INICIACIÓN A LA FÍSICA

FERNÁNDEZ, J. & PUJAL, M.

Barcelona, Imprenta juvenil, 1968

Cap. 1 (págs. 1-15)

Cálculo vectorial

1

Cálculo vectorial

1.1 Magnitudes escalares y vectoriales. En su afán por dar una descripción de los fenómenos lo más completa y concisa posible, el físico procura reducirla a la expresión de los resultados de las medidas de las distintas magnitudes físicas que intervengan en el fenómeno.

En el caso más sencillo, una magnitud física vendrá determinada por el ente matemático más simple: por un número. Si la magnitud varía, quedará determinada por los valores que toma una variable. Estas magnitudes que quedan determinadas por un solo número o variable, reciben el nombre de *escalares,* palabra que nos recuerda una escala; por ejemplo: la escala grabada sobre una probeta nos mide el volumen del líquido que contiene. El volumen es una magnitud escalar. Otros ejemplos de magnitudes escalares los constituyen el tiempo, la temperatura, la masa, etc.

Otras magnitudes físicas (tales como el desplazamiento de un punto, su velocidad, la aceleración, la fuerza, los campos eléctrico y magnético, etc.) no pueden determinarse con un solo número, sino que, además, llevan asociados una dirección y un sentido. Estas magnitudes son las llamadas *vectoriales,* y el ente matemático que las define recibe el nombre de *vector.*

1.2 Vector; componentes cartesianas. En un espacio de no más de tres dimensiones, definiremos el vector como un *segmento orientado,* es decir, un segmento rectilíneo que tiene especificada su longitud, su dirección y un orden de prelación entre los puntos que lo limitan. Así pues, llamando A y B a éstos, no será lo mismo el vector AB que el BA. La letra nombrada en primer lugar representa el *origen* del vector y la otra su *extremo.* La representación geométrica del vector prescinde frecuentemente de rotular el origen y el extremo y coloca en éste una punta de flecha, denominando al vector por una letra única. En este libro, para representar un vector con una letra, ésta será del tipo negrita, por ejemplo: **V**; y cuando se quiera representar haciendo referencia a su origen y su extremo, se empleará la notación llamada de *diferencia de puntos,* consistente en escribir la letra (mayúscula cursiva) representativa del extremo seguida del signo — y luego la letra representativa del origen, por ejemplo: $B - A$.

La longitud del vector sirve para medir el número asociado a la magnitud vectorial representada y recibe el nombre de *módulo* del vector. Cuando el vector se representa por una letra única, su módulo puede representarse por dicha letra negrita entre barras: $|\mathbf{V}|$ o bien por la misma letra en cursiva V. Si el vector está representado como diferencia de puntos, bastará encerrar ésta entre barras verticales: $|B - A|$.

Es evidente que haciendo corresponder la dirección y sentido del vector a la dirección y sentido de la magnitud vectorial considerada, ésta encontrará en el vector una representación idónea.

El módulo, dirección y sentido de un vector pueden determinarse, en un espacio de tres dimensiones, por una terna de números; y por una pareja de números en el caso de que fueran sólo dos las dimensiones. Veamos cómo:

En el espacio de tres dimensiones (el de dos constituiría una simplificación al anular todo lo que correspondiera a una de las tres direcciones) podemos considerar una terna de ejes coordenados cartesianos rectangulares $Oxyz$ de origen O. Consideremos el vector $\mathbf{A} = Q - P$ (fig. 1.1). Las coordenadas de P las designaremos por

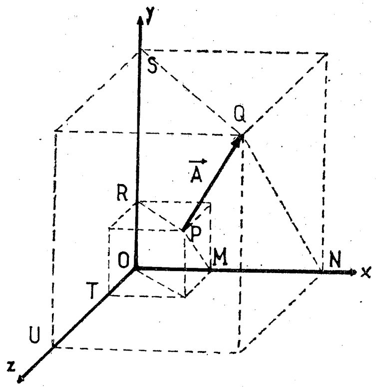

FIG. 1.1 Componentes cartesianas de un vector.

