Gràfics i Visualització de Dades

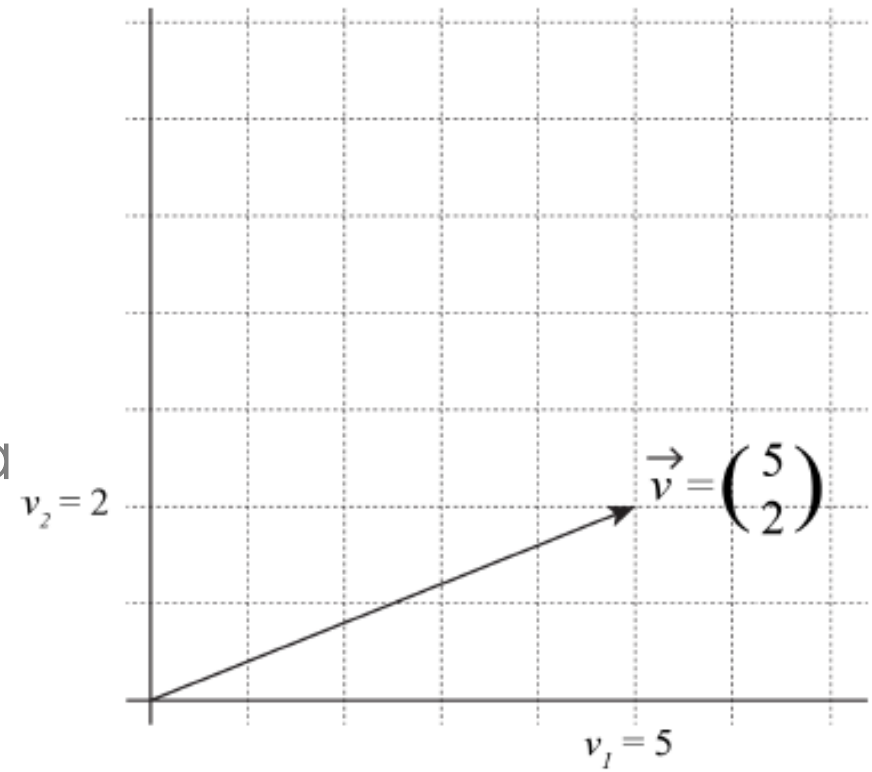
Sessió 0 (laboratori)

Elements geomètrics i transformacions geomètriques

1. Vectors

Un **vector** v a R^n és una n-tupla ordenada:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$



També es pot definir segons la seva direcció i la seva longitud

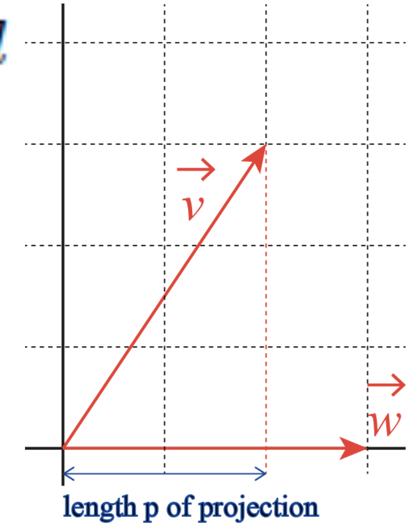
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_d^2}$$

Vector unitari: $\|\vec{v}\| = 1$

Normalització: $\vec{v}_{unit} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

1. Vectors

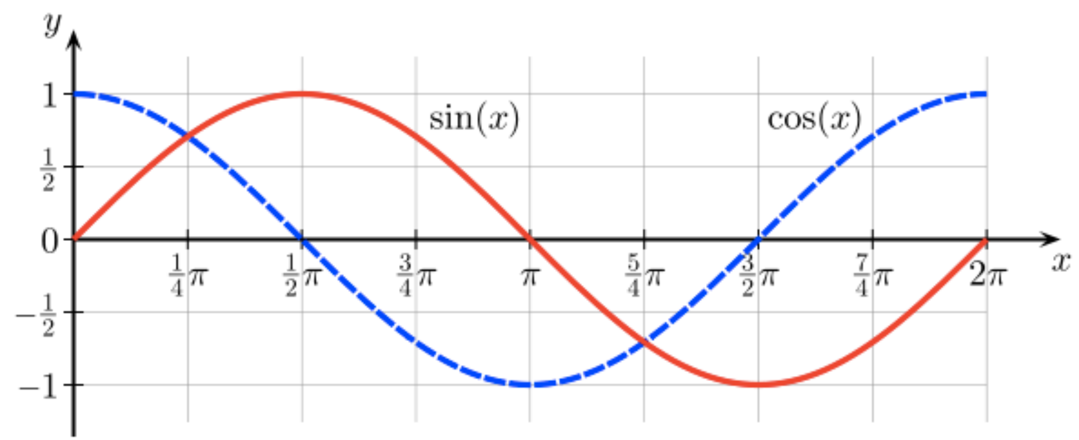
Operacions: Donats dos vectors $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^d$



- **Producte escalar**

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{d} v_i w_i$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}$$



- **Producte vectorial (3D)**

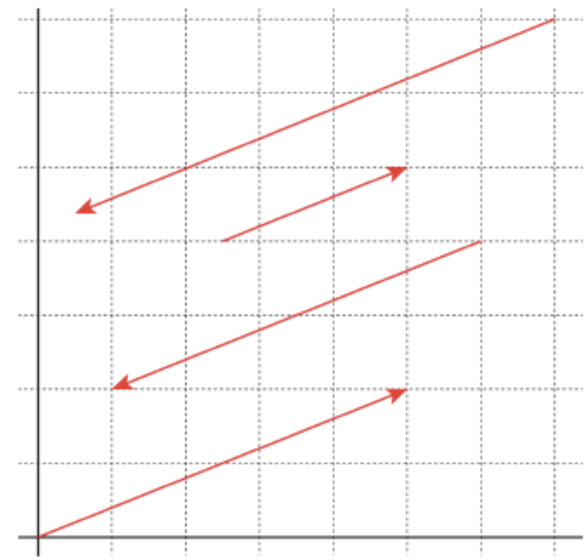
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \sin\theta$$

1. Vectors

Dos vectors poden ser:

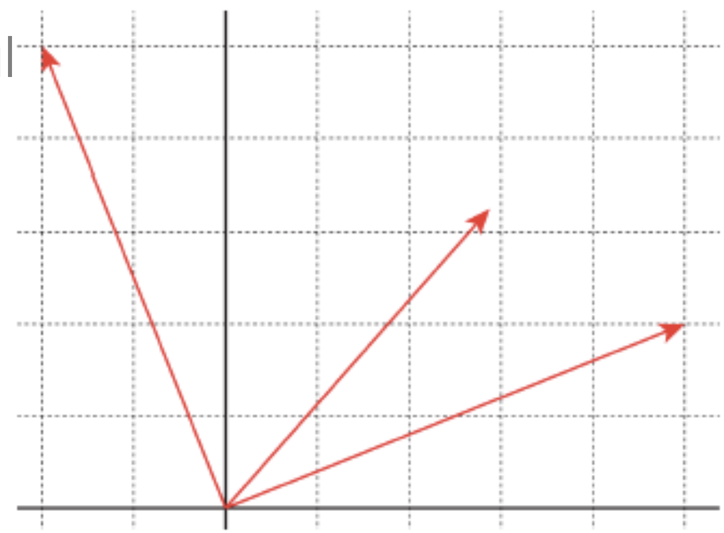
- **Paral·lels:** linealment dependents



$$\vec{v} = \lambda \vec{w}.$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$$

