编 者 的 话

复变函数与拉普拉斯变换注[1]是工程技术中常用的数学工具，在很多高校中作为一门独立的课程开设. 由浙江大学出版社出版的《复变函数与拉普拉斯变换》一书(在本书中简称参考书目[1])，由于其内容简洁，篇幅适中，并结合一些工程实际，自1988年第1版问世以来，已修订了3次，重印了12次. 本书作为一本教学与习题辅导书，主要以该教材为蓝本，参考了国内外相关课程的教材，旨在帮助读者理清思路，明晰概念，提高解题能力. 为此，本书从读者认知的实际过程出发，在每一章中均按照[基本要求]、[基本概念]、[思考题及解答]、[习题及解答]循序渐进地设置了模块. 如在[基本要求]中，对每一章应该掌握的内容作了提纲挈领式的描述，使读者能在几百字的篇幅中对学习的目标和任务有一个明确的认识和回顾. 在[基本概念]中，对该章必须了解的核心概念和知识点，通过一些精选的例题加深并拓宽了认识，至于参考书目[1]中的例题则不再重复列举. 书中省略了一些超出教育部大纲要求的内容与证明注[2]. [思考题及解答]不仅能帮助读者加深理解课程内容，还能为独立完成习题作一些铺陈. [习题及解答]除了介绍基本的解题方法，有的还对其他解题思路作了提示.

为了方便读者在工程技术实践中的应用，有关留数计算公式、拉氏变换公式及保角映射的一些图示等仍然作为一些简单的附表放在本书的末尾，以供参考、备查.

注[1]　拉普拉斯变换以后可简称为拉氏变换.

注[2]　本书中凡超过教学大纲的内容，均打上了“*”号(仅供需要的读者选用).

本书力求行文通顺，推理清楚透彻，希望它能成为读者学习复变函数理论与方法时的有益的补充读物.

在此要特别感谢责任编辑陈晓嘉女士. 在本书的编写过程中，她自始至终给了我许多很好的建议与热情的支持；同时也衷心地感谢我的许多从事"复变函数"教学的同行，与他们经常不断地交流看法，也督促和帮助我不断地更新内容、改正谬误、精益求精.

由于作者水平有限，错误与不妥之处敬请广大读者批评指教.

编者于求是园

2004 年 8 月

目　　录

第一章　复数的预备知识

【基本要求】

(1) 能根据复数的定义及复平面的建立，将复数用不同的方式(代数形式、三角函数形式、指数形式)表示出来并互相转化.

(2) 掌握复数的四则运算，了解复数的模与辐角的意义，会进行复数的乘积与商、乘幂与方根的运算，会选取适当的复数表示式简化复数的运算.

(3) 掌握扩充复平面上无穷远点(∞)的概念.

(4) 了解复平面上点集的概念(特别是光滑曲线与区域的定义)，会判断平面图形与其复数表示之间的关系.

【基本概念】

1. 复数

(1) 复数的定义与共轭复数

复数 $z = x + \mathrm{i}y$，x 和 y 为实数，i 为虚数单位，$\mathrm{i}^2 = -1$.

实部 $x = \mathrm{Re}(z)$，虚部 $y = \mathrm{Im}(z)$.

两复数相等：当且仅当它们的实部与虚部分别相等.

记复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数为 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$，它具有性质：

$$(\overline{\bar{z}}) = z;\ z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z);\ z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) \qquad (1.1)$$

(2) 模与辐角

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的模

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0 \tag{1.2}$$

显然有

$$|z|^2 = z\overline{z},\ |\overline{z}| = |z| \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} |y| = |\operatorname{Im}(z)| &\leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \\ &= |x| + |y| \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} |x| = |\operatorname{Re}(z)| &\leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \\ &= |x| + |y| \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.6}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2|| \tag{1.7}$$

例 1　利用共轭复数与模的性质证明复数的三角形不等式(1.6)：

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

证　$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$

$$\begin{aligned}
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + (\overline{z_1\overline{z}_2}) + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

当 $z \neq 0$ 时，实轴正向与复数 z 所表示的向量之间的夹角

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

称为复数 z 的辐角，它是多值的，且有 $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记为

$$\theta_0 = \arg z \quad (-\pi < \theta_0 \leqslant \pi) \tag{1.8}$$

于是

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.9}$$

(3) 三角函数与指数表示

如果称 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数的代数表示形式，那么由 $x = r\cos\theta$ 与 $y = r\sin\theta$ 得复数的三角函数表示式

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.10}$$

利用欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，可将复数 z 转化为指数表示式

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.11}$$

其中 $r = |z|$，$\theta = \mathrm{Arg}z$.

复数的上述三种表示形式可互相转换，而当 $x = x + \mathrm{i}y$ 已知时转换成其他形式的关键是需要计算复数 z 的模 $|z|$ 与辐角的主值 $\theta_0 = \arg z$.

对复数 $z = x + \mathrm{i}y$，模 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$. 其辐角的主值 $\arg z \in (-\pi, \pi]$ 与 $\tan\theta$ 的反正切主值 $\arctan\dfrac{y}{x} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 之间有如下的关系：

$$\begin{array}{c}\arg z \\ (z \neq 0)\end{array} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0;\ (\text{Ⅰ、Ⅳ 象限与正实轴}) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0;\ (\text{正虚轴}) \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \geqslant 0;\ (\text{Ⅱ 象限与负实轴}) \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0;\ (\text{Ⅲ 象限}) \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0.\ (\text{负虚轴}) \end{cases} \tag{1.12}$$

2. 复数的运算,复数的乘积与商,乘幂与方根

用代数表达式表示的两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 在进行加减乘除的四则运算时与两实数的四则运算并无多大区别,只需在运算过程中将 $\mathrm{i}^2 = -1$ 代入,且将实部与实部、虚部与虚部分别归并即可. 两复数的商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ 的运算可先将分母实数化(即分子分母同乘以分母的共轭复数 $\overline{z}_2$) 再运算之.

利用复数的三角表达式或指数表达式来对两个复数(或多个复数)相乘或相除,特别是一个复数的乘幂与开方运算,就要简捷得多.

(1) *两个复数的乘积与商在指数形式下的运算*

设 $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 则

$$z_1 z_2 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.13}$$

所以有

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \tag{1.14}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 - z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2 \text{ ①} \tag{1.15}$$

(1.14)式说明两个复数乘积的模等于这两个复数的模的乘积.

当 $z_2 \neq 0$ 时,有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.16}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2 \text{ ②} \tag{1.17}$$

(1.16)式说明两个复数的商的模等于这两个复数的模的商.

---

① 注意:该式不能写成 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. 而且,由于辐角的多值性,该等式应理解为对左边 $z_1 z_2$ 的辐角的任意一个值,右边必定有一个 $\mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2$ 的值与之对应,反之亦然.

② 它的意义与①类同.

(2) 复数的乘幂与方根

设 $z=re^{i\theta}$，利用公式(1.13)，可得它的 n 次幂

$$z^n = r^n \cdot e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ (n\geqslant 2) \tag{1.18}$$

又因为

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{1.19}$$

在(1.18)与(1.19)式中取 $r=|z|=1$ 得到棣莫佛(de Moivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.20}$$

从(1.18)式可知

$$|z^n| = r^n = |z|^n \tag{1.21}$$

复数的 n 次方根是复数 n 次乘幂的逆运算.

设 $z=re^{i\theta}$ 为已知复数，n 为整数，且 $n\geqslant 2$，则称满足方程

$$w^n = z$$

的所有 w 的值为 z 的 n 次方根，记为

$$w=\sqrt[n]{z} \quad 或 \quad w=z^{\frac{1}{n}}$$

设 $w=\rho e^{i\varphi}$，由 $w^n=z$ 得 $(\rho e^{i\varphi})^n = re^{i\theta}$，$\theta=\mathrm{Arg}z$. 再设 $\theta_0=\arg z$，则有

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

解之得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \varphi=\frac{\theta_0+2k\pi}{n} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \tag{1.22}$$

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.23}$$

例 2 利用两种方法计算 $(-\sqrt{3}-i)^3$.

解 (a) 用复数的代数表示式运算：

$$(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^3=(-\sqrt{3})^3+3(-\sqrt{3})^2(-\mathrm{i})+3(-\sqrt{3})(-\mathrm{i})^2+(-\mathrm{i})^3$$
$$=-3\sqrt{3}-9\mathrm{i}+3\sqrt{3}+\mathrm{i}=-8\mathrm{i}$$

(b) 转化为指数形式运算：

因为 $|-\sqrt{3}-\mathrm{i}|=2$，

$$\arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i})=\arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$$

$$(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^3=(2\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}})^3=8\mathrm{e}^{-\frac{15}{6}\pi\mathrm{i}}=8\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=-8\mathrm{i}$$

显然，当幂次不是很高时用上述两种方法计算复数的乘幂，工作量的差别不大，但如果上题改为求$(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^{11}$的话，那么用方法(b)显然比用方法(a)便捷.

3. 复球面、扩充复平面与无穷远点

用三维空间中的球面投影法来引进扩充的复平面$\overline{\mathbb{C}}$与无穷远点(∞)概念.

设 S 是三维空间中以$(0,0,\frac{1}{2})$为中心、直径为 1 的球面；$N(0,0,1)$为球的北极，$O(0,0,0)$是球的南极，复平面$\mathbb{C}$与球面 S 在 O 点相切. 球面 S 上的点的坐标由 3 个实数(x,y,ξ)确定，其中复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 被认为是点$(x,y,0)$，见图 1－1. 设复平面$\mathbb{C}$上点 $z(x,y,0)$，考虑三维空间中连结 z 与 S 上的北极点 N 的线段 L，则 L 与 S 的交点只有一点为 P，反之，对于 S 上的一点 P_i，就有$\mathbb{C}$上的 z_i与之对应，这就建立了复平面$\mathbb{C}$与球面除 N 以外的一一对应 $z\leftrightarrow P$. 复平面上模为 1 的点

$$z=x+\mathrm{i}y,\ z\in\{z;\ x^2+y^2=1\}$$

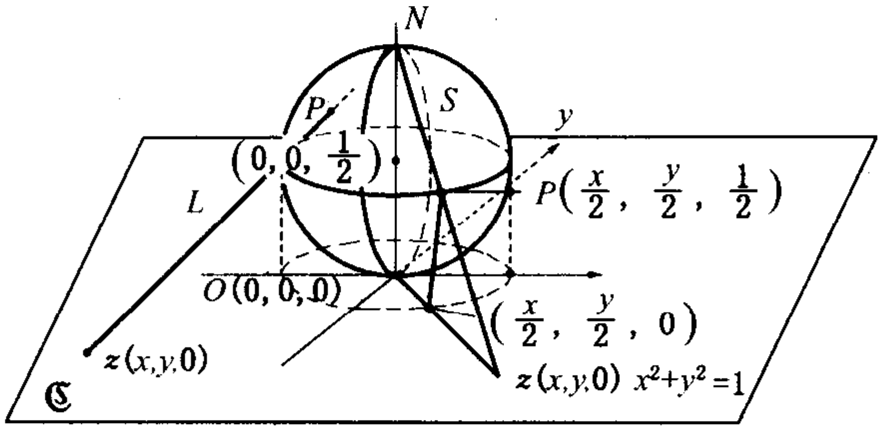


图 1－1　复球面

对应了球面 S 上的点 $P\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是模大于 1 的点，则对应的 P 点落在上半球面内，此时 P 点的竖坐标 $\xi>\frac{1}{2}$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模小于 1，则对应的 P 点落在下半球面内，此时 P 点的竖坐标 $\xi<\frac{1}{2}$.

复数 $z=0$ 对应了南极点 O，当 $|z|\to+\infty$ 时的 z 所对应的 $P\to N$. 复平面 $\mathbb{C}$ 上与球面 S 的北极点 N 相对应的点为无穷远点，记 $z=\infty$，它是模为 $+\infty$ 的点. 有限复平面 $\mathbb{C}$ 加上无穷远点"∞"，称为**扩充的复平面**. 记 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，与扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 相对应的球面 S 称为**复球面**.

4. 复平面上的点集概念，平面图形的复数表示

(1) **曲线的概念**

设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是实变量 t 的实值函数，它们在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1.24}$$

或由定义在区间$[\alpha,\beta]$上的连续复值函数

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{1.25}$$

所描绘的点集C,称为复平面上的一条有向曲线,(1.25)式也称为曲线C的参数表示式.

$A=z(\alpha)=x(\alpha)+\mathrm{i}y(\alpha)$为曲线$C$的起点;$B=z(\beta)=x(\beta)+\mathrm{i}y(\beta)$为曲线$C$的终点.

如果一条曲线以B为起点、A为终点,且逆着C的方向变化,则称它为C的反向曲线,记为C^-.

设$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$与$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$是复平面上两个给定的点,则连接z_0与z_1的直线段C的参数方程为:

$$C:z(t)=[x_0+(x_1-x_0)t]+\mathrm{i}[y_0+(y_1-y_0)t]\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

或

$$C:z(t)=z_0+(z_1-z_0)t\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)\tag{1.26}$$

见图1-2.

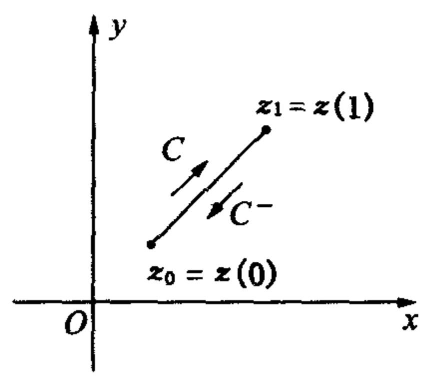


图1-2

显然,C的逆向曲线C^-的参数方程为

$$C^-:\gamma(t)=z_1+(z_0-z_1)t=z(1-t)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)\tag{1.27}$$

一般情况下,如果曲线C的参数方程已知为

$$C:z=z(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

则C^-的参数方程为

$$C^-:\gamma(t)=z(\alpha+\beta-t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{1.28}$$

如果一条曲线具有性质$z(\alpha)=z(\beta)$,则称它为闭曲线.

对于曲线C: $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,当$\alpha\leqslant t_1\leqslant\beta$, $\alpha<t_2\leqslant\beta$, $t_1\neq t_2$时有$z(t_1)\neq z(t_2)$,则称C为简单曲线.(直观上

说简单曲线没有纽结）

如果曲线 C：$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，$x(t)$与 $y(t)$在 $[\alpha,\beta]$上可微，且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，则称 C 为光滑曲线；$x(t)$ 与 $y(t)$在$[\alpha,\beta]$内除有限个点外可微，则称 C 为分段光滑曲线. 今后如无特别说明，曲线都是指光滑曲线或分段光滑曲线.

例 3 找出下列直线段的参数表达式：

(a) 连结原点 $z_0=0$ 到点 $z_1=1+\mathrm{i}$ 的直线段；

(b) 连结点 $z_0=2$ 到 $z_1=1+\mathrm{i}$ 的直线段.

解 (a) $z_0=0$，$z_1=1+\mathrm{i}$，由(1.26)式，

$$C_1: z(t)=z_0+(z_1-z_0)t=(1+\mathrm{i})t$$

$$(0\leqslant t\leqslant 1)\quad(\text{见图 }1-3)$$

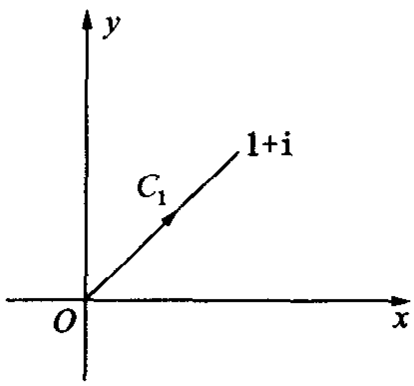


图 1 - 3

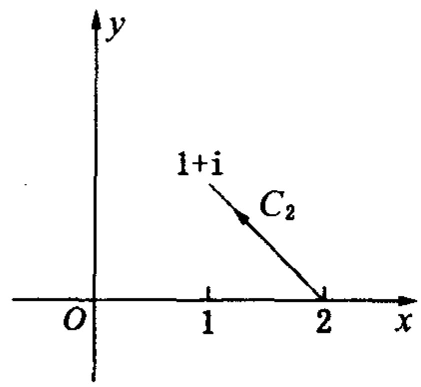


图 1 - 4

(b) $z_0=2$，$z_1=1+\mathrm{i}$，由(1.26)式，

C_2：$z(t)=2+(1+\mathrm{i}-2)t=2+(\mathrm{i}-1)t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$
（见图 1 - 4）

例 4 找出抛物线 $y=x^2$ 上部分曲线的参数表达式：

(a) 抛物线上连结原点 $z_0=0$ 到点 $z_1=2+4\mathrm{i}$ 的曲线段；

(b) 抛物线上连结点 $1+\mathrm{i}$ 到原点的曲线段.

解 设 $x(t)=t$，$y(t)=t^2\ (-\infty<t<+\infty)$ 为抛物线 $y=x^2$ 的参数表示式，即

$$z(t)=t+t^2\mathrm{i}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

(a) $t \in [0, 2]$: $z(0) = 0$, $z_1 = z(2) = 2 + 4\mathrm{i}$.
所以

$$C_1: z(t) = t + t^2\mathrm{i} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2) \quad (见图 1-5)$$

(b) 设以 $z_0 = z(0) = 0$ 为起点，$z_1 = z(1) = 1 + \mathrm{i}$ 为终点的抛物线上一部分是 C_2: $z(t) = t + t^2\mathrm{i}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则所求曲线即是 C_2 的逆向曲线

$$C_2^-: \gamma(t) = z(1-t)$$
$$= (1-t) + (1-t)^2\mathrm{i} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \quad (见图 1-6)$$

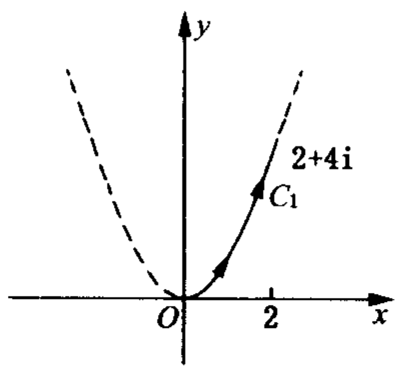


图 1-5

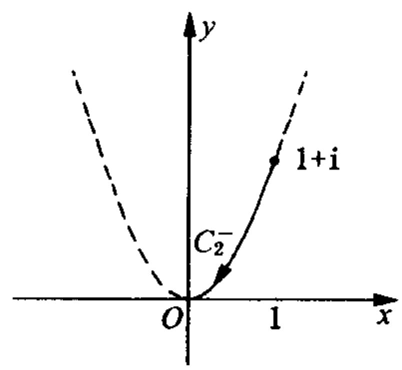


图 1-6

例 5 找出沿着圆周曲线 $|z| = R$ 的逆时针方向以 $-\mathrm{i}R$ 为起点、$\mathrm{i}R$ 为终点的曲线的参数方程.

解 C: $z(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = R(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ (见图 1-7)

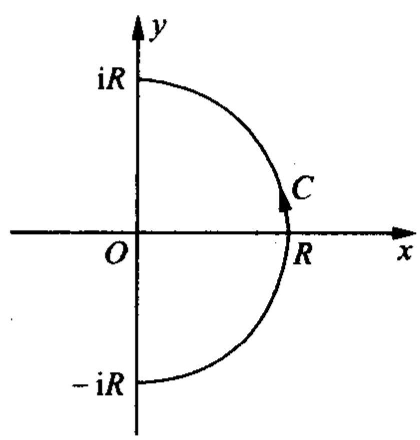


图 1-7

(2) 点 z_0 的邻域

满足 $|z - z_0| < \varepsilon$ 的所有的点的集合 $\{z; |z - z_0| < \varepsilon\}$ 称为 z_0 的 ε-邻域，记为

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z; |z - z_0| < \varepsilon\} \quad (1.29)$$

$D(z_0, \varepsilon) \backslash \{z_0\}$ 称为 z_0 的去心邻域.

(3) 区域

内点：设有集合 E，对于 $z_0 \in E$，存在着包含于 E 内的 z_0 的一个 ε-邻域，则称 z_0 为 E 的一个内点.

外点：设集合 E，对于 z_0，存在着不包含于 E 内的一个 ε-邻域，则称 z_0 为 E 的外点.

边界点：设集合 E 如果 z_0 既不是内点，也不是外点，则称 z_0 是 E 的一个边界点(即 z_0 的任一个 ε-邻域中既有 E 内的点，也有不是 E 内的点).

开集：若点集 E 的点皆为内点，则称 E 为开集.

闭集：一个集合 E 包含了它所有的边界点，则称 E 为闭集.

连通集：如果对于集合 E 内的任意两点都可以用 E 内的一条折线连接起来，则称 E 为连通集.

区域：连通的开集.

闭区域：区域连同它的边界称为闭区域.

有界区域：如果对于区域 D 内的每一点 z，存在 $R > 0$，使得 $|z| \leqslant R$ 成立，则称 D 为有界区域，否则为无界区域.

单连通区域：对于区域 D，若在 D 内的任意闭曲线的内部仍属于 D，则称 D 为单连通区域，否则为多连通区域. 从直观上讲，单连通区域内部没有洞而多连通区域内部有洞.

对区域 D 的边界曲线 C 的正向作如下规定：当点在边界 C 上运动时，区域 D 始终在它的左边. 例如，对于区域 $D = \{z;\ |z| < 1\}$，其边界曲线 $C = \{z;\ |z| = 1\}$ 的正向为逆时针方向；对于区域 $D = \{z;\ \mathrm{Im}z > 0\}$ (上半平面)，其边界曲线 $C = \{z;\ \mathrm{Im}(z) = 0\}$ 的正向为正实轴方向.

例 6 指出下列点集所确定的复平面上的图形.

(a) $D_1 = \{z;\ -1 \leqslant \mathrm{Im}(z) < 2\}$；

(b) $D_2 = \left\{re^{i\theta};\ r > 1 \text{ 与 } \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{3}\right\}$；

(c) $D_3 = \{z;\ |z - 2 - \mathrm{i}| \leqslant 2\}$.

解 (a) $D_1 = \{z;\ -1 \leqslant \mathrm{Im}(z) < 2\}$ 为无界的半开半闭带域(见图 1 - 8(a)).

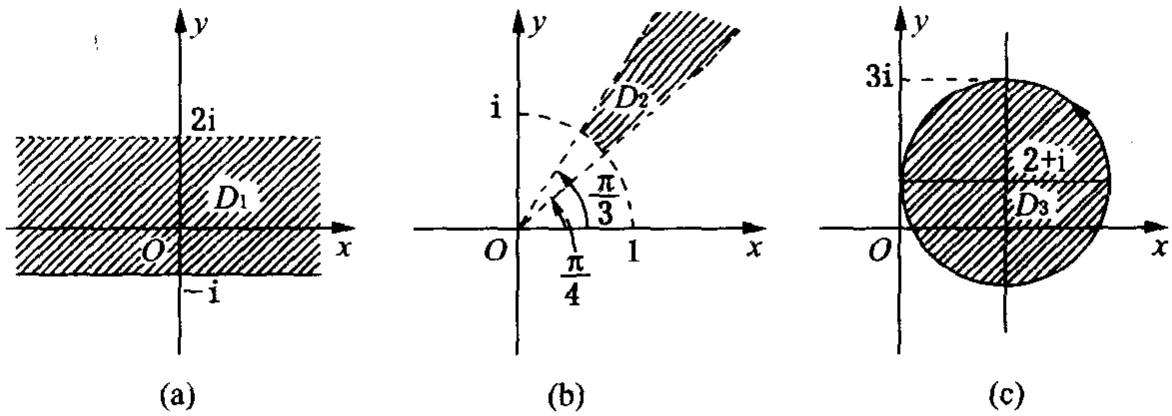


图 1 - 8

(b) $D_2 = \left\{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\ r > 1 \text{ 与} \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}\right\}$ 为无界区域. 它的边界由 $\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\ r = 1 \text{ 与} \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}\right\}$ 与 $\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\ r > 1 \text{ 且 } \theta = \frac{\pi}{4}\right\}$ 与 $\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\ r > 1 \text{ 且 } \theta = \frac{\pi}{3}\right\}$ 三部分构成(见图 1 - 8(b)).

(c) $D_3 = \{z;\ |z - 2 - \mathrm{i}| \leqslant 2\}$ 是有界闭区域,D_3 亦可写为 $D_3 = \{z;\ |z - 2 - \mathrm{i}| \leqslant 2\} = \{z;\ |z - (2 + \mathrm{i})| \leqslant 2\}$. 所以它是以 $2 + \mathrm{i}$ 为中心、半径为 2 的闭圆盘,边界曲线:$C = \{z;\ |z - (2 + \mathrm{i})| = 2\}$,逆时针方向为曲线的正向(见图 1 - 8(c)).

【思考题及解答】

1. 对于复数 z_1, z_2,下述关系式成立吗?

(1) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$;

(2) $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$;

(3) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;

(4) $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2)$;

(5) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}(z)$; $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z) = \mathrm{Re}(z)$.

解 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, $z = x + \mathrm{i}y$.

(1) 成立.

$\because$ $z_1 + z_2 = x_1 + \mathrm{i}y_1 + x_2 + \mathrm{i}y_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$

$\therefore$ $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2 = \mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}z_2$

(2) 成立.

$\because$ $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$

$\therefore$ $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = y_1 + y_2 = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$

(3) 一般不成立,除非 z_1, z_2 在复平面上所表示的向量具有相同的方向,即 $\overrightarrow{Oz_2} = \lambda \overrightarrow{Oz_1}$ ($\lambda > 0$ 实数).

(4) 一般不成立.

$\because$ $z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i}$

$\therefore$ $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$

而 $\mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) = x_1 x_2$, 当 $y_1 y_2 \neq 0$ 时, $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2)$.

(5) 成立.

$\because$ $\mathrm{i}z = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$

$\therefore$ 有 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -y = -\mathrm{Im}(z)$ $\quad \mathrm{Im}(\mathrm{i}z) = x = \mathrm{Re}(z)$

2. 对于任意整数 k, i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2} 和 i^{4k+3} 的值各是多少?

答 $\mathrm{i}^{4k} = (\mathrm{i}^4)^k = 1$; $\mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}^{4k} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$;

$\mathrm{i}^{4k+2} = \mathrm{i}^{4k} \cdot \mathrm{i}^2 = -1$; $\mathrm{i}^{4k+3} = \mathrm{i}^{4k} \cdot \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$.

3. 由指数形式表示的复数 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$, $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$, $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}}$, $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$ 的值各是多少?

答 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$; $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$;

$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}} = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i}$; $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \cos2\pi + \mathrm{i}\sin2\pi = 1$.

4. 验证共轭复数的下列性质:若 z_1, z_2 为两复数,则有

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$;

(4) $\overline{(\overline{z})} = z$;

(5) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $\qquad z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$;

(6) $z=\bar{z}$ 当且仅当 z 是实数；

(7) $z\bar{z}=|z|^2$,因此当 $z\neq 0$ 时有 $z^{-1}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$，试描述 z^{-1} 的几何意义.

解 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，$z=x+\mathrm{i}y$

(1) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$

$$\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)=(x_1-\mathrm{i}y_1)+(x_2-\mathrm{i}y_2)$$
$$=\bar{z}_1+\bar{z}_2;$$

(2) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$

$$\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$$
$$=(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;$$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\dfrac{1}{x_2^2+y_2^2}[(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)]\ (z_2\neq 0)$

$$=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}[(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)]$$

$$\therefore\ \left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}[(x_1x_2+y_1y_2)-\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)]$$
$$=\frac{(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1-\mathrm{i}y_1}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

(4) $\overline{(\bar{z})}=\overline{(x-\mathrm{i}y)}=x+\mathrm{i}y=z$;

(5) $z+\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)=2x=2\mathrm{Re}(z)$;

$z-\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y)=2\mathrm{i}y=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$;

(6) $z=\bar{z}\Leftrightarrow x+\mathrm{i}y=x-\mathrm{i}y\Leftrightarrow 2\mathrm{i}y=0\Leftrightarrow y=0$，即 z 为实数；

(7) 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,其中 $r=|z|\neq 0$，$\theta=\mathrm{Arg}z$,

$$\bar{z}=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ z\bar{z}=r^2=|z|^2$$

令
$$w=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

它说明了 $|z^{-1}|=\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{r}$，$\mathrm{Arg}(z^{-1})=-\theta$.

