre de generadors coincideix amb la dimensió de l'espai generat, són base

Per Grassmann: $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
$\dim(F+G) = r+s = \dim E$

OK

Com que $\dim E$ coincideix amb el nombre de generadors, $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ són base de E

Scanned by CamScanner