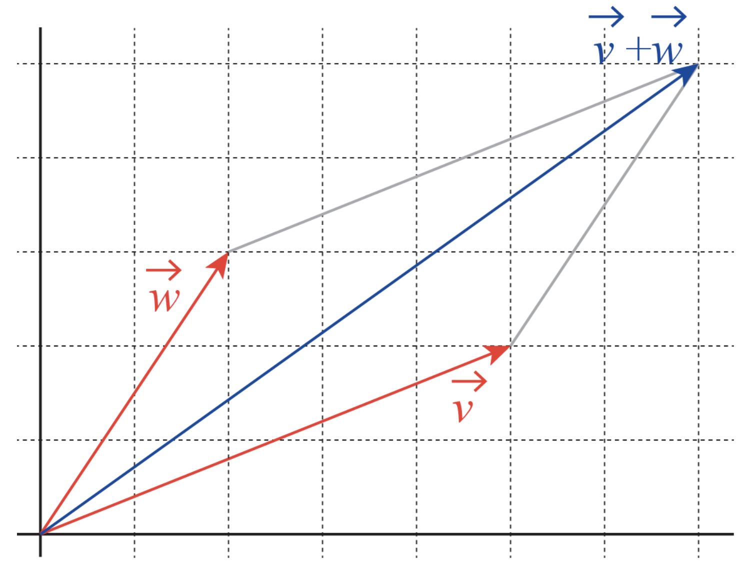
- **No paral·lels:** linealment independents
  - **Vectors perpendiculars:** vector normal



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

2. Bases

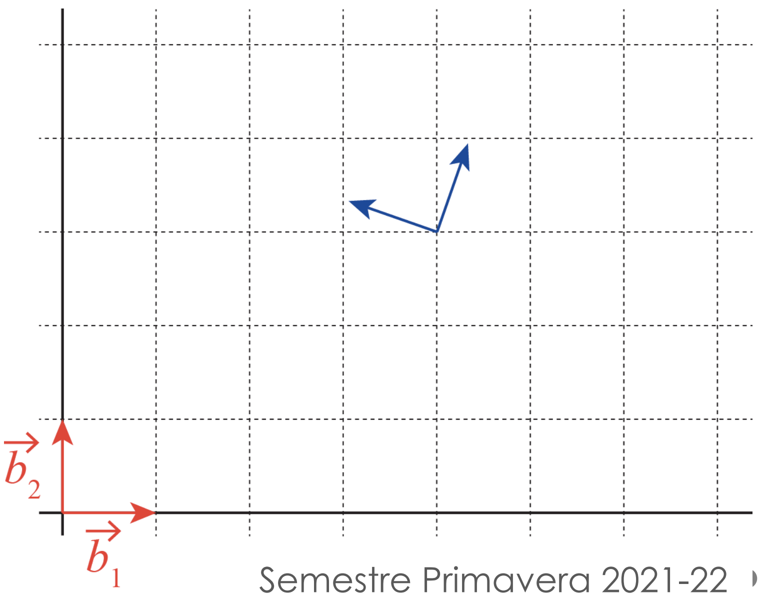
Un **vector 2D** es pot definir com al combinació de dos vectors linealment independents:



$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$$

Qualsevol parell de vectors linealment independents, formen una **base** 2D

La base és **ortonormal** si els vectors són perpendiculars entre sí i són unitaris.



3. Sistema de coordenades

Un **sistema de coordenades** 3D és un espai vectorial, definit per tres vectors linealment independents $\{v_1, v_2, v_3\}$

- Aquests tres vectors linealment independents formen la **base de l'espai.**
- Donada una base v_1, v_2, v_3, qualsevol vector es pot escriure com:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

*On $\{\alpha_i\}$ són **escalars** únics.*

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$$

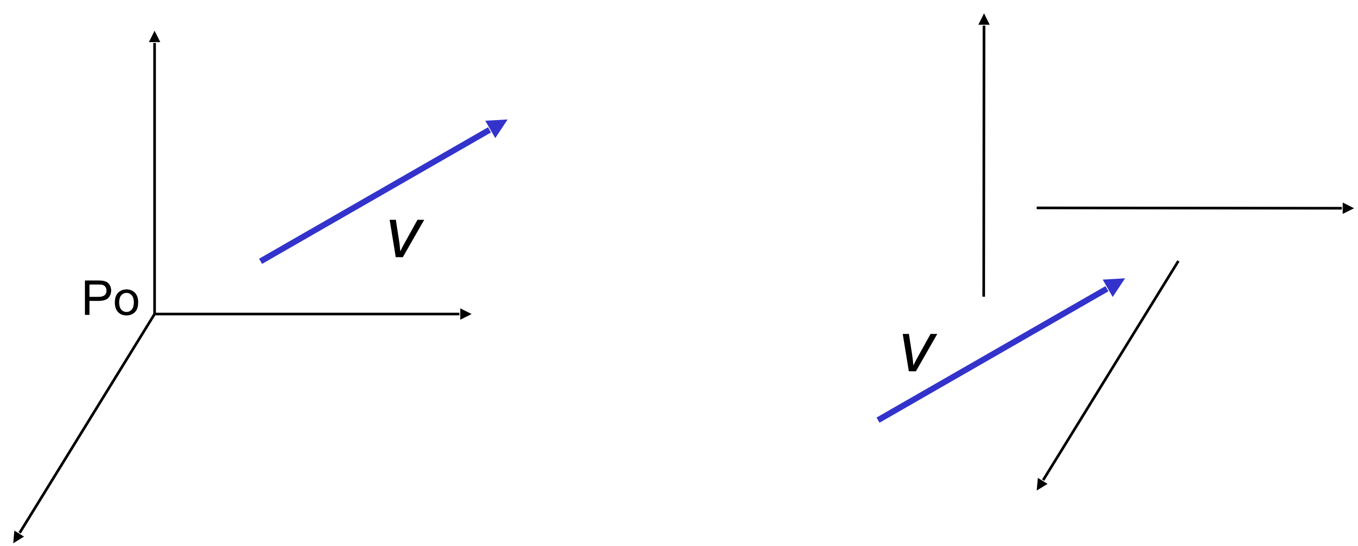
$$v = \mathrm{a}^T \mathrm{v}$$

Si són v_1, v_2, v_3 són perpendiculars entre sí i són unitaris, formen una **base 3D ortonormal**.

