Exercici 19. Resoleu el sistema de congruències

$$3x \equiv 6 \pmod{12},\ 10x \equiv 15 \pmod{25}$$

doneu-ne totes les solucions positives menors que 300.

Solució 19.

$$\begin{cases} 3x \equiv 6, \quad \pmod{12} \xrightarrow{/3} X \equiv 22 \pmod 4 \\ \\ 10x \equiv 15, \quad \pmod{25} \xrightarrow{/5} 2X \equiv 3 \pmod 5 \xrightarrow{3 \equiv 2^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}})^*} X \equiv 3 \cdot 3 \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

$mcd(4,5) = 1 \Rightarrow$ són coprimers. Definim:

$$m = [4,5] \Rightarrow M = 20$$
$$a = [2,4]$$
$$M(diferent) = [5,4]$$

Resolem les congruències $M_i\ N_i \equiv a_i \pmod{m_i}$, $1 \leq i \leq 2$

$$N_1 :$$
$$5N_1 \equiv 2 \pmod 4$$
$$5 \equiv 1 \pmod 4$$
$$N_1 \equiv 2 \pmod 4$$

$$N_2 :$$
$$4N_2 \equiv 4 \pmod 5$$
$$4 \equiv 4^{-1} \in (\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}})^*$$
$$N_2 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 5$$

$$x = \sum_{i=1}^{2} M_i N_i = [(5)(2)] + [(4)(1)] = 12$$

La solució és $14 \equiv 14 \pmod{20}$.
Totes les solucions < 300 són:

$$X \in \{14, 34, 54, 74, 94, 114, 134, 154, 174, 194, 214, 234, 254, 274, 294\}$$