Problema 1 *Resoleu el sistema de congruències*

$$\begin{cases} x \equiv 1 \, (mod \; 6) \\ x \equiv 2 \, (mod \; 7) \\ x \equiv 3 \, (mod \; 17) \end{cases}$$

Solució 1

El nombre x que satisfà les tres congruències té la forma

$$x = \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot M_i \cdot c_i \tag{1}$$

on k és el nombre de congruències del sistema, en el nostre cas $k = 3$. El coeficient c_1 és el nombre al qual igualem la x en l'equació modular. M_i es el producte de tots els m_j tals que $i \neq j, \; \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Per últim n_i és el menor nombre positiu tal que $n_i \cdot M_i \equiv 1 \, (\text{mod } m_i)$.

Aplicant aquesta tèoria al nostre problema tenim

$$\begin{array}{ccc} c_1 = 1 & c_2 = 2 & c_3 = 3 \\ m_1 = 6 & m_2 = 7 & m_3 = 17 \\ M_1 = 119 & M_2 = 102 & M_3 = 42 \end{array}$$

Però encara ens falten tots els n_i. Per a trobar-los, calcularem l'invers módul m_i de M_i, és a dir, utilizarem Identitats de Bézout.

Per a trobar n_1 resolem $119 \cdot n_1 + 6 \cdot y = 1$ i obtenim que $n_1 = 5$. El segon n_2 s'obté amb $102 \cdot n_2 + 7 \cdot z = 1$ i val 2. Per útlim $n_3 = 15$ que s'obté de l'equació $42 \cdot n_3 + 17 \cdot t = 1$.

OBSERVACIÓN: *Els valors y, z, t no ens interessen per la resolució del problema.*

Bé doncs, ja tenim que

$$n_1 = 5 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 15$$

i per tant, podem aplicar (1) per a trobar la $\cdot x$.

Tenim doncs

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{k} n_i \cdot M_i \cdot c_i \\ &= \sum_{i=0}^{3} n_i \cdot M_i \cdot c_i \\ &= n_1 \cdot M_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot M_2 \cdot c_2 + n_3 \cdot M_3 \cdot c_3 \\ &= 5 \cdot 119 \cdot 1 + 2 \cdot 102 \cdot 2 + 15 \cdot 42 \cdot 3 \\ &= 595 + 408 + 1890 \\ &= 2893 \end{aligned}$$

Conclusió: El nombre x que estavem buscant era $x = 2893$.

OBSERVACIÓN: *És fàcil veure que* 2893 *satisfà les tres congruències alhora.*

■