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$$

3. Sistema de coordenades

Així un **sistema de coordenades** es posa sempre en un punt origen, **Po**, per convenció, però podríem posar-lo en qualsevol punt de l'espai (i són equivalents)



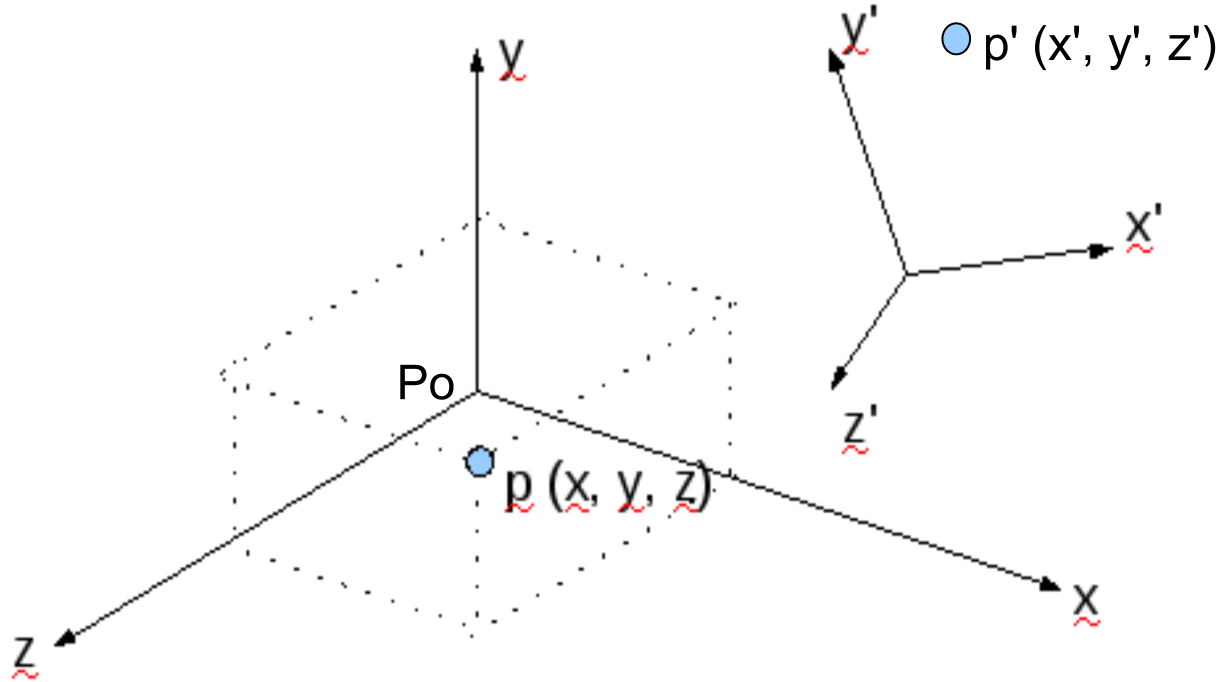
Sistema de coordenades afí *(frame)*: està format pel punt *d'origen*, **Po**, i els vectors de la base.

4. Punts

Un **punt 3D**, p, està format per a tres components

$$p = (x, y, z)^T$$

- Aquestes components són relatives a un sistema de coordenades **afí** donat (*frame*)



4. Punts i vectors

Si considerem el punt i el vector següent (en 2D)

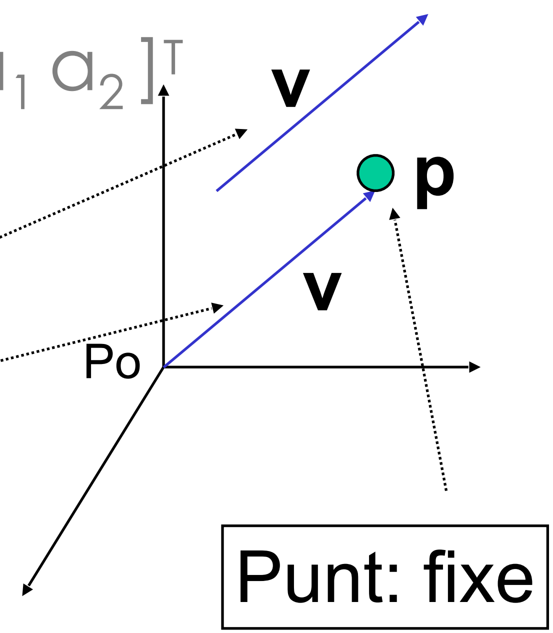
$$\mathbf{p} = p_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2$$

$$\boldsymbol{v} = \qquad a_1 v_1 + a_2 v_2$$

Sembla que tinguin representacions semblants

$$\mathbf{p} = [b_1\ b_2\,]^T \qquad\qquad \mathbf{v} = [a_1\ a_2\,]^T$$

que es poden confondre.

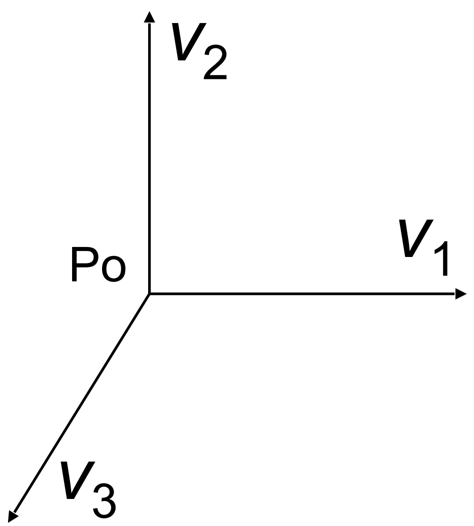


Vector: pot estar a qualsevol lloc

4. Sistemes afins

En un **sistema de coordenades afí *(frame)*** que afegeix el punt *d'origen* al vectors de la base:

$$(p_0, v_1, v_2, v_3)$$



Un **vector** s'escriu com:

$$v=\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

Un **punt** s'escriu com:

$$p = p_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$$

5. Coordenades homogènies

En general, la forma en **coordenades homogènies d'un punt** 3D [x y z] és:

$$\mathbf{p} = [x' \ y' \ z' \ w]^T$$

Es pot trobar el punt 3D (w diferent de 0), dividint cada component per w (***homogeneïtzació***)

$$x = x'/w$$

$$y = y'/w$$

$$z = z'/w$$

5. Coordenades homogènies

Coordenades homogènies 3D en un sistema afí:

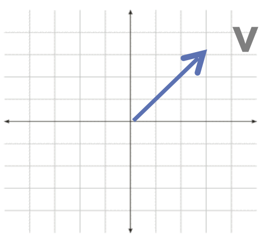
$$v = \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = [a_1\ a_2\ a_3\ 0\,][v_1\ v_2\ v_3\ P_0]^T$$

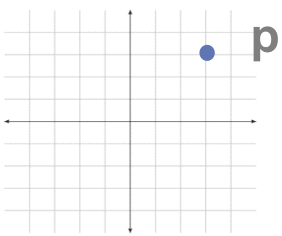
$$p = p_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = [b_1\ b_2\ b_3\ 1\,]\,[v_1\ v_2\ v_3\ P_0]^T$$

és a dir, un vector **v** i un punt **p** es posen de la forma:

$$\mathbf{v} = [a_1\ a_2\ a_3\ 0\,]^T$$

$$\mathbf{p} = [b_1\ b_2\ b_3\ 1\,]^T$$





5. Coordenades homogènies

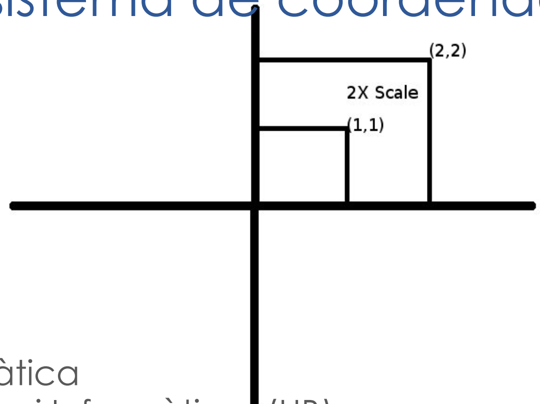
Per què usar coordenades homogènies?

