7

7.1 En cas d'existir, trobeu la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.2 Trobeu la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3 Expresseu com producte de matrius elementals la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.4 Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una expressió de A com producte de matrius elementals i demostreu que una tal expressió no existeix per a B.

7.5 Sigui $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ v_2 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ v_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

formen una base $\mathfrak{B}'$ de E. Calculeu les components de $v_1 + v_2 + 3v_3$ en les bases $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$. Feu el mateix amb $e_1 - e_2 + 2e_3$

7.6 Sigui $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_2 \\ v_2 &= e_2 - e_3 \\ v_3 &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

formen una base $\mathfrak{B}'$ de E. Calculeu la matriu que canvia components en base $\mathfrak{B}$ en components en base $\mathfrak{B}'$. Feu-la servir per calcular les components en base $\mathfrak{B}'$ de $e_1 - e_2 + 2e_3$.

7.2. Trobeu la inversa de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Volem trobar una matriu $n \times n$ tal que multiplicada per la matriu anterior doni la identitat

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & & \vdots \\ \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & & \\ 0 & 1 & -a & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ & \vdots & 0 & \ddots & -a \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

busquem la primera columna de la matriu identitat.

hem de buscar la primera columna de la inversa:
quan multipliquem la fila 1 de A $\times$ columna 1 de A^{-1} ha de donar 1
quan multipliquem qualsevol altra fila de A $\times$ columna 1 de A^{-1} ha de donar 0
↳ perquè funcioni amb totes les files menys la 1, podem aplicar qualsevol valor en el lloc 1 i zeros en els altres.
↳ perquè funcioni pel lloc 1 el primer element ha de ser 1

busquem la segona columna de la matriu identitat

hem de buscar la segona columna de la inversa
quan multipliquem qualsevol fila superior a 2 de A $\times$ columna 2 de A ha de donar 0
↳ en els valors superiors a A ha de tenir 0.
quan multipliquem fila 2 de A $\times$ columna 2 de A ha de donar 1
↳ posem un 1 en el lloc dos
quan multipliquem fila 1 de A $\times$ columna 2 de A^{-1} ha de donar 0.
↳ cal tenir en compte que la fila 2 de A té un 0 en la columna 1
tenim $a + x = 0 \rightarrow x = -a$
↳ cal que el primer element valgui $(-a)$

Matrius i vectors

Cal calcular el producte $A \cdot A^{-1}$ i comprovar que dona la Identitat

Totes les columnes de la matriu A^{-1} tenen la següent estructura:

La columna i té 1 en la posició i

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -a\,a^{t} + a^{t+1} = 0 \\ \to 1 \\ 0 \end{array}$$

En multiplicar volem obtenir un 1 en la posició i) i zeros en les demés

7.S. Sigui $B = (e_1, e_2, e_3)$ base d'un espai vectorial E.

Demostreu que:
$v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$
$v_2 = e_1 - e_2 - e_3$
$v_3 = e_1 + e_2 + e_3$ formen base B' de E

Apliquem la reducció curta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Com tots els resultats després d'aplicar la reducció són diferents de 0, aleshores són vectors independents
La dimensió de E és 3
Com que la dimensió del subespai coincideix amb la dimensió de la base, v_1, v_2, v_3 són base de E

Calculeu les components de $v_1 + v_2 + 3v_3$ en les bases B i B'

Sigui $w = v_1 + v_2 + 3v_3$
$w = (1, 1, 3)_{B'}$

$$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$w = (1, 1, 3)_{B'} = (3, 2, 9)_B$

7.7. En un espai vectorial E es consideren dues bases, $B = (e_1, e_2, e_3)$ i B', formada per:

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_3$$
$$v_2 = e_1 + e_2 - e_3$$
$$v_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

Demostreu que els vectors que tenen les components relatives a una i altra base iguals formen un subespai de E. Calculeu-ne la dimensió i una base.

$\{$ vector $v = (a_1, a_2, a_3)_B = (b_1, b_2, b_3)_{B'} \mid a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3\}$

$$(P_{B' \to B}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(P_{B' \to B}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad P_{B' \to B} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(P_{B' \to B} - I)}_{|} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

- Aplicamos reducción sobre A

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango 2

dim subespacio 1

7.3. Expresseu com a producte de matrius elementals la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_2^1 A]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Pi^3(\frac{1}{2})\, P_2^1 A]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3^2(-2)\, \Pi^3(\frac{1}{2})\, P_2^1 A]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3^1(1)\, E_3^2(-2)\, \Pi^3(\frac{1}{2})\, P_2^1 A]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3^1(1)\, E_3^2(-2)\, \Pi^3(1/2)\, P_2^1\, A = I \rightarrow A = P_2^1\, \Pi^3(2)\, E_3^2(2)\, E_3^1(-1)$$

7.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trobeu una expressió de A com a producte de matrius elementals

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1^3(-1) A]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Pi^3(-\frac{1}{3})\, E_1^3(-1)\, A]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3^1(-9)\, \Pi^3(-\frac{1}{3})\, E_1^3(-1)\, A]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3^1(-9)\, \Pi^3(-1/3)\, E_1^3(-1)\, A = I \rightarrow A = E_1^3(1)\, \Pi^3(-3)\, E_3^1(9)$$

Demostreu que B no es pot expressar com a producte de matrius elementals

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

quan intentem fer el procés de reducció esglaonada sobre la matriu B, observem que les files són linealment dependents i, per tant, la matriu B no té rang màxim
només es pot descompondre amb matrius elementals les matrius invertibles, i B no és invertible perquè no té rang màxim

7.6. Sigui $B = (e_1, e_2, e_3)$ base d'un espai vectorial E. Demostreu que els vectors

$v_1 = e_1 - e_2$

$v_2 = e_2 - e_3$

$v_3 = e_1 + e_3$ formen base B' de E.

Apliquem el procés de reducció curta sobre v_1, v_2, v_3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Com que el resultat final de la reducció curta és un conjunt de vectors tots diferents de 0, podem afirmar que són linealment independents.
Com que l'Espai E té dimensió 3 ; coincideix amb el nombre de vectors independents, aleshores v_1, v_2, v_3 són base de E.

Calculeu la matriu que canvia components de B en components de base B'. Feu-la servir per calcular les components en base B' de $e_1 - e_2 + 2e_3$.

$w = e_1 - e_2 + 2e_3 = (1, -1, 2)_B$

$$\underbrace{(1, -1, 2)}_{\text{base } B} = \underbrace{x\,(1, -1, 0) + y\,(0, 1, -1) + z\,(1, 0, -1)}_{\text{base } B'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B} \to \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Anna José Campabadal MAVE

7.1. En cas d'existir, trobeu la inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Indica quines combinacions lineals fas!

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

· comprovem que: $A^{-1} \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anna Jové Campabadal

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

· Comprovem que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$