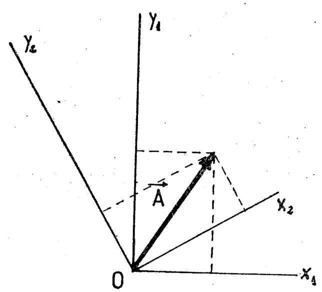

FIG. 1.2 Variación de las componentes ante un cambio de sistema de referencia.

x_P, y_P, z_P, y las de Q por x_Q, y_Q, z_Q. Proyectemos el vector sobre los tres ejes de coordenadas y obtendremos

$$\overline{MN} = x_Q - x_P \qquad \overline{RS} = y_Q - y_P \qquad \overline{TU} = z_Q - z_P$$

Estas proyecciones pueden ser positivas, nulas o negativas, según que el sustraendo en cada una de ellas sea menor, igual o mayor que el minuendo respectivo y reciben el nombre de *componentes cartesianas* del vector **A**. Aparece aquí una ventaja de la representación del vector como diferencia de puntos, pues sus componentes cartesianas resultan ser las diferencias de las coordenadas cartesianas del extremo y el origen. Las componentes cartesianas de **A** se representan por A_x, A_y y A_z y se tiene

$$A_x = x_Q - x_P \qquad A_y = y_Q - y_P \qquad A_z = z_Q - z_P$$

Llamando α, β y γ a los ángulos que forma el vector **A** con cada uno de los semiejes positivos de coordenadas, como las componentes son las proyecciones respectivas de **A**, será:

$$A_x = A \cos \alpha \qquad A_y = A \cos \beta \qquad A_z = A \cos \gamma \tag{1.1}$$

Donde A es el módulo del vector. Elevándolas al cuadrado y sumándolas,

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

y como la suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta siempre vale la unidad,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.2}$$

Con lo que tenemos el módulo del vector en función de sus componentes. Combinando las ecuaciones 1.1 y 1.2 tendríamos los cosenos directores del vector en función de sus componentes, con lo que el conocimiento de éstas vemos que nos permite determinar unívocamente el módulo, dirección y sentido del vector.

Por tanto, una magnitud vectorial podrá representarse indistintamente por el módulo, dirección y sentido de un vector, o por sus componentes cartesianas referidas a un cierto sistema de referencia. Ahora bien, estas componentes dependerán del sistema escogido. Por ejemplo: consideremos en un plano (espacio de dos dimensiones) un vector **A** referido a dos sistemas de ejes cartesianos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (fig. 1.2); sus componentes en uno y otro sistema son diferentes. Sin embargo, una magnitud vectorial física es un ente intrínseco que no puede depender del sistema de referencia utilizado. El hecho de que *sus componentes* sí dependan, sólo significa que la descripción de un mismo fenómeno en dos sistemas de referencia distintos requiere dos formas distintas de expresión.*

1.3 Igualdad y suma de vectores. Vamos a establecer las bases del Álgebra Vectorial, pero será preciso indicar, ante todo, que desarrollaremos ésta prescindiendo de cuál sea la posición del origen de cada vector. Es más, para operar tomaremos los orígenes de los vectores donde nos convenga. Los vectores que no tienen precisado su origen, pudiendo ser éste uno cualquiera de los puntos del espacio, reciben el nombre de vectores *libres*. Démonos cuenta de que las ecuaciones 1.1 y 1.2 nos determinan un vector libre, pues de ellas pueden deducirse el módulo, dirección y sentido del vector, pero no la posición de su origen, que queda totalmente indeterminada.

Así pues, diremos que dos vectores son iguales cuando tengan, respectivamente, iguales módulo, dirección y sentido. Ello entraña que sus componentes homólogas, en un mismo sistema de referencia, sean iguales y recíprocamente.

Dados varios vectores **A**, **B**, **C**, ..., llamaremos vector *suma* de ellos y lo representaremos por

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots$$

al vector cuyo origen coincide con el del primer vector sumando y cuyo extremo coincide con el del último, cuando todos los vectores sumando se colocan uno a continuación de otro con sus direcciones, sentidos y módulos correspondientes (fig. 1.3).