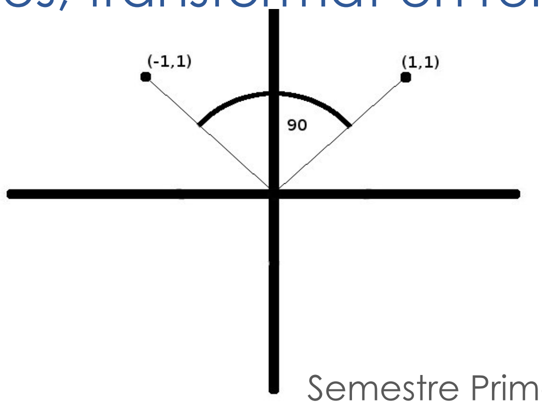
- Totes les transformacions geomètriques (escalats, translacions, rotacions) es poden implementar amb multiplicació de matrius 4x4.

6. TG's

- Transfrmcaions Són transformacions lineals.
- Una funció lineal ***f*** *compleix que*:
  - ***f*(*v*+*w*)** = ***f*(*v*)** + ***f*(*w*)** per tot ***v*** i ***w*** en el domini de ***f***
  - ***f*(c*v*)** = c ***f*(*v*)** per tots els escalars c i els elements ***v*** del domini

- ***Aplicat a Gràfics***: *Són transformacions invariants respecte l'origen:*
  - **Escalats** i **rotacions**. La translació no és lineal (ja que mou l'origen)
  - Qualsevol transformació lineal d'un punt és un altre punt en el mateix sistema de coordenades, transformat en relació a l'origen.





6. TG's

- Es poden escriure com a matrius invertibles:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Com aplicar una matriu a un punt (x_1, x_2)?

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

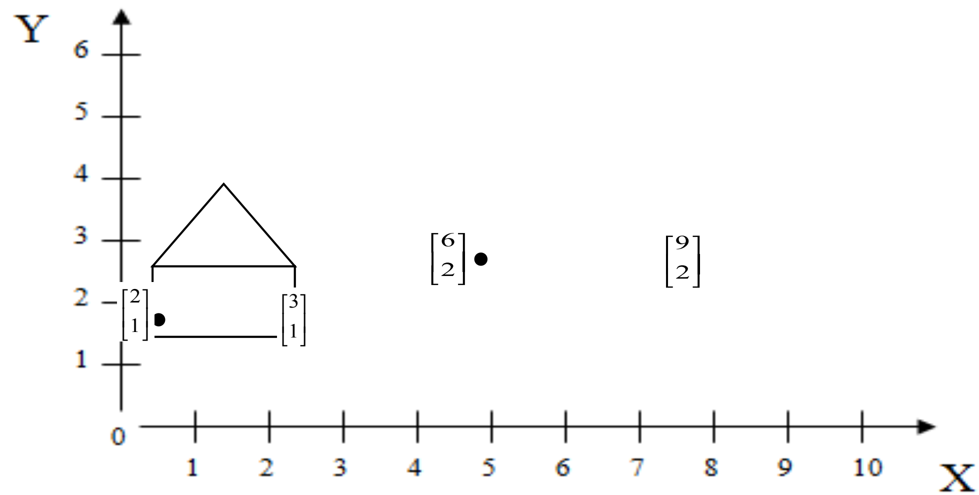
$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

6. TG's

- **Escalat 2D:**

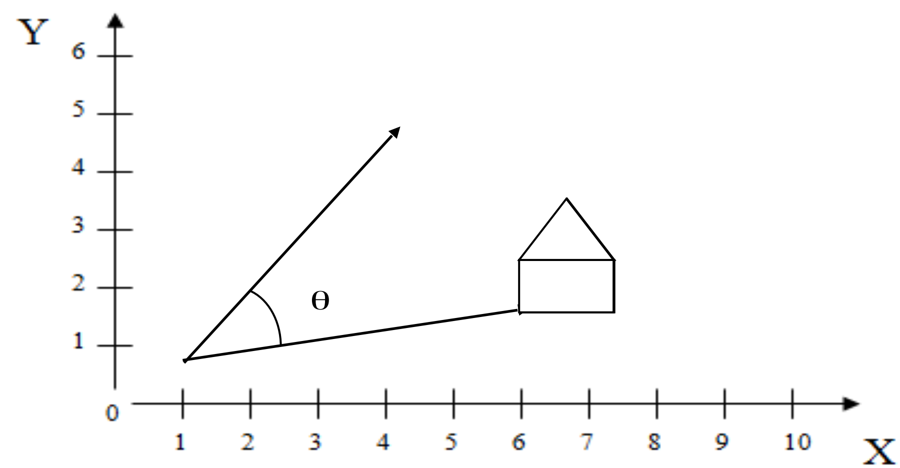
$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

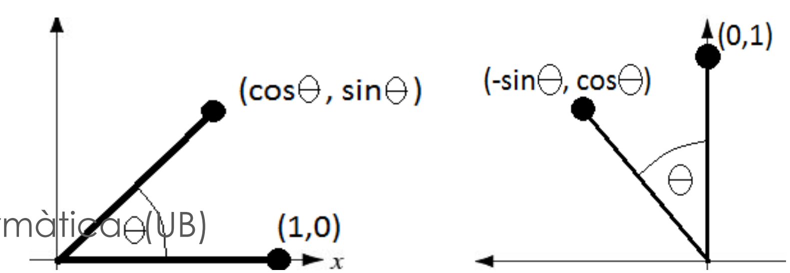
$S_x = 3, \; S_y = 2$



- **Rotació 2D:**

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

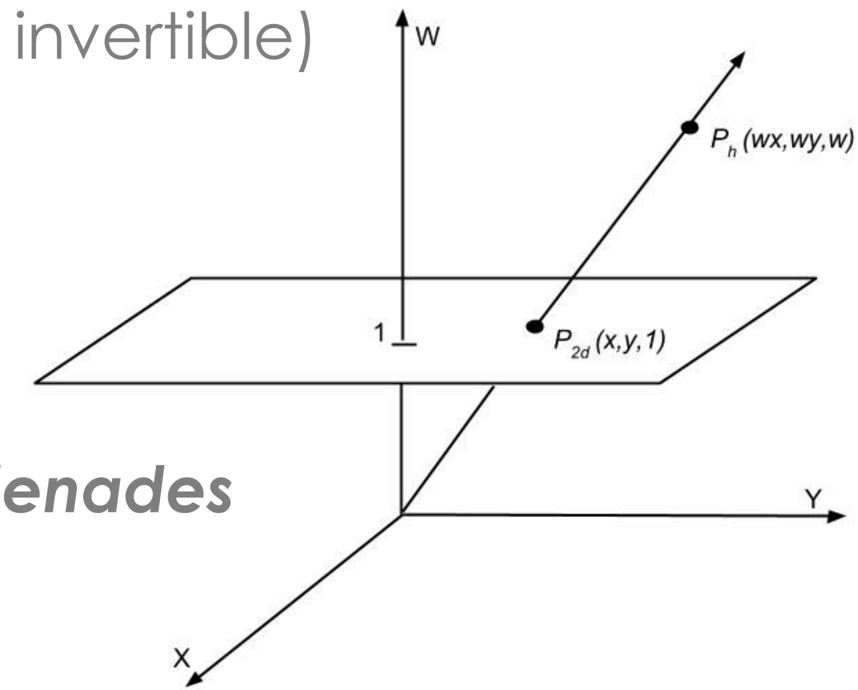




6. TG's

- **Translació 2D**: no és una transformació lineal (no és invariant respecte l'origen i no es pot definir com una matriu 2D invertible)

$$\boldsymbol{v'} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}, \text{ amb } \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$



- S'afegeix una dimensió w (***coordenades homogènies***):

$$\boldsymbol{Tv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}'$$

6. TG's

Transformacions afins (transformacions geomètriques):

