Ejercicio 4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ números enteros

(a) Encuentra el máximo común divisor $d > 0$ de la pareja de números enteros a = 2795 y b = 2314.

(b) Encuentra números enteros r, s tales que d = ra + sb.

(c) Haz lo mismo para la pareja a = 2842, b = 3567.

Solución 4.

(a) Para calcular el mcd$(2795, 2314)$ recurriremos al algoritmo de Euclides, que enuncia lo siguiente: " Sean $a, b \in \mathbb{N}$, sea r el resto de la división entera de a entre b. Entonces, $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$". Aplicando este resultado en un número finito de veces, tenemos que $\text{mcd}(2795, 2314) = \text{mcd}(2314, 481) = \text{mcd}(481, 390) = \text{mcd}(390, 91) = \text{mcd}(91, 26) = \text{mcd}(26, 13) = \text{mcd}(13, 0) = 13$. Luego, el máximo común divisor positivo de la pareja a = 2795 y b = 2314 es d = 13.

(b) La expresión exigida en el enunciado es una identidad de Bezout, que se puede hallar igualmente empleando el algoritmo de Euclides. Así,

1. 2795 = 2314 * 1 + 481
2. 2314 = 481 * 4 + 390
3. 481 = 390 * 1 + 91
4. 390 = 91 * 4 + 26
5. 91 = 26 * 3 + 13

Despejando de la última desigualdad 13 y sustituyendo las respectivas igualdades tenemos: 13 = 91 - 26*3 = 91 - (390 - 91*4)*3 = -390*3 + 91 * 13 = -390*3 + (481 - 390) * 13 = - 390 * 16 + 481*13 = - (2314 - 481*4)* 16 + 481*13 = -2314*16 + 481*77 = -2314*16 + (2795 - 2314) * 77 = - 2314*93 + 77*2795 = 77*2795 + (-93)*2314. Luego, r = 77 y s = -93.

(c) Aplicando nuevamente el algoritmo de Euclides tenemos $\text{mcd}(3567, 2842) = \text{mcd}(2842, 725) = \text{mcd}(725, 667) = \text{mcd}(667, 58) = \text{mcd}(58, 29) = \text{mcd}(29, 0) = 29$. Por tanto, d = 29.

Para la identidad de Bezout tenemos que

1. 3567 = 2842 * 1 + 725
2. 2842 = 725 * 3 + 667
3. 725 = 667 * 1 + 58
4. 667 = 58 * 11 + 29

29 = 667 - 58*11 = 667 - (725 - 667) * 11 = 667*12 - 725*11 = (2842 - 725 * 3) * 12 - 725*11 = 2842 * 12 - 725 * 47 = 2842 * 12 - (3567 -2842) * 47 = 59*2842 + (-47)*3567 Así, r = 59 y s = -47.