Heu d'entregar cada exercici per separat a la tasca corresponent del campus virtual. La data límit per l'entrega és divendres dia 4 de desembre a les 13 hores. En resoldre els exercicis, expliqueu bé els càlculs que feu i justifiqueu correctament els vostres raonaments.

Exercici 1. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$ següents: F generat pels vectors $(1,-1,2,2),(2,3,-1,-4),(1,-6,7,-2)$ i G_a igual al conjunt de solucions del sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+2z-4t &=& 0 \\ x+ay+z-2t &=& 0 \end{array}\right.$$

Doneu la dimensió, una base i equacions independents de cada un dels subespais $F, G_a, F\cap G_a$ i $F+G_a$, en funció del paràmetre a.

Solució. Comencem buscant les equacions de F. Per a fer-ho plantejem que qualsevol vector (x,y,z,t) ha de ser combinació lineal de la base de F.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -6 & 7 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & y+x & z-2x & t-2x \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -5(y+x)-5(z-2x) & -8(y+x)-5(t-2x) \end{pmatrix}$$

A partir de la reducció de les tres primeres files, veiem que $\dim F = 3$. Per tant, el subespai quedarà determinat per una equació. De la reducció de la matriu, ja podem extreure l'equació de F:

$$-5(y+x)-5(z-2x)=0 \to (y+x)+(z-2x) \to -x+y+z=0$$

També podem trobar l'equació de F per un altre mètode. A partir de les tres primeres files de la matriu anterior, veiem que els vectors $(1,-1,2,2),(0,5,-5,-8),(0,0,0,1)$ formen base de F. L'equació $ax+by+cz+dt=0$ de F s'ha d'anul·lar en aquests tres vectors i obtenim $a-b+2c+2d=0, 5b-5c-8d=0, d=0$ que implica $d=0, b=c, a=-c$ i dóna l'equació de F: $-x+y+z=0$.

A continuació busquem la base de G_a en funció del parametre:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+2z-4t &=& 0 \\ x+ay+z-2t &=& 0 \end{array}\right.$$

Restant a la primera equació dos cops la segona obtenim el següent sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+2z-4t &=& 0 \\ (2a+1)y &=& 0 \end{array}\right.$$

On ens adonem que per a $a = 1/2$ la segona equació s'anul·la. De manera que només ens queda una equació independent, i $\dim G_a = 3$. Mentre que si $a \neq 1/2$ mantenim dues equacions independents, amb el que $\dim G_a = 2$. Estudiem els dos casos amb detall.

Cas $a = 1/2$: Tenim una equació independent, per tant la dimensió de G_a es 3 i tenim 3 graus de llibertat. Escollim $x = \alpha, z = \beta \ i \ t = \gamma$.

$$2x - y + 2z - 4t = 0 \to y = 2x + 2z - 4t \to y = 2\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0$$
$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(0, 2, 1, 0) + \gamma(0, -4, 0, 1)$$

Qualsevol vector de G_a ha de complir l'equació vectorial anterior. D'on extraiem directament que la base de G_a e es $(1, 2, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, -4, 0, 1)$.

Cas $a \neq 1/2$: En aquest cas tenim dues equacions independents. I per tant dos graus de llibertat. De la segona equació directament extraiem que $y = 0$. Escollint ara com a parametres $z = \beta \ i \ t = \gamma$ obtenim:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 4t &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$2x - y + 2z - 4t = 0 \to 2x + 2z - 4t = 0 \to x + z - 2t = 0 \to x = 2t - z$$
$$\to x = 2\gamma - \beta$$

D'on obtenim l'equació vectorial que han de complir els vectors de G_a i deduïm que una possible base és la formada pels vectors $(-1, 0, 1, 0)$ i $(2, 0, 0, 1)$.

$$(x, y, z, t) = \beta(-1, 0, 1, 0) + \gamma(2, 0, 0, 1)$$

Base de $F \cap G_a$ per al cas $a = 1/2$: Busquem els vectors que compleixen les equacins de F i G_a, i per tant son solució del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 4t &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases}$$

Tenim dos equacions independents, la primera provinent de G_a i la segona de F. Per tant la dimensió de $F \cap G_a$ serà 2 i tindrem dos graus de llibertat. Escollim $y = \alpha$ i $z = \beta$.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 4t &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - y + 2z - 4t = 0 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$2(y + z) - y + 2z - 4t = 0 \to y + 4z - 4t = 0 \to t = \frac{y - 4z}{4}$$