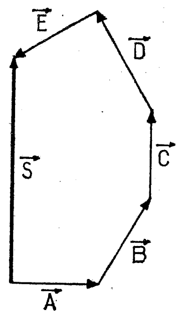

FIG. 1.3 Suma de vectores.

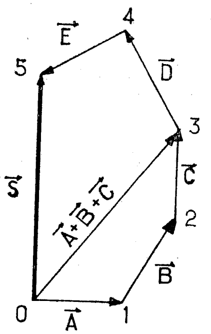

FIG. 1.4 Propiedad asociativa de la suma vectorial.

* Si se tradujera este libro a otro idioma, las palabras empleadas serían otras, pero los conceptos desarrollados serían los mismos.

La suma vectorial goza de las propiedades asociativa y conmutativa. En efecto: por la misma definición de suma, el vector de origen O y extremo el punto 3 (fig. 1.4) es la suma **A** + **B** + **C** de los tres primeros sumandos y vemos que al sumarla con los vectores **D** y **E** se obtiene la misma suma. Luego: *En toda suma de vectores pueden sustituirse varios de ellos por su suma efectuada.*

Consideremos ahora la suma de vectores **A** + **B** (fig. 1.5 *a*) y la suma **B** + **A** (fig. 1.5 *b*). Colocando las figuras con el punto O común, los vectores, que son dos a dos paralelos y de igual longitud, determinan un paralelogramo (fig. 1.5 c) en el cual los vectores **A** + **B** y **B** + **A** coinciden según una diagonal, luego **A** + **B** = **B** + **A** (propiedad conmutativa).

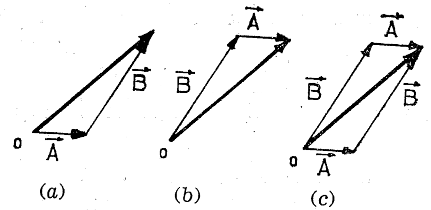

FIG. 1.5 Propiedad conmutativa de la suma de vectores y regla del paralelogramo.

De esta demostración sale la llamada *regla del paralelogramo* para la suma de dos vectores, según la cual basta colocarlos con su origen común y su suma viene dada por el vector definido por la diagonal del paralelogramo.

Los vectores de la figura 1.3 constituyen un polígono en el espacio (que no tiene por qué ser plano) y la Geometría nos enseña que al proyectar sobre un eje cualquiera una línea poligonal cerrada, la suma algebraica de las proyecciones (positivas unas, negativas otras) sobre el eje, es nula. De aquí resulta inmediato que la proyección del vector **S** sobre un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre dicho eje de los demás vectores, luego:

La proyección sobre un eje cualquiera de un vector suma de otros varios es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre dicho eje de los vectores sumando.

Aplicando esta propiedad a los ejes cartesianos, resulta que si

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots$$

se cumple

$$S_x = A_x + B_x + C_x + \ldots$$
$$S_y = A_y + B_y + C_y + \ldots$$
$$S_z = A_z + B_z + C_z + \ldots$$

Es decir: *Las componentes cartesianas de un vector suma de otros varios son iguales a las respectivas sumas algebraicas de las componentes homólogas de los vectores sumando.*

1.4 Vector opuesto de uno dado; diferencia de vectores. Dado un vector **A**, llamaremos *opuesto* de **A** a otro vector de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario. En consecuencia, al sumar un vector con su opuesto tendremos, según la definición de suma, un vector de módulo nulo. Éste, llamado *vector nulo*, tendrá, según las ecuaciones 1.1, nulas sus tres componentes cartesianas, y como éstas han de ser iguales a las sumas de las respectivas componentes homólogas de **A** y su opuesto, se deduce que las componentes homólogas de dos vectores opuestos son de igual valor absoluto y de signos contrarios. Por eso al vector opuesto de **A** se le suele representar por —**A**, y sus componentes son $-A_x$, $-A_y$, $-A_z$.

