Exercici 7.

(a) Provem que si $\text{mcd}(a, b) = 1$, llavors $\text{mcd}(a^n, b^n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Provem que si $\text{mcd}(a, b) = d$, llavors $\text{mcd}(a^n, b^n) = d^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solució 7.

(a) Provem que si $\text{mcd}(a, b) = 1$, llavors $\text{mcd}(a^n, b^n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sigui $a = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots\ p_k^{x_k}$ on $k \in \mathbb{N}$ la descomposició en factors primers d'a i $b = v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots\ v_t^{y_t} \times$ on $t \in \mathbb{N}$ la descomposició en factors primers de b.

Com $\text{mcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \forall p_i$, $1 \leq i \leq k$ i $\forall v_i, 1 \leq i \leq t$ tenim què $p_i \neq v_i$, és a dir, que no tenen factors primers comuns.

Per tant:

$$a^n = (p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{x_k})^n = p_1^{x_1 \times n} \times p_2^{x_2 \times n} \times \cdots\cdots\cdots \times p_k^{x_k \times n}$$
$$b^n = (v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{y_t})^n = v_1^{y_1 \times n} \times v_2^{y_2 \times n} \times \cdots\cdots\cdots \times v_t^{y_t \times n}$$

On aplicant l'afirmació anterior $\forall p_i$, $1 \leq i \leq k$ i $\forall v_i, 1 \leq i \leq t$ tenim què $p_i \neq v_i$, podem deduir que no tenen factors primers comuns.

Per tant, $\text{mcd}(a^n, b^n) = 1$

(b) Provem que si $\text{mcd}(a, b) = d$, llavors $\text{mcd}(a^n, b^n) = d^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sigui $a = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots\ p_k^{x_k}$ on $k \in \mathbb{N}$ la descomposició en factors primers d'a i $b = v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots\ v_t^{y_t} \times$ on $t \in \mathbb{N}$ la descomposició en factors primers de b.

Com $\text{mcd}(a, b) = d$. Podem escriure a i b com:

$a = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots\ p_z^{x_z} \times d$ on $z \in \mathbb{N}$ i $z \leq k$, els nombres x_i i $p_i, 1 \leq i \leq z$, podríen variar al extraure el factor comú.

$b = v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots\ v_s^{y_s} \times d$ on $s \in \mathbb{N}$ i $s \leq t$, els nombres y_i i $v_i, 1 \leq i \leq s$, podríen variar al extraure el factor comú.

Sabem què al extraure els factors comuns al menor índex (mcd) de a i b es cumpleix què $\forall p_i$, $1 \leq i \leq z$ i $\forall v_i, 1 \leq i \leq s$ tenim què $p_i \neq v_i$

Per tant:

$$a^n = (p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots\cdots\cdots \times p_z^{x_z} \times d)^n = p_1^{x_1 \times n} \times p_2^{x_2 \times n} \times \cdots\cdots\cdots \times p_z^{x_z \times n} \times d^n$$
$$b^n = (v_1^{y_1} \times v_2^{y_2} \times \cdots\cdots\cdots \times v_s^{y_s} \times d)^n = v_1^{y_1 \times n} \times v_2^{y_2 \times n} \times \cdots\cdots\cdots \times v_s^{y_s \times n} \times d^n$$

On aplicant l'afirmació anterior $\forall p_i$, $1 \leq i \leq z$ i $\forall v_i, 1 \leq i \leq s$ tenim què $p_i \neq v_i$, podem deduir que el mcd dels dos nombres és d^n

Per tant, $\text{mcd}(a^n, b^n) = d^n$