Substituint els parametres obtenim el següent sistema, que ens permet esbrinar que la base de $F \cap G_a$ està formada pels vectors $(1, 1, 0, 1/4)$ i $(1, 0, 1, 1)$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha+\beta \\ y &=& \alpha \\ z &=& \beta \\ t &=& \frac{\alpha}{4}+\beta \end{array}\right.$$

Base de $F \cap G_a$ per al cas $a \neq 1/2$: En aquest cas tenim tres equacions independents, amb el que només tindrem un grau de llibertat. Escollim $x = \lambda$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+2z-4t &=& 0 \\ y &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+z-2t &=& 0 \\ y &=& 0 \\ -x+z &=& 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t-z \\ y &=& 0 \\ x &=& z \end{array}\right.$$

Substituint el parametre obtenim el següent sistema, que ens permet determinar que el vector $(1,0,1,1)$ es base de $F \cap G_a$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \lambda \\ y &=& 0 \\ z &=& \lambda \\ t &=& \frac{x+z}{2}=\lambda \end{array}\right.$$

Per últim, ens falta obtenir una base i unes equacions del subespai $F+G_a$. Reunint les bases de F i de G_a obtindrem un conjunt de vectors generadors de $F+G_a$, tot i que n'obtinguem més dels necessaris per formar base. Estudiem doncs la dimensió de $F+G_a$ a partir de la formula de Grassmann.

$$\dim(F+G_a) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G_a)$$

Analitzem el cas per a $a = 1/2$. On tenim que $\dim F = 3$, $\dim G = 3$ i $\dim(F \cap G_a) = 2$. Per tant:

$$\dim(F+G_a) = 3+3-2 = 4$$

Per la proposició 1.12.4, sabem que si F i G_a son subespais de $\mathbb{R}^4$, aleshores també ho serà el subespai suma $F+G_a$. Així doncs, tenim que $F+G_a \subset \mathbb{R}^4$. Però donat que hem demostrat per Grassmann que $\dim(F+G_a)=4$, aleshores tindrem que, de fet, el subespai $F+G_a$ es $\mathbb{R}^4$.

Donar una base de $F+G_a$ es doncs donar una base qualsevol de $\mathbb{R}^4$, ens val amb la base canònica. $F+G_a = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$.

Procedim anàlogament per al cas $a \neq 1/2$. En aquesta ocasió, tenim que $\dim F = 3$, $\dim G = 2$ i $\dim(F \cap G_a) = 1$. Per tant:

$$\dim(F+G_a) = 3+2-1 = 4$$

On novament, podem comprobar com $F+G_a = \mathbb{R}^4$.

Exercici 2. Siguin E un espai vectorial de dimensió 4 i (e_1,e_2,e_3,e_4) una base de E. Considerem els vectors de E

$$u_1 = e_1 - e_3 + 2e_4,\ u_2 = -e_1 + e_2,\ u_3 = -e_1 + e_4,\ u_4 = 2e_1 - e_2 + e_4.$$

Proveu que (u_1,u_2,u_3,u_4) és base de E. Doneu la matriu de canvi de base de la base (u_1,u_2,u_3,u_4) a la base (e_1,e_2,e_3,e_4) i la matriu de canvi de base de la base (e_1,e_2,e_3,e_4) a la base (u_1,u_2,u_3,u_4). Calculeu les coordenades del vector $v=u_1+u_2+u_3+u_4$ en la base (e_1,e_2,e_3,e_4) i les coordenades del vector $w=e_1+e_2+e_3+e_4$ en la base (u_1,u_2,u_3,u_4).

Solució. Veiem si els vectors u_1,u_2,u_3,u_4 són linealment independents reduint la matriu que té per files les coordenades de cada un d'aquests vectors en la base (e_1,e_2,e_3,e_4).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Com la matriu reduida no té cap fila de zeros obtenim que els quatre vectors són independents. Com el nombre d'aquests vectors és igual a la dimensió de l'espai vectorial E, obtenim que són base de E.

La matriu de canvi de la base (u_1,u_2,u_3,u_4) a la base (e_1,e_2,e_3,e_4) és la matriu C que té per columnes les coordenades dels vectors u_1,u_2,u_3,u_4 en la base (e_1,e_2,e_3,e_4). Tenim doncs

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu de canvi de base de la base (e_1,e_2,e_3,e_4) a la base (u_1,u_2,u_3,u_4) és la matriu inversa de C. Calculem C^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Hem obtingut

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

El vector $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ té coordenades $(1, 1, 1, 1)$ en la base (u_1, u_2, u_3, u_4). Tenim

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les coordenades de v en la base (e_1, e_2, e_3, e_4) són doncs $(1, 0, -1, 4)$.

El vector $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ té coordenades $(1, 1, 1, 1)$ en la base (e_1, e_2, e_3, e_4). Tenim

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les coordenades de w en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) són doncs $(-1, 4, 0, 3)$.