Transformació	Matriu
Escalat	$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotació	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translació	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. TG's

- Exemples:
  - Escalar 15 en x i 17 en y

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Rotar 123º

$$\begin{bmatrix} \cos(123) & -\sin(123) & 0 \\ \sin(123) & \cos(123) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Transladar -16 en x i +18 en y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

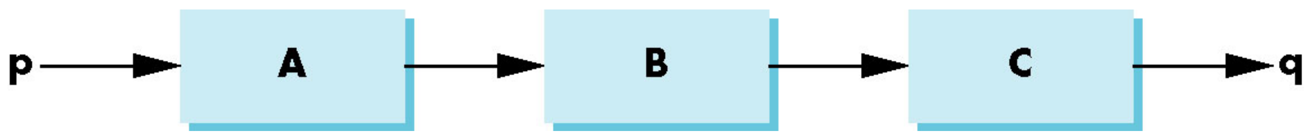
6. TG's

- **Inverses:**

<table>
<tr><th>Transformació</th><th>Matriu inversa</th><th>Quin sentit té?</th></tr>
<tr><td>Escalat</td><td>
<table>
<tr><th>Transformation</th><th>Matrix Inverse</th><th>Does it make sense?</th></tr>
<tr><td>Scaling</td><td>$\begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>If you scale something by factor X, the inverse is scaling by 1/X</td></tr>
<tr><td>Rotation</td><td>$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>Not so obvious, but can use math! Rotation Matrix is orthonormal, so inverse should just be the transpose, (proof on slide 23)</td></tr>
<tr><td>Translation</td><td>$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>If you translate by X, the inverse is translating by -X</td></tr>
</table>
</td><td>Si s’escala per a, la inversa és escalar per 1/a</td></tr>
<tr><td>Rotació</td><td>
<table>
<tr><th>Transformation</th><th>Matrix Inverse</th><th>Does it make sense?</th></tr>
<tr><td>Scaling</td><td>$\begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>If you scale something by factor X, the inverse is scaling by 1/X</td></tr>
<tr><td>Rotation</td><td>$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>Not so obvious, but can use math! Rotation Matrix is orthonormal, so inverse should just be the transpose, (proof on slide 23)</td></tr>
<tr><td>Translation</td><td>$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>If you translate by X, the inverse is translating by -X</td></tr>
</table>
</td><td>La inversa de la rotació per θ és rotar per $-\theta$. Com $sin(-\theta) = -sin(\theta)$ i $cos(-\theta) = cos(\theta)$ s’obté aquesta matriu, que ésla trasposada de l’original.</td></tr>
<tr><td>Translació</td><td>
<table>
<tr><th>Transformation</th><th>Matrix Inverse</th><th>Does it make sense?</th></tr>
<tr><td>Scaling</td><td>$\begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>If you scale something by factor X, the inverse is scaling by 1/X</td></tr>
<tr><td>Rotation</td><td>$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>Not so obvious, but can use math! Rotation Matrix is orthonormal, so inverse should just be the transpose, (proof on slide 23)</td></tr>
<tr><td>Translation</td><td>$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>If you translate by X, the inverse is translating by -X</td></tr>
</table>
</td><td>Si es translada x, la inversa és transladar –x.</td></tr>
</table>

6. TG's

- **Ordre de les transformacions:** Observa que la matriu de la dreta és la primera que s'aplica (ja que estem amb la convenció de representar el punt com una columna)
- L'ordre natural seria fer, per exemple:



- Matemàticament, es fa:

$$q = M\,\mathbf{p} = C\,B\,A\,\mathbf{p} = C(B(A\,\mathbf{p}))$$

6. TG's

- Què faria la següent composició?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La multiplicació de matrius no és commutativa!!

http://graphics.cs.brown.edu/research/exploratory/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/transformationGame/transformation_game_java_browser.html

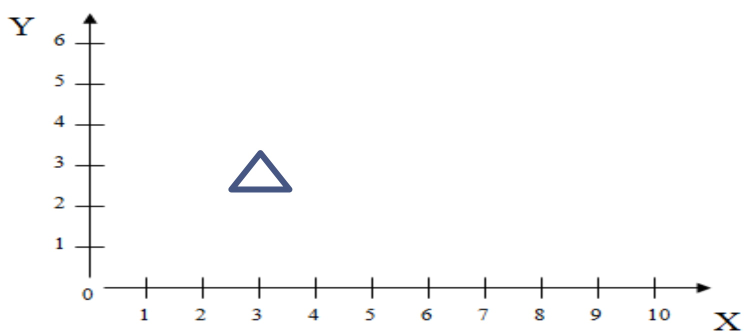
Exercici 1: Transladar 3 respecte x, 4 respecte y i escalar uniformement 5x.

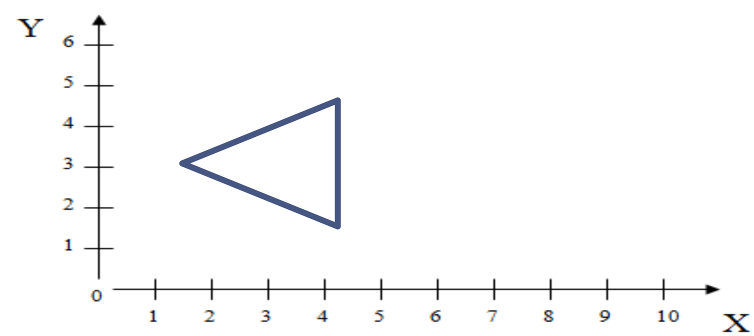
Exercici 2: Transladar (x=6 y=0) i rotar 45º

6. TG's

Exercici:

- Rotar 90º
- Escalar 3x uniformement
- Totes les TGs han de ser respecte el centre de l'objecte (3,3)





6. TG's

- Les **transformacions geomètriques 3D** estàndard són:
    - Rotació
    - Translació
    - Escalat

- Es realitzen amb matrius en coordenades homogènies 4x4

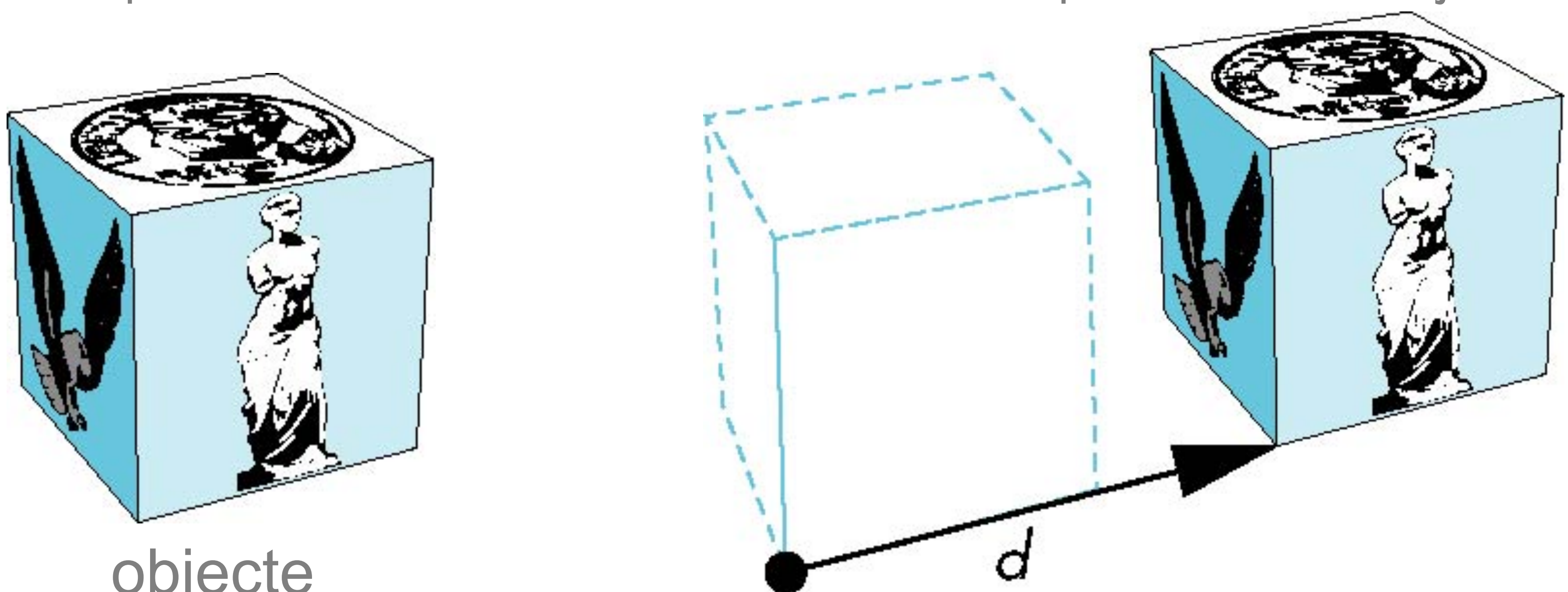
- Les transformacions afins preserven les rectes

