Matrius i Vectors
Examen final, problemas

Enero 2020

Todos los teléfonos deberán estar desconectados durante el examen. Pongan nombre y apellidos en cada hoja. Entreguen los problemas en hojas separadas y al menos una hoja por problema (aunque sea sólo con el nombre). En la parte de problemas pueden consultarse libros y apuntes propios. Al terminar la parte de problemas dejen todo el material escrito en la tarima bajo la pizarra.

Horario:

- Problemas: de 9 a 12.50 horas
- Teoría: de 13 a 14 horas

1.- Se consideran los subespacios de R^4

$$F = \langle (2,-5,-5,2), (1,-1,-2,1), (1,1,a,1) \rangle, \quad G = \langle (3,1,3,0), (1,-3,5,-2) \rangle$$

y, distinguiendo casos según los valores del parámetro a, se pide:

a) Determinar las dimensiones y ecuaciones de F y G.

b) Determinar las dimensiones de $F+G$ y $F \cap G$ así como una base de cada uno de dichos subespacios.

2.- Se suponen dados vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_r$ de un espacio vectorial E, y vectores $w_1, \ldots, w_s \in E$, también linealmente independientes. Se pide demostrar que:

a) $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \cap \langle w_1, \ldots, w_r \rangle = \{0\}.$$

b) $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ es base de E si y sólo si

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \oplus \langle w_1, \ldots, w_r \rangle = E.$$

3.- a) Encontrar todas las matrices X, de dimensiones 3×3, que cumplen

$$AXB = C$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Demostrar que no existe ninguna matriz Y, de dimensiones 3×3, que cumpla

$$DY = H$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.-Dado un espacios vectorial E, con base e_1, e_2, e_3, e_4, se considera la aplicación lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que cumple

$$f(e_1) = f(e_2) = e_3 + e_4 \quad \text{y} \quad f(e_3) = f(e_4) = e_1 - e_2.$$

Se pide:

a) Escribir la matriz de f relativa a la base dada.

b) Determinar los rangos de f y f^2.

c) Dar ecuaciones de $\ker f$ y $\ker f^2$.

d) Demostrar que $\ker f \subset \ker f^2$ y $\ker f \neq \ker f^2$.