注：关于映射 $w=\dfrac{1}{z}$，详见本书207页内容，映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 称为倒置映射或倒数映射，它可看成是 $\zeta=\dfrac{z}{|z|^2}$ 与 $w=\bar{\zeta}$ 两个映射的复合映射(如图1-9所示).

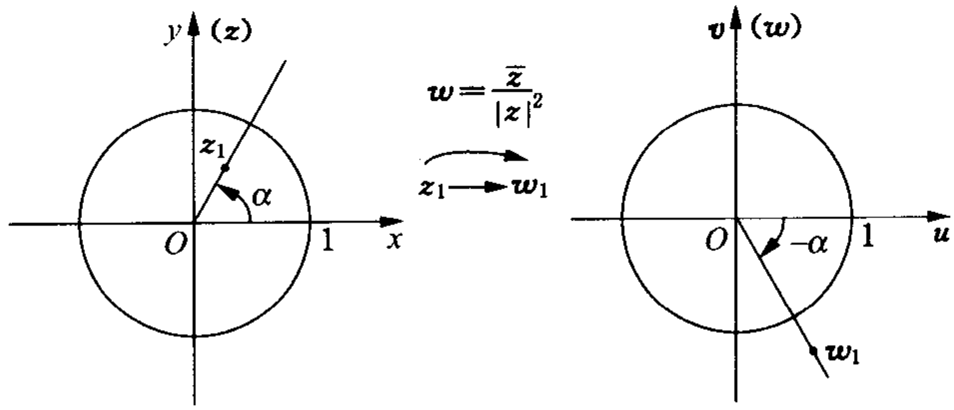


图 1-9 倒置映射

5. 试将复平面上的上半平面和第一象限用复数的点集表示.

解 上半平面：$\{z = re^{i\theta};\ r > 0 且 0 < \theta < \pi\}$，或

$$\{z = x + iy;\ y > 0\} = \{z;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

第一象限：$\left\{z = re^{i\theta};\ r > 0 且 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$，或

$$\{z = x + iy;\ x > 0 且 y > 0\} = \{z;\ \mathrm{Re}(z) > 0 且 \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

6. 试将复平面上以 $z_0 = 8 + 5i$ 为中心、半径为 3 的圆周曲线用复数的点集表示.

解 以 $z_0 = 8 + 5i$ 为中心、半径为 3 的圆周曲线为

$$\{z;\ |z - (8 + 5i)| = 3\}$$

或
$$\{z = x + iy;\ (x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 9\}$$

【习题及解答】

1. 用 $a + ib$ 的形式表示下列复数.

(1) $\dfrac{1+i}{1-i}$；　(2) $(1+i)^3$；　(3) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{3}{1+i}$；　(4) $(2+3i)(4+i)$.

解 (1) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$；

(2) $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = -2(1-i)$；

(3) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{3}{1+i} = -i + \dfrac{3(1-i)}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$；

(4) $(2+3i)(4+i) = 8 - 3 + 14i = 5 + 14i$.

2. 求出下列复数的实部与虚部(其中 $z=x+\mathrm{i}y$).

(1) $\dfrac{1}{z}$;　　(2) $\dfrac{z+1}{3z+2}$;　　(3) z^3.

解 (1) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+\mathrm{i}y}=\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$

$\therefore \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

(2) $$\frac{z+1}{3z+2}=\frac{x+\mathrm{i}y+1}{3(x+\mathrm{i}y)+2}=\frac{(x+1)+\mathrm{i}y}{(3x+2)+\mathrm{i}3y}$$

$$=\frac{[(x+1)+\mathrm{i}y][(3x+2)-\mathrm{i}3y]}{(3x+2)^2+(3y)^2}$$

$$=\frac{1}{(3x+2)^2+(3y)^2}[(3x^2+5x+2+3y^2)-\mathrm{i}y]$$

$\therefore \mathrm{Re}\left(\dfrac{z+1}{3z+2}\right)=\dfrac{3x^2+5x+2+3y^2}{(3x+2)^2+(3y)^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z+1}{3z+2}\right)=\dfrac{-y}{(3x+2)^2+(3y)^2}$.

(3) $$z^3=(x+\mathrm{i}y)^3=x^3+3x^2(\mathrm{i}y)+3x(\mathrm{i}y)^2+(\mathrm{i}y)^3$$

$$=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3),$$

$\mathrm{Re}(z^3)=x^3-3xy^2$, $\mathrm{Im}(z^3)=3x^2y-y^3$.

3. 将下列复数表示为指数形式(或三角形式).

(1) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　　(2) i;

(3) $(1+\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$;　　(4) -1.

解 (1) $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,

由(1.12)式, $\arg z=\arg(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1}+\pi$

$$=-\arctan\sqrt{3}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3},$$

$\therefore -1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$　或　$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

(2) $|\mathrm{i}|=1$, $\arg\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore\ \mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$　或　$\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $$|(1+\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$=2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

$$\arg[(1+\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta]=\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\arctan\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

$\therefore\quad (1+\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}.$

或 $\quad (1+\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right).$

(4) $|-1|=1,\ \arg(-1)=\pi,$

$\therefore\quad -1=e^{\pi\mathrm{i}}$ 或 $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi.$

4. 设 $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，试用指数形式表示复数 z_1z_2 与 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

解 $|z_1|=\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|1+\mathrm{i}|=1$，$\arg z_1=\arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore\ z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，

$$|z_2|=|\sqrt{3}-\mathrm{i}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2.$$

$$\arg z_2=\arg(\sqrt{3}-\mathrm{i})=\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6},$$

$$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}},$$

$\therefore\ z_1z_2=e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot 2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}=2e^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$，$\quad\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{5}{12}\pi\mathrm{i}}.$

5. 求下列各式的值.

(1) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$； (2) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$； (3) $\sqrt{1+\mathrm{i}}$.

解 (1) $\because\ \mathrm{i}=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$，$\quad\therefore\ \sqrt[3]{\mathrm{i}}=e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\mathrm{i}}\ (k=0,1,2).$

(2) $\because\ \sqrt{3}-\mathrm{i}=2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$，$\quad\therefore\ (\sqrt{3}-\mathrm{i})^5=(2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}})^5=2^5\cdot e^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$

或 $\quad(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5=2^5\cdot\left[\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)\right]$

$$=2^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=-16(\sqrt{3}+\mathrm{i}).$$

(3) $\because\ 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，$\quad\therefore\ \sqrt{1+\mathrm{i}}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\mathrm{i}}\ (k=0,1).$

6. 证明在闭单位圆盘 $D=\{z;\ |z|\leqslant 1\}$ 上函数 z^2+1 的最大模为 2.

证 $\because z\in D=\{z;\ |z|\leqslant 1\}$, $\therefore |z^2+1|\leqslant |z|^2+1\leqslant 1+1=2$.

7. 利用棣莫佛(de Moivre)公式(1.2.11),用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 来表示 $\cos3\theta$.

解 由(1.20)式,

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,$$

当 $n=3$ 时,$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta$.

$$\begin{aligned}(\text{左式})\ (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(\mathrm{i}\sin\theta)+3\cos\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^2+(\mathrm{i}\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\\&=\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta\ (\text{右式}).\end{aligned}$$

等式两边的实部相等,得

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta.$$

8. 如果 $a,b\in\mathbb{C}$,证明 $|a-b|^2+|a+b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$,并说明其几何意义.

证 由共轭复数的性质(见本章“思考题及解答”第 4 题)可知

$$\begin{aligned}|a-b|^2&=(a-b)\overline{(a-b)}=(a-b)(\bar a-\bar b)=a\bar a+b\bar b-(\bar ab+a\bar b)\\&=|a|^2+|b|^2-[\bar ab+(\overline{\bar ab})]=|a|^2+|b|^2-2\mathrm{Re}(\bar ab),\end{aligned}$$

同理 $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(\bar ab)$,

$\therefore |a-b|^2+|a+b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.

如果用向量表示两个复数时,复数的加(减)法用向量的加(减)法表示. 由右图可见上述等式的几何意义是:平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍(见图1-10).

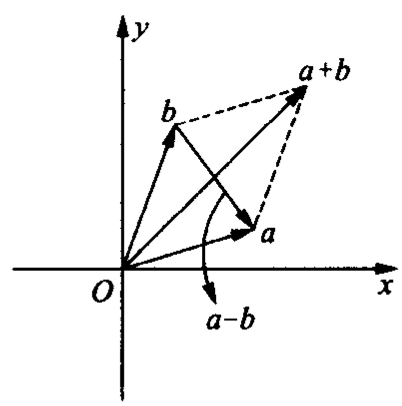


图 1-10 $(a-b)^2+(a+b)^2=2(|a|^2+|b|^2)$

9. 设 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 为实系数多项式,若复数 z_0 是方程 $P(z)=0$ 的一个根,则 $\overline{z_0}$ 也是方程的根.

证 因为 z_0 是方程 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$ 的一个根,其中 $a_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 为实系数,所以有

$$P(z_0)=a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\cdots+a_nz_0^n=0.$$

而
$$\begin{aligned}P(\bar z_0)&=a_0+a_1\bar z_0+a_2(\bar z_0)^2+\cdots+a_n(\bar z_0)^n\\&=a_0+a_1\bar z_0+a_2\overline{z_0^2}+\cdots+a_n\overline{z_0^n}\\&=\overline{a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\cdots+a_nz_0^n}=\overline{P(z_0)}=0,\end{aligned}$$

$\therefore\ \bar{z}_0$ 亦为 $P(z)=0$ 的根.

10. 解下列方程:

(1) $z^4+1=0$;　　　　(2) $(z+\mathrm{i})^5=1$.

解　(1) $z^4+1=0,\ z^4=-1=\mathrm{e}^{(2k\pi+\pi)\mathrm{i}}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$\therefore\ z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k+1}{4}\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,1,2,3)$.

(2) $(z+\mathrm{i})^5=1=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$\therefore\ z_k+\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{5}}\quad(k=0,1,2,3,4),\quad z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{5}}-\mathrm{i}\quad(k=0,1,2,3,4)$.

11. 令 w 是 1 的 n 次方根的一个根($w\neq1$),证明

$$1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0.$$

证　已知 w 是 1 的 n 次方根的一个根,所以有

$$w^n=1,\ 1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=\frac{1-w^n}{1-w}=0\quad(w\neq1).$$

12. 如果复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$,求证 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

证　已知 z_1,z_2,z_3 满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},\tag{1}$$

$$\therefore\qquad \left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|.$$

即

$$|z_3-z_1|^2=|z_2-z_3||z_1-z_2|.\tag{2}$$

由(1)式两边同时减 1,即

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1,$$

得

$$\frac{z_2-\cancel{z_1}-z_3+\cancel{z_1}}{z_3-z_1}=\frac{z_1-\cancel{z_3}-z_2+\cancel{z_3}}{z_2-z_3}.\tag{3}$$

$$\therefore\qquad \left|\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}\right|.$$

即

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_2||z_3-z_1|.\tag{4}$$

(2)、(4)式相除,得　$|z_3-z_1|^3=|z_2-z_3|^3$,

即

$$|z_3-z_1|=|z_2-z_3|.\tag{5}$$

(2)、(4)式相乘,得

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3||z_3 - z_1|, \tag{6}$$

由(5)、(6)式知

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|, \tag{7}$$

∴ 由(5)与(7)式得　$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

[或从证明连结三点 z_1, z_2, z_3 的三角形为等边三角形着手证明.

提示：由(1)知 $\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_1 z_3 z_2$，由(3)知 $\angle z_2 z_3 z_1 = \angle z_1 z_2 z_3$，

∴ $\angle z_2 z_3 z_1 = \angle z_1 z_2 z_3 = \angle z_2 z_1 z_3$. z_1, z_2, z_3 三点构成一个等边三角形.]

13. 或者 $|z| = 1$，或者 $|w| = 1$，证明

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1\ (\bar{z}w \neq 1).$$

证　因为当 $|z| = 1$ 时，有 $z\bar{z} = 1$，

$$\therefore\quad \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{z\bar{z}-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{\bar{z}(z-w)}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = 1.$$

同理可证，当 $|w| = 1$ 时，有 $w\overline{w} = 1$，

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{w\overline{w}-\bar{z}w}\right| = \frac{1}{|w|}\frac{|z-w|}{|\overline{w}-\bar{z}|} = \frac{|z-w|}{|\overline{z-w}|} = 1.$$

14. 指出下列各式中点 z 所确定的平面图形，并作出草图.

(1) $\arg z = \pi$；　　(2) $|z-1| = |z|$；

(3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$；　　(4) $1 < |z+\mathrm{i}| < 2$；

(5) $\mathrm{Im}z > 1$ 且 $|z| < 2$；　　(6) $|z| > 2$ 且 $|z-3| > 1$；

(7) $0 < \arg(z-1) < \dfrac{\pi}{4}$ 且 $|z-1| < 2$；

(8) $\mathrm{Re}z > \mathrm{Im}z$.

解　(1) $\{z;\ \arg z = \pi\}$ 是由原点出发(不包含原点)辐角为 π 的半射线(负实轴)(见图 1-11).

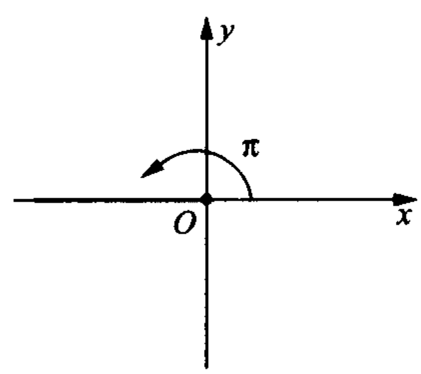


图 1-11　$\{z;\ \arg z = \pi\}$

(2) 令 $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\begin{aligned}|z-1|^2 &= |x+\mathrm{i}y-1|^2 \\ &= (x-1)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2,\end{aligned}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2,$$

$$|z-1|=|z| \Leftrightarrow |z-1|^2=|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2},$$

$\therefore \{z;\ |z-1|=|z|\}$ 表示直线 $\left\{x+\mathrm{i}y;\ x=\dfrac{1}{2}\right\}$.

事实上从模的几何意义可知，$\{z;\ |z-1|=|z|\}$ 表示一个到点$(1,0)$的距离与到原点 O 的距离相等的点的集合，所以它是连结原点 $O(0,0)$与点$(1,0)$的线段的中垂线 $x=\dfrac{1}{2}$（见图 1-12）.

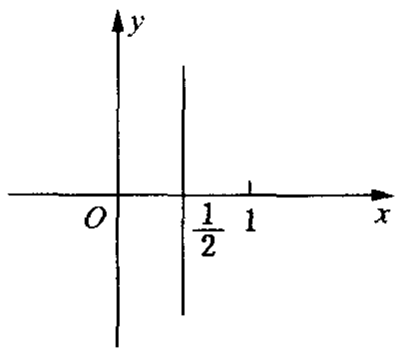


图 1-12　$\{z;\ |z-1|=|z|\}$

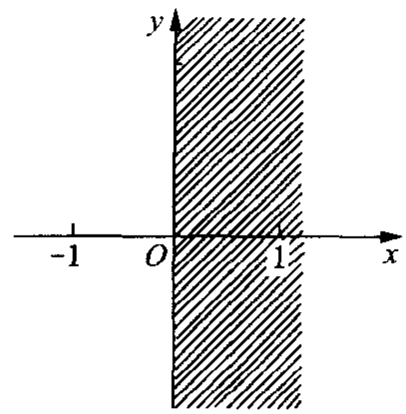


图 1-13　$\left\{z;\ \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1\right\}$

(3) $\left\{z;\ \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1\right\}$即为$\{z;\ |z-1|<|z+1|\}$，表示点 z 到$(-1,0)$的距离大于点 z 到$(1,0)$的距离的集合，所以是右半平面 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0\}$，如图 1-13所示；或满足模的不等式

$$|x+\mathrm{i}y-1|^2<|x+\mathrm{i}y+1|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2<(x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow x>0$$

表示为右半平面 $\{x+\mathrm{i}y;\ x>0\}$.

(4) $\{z;\ 1<|z+\mathrm{i}|<2\}$ 表示以 $-\mathrm{i}$ 为中心、半径在 1 与 2 之间的圆环，如图 1-14 所示；或

$$1<|x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}|^2<4 \Leftrightarrow 1<x^2+(y+1)^2<4,$$

$\therefore$ 是圆环 $\{x+\mathrm{i}y;\ 1<(x-0)^2+(y+1)^2<2^2\}$.

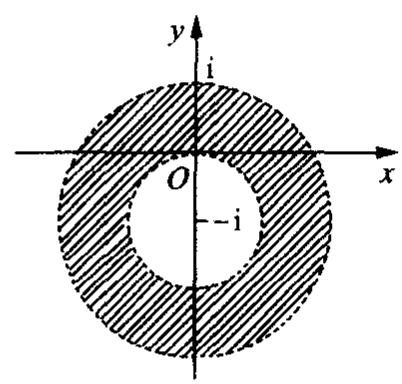


图 1-14　$\{1<|z+\mathrm{i}|<2\}$

(5) $\{z;\ \mathrm{Im}z>1$ 且 $|z|<2\}$ 表示以原点 O 为中

心、2 为半径的圆内部属于虚部大于 1 的弓形部分(见图 1－15).

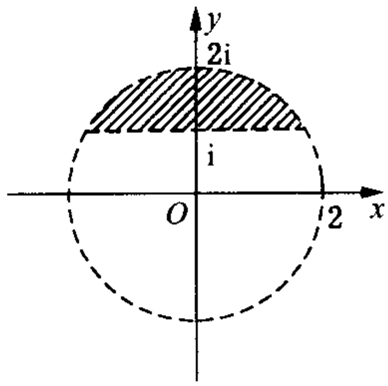


图 1－15　$\{z;\ \mathrm{Im}z>1 \text{ 且 } |z|<2\}$

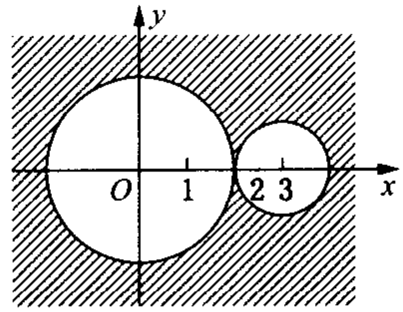


图 1－16　$\{z;\ |z|>2 \text{ 且 } |z-3|>1\}$

(6) $\{z;\ |z|>2 \text{ 且 } |z-3|>1\}$ 表示以原点 O 为中心、2 为半径的圆外部与以(3，0)为中心、1 为半径的圆外部之交集(见图 1－16).

(7) $\left\{z;\ 0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4} \text{ 且 } |z-1|<2\right\}$ 表示以(1，0)为中心、2 为半径的圆内部与自(1，0)出发辐角的主值为 0 与$\frac{\pi}{4}$的两半射线所夹的角域的交集(见图1－17).

(8) $\{z;\ \mathrm{Re}(z)>\mathrm{Im}(z)\}$ 表示复平面第一、三象限分角线的右下方(见图 1－18)，或 $z=x+\mathrm{i}y$，$\mathrm{Re}(z)>\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)>\mathrm{Im}(x+\mathrm{i}y) \Leftrightarrow x>y$ 是集合$\{x+\mathrm{i}y;\ x>y\}$.

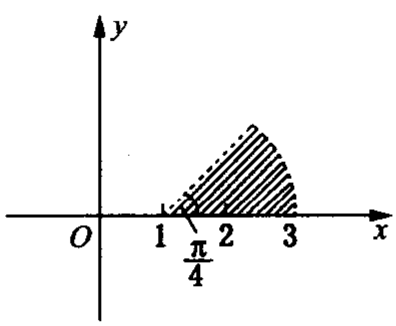


图 1－17　$\left\{z;\ 0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4} \text{ 且 } |z-1|<2\right\}$

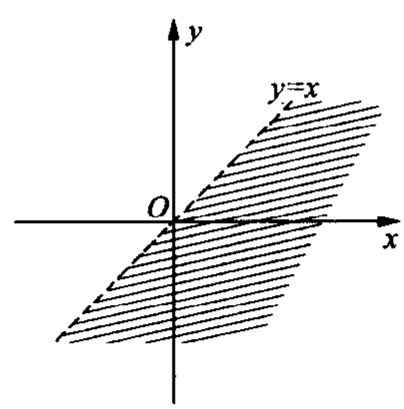


图 1－18　$\{z;\ \mathrm{Re}(z)>\mathrm{Im}(z)\}$

第二章　解析函数

【基本要求】

(1) 理解复变函数(包括反函数与复合函数)的概念,了解复变函数的单射、满射、双射的对应关系.

(2) 了解极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义与函数连续的意义,了解函数 $w=f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 在一点(x_0, y_0)处极限存在或连续的一些等价性定理,掌握自变量增量与函数增量的表示方法,从而理解函数连续的本质.

(3) 了解复变函数在一点处极限存在、连续、可导及解析的联系与区别,从而加深对解析函数的理解.

(4) 知道一个函数 $w=f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 在一点(x, y)处(或在一个区域内)可导的有效验证方法,即函数 $f(z)$在点(x, y)处可导的充要条件是其实部 $u(x, y)$与虚部 $v(x, y)$在(x, y)处可微,且满足柯西-黎曼条件.

(5) 了解解析函数与调和函数的关系,会从已知解析函数的实部(或虚部)求该解析函数.

(6) 理解各基本初等函数的定义,了解其性质及映射关系,会进行基本初等函数的简单数值运算.

【基本概念】

1. 复变函数的概念

定义 2.1 设 D 是复变数 z 的一个集合，对于 D 中的每一个值 z，按照一定的规律，有一个或多个复数 w 的值与之对应，则称 w 为定义在 D 上的复变函数，记作

$$w = f(z)$$

D 称为 f 的定义域，$G = \{w;\ w = f(z),\ z \in D\}$ 称为 f 的值域. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，函数 w 记为 $w = u + \mathrm{i}v$，其中 u, v 是 w 的实部与虚部. 它们是实变量 x, y 的实二元函数 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$，因此，复变函数

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \tag{2.1}$$

描述了从 Z 平面定义域 D 到 W 平面上值域 G 的一个映射.

例 1 验证函数 $w = f(z) = \mathrm{i}z$ 将 Z 平面上直线 $y = x + 1$ 映射到 W 平面上的直线 $v = -u - 1$.

解 设

$$z = x + \mathrm{i}y,\ w = u + \mathrm{i}v,\ u + \mathrm{i}v = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$$

所以有

$$u = -y,\ v = x \quad \text{即} \quad x = v,\ y = -u$$

代入方程 $y = x + 1$ 中得 $-u = v + 1$，即 $v = -u - 1$，所以 $w = \mathrm{i}z$ 将 Z 平面上直线 $\{x + \mathrm{i}y;\ y = x + 1\}$ 映射到 W 平面的直线 $\{u + \mathrm{i}v;\ v = -u - 1\}$.

如果将 z 写成指数形式 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$，则函数 $w = f(re^{\mathrm{i}\theta})$ 又可表示为

$$\begin{aligned} w = f(re^{\mathrm{i}\theta}) &= u(r\cos\theta,\ r\sin\theta) + \mathrm{i}v(r\cos\theta,\ r\sin\theta) \\ &= P(r, \theta) + \mathrm{i}\theta(r, \theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

定义 2.2 设 f 是区域 D 到值域 G 的单值函数，

(1) 如果对于任意 $z_1, z_2 \in D$ 且 $z_1 \neq z_2$，有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 f 是一对一的映射，或称单射.

(2) 如果 $f(D) = G$，则称 f 为从 D 到 G 的满射.

(3) 如果 f 既是 D 到 G 的单射又是满射，则称 f 为 D 到 G 的双向映射，或双射，它是一个一一对应的映射.

(4) 如果 f 是 D 到 G 的双射，对于每个 $w \in G$，只有一个 $z \in D$ 使 $w = f(z)$，则存在着反函数 $z = f^{-1}(w)$ 将 G 映射到 D，即 f^{-1}：$G \to D$.

(5) 如果 $\zeta = g(z)$ 是 D 到 D_1 的双射，$w = f(\zeta)$ 是 D_1 到 G 的双射，则复合函数 $w = f[g(z)]$ 是 D 到 G 的双射.

2. 极限与连续

定义 2.3 设 $w = f(z)$ 在 $\{z;\ 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 中有定义，A 为已知复常数. 如果对于预先给定的 $\varepsilon > 0$，存在着 $\delta > 0$ $(\delta \leqslant \rho)$，使得当 $z \in \{z;\ 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 时 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 成立，则称当 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 的极限存在，且等于 A，记为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A = u_0 + \mathrm{i}v_0 \tag{2.3}$$

其中 $u_0 = \mathrm{Re}(A)$，$v_0 = \mathrm{Im}(A)$.

定理 2.1 设 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 $\{z;\ 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 中有定义，则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$$

当且仅当

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ 与 } \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0 \tag{2.4}$$

定理 2.2 极限 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 存在的充要条件是 $f(z)$ 可表示为

$$f(z) = A + \alpha(z), \quad \text{其中} \lim_{z \to z_0} \alpha(z) = 0$$

定理 2.3 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 与 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[k_1 f(z) + k_2 g(z)] = k_1 A + k_2 B$，其中 k_1, k_2 为复常数.

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = AB$.

(3) 当 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$.

定义 2.4 如果 $f(z)$ 在 z_0 点的一个邻域内有定义，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且等于 $f(z)$ 在 z_0 点的值，即

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{2.5}$$

则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

定理 2.4 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 z_0 点的某个邻域内有定义，则 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续(由定理 2.1 可证).

定理 2.5 设函数 $f(z)$ 与函数 $g(z)$ 在点 z_0 处连续，则

(1) $f(z)\pm g(z)$；

(2) $f(z)g(z)$；

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z_0)\neq 0)$；

(4) $f[g(z)]$ (当 $f(z)$ 在点 $g(z_0)$ 的一个邻域中连续) 在 z_0 点是连续的.

3. 解析函数

定义 2.5 设函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域 $D(z_0, \delta)$ 中有定义，对于 $z\in D(z_0, \delta)\setminus\{z_0\}$，如果 $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 当 $z\to z_0$ 时极限存在，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，称此极限是 $f(z)$ 在 z_0 点的导数，记为 $f'(z_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$，即

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2.6}$$

令 $w=f(z),\ w_0=f(z_0),\ \Delta w=w-w_0=f(z)-f(z_0)$

$$\Delta z=z-z_0,\ 当\ z\to z_0\ 时, \Delta z\to 0$$

此时(2.6)式可改写为

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{2.7}$$

由定理 2.2 知 $\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0)+\alpha(\Delta z)$,其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0$,所以有

$$\Delta w=f'(z_0)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)]=0$$

这说明函数在一点处导数存在则必连续,反之未必成立,请读者自己举例.

复变函数的导数运算法则与微积分学中实函数的导数运算法则相类似,此处只用定理叙述而不再作证明.

定理 2.6 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 点可导,则

(1) $[cf(z)]'=cf'(z)$, c 为复常数;

(2) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$;

(3) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;

(4) $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}\quad(g(z)\neq 0)$;

(5) $\{f[g(z)]\}'=f'[g(z)]\cdot g'(z)\quad$ ($g(z)$ 在 z_0 点可导, $f(\zeta)$ 在 $g(z_0)$ 可导);

(6) $\left(\frac{1}{z^n}\right)'=-\frac{n}{z^{n+1}}\quad$ ($z\neq 0$, n 为正整数);

(7) $\{[f(z)]^n\}'=n[f(z)]^{n-1}\cdot f'(z)\quad$ (n 为正整数).

还可以证明复 n 次多项式 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 在整个复平面上可导. 其中 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$ 是复常数, n 为正整数.

定义 2.6 如果存在着 z_0 的某个邻域，在该邻域中的每个点 z 处，函数 $f(z)$的导数存在，则称函数 $f(z)$在 z_0 点解析；如果 $f(z)$在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上解析，则称 $f(z)$为整函数或全纯函数. 使函数$f(z)$不解析的点，称为解析函数的奇点(或简称奇点).

