Exercici 8.

(a) Provem que , $\forall n \in \mathbb{Z}$, és $mcd(n, n+1) = 1$.

(b) Sigui k $\in \mathbb{Z}$ tal que, $\forall t \in \mathbb{N}$, és $mcd(t, t+k) = 1$. Demostreu que $k = \pm 1$

(b) Esbrineu per a quins valors de k $\in \mathbb{Z}$ es té que, $\forall s \in \mathbb{N}$, és $mcd(s, s+k) = 2$

Solució 8.

(a) Provem que , $\forall n \in \mathbb{Z}$, és $mcd(n, n+1) = 1$.
Lema: Sigui a,b $\in \mathbb{Z}$ i d|a i d|b $\Rightarrow$ d|a-b

Com d|a $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$ tal què $a = d \times x$
Com d|b $\Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z}$ tal què $b = d \times y$

Per tant, $a - b = d \times x - d \times y = d(x - y)$ on $(x - y) \in \mathbb{Z}$

DEMOSTRACIÓ DE L'ENUNCIAT:

Sigui $n \in \mathbb{Z}$ i d divisor de n i n+1, és a dir, d|n i d|n+1.

Tenim què, aplicant el lema anterior d|(n+1)-n $\Rightarrow$ d|1 $\Rightarrow$ d=1. Ja què d és un nombre positiu

(b) Sigui k $\in \mathbb{Z}$ tal que, $\forall t \in \mathbb{N}$, és $mcd(t, t+k) = 1$. Demostreu que $k = \pm 1$

Ho demostrarem per reducció a l'absurd.

Suposem què $k \neq \pm 1$

Sigui k $\in \mathbb{Z}\setminus$ {-1,+1}
Sigui t = |k|

1. Si k>0 $\Rightarrow mcd(t, 2 \times t) \geq t > 1 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(t, t+k) = 1$
2. Si k<0 $\Rightarrow mcd(t, 0) = t > 1 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(t, t+k) = 1$
3. Si k=0 $\Rightarrow mcd(0, 0) = 0 \neq 1 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(t, t+k) = 1$

Com les contradiccions han surtit de suposar què k $\neq \pm 1$, aplicant la llei de la reducció a l'absurd $\Rightarrow k = \pm 1$

(c) Esbrineu per a quins valors de k $\in \mathbb{Z}$ es té que, $\forall s \in \mathbb{N}$, és $mcd(s, s+k) = 2$

Sigui 2 un factor de s i s+k vol dir què:

$\exists x \in \mathbb{Z}$ tal què $s = 2 \times x$
$\exists y \in \mathbb{Z}$ tal què $s + k = 2 \times y \Rightarrow s = 2 \times y - k$

1. Si k és imparell $\Rightarrow k = 2 \times l + 1$ on $l \in \mathbb{Z}$
   $s = 2 \times y - 2 \times l + 1 = 2(y - l) + 1 \Rightarrow$ s és imparell, això contradiu l'enunciat.
   Ja què s ha de ser parell al ser divisible per 2.

2. Si k és parell $\Rightarrow k = 2 \times l$ on $l \in \mathbb{Z}$

   1. Si k>2 agafem a s = k $\Rightarrow mcd(s, 2 \times s) \geq s > 2 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(s, s+k) = 2$
   2. Si k<-2 agafem a s = |k| $\Rightarrow mcd(s, 0) = s > 2 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(s, s+k) = 2$
   3. Si k=0 agafem a s = 0 $\Rightarrow mcd(0, 0) = 0 \neq 2 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(s, s+k) = 2$
   4. Si k=2 agafem a s=1 $\Rightarrow mcd(1, 3) = 1 \neq 2 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(s, s+k) = 2$
   5. Si k=-2 agafem a s=3 $\Rightarrow mcd(3, 1) = 1 \neq 2 \Rightarrow$ contradicció amb $mcd(s, s+k) = 2$

En conclusió, cap nombre enter cumpleix aquesta propietat.

Es pot observar què si k és imparell i afem a un s parell $\Rightarrow$ s+k serà imparell i el mcd(s,s+k) $\neq$ 2, ja què s+k és imparell.
En canvi si k és parell i agafem un s imparell $\Rightarrow$ s+k tornarà a ser imparell i el mcd(s,s+k) $\neq$ 2, ja què ambdós nombres són imparells