Ejercicio 5. Calcula, para todo número entero n, $\mathrm{mcd}(28n-5, 35n-8)$.

Solución 5.

Aplicando el Algoritmo de Euclides tenemos que dados dos números enteros a y b, entonces $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(b,r)$, donde r es el resto de la división entera a = bq + r, con $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < b$.
En nuestro caso tenemos

$$\mathrm{mcd}(28n-5, 35n-8) = \mathrm{mcd}(35n-8, 28n-5) = \mathrm{mcd}(28n-5, 7n-3) = \mathrm{mcd}(7n-3, 7)$$

Como 7 es primo, tenemos que $\mathrm{mcd}(7n-3, 7) = 1$, excepto en los casos en que $7n-3$ es un múltiplo de 7, en cuyo caso $\mathrm{mcd}(7n-3, 7) = 7$.

Veamos cuándo sucede eso: La condición de que $7n-3$ sea un múltiplo de 7 es equivalente a escribir $7n-3 \equiv 7 \bmod 7$, esto es, $7n \equiv 10 \bmod 7$, que es lo mismo que $7n \equiv 3 \bmod 7$. Pero esta ecuación nunca tiene solución, ya que $\mathrm{mcd}(7,7) = 7 \nmid 3$. Por consiguiente, no existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $7n-3$ sea múltiplo de 7, y por tanto el máximo común divisor de $35n-8$ y $28n-5$ será 1 para todo entero n.