由导数的定义出发去具体讨论一个复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的解析性，是比较困难的，此处我们设法将其转化为对复变函数的实部 $u(x,y)$与虚部 $v(x,y)$的可微性及它们的一阶偏导数所满足的条件来讨论，这就是下面的定理.

定理 2.7 设 D 是函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的定义域，$z=x+\mathrm{i}y$ 是 D 内一点，则 $f(z)$在点 z 可导的充分必要条件是 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在点(x,y)处可微，且满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & (2.8) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} & (2.9) \end{cases}$$

此时

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \text{ 或 } f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.10}$$

(证明见参考书目[1]定理 2.3.1)

定理 2.8 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件是 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在区域 D 内可微，且满足柯西-黎曼条件(简称 C-R 条件).

例 1 讨论函数 $f(z)=x^3+3xy^2+\mathrm{i}(y^3+3x^2y)$ 的可导性.

解 $f(z)=x^3+3xy^2+\mathrm{i}(y^3+3x^2y)$

$$u(x,y)=x^3+3xy^2,\ v(x,y)=y^3+3x^2y$$

$$u_x=3x^2+3y^2,\ u_y=6xy$$

$$v_y=3y^2+3x^2,\ v_x=6xy$$

可见 u_x，u_y，v_x 与 v_y 都是连续的.

对于所有的(x, y)，显然有 $u_x = v_y$，但若要 $u_y = -v_x$ 成立当且仅当 $6xy = -6xy$ 即 $12xy = 0$，因此C-R条件只有当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 时才能成立. 由定理 2.7 知函数 $f(z)$只在坐标轴 $x = 0$ 或 $y = 0$ 上时是可导的，由定义 2.6 知函数 $f(z)$在$\mathbb{C}$上处处不解析.

例 2 找出常数 a 与 b，使函数 $f(z) = (2x - y) + \mathrm{i}(ax + by)$ 对所有 z 是可导的.

解 $f(z) = (2x - y) + \mathrm{i}(ax + by)$

$$u(x, y) = 2x - y,\ v(x, y) = ax + by$$

由 C-R 条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 = \frac{\partial v}{\partial y} = b,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -a$$

所以得
$$a = 1,\ b = 2$$

$$f(z) = 2x - y + \mathrm{i}(x + 2y) = 2(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = 2z + \mathrm{i}z$$

在$\mathbb{C}$上处处可导，即为整函数.

例 3 证明 $f(z) = |z|^2$ 只在 $z = 0$ 处可导.

证 设 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $|z|^2 = x^2 + y^2$，

$$f(z) = x^2 + y^2,\ u(x, y) = x^2 + y^2 \text{ 与 } v(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

即只在点(0, 0)满足 C-R 条件. 所以 $f(z)$除了在 $z=0$ 处可导外，在全平面$\mathbb{C}$处处不解析.

4. 解析函数与调和函数的关系

设 $U(x, y)$是两个实变量 x 与 y 的实值函数，它的二阶偏导数

连续且满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$U_{xx}+U_{yy}=0$$

则称 $U(x, y)$ 为调和函数.

定理 2.9 设 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 D 上解析,如果 u, v 的所有二阶偏导数连续,则 u 与 v 为 D 内的调和函数.

另一方面,如果在区域 D 内给出一个调和函数 $u(x, y)$,而且我们能找到一个函数 $v(x, y)$,它与 $u(x, y)$ 的一阶偏导数满足C-R条件,则称 $v(x, y)$ 为 $u(x, y)$ 的**共轭调和函数**. 由它们构成的复变函数 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 在 D 内是解析的. 如何构造 $v(x, y)$ 由下面定理给出.

定理 2.10 设 $u(x, y)$ 是点 $z_0(x_0, y_0)$ 的一个邻域中的调和函数,则存在一个定义在这个邻域中的共轭调和函数 $v(x, y)$,使 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 在 z_0 点解析.

证 因 $u(x, y)$ 和由 $u(x, y)$ 构造的共轭调和函数 $v(x, y)$ 必须满足 C-R 条件,我们分两步来构造 $v(x, y)$.

第一步:因为 $v_y=u_x$,所以两边对 y 积分,得

$$v(x, y)=\int u_x(x, y)\mathrm{d}y+c(x) \tag{2.11}$$

其中 $c(x)$ 是只与 x 有关的待定函数,它关于 y 的偏导数为零.

第二步:对(2.11)式两边关于 x 求偏导数

$$-u_y(x, y)=v_x(x, y)=\frac{\partial}{\partial x}\int u_x(x, y)\mathrm{d}y+c'(x) \tag{2.12}$$

比较等式(2.12)两边,解出单变量函数 $c'(x)$ 的表达式,然后求其不定积分得出 $c(x)$ 的表达式,再由(2.11)式即得 $v(x, y)$.

例 4 已知函数 $u(x, y)=xy^3-x^3y$,证明它是一个调和函数且求出其共轭调和函数 $v(x, y)$.

解 $u(x, y)=xy^3-x^3y$

$$u_x=y^3-3x^2y,\ u_{xx}=-6xy,\ u_{xy}=3y^2-3x^2$$

$$u_y = 3xy^2 - x^3,\ u_{yy} = 6xy,\ u_{yx} = 3y^2 - 3x^2$$

因为 u 是二阶连续可微的，且 $u_{xx} + u_{yy} = -6xy + 6xy = 0$，所以 $u(x, y) = xy^3 - x^3y$ 在全平面调和. 设 $v(x, y)$ 为 u 的共轭调和函数. 由(2.11)式知

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int u_x \mathrm{d}y + c(x) \\ &= \int (y^3 - 3x^2y)\mathrm{d}y + c(x) \\ &= \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + c(x). \end{aligned}$$

由(2.12)式 $-u_y = -3xy^2 + x^3 = v_x(x, y) = -3xy^2 + c'(x)$，所以

$$c'(x) = x^3,\ c(x) = \int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + c$$

因此 $u(x, y)$ 的共轭调和函数为

$$v(x, y) = \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{4} + c$$

其中 c 为不定常数.

例 5 设 v 是 u 的共轭调和函数，证明 $h = u^2 - v^2$ 是调和函数.

证 因为 u, v 是调和函数，所以有

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ v_{xx} + v_{yy} = 0$$

又因为 v 是 u 的共轭调和函数，所以满足 C-R 条件，即

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x, \quad 所以 \quad u_x^2 = v_y^2,\ u_y^2 = v_x^2$$

而 $h = u^2 - v^2$ 的二阶偏导数连续，且

$$h_x = 2uu_x - 2vv_x$$

$$h_{xx} = 2[u_x^2 + uu_{xx} - v_x^2 - vv_{xx}]$$

同样有

$$h_{yy} = 2[u_y^2 + uu_{yy} - v_y^2 - vv_{yy}]$$

所以

$$h_{xx} + h_{yy} = 2[u_x^2 + u_y^2 + u(u_{xx} + u_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2) - v(v_{xx} + v_{yy})] = 0$$

5. 初等解析函数

下面将对复变函数的初等函数作出定义，并且将讨论它们的解析性. 复变函数的基本初等函数实际上是微积分中基本初等函数在复域中的推广，因此任何合理的定义应遵循下面两个准则：

(1) 当变量 z 是实数时，复初等函数与之对应的实函数定义应是一致的；

(2) 这些新定义的复初等函数的性质当变量是实数的情况下也应该成立.

(1) 复指数函数

定义 2.7 设 $z = x + iy$，则由 $e^x(\cos y + i\sin y)$ 定义了复指数函数，记

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \quad 或 \quad e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{2.13}$$

因为在 Z 平面上有 $(e^z)' = e^z$ 所以它是整函数，

$$\mathrm{Re}(e^z) = e^x\cos y, \ \mathrm{Im}(e^z) = e^x\sin y$$

$$|e^z| = e^x > 0, \ \mathrm{Arg}(e^z) = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.14}$$

定理 2.11 e^z 为指数函数，则

(1) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ 对所有 $z, w \in \mathbb{C}$ 成立；

$(e^z)^n = e^{nz}$ (n 为整数)；

(2) $e^z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$；

(3) e^z 是周期函数，其周期为 $2n\pi i$ (n 为整数 $n \neq 0$)，即有 $e^{z+2n\pi i} = e^z$；

(4) $e^z = 1$，当且仅当 $z = 2n\pi i$ (n 为整数) 时成立.

证略.

例 6 证明 $|e^{-z}|<1$ 的充要条件是 $\mathrm{Re}(z)>0$.

证 设 $z=x+\mathrm{i}y$

$$|e^{-z}|=|e^{-x-\mathrm{i}y}|=e^{-x}<1\Rightarrow -x<0\Rightarrow x>0$$

反之,若 $\mathrm{Re}(z)>0$,即 $x>0$,必有 $-x<0$,所以

$$|e^{-z}|=e^{-x}<1 \text{ 成立.}$$

例 7 在映射 $w=e^z$ 下,水平半直线 $l=\left\{x+\mathrm{i}y;\ x>0,\ y=\frac{\pi}{3}\right\}$ 的象曲线是什么?

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$,由 $w=e^z$, $\rho e^{\mathrm{i}\varphi}=e^{x+\mathrm{i}y}=e^x\cdot e^{\mathrm{i}y}$. 所以 $\rho=e^x$,当 $x>0$ 时 $\rho>1$,

$$\varphi=y=\frac{\pi}{3}$$

所以 $l=\left\{x+\mathrm{i}y;\ x>0,\ y=\frac{\pi}{3}\right\}$的象曲线为 $L=\left\{\rho e^{\mathrm{i}\varphi};\ \rho>1 \text{ 且 } \varphi=\frac{\pi}{3}\right\}$ 的半射线(见图 2-1).

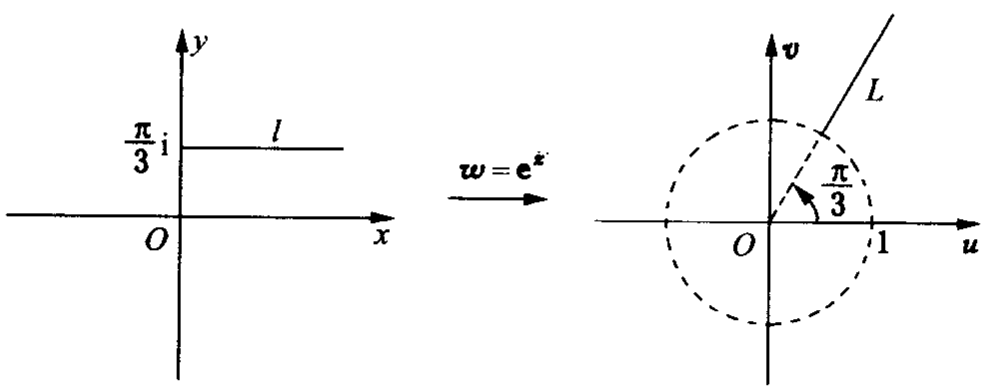


图 2-1 映射 $w=e^z$ 将 l 映射到 L

(2) 复对数函数

定义 2.8 满足方程 $e^w=z\ (z\neq 0)$ 的函数 $w=f(z)$,称为 z 的对数函数,记

$$w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$$

$$= (\ln|z| + \mathrm{i}\arg z) + \mathrm{i}2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.15}$$

记

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \tag{2.16}$$

(2.16)式称为对数函数(2.15)的主支,简称对数主支,它是 Z 平面上 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 到带域 $\{u+\mathrm{i}v;\ u\in\mathbb{R},\ -\pi<v\leqslant\pi\}$ 的双射.

(2.15)式中,对于某个确定的 k,称之为对数函数的第 k 个分支,是 Z 平面上 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 到 W 平面上的带域

$A_{y_k} = \{u+\mathrm{i}v;\ u\in\mathbb{R},\ (2k-1)\pi < v \leqslant (2k+1)\pi\}\ (k = 0, \pm 1, \cdots)$

的一一映射. 对应 $k=0$ 的那个分支就是对数函数主支.

定理 2.12 对数主支 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ 在区域 $\mathbb{C}\setminus\{x+\mathrm{i}y;\ y=0 与 x\leqslant 0\}$ 上解析, 且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \tag{2.17}$$

证略.

例 8 证明 $f(z) = \ln(\mathrm{i}z)$ 在区域 $\mathbb{C}\setminus\{x+\mathrm{i}y;\ y\geqslant 0 且 x=0\}$ 上处处解析,且有 $f'(z) = \frac{1}{z}$.

证 由定理 2.12 知 $w = u+\mathrm{i}v$, $\ln w$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{u+\mathrm{i}v;\ v=0 与 u\leqslant 0\}$ 上解析. 令

$$w = \mathrm{i}z = \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) = -y+\mathrm{i}x = u+\mathrm{i}v$$

所以有

$$y = -u,\ x = v,\ u\leqslant 0,\ v = 0 \Rightarrow y\geqslant 0,\ x = 0.$$

所以 $\mathrm{Ln}(\mathrm{i}z)$在 $\mathbb{C}\setminus\{x+\mathrm{i}y;\ y\geqslant 0 与 x=0\}$ 上解析.

由复合函数求导的链法则,

$$f'(z) = [\ln(\mathrm{i}z)]' = \ln'(\mathrm{i}z)\cdot(\mathrm{i}z)' = \frac{1}{\mathrm{i}z}\cdot\mathrm{i} = \frac{1}{z}.$$

例 9 已知 $\mathrm{Ln}z = 1-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$,求 z 的值.

解 $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi) = 1 - \frac{\pi}{4}\mathrm{i}.$

由实部与实部相等，虚部与虚部相等，得

$$\ln|z| = 1$$

所以 $|z| = \mathrm{e}$，$k = 0$，$\arg z = -\frac{\pi}{4}$，所以有

$$z = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}}{2}(1-\mathrm{i})$$

(3) 复幂函数

定义 2.9 设 μ 是一个复数，由

$$z^{\mu} = \exp[\mu\mathrm{Ln}z] = \mathrm{e}^{\mu\mathrm{Ln}z} \tag{2.18}$$

定义了复幂函数.

该定义是有意义的，如果 z 与 μ 是实数($z>0$)，等式(2.18)给出了实的幂函数的定义.

因为 $\mathrm{Ln}z$ 是多值的，所以 z^{μ} 一般来讲也是多值的. 由 $f(z) = \mathrm{e}^{\mu\ln z}$ 给出的复幂函数称为 z^{μ} 的主支，它是由

$$z^{\mu} = \mathrm{e}^{\mu\mathrm{Ln}z} = \mathrm{e}^{\mu[\ln z + \mathrm{i}2k\pi]} = \mathrm{e}^{\mu\ln z}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi\mu} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.19}$$

中取 $k = 0$ 的那个分支. 对应于不同的 k，即得到复幂函数的 k 个不同分支.

从公式(2.19)可见：

(i) 如果 $\mu = n$ (整数)，$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，

$$\begin{aligned} z^{n} &= \mathrm{e}^{n\mathrm{Ln}z} = \mathrm{e}^{n\ln r + \mathrm{i}n(\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots) \\ &= r^{n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^{n}(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \end{aligned}$$

它是 z 的单值函数.

(ii) 如果 $\mu = \frac{1}{n}$ (n 为 $\geqslant 2$ 的整数)，$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则由

$$z^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln r + \frac{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$= r^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

得到 n 个不同的根值(为有限多值).

一般,如果 μ 为有理数 $\mu = \frac{p}{q}$(其中 p,q 为正整数,且没有公共因子),此时同样有

$$z^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\frac{(\theta + 2k\pi)p}{q} + \mathrm{i}\sin\frac{(\theta + 2k\pi)p}{q}\right]$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, q - 1)$$

它有 q 个根值.

(iii) μ 不是有理数时,z^{μ} 就有无穷多个值.

复幂函数具有如下性质:($z \neq 0$ 时)

(1°) $z^{-\mu} = \frac{1}{z^{\mu}}$;

(2°) $z^{\mu_1} \cdot z^{\mu_2} = z^{\mu_1 + \mu_2}$;

(3°) $\frac{z^{\mu_1}}{z^{\mu_2}} = z^{\mu_1 - \mu_2}$;

(4°) $(z^{\mu})^{b} = z^{b\mu}$,当 b 为整数时.

如果 b 不是整数而是一个任意复数时,等式(4°)一般不成立.对此,我们举例来说明.

例如 $(\mathrm{i}^2)^{\mathrm{i}} \neq \mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$,但$(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^2 = \mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$. 因为

$$(\mathrm{i}^2)^{\mathrm{i}} = (-1)^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(-1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(2k+1)\pi\mathrm{i}]} = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$$

其中 k 为整数.而

$$\mathrm{i}^{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mathrm{Ln}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(4k+1)\pi}$$

其中 k 为整数,即当 $b = \mathrm{i}$ 为复数时有

$$(\mathrm{i}^2)^{\mathrm{i}} \neq \mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$$

但如果 $(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{Ln}(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mathrm{Ln}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(4k+1)\pi} = \mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$,即当 $b = 2$ 为整数时

$$(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^2 = \mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$$

例 10 设 α 是一个实数,证明 z^α 的主支是由等式

$$z^\alpha = r^\alpha \cos\alpha\theta + \mathrm{i} r^\alpha \sin\alpha\theta \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$$

给出,求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\alpha]$.

解 由定义 $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} = \mathrm{e}^{\alpha[\ln r + \mathrm{i}\theta]} \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$

$$= \mathrm{e}^{\ln r^\alpha + \mathrm{i}\alpha\theta} = r^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta} = r^\alpha(\cos\alpha\theta + \mathrm{i}\sin\alpha\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\alpha] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\mathrm{e}^{\alpha \ln z}] = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \cdot (\alpha \ln z)' = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \alpha z^{\alpha-1}$$

例 11 举例说明 $(z_1 z_2)^{\frac{1}{3}}$ 的主支不等于 $(z_1)^{\frac{1}{3}}$ 与 $(z_2)^{\frac{1}{3}}$ 的主支之积.

解 设 $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -1$,则

$$(z_1 z_2)^{\frac{1}{3}} = (-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}(-\frac{\pi}{2}\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

$$(z_1)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{i}^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

$$(z_2)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$$

所以 $(z_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (z_2)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i} + \frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$,显然,

$$(z_1 z_2)^{\frac{1}{3}} \neq (z_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (z_2)^{\frac{1}{3}}$$

(4) 三角函数与双曲函数

定义 2.10 定义

$$\left.\begin{aligned} &\text{余弦函数 } \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \\ &\text{正弦函数 } \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

设 $z = x + \mathrm{i}y$,则

$$\cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cdot \cos \mathrm{i}y - \sin x \sin \mathrm{i}y$$

$$= \cos x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2} - \sin x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2\mathrm{i}}$$

$$= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i\sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

同理有

$$\sin z = \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i\cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

定义 2.11 定义双曲正弦函数 $\text{sh}z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

定义双曲余弦函数 $\text{ch}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ (2.21)

所以有

$$\left.\begin{aligned} \sin z &= \sin x\, \text{ch}y + i\cos x\, \text{sh}y \\ \cos z &= \cos x\, \text{ch}y - i\sin x\, \text{sh}y \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

由于 $e^{\pm z}$, $e^{\pm iz}$在$\mathbb{C}$上解析,所以 $\sin z$, $\cos z$, $\text{sh}z$ 与 $\text{ch}z$ 在全平面$\mathbb{C}$上解析(都为整函数),且有

$$\left.\begin{aligned} &(\sin z)' = \cos z,\ (\cos z)' = -\sin z \\ &(\text{sh}z)' = \text{ch}z,\ (\text{ch}z)' = \text{sh}z \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

由于 $e^{\pm iz}$是以 2π 为周期的函数,所以 $\sin z$ 与 $\cos z$ 也是以 2π 为周期的函数. $e^{\pm z}$是以 $2\pi i$ 为周期的函数,所以 $\text{sh}z$ 与 $\text{ch}z$ 也是以 $2\pi i$ 为周期的函数.

在实的三角函数中有关和角公式、倍角公式、和差化积与积化和差等等一系列恒等式均可推广到复三角函数中来,此处不再一一列举(见本章思考题及解答第 5 题).

但$|\sin z|$与$|\cos z|$并不是有界函数,这是因为

$$\left.\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x + \text{sh}^2 y \\ |\cos z|^2 &= \text{ch}^2 y - \cos^2 x \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

(请读者自己验证).

易得有关 $\sin z$, $\cos z$ 与 $\text{sh}z$, $\text{ch}z$ 之间的另外一些互换公式:

$$\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1,\ \text{ch}^2 z + \text{sh}^2 z = \text{ch}2z;$$

$$\cos(iz) = \text{ch}z,\ \sin(iz) = i\text{sh}z;$$

$$\text{sh}(iz) = i\sin z,\ \text{ch}(iz) = \cos z.$$

(详见本章思考题及解答第 6 题题解).

例 12 解方程 $\cos z = \operatorname{ch}2$

解 由(2.22)式知

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}2$$

所以

$$\begin{cases}\cos x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}2\\ \sin x \operatorname{sh} y = 0\end{cases}$$

由第二个等式可知,或 $x = n\pi$ (n 为整数)或 $y = 0$.

如果选择 $y = 0$,则由第一个等式可得 $\cos x = \operatorname{ch}2 > 1$,显然不成立,舍去 $y = 0$, 所以有 $x = n\pi$. 又因为对所有 y 有 $\operatorname{ch} y \geqslant 1$,所以第一个等式中 $\cos x$ 必须大于零. 取 $x = 2k\pi$ (k 为整数),$\cos 2k\pi \cdot \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}2$ 得 $y = \pm 2$, 所以此方程的解

$$z = 2k\pi \pm 2\mathrm{i} \quad (k \text{ 为整数})$$

例 13 证明 $|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y$

证 由(2.24)式

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y \geqslant \operatorname{sh}^2 y$$

$$|\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x \leqslant \operatorname{ch}^2 y$$

所以

$$\operatorname{sh}^2 y \leqslant |\sin z|^2 \leqslant \operatorname{ch}^2 y$$

$$|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant |\operatorname{ch} y| = \operatorname{ch} y$$

【思考题及解答】

1. 复变函数 $w = f(z)$ 在一点处的极限存在、连续、可导和解析的意义是什么? 它们之间的关系如何? 函数在一点处可导是否必定在该点解析?

答 (1) 函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点极限存在的定义.

函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域 $D = \{z;\ 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 内有意义(注意: 函数可以在 z_0 点没有定义),即如果存在一个确定的复数 A,对于任意预先给定的 $\varepsilon > 0$,找得到正数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \rho)$,使得当 $0 < |z - z_0| <$

δ时，有

$$| f(z) - A | < \varepsilon$$

成立，则称 A 是函数 $w = f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

(2) 函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 处连续的定义.

首先，函数 $w = f(z)$ 必须在 z_0 点有定义（即 $f(z_0)$ 有意义）；其次，函数在 z_0 点的极限是存在的，如果其极限值等于函数在该点的函数值，即

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 处连续.

由上可见，函数在 z_0 点连续，则在该点处极限必存在，反之则不然.

(3) 函数在一点处的导数是由极限形式定义的. 即

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

或

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

由定理 2.2，上式可改写成

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$$

其中 $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z) = 0$，所以

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0.$$

可见，一个函数在一点处可导必在该点连续；反之则不然.

(4) 函数在一点处解析的定义.

如果函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内每一点可导，则称函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点解析. 由此可见，一个函数在一点处解析则必为可导. 反之，函数在一点处可导未必在该点解析（见习题二第 8 题(1)）.

2. 区域内的连续函数是否必是有界函数？请举例说明.

答 在一个区域内的连续函数未必是有界函数.

例如函数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 在区域 $D = \{z;\ | z - 1 | < 1\}$ 内是连续的，但 $|f(z)|$

在 D 内无界.

3. 复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z(x,y)$处可导的等价条件是什么？试用极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$存在与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关性来验证 C－R 条件成立.

答 函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z(x,y)$处可导的充要条件是 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在点 $z(x,y)$处可微，且满足 C－R 条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\text{ 或 }f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

设 $w=f(z)$ 在 $z(x,y)$可导，由定义可知，极限

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在（不管 $\Delta z\to 0$ 的方式如何）. 令

$$\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y,\ f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

$$f(z+\Delta z)=u(x+\Delta x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y+\Delta y)$$

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z)-f(z)&=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v\\&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\\&\quad+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]\end{aligned}$$

$\therefore\ f'(z)=$

$$\lim_{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

由于 $f(z)$在 z 点可导，所以其实部 u 与虚部 v 在点(x,y)处必可微；极限 $f'(z)$存在与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关. 如果取两条不同路径分别讨论时，其极限值应是相同的.

(i) 取 $\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$（即沿着水平方向令 $z\to z_0$），此时

$f'(z)=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\quad(1)$$

(ii) 取 $\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$（即沿着铅直方向令 $z\to z_0$），此时

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)+\mathrm{i}[v(x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)]}{\mathrm{i}\Delta y}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

由(1),(2)得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

4. 如果在区域 D 内任意给出两个调和函数 $u(x,\ y)$与 $v(x,\ y)$,那么由它们分别作为实部与虚部所构成的复变函数 $w=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 在 D 内是否一定是解析函数？请举例说明.

答 不是.除非给出的两个调和函数 $u(x,\ y)$与 $v(x,\ y)$满足 C-R 条件.

例如,设 $u(x,\ y)=x^2-y^2$, $v(x,\ y)=y$. 显然 $u(x,\ y)$与 $v(x,\ y)$在全平面 $\mathbb{C}$ 上是调和的.但是 $f(z)=x^2-y^2+\mathrm{i}y$, 只在点$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$可导,而在全平面 $\mathbb{C}$ 上处处不解析.

5. 验证三角恒等式.

(1) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2$;

(2) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$;

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$;

(4) $\cos(z+\pi)=-\cos z$.

证 由定义 $\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$, $\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$.

(1) $\because$ $\sin(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}]$

$$\sin z_1\cdot\cos z_2=\frac{1}{4\mathrm{i}}[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})\cdot(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})]$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_2-z_1)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}]$$

$$\cos z_1\cdot\sin z_2=\frac{1}{4\mathrm{i}}[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})]$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_2-z_1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}]$$

$$\therefore\ \sin z_1\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2=\frac{1}{2i}[e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}]$$

$$=\sin(z_1+z_2);$$

(2) $$\sin^2 z+\cos^2 z=\frac{-1}{4}(e^{iz}-e^{-iz})^2+\frac{1}{4}(e^{iz}+e^{-iz})^2$$

$$=\frac{-1}{4}(e^{i2z}+e^{-i2z}-2)+\frac{1}{4}(e^{i2z}+e^{-i2z}+2)=1;$$

(3) $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{1}{2i}[e^{i(\frac{\pi}{2}-z)}-e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}]$$

$$=\frac{1}{2i}[ie^{-iz}+ie^{iz}]=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z;$$

(4) $$\cos(z+\pi)=\frac{1}{2}[e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}]$$

$$=\frac{1}{2}(-e^{iz}-e^{-iz})=-\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=-\cos z.$$

注：该题还可用解析函数的唯一性定理证明，见参考书目[1].

6. 验证.

(1) $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$，$\mathrm{ch}^2 z+\mathrm{sh}^2 z=\mathrm{ch}2z$；

(2) $\cos(iz)=\mathrm{ch}z$，$\sin(iz)=i\,\mathrm{sh}z$.

证 由定义 $\mathrm{ch}z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$，$\mathrm{sh}z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$.

(1) $$\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=\frac{1}{4}(e^z+e^{-z})^2-\frac{1}{4}(e^z-e^{-z})^2$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}+2-e^{-2z})=1,$$

$$\mathrm{ch}^2 z+\mathrm{sh}^2 z=\frac{1}{4}(e^z+e^{-z})^2+\frac{1}{4}(e^z-e^{-z})^2$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2z}+2+e^{-2z}+e^{2z}-2+e^{-2z})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2z}+e^{-2z})=\mathrm{ch}2z;$$

(2) $$\cos(iz)=\frac{1}{2}(e^{i(iz)}+e^{-i(iz)})=\frac{1}{2}(e^{-z}+e^{z})=\mathrm{ch}z,$$

$$\sin(iz)=\frac{1}{2i}[e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}]=\frac{1}{2i}[e^{-z}-e^{z}]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}) = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}z.$$

7. $|z^b| = |z|^b$ (b 为复数)成立否?

