

CA_HW3: Mass-Spring and Implicit Methods

PART I. Implementation Details

1. Implicit Euler

According to [1], we are trying to solve:

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t))$$

Which is turned into:

$$\left(\mathbf{I} - h \frac{\partial f}{\partial v} - h^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Delta v = h(f_0 + h \frac{\partial f}{\partial x} v_0)$$

Here, we have several things to notice:

- When the Function f is partial differentiated, it will be turned into a diagonal-matrix.
- $\frac{\partial f}{\partial v}$ is actually $k_{damping}$, the damping coefficient of the speed, and it is opposite to the speed's direction.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ is actually $\sum_0^{n_i} k_{spring}$, the coefficient of the Δx to the rest length of a spring, and it is also opposite to the Δx 's direction.
- The n_i in the c's formula represents the i^{th} mass point's amount of connected springs.
- The problem is simple, so we might not use the Eigen Solver.

2. Explicit Euler

In this homework, we are using the basic Euler Method.

3. Combination

We first calculate two method's deltas, and then do it this way:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{new} \\ \Delta v_{new} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_{euler} \\ \Delta v_{euler} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_{implicit} \\ \Delta v_{implicit} \end{pmatrix}$$

PART II. Evaluations

1. Without Damping

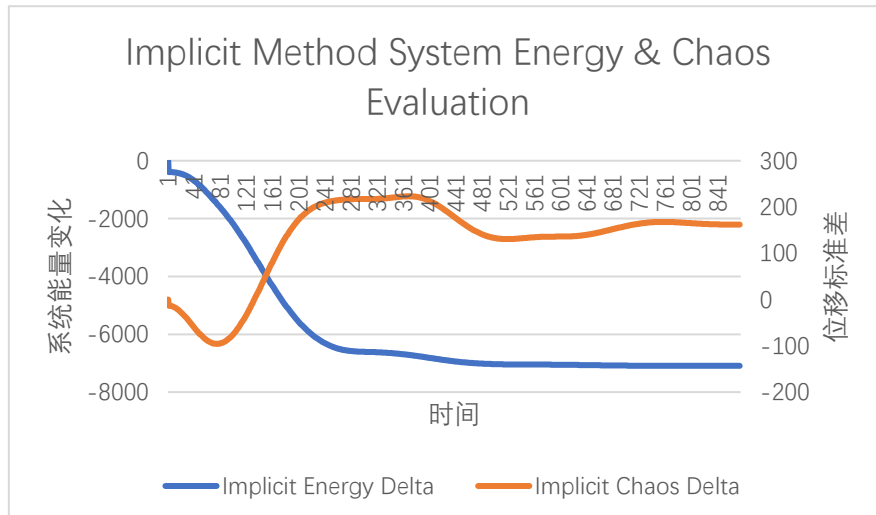


图 1. 隐式方法的能量与位移标准差

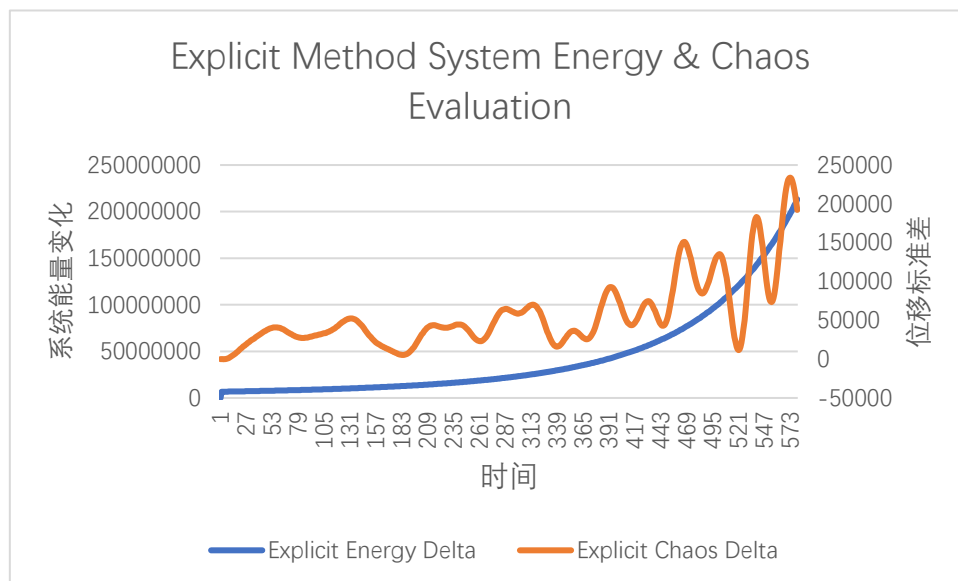


图 2. 显式方法的能量与位移标准差

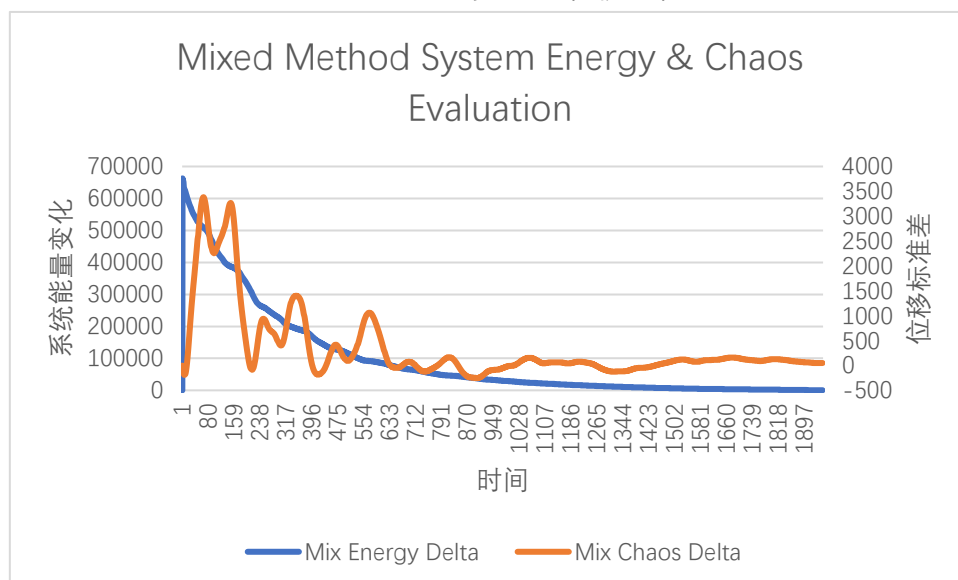


图 3. 混合方法的能量与位移标准差

在图 1~3 中，能量变化是指整个网络相对于初始状态的能量变化，包括动能和势能；位移标准差变化是指相对初始位置整个网络距离重心的离散程度的变化：值越小，说明质点之间越紧密。图中数据是根据实际情况当前一帧的时间，动态调整 time step 的。

可以想象，在没有 damping 时，网络系统的能量应当没有损失，并且整体位移标准差几乎不变或者有规律的抖动。

对图 1，隐式方法的能量不断下降趋于稳定，位移标准差趋于稳定，也就是逐渐不动了。

对图 2，显式方法系统能量不断抖动，由于 Euler 的不稳定性，能量指数级增加；同时位移波动符合预期，但位移量（抖动程度）因为能量增加也不符合预期了。

对图 3，组合的方式在初期 Euler 法极大的误差占据主导地位，后面逐渐稳定，能量和位移标准差符合预期。

由上面的分析，我们可以知道：

对于稳定性而言：

- 隐式方法稳定性过高，导致了系统的能量损失

- b) 显式欧拉稳定性太低，导致了系统的紊乱
- c) 组合法在经过一段时间后，可以较为不错的达到预期；对于初期不稳定的情况，可以选择更换其他的高阶显式方法，可能效果更好