Llamaremos *diferencia* de dos vectores a otro vector que sumado con el segundo nos dé el primero. Para obtenerla gráficamente bastará representar minuendo y sustraendo con sus orígenes coincidentes y trazar un vector cuyo origen sea el extremo del sustraendo y su extremo el del minuendo. Llamando **D** a la diferencia entre **A** y **B** tendremos

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

o sea

$$A_x = B_x + D_x$$
$$A_y = B_y + D_y$$
$$A_z = B_z + D_z$$

de aquí pueden despejarse las componentes de **D** que resultan ser iguales a las diferencias de las componentes homólogas de minuendo y sustraendo, pero como $-B_x$, $-B_y$ y $-B_z$ son las componentes del vector opuesto del **B**, se deduce que *para restar dos vectores basta sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.*

1.5 Producto de un escalar por un vector. El producto de un escalar α por un vector **A** lo definimos como otro vector de la misma dirección que **A**, cuyo módulo es igual al producto del módulo **A** por el valor absoluto de α, y cuyo sentido será el de **A** o el opuesto según que α sea positivo o negativo, respectivamente.

De la semejanza entre los triángulos *OPR* y *OQS*, *OTR* y *OUS* (fig. 1.6), resulta de manera inmediata que

$$(\alpha\,\mathbf{A})_x = \alpha\,A_x$$

y análogamente se obtendría

$$(\alpha\,\mathbf{A})_y = \alpha\,A_y \qquad (\alpha\,\mathbf{A})_z = \alpha\,A_z$$

En la figura 1.6 se ha representado el caso en que $\alpha > 0$. Si $\alpha < 0$, los triángulos considerados estarían opuestos por su vértice en *O*, pero la semejanza subsistiría. Entonces, por el convenio de signos para las componentes (diferencia entre las coordenadas homólogas del extremo y del origen, las de éste son nulas), **A** y α **A** tendrían sus componentes homólogas de signos contrarios. Luego siempre: *Las componentes del producto de un escalar por un vector son iguales a las componentes homólogas del vector multiplicadas por el escalar*, sea éste positivo o negativo.

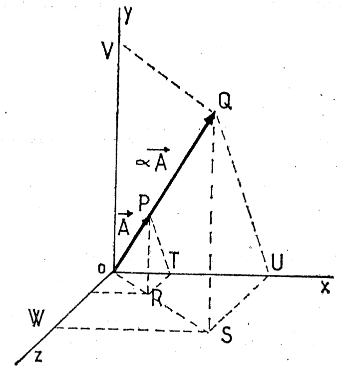

FIG. 1.6 Producto de un escalar por un vector

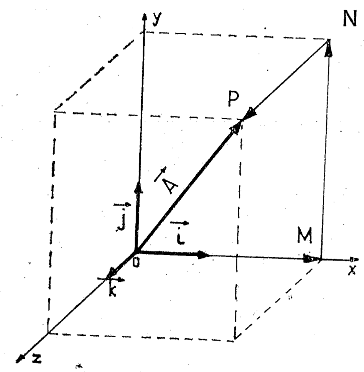

FIG. 1.7 Obtención de un vector en función de los versores de los ejes cartesianos.

1.6 Versores; expresión de un vector en función de los versores de los ejes cartesianos. Cuando queramos asignar un sentido positivo a un eje, bastará asociarle un vector que tenga la misma dirección. El sentido del vector será el que se tome como positivo sobre el eje. El módulo del vector nada tendrá que ver en esto. Si sobre el eje tomamos una escala, la unidad en ésta puede venir medida por el módulo del vector asociado, al que se llama *versor*. Así pues, un versor será un vector de módulo unidad (también se le llama vector unitario) que caracteriza una dirección y un sentido.

Si multiplicamos un versor por un escalar, tendremos un vector de igual dirección, cuyo módulo es igual al valor absoluto del escalar.

Los versores asociados a los ejes cartesianos suelen representarse por **i**, **j** y **k**. Así pues, si multiplicamos **i** por el escalar A_x, componente x del vector **A** (fig. 1.7), tendremos el vector $A_x \mathbf{i} = M - O$. Por otra parte, el vector $A_y \mathbf{j}$ se podría representar por $N - M$, y el $A_z \mathbf{k}$ por $P - N$. La suma de los tres nos daría el vector $A = P - O$, con lo cual puede escribirse

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \tag{1.3}$$

que nos da el vector **A** en función de sus componentes cartesianas y de los versores asociados a los ejes cartesianos correspondientes.

