Exercici 20. Resoleu el sistema de congruències

$$x \equiv 1 \pmod 5,\ x \equiv 3 \pmod 8,\ x \equiv 3 \pmod{12}$$

Solució 20.
Veiem que $mcd(5, 8, 12) = 1$, però $mcd(8, 12) = 4$. Haurem de tractar primer el sistema:

$$x \equiv 3 \pmod 8,\ x \equiv 3 \pmod{12}$$

Veiem que: $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$

$$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} X \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$$
$$(3) \Rightarrow (3, 3) \equiv (3, 0)(mod(4, 3))$$

Podem reescriure el sistema de congruències com:

$$\text{x} \equiv 1 \pmod 5$$
$$\text{x} \equiv 3 \pmod 4$$
$$\text{x} \equiv 0 \pmod 3$$
$$\text{x} \equiv 3 \pmod 8$$

Hem de treure $x \equiv 3 \pmod 4$, ja que qualsevol solució de $x \equiv 3 \pmod 8$ serà en particular de la primera, però no tota soluciò de la primera serà soluciò de la segona, així que hi hauria resultats que no formarien part del sistema.
Finalment, solament hem de resoldre el sistema de congruències:

$$\begin{cases} x \equiv 1 (\text{mod } 5) \\ x \equiv 3 (\text{mod } 3) \\ x \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

Definim:

$$m = [5, 8, 3] \Rightarrow M = 120$$
$$a = [1, 3, 0]$$
$$D = [24, 15, 40]$$

Resolem les congruències $D_i\ N_i \equiv a_i \pmod{m_i}$, $1 \leq i \leq 3$

$$N_1 :$$
$$24N_1 \equiv 1 \pmod 5$$
$$24 \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 4\text{N}_1 \equiv 1 \pmod 5$$
$$-1 \equiv 4^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}})^*$$
$$N_1 \equiv -1 \pmod 5$$

$$N_2 :$$
$$15N_2 \equiv 3 \pmod 8$$
$$15 \equiv 7 \pmod 8 \Rightarrow 7\text{N}_2 \equiv 3 \pmod 8$$
$$-1 \equiv 7^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}})^*$$
$$N_2 \equiv -3 \pmod 8$$

$$N_3:$$
$$40N_3 \equiv 0 \pmod 3$$
$$N_3 \equiv 0 \pmod 3$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} D_i N_i = [(24)(-1)] + [(15)(-3)] + [(40)(0)] = -69$$

La solució és $-69 \equiv 51 \pmod{120}$.