答 一般不成立,设 $b = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2$ ($\beta_2 \neq 0$),由定义

$$z^b = \mathrm{e}^{b\mathrm{Ln}z} = \mathrm{e}^{(\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2)[\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)]}$$

$$= \mathrm{e}^{\beta_1 \ln|z| - \beta_2(\arg z + 2k\pi)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta_2 \ln|z| + \beta_1(\arg z + 2k\pi)]}$$

$$\therefore |z^b| = \mathrm{e}^{\beta_1 \ln|z| - \beta_2(\arg z + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$= |z|^{\beta_1} \cdot \mathrm{e}^{-\beta_2(\arg z + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

而 $|z|^b = |z|^{\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2} = |z|^{\beta_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2 \mathrm{Ln}|z|}$

$$= |z|^{\beta_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2[\ln|z| + 2k\pi\mathrm{i}]} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$\therefore \beta_2 \neq 0$ 时,$|z^b| \neq |z|^b$.

8. 一个解析函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$,如果恒有 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$,能否得出 u, v 为常数的结论?请举例说明.

答 不能.例如 $f(z) = \mathrm{i}z$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上解析,

$$f(z) = \mathrm{i}z = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$$

$$u(x, y) = -y, \; v(x, y) = x$$

恒有 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$,但是 u, v 不为常数.

【习题及解答】

1. 试问函数 $w = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}z$ 将 Z 平面上的上半平面映射为 W 平面上的什么区域?

答 函数 $w = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}z$ 将 Z 平面上的上半平面 $D = \{z;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 映射为 W 平面上的左半平面 $G = \{w;\ \mathrm{Re}(w) < 0\}$.这是因为

$$u + \mathrm{i}v = w = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}z = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$$

$\therefore u = -y$,当 $z \in D = \{z;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 即 $D = \{x + \mathrm{i}y;\ y > 0\}$ 时 $u < 0$,

$\therefore w \in G = \{u + \mathrm{i}v;\ u < 0\}$,即 $G = \{w;\ \mathrm{Re}(w) < 0\}$.

可见,这是一个旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角的映射.

2. 试问函数 $w = 4z$ 将 Z 平面上的带形区域 $D = \{z = x + \mathrm{i}y;\ 0 < y < 2\}$

映射为 W 平面上的什么区域?

答 函数 $w=4z$ 将 Z 平面上的带域 $D=\{x+\mathrm{i}y;\ 0<y<2\}$ 映射为 W 平面上的带域 $G=\{u+\mathrm{i}v;\ 0<v<8\}$. 这是因为

$$u+\mathrm{i}v=w=4z=4(x+\mathrm{i}y)=4x+\mathrm{i}4y$$

$$v=4y,\text{当 } z\in D=\{x+\mathrm{i}y;\ 0<y<2\}\text{ 时},\ 0<v<8,$$

$$\therefore\ w\in G=\{u+\mathrm{i}v;\ 0<v<8\}.$$

可见,这是一个放大 4 倍的映射(伸缩映射).

3. 试问函数 $w=z+3$ 将圆域 $D=\{z;\ |z|<r\}$ 映射到 W 平面上的什么区域?

答 函数 $w=z+3$ 将圆域 $D=\{z;\ |z|<r\}$ 映射为 W 平面上的圆域 $G=\{w;\ |w-3|<r\}$. 这是因为

$$w=z+3,\ z=w-3,\quad |z|=|w-3|<r$$

所以,当 $z\in D=\{z;\ |z|<r\}$ 时,

$$w\in G=\{w;\ |w-3|<r\}$$

可见,这是一个平移映射.

4. 证明:若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在点 z_0 解析,且

$$f(z_0)=g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$$

则有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

证 它类似于实分析中的洛必达法则(L' Hopital's Rule). 设 z 为 z_0 点近旁的点($z\neq z_0$),已知 $f(z_0)=g(z_0)=0$,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\neq z_0)}}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}\quad\text{(由商的极限性质)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}\quad\begin{array}{l}(\because f(z)\text{ 与 } g(z)\text{ 在 } z_0\text{ 点解析},\\ \therefore\text{ 在 } z_0\text{ 点可导,且 } g'(z_0)\neq 0)\end{array}$$

$$=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

5. 下面各式的极限是否存在？如果存在，求其值.

(1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}$；　　(2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-z\cos z}{z-\sin z}$；　　(3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin|z|}{z}$.

解 (1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z}{1}=1$.（按上题方法做）

(2) $$\lim_{z\to 0}\frac{z-z\cos z}{z-\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z+z\sin z}{1-\cos z}$$

$$=1+\lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{1-\cos z}=1+\lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{2\sin^2\dfrac{z}{2}}$$

$$=1+\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{2\cdot\left(\dfrac{z}{2}\right)^2}=1+2=3.$$

(3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin|z|}{z}$：取

$z=x\to 0^+$，$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin|z|}{z}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$z=x\to 0^-$，$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin|z|}{z}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin|z|}{z}$不存在.

6. 求下列函数的奇点.

(1) $\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$；　　(2) $\dfrac{1}{z^4+a^4}$ $(a>0)$；　　(3) $e^{\frac{1}{z}+z}$；　　(4) $\dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$.

解 (1) 对于函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$，使分母为零的是奇点.

$$z(z^2+1)=0\Rightarrow z=0,\ z=\pm i.$$

$\therefore\ z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i$ 为函数的 3 个奇点.

(2) 对于函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$，使 $z^4+a^4=0$ 的点，即 $z^4=-a^4=a^4e^{\pi i}$ $(a>0)$ 为 $f(z)$的奇点.

$\therefore\ z_k=ae^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$ $(k=0,1,2,3)$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$ 的 4 个奇点.

(3) 对于函数 $e^{\frac{1}{z}+z}=e^{\frac{1}{z}}\cdot e^z$，

$\therefore\ z_1=0$ 与 $z_2=\infty$ 为它的 2 个奇点.

(4) 对于函数 $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{sh}z}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}$，使 $\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}=0$，即 $\mathrm{e}^{2z}=1$ 的点，

$$2z_k=2k\pi\mathrm{i}\quad z_k=k\pi\mathrm{i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

为函数 $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{sh}z}$ 的无穷多个奇点.

7. 证明：若 $f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)\quad(z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$，则其 C-R 条件的极坐标形式为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

且有

$$f'(z)=(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

证 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta)\tag{2}$$

$\because$ $f(z)$解析，$\therefore$ u, v 满足 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta\tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta=r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta\right)$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

同理可证得 $\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$,

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\tag{4}$$

(3) $\times\cos\theta+$ (4) $\times\sin\theta$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}$$

(4) × cosθ − (3) × sinθ 得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial v}{\partial r} - \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\therefore f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \mathrm{i}\left(\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$= (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

8. 讨论下列函数的可导性与解析性.

(1) $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy$；　　(2) $f(z) = x^2 + \mathrm{i}y^2$；

(3) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y$；　　(4) $f(z) = \dfrac{z}{z-\mathrm{i}}$.

解 (1) 因为 $u(x, y) = x^2$，$v(x, y) = xy$，显然 u，v 在 $\mathbb{C}$ 上可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x, \text{由} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \text{则 } 2x = x \Rightarrow x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = y,\ \text{由} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{则 } y = 0.$$

∴ 只有当 $x = 0$，$y = 0$ 时才满足 C-R 条件.

∴ 函数 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}xy$ 只在点 $(x, y) = (0, 0)$ 时可导，而在全平面 $\mathbb{C}$ 上处处不解析.

(2) 因为 $u(x, y) = x^2$，$v(x, y) = y^2$，显然 u，v 在 $\mathbb{C}$ 上可微，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \text{由} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow y = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \text{则} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ 成立}.$$

∴ 只有当 $y = x$ 时才满足 C-R 条件.

∴ 函数 $f(z) = x^2 + \mathrm{i}y^2$ 只在直线 $\{x + \mathrm{i}y;\ y = x\}$ 上可导，而在全平面 $\mathbb{C}$ 上处处不解析.

(3) 因为 $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$，$v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$ 在全平面上可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

满足 C-R 条件，所以 $f(z)$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上处处解析.

(4) 函数 $f(z) = \dfrac{z}{z-\mathrm{i}}$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上除奇点 $z = \mathrm{i}$ 外解析.

9. 如果函数 $f(z)$在区域 D 内解析,且满足下列条件之一,求证 $f(z)$在 D 内必为常数.

(1°) $\overline{f(z)}$在 D 内解析;

(2°) $|f(z)|$或 $\arg f(z)$在 D 内恒为常数;

(3°) $\mathrm{Re} f(z)$或 $\mathrm{Im} f(z)$在 D 内恒为常数;

(4°) $f(z)$为实值函数.

解 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析,

$$\therefore u, v \text{ 满足 C-R 条件} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

(1°) 如果 $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v=U+\mathrm{i}V$ 也在 D 内解析,则

$U=u, V=-v$ 在 D 内也满足 C-R 条件.

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{即} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{即} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{由(1)、(3)} \quad \text{得} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \text{由(2)、(4)} \quad \text{得} \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{array}\right\} \therefore f(z)\text{在 } D \text{ 内恒为常数.}$$

(2°) **证** (i) 设 $|f(z)|=k$, k 为复常数. $k=0$ 时,因为 $|f(z)|^2=0$, $f(z)=u+\mathrm{i}v$,即 $u^2+v^2=0$,所以有 $u\equiv 0$, $v\equiv 0$, 即 $f(z)\equiv 0$ $(z\in D)$.

(ii) $k\neq 0$ 时, $|f(z)|^2=u^2+v^2=k^2$, 两边关于 x, y 求偏导数,得

$$\left.\begin{array}{l} 2uu_x+2vv_x=0 \\ 2uu_y+2vv_y=0 \end{array}\right\}$$

因为 $f(z)$在 D 内解析,所以 u, v 满足 C-R 条件,上式可改写为

$$\begin{cases} uu_x-vu_y=0 \\ vu_x+uu_y=0 \end{cases}$$

解之得

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}}=\frac{0}{u^2+v^2}=0 \qquad u_y=\frac{\begin{vmatrix} u & 0 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}}=\frac{0}{u^2+v^2}=0$$

所以得 $u \equiv c_1$ 常数，同理可得 $v \equiv c_2$（常数）.

$\therefore f(z) = c_1 + \mathrm{i}c_2$ 为常数.

［注：亦可利用本题(1)的结论证，因为 $|f(z)|^2 \equiv c\ (c \neq 0)$，即为

$f(z) \cdot \overline{f(z)} \equiv c,\ \overline{f(z)} = \dfrac{|f(z)|^2}{f(z)} = \dfrac{c}{f(z)}$］.

如果 $\arg f(z)$ 在 D 内恒为常数 c_1（$f(z) \neq 0$，否则 $\arg f(z)$ 不定），

$\because \arg f(z) = \arctan \dfrac{v}{u} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1)$

$\therefore \arctan \dfrac{v}{u} = c$

两边关于 x，y 求偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan \frac{v}{u}\right] = \frac{uv_x - vu_x}{\left[1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right]u^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\arctan \frac{v}{u}\right] = \frac{uv_y - vu_y}{\left[1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right]u^2} = 0$$

得

$$\begin{cases} uv_x - vu_x = 0 \\ uv_y - vu_y = 0 \end{cases}$$

利用 C－R 条件即得

$$\begin{cases} vu_x + uu_y = 0 \\ uu_x - vu_y = 0 \end{cases}$$

因为 $u^2 + v^2 \neq 0$ 所以必有

$$u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y = 0$$

所以 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

(3°) 如果 $\mathrm{Re} f(z) = u \equiv c\ (z \in D)$，则

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$（由 C－R 条件）

$\therefore f(z)$ 在 D 内恒为常数.

如果 $\mathrm{Im} f(z) = v \equiv c\ (z \in D)$，则

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

$\therefore$ $f(z)$在 D 内恒为常数.

(4°) 如果 $f(z)$恒为实数,即 $f(z) \equiv u$, $v = 0$ ($z \in D$). 由(3)可知,$f(z)$在 D 内恒为常数.

10. 如果二元函数 $u(x, y)$与 $v(x, y)$是区域 D 内的调和函数,问

(1) $u(x, y) + v(x, y)$是否仍是 D 内的调和函数?

(2) $u(x, y) \cdot v(x, y)$是否仍是 D 内的调和函数?

答 (1) 是. 因为当 u, v 是区域 D 内的调和函数时,在 D 内有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\because \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}[u + v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}[u + v] = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

从而

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u + v] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[u + v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

在 D 内成立,所以 $u(x, y) + v(x, y)$ 仍是 D 内的调和函数.

(2) 否. 已知 u, v 是区域 D 内的调和函数,所以在 D 内有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\because \ \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot v) = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u \cdot v) = \frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right] = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

同样,$\because \ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(u \cdot v) = v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + u\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$,

$$\therefore \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u \cdot v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u \cdot v) = v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$+ u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

不一定为 0,$u \cdot v$ 在 D 内未必调和. 只有当 u 为常数(或 v 为常数)时,$u \cdot v$才是 D 内的调和函数.

11. 设在区域 D 内有 $F'(z) = \Phi'(z)$ 成立,证明:在 D 内 $F(z) = \Phi(z) + c$,其中 c 是复常数.

证 令 $G(z) = F(z) - \Phi(z)$ ($z \in D$). 因为 $F(z)$ 与 $\Phi(z)$ 在 D 内解析,所以 $G(z)$ 在 D 内解析,且有

$$G'(z) = F'(z) - \Phi'(z) = 0 \ (z \in D)$$

设 $G(z) = u + \mathrm{i}v \ (z \in D)$，由于

$$G'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

由此得到 $u \equiv c_1$ 常数，$v \equiv c_2$ 常数. $G(z)$在 D 内必恒为常数 $c_1 + c_2 = c$，即 $G(z) = F(z) - \Phi(z) \equiv c$，

$\therefore F(z) = \Phi(z) + c$ （其中 c 是复常数）

12. 设 u 为 D 内的调和函数，令 $f = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$，问 $f(z)$是否在 D 内解析？

答 是. 设 $f = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = U + \mathrm{i}V$，则 $U = \frac{\partial u}{\partial x}$，$V = -\frac{\partial u}{\partial y}$. 因为 u 在 D 内调和，所以 u，v 关于 x，y 的二阶偏导数存在且在 D 内连续，且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\because \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \therefore \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\because \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \therefore \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

即 U，V 在 D 内满足 C－R 条件，所以 f 在 D 内解析.

13. 如果函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，且在 D 内有 $au + bv = c$，其中 a,b,c 是不全为零的复常数，证明 $f(z)$在 D 内恒为常数.

证 已知 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，所以在 D 内 u，v 可微，且满足 C－R条件：$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. 已知在 D 内有 $au + bv = c$，等式两边关于 x，y 求偏导数，

$$\begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$\because a^2 + b^2 \neq 0$ （已知 a,b,c 不同时为零，如果 a,b 为 0，则 c 也必为 0），

$\therefore$ 必有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$，亦有$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$为零.

$\therefore$ u, v 恒为常数, $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

14. 已知解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的实部(或虚部),求该解析函数,已知:

(1) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$;　　(2) $v=4xy$, $f(0)=1$;

(3) $u=\mathrm{e}^x\sin y$;　　(4) $v=\arctan\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$.

解　(1) 已知 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$,因为 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{ii}$$

由(ii)式

$$u(x,y)=\int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{-x}{x^2+y^2}+\varphi(x) \tag{iii}$$

将(iii)式两边对 x 求导,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x) \tag{iv}$$

比较(i),(iv)得 $\varphi'(x)=0$,

$$\therefore\ \varphi(x)\equiv c,\ \therefore\ u(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}+c.$$

$$f(z)=-\frac{x}{x^2+y^2}+c+\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$$

已知 $f(2)=0$,

$$\therefore\ 0=f(2)=-\frac{2}{2^2+0}+c+0=-\frac{1}{2}+c,\ \therefore\ c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ f(z)=\frac{1}{2}-\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}.$$

(2) 已知 $v=4xy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=4x \tag{i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-4y \tag{ii}$$

由(i)式,

$$u(x,y)=\int 4x\mathrm{d}x=2x^2+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -4y, \therefore \varphi(y) = -2y^2 + c$$

$$u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + c, f(z) = 2(x^2 - y^2) + c + \mathrm{i}4xy$$

$$\because 1 = f(0) = c$$

$$\therefore f(z) = 2(x^2 - y^2) + 1 + \mathrm{i}4xy = 2[x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy] + 1 = 2z^2 + 1.$$

(3) 已知 $u = \mathrm{e}^x \sin y$,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \cos y \tag{i}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \sin y \tag{ii}$$

由(ii)式,

$$v(x, y) = \int \mathrm{e}^x \sin y \mathrm{d}y = -\mathrm{e}^x \cos y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\mathrm{e}^x \cos y + \varphi'(x) \tag{iii}$$

由(i),(iii)式,

$$\varphi'(x) = 0, \varphi(x) \equiv c, v(x, y) = -\mathrm{e}^x \cos y + c$$

$$f(z) = \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{i}[-\mathrm{e}^x \cos y + c]$$

$$= -\mathrm{i}[\mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y] + \mathrm{i}c = -\mathrm{i}\mathrm{e}^z + \mathrm{i}c.$$

(4) 已知 $v(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ $(x > 0)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{ii}$$

由(i)式,

$$u(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \varphi(y) \tag{iii}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) \tag{iv}$$

比较(ii),(iv)式得 $\varphi'(y) = 0$,

$$\therefore \varphi(y) \equiv c \quad \therefore u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + c$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + c + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x}$$

或
$$f(z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + c + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x} \quad (x > 0)$$

$$= \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + c \qquad (z = x + \mathrm{i}y)$$

$$= \ln z + c.$$

15. 设函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + \mathrm{i}(cx^2 + dxy + y^2)$，试问当实数 a,b,c,d 取何值时，$f(z)$在 Z 平面上处处解析.

解 函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + \mathrm{i}(cx^2 + dxy + y^2)$

$$u(x, y) = x^2 + axy + by^2$$

$$v(x, y) = cx^2 + dxy + y^2 \ (a,b,c,d \text{ 均为实数})$$

在$\mathbb{C}$上可微. 要 u, v 满足 C-R 条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + ay = \frac{\partial v}{\partial y} = dx + 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ax + 2by = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(2cx + dy)$$

此时必须有

$$a = 2,\ d = 2,\ c = -\frac{a}{2} = -1,\ b = -\frac{d}{2} = -1$$

所以要使 $f(z)$在 Z 平面上解析，必须取

$$a = 2,\ b = -1,\ c = -1,\ d = 2$$

16. 试给出满足下列条件的函数：

(1) 在 Z 平面上处处连续，但处处不可导的函数.

(2) 在 Z 平面上只有一点处可导，但处处不解析的函数.

解 (1) 函数 $f(z) = \bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

$u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ 在 Z 平面上处处连续，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\therefore$ $f(z)$在 Z 平面上处处连续，但处处不可导.

(2) 函数 $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

$u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$ 在 Z 平面上可微，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

只有当$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$时满足C-R条件，所以函数只在(0，0)点可导，但在全平面$\mathbb{C}$上处处不解析.

17. 求下列各值：

(1) $\mathrm{i}^{1+\mathrm{i}}$； (2) $\cos(2-\mathrm{i})$； (3) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$； (4) $(1-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$；

(5) $|e^{r_0 e^{\mathrm{i}\theta_0}}|$.

解 (1) $\mathrm{i}^{1+\mathrm{i}}=e^{(1+\mathrm{i})\mathrm{Ln}\mathrm{i}}=e^{(1+\mathrm{i})[\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(2k+\frac{1}{2}\pi)]}=e^{(1+\mathrm{i})(2k+\frac{1}{2})\pi\mathrm{i}}$

$$=e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}\cdot e^{(2k+\frac{1}{2})\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(2) $\cos(2-\mathrm{i})=\cos2\cdot\cos\mathrm{i}+\sin2\cdot\sin\mathrm{i}=\cos2\cdot\mathrm{ch}1+\mathrm{i}\sin2\cdot\mathrm{sh}1$

(3) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}[\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi]$

$$=\ln5+\mathrm{i}\left[\arctan\frac{4}{-3}+(2k+1)\pi\right]$$

$$=\ln5+\mathrm{i}\left[-\arctan\frac{4}{3}+(2k+1)\pi\right]$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(4) $(1-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})}=e^{\mathrm{i}[\ln(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}(2k-\frac{1}{4})\pi]}$

$$=e^{\mathrm{i}[\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}(2k-\frac{1}{4})\pi]}=e^{(\frac{1}{4}-2k)\pi}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\ln2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(5) $|e^{r_0 e^{\mathrm{i}\theta_0}}|=|e^{r_0(\cos\theta_0+\mathrm{i}\sin\theta_0)}|=e^{r_0\cos\theta_0}$

18. 写出下列函数的实部与虚部：

(1) e^{3z+2}； (2) $\sin(e^z+1)$； (3) $e^{\mathrm{i}-2z}$； (4) $e^{\frac{1}{z}}$.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$,

(1) $e^{3z+2}=e^{3(x+\mathrm{i}y)+2}=e^{3x+2}\cdot e^{\mathrm{i}3y}=e^{3x+2}[\cos(3y)+\mathrm{i}\sin(3y)]$

$\mathrm{Re}(e^{3z+2})=e^{3x+2}\cos(3y)$，$\mathrm{Im}(e^{3z+2})=e^{3x+2}\sin(3y)$.

(2) $\sin(e^z+1)=\sin[e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)+1]$

$$=\sin[(e^x\cos y+1)+\mathrm{i}(e^x\sin y)]$$

$$=\sin(e^x\cos y+1)\cdot\cos[\mathrm{i}(e^x\sin y)]$$
$$+\cos(e^x\cos y+1)\cdot\sin[\mathrm{i}(e^x\sin y)]$$

$$=\sin(e^x\cos y+1)\cdot\mathrm{ch}(e^x\sin y)$$
$$+\mathrm{i}\cos(e^x\cos y+1)\cdot\mathrm{sh}(e^x\sin y)$$

$\therefore\ \mathrm{Re}[\sin(e^z+1)] = \sin(e^x\cos y+1)\mathrm{ch}(e^x\sin y)$

$\mathrm{Im}[\sin(e^z+1)] = \cos(e^x\cos y+1)\mathrm{sh}(e^x\sin y)$

(3) $e^{i-2z} = e^{i-2(x+iy)} = e^{-2x+i(1-2y)}$

$$= e^{-2x}[\cos(1-2y)+i\sin(1-2y)]$$

$\therefore\ \mathrm{Re}(e^{i-2z}) = e^{-2x}\cos(1-2y)$,

$\mathrm{Im}(e^{i-2z}) = e^{-2x}\sin(1-2y)$.

(4) $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = \exp\left(\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\exp\left(\dfrac{-iy}{x^2+y^2}\right)$

$$= \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\left(\cos\frac{y}{x^2+y^2} - i\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$\therefore\ \mathrm{Re}\,(e^{\frac{1}{z}}) = \exp\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$\mathrm{Im}\,(e^{\frac{1}{z}}) = -\exp\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

19. 下列各关系式是否成立？

(1) $(\overline{e^z}) = e^{\bar z}$； (2) $(\overline{\ln z}) = \ln\bar z$； (3) $(\overline{\cos z}) = \cos\bar z$.

解 设 $z = x+iy$

(1) $e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$

$(\overline{e^z}) = e^x\cos y - ie^x\sin y$

$e^{\bar z} = e^{x-iy} = e^x\cos y - ie^x\sin y$

$\therefore\ (\overline{e^z}) = e^{\bar z}$.

(2) 只有当 $\arg z \neq \pi$ 时成立，这是因为

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi)$$

(i) 当 $\arg z = \pi$ 时，$\ln z = \ln|z| + i\pi$，$(\overline{\ln z}) = \ln|z| - i\pi$. 又因为此时 z 落在负实轴上，所以有

$$\bar z = z,\ \ln\bar z = \ln|\bar z| + i\arg\bar z = \ln|z| + i\pi.$$

$\therefore\ (\overline{\ln z}) \neq \ln\bar z$.

(ii) 当 $\arg z \neq \pi$ 时，有 $\arg\bar z = -\arg z$，$\therefore\ (\overline{\ln z}) = \ln\bar z$.

(3) $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cdot\cos iy - \sin x\sin iy$

$$= \cos x\,\mathrm{ch}y - i\sin x\,\mathrm{sh}y$$

$(\overline{\cos z}) = \cos x\,\mathrm{ch}y + i\sin x\,\mathrm{sh}y$

而 $\cos\bar{z} = \cos(x - \mathrm{i}y) = \cos x\cos(\mathrm{i}y) + \sin x\sin(\mathrm{i}y)$

$= \cos x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}y$

$\therefore\ (\overline{\cos z}) = \cos\bar{z}.$

20. 求解方程：

(1) $e^z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$;　(2) $\mathrm{sh}z = \mathrm{i}$;　(3) $\ln z = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$.

解　(1) $e^z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$:

$\therefore\ z_k = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}) = \ln|1 + \sqrt{3}\mathrm{i}| + \mathrm{i}[\arg(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}) + 2k\pi]$

$= \ln 2 + \mathrm{i}(\arctan\sqrt{3} + 2k\pi)$

$= \ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $\mathrm{sh}z = \mathrm{i}$:

$\because\ \sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}z = \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = -1$,　$\therefore\ \mathrm{i}z_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$z_k = \left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right)\mathrm{i}\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(3) $\ln z = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$:

$\because\ \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$,　$\therefore\ |z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, $z = e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.

第三章 复变函数积分

【基本要求】

(1) 理解复积分的概念.它是一个和式的极限.知道一个函数$f(z)$在光滑曲线 C 上连续时,它是可积的.掌握曲线参数化方法,以此将复积分计算转化为一元复值函数的定积分计算.

(2) 掌握复积分的性质.如复积分的线性性质、积分曲线为分段光滑曲线上的积分和的性质、反向曲线上的复积分性质等,特别是积分的模的估计式.

(3) 理解柯西积分定理,了解多连通区域边界上的柯西积分定理的意义.理解积分的形变定理(它常常是把函数在一般曲线上的复积分转化为可参数化曲线上的复积分,从而用来简化复积分的计算),为第五章留数定理作理论准备.

(4) 理解原函数定理,知道一个单连通区域 D 内的解析函数,在连结 D 内两点 z_1 与 z_2 的曲线 C 上的积分,只与 z_1 与 z_2 有关而与路径 C 无关.

(5) 理解柯西积分公式与高阶导数的柯西积分公式.由高阶导数的柯西积分公式可知,在一个区域内解析的函数是无穷阶可微的,同时会利用柯西积分公式与高阶导数的柯西积分公式计算某些类型的复积分.

(6) 从柯西不等式、柳维尔定理与代数学基本定理的讨论中了解如何运用复变函数的方法解决其他数学领域中的问题,从而拓宽思路,扩大知识领域.

【基本概念】

1. 复积分的定义及其性质

定义 3.1 设有向曲线 C

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

以 $a = z(\alpha)$ 为起点，$b = z(\beta)$ 为终点. $f(z)$ 在 C 上有定义. 将 C 任意分割成 n 个子弧段（见图3－1），分点为 $a = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = b$.

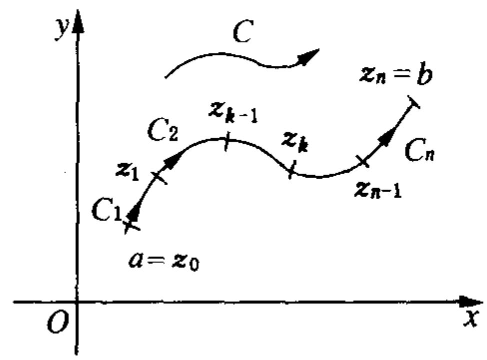


图 3－1 有向曲线 C 的分割

在子弧段 $C_k = \widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上任取一点 ζ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 作出和式

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = z(t_k) - z(t_{k-1})\ (k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\zeta_k = z(\tau_k)\ (t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k)\ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

如果记 Δs_k 是 C_k 的长度，令 $\delta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta s_k$，当分点无限增多，$n \to \infty$ 且 $\delta \to 0$ 时，上述和式极限存在，且为 S，则称函数 $f(z)$ 在 C 上可积，记为

$$S = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{3.1}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \rho\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)]\frac{z(t_k) - z(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \tag{3.2}$$

（其中 $\rho = \max|\Delta t_k|$，当 $\delta \to 0$ 时 $\rho \to 0$, $\tau_k \to t_k$）

定理 3.1 设函数 $f(z)$在光滑曲线 C 上连续，C 的参数表示式

为 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，则 $f(z)$ 在 C 上可积，由(3.2)式可知

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

（立即可得复积分的计算公式——复值函数的定积分计算方法）

如果 C 是闭曲线，积分记号亦可写为 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

如果 C 的表达式比较简单，积分记号下的 C 也可直接标出，例如当 C 是逆时针方向的单位圆周 $\{z;\ |z|=1\}$ 时，$f(z)$ 在 C 上的复积分不妨写成 $\oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$.