1.7 Producto escalar de dos vectores. El producto escalar de dos vectores **A** y **B** lo representaremos por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y se define como una cantidad escalar igual al producto de los módulos de los vectores multiplicado por el coseno del ángulo que forman. Así pues,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\, B \cos \theta \tag{1.4}$$

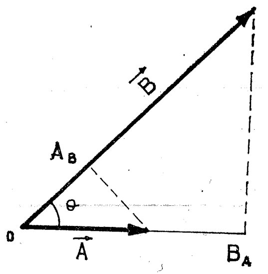

FIG. 1.8 Producto escalar de dos vectores.

Ahora bien, la proyección de **B** sobre **A** es (fig. 1.8)

$$B_A = B \cos \theta \tag{1.5}$$

y la proyección de **A** sobre **B** es

$$A_B = A \cos \theta \tag{1.6}$$

considerando dichas proyecciones negativas cuando caigan sobre la prolongación del otro vector, es decir, cuando $\theta > 90°$. En tal caso, sustituyendo las ecuaciones 1.5 y 1.6 en la 1.4, tenemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\, B_A = B\, A_B \tag{1.7}$$

Luego, teniendo en cuenta el signo de la proyección: *El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Resulta inmediato que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo. *La anulación del producto escalar es condición característica de perpendicularidad.*

De la ecuación 1.7 resulta inmediatamente que el producto escalar goza de la propiedad conmutativa, es decir,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

También goza de la propiedad distributiva. En efecto: el producto escalar

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots) = A\, (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots)_A \tag{1.8}$$

pero la proyección sobre **A** de un vector suma de otros varios sabemos (§ 1.3) que es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre **A** de los vectores sumando. Luego, sustituyendo en la ecuación 1.8

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots) = A\, (B_A + C_A + \ldots)$$

pero esto es el producto del escalar A por una suma de escalares, el cual ya sabemos que es distributivo, luego

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots) = A\, B_A + A\, C_A + \ldots = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \ldots$$

que nos demuestra que *para multiplicar escalarmente un vector por una suma de vectores, basta sumar los productos escalares de dicho vector por cada uno de los vectores sumando* (propiedad distributiva).

Esto hace que podamos extender al producto escalar las reglas del Álgebra ordinaria. Dejamos como ejercicio demostrar que, siendo α un escalar,

$$(\alpha\, \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \alpha\, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\alpha\, \mathbf{B})$$

Expresemos los vectores **A** y **B** en función de sus componentes y multipliquémoslos escalarmente

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \tag{1.9}$$

podemos multiplicar estos dos trinomios según las reglas del Álgebra ordinaria, teniendo en cuenta que se trata de productos escalares. Entonces aparecerán términos en los que se multiplicarán escalarmente vectores perpendiculares (por ej.: $A_x \mathbf{i} \cdot B_y \mathbf{j}$) y dichos productos serán nulos; y aparecerán otros términos en que se multiplicarán vectores de igual dirección (por ej.: $A_x \mathbf{i} \cdot B_x \mathbf{i}$), y como entonces $\cos \theta = \pm 1$, quedará sólo el producto de las componentes correspondientes (con el signo que proceda). Por tanto, la ecuación 1.9 quedará en la forma

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.10}$$

1.8 Producto vectorial de dos vectores. Definimos el producto vectorial de dos vectores como otro vector expresado de la manera siguiente:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

El significado de esta definición es inmediato si se piensa que al desarrollar el determinante por los elementos de la primera fila queda una suma de productos de cada versor por sendos escalares, los cuales serán las componentes correspondientes del vector $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$.

De la definición dada por la ecuación 1.11 se deducen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} \tag{1.12}$$

pues al permutar dos filas, el determinante sólo cambia de signo.

