Exercici 8.

(a) Proveu que, per a tot nombre enter n, es $\text{mcd}(n, n+1) = 1$.

(b) Sigui $k \in \mathbb{Z}$ un nombre enter tal que, per a tot $t \in \mathbb{N}$, es $\text{mcd}(t, t+k) = 1$. Demostreu que $k = \pm 1$.

(c) Esbrineu per a quins valors de $k \in \mathbb{Z}$ es te que, per a tot $s \in \mathbb{N}$, es $\text{mcd}(s, s+k) = 2$.

Solucio 8.

Sabem que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ no tots dos nuls $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a, b \pm a)$.

(a) Tenim que $\text{mcd}(n, n+1) = \text{mcd}(n, 1)$, com el m.c.d. de dos enters diferents a 0 es menor que els dos, tenim que; $\text{mcd}(n, 1) \leq 1$, per tant com el m.c.d. sempre es positiu tenim que $\text{mcd}(n, 1) = 1 = \text{mcd}(n, n+1)$

(b) Tenim que $\text{mcd}(t, t+k) = \text{mcd}(t, k)$, mirarem, per contrareciproc (suposant que $k \neq \pm 1$, i arribant a que $\text{mcd}(t, k) \neq 1$, per algun t), en funcio de la paritat de k:

1. Cas $k = 2l$: Per t = 2 tenim que $\text{mcd}(t, k) = 2 \neq 1$.
2. Cas $k = 2l + 1$: Per t = k tenim que $\text{mcd}(t, k) = k \neq 1$, ja que $k \neq 1$.

Per tant en tots els casos hem arribat a que $\text{mcd}(t, k) \neq 1$ per algun t.

(c) Tenim que $\text{mcd}(s, s+k)$, i d'aqui clarament observem que no pot existir k tal que $\forall$ s $\text{mcd}(s, s+k) = 2$, ja que per un s qualsevol imparell es te que $2 \nmid s$ i per tant es impossible que $\text{mcd}(s, s+k) = 2$,