例 1　给出图 3-2 中曲线 C_1 与 C_2 的参数表示式.

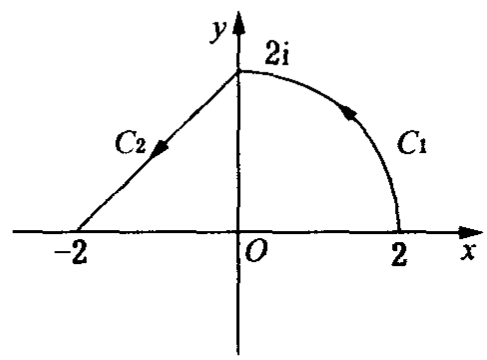


图 3-2　C_1 与 C_2

解　C_1：$z_1(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$\because$ $C^-{}_2$：$z_2(t) = t - 2 + t\mathrm{i}$

$$0 \leqslant t \leqslant 2$$

$$\therefore C_2: \gamma(t) = z_2(\alpha+\beta-t) = z_2(2-t) = 2-t-2+(2-t)\mathrm{i}$$
$$= -t + (2-t)\mathrm{i} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2)$$

或用

$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \ (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$C_2: z(t) = 2\mathrm{i} + (-2-2\mathrm{i})t$$
$$= -2t + 2\mathrm{i}(1-t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

例 2　计算 $\int_C |z-1|^2\mathrm{d}z$，其中 C 是上半单位圆 $|z|=1$（逆时针方向）.

解　设 C：$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$　$(0 \leqslant t \leqslant \pi)$，$z'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

$$\int_C |z-1|^2 dz = \int_0^\pi |e^{it}-1|^2 ie^{it} dt$$

$$= \int_0^\pi [(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t] ie^{it} dt$$

$$= 2i\int_0^\pi (1-\cos t)(\cos t + i\sin t) dt$$

$$= 2i\int_0^\pi [\cos t - \cos^2 t + i(\sin t - \sin t \cos t)] dt$$

$$= -i\pi - 4 = -4 - i\pi$$

公式(3.3)对于计算复积分的值是非常重要的.首先,它使复变函数沿曲线 C 的复积分转化为在实区间上求一个复值函数(实部与虚部均为实值函数)的定积分;其次,不管我们如何选择曲线 C 的参数表示式,由定理(3.1)知,只要 $f(z)$在 C 上连续,则其结果相同.

例 3 求 $\int_C \frac{1}{z-2} dz$,其中 C 是中心在 2、半径为 1 的上半圆周(逆时针方向).

解 (i) 设 C: $z(t) = 2 + e^{it} (0 \leqslant t \leqslant \pi)$,由定理 3.1

$$\because f(z) = \frac{1}{z-2}$$

$$\therefore f[z(t)] = \frac{1}{z(t)-2} = \frac{1}{2+e^{it}-2} = e^{-it},\ z'(t) = ie^{it}$$

$$\therefore \int_C \frac{1}{z-2} dz = \int_0^\pi e^{-it} \cdot ie^{it} dt = \pi i$$

(ii) 如果 C 的参数表示式选为

$$C: z(t) = 2 + e^{i\pi t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

此时 $$\int_C \frac{1}{z-2} dz = \int_0^1 \frac{1}{z(t)-2} z'(t) dt = \int_0^1 e^{-i\pi t} \cdot i\pi e^{i\pi t} dt = \pi i$$

可见,(i)与(ii)结果是相同的.

复积分的性质

(1) 如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在曲线 C 上可积，则它们的和在 C 上也可积，且

$$\int_C [f(z)+g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_C g(z)\mathrm{d}z$$

(2) 设 k 为复常数，$f(z)$ 在 C 上可积，则常数可以提到积分记号外面，即

$$\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

(3) 设 $C=C_1+C_2$（C_1 的终点是 C_2 的起点），$f(z)$ 在 C 上可积，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

且可推广到 C 是由有限段分段光滑曲线构成的情况.

(4) 设 $f(z)$ 在 C 上可积，C^- 是 C 的反向曲线，则

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

(5) C 若有两种形式的参数化表示，$f(z)$ 在 C 上可积，

$$C:\ z=z_1(t) \quad (\alpha_1\leqslant t\leqslant\beta_1)$$

$$C:\ z=z_2(t) \quad (\alpha_2\leqslant t\leqslant\beta_2)$$

则

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[z_1(t)]z_1'(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f[z_2(t)]z_2'(t)\mathrm{d}t$$

(6) 如果 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 C 上连续（由定理 3.1 知，$f(z)$ 在 C 上可积），则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML$$

其中 L 是曲线 C 的长度，$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$.

例 4 利用性质(6)，证明 $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{5}}$，其中 C 是 2 到 $2+i$ 的直线段.

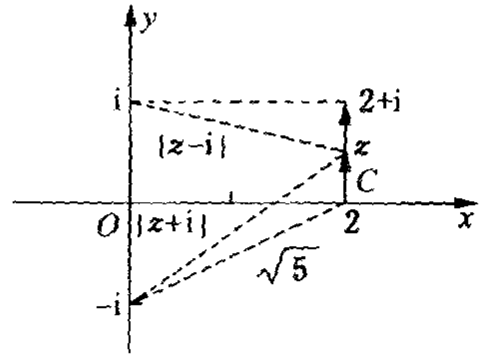


图 3-3　$|z-i|$ 与 $|z+i|$

解　$|z^2+1|=|z-i|\cdot|z+i|$，$|z-i|$ 与 $|z+i|$ 表示了曲线上的点 z 分别到 i 与 $-i$ 的距离(见图3-3).

从几何上观察：当 $z\in C$ 时，$|z-i|\geqslant 2$，$|z+i|\geqslant\sqrt{5}$，因此有

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{z^2+1}\right|=\frac{1}{|z-i||z+i|}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{5}}(=M),\ z\in C$$

曲线长 $L=|2+i-2|=1$，所以

$$\left|\int_C\frac{1}{z^2+1}dz\right|\leqslant ML=\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

例 5 证明 $\int_{C_1} z dz=\int_{C_2} z dz$. 其中 C_1 为连结 $-(1+i)$ 到 $3+i$ 的直线段(见图 3-4). C_2 为连结 $-(1+i)$ 到 $3+i$ 的抛物线 $x=y^2+2y$ 上的一部分(见图 3-5).

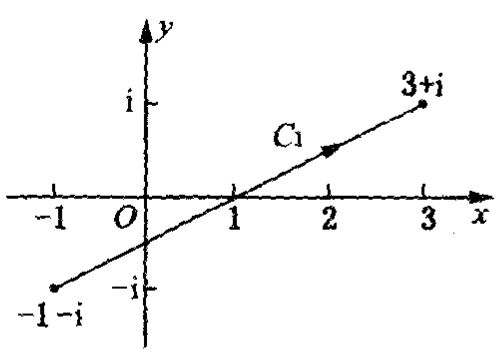


图 3-4

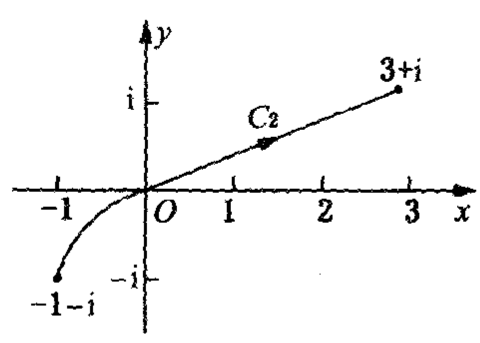


图 3-5

证　C_1 是连接 $-(1+i)$ 与 $3+i$ 的直线段，它可在直线 $y=\frac{1}{2}x-$

$\frac{1}{2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 3)$ 上截取而得，它的参数表示式

$$C_1\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2}(t-1) \end{cases} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 3)$$

或　C_1：$z_1(t) = t + \frac{1}{2}(t-1)\mathrm{i} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 3)$[注]

$$z_1'(t) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\int_{C_1} z\mathrm{d}z = \int_{-1}^{3}\left[t + \frac{1}{2}(t-1)\mathrm{i}\right]\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{3}[(3t+1) + \mathrm{i}(4t-2)]\mathrm{d}t = 4 + 2\mathrm{i}$$

同理，C_2 是以抛物线 $x = y^2 + 2y$ 上截取 $-1 \leqslant x \leqslant 3$ 上半段曲线，令 $y = t$，$x = t^2 + 2t$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$

$$C_2: z_2(t) = t^2 + 2t + \mathrm{i}t \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$z_2'(t) = 2t + 2 + \mathrm{i}$$

$$\therefore \int_{C_2} z\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}(t^2 + 2t + \mathrm{i}t)(2t + 2 + \mathrm{i})\mathrm{d}t$$

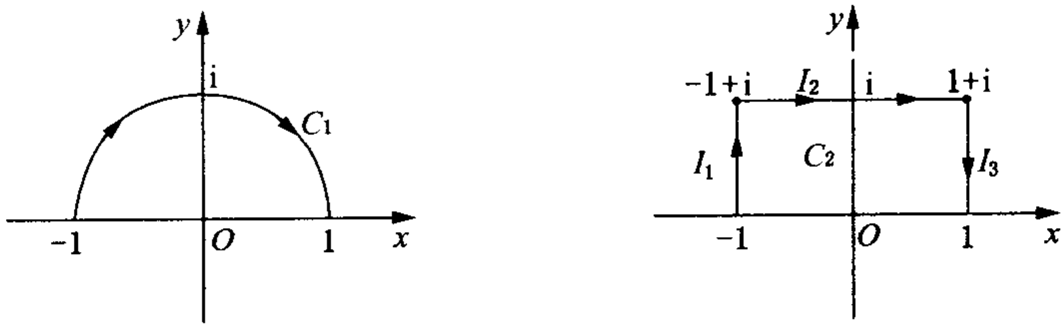
$$= \int_{-1}^{1}[(2t^3 + 6t^2 + 3t) + \mathrm{i}(3t^2 + 4t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{12}{3} + \frac{6}{3}\mathrm{i} = 4 + 2\mathrm{i}$$

所以有 $\int_{C_1} z\mathrm{d}z = \int_{C_2} z\mathrm{d}z$，得证.

［注］　或将曲线 C_1 另行参数化 $z_1(t) = -(1+\mathrm{i}) + [(3+\mathrm{i}) + (1+\mathrm{i})]t \ (0 \leqslant t \leqslant 1)$，即 $z_1(t) = -1 + 4t + (2t-1)\mathrm{i} \ (0 \leqslant t \leqslant 1)$，$z_1'(t) = 4 + 2\mathrm{i}$

例 6 计算积分 $\int_C \overline{z}\mathrm{d}z$，其中 C：(i) 上半单位圆周（顺时针方向）（见图 3－6(a)）；(ii) 是连接 -1、$-1+\mathrm{i}$、$1+\mathrm{i}$ 与 1 的矩形的一部分（见图 3－6(b)）.



(a)　　(b)

图 3－6　C_1 与 C_2

解 $\because C^{-}{}_1$：$z_1(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，$0\leqslant t\leqslant\pi$

$\therefore C_1$：$z(t)=z_1(\pi-t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)}$

$$=-\cos t+\mathrm{i}\sin t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$$

$$\overline{z}(t)=-\cos t-\mathrm{i}\sin t,\ z'(t)=\sin t+\mathrm{i}\cos t$$

$$\int_{C_1}\overline{z}\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\overline{z}(t)z'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(-\cos t-\mathrm{i}\sin t)(\sin t+\mathrm{i}\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=-\mathrm{i}\int_0^{\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi\mathrm{i}$$

而 $C_2=I_1+I_2+I_3$，其中

I_1：$z_1(t)=-1+\mathrm{i}t\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$，

$z_1'(t)=\mathrm{i}$，

$\overline{z}_1(t)=-1-\mathrm{i}t$

I_2：$z_2(t)=t+\mathrm{i}\quad(-1\leqslant t\leqslant 1)$，$z_2'(t)=1$，$\overline{z}_2(t)=t-\mathrm{i}$

I_3：$z_3(t)=1+(1-t)\mathrm{i}\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$，$z_3'(t)=-\mathrm{i}$

$\overline{z}_3(t)=1-\mathrm{i}(1-t)$

$$\therefore \int_{C_2} \bar{z}\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3} \int_{l_k} \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 -(1+\mathrm{i}t)\cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} (t-\mathrm{i})\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^1 [1-\mathrm{i}(1-t)](-\mathrm{i})\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [-\mathrm{i}+t-\mathrm{i}-(1-t)]\mathrm{d}t - 2\mathrm{i}$$

$$= \int_0^1 (-2\mathrm{i}+2t-1)\mathrm{d}t - 2\mathrm{i} = -4\mathrm{i}$$

由例 5 与例 6 可见，一个函数 $f(z)$ 在起点与终点相同的两曲线 C_1 与 C_2 上的积分值可以相等也可以不等. 那么被积函数究竟要满足什么条件，才能使它在曲线上的积分值只与起点、终点有关而与路径无关呢？下面的柯西积分定理将回答这个问题.

2. 柯西(Cauchy)积分定理

定理 3.2 柯西积分定理 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 是 D 内的一条简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{3.4}$$

如果附加条件：$f'(z)$ 在 C 及其内部是连续的，则定理的证明比较直接(可见参考书目[1]58 页)，更严格的证明不在这里介绍(可见参考书目[2]的古萨(Goursat)证明).

由第二章知函数 e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\mathrm{sh}z$，$\mathrm{ch}z$ 与 z^n(n 为正整数)及复多项式 $P_n(z)$ 都是整函数，它们具有连续的导数，所以在复平面 $\mathbb{C}$ 上的任何简单闭曲线 C 上的积分均为零，即

$$\oint_C \mathrm{e}^z\mathrm{d}z = 0,\ \oint_C P_n(z)\mathrm{d}z = 0,\cdots$$

推论 1 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内的任意分段光滑曲线 C 上的积分与路径无关，只与 C 的起点、终

点有关.

推论 2 (柯西定理推广到多连通区域上)设函数 $f(z)$ 在多连通区域 D 及其边界曲线 C 上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{3.5}$$

其中 C 是多连通区域 D 的边界. 设 C_0, C_1, C_2, …, C_n 均为逆时针方向闭曲线，$C_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 在 C_0 的内部，且 $C_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 互不包含、互不相交，则 D 的边界为 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ (见图 3-7). 那么(3.5)式即为

$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k^-} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$$

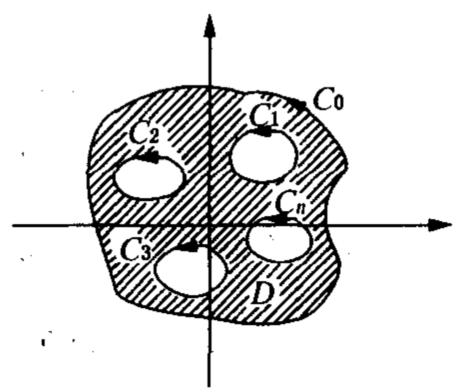


图 3-7　多连通区域 D,边界曲线 $C = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k^-$

$$\therefore \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.6}$$

当 $k=1$ 时，有形变公式

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.7}$$

例 7 设 $f(z) = u(r, \theta) + \mathrm{i}v(r, \theta)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ $(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 解析，证明

$$\int_0^{2\pi} [u(r, \theta)\cos\theta - v(r, \theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta = 0$$

证　设 $f(z)$ 沿着闭曲线 $|z| = 1$ 的积分，C: $|z| = 1$ 的参数表

示式

$$C: z(t) = e^{i\theta} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

由柯西积分定理知

$$0 = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} [u(r, \theta) + \mathrm{i}v(r, \theta)]\mathrm{i}[\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} [u(r, \theta)\cos\theta - v(r, \theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$-\int_0^{2\pi} [u(r, \theta)\sin\theta + v(r, \theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} [u(r, \theta)\cos\theta - v(r, \theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta = 0$$

定理 3.3 （原函数定理）设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，z_0 是 D 内一个固定点，C 是 D 内以 z_0 为起点、z 为终点的任意曲线，则由

$$F(z) = \int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{3.8}$$

给出的函数 $F(z)$ 在 D 内解析，且有

$$F'(z) = f(z) \ (z \in D) \tag{3.9}$$

证 由定理 3.2（柯西积分定理）推论 1 可知 $f(z)$ 在 C 上的积分与路径无关，只与起点、终点有关，所以 $F(z)$ 是积分上限 z 的函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

设 z 为 D 内任取的一点，选取 Δz 充分小，使点 $z + \Delta z \in D$，

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_{C_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{C_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

其中 C 是连接 z 与 $z+\Delta z$ 的直线段，且落在 D 内；C_1 与 C_2 分别是 D 内连接 z_0 到 z 与 z_0 到 $z+\Delta z$ 的曲线，见图 3-8.

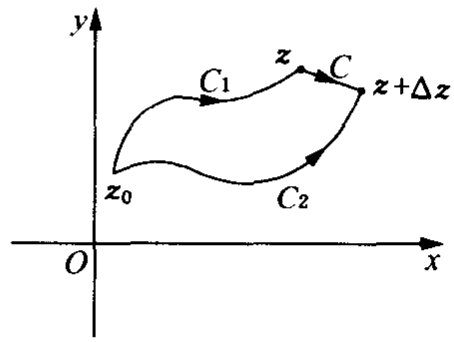


图 3-8 C_2 与C^-，C_1^- 形成一个闭路

因为 $f(z)$ 在 z 点连续，所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ 成立. 取 $|\Delta z| < \delta$，则有

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right|$$

$$= \left|\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_z^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta\right| \frac{1}{|\Delta z|}$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon$$

即
$$F'(z) = f(z) \ (z \in D)$$

如果在区域 D 内有 $G'(z) = f(z)$，则称 $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，所以由(3.8)式定义的变上限函数 $F(z)$ 也是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数.

推论 1 $f(z)$的任意原函数 $G(z)$与(3.8)式定义的变上限函数 $F(z)$只差一个常数，即

$$G(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + C \tag{3.10}$$

推论 2 设 $f(z)$在单连通区域 D 内解析，$G(z)$是 $f(z)$的一个原函数，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0) \tag{3.11}$$

其中 C 是连接 D 内 z_0 和 z_1 的且落在 D 内的光滑曲线.

例 8 设 $f'(z)$与 $g'(z)$对所有的 z 解析,证明:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_{z_1}^{z_2} f'(z)g(z)\mathrm{d}z$$

证 因为 $f'(z)$, $g'(z)$在全平面解析,所以

$$F(z) = f(z)g(z)$$

在$\mathbb{C}$上解析,且

$$F'(z) = [f(z)g(z)]' = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$$

由定理 3.3 推论 2 的公式(3.11)

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} [f(z)g'(z) + f'(z)g(z)]\mathrm{d}z &= [f(z)g(z)]_{z_1}^{z_2} \\ &= f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1)\end{aligned}$$

所以有

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_{z_1}^{z_2} f'(z)g(z)\mathrm{d}z$$

例 9 设 $D = \{re^{i\theta};\ r > 0 与 -\pi < \theta < \pi\}$ 是单连通区域,C 是连接 D 内两点 z_1 到 z_2 的光滑曲线,求$\int_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z$ 的值.

解 因为对数主支 $F(z) = \ln z$ 在 D 内解析,且 $F'(z) = (\ln z)' = \frac{1}{z}$,所以有

$$\int_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z = (\ln z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \ln z_2 - \ln z_1$$

3. 柯西积分公式与高阶导数的柯西积分公式

复变函数理论中的重要结果之一就是著名的"柯西积分公式",它是解析函数的一种积分表达式,也是求围道积分的一个有力工具.

定理 3.4 (柯西积分公式) 设 $f(z)$在单连通区域 D 内解析,C 是 D 内的简单闭曲线,z_0 在 C 内部,则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{3.12}$$

或
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0) \tag{3.12$'$}$$

(证明见参考书目[1])

例 10 计算积分$\oint_C \frac{\sin z}{4z+\pi}dz$,其中 C 是 $|z|=1$ 逆时针方向.

解 $$\oint_C \frac{\sin z}{4z+\pi}dz=\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}dz$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\pi i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi i$$

例 11 计算积分$\oint_C \frac{1}{4z^2+4z-3}dz$, 其中 C 为

(a) $|z|=1$,逆时针方向; 16+16

(b) $\left|z+\frac{3}{2}\right|=1$,逆时针方向;

(c) $|z|=3$,逆时针方向.

解 $$\frac{1}{4z^2+4z-3}=\frac{1}{(2z-1)(2z+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1/2)(z+3/2)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{z-1/2}-\frac{1}{z+3/2}\right)$$

(a) $$\oint_{|z|=1}\frac{1}{4z^2+4z-3}dz=\frac{1}{8}\left(\oint_{|z|=1}\frac{1}{z-1/2}dz-\oint_{|z|=1}\frac{1}{z+3/2}dz\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 2\pi i=\frac{\pi i}{4};$$

(b) $$\oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \frac{1}{4z^2+4z-3}\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\left[\oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \frac{1}{z-1/2}\mathrm{d}z - \oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \frac{1}{z+3/2}\mathrm{d}z\right] = -\frac{1}{8}2\pi\mathrm{i} = -\frac{\pi\mathrm{i}}{4};$$

(c) $$\oint_{|z|=3} \frac{1}{4z^2+4z-3}\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\left[\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1/2}\mathrm{d}z - \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+3/2}\mathrm{d}z\right] = \frac{1}{8}(2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}) = 0.$$

下面的引理是关于含参变量的积分如何在积分符号下求导的一般性结果，这在微积分中已作介绍，此处不再证明.

引理 设 D 是一个单连通区域，I：$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 是一个实数区间，$f(z, t)$ 与 $f_z(z, t)$ 在 D 内与 I 上关于 z 与 t 连续，则

$$F(z) = \int_\alpha^\beta f(z, t)\mathrm{d}t$$

在 D 内解析，且有

$$F'(z) = \int_\alpha^\beta f_z(z, t)\mathrm{d}t$$

下面用引理来证明 $f(z)$ 关于 n 阶导数的积分表达式.

定理 3.5 （高阶导数的柯西积分公式）设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 是 D 内的简单闭曲线. 如果 z 是 C 内部的一点，则

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.13}$$

或

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z) \tag{3.13$'$}$$

证 我们只证 $n = 1$ 的情况. 将曲线 C 以参数化表示

$$C: \zeta = \zeta(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

$$d\zeta = \zeta'(t)dt$$

由定理 3.4，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f[\zeta(t)]}{\zeta(t) - z}\zeta'(t)dt$$

记右边被积函数是两个变量 z 与 t 的函数：

$$f(z, t) = \frac{f[\zeta(t)]\zeta'(t)}{\zeta(t) - z}, \quad f_z(z, t) = \frac{f[\zeta(t)]\zeta'(t)}{(\zeta(t) - z)^2}$$

利用引理

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f[\zeta(t)]\zeta'(t)}{[\zeta(t) - z]^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

由 $n = 1$ 的情况，可对 f' 用同样的推断得出 $n = 2$ 时的表达式(3.13)；然后利用数学归纳法可证明对于任何 n，公式(3.13) 都成立.

推论 1 设 $f(z)$在区域 D 内解析，则 f'，f''，…，$f^{(n)}$存在，且在 D 中解析.

推论 2 设 u 是 D 内的调和函数，则 u 关于 x，y 的各级偏导数 u_x，u_y，u_{xx}，u_{yy}与 u_{xy}存在，且也在 D 内调和.

例 12 勒让德(Legendre)多项式由

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2 - 1)^n]$$

定义，利用高阶导数的柯西积分公式证明

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

其中 C 是复平面$\mathbb{C}$上的简单闭曲线，z 在 C 的内部.

证 设 $f(\zeta) = (\zeta^2 - 1)^n$ 是一个整函数，C 是复平面$\mathbb{C}$上的简单闭曲线，z 为 C 内一点，则由公式(3.13) 知

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{(\zeta^{2}-1)^{n}}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

而等式左边

$$f^{(n)}(z)=\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}z^{n}}[(z^{2}-1)^{n}]=2^{n}\cdot n!P_{n}(z)$$

$\therefore$
$$2^{n}\cdot n!P_{n}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{(\zeta^{2}-1)^{n}}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$P_{n}(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{(\zeta^{2}-1)^{n}}{2^{n}(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

4. 莫累拉(Morera)定理与柳维尔(Liouville)定理及其应用

定理 3.6 (Morera 定理) 设 $f(z)$在单连通区域 D 内连续，如果对于 D 内任意闭曲线 C 上有

$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$

$$\oint_{C}f(z)\mathrm{d}z=0$$

$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,dz\right|$

则 $f(z)$在 D 内解析.

证 先证明由(3.8)式所定义的积分 $F(z)=\int_{z_{0}}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$(其中 z_{0} 是 D 内固定点，$z\in D$) 与路径的无关性.

$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(t)-f(z)]dt$

如果 C_{1} 与 C_{2} 是任意两条具有同样起点 z_{0} 与终点 z 的 D 内曲线，那么 C_{1} 与C_{2}^{-}便形成一条 D 内的闭曲线 $C=C_{1}+C_{2}^{-}$.

由已知条件

$$0=\oint_{C}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_{C_{1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\int_{C^{-}_{2}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_{C_{1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{C_{2}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

即
$$\int_{C_{1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_{C_{2}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

这说明积分 $F(z)=\int_{z_{0}}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关，它是积分上限的函数.

又因为已知 $f(z)$ 在 D 内解析，所以必连续. 那么对于预先任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ 成立.

与定理 3.3 的证明一样，可以证得 $F'(z)=f(z)\ (z\in D)$，因此 $F(z)$ 在 D 内解析. 由定理 3.5 推论 1 知 $F''(z)$ 在 D 内也解析，而 $F''(z)=f'(z)\ (z\in D)$，证明了 $f(z)$ 在 D 内的解析性.

定理 3.7 （积分平均值定理）设 $f(z)$ 在包含闭圆 $C=\{z;|z-z_0|=R\}$ 的单连通区域 D 内解析，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta \tag{3.14}$$

定理 3.8 （最大模原理）设 $f(z)$ 是 D 内不恒为常数的解析函数，则 $|f(z)|$ 的最大值不能在 D 内取到.

证 假设存在点 $z_0\in D$，使得

$$|f(z)|\leqslant|f(z_0)| \tag{i}$$

对所有 $z\in D$ 成立(即 $|f(z)|$ 的最大值在 $z_0\in D$ 点取到).

设 $C_0=\{z;|z-z_0|=R\}\subset D$，由定理 3.7 有

$$|f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta$$

$$(0\leqslant r\leqslant R) \tag{ii}$$

我们可以把 $f(z)=f(z_0+re^{i\theta})$ 看作实变量 θ 的实值函数，由(i)知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|d\theta=|f(z_0)|$$

$$(0\leqslant r\leqslant R) \tag{iii}$$

联合(ii)与(iii)得等式

$$|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\quad(0\leqslant r\leqslant R)$$

亦即

$$\int_0^{2\pi}(|f(z_0)|-|f(z_0+re^{i\theta})|)d\theta=0 \quad (0\leqslant r\leqslant R) \tag{iv}$$

在实函数理论中，如果一个非负连续函数在一个区间上的积分值是零，则该函数必恒为零，因此由(iv)式可知

$$|f(z_0)|=|f(z_0+re^{i\theta})|$$

对于 $0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 成立.