- Es poden aplicar als punts dels vèrtexs i es deixa que la implementació del dibuixat de rectes entre punts s'apliqui directament sobre els punts transformats

Secció 3.8 del llibre [Angel2011]

6. TG's

- **Translació 3D:** Mou (translada, desplaça) un punt a una nova posició
- S'aplica la transformació a tots els punts de l'objecte:



Translació: cada punt es desplaça pel mateix vector

6. TG's

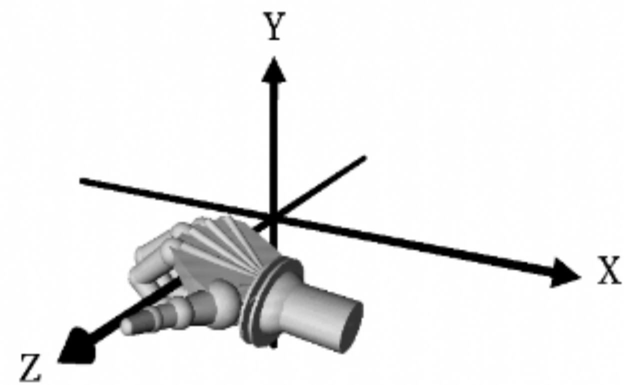
- **Translació 3D**: S'expresa com una matriu 4x4 en coordenades homogènies: T

  p' = T * p

$$M^T = T = T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. TG's

- **Rotació 3D:** Si rotem respecte l'eix Z, a tots els punts els hi queda la mateixa z



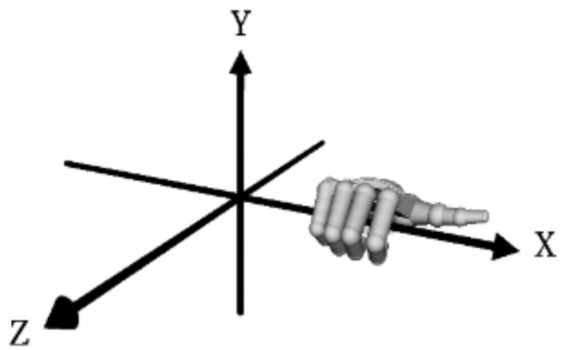
$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$
$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$
$$z' = z$$

$$M^T = \mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

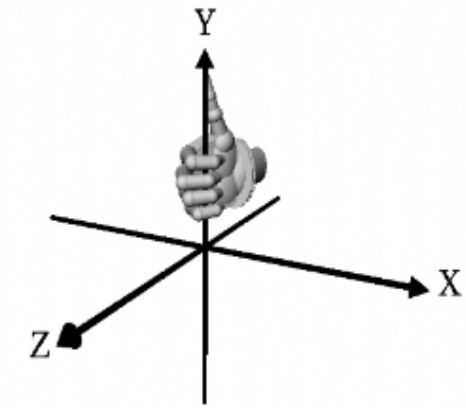
6. TG's

- Seguint el mateix argument, podem deduir les matrius de rotació sobre l'eix X i sobre l'eix Y

$$M^T = \mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



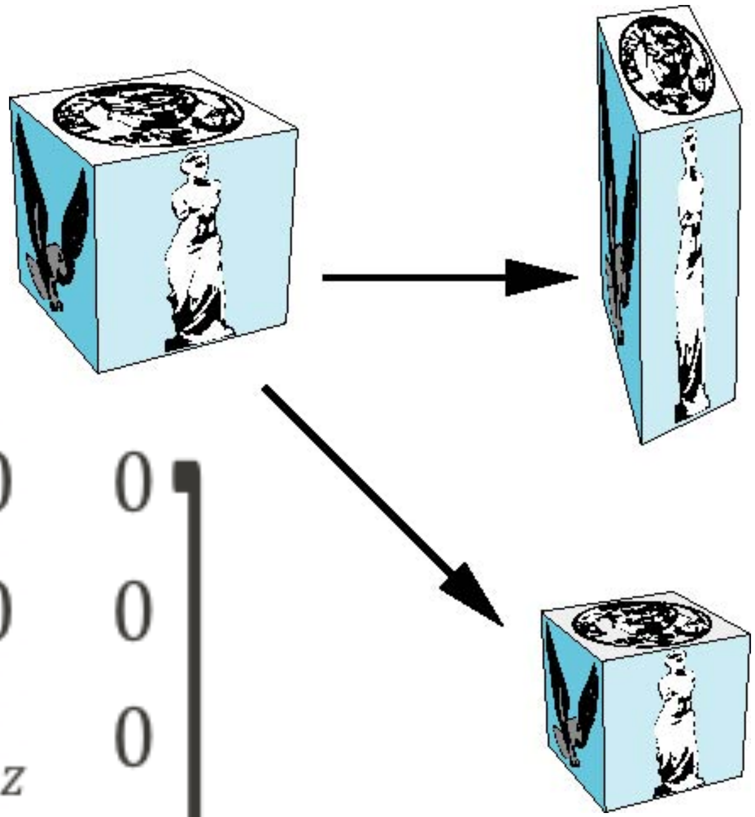
$$M^T = \mathbf{R} = \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