Siendo c un escalar,

$$(c\,\mathbf{A}) \wedge \mathbf{B} = c\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge (c\,\mathbf{B}) \tag{1.13}$$

En efecto:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c\,A_x & c\,A_y & c\,A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ c\,B_x & c\,B_y & c\,B_z \end{vmatrix}$$

Propiedad distributiva:

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$$

ya que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + C_x & B_y + C_y & B_z + C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

El producto vectorial de los vectores paralelos es siempre nulo. En efecto: si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos,

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

y

$$B_x = c\,A_x \qquad B_y = c\,A_y \qquad B_z = c\,A_z$$

con lo que las dos últimas filas del determinante de la ecuación 1.11 tendrán sus elementos proporcionales y el determinante es nulo.

Así,

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0 \tag{1.14}$$

y es fácil demostrar que

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{1.15}$$

Combinando los productos escalar y vectorial podemos estudiar el *producto mixto* $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$. Las componentes de $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ son los adjuntos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en el determinante

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

y teniendo en cuenta la ecuación 1.10, queda

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + A_y \begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

y este segundo miembro no es más que el desarrollo por los elementos de la primera fila del determinante

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

Análogamente,

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

y este determinante es igual al de la ecuación 1.16, pues a él se reduce al permutar la primera fila con las otras dos. Luego

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \tag{1.17}$$

Dejamos como ejercicio al lector demostrar que también se cumplen las propiedades siguientes:

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{1.18}$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \qquad (1.19)$$

$$\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = 1 \qquad (1.20)$$

Por último, veamos una propiedad geométrica: Sean los vectores **A** y **B** cuyo origen común tomaremos como origen de coordenadas y tomemos como eje Ox la recta soporte de **A**, siendo su sentido positivo el del vector **A**. Como eje Oy tomaremos uno perpendicular a Ox situado en el plano determinado por los vectores **A** y **B** y el eje Oz será el perpendicular a ambos y su sentido positivo será el correspondiente a un triedro dextrogiro.

Descompongamos el vector **B** en dos vectores (fig. 1.9) dirigidos según los ejes Ox y Oy ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$). Entonces

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_2$$

El primer término del segundo miembro es nulo por ser **A** y $\mathbf{B}_1$ de igual dirección, con lo cual

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\,A\,B_y \qquad (1.21)$$

Es decir, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es un vector de igual dirección que **k** y su sentido dependerá del signo de B_y. Esto equivale a decir que $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es normal al plano determinado por los vectores **A** y **B** y está dirigido en

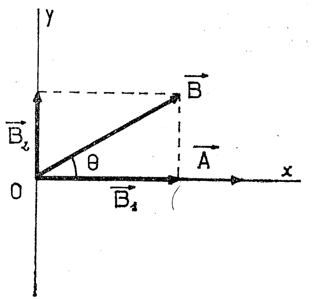

FIG. 1.9 Producto vectorial.

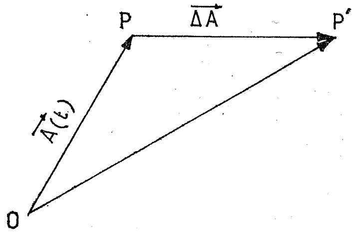

FIG. 1.10 Vector función de un escalar.

el sentido que avanzaría un sacacorchos que girase de manera de llevar el multiplicando sobre el multiplicador por el camino más corto. En cuanto al módulo de $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, lo podemos deducir fácilmente: de la ecuación 1.21 resulta que

$$|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = A.B_y = A\,B \operatorname{sen}\,\theta$$

resultado independiente del sistema de ejes elegido y que nos indica que el módulo de $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es igual al área del paralelogramo determinado por **A** y **B** como lados del mismo.

1.9 Vector función de un escalar. Cuando las componentes de un vector **A** sean funciones de un escalar t, diremos que el vector **A** es función del escalar t, y lo simbolizaremos escribiendo $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$.

Si las componentes son funciones uniformes del escalar t, a cada valor de éste corresponderá un módulo, una dirección y un sentido. Si, además, son funciones continuas, al variar t variarán con continuidad el módulo y dirección del vector.