如果一个函数的模为常数，则表明了该函数为常数[见第二章习题解答第 9 题(2)]，即

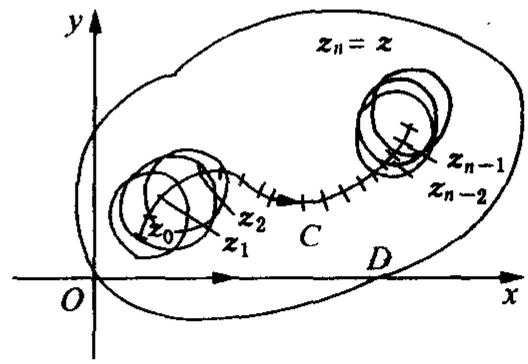


图 3-9 覆盖曲线 C 的圆盘 $D_k(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 链

$$f(z)=f(z_0) \quad z=\{z;\ |z-z_0|\leqslant R\}\in D_0 \tag{v}$$

设 z 是 D 内的任意点，C 是 D 内连接 z_0 与 z 的光滑曲线. 记 C 到 D 的边界为 $2d$，于是在 C 上嵌入分点 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n=z$，使 $|z_k-z_{k-1}|<d\ (k=1, 2, \cdots, n)$，以 $z_k(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 为中心、d 为半径作圆 $C_k=\{z;\ |z-z_k|=d\}$，此时圆盘 $D_k=\{z;\ |z-z_k|\leqslant d\}\ (k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 落在 D 内且全部覆盖曲线 C(它是一个有限覆盖)(见图 3-9). 因为每个 D_{k-1} 包含了下一个圆盘 D_k 的中心 z_k，即 z_1 落在 D_0 内，z_2 落在 D_1 内…… 由上面已证得(v)

$$f(z)=f(z_0) \quad (z\in D_0)$$

因为 $z_1\in D_0$，所以 $f(z_1)=f(z_0)$，即最大模 $|f(z)|$ 在 $z_1\in D_1$ 处达到.

与上面同样方法可证得 $f(z)=f(z_1)=f(z_0)\ (z\in D_1)$，依此类推有限次得

$$f(z)=f(z_k)=f(z_{k-1})\ (k=1, 2, \cdots, n) \quad (z\in D_k)$$

因此 $f(z_n)=f(z)=f(z_0)$，由于 z 的任意性，所以 $f(z)$ 在 D 内恒为常数. 这与定理的假设矛盾，证毕. 最大模原理有时也可叙述成下面较弱的形式.

定理 3.7′ （最大模原理）设 $f(z)$ 在有界区域 D 上解析且不恒为常数. 如果 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续，设 M 是 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值，则它只能在边界上达到.

（最小模原理） 设 $f(z)$ 是 D 内不恒为常数的解析函数，如果对于所有的 $z \in D$ 有 $|f(z)| \geqslant m\ (m > 0)$，则 $|f(z)|$ 在 D 内任何点处都不能达到最小值 m.

例 13 设 $f(z) = az + b$，其中区域 $D = \{z;\ |z| < 1\}$，于是 $f(z)$ 在闭圆 $\overline{D} = \{z;\ |z| \leqslant 1\}$ 上连续，证明

$$\max_{|z|\leqslant 1} |f(z)| = |a| + |b|$$

并找出在 D 的边界 $C = \{z;\ |z| = 1\}$ 上取到 $|f(z)|$ 最大值的点.

解 由定理 3.7′ 知 $|f(z)|$ 的最大值在 D 的边界 $C = \{z;\ |z| = 1\}$ 上一点处达到，设这点为 $z_0 = e^{i\theta_0}$. 在 $z \in \overline{D} = \{z;\ |z| \leqslant 1\}$ 时，$|f(z)| = |az + b| \leqslant |az| + |b| = |a| + |b|$，即 $M = |a| + |b|$.

选取 $z_0 = e^{i\theta_0}$，其中取 $\theta_0 = \mathrm{Arg}b - \mathrm{Arg}a$. 此时

$$\mathrm{Arg}(az_0) = \mathrm{Arg}a + \mathrm{Arg}z_0 = \mathrm{Arg}a + (\mathrm{Arg}b - \mathrm{Arg}a) = \mathrm{Arg}b$$

所以，当向量 az_0 与向量 b 落在过原点的同一射线上时，有

$$|az_0 + b| = |az_0| + |b| = |a| + |b|.$$

定理 3.8 （柯西不等式）设 $f(z)$ 在包含圆 $C = \{z;\ |z - z_0| = R\}$ 的单连通区域 D 内解析，如果对于所有的 $z \in C$ 有 $|f(z)| \leqslant M$，则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!M}{R^n} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.15}$$

定理 3.9 （柳维尔定理）有界整函数必为常数.

定理 3.10 （代数学基本定理）设 $P(z)$ 是 z 的 n 次多项式 $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$，其中 $a_k(k = 0, 1, \cdots, n)$ 为复常数，$a_n \neq 0$（n 为正整数），则 $P(z)$ 至少有一个零点.

(定理 3.8,3.9,3.10 的证明见参考书目[1])

推论 设 $P(z)$为一个 n 次多项式,则 $P(z)$能够被表示成 n 个线性因子的乘积,即

$$P(z)=A(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

其中 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 $P(z)$的零点,A 为复常数.

例 14 求 $F(z)=\sin z$ 在矩形闭区域

$$R=\left\{z=x+\mathrm{i}y;\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 与 }0\leqslant y\leqslant 2\right\}$$

上的最大模.

解 因为 $F(z)=\sin z$ 在$\mathbb{C}$上解析,所以在 R 上解析.

由(2.24)式知 $|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$, 因为 $\mathrm{sh}y=\dfrac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}$, $(\mathrm{sh}y)'=\mathrm{ch}y>0$,所以 $\mathrm{sh}y$ 为单调增函数,则

$$\mathrm{sh}^2 y\leqslant\mathrm{sh}^2 2\quad(0\leqslant y\leqslant 2)$$

又因为

$$\sin^2 x\leqslant 1\quad(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$$

所以
$$\max_{z\in R}|\sin z|=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 2}$$

例 15 设 $f(z)$在圆 $D=\{z;\ |z|<5\}$ 内解析,在圆周曲线 $C=\{z;\ |z-1|=3\}$ 上 $|f(z)|<10$,求 $|f^{(3)}(1)|$ 的最大值.

解 因为 C 及其内部区域 $R=\{z;\ |z-1|\leqslant 3\}\subset D$,所以 $f(z)$ 在 R 上解析,当 $z\in C=\{z;\ |z-1|=3\}$ 时,$|f(z)|<10$. 由于 $|f(z)|$ 的最大值必在边界上达到,那么对于 $\zeta\in C$, 必有 $|f(\zeta)|\leqslant 10$. 由高阶导数的柯西积分公式(3.13)知

$$f^{(3)}(1)=\frac{3!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-1)^4}\mathrm{d}\zeta$$

C 的参数表示式为：$\zeta(\theta)=1+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,

$$|f^{(3)}(1)| = \left|\frac{3!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(1+3e^{i\theta})}{(3e^{i\theta})^4}\cdot 3ie^{i\theta}d\theta\right|$$

$$= \frac{3}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(1+3e^{i\theta})}{3^3e^{3i\theta}}d\theta\right| \leqslant \frac{3}{\pi}\frac{10}{3^3}\cdot 2\pi = \frac{20}{9}$$

例 16 设 $f(z)$是整函数且对所有 z,有 $|f(z)| \leqslant M|z|$ 成立,证明 $f''(z) = 0\ (z \in \mathbb{C})$,其中 M 为正实数.

证 对于任意的 $z \in \mathbb{C}$,作 $C_R = \{\zeta;\ |\zeta - z| = R\}\ (R > 0)$,其参数表示式为 C_R: $\zeta(\theta) = z + Re^{i\theta}\quad(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$,则 $f(z)$ 在 C_R 及其内部解析. 由定理 3.5 的(3.13) 式

$$|f''(z)| = \left|\frac{2}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}d\zeta\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(z+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^3}Rie^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^3}\cdot Re^{i\theta}\right|d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\frac{M|z+Re^{i\theta}|}{R^2}\cdot 2\pi \to 0\quad(R \to +\infty)$$

由于 z 的任意性,所以有 $f''(z) = 0\ (z \in \mathbb{C})$.

【思考题及解答】

1. 复积分 $\int_C f(z)dz$ 中,C是连接a,b两点的有向曲线,我们能否把积分写成 $\int_a^b f(z)dz$ 的形式?为什么?什么情况下可以用这样的写法来代替?

答 不能. 只有当 $f(z)$在包含有向曲线 C(连接 a,b 两点的有向曲线)的单连通区域 D 内解析时,才能把积分 $\int_C f(z)dz$ 写成$\int_a^b f(z)dz$ 的形式. 因为此时该积分值只与曲线 C 的起点 a、终点 b 有关,而与它的路径无关.

2. 若用参数方程 $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$来表示曲线$C$,那么如何利用 $z(t)$ 来表示它的反向曲线?

答 若 C: $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$,用$C^-$ 表示 C 的反向曲线,则C^- 的参数方

程可表示为

$$C^{-}: \tilde{z} = \tilde{z}(t) = z(\alpha+\beta-t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

当 $t=\alpha$ 时 $\tilde{z}(\alpha)=z(\beta)$，$C^{-}$ 的起点为 C 的终点；当 $t=\beta$ 时，$\tilde{z}(\beta)=z(\alpha)$，$C^{-}$ 的终点为 C 的起点.

当 t 由 α 变到 β 时，$\tilde{z}(t)$ 在 C 的逆向曲线 C^{-} 上变动(见图 3-10).

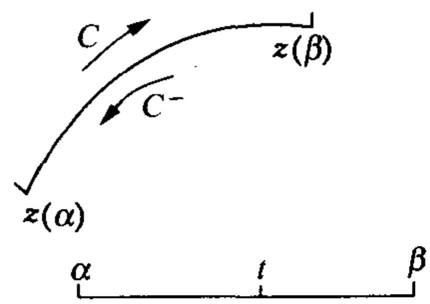


图 3-10

3. 如果有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$，那么是否一定有结论：$f(z)$ 在 C 及其内部区域 D 上解析?请举例说明.

答 否.因为当 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$，$f(z)$ 在 C 及其内部区域 D 上未必是解析的. 例如 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}\ (n\geqslant 2)$，$C$ 是包含 a 点的闭光滑曲线，D 是 C 的内部区域. 显然 $f(z)$ 在 D 内不解析($z=a\in D$ 为 $f(z)$ 在 D 内的奇点)，但是有 $\oint_C \dfrac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z=0\ (n\geqslant 2)$.

4. 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 为 D 内任意一条闭光滑曲线，则由柯西定理知 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$，而 $f(z)=\mathrm{Re}f(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}f(z)$，问是否必有 $\oint_C \mathrm{Re}f(z)\mathrm{d}z=0$，$\oint_C \mathrm{Im}f(z)\mathrm{d}z=0$?如果成立，试给出证明；如果不成立，试举反例说明.

答 不成立.例如 $f(z)=z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，当然在区域 $D=\{z;\ |z|<1\}$ 内及其边界曲线 $C=\{z;\ |z|=1\}$ 上解析，所以

$$\oint_{|z|=1} z\mathrm{d}z=0，设\ z=x+\mathrm{i}y$$

$$\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}(z)=x,\ \mathrm{Im}[f(z)]=\mathrm{Im}(z)=y$$

设 C 的参数方程 $z=z(t)=\cos t+\mathrm{i}\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则

$$z'(t)=-\sin t+\mathrm{i}\cos t$$

而 $$\oint_{|z|=1}\mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}x\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos t[-\sin t+\mathrm{i}\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot 2\pi=\pi\mathrm{i}\neq 0$$

$$\oint_{|z|=1}\mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\sin t[-\sin t+\mathrm{i}\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=-\pi\neq 0$$

5. 下列各组中的积分值是否相等?

(1) $\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}, \int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}, \int_{\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$;

(2) $\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}, \int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}, \int_{\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}$.

其中Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ是起点同为A、终点同为B的三条不相交的光滑曲线,a点在曲线Ⅱ与Ⅲ所围成的区域内部(如图3-11所示).

答 (1) $\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}\neq\int_{\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$.

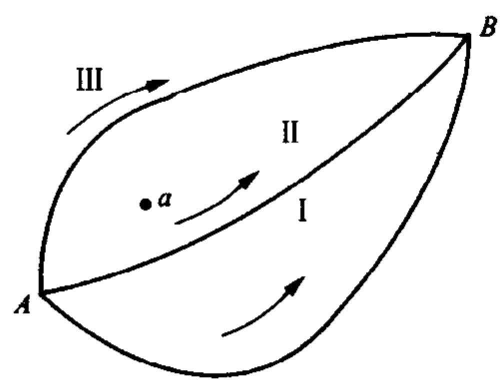


图 3-11

这是因为

$$\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}^-}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\mathrm{I}-\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=0$$

$$\therefore\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

而 $\int_{\mathrm{II}+\mathrm{III}^-}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\mathrm{II}-\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi\mathrm{i}$, $\therefore\int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}+2\pi\mathrm{i}$

即
$$\int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}\neq\int_{\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

(2) $\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}=\int_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}=\int_{\mathrm{III}}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}$.

这是因为

$$\int_{\mathrm{I}-\mathrm{II}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = 0, \quad \int_{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = 0$$

即

$$\int_{\mathrm{I}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = \int_{\mathrm{II}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = \int_{\mathrm{III}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2}$$

6. 什么样的分段光滑闭曲线 C 能使积分 $\oint_C \frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z$ 等于零?(其中 a 为不等于零的复数,且点 a 与 $-a$ 不在曲线 C 上)

答 因为 $\frac{1}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)$,所以

$$\oint_C \frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2a}\left[\oint_C \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z - \oint_C \frac{1}{z+a}\mathrm{d}z\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2a}(0+0) = 0, & \text{当 } a \text{ 与 } -a \text{ 同时不在 } C \text{ 内部时;} \\ \frac{1}{2a}(2\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}) = 0, & \text{当 } a \text{ 与 } -a \text{ 同时在 } C \text{ 内部时;} \\ \frac{\pi\mathrm{i}}{a}, & \text{当 } a \text{ 在 } C \text{ 内}, -a \text{ 不在 } C \text{ 内部时;} \\ \frac{-\pi\mathrm{i}}{a}, & \text{当 } -a \text{ 在 } C \text{ 内}, a \text{ 不在 } C \text{ 内部时.} \end{cases}$$

从而可见,当点 a 与点 $-a$ 同时在 C 内部时或同时不在 C 内部时,

$$\oint_C \frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z = 0$$

7. 形变定理的方法对于计算复积分有什么好处? 试举例说明.

答 形变定理的方法能将一个函数在一般光滑闭曲线 C(不易参数化表示的曲线)上的复积分,转化为该函数在可参数化的曲线 C_1 上的复积分,这样便于复积分的计算.

例如,C 是一条闭光滑曲线(不易参数化),如果 C 的内部区域为 D,$f(z)$ 在 $\overline{D}\backslash\{a\}$ 上解析,求复积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 时,我们可以作一个以 a 为中心、R 为半径的圆 $C_R = \{z;\ |z| = R\}$,取 R 适当小,使 C_R 落在 D 内,则 $f(z)$ 在 C 及 C_R 上以及

它们所围的多连通区域内解析(见图 3-12). 由形变公式(3.7) 可知

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=\int_{0}^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

而右边的复积分比原积分容易计算.

8. 在第 3 题中,如果我们对于曲线 C 及函数 $f(z)$ 给出一定的假设,那么我们可以利用原函数定理来证明下面的莫累拉(Morera)定理(也可看作为柯西积分定理的逆定理).

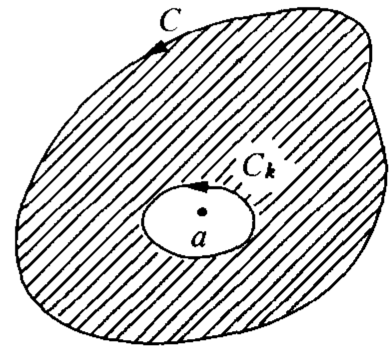


图 3-12

* **莫累拉(Morera)定理** 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续,且对于 D 内任意闭曲线 C 有 $\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z=0$,则 $f(z)$ 在 D 内解析,证明见本章定理 3.6.

【习题及解答】

1. 求下列积分.

(1) $\int_{C} y\mathrm{d}z$,其中 C 是连接 0 到 i 再到 2+i 的折线段.

(2) $\int_{C} \bar{z}\mathrm{d}z$,其中 C 是:(a) 逆时针方向单位圆周;(b) 连接 0 到 $1+\mathrm{i}$ 的直线段.

(3) $\int_{C} (x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 C 是连接 0 到 i 的直线段.

解 (1) 设连接 0 到 i 的直线段为

$$C_1: z_1=z_1(t)=\mathrm{i}t\ (0\leqslant t\leqslant 1),\ y(t)=t,\ z_1'(t)=\mathrm{i}$$

连接 i 到 2+i 的直线段为

$$C_2: z_2=z_2(t)=t+\mathrm{i}\ (0\leqslant t\leqslant 2),\ y(t)=1,\ z_2'(t)=1$$

则 $$\int_{C} y\mathrm{d}z=\int_{C_1+C_2} y\mathrm{d}z=\int_{C_1} y\mathrm{d}z+\int_{C_2} y\mathrm{d}z=\int_{0}^{1} t\cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t+\int_{0}^{2} 1\cdot 1\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{i}}{2}+2$$

(见图 3-13).

(2) $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z$

(a) C: $z = z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$\bar{z}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $z'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

$\therefore \int_C \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$;

(b) C: $z = z(t) = (1+\mathrm{i})t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$\bar{z}(t) = (1-\mathrm{i})t$, $z'(t) = 1+\mathrm{i}$

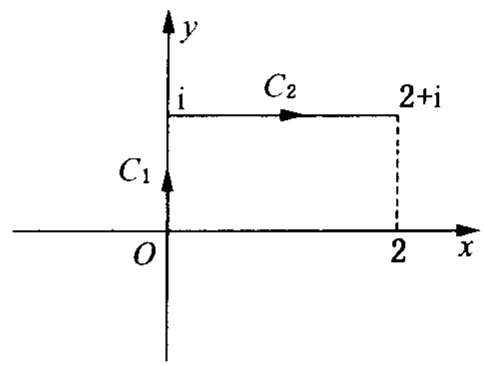


图 3 - 13

$\therefore \int_C \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-\mathrm{i})t \cdot (1+\mathrm{i})\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\mathrm{d}t = 1.$

(3) C: $z = z(t) = \mathrm{i}t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$x(t) = 0$, $y(t) = t$, $z'(t) = \mathrm{i}$

$\therefore \int_C (x^2 - y^2)\mathrm{d}z = \int_0^1 (-t^2)\mathrm{i}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{i}}{3}.$

2. 估计积分 $\int_C \frac{1}{2+z^2}\mathrm{d}z$ 的模，其中 C 是上半单位圆周（沿逆时针方向）曲线.

解 $C = \{z;\ |z| = 1,\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$

$\therefore$ 当 $z \in C$ 时有

$$|z| = 1,\ |2+z^2| \geqslant 2-|z|^2 = 2-1 = 1\ (z \in C)$$

$\therefore \left|\frac{1}{2+z^2}\right| \leqslant 1\ (z \in C)$, $\left|\int_C \frac{1}{2+z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant 1 \cdot \pi = \pi.$

3. 计算积分 $\int_C \cos\left(3+\frac{1}{z-3}\right)\mathrm{d}z$，$C$ 是具有角点 0，1，$1+\mathrm{i}$，i 的单位正方形，逆时针方向为正向.

解 因为被积函数 $f(z) = \cos\left(3+\frac{1}{z-3}\right)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{3\}$ 上解析，所以它在以角点 0，1，$1+\mathrm{i}$，i 的单位正方形曲线及其内部是解析的，由柯西积分定理（定理 3.2）知 $\int_C \cos\left(3+\frac{1}{z-3}\right)\mathrm{d}z = 0.$

4. 设 $f(z)$ 是整函数，求积分 $\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta$. 其中 $k \geqslant 1$ 整数.（提示：令 $z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）

解 设C是以z_0为中心、r为半径的圆周曲线(逆时针方向),C的参数方程为

$$C: z = z(\theta) = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

$$e^{i\theta} = \frac{z - z_0}{r}, \ e^{ik\theta} = \frac{(z - z_0)^k}{r^k}$$

$$dz = z'(\theta)d\theta = rie^{i\theta}d\theta, \ d\theta = \frac{1}{ire^{i\theta}}dz = \frac{1}{i}\frac{dz}{z - z_0}$$

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{ik\theta}d\theta = \oint_C f(z) \cdot \frac{(z - z_0)^{k-1}}{ir^k}dz = \frac{1}{ir^k}\oint_C f(z)(z - z_0)^{k-1}dz$$

其中$C = \{z; \ |z - z_0| = r\}$.当$k \geqslant 1$时,被积函数$f(z)(z - z_0)^{k-1}$在闭曲线$C$及其内部解析

$$\therefore \oint_C f(z)(z - z_0)^{k-1}dz = 0,$$

即

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{ik\theta}d\theta = 0.$$

5. 设$f(z)$在单连通区域D内解析,且不为零,C是D内任意简单闭曲线,试问积分$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$是否等于零? 为什么?

答 是.这是因为当$f(z) \neq 0 \ (z \in D)$时,$\frac{f'(z)}{f(z)}$在D内解析,D是单连通区域,C是D内的任意简单闭曲线,所以C所围的内部区域也必属于D;而$\frac{f'(z)}{f(z)}$在C及其内部解析,由柯西积分定理知必有$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$.

6. 试问下列各式是否成立?(不必计算出值)

(1) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-3)}dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z-3)}dz$;

(2) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-3)}dz = \oint_{|z|=4} \frac{1}{z^3(z-3)}dz$.

答 (1) 等式成立.因为被积函数在闭环域:$\{z; \ 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$上解析,由形变定理可知该等式成立.

(2) 等式不成立.因为在环域:$\{z; \ 1 < |z| < 4\}$中包含了被积函数

$\dfrac{1}{z^3(z-3)}$ 的另一奇点 $z=3$，所以形变定理不成立.

7. 求下列各积分值(用最简单的方法).

(1) $\oint_C \dfrac{1}{z}dz$　　其中 C：$z(t)=\cos t+i2\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) $\oint_C \dfrac{1}{z^2}dz$　　其中 C 与(1)同；

(3) $\oint_C \dfrac{e^z}{z}dz$　　其中 C：$z(t)=2+e^{it}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(4) $\oint_C \dfrac{1}{z^2-1}dz$　　其中 C：$|z-1|=1$；

(5) $\oint_C z^2\sin z dz$　　其中 C：$|z|=r>0$；

(6) $\oint_C \dfrac{1}{(1-z)^3}dz$　　其中 C：$|z+1|=\dfrac{1}{2}$.

解　(1) $\oint_C \dfrac{1}{z}dz=2\pi i$. 其中 C：$z(t)=\cos t+2i\sin t$. 这是因为被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的奇点 $z=0$ 在 C 的内部. 由

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\begin{cases}2\pi i, & a\text{ 在闭曲线 } C \text{ 内部且 } n=1 \text{ 时；}\\ 0, & a\text{ 在闭曲线 } C \text{ 外部或 } n\neq 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

立即可得.(参见参考书目[1]第三章例 5)

(2) $\oint_C \dfrac{1}{z^2}dz=0$. 理由同上($n=2$).

(3) $\oint_C \dfrac{e^z}{z}dz=0$. 其中 C：$z(\theta)=2+e^{i\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 这是因为闭曲线 C 是以 2 为中心、1 为半径的圆周曲线(逆时针方向)，被积函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ 在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理知，其积分值为零.

(4) $\oint_C \dfrac{1}{z^2-1}dz=\pi i$. 其中 C：$|z-1|=1$(逆时针方向). 这是因为被积函数 $\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+1}\right)$，奇点 $z=1$ 在 C 的内部，$z=-1$ 不在 C 内部，所以

$$\oint_C \frac{1}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{1}{z-1}dz - \oint_C \frac{1}{z+1}dz\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \pi i.$$

(5) $\oint_C z^2 \sin z dz = 0$. 其中 C：$|z| = r > 0$（逆时针方向）. 这是因为被积函数 $f(z) = z^2\sin z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，所以在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理知，其积分值为零.

(6) $\oint_C \frac{1}{(1-z)^3}dz = 0$. 其中 C：$|z+1| = \frac{1}{2}$（逆时针方向）. 因为被积函数 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ 在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理知，其积分值为零.

8. 计算下列各积分值.

(1) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2i}dz$；　　(2) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz$；

(3) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}dz$；　　(4) $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{1}{(z^2-1)(z^3-8)}dz$.

解　利用柯西积分公式：$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$，其中 $f(z)$ 在 C 及其内部区域 D 上解析，$z_0 \in D$.

(1) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2i}dz = 2\pi i(z^2)_{z=2i} = -8\pi i$.

(2) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+e^z}{z-3}}{z}dz = 2\pi i\left(\frac{z^2+e^z}{z-3}\right)_{z=0} = -\frac{2\pi i}{3}$.

(3) $$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\left(\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z-i}dz - \oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z+i}dz\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\left[(z^2-1)_{z=i} - (z^2-1)_{z=-i}\right] = 0.$$

(4) 被积函数 $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^3-8)}$ 的奇点只有 $z=1$、$z=2$ 落在曲线 $C = \left\{z;\ \left|z-\frac{3}{2}\right| = 1\right\}$ 内部，作 $C_1 = \left\{z;\ |z-1| = \frac{1}{4}\right\}$，$C_2 = \left\{z;\ |z-2| = \frac{1}{4}\right\}$，此时 $f(z)$ 在 C 与 C_1，C_2 构成的多连通区域及边界上解析，所以

$$\oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{1}{(z^2-1)(z^3-8)}\mathrm{d}z = \oint_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{(z+1)(z^3-8)}}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$+ \oint_{|z-2|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{1}{(z^2-1)(z^2+2z+4)}}{z-2}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{(z+1)(z^3-8)}\right)_{z=1}$$

$$+ 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{(z^2-1)(z^2+2z+4)}\right)_{z=2}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{14}\right) + 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{36} = \left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{18}\right)\pi\mathrm{i}$$

$$= -\frac{11}{126}\pi\mathrm{i}.$$

9. 设 $f(z)$在整个复平面上解析，z_0 不在曲线上，证明

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

试推出一般结果.

证 由柯西积分公式可知，当 z_0 在 C 内部时

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

又由高阶导数的柯西积分公式知

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

所以

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

一般有

$$\oint_C \frac{f^{(n)}(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = n!\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

当 z_0 在 C 外部时，两边积分均为零，等式当然成立.

10. 如果函数 $f(z)$在简单闭曲线 C 及其内部解析且在 C 上有 $f(z)=0$,证明在 C 内部,$f(z)=0$.

证 已知 $f(z)$在简单闭曲线 C 及其内部解析,设 C 的内部区域为 D. 由柯西积分公式知,对于 $\forall z \in D$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

已知 $\zeta \in C$ 时有 $f(\zeta)=0$,所以 $f(z)=0$,再由 z 在 D 内的任意性知

$$f(z) \equiv 0 \ (z \in D)$$

11. 由复积分 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$ 的值,证明积分$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$.

证 积分 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}d\theta \quad (z = e^{i\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta}d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)]d\theta \qquad (1)$$

又由柯西积分公式知

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i \cdot e^z \big|_{z=0} = 2\pi i \qquad (2)$$

由(1),(2)式得

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta + \int_\pi^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$$

$$= I_1 + I_2.$$

在 I_2 中令 $\theta = 2\pi - t$, 所以 $\theta = 2\pi$ 时 $t=0$; $\theta = \pi$ 时 $t = \pi$,

$$\therefore\ I_2 = \int_\pi^0 e^{\cos t}[\cos(-\sin t)](-dt) = \int_0^\pi e^{\cos t}\cos(\sin t)dt = I_1$$

$$\therefore\ I_1 = \int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi.$$

$2\pi i \cdot [\sin(e^z)]'$

$2\pi i \cos 1$

12. 计算下列各积分

(1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z^2}dz$；　　(2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$；

(3) $\oint\limits_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz$，其中 C：$|z| = r > 1$；

(4) $\oint\limits_C \frac{e^{tz}}{z^3}dz$，其中 C 是包含原点 O 的光滑闭曲线（t 为实数，且 $t \neq 0$）；

(5) $\oint\limits_C \frac{1}{(z^2+9)^2}dz$，其中 C：$|z+2i| = 2$；

(6) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$；

(7) $\oint\limits_C \frac{e^{-z}\sin z}{z^2}dz$，其中 C：$|z-i| = 2$.

