1. L'anomenada successió de *Fibonacci* és la successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es defineix de la següent forma recursiva:

$$a_0 := 1, a_1 := 1, \text{ i, per } n > 2, a_n := a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Fent servir únicament aquesta definició, demostra que per tot $n \geq 0$, $a_{n+6} = 4a_{n+3} + a_n$.

Solució. Ho farem per inducció completa.

- Pas inicial $n = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 3 \implies a_6 = 13 = 4 \cdot 3 + 1 = 4a_3 + a_0 \\ a_4 &= 5 \\ a_5 &= 8 \\ a_6 &= 13 \end{aligned}$$

  Per tant, per a $n = 0$ és certa la relació.

- Pas d'inducció: Sigui $n \geq 0$, suposem que per a tot k, $1 \leq k \leq n$, $a_{k+6} = 4a_{k+3} + a_k$. Hem de veure el resultat per a $n + 1$,

$$a_{n+7} = a_{n+6} + a_{n+5} = 4a_{n+3} + a_n + a_{n+5} \tag{1}$$

  Observem que no podem dir que $a_{n+5} = 4a_{n+2} + a_{n-1}$ en general, ja que si $n = 0$ aquesta afirmació és falsa, i a més no tés entit parlar de a_{n-1}. Podem avançar en la demostració de dues maneres, o bé intentem substituir a_{n+5} per la definició de la successió enlloc de per la hipòtesi d'inducció, o bé fem el cas $n = 0$ per separat. Aquí ho faré de la segona manera.

  Suposem primer que $n = 0$, aleshores hem de demostrar que $a_{n+7} = 4a_{n+4} + a_{n+1}$ per a $n = 0$.

$$a_7 = 21 = 4 \cdot 5 + 3 = 4a_4 + a_1$$

  Per tant, queda demostrat el pas d'inducció per a $n = 0$.

  Suposem ara que $n \geq 1$, aleshores si que té sentit substituir a_{n+5} per $4a_{n+2} + a_{n-1}$ a l'equació 1.

$$\begin{aligned} a_{n+7} &= a_{n+6} + a_{n+5} = 4a_{n+3} + a_n + a_{n+5} = 4a_{n+3} + a_n + 4a_{n+2} + a_{n-1} = \\ &= 4(a_{n+3} + a_{n+2}) + a_n + a_{n-1} = 4a_{n+4} + a_{n+1} \end{aligned}$$

Hem demostrat que per a tot $n \geq 0$, $a_{n+6} = 4a_{n+3} + a_n$. □