对于准确性而言：

- d) 组合法，在系统层级上，更加符合预期。

2. With Damping

下面，我们引入了 Damping，并且在系统稳定后，大幅移动一个点，再等至系统稳定。

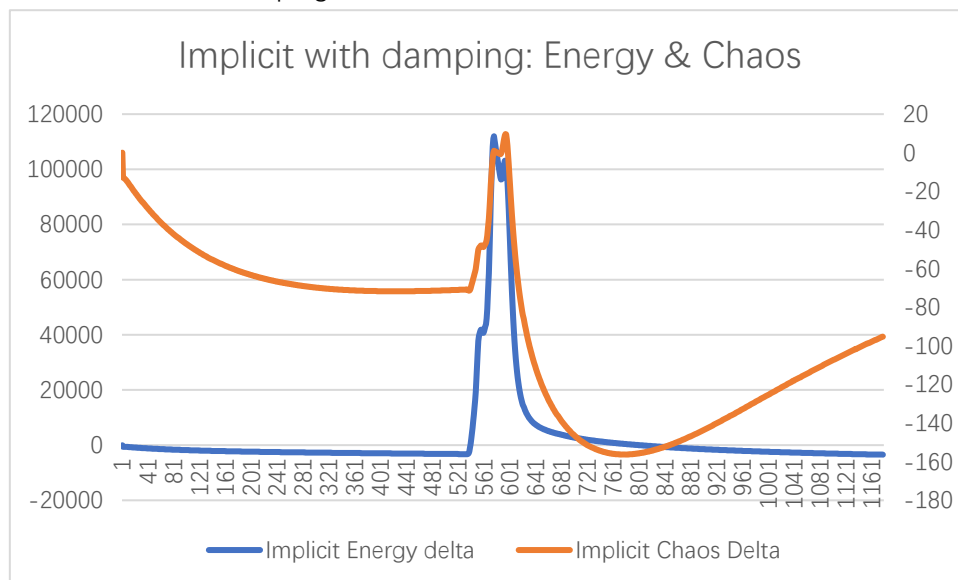


图 4. 隐式方法带有 damping，橙色曲线在次纵轴

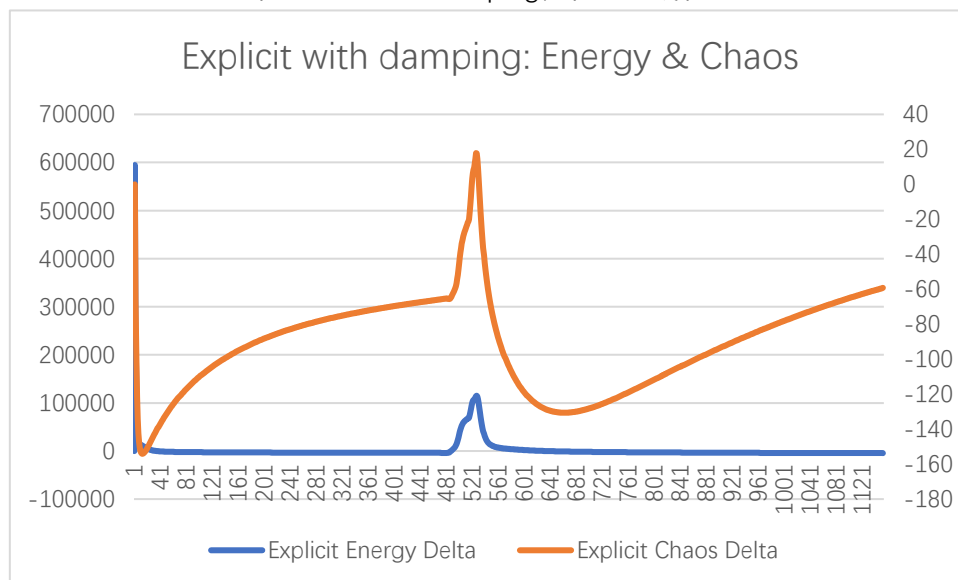


图 5. 显式欧拉带有 damping，橙色曲线在次纵轴

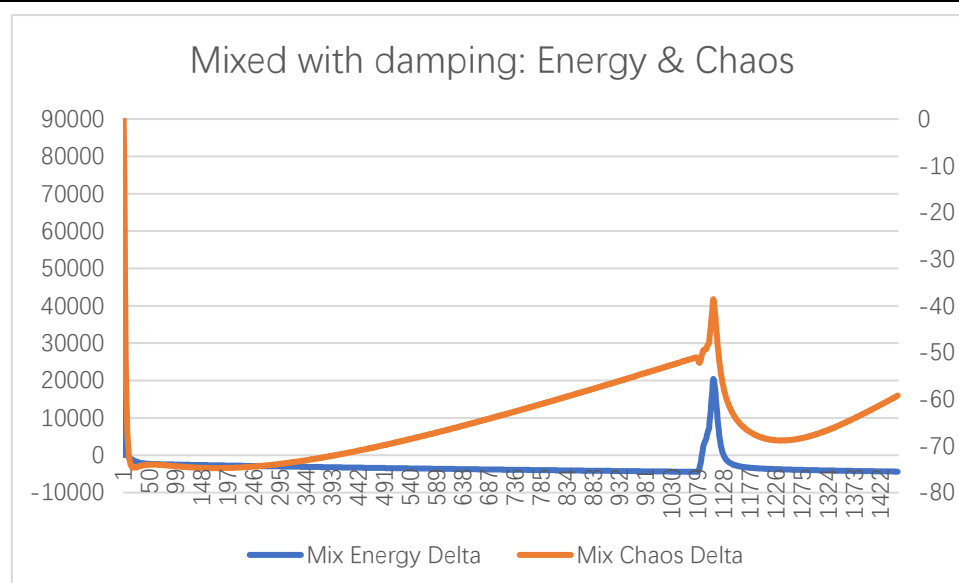


图 6. 混合方法带有 damping，橙色曲线在次纵轴

图 4~6 是带有 damping 的模拟数据，time step 依旧是自适应的。图中，一个猛地升起的高峰就是移动一个点时的数据。

在这个实验中，我们期望在波动后，系统的应当恢复到之前的状态，而外力施加的能量等会被 damping 消耗掉。

图 4 隐式方法，我们发现回复正常后，位移与上一个平衡状态有所差距，能量回复的时间大概在 160 个 step。

图 5 显式，依旧在初期由于不稳定，有很大的起始峰，而系统由于加入了 damping，反而使得在后面能够达到一个较为不错的稳定状态。能量回复在 100 个 step 左右。

图 6 混合，两倍的能量，回复时间在 100 个 step 左右。

我们可以看到：

- 隐式方法过于稳定，导致过于快速的停止运动了，在位移表现上为回复更慢。
- Damping 的介入可能部分起到了类似无 damping 运动隐式法的作用，使得活动趋于稳定。