Exercici 3. Sigui E un espai vectorial de dimensió 6. Siguin F, G i H subespais vectorials de E tals que $\dim F = 3, \dim G = 2, \dim H = 1, G \not\subset F, (F + G) \cap H = \{\vec{0}\}$.

1) Proveu que $F \cap H = \{\vec{0}\}$ i $G \cap H = \{\vec{0}\}$.

2) Proveu que $\dim(F \cap G) = 0$ o 1 i determineu, en cada un dels dos casos, la dimensió de $F + G + H$.

3) Doneu un exemple de subespais F, G i H de $\mathbb{R}^6$ complint les condicions de cada un dels dos casos de l'apartat anterior.

Solució.

1) Si $u \in F$, tenim $u = u + \vec{0}$ i $\vec{0} \in G$, per tant $u \in F + G$; tenim doncs $F \subset F + G$. Igualment, si $v \in G$, tenim $v = \vec{0} + v$ i $\vec{0} \in F$, per tant $v \in F + G$; tenim doncs $G \subset F + G$. Ara $F \subset F + G$ implica $F \cap H \subset (F + G) \cap H$. Per hipòtesi, tenim $(F + G) \cap H = \{\vec{0}\}$ i, com $F \cap H$ és subespai vectorial de E, per ser intersecció de dos subespais, obtenim $F \cap H = \{\vec{0}\}$. Igualment, $G \subset F + G$ implica $G \cap H \subset (F + G) \cap H$. Com $(F + G) \cap H = \{\vec{0}\}$ i, com $G \cap H$ és subespai vectorial de E, obtenim $G \cap H = \{\vec{0}\}$.

2) Com $F \cap G$ és subespai vectorial de G, es compleix $\dim(F \cap G) \leq \dim G = 2$. Ara, si fos $\dim(F \cap G) = 2 = \dim G$, tindriem $F \cap G = G$ i, per tant $G \subset F$, que contradiu la hipòtesi. Tenim doncs $\dim(F \cap G) = 0$ o 1.

Aplicant la fòrmula de Grassmann, tenim

$$\dim(F + G + H) = \dim(F + G) + \dim H - \dim((F + G) \cap H).$$

Com per hipòtesi, és $(F+G)\cap H=\{\vec{0}\}$, tenim $\dim((F+G)\cap H)=0$. Aplicant de nou la fòrmula de Grassmann, tenim $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$. Obtenim doncs $\dim(F+G+H)=\dim(F+G)+\dim H=\dim F+\dim G+\dim H-\dim(F\cap G)=6-\dim(F\cap G)$. Per tant

$$\dim(F+G+H)=\begin{cases} 6 & \text{si} \quad \dim(F\cap G)=0 \\ 5 & \text{si} \quad \dim(F\cap G)=1 \end{cases}$$

3) Considerem la base canònica de $\mathbb{R}^6$: $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)$ amb $e_1=(1,0,0,0,0,0), e_2=(0,1,0,0,0,0), e_3=(0,0,1,0,0,0), e_4=(0,0,0,1,0,0), e_5=(0,0,0,0,1,0), e_6=(0,0,0,0,0,1)$.

Com exemple amb $\dim(F\cap G)=0$, podem prendre $F=\langle e_1,e_2,e_3\rangle, G=\langle e_4,e_5\rangle$. Tenim $\dim F=3, \dim G=2$ i $F\cap G=\{(0,0,0,0,0,0)\}$, per tant $\dim(F\cap G)=0$. Ara $F+G=\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\rangle$ i el subespai $H=\langle e_6\rangle$ compleix $(F+G)\cap H=\{(0,0,0,0,0,0)\}$, ja que la reunió de la base de $F+G$ i la de H és un conjunt de vectors linealment independents. Tenim $F+G+H=\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\rangle=\mathbb{R}^6$, per tant, efectivament, $\dim(F+G+H)=6$.

Com exemple amb $\dim(F\cap G)=1$, podem prendre $F=\langle e_1,e_2,e_3\rangle, G=\langle e_1,e_4\rangle$. Tenim $\dim F=3, \dim G=2$ i $F\cap G=\langle e_1\rangle$, per tant $\dim(F\cap G)=1$. Ara $F+G=\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$ i el subespai $H=\langle e_6\rangle$ compleix $(F+G)\cap H=\{(0,0,0,0,0,0)\}$, ja que la reunió de la base de $F+G$ i la de H és un conjunt de vectors linealment independents. Tenim $F+G+H=\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_6\rangle$, per tant, efectivament, $\dim(F+G+H)=5$.