解　利用高阶导数的柯西积分公式求解. 设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析，则 $f(z)$ 在 D 内的任意阶导数存在，且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \ (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 C 为 D 的边界，$z_0 \in D$.

(1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z^2}dz = 2\pi i[\sin(e^z)]'_{z=0} = 2\pi i[\cos(e^z)\cdot e^z]_{z=0} = 2\pi i\cos 1.$

(2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz = 2\pi i(\sin z)'_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i\cos\frac{\pi}{2} = 0.$

(3) $\oint\limits_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}(\sin \pi z)^{(3)}_{z=1}$　（其中 C：$|z| = r > 1$）

$$= \frac{\pi i}{3}\pi^3 \cdot (-\cos \pi z)_{z=1} = \frac{\pi^4}{3}i.$$

(4) $\oint\limits_C \frac{e^{tz}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(e^{tz})''_{z=0} = \pi t^2 i$

（其中 C 是包含原点 O 的光滑闭曲线，t 为实数，$t \neq 0$）

(5) 因为曲线 C：$|z+2i| = 2$，所以 $z = -3i$ 在 C 内部，

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z^2+9)^2}dz = \oint\limits_C \frac{\frac{1}{(z-3i)^2}}{(z+3i)^2}dz = 2\pi i\left[\frac{1}{(z-3i)^2}\right]'_{z=-3i}$$

$$= 2\pi i \frac{-2}{(z-3i)^3}\bigg|_{z=-3i} = -\frac{\pi}{54}.$$

(6) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2}(5z^2-3z+2)''_{z=1} = \pi i \cdot 10 = 10\pi i.$

(7) 因为曲线 $C: |z-i|=2$，所以点 $z=0$ 在 C 内部，

$$\oint\limits_C \frac{e^{-z}\sin z}{z^2}dz = 2\pi i(e^{-z}\sin z)'_{z=0}$$

$$= 2\pi i(-e^{-z}\sin z + e^{-z}\cos z)_{z=0} = 2\pi i.$$

13. 已知 $f(z)$是整函数，如果在整个复平面上有 $|f(z)| \geqslant 1$，证明 $f(z)$ 必为常数.

证 已知 $f(z)$ 为整函数，且当 $z \in \mathbb{C}$ 时 $|f(z)| \geqslant 1$. 所以，在 $\mathbb{C}$ 上 $f(z) \neq 0$，作 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$，它必在 $\mathbb{C}$ 上解析，即亦为整函数，且有 $|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{|f(z)|} \leqslant 1$ $(z \in \mathbb{C})$，所以 $g(z)$ 是全平面上有界函数. 由柳维尔(Liouvile) 定理(定理 3.9) 可知，$g(z)$ 必为常数，所以 $f(z)$ 必为常数.

14. 已知 $f(z)$是整函数，且存在着实数 M，使 $\mathrm{Re}f(z) < M$ $(z \in \mathbb{C})$ 成立，试证明 $f(z)$ 必为常数.

证 已知 $f(z)$为整函数，且存在着实数 M 使 $\mathrm{Re}f(z) < M$ $(z \in \mathbb{C})$. 作函数 $F(z) = e^{f(z)}$，显然它在 $\mathbb{C}$ 上解析，且 $|F(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re}f(z)} < e^M$ 在全平面上有界. 所以由柳维尔定理可知，$F(z)$ 恒为常数$(z \in \mathbb{C})$，亦即 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上恒为常数.

15. 如果 $f(z)$在闭圆盘 $\{z; |z| \leqslant 1\}$ 上解析，试证明

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}d\theta \quad (r<1)$$

(提示：设 $z_0 = re^{i\varphi} \in \{z; |z|<1\}$)

证 设 $z_0 = re^{i\varphi} \in \{z; |z|<1\}$ $(r<1, 0<\varphi \leqslant 2\pi)$

$$C: \{z; |z|=1\} \text{ 即 } z = z(\theta) = e^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

因为 $f(z)$ 在$\{z; |z| \leqslant 1\}$ 上解析，对于 $z_0 \in \{z; |z|<1\}$ 由柯西积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}d\theta\quad(r<1)$$

16. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内除点 z_0 外解析，但在 z_0 点的近旁有界. 证明：对于 D 内包含 z_0 的任何简单闭曲线 C，有 $\oint\limits_C f(z)dz=0$. $\left|\oint_{C_\delta} f(z)dz\right| \leqslant 2\pi\delta\cdot M.$

（提示：利用形变公式，作中心在 z_0、半径充分小的圆周 C_δ）

证 已知 $f(z)$在 $D\backslash\{z_0\}$内解析（其中 D 为单连通区域，z_0 为 D 内一点），又知 $f(z)$在 z_0 近旁有界，亦即存在 $M>0$ 与 $\rho>0$，使当 $z\in\{z;\ 0<|z-z_0|<\rho\}$ 时，有 $|f(z)|\leqslant M$ 成立.

任取 D 内包含 z_0 的一条简单闭曲线 C，因为 D 是单连通区域，所以 C 的内部全属于 D.

对于预先任意给定的 $\varepsilon>0$，可以取 δ 充分小($\delta<\rho$)，使闭曲线 $C_\delta=\{z;\ |z-z_0|=\delta\}$ 落在 C 的内部. 所以，$f(z)$ 在 C 与 C_δ 上及它们所围的多连通区域上解析（图 3－14），由形变公式(3.7) 可知：

$$\oint\limits_C f(z)dz=\oint\limits_{C_\delta} f(z)dz$$

$$\therefore\ \left|\oint\limits_C f(z)dz\right|=\left|\oint\limits_{C_\delta} f(z)dz\right|\leqslant M2\pi\delta$$

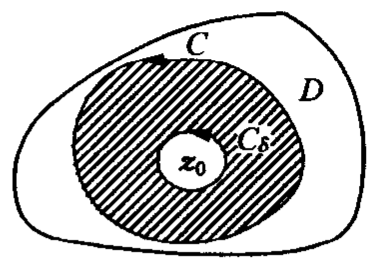


图 3－14

我们只须取 $\delta=\min\left(\rho,\ \min\limits_{\zeta\in C}|\zeta-z_0|,\ \frac{\varepsilon}{2\pi M}\right)$，

此时就有 $\left|\oint\limits_C f(z)dz\right|<\varepsilon$ 成立，即$\oint\limits_C f(z)dz=0$. 由于 C 的任意性，对于 D 内包含 z_0 的任何简单闭曲线 C，有$\oint\limits_C f(z)dz=0$.

第四章　台劳(Taylor)级数与罗朗(Laurent)级数

【基本要求】

(1) 联系复数序列与复函数序列的讨论，理解复数项级数与复函数项级数的收敛、发散概念，知道复函数项级数(特别是幂级数)在收敛域(圆域)内的和函数所具有的三个性质：逐项可导性、解析性和逐项可积性.

(2) 理解台劳定理(幂级数展开式的存在性与唯一性定理)；熟练掌握基本初等函数的麦克劳林展开式，掌握函数间接展开成幂级数的方法. 例如利用基本初等函数的麦克劳林公式及等比级数的求和公式，通过代换、逐项求导、逐项积分等方法经过代数运算求出给定函数的台劳展开式(由唯一性知这是可行的).

(3) 理解罗朗定理，掌握一些简单的函数在解析环域(或去心邻域)中罗朗展开的方法. *注意：一个在去心邻域中解析的函数，其罗朗展开式具有特别重要的意义，由它可判断函数在孤立奇点的性态.*

【基本概念】

1. 序列与级数

(1) *复数序列与复数项级数*

一个正整数 n 的复函数序列的值域是复数的一个子集. 例如

(1°) $f(n)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{i} \quad (n=1, 2, \cdots)$

(2°) $g(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\pi}{4}\right)} \quad (n=1, 2, \cdots)$

(3°) $h(n)=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \quad (n=1, 2, \cdots)$

为方便起见,通常用 z_1, z_2, …表示复数序列(或数列),也可用 $\{z_n\}$表示.

定义 4.1 如果复数序列$\{z_n\}$对于预先给定的 $\varepsilon>0$ 与已知复数 s,存在正整数 $N(\varepsilon)$(与 ε 有关),使当 $n>N(\varepsilon)$ 时,$|z_n-s|<\varepsilon$ 成立,则称数列$\{z_n\}$收敛(否则称为发散),且收敛于 s,记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = s$$

定理 4.1 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n \quad (n=1, 2, \cdots)$, $s=u+\mathrm{i}v$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = s \tag{4.1}$$

当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=u$ 与$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=v$ 时成立.

(证明提示:利用 $|x_n-u|\leqslant|z_n-s|$ 和 $|y_n-v|\leqslant|z_n-s|$ 及 $|z_n-s|\leqslant|x_n-u|+|y_n-v|$)

例 1 证明 $\{(1+\mathrm{i})^n\}$ 是发散的.

解 事实上 $z_n=(1+\mathrm{i})^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$. 这是因为 $\left\{(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$与$\left\{(\sqrt{2})^n\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$是发散的实数序列,所以$\{(1+\mathrm{i})^n\}$是发散的.

定义 4.2 如果对于预先任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N=N(\varepsilon)$,当 n, $m>N$ 时有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$ 成立,则称$\{z_n\}$是一个柯西序列.

定理 4.2 如果$\{z_n\}$是柯西序列,则$\{z_n\}$必是收敛序列.

(这是因为,如果$\{z_n\}$是柯西序列,那么由 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n \quad (n=1, 2, \cdots)$,$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 必为实柯西序列,所以实数序列是收敛序列. 由

定理 4.1 知 $\{z_n\}$ 也收敛.)

设 $\{z_n\}$ 为复数序列,构造一个新的序列 $\{S_n\}$

$$S_1 = z_1, \; S_2 = z_1 + z_2, \; \cdots,$$

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \tag{4.2}$$

称它为复数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4.3}$$

的部分和序列 $\{S_n\}$, z_n 称为级数(4.3)的一般项.

如果存在复数 S,有

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

则称级数(4.3)收敛,其和为 S,记 $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

如果对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 的每一项取模作出的新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$(为实数项级数)收敛,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 为绝对收敛;如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 为条件收敛级数. 易证,绝对收敛的级数必收敛.

定理 4.3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛于 S,即

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + \mathrm{i} y_n)$$

当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = U$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = V$(其中 $S = U + \mathrm{i}V$).

定理 4.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

定义 4.3 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 是收敛的,两级数的柯西乘积定义了级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

其中
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{4.4}$$

定理 4.5 如果柯西乘积(4.4)收敛,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

定理 4.6 (**比较判别法**) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 是实的非负级数,如果复数序列$\{z_n\}$的每一项有 $|z_n| \leqslant M_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + \mathrm{i} y_n)$$

收敛.

(这是因为:$|x_n| \leqslant |z_n| \leqslant M_n$, $|y_n| \leqslant |z_n| \leqslant M_n$)

(2) **复函数序列与复函数项级数**

定义 4.4 设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在区域 D 上的复函数序列,$f(z)$ 是定义在 D 上的一个复变函数.对于 $\varepsilon > 0$,存在正整数 $N = N(z, \varepsilon)$,使当 $n > N$ 时有

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

成立,则称复函数序列$\{f_n(z)\}$在 D 内一点 z 处收敛,且收敛于 $f(z)$,记

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \tag{4.5}$$

定义 4.5 如果在 $\{f_n(z)\}$ 中,$f_n(z)$ 与 $f(z)$ 在 D 上有定义 $(n = 1, 2, \cdots)$,对于 $\varepsilon > 0$,存在一个只依赖于 ε 的正整数 $N = N(\varepsilon)$,使 $n > N$ 时

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

对所有 $z\in D$ 都成立，则称 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内收敛于 $f(z)$.

定义 4.6 设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在区域 D 上的函数序列，称

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \tag{4.6}$$

为函数项级数，它的前 n 项之和

$$\begin{aligned}S_n(z)&=\sum_{k=1}^{n}f_k(z)\\&=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{4.7}$$

称为级数(4.6)的部分和函数序列 $\{S_n(z)\}$.

如果对于 D 内某一点 z_0，极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z_0)=S(z_0)\quad(z_0\in D)$$

存在，则称级数(4.6)在 z_0 点收敛，其和为 $S(z_0)$，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z_0)=S(z_0)$，如果在 D 内级数(4.6)处处收敛于 $S(z)$，则称 $S(z)$ 为级数在 D 内的和函数.

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=S(z)\quad(z\in D) \tag{4.8}$$

记为
$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=S(z)\ (z\in D).$$

例 2 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{inz}$ 当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时收敛.

证 设 $z=x+iy$, $\mathrm{Im}(z)=y>0$, $|e^{inz}|=|e^{in(x+iy)}|=e^{-ny}$.
由实数分析中的比较判别法可知，$\dfrac{e^{-(n+1)y}}{e^{-ny}}=e^{-y}<1$，由此得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-ny}$ 收敛. 由定理 4.6 知，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{inz}$ 收敛.

下面我们只讨论 $f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$ 是复幂函数的情况.

定理 4.7 （几何级数）级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 当 $|z|<1$ 时收敛于和函数 $S(z)=\frac{1}{1-z}$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z} \quad (|z|<1) \tag{4.9}$$

当 $|z|\geqslant 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

推论 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ 当 $|z|>1$ 时收敛于和函数 $S(z)=\frac{z}{z-1}$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}=\frac{z}{z-1}$ $(|z|>1)$；当 $0<|z|\leqslant 1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ 发散.

定理 4.8 假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$，它的收敛性有以下几种情况：

(1) 只在 $z=a$ 处收敛；

(2) 在圆内 $D(a, R)=\{z;\ |z-a|<R, R>0\}$ 绝对收敛；在圆外发散；而在圆周 $C_R=\{z;\ |z-a|=R\}$ 上幂级数或收敛或发散，或某些点处收敛，情况较为复杂. R 被称为幂级数的收敛半径.

(3) 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上收敛.

以上第(1)种情况为 $R=0$；(3) 为 $R=+\infty$；(2) 为 $0<R<+\infty$，此时 $D(a, R)=\{z;\ |z-a|<R\}$ 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 的收敛域.

定理 4.9 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 的收敛半径为

(1) $$R=\frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} |C_n|^{\frac{1}{n}}} \tag{4.10}$$

(2) $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \tag{4.11}$$

例 3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n(z-4)^n$ 的收敛半径.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}|C_n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}=\frac{1}{3}$，所以由(4.10)式知 $R=3$.

例 4 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1+3^n}z^n$ 的收敛半径.

解 $C_n=\frac{2^n}{1+3^n}=\frac{2^n}{3^n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$,

$$C_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_{n+1}}=\frac{3}{2}$$

定理 4.10 假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ 有收敛半径 R，设在 $\{z;|z-a|<R\}$ 中幂级数收敛于和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n\quad(|z-a|<R)$$

则 $f(z)$ 具有以下性质：

(1)（逐项求导性）对所有的 k，有

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)C_n(z-a)^{n-k}\qquad(4.12)$$

成立，其中

$$C_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots)\quad\text{规定 } f^{(0)}(z)=f(z)\qquad(4.13)$$

(2) 在收敛圆域 $D(a,R)=\{z;|z-a|<R\}$ 内解析；

(3)（逐项可积性）对于 $D(a,R)$ 中的任意光滑曲线 C

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_C(z-a)^n\mathrm{d}z\qquad(4.14)$$

当 C 是连接 a 与 $D(a, R)$ 内一点 z 的光滑曲线 C 时

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1}(z-a)^{n+1} \tag{4.15}$$

（证略）

例 5 零阶贝塞尔(Bessel)函数为

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= 1-\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots \end{aligned} \tag{4.16}$$

求满足方程 $J_1(z)=-J_0'(z)$ 的函数，此处 $J_1(z)$ 称为一阶贝塞尔函数.

解 对于 $J_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}}{\frac{1}{[(n+1)!]^2}\frac{1}{2^{2n+2}}} = +\infty$$

所以幂级数(4.16)在 $|z|<+\infty$ 中收敛于 $J_0(z)$，可逐项求导

$$\begin{aligned} J_0'(z) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}z^{2n}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}(2n)z^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n+1)}{2^{2n+1}}z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \\ &= -\frac{z}{2}+\frac{1}{1!2!}\left(\frac{z}{2}\right)^3-\frac{1}{2!3!}\left(\frac{z}{2}\right)^5+\cdots \end{aligned}$$

$$\therefore J_1(z) = -J_0'(z) = \frac{z}{2}-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{z}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{z}{2}\right)^5+\cdots$$

在 $|z|<+\infty$ 中亦收敛.

例 6 验证在 $D(0,1)=\{z;\ |z|<1\}$ 中 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

解 由(4.9)式知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{1-z}\quad(|z|<1)$，再由逐项可导性知

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\quad(|z|<1)$$

即
$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\quad(|z|<1)$$

2. 台劳级数

定义 4.7 如果 $f(z)$ 在 $z=a$ 解析，则

$$f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \tag{4.17}$$

称为 $f(z)$在点 a 的台劳级数. $C_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots)$ 称为台劳系数. 如果 $a=0$，有

$$f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k \tag{4.18}$$

称为 $f(z)$的麦克劳林(Maclaurin)级数.

定理 4.11 （台劳定理） 假设 $f(z)$在区域 D 内解析，$D(a,R)=\{z;\ |z-a|<R\}\subset D$,则 $f(z)$ 在 $D(a,R)$ 中可展开成台劳

级数，在 $D(a, R)$ 中级数收敛于 $f(z)$，即

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \quad (z\in\{z;\ |z-a|<R\}) \tag{4.19}$$

且展开式是唯一的.

（证明见参考书目[1]91 页）

推论 1 假设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$a\in D$，令 z_0 是 $f(z)$ 的一个与 a 距离最小的奇点，如果 $|z_0-a|=R$，则

(1) 在 $\{z;\ |z-a|<R\}$ 中，$f(z)$ 的台劳级数(4.17)式收敛于 $f(z)$；

(2) 如果 $R_1>R$，则 $f(z)$ 的台劳级数(4.17)式在 $\{z;\ |z-a|<R_1\}$ 中不收敛.

事实上，如果 $f(z)$ 的台劳级数(4.17)式在 $\{z;\ |z-a|<R_1\}$ 中收敛($R_1>R$)，则有 $z_0\in\{z;\ |z-a|<R_1\}$. 由定理 4.10 性质(1)知 $f(z)$ 在 z_0 点解析，这与 z_0 为 $f(z)$ 的奇点矛盾.

推论 2 假设 $f(z)$ 在 $D(a, R)=\{z;\ |z-a|<R\}$ 中解析，所以可展开成台劳级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ $(|z-a|<R)$，则由定理 4.10 知，$f(z)$ 在 $D(a, R)$ 中可以逐项求导、逐项积分.

我们必须熟记下列基本初等函数的麦克劳林展开式：

$$(1)\ e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad (|z|<+\infty) \tag{4.20}$$

$$(2)\ \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z|<+\infty) \tag{4.21}$$

$$(3)\ \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z|<+\infty) \tag{4.22}$$

$$(4)\ \mathrm{sh}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z|<+\infty) \tag{4.23}$$

$$(5)\ \mathrm{ch}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z|<+\infty) \tag{4.24}$$

(6) $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z|<1) \qquad (4.25)$

$$\frac{1}{1-u(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}[u(z)]^n \qquad (\text{当 } z\in D \text{ 时有 } |u(z)|<1) \qquad (4.26)$$

其中(4.26)式为(4.25)式的推广形式.

(7) $\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} \qquad (|z|<1) \qquad (4.27)$

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad (|z|<1) \qquad (4.28)$$

这些公式的导出并不难(参见参考书目[1]95 页).

对于一般初等函数的台劳展开,如果用计算 $f(z)$ 的各阶导数的方法来求出台劳展开式中的系数,有时是比较麻烦的.我们可以利用基本初等函数的台劳公式及几何级数的求和公式(4.26),经过代换逐项求导、逐项积分等方法去求台劳展开式.由定理 11(台劳定理)台劳展开式的唯一性知,这样得到的台劳展开式与利用系数公式求得的结果是一致的.

例 7 求 $\sin^3 z$ 的麦克劳林级数.

解 利用三角恒等式 $\sin^3 z=\frac{3}{4}\sin z-\frac{1}{4}\sin 3z$ [注]得

$$\sin^3 z=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z|<+\infty)$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 9^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[注] $\sin^3 z=\sin z(1-\cos^2 z)=\sin z\left(1-\frac{\cos 2z+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin z-\frac{1}{2}\sin z\cos 2z$

$$=\frac{1}{2}\sin z-\frac{1}{2}[\sin 3z-\cos z\sin 2z]=\frac{1}{2}\sin z-\frac{1}{2}[\sin 3z-2\cos^2 z\sin z]$$

$=\frac{3}{2}\sin z-\frac{1}{2}\sin 3z-\sin^3 z$,所以 $\sin^3 z=\frac{3}{4}\sin z-\frac{1}{4}\sin 3z$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3(1-9^n)}{4(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (|z| < +\infty)$$

例 8 将函数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ 在 $z = \mathrm{i}$ 点展开台劳级数.

解
$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\mathrm{i}-(z-\mathrm{i})}$$

$$= \frac{1}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}} \quad \left(\left|\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right| < 1\right)$$

$$= \frac{1}{1-\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i})^{n+1}} (z-\mathrm{i})^n \quad (|z-\mathrm{i}| < \sqrt{2})$$

例 9 将函数 $f(z) = \mathrm{e}^z \cos z$ 展开麦克劳林级数.

解 由 $\cos z = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$,得

$$f(z) = \mathrm{e}^z \cdot \cos z = \mathrm{e}^z \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})z} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})z}]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[(1+\mathrm{i})z]^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[(1-\mathrm{i})z]^n \quad (|z| < +\infty)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n] z^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!}(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n + (\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})^n\right] z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{2 \cdot n!} 2 \cdot \cos\frac{n\pi}{4} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{4} z^n \quad (|z| < +\infty)$$

例 10 已知 $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{n} z^n$,求 $f^{(3)}(0)$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n}z^n$ 的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n}}{\frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{n+1}}\right|=\frac{1}{|1+\mathrm{i}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以在 $D\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$中级数收敛. 设收敛于

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n}z^n\quad\left(|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

由性质(4.13)式知 $C_3=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}$,所以

$$f^{(3)}(0)=3!\cdot C_3=3!\cdot\frac{(1+\mathrm{i})^3}{3}=4(-1+\mathrm{i})$$

在该题中,我们没有用先求出幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n}z^n$ 的和函数 $f(z)$,再对其求三次导数的方法得到它在 $z=0$ 点的值,而是用收敛幂级数的和函数在收敛域中的性质(4.13)式求得.

例 11 已知菲涅耳(Fresnel)积分 $C(z)$与 $S(z)$:

$$C(z)=\int_0^z\cos(\zeta^2)\mathrm{d}\zeta$$

$$S(z)=\int_0^z\sin(\zeta^2)\mathrm{d}\zeta,\text{且 } F(z)=C(z)+\mathrm{i}S(z)$$

(1) 求证:$F(z)=\int_0^z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$.

(2) 给出 $F(z)$的幂级数表示式.

解 (1) 因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta^2}=\cos(\zeta^2)+\mathrm{i}\sin(\zeta^2)$,所以

$$F(z)=C(z)+S(z)=\int_0^z\cos(\zeta^2)\mathrm{d}\zeta+\mathrm{i}\int_0^z\sin(\zeta^2)\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_0^z [\cos(\zeta^2) + \mathrm{i}\sin(\zeta^2)]\mathrm{d}\zeta = \int_0^z \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$(2)\ F(z) = \int_0^z \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\zeta^2)^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\zeta^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_0^z \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{4n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{4n+2}}{(2n+1)!} \right] \mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

3. 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

定义 4.8 设 $f(z)$在解析区域 D 内一点 z_0 处的值为零，即 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的零点；如果 $f(z)$ 在 z_0 点的某个邻域 $D(z_0, \delta)=\{z; |z-z_0|<\delta\}$ 中解析，$f(z_0)=0$，但在 $D(z_0, \delta)$ 中除 z_0 外，$f(z)$ 处处不为零，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点.

定义 4.9 设 $f(z)$在 $D(z_0, R)=\{z; |z-z_0|<R\}$ 中解析，若 $f(z)$ 在 $D(z_0, R)$ 中台劳展开式的系数

$$\left.\begin{aligned} &f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ \cdots \\ &f^{(k-1)}(z_0)=0 \quad f^{(k)}(z_0)\neq 0 \quad (k\geqslant 1) \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

则称 z_0 为 $f(z)$的 k 级零点，$k=1$ 时 z_0 也称为 $f(z)$ 的单零点.

定理 4.12 不恒为零的解析函数，它的零点必是孤立的.

证 设函数 $f(z)$在 z_0 点的一个邻域 $D(z_0, \rho)$中解析，且 $f(z_0)=0$，$f(z)$ 在 $D(z_0, \rho)$ 内的台劳展开式是

$$f(z) = C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \cdots + C_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (|z-z_0|<\rho)$$

因为 $f(z)$不恒为零，所以 $C_1, C_2, \cdots$不全为零[注]. 设 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级

[注] 设函数 $f(z)$在区域 D 内解析，如果 $f(z)$在 D 内的一个圆盘内恒为零，则 $f(z)$ 在 D 内恒等于零，见参考书目[2]引理 6.1.

零点($m \geqslant 1$),有 $C_m \neq 0$,而 $n < m$ 时,$C_n = 0$,则 $f(z)$ 又可表示为

$$\begin{aligned} f(z) &= C_m(z-z_0)^m + C_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots \\ &= (z-z_0)^m[C_m + C_{m+1}(z-z_0) + \cdots] \\ &= (z-z_0)^m \varphi(z) \end{aligned}$$

其中 $\varphi(z)$在 $D(z_0, \rho)$中解析,也必为连续,且 $\varphi(z_0) = C_m \neq 0$,所以必可找到 $\delta > 0$ ($\delta \leqslant \rho$),使当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时,$\varphi(z) \neq 0$,即在 $D(z_0, \delta)$ 中除了 z_0 外,$f(z)$ 没有其他零点. 所以,不恒为零的解析函数,其零点是孤立的.

推论 1 假设 $f(z)$在区域 D 内解析, $z_0 \in D$,如果存在 D 内的一个点列 $\{z_n\}$ ($n = 1, 2, \cdots$), $f(z_n) = 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 且 $z_n \to z_0 (n \to \infty)$, 则 $f(z) \equiv 0$ ($z \in D$).

推论 2 假设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内解析, $z_0 \in D$,如果存在 D 内的一个点列 $\{z_n\}$ ($n = 1, 2, \cdots$) 有 $f(z_n) = g(z_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$), 当 $m \neq n$ 时,$z_m \neq z_n$,且 $z_n \to z_0 (n \to \infty)$,则 $f(z) \equiv g(z)$ ($z \in D$).

推论 3 洛必达法则(L' Hopital's Rule)假设 $f(z)$与 $g(z)$在 $z = z_0$ 处解析,$f(z_0) = g(z_0) = 0$,而 $g'(z_0) \neq 0$,则

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \tag{4.30}$$

该法则还可连续多次使用,如果 z_0 是 $f(z)$与 $g(z)$的 k ($k \geqslant 1$) 级零点,且 $g^{(k)}(z_0) \neq 0$,则

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$$

(证明见本章习题 9)

例 12 求极限:(1) $\lim\limits_{z \to \mathrm{i}} \dfrac{1+z^6}{1+z^2}$, (2) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z + \operatorname{sh} z - z^2}{z^5}$.

解 (1) $\lim\limits_{z \to \mathrm{i}} \dfrac{1+z^6}{1+z^2} = \lim\limits_{z \to \mathrm{i}} \dfrac{6z^5}{2z} = 3$.