Considerando invariable el origen O del vector (fig. 1.10), su extremo variará al variar el escalar, correspondiendo al valor t de éste una posición P de aquél y al valor $t + \Delta t$ otra posición P'. Esto es lo mismo que decir que al valor t del escalar corresponde un vector $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$. El incremento $\Delta\mathbf{A}$ del vector será, claro está, el vector $P' - P$. Por tanto, las componentes de éste serán las diferencias entre las coordenadas homólogas de P' y P (cfr. § 1.2), que no son sino los incrementos ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z sufridos por las componentes de **A** al variar el escalar de t a $t + \Delta t$.

Es interesante señalar que el módulo A del vector habrá sufrido un incremento $\Delta|\mathbf{A}|$ igual a la diferencia entre las longitudes de los lados OP' y OP del triángulo de la figura 1.10. En cambio, el módulo de $\Delta\mathbf{A}$ es la longitud del tercer lado, que será mayor que la diferencia de los otros dos (salvo cuando no cambie de dirección el vector), por lo que, en general, $|\Delta\mathbf{A}| \neq \Delta|\mathbf{A}|$.

1.10 Derivada de un vector. Si multiplicamos ahora el escalar $1/\Delta t$ por el vector $\Delta\mathbf{A}$ tendremos otro vector de igual dirección y cuyo módulo es $|\Delta\mathbf{A}|/\Delta t$.* Sus componentes serán (cfr. § 1.5):

$$\frac{\Delta A_x}{\Delta t} \qquad \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \qquad \frac{\Delta A_z}{\Delta t}$$

A este vector se le llama cociente incremental de $\mathbf{A}(t)$ en el intervalo entre t y $t + \Delta t$.

Haciendo tender a cero Δt, el vector $P' - O$ tenderá al $P - O$ describiendo su extremo una cierta curva $P'P''P'''P$ (fig. 1.11) y el vector cociente incremental que pasa siempre por P, siendo secante a la curva antedicha, tenderá a un vector límite tangente en P a dicha

* Se entiende, tomado en valor absoluto.

curva. Este vector límite es la derivada del vector **A** y lo representaremos por $d\mathbf{A}/dt$.

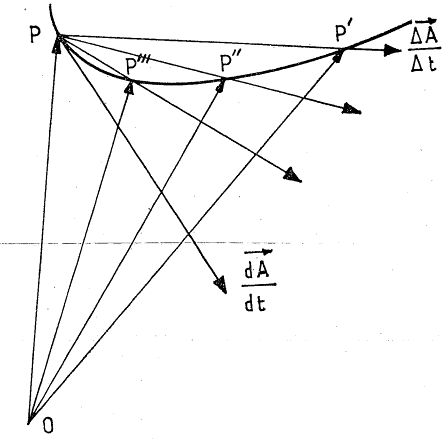

FIG. 1.11 Derivada de un vector.

Sus componentes serán los límites a que tienden las componentes del vector cociente incremental, es decir, las derivadas de las componentes de **A**:

$$\frac{dA_x}{dt} \qquad \frac{dA_y}{dt} \qquad \frac{dA_z}{dt}$$

Su módulo será (cfr. ec. 1.2) la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de estas componentes, y, por lo dicho al final del § 1.9, no será la derivada del módulo más que en el caso en que el vector varíe sin cambiar su dirección.

Si las componentes del vector derivada son, a su vez, funciones de t continuas y derivables, existirá el vector derivada segunda de $\mathbf{A}(t)$ respecto a t, y así sucesivamente para las derivadas de orden superior.

Dejamos como ejercicio extender al caso de la derivación vectorial las reglas de la derivación ordinaria.

De especial interés es el caso

$$\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})}{dt} = 2\,\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

cuando **A** tiene módulo constante. Como $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 =$ constante, su derivada es nula y resulta

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

La anulación de este producto escalar exige que sea nulo uno de los dos vectores o que, no siéndolo, sean perpendiculares. Como $\mathbf{A} \neq 0$, se deduce que *la derivada de un vector de módulo constante es perpendicular a dicho vector o nula.*

1.11 Integral de un vector. Llamaremos integral de un vector **A** función de un escalar t a otro vector cuyas componentes cartesianas sean respectivamente iguales a las integrales de A_x, A_y y A_z. Como la integral de cada componente queda definida salvo una constante arbitraria aditiva, la integral de un vector quedará definida salvo un vector constante aditivo.