- 由于没有解析式，难以界定究竟哪个准确，但整体上，加入 damping 后都表现不错。

3. Time Evaluated

	Implicit	Explicit	Mix
time(ms)	0.422196	0.023105	0.498227

如表中所示，为 5×10 质点网络单帧耗时估计。显式方法的时间消耗远低于隐式方法，混合方法由于两者结合，耗时更高。但根据前两节的效果评估，一般情况不用简单的显式欧拉法。

4. Conclusion

在上面的实验中，隐式法整体获得了最稳定的表现。对于大弹簧系数 k_{spring} 时，或者系统没有 damping 时，欧拉法由于其不稳定性，会导致系统紊乱；甚至有时会在混合方法中占据主导地位，导致混合方法的初期表现不佳。

在含有 damping 时，我们发现视觉效果上表现都可以接受，欧拉法的不稳定效应减弱了，能够比没有 damping 更快的恢复到正常状态。

整体来说，对于准确性，我们在不含 damping 的实验中进行了说明，系统能量和位移标准差两个参数，混合方法表现最佳。Euler < Implicit < Mixed. 在包含 damping 的系统中，难以确定。

对于稳定性，Implicit < Mixed < Explicit Euler

对于耗时，Explicit Euler << Implicit < Mixed

References:

1. David Baraff. Physically Based Modeling: Implicit Methods for Differential Equations.2001.[OL]