6. TG's

- **Escalat 3D**: Expandir o contraure cada eix

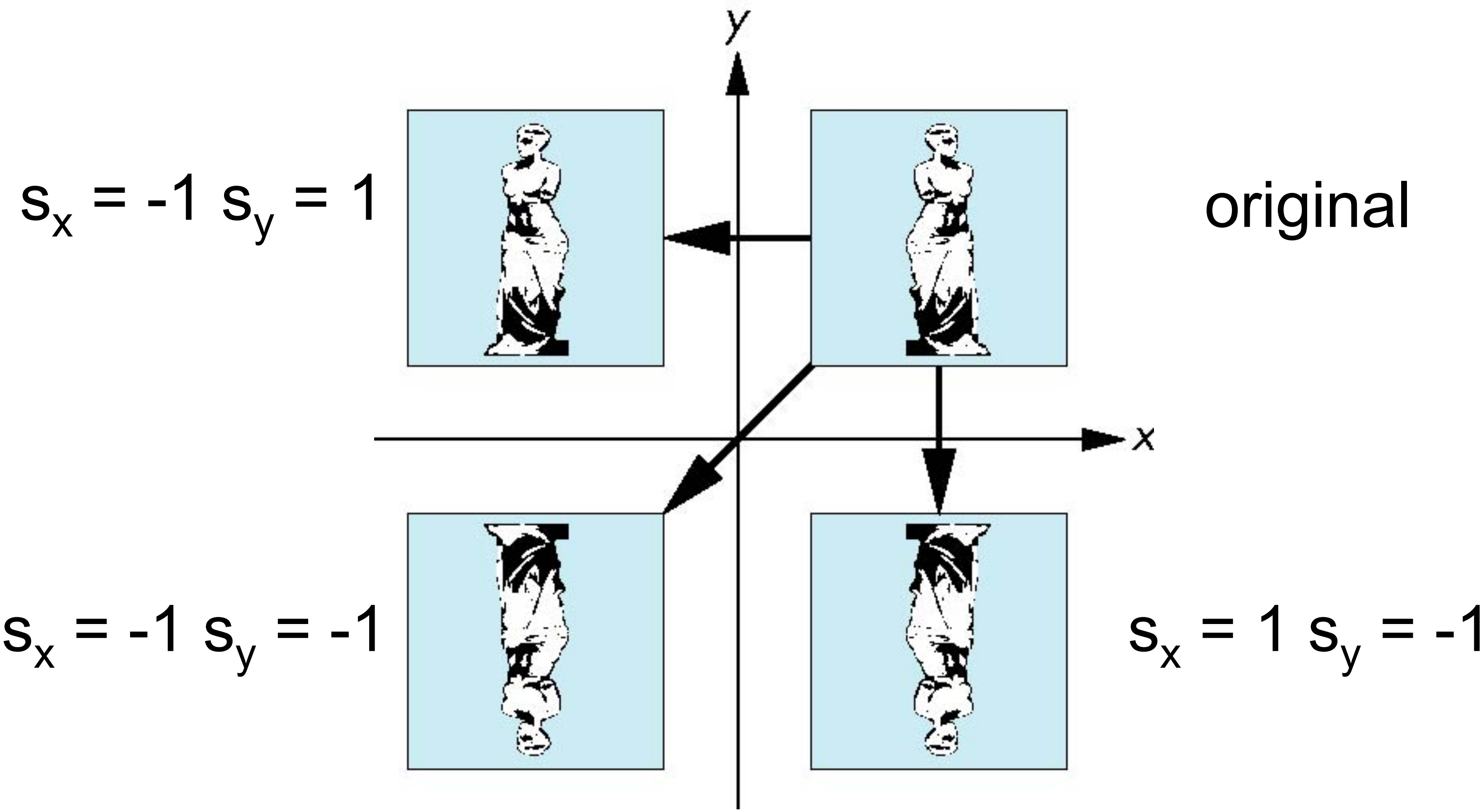
$$x' = s_x x$$
$$y' = s_y y$$
$$z' = s_z z$$
$$\mathbf{p'} = \mathbf{S}\mathbf{p}$$



$$M^T = \mathbf{S} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

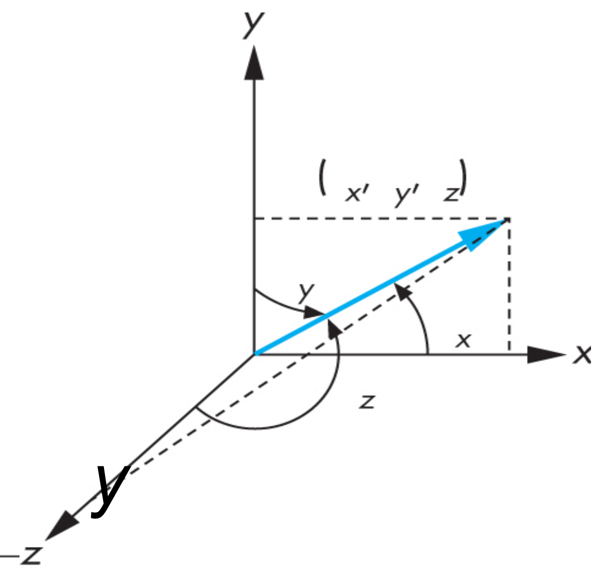
6. TG's

- **Simetries**: corresponen a factors d'escalat negatius

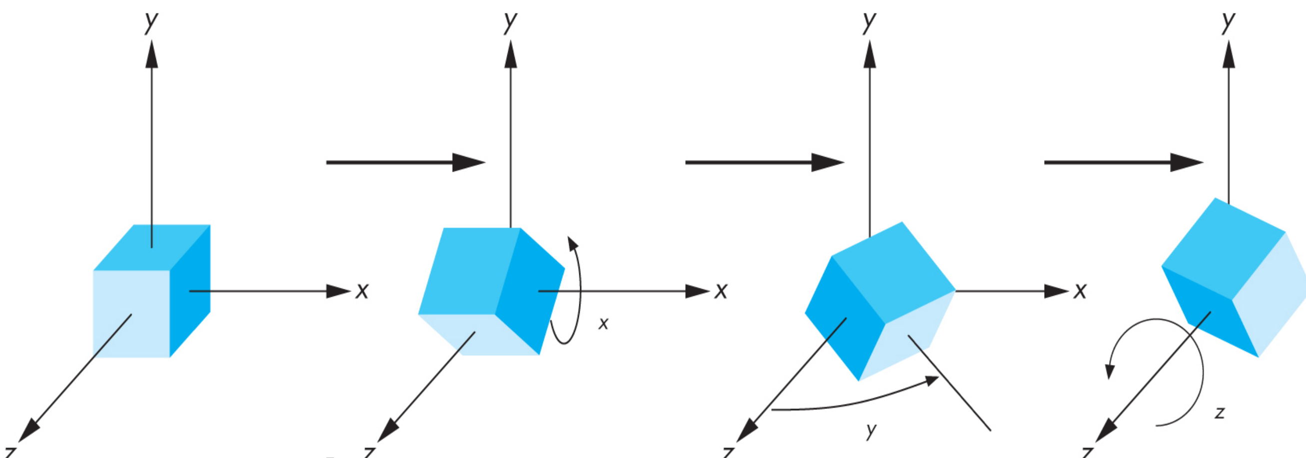


6. TG's

- La **rotació** en θ respecte un **eix arbitrari** és equivalent a tres rotacions en relació als eixos X, Y, Z:



$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_z(\theta_z)\, \mathbf{R}_y(\theta_y)\, \mathbf{R}_x(\theta_x)$$



$\theta_x\ \theta_y\ \theta_z$ són els anomenats angles d'Euler (Gimbal lock)

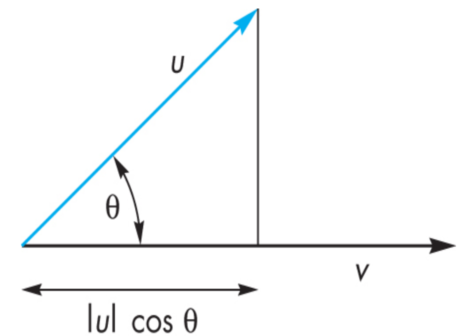
https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno

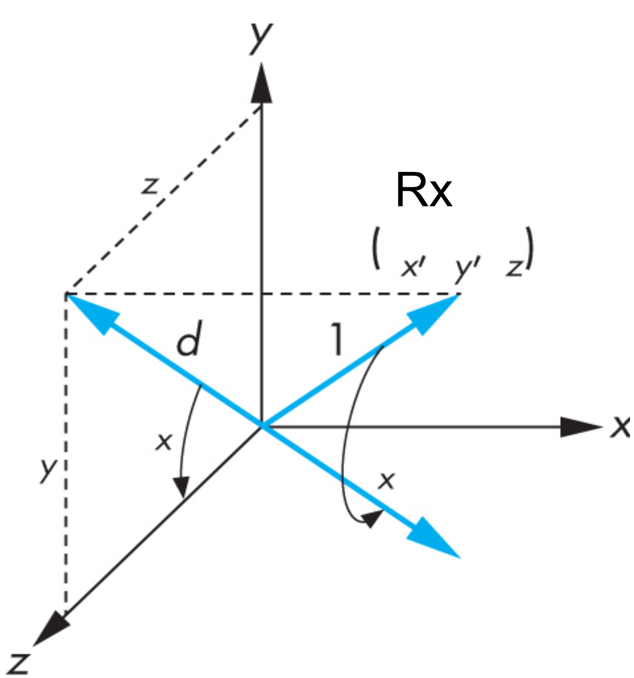
Les rotacions no es poden commutar
Es poden usar rotacions en un altre ordre
però amb angles diferents

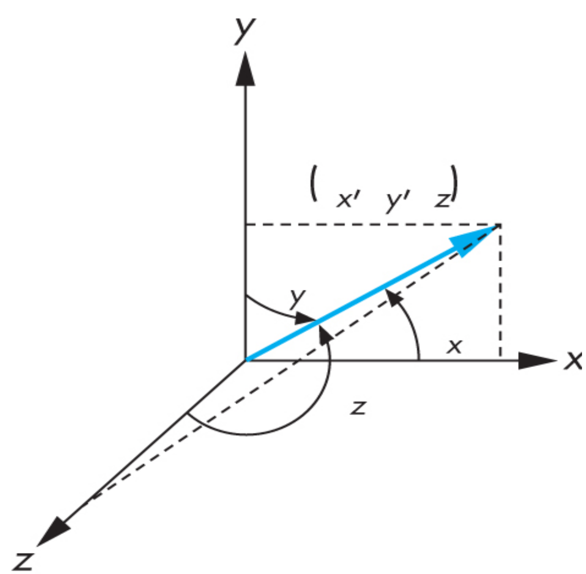
6. TG's

- La **rotació** en θ respecte un **eix arbitrari**

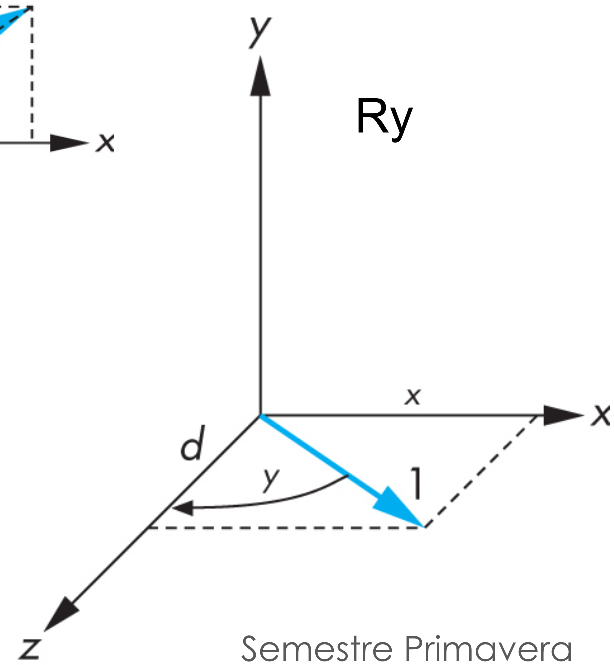
$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_z(\theta_z)\ \mathbf{R}_y(\theta_y)\ \mathbf{R}_x(\theta_x)$$







Z

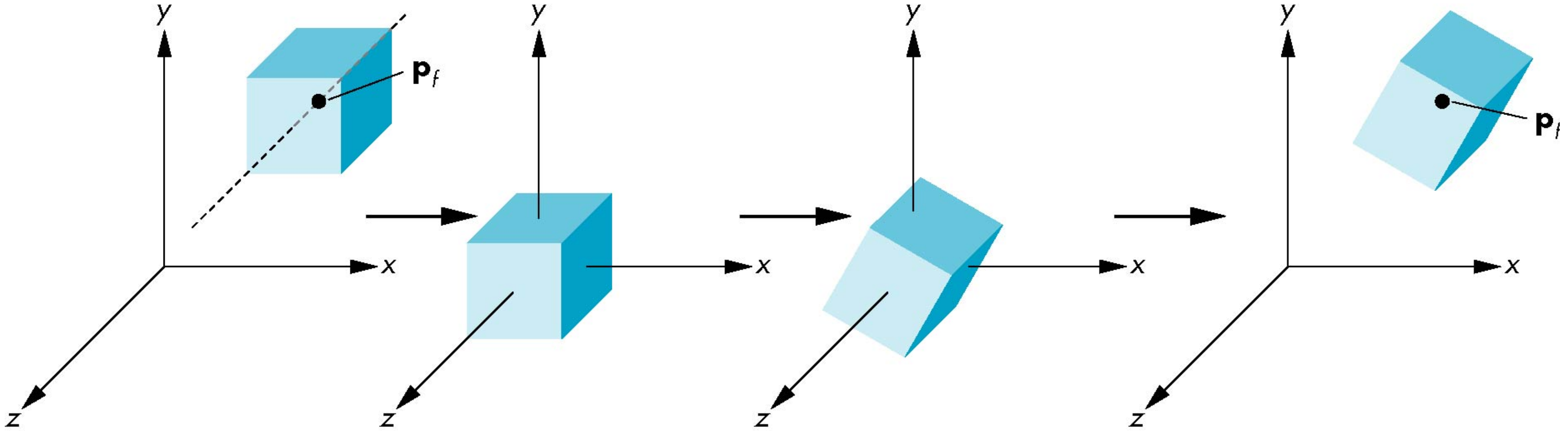


6. TG's

Per **rotar** en relació a un **punt arbitrari**:

- Translació de l'objecte des del punt p_f a l'origen
- Es rota l'objecte
- Translació de l'objecte des de l'origen fins al punt

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(p_f)\ \mathbf{R}(\theta)\ \mathbf{T}(-p_f)$$



6. TG's

Suposem un cub centrat al (2,2,2)

- Rotar-lo 30º al voltant de l'eix x, 60º al voltant de y, i 90º al voltant de z
- Escala per 1 en x, 2 en y i 3 en z.
- Translada'l (2,2,4) en espai de món
- Seqüència: $\boldsymbol{T\,T_0^{-1}S_{xy}R_{xy}R_{xz}R_{yz}T_o}$, on $\boldsymbol{T_0}$ el translada al (0,0,0) :

$$\underset{\boldsymbol{T}}{\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{T_0^{-1}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{S_{xy}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{R_{xy}}}{\begin{bmatrix}\cos 90&\sin 90&0&0\\-\sin 90&\cos 90&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{R_{xz}}}{\begin{bmatrix}\cos 60&0&-\sin 60&0\\0&1&0&0\\\sin 60&0&\cos 60&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{R_{yz}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 30&\sin 30&0\\0&-\sin 30&\cos 30&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{T_0}}{\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-2\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$$