(2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z+\operatorname{sh}z-2z}{z^5}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z+\operatorname{ch}z-2}{5z^4}$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z+\operatorname{sh}z}{20z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{-\cos z+\operatorname{ch}z}{60z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z+\operatorname{sh}z}{120z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z+\operatorname{ch}z}{120}=\frac{1}{60}.$$

或用台劳展开式

$$\sin z+\operatorname{sh}z-2z=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)+\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)-2z$$

$$=2\left(\frac{z^5}{5!}+\frac{z^9}{9!}+\cdots+\frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}+\cdots\right)$$

$$(|z|<+\infty)$$

$$\frac{\sin z+\operatorname{sh}z-2z}{z^5}=2\left(\frac{1}{5!}+\frac{z^4}{9!}+\cdots+\frac{z^{4(n-1)}}{(4n+1)!}+\cdots\right)$$

$$(|z|<+\infty)$$

得

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z+\operatorname{sh}z-2z}{z^5}=\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}$$

定理 4.13 设 $f(z)$在 $D(z_0, R)=\{z;\ |z-z_0|<R\}$ 中解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的 k 级($k\geqslant 1$)零点的充分必要条件是 $f(z)$ 能表示成下面的形式

$$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)\quad (k\text{ 为正整数})\tag{4.31}$$

其中 $\varphi(z)$在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$.

推论 设 $f(z)$与 $g(z)$在 z_0 点解析，且 z_0 分别是 $f(z)$与$g(z)$的 m 与 n 级零点(m, n 为正整数)，则 z_0 是 $f(z)\cdot g(z)$的$m+n$ 级零点.

4. 罗朗级数

定义 4.10 设 C_n 是复常系数（$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$），双边级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (4.32)$$

若等式右边两级数收敛，则称 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$ 为收敛级数，称为罗朗级数.

定理 4.14 设罗朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$ 在圆环 $D(a, r, R) = \{z; r < |z-a| < R\}$ 内收敛于和函数 $f(z)$，则在该圆环内 $f(z)$ 解析.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n \quad (0 \leqslant r < |z-a| < R)$$

且可逐项求导、逐项积分.

定理 4.15 （罗朗定理）设 $f(z)$ 在环域 $D(a, r, R) = \{z; r < |z-a| < R\}$ 内解析（$0 \leqslant r < R$），则在此圆环内，函数可展开成罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n \quad (r < |z-a| < R) \quad (4.33)$$

其中系数

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \cdots) \quad (4.34)$$

$C_\rho = \{z; |z-a| = \rho\}$ $(r < \rho < R)$ 沿逆时针方向，且其展开式是唯一的.

（证明见参考书目[1]定理 4.4.1）

$$f(z) = \frac{3}{(2-z)(z+1)} = \frac{3}{[3-(z+1)](z+1)} = \frac{1}{z+1} \frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}$$

$$= \frac{1}{z+1} \sum^{\infty} \left(\frac{z+1}{3}\right)^n$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n-1}}{3^n}$

例 13 求函数 $f(z)=\dfrac{3}{2+z-z^2}$ 在以奇点 $z_0=-1$ 与 $z_1=2$ 的各解析环域中的罗朗展开式.

解 因为 $f(z)=\dfrac{3}{2+z-z^2}=\dfrac{1}{2-z}+\dfrac{1}{z+1}$,解析函数的奇点为 $z_0=-1$, $z_1=2$,则以 $z_0=-1$ 为中心的解析环域为(见图 4-1(a))

$D_1=\{z;\ 0<|z+1|<3\}$;

$D_2=\{z;\ 3<|z+1|<+\infty\}$.

以 $z_1=2$ 为中心的解析环域为(见图 4-1(b))

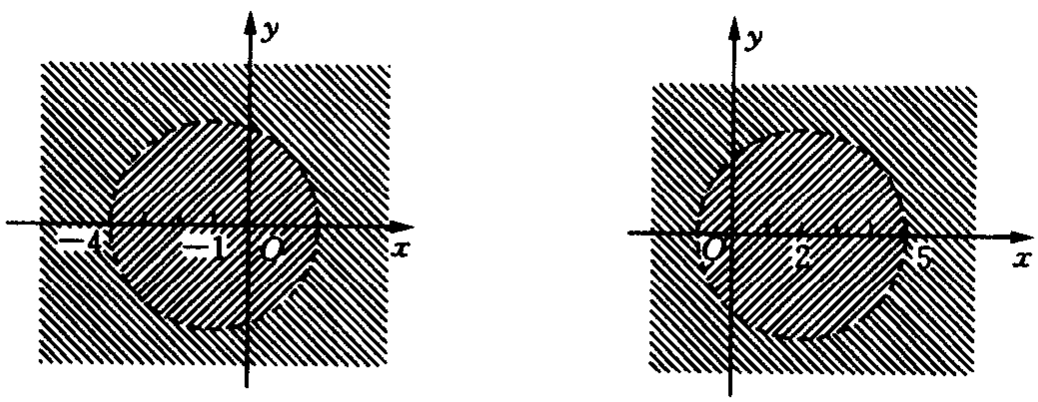


图 4-1

$D_3=\{z;\ 0<|z-2|<3\}$;

$D_4=\{z;\ 3<|z-2|<+\infty\}$.

(1) 因为 $f(z)=\dfrac{3}{2+z-z^2}$ 在 $D_1=\{z;\ 0<|z+1|<3\}$ 中解析,而

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{3-(z+1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}\quad(|z+1|<3)$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{2-z}+\frac{1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{z+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}\quad (0<|z+1|<3)$$

(2) 因为 $f(z)=\dfrac{3}{2+z-z^2}$ 在 $D_2=\{z;\ 3<|z+1|<+\infty\}$ 中解析，且

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{3-(z+1)}=\frac{-1}{z+1}\frac{1}{1-\dfrac{3}{z+1}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+1)^{n+1}}\quad (|z+1|>3)$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{2-z}+\frac{1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+1)^{n+1}}\quad (3<|z+1|<+\infty)$$

同理可推得

(3) $f(z)=-\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z+1}=-\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z-2+3}$

$$=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}$$

$$=-\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}\quad (0<|z-2|<3)$$

(4) $f(z) = -\dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z+1} = -\dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-2+3}$

$$= -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{3}{z-2}}$$

$$= -\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(z-2)^{n+1}}$$

$$(3 < |z-2| < +\infty)$$

例 14 证明 $\operatorname{ch}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$，其中

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \operatorname{ch}(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

证 因为 $\operatorname{ch}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$在 $0 < |z| < +\infty$ 中解析，取 $C = \{z;\ |z| = 1\}$，$\operatorname{ch}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$在 $0 < |z| < +\infty$ 中的罗朗展开式为

$$\operatorname{ch}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$

由罗朗定理(定理 4.15)知，系数

$$C_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}} + \mathrm{e}^{-z-\frac{1}{z}}\right)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (\text{令 } C\text{：} z(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$z(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\frac{e^{2\cos\theta} + e^{-2\cos\theta}}{e^{in\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ch}(2\cos\theta)(\cos n\theta - i\sin n\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \operatorname{ch}(2\cos\theta)\,d\theta \quad \left(\text{因为}\int_0^{2\pi} \sin n\theta \operatorname{ch}(2\cos\theta)\,d\theta = 0\right)$$

【思考题及解答】

1. 对于一般形式的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ $(a \neq 0)$，阿贝尔(Abel)定理[注1]应如何叙述?试证明阿贝尔定理的后半部分.

答 (1) 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ $(a \neq 0)$ 的阿贝尔定理：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 在 $z = z_0$ $(z_0 \neq a)$ 处收敛，那么当 $z \in \{z;\ |z-a| < |z_0 - a|\}$ 时，幂级数绝对收敛；如果幂级数在 $z = z_1$ 处发散，那么当 $z \in \{z;\ |z-a| > |z_1 - a|\}$ 时，幂级数发散.

(2) **证** 如果当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 在 $z = z_1$ 处发散时定理的结论不成立，即假设点 $z_2 \in \{z;\ |z-a| > |z_1 - a|\}$ 在 z_2 处的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 是收敛的.(此时因为 $z_1 \in \{z;\ |z-a| < |z_2 - a|\}$) 由定理的前半部分可知，此时幂级数在 $\{z;\ |z-a| < |z_2 - a|\}$ 中必绝对收敛，即幂级数在 z_1 点也是收敛的，这与我们的假设矛盾. 证毕.

[注1] 阿贝尔(Abel)定理　如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $z = z_0 (z_0 \neq 0)$ 处收敛，那么当 $z \in \{z;\ |z| < |z_0|\}$ 时，幂级数绝对收敛；如果幂级数在 $z = z_1$ 处发散，那么当 $z \in \{z;\ |z| > |z_1|\}$ 时，幂级数发散.

2. 对于定理 4.1.8[注2]，请用幂级数的一般形式 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n(a\neq 0)$ 写出相应的结论.

解 对于幂级数的一般形式 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ $(a\neq 0)$ 的结论，请详见本章定理 4.10；而[注 2] 所述结论，即为本章定理 4.10 中 $a=0$ 时的情况.

3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-1)^n$ 在点 $z=0$ 处收敛，在点 $z=2$ 处发散，试问幂级数在 $z=\frac{1}{2}$ 与 $z=3$ 处的敛散性.

答 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-1)^n$ 在 $z=0$ 处收敛，由题 1(阿贝尔定理) 的前

[注 2] **定理** 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 R，并设在收敛圆 $\{z;\ |z|<R\}$ 内幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 收敛于和函数 $f(z)$，则

(1°) 在收敛圆 $\{z;\ |z|<R\}$ 内，幂级数可以逐项求导直至任意阶，即

$$f'(z)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n\Big)'=\sum_{n=0}^{\infty}(C_nz^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nC_nz^{n-1}. \tag{1}$$

一般有

$$f^{(n)}(z)=n!\ C_n+\frac{(n+1)!}{1!}C_{n+1}z+\cdots+\frac{(n+k)!}{k!}C_{n+k}z^k+\cdots$$
$$(n=1,\ 2,\ \cdots)\quad(|z|<R), \tag{2}$$

且上式右边的级数与原级数有相同的收敛半径 R，收敛圆亦为 $\{z;\ |z|<R\}$，同时有 $f^{(n)}(0)=n!\ C_n$，所以

$$C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 记\ 0!=1). \tag{3}$$

(2°) 由(2)式可见，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的和函数在 $|z|<R$ 内解析.

(3°) 对于收敛圆 $\{z;\ |z|<R\}$ 内的任意分段光滑曲线 C，幂级数可以逐项求积分

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C\Big(\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n\Big)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_C z^n\mathrm{d}z\quad(|z|<R). \tag{4}$$

如果 C 是连接原点到 $|z|<R$ 内一点 z 的分段光滑曲线，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}z^{n+1}\quad(|z|<R). \tag{5}$$

等式右边的级数与原级数具有相同的收敛半径 R.

半部分可知，当 $z \in \{z;\ |z-1|<|0-1|\}$ 时，幂级数绝对收敛，$z=\dfrac{1}{2}$ 处有 $\dfrac{1}{2} \in \{z;\ |z-1|<1\}$ 成立，所以幂级数在 $z=\dfrac{1}{2}$ 处收敛；又已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-1)^n$ 在 $z=2$ 处发散. 同样，由题 1(阿贝尔定理) 的后半部分可知，当 $z \in \{z;\ |z-1|>|2-1|\}$ 时，幂级数发散，而在 $z=3$ 处有 $3 \in \{z;\ |z-1|>1\}$ 成立，所以幂级数在 $z=3$ 处发散.

4. 下列结论是否必然正确？为什么？请举例说明：

(1) 幂级数在它的收敛圆上处处收敛；

(2) 幂级数在它的收敛圆上处处不收敛.

答 否. 幂级数在它的收敛圆上未必处处收敛或处处不收敛，因为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 的收敛半径 R $(0 \leqslant R \leqslant +\infty)$ 求得后，只能说明在 $\{z;\ |z-a|<R\}$ 内幂级数是收敛的；在 $\{z;\ |z-a|>R\}$ 中幂级数是发散的.

至于在收敛圆 $\{z;\ |z-a|=R\}$ 上，幂级数的收敛与否视系数 C_n 的情况来确定. 例如，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径为 1，其收敛圆为 $\{z;\ |z-1|=1\}$，在收敛圆上的点 $z=0$ 处，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的；在收敛圆上另一点 $z=2$ 处幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 是发散的.

当然，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 在收敛圆上也可能处处收敛或处处不收敛. 例如，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 1，它在收敛圆 $\{z;\ |z|=1\}$ 上处处不收敛(因为一般项 z^n 当 $n \to \infty$ 时不趋于零)；幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径亦为 1，但它在收敛圆上处处收敛. 事实上，当幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 在收敛圆 $\{z;\ |z|=1\}$ 上时，级数的一般项 $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{|z|^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{z^n}{n^2}\right|$ 在 $\{z;\ |z|=1\}$ 上收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $\{z;\ |z|=1\}$ 上处处收敛.

5. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|$ 存在($\neq\infty$),问下列三个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}z^{n+1},\ \sum_{n=1}^{\infty}n\cdot C_nz^{n-1}$$

是否有相同的收敛半径?

答 是具有相同的收敛半径. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|$ 存在($\neq\infty$),对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$,其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|}\neq 0$ 存在且不为 0.

此时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{C_n}{n+1}z^{n+1}$ 的收敛半径 $R_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{C_n}{n+1}}{\dfrac{C_{n+1}}{n+2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|=R$,同时亦有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nC_nz^{n-1}$ 的收敛半径 $R_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{nC_{n+1}}{(n+1)C_{n+2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_{n+2}}\right|=R$,所以三者的收敛半径相同.

6. 试问函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)(z+1)}$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处展开的台劳级数的收敛半径是什么?

解 因为函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)(z+1)}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z_1=1,\ z_2=2,\ z_3=-1$,所以 $f(z)$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处展开的台劳(Taylor)级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-\mathrm{i})^n$ 的收敛半径 R 应为

$$R=\min_{1\leqslant k\leqslant 3}\{|z_k-\mathrm{i}|\}=\sqrt{2}\ (\text{见图 }4-2)$$

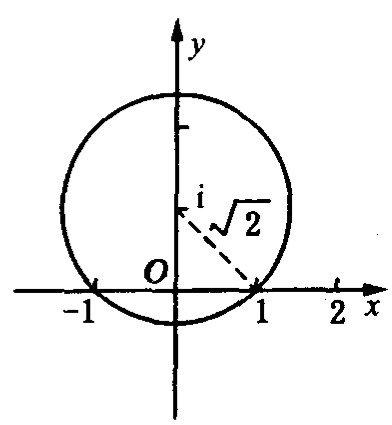


图 4-2

7. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 在 $z=0$ 处的麦克劳林级数的收敛半径是什么?

解 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上的奇点为

$$z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 处展开的麦克劳林(Maclaurin)级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径 R 为：

$$R = \min_{-\infty<k<+\infty} |z_k| = \frac{\pi}{2} \text{ (见图 4-3)}$$

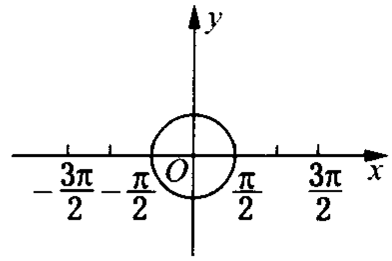


图 4-3

10. 试问函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-1)}$ 可以在 $z=0$，$z=1$，$z=-1$ 为中心的哪些环域中展开成罗朗级数，它们的罗朗级数各具什么形式？(只须指出环域及级数形式，不必具体写出罗朗展开式)

解 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-1)}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0,1,-1\}$ 上解析.

(1) 在以 $z=0$ 为中心的环域：$\{z;\ 0<|z|<1\}$ 与 $\{z;\ 0<|z|<+\infty\}$ 中展开的罗朗级数形式为：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n \text{ (见图 4-4)}$$

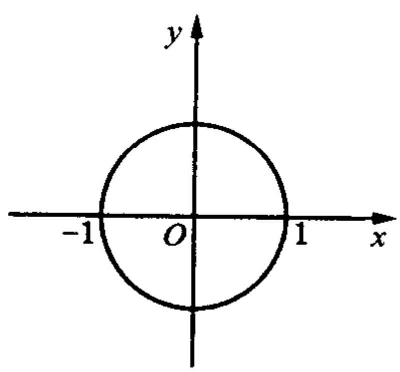


图 4-4

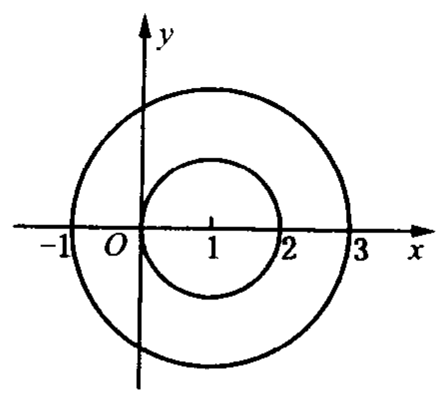


图 4-5

(2) 在以 $z=1$ 为中心的环域：$\{z;\ 0<|z-1|<1\}$ 与 $\{z;\ 1<|z-1|<2\}$ 与 $\{z;\ 2<|z-1|<+\infty\}$ 中展开的罗朗级数形式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-1)^n \text{ (见图 4-5)}$$

(3) 在 $z=-1$ 为中心的环域：

$$\{z;\ 0<|z+1|<1\}$$
$$\{z;\ 1<|z+1|<2\}$$
$$\{z;\ 2<|z+1|<+\infty\}$$

中展开的罗朗级数形式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z+1)^n \text{（见图 4-6）}$$

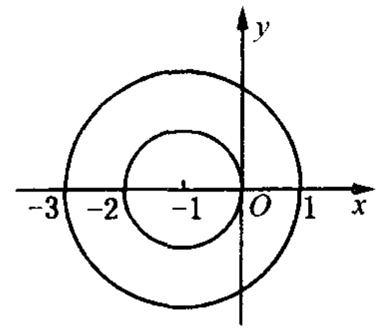


图 4-6

11. 罗朗定理中的罗朗系数公式

$$C_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\ (n=0,\pm 1,\cdots)$$

是否可用高阶导数的柯西积分公式写为 $C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$?为什么?

答 不可以.这是因为由罗朗定理的条件知 $f(z)$ 只在环域 $\{z;R_1<|z-z_0|<R_2\}$ 内解析.罗朗系数公式 $C_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\ (n=0,\pm 1,\cdots)$，其中 $C_R=\{z;|z-z_0|=R\}\ (R_1<R<R_2)$，所以该积分式中的 $f(\zeta)$ 在 C_R 及其内部并非解析，该复积分不符合高阶导数柯西积分公式的条件，所以不能写为 $C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ 的形式.

12. 在幂级数 $\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots$ 中，由于

$$z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\frac{z}{1-z}$$

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{-z}{1-z}$$

所以其和函数为 $f(z)=\frac{z}{1-z}-\frac{z}{1-z}=0$. 试问该结论是否正确?

答 不正确.因为幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^n=\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{0}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^n=z+z^2+\cdots=z(1+z+\cdots+z^{n-1}+\cdots)=\frac{z}{1-z}\quad (|z|<1)$$

而 $$\sum_{n=-\infty}^{0}z^n=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{z}{1-z}\quad \left(\left|\frac{1}{z}\right|<1 \text{ 即 } |z|>1\right)$$

所以上面两个级数的收敛域是不同的，因而不可能有 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n=\frac{z}{1-z}-\frac{z}{1-z}=0$ 成立的结论.

【习题及解答】

1. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$；　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}&=\frac{\mathrm{i}}{1}+\frac{\mathrm{i}^2}{2}+\frac{\mathrm{i}^3}{3}+\frac{\mathrm{i}^4}{4}+\cdots\\&\quad+\frac{\mathrm{i}^{4k+1}}{4k+1}+\frac{\mathrm{i}^{4k+2}}{4k+2}+\frac{\mathrm{i}^{4k+3}}{4k+3}+\frac{\mathrm{i}^{4k+4}}{4k+4}+\cdots\\&=\mathrm{i}-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{\mathrm{i}}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}\\&\quad-\frac{\mathrm{i}}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}+\cdots\\&=-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}+\cdots\right]\\&\quad+\mathrm{i}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots\right]\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\end{aligned}$$

复级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 的实部与虚部分别为两个收敛的交错级数. 根据定理 4.3 可知复级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 是收敛的，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ 只是条件收敛而非绝对收敛.

(2) 令 $z=\frac{1-3\mathrm{i}}{2}$，此时

$$|z|=\frac{|1-3\mathrm{i}|}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}>1$$

所以复数项级数的一般项 $z^n=\left(\frac{1-3\mathrm{i}}{2}\right)^n$ 不趋于 0，因此由定理 4.4 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3\mathrm{i}}{2}\right)^n$ 发散.

2. 计算积分 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z$.

解

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z\quad\left(\because\ \sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\quad(|z|<1)\right)$$

$$=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{1-z}\mathrm{d}z\quad\left(\because\ \frac{1}{1-z}\text{在}\ |z|\leqslant\frac{1}{2}\ \text{上解析}\right)$$

$$=2\pi\mathrm{i}+0=2\pi\mathrm{i}$$

3. 求下列幂级数的收敛半径与收敛圆.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$；　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$；　　(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\mathrm{e}^n}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n^n}{n!}z^n$；　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n$.

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n$ 的收敛半径：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}\right|=\frac{1}{2}$，收敛圆域为：$\left\{z;\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$，收敛圆域为：$\{z;\ |z-1|<1\}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$ 的收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，收敛圆域为：$\{z;$

$|z|<1\}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n+1}}=1$，收敛圆域为：$\{z;$ $|z|<1\}$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{e^n}$ 的收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{e^n}}{\dfrac{1}{e^{n+1}}}=e$，收敛圆域为：$\{z;\ |z|<e\}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\cdot z^n$ 的收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=0$ 在全平面除 $z=0$ 外处处发散；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lg n^n}{n!}z^n$，收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n\lg n}{n!}}{\dfrac{(n+1)\lg(n+1)}{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\lg n}{\lg(n+1)}=+\infty$，∴ 级数在 $\mathbb{C}$ 上处处收敛(即收敛圆域为$\{z;\ |z|<+\infty\}$)；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$ 的收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}=1$，收敛圆域为：$\{z;\ |z|<1\}$.

4. 求下列函数在指定点的台劳级数，并指出它们的收敛区域.

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}$ 在 $z=1$ 处；

(2) e^z 在 $z=1$ 处；

(3) $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=0$ 处；

(4) $\dfrac{1}{(z-2)^2}$ 在 $z=1$ 处；

(5) $\dfrac{1}{z^2-2z+10}$ 在 $z=1$ 处.

解 (1) ∵ $\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{2+(z-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}\quad\left(\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1\right)$,

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}\quad(|z-1|<2)$$

$$\therefore \frac{z-1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\quad (|z-1|<2)$$

(2) $$e^z=e\cdot e^{z-1}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}\quad (|z-1|<+\infty)$$

(3) $$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^2)^n\quad (|z^2|<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\quad (|z|<1)$$

(4) $$\frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'=\left[\frac{1}{1-(z-1)}\right]'$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right]'\quad (|z-1|<1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-1)^{n-1}\quad (|z-1|<1)$$

(5) $$\frac{1}{z^2-2z+10}=\frac{1}{3^2+(z-1)^2}=\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^{2n}\quad \left(\left|\left(\frac{z-1}{3}\right)^2\right|<1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{3^{2n+2}}\quad (|z-1|<3)$$

5. 求下列函数的麦克劳林级数,并指出它们的收敛范围.

(1) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$;　　(2) $\sin(z^2)$;　　(3) z^2e^z.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{1+u}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n\quad (|u|<1)$,所以

$$\frac{1}{(1+u)^2}=-\left(\frac{1}{1+u}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nu^{n-1}\quad (|u|<1)$$

用 z^2 代 u,得到

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(z^2)^{n-1}\quad (|z^2|<1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot n \cdot z^{2n-2} \quad (|z|<1)$$

(2) $\because$ $\sin u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|u|<+\infty)$

$$\therefore \sin z^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z^2|<+\infty)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{4n-2}}{(2n+1)!} \quad (|z|<+\infty)$$

(3) $z^2 \cdot e^z = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z|<+\infty)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n!} \quad (|z|<+\infty)(\text{记 } 0!=1)$$

6. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $|z|<R$ 中收敛,如果 $0<r<R$,证明

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\theta}$$

其中 $z = re^{i\theta}$, $C_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$ 且有等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 r^{2n}$$

成立.

(提示:对 C_n 利用柯西积分公式及 $f(z) \cdot \overline{f(z)} = |f(z)|^2$ 再逐项积分)

证 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $|z|<R$ 中收敛

由台劳级数的系数公式知

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,2,\cdots) \quad C_r:\{\zeta;\ |\zeta|=r\} \quad (0<r<R)$$

令 $\zeta = re^{i\theta} \in C_r \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, $\zeta'(\theta) = rie^{i\theta}$, $d\zeta = rie^{i\theta}d\theta$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} rie^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot \overline{f(re^{i\theta})} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\theta} \right) \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\theta} \right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n} r^n e^{-in\theta} \right) d\theta$$

$$\because \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} | C_n |^2 (r^n)^2 d\theta \right] = \sum_{n=0}^{\infty} | C_n |^2 r^{2n}$$

7. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 有收敛半径为 R，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(C_n) z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

证 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 有收敛半径 R，则其收敛圆域为 $D = \{z; | z | < R\}$，所以对于 $z \in D$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛，亦即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} | C_n || z |^n$ 收敛. 又因为 $| \mathrm{Re}(C_n) z^n | \leqslant | C_n z^n |$ 亦即 $| \mathrm{Re}(C_n) || z |^n \leqslant | C_n || z^n |$ $(z \in D)$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(C_n) z^n$ 在 D 内也绝对收敛，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(C_n) z^n$ 在 D 内收敛. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(C_n) z^n$ 的收敛域至少是 D，即其收敛半径至少是 R，所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(C_n) z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

注：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径 R 可由公式 $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{| C_n |}}$ 求出，设极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{| \mathrm{Re}(C_n) |}}$ 存在，且为 R_1，则由 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{| \mathrm{Re}(C_n) |}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{| C_n |}}$ 可知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(C_n) z^n$ 的收敛半径 $R_1 \geqslant R$.

8. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 R，$D = \{z; | z | < R\}$，令 $z_0 \in D$，$\tilde{R}$

是 $f(z)$ 在 z_0 点的台劳级数的收敛半径，证明 $R-|z_0|\leqslant\widetilde{R}\leqslant R+|z_0|$.

证 已知 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 R，收敛圆域为 $D=\{z;\ |z|<R\}$，则和函数 $f(z)$ 在 D 内解析. 在收敛圆周 $\{z;\ |z|=R\}$ 上至少存在着和函数 $f(z)$ 的一个奇点（否则，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径还可扩大，证略）. 如果 $f(z)$ 在 $\{z;\ |z|>R\}$ 中还有奇点 $a_k\ (k=1,2,\cdots)$ 则必有 $|a_k|>R\ (k=1,2,\cdots)$. 设 $z_0\in D=\{z;\ |z|<R\}$，$z_0=r_0e^{i\theta}\quad(0<r_0<R)$，已知 $f(z)$ 在 z_0 点解析，由定理 4.2.1 的推论可知 $f(z)$ 在 z_0 点的一个邻域 $D_1=\{z;\ |z-z_0|<\widetilde{R}\}$ 内必可展开成收敛的幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C'_n(z-z_0)^n$，级数的收敛半径为 $\widetilde{R}$，级数在 D_1 中收敛于和函数 $f(z)$，同时 $f(z)$ 必在 D_1 内解析，所以必有 $R-|z_0|\leqslant\widetilde{R}\leqslant R+|z_0|$.

我们来看以下两种情况：(1) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 $D=\{z;\ |z|<R\}$ 内收敛，和函数 $f(z)$ 在收敛圆 $\{z;\ |z|=R\}$ 上点 $z_1=Re^{i\theta_0}$ 处不解析，则此时 $f(z)$ 在 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ 处的台劳级数收敛半径必为 $\widetilde{R}=R-|z_0|$；(2) 如果在 D 中收敛幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的和函数 $f(z)$ 只在收敛圆 $\{z;\ |z|=R\}$ 上的一点 $z_2=Re^{i(\theta_0+\pi)}$ 处不解析，且 $f(z)$ 在 $\{z;\ |z|>R\}$ 内的其余奇点 $a_k\ (k=1,2,\cdots)$ 都满足 $|z_0-a_k|>R+|z_0|$，则此时 $f(z)$ 在 z_0 点的台劳级数收敛半径必为 $\widetilde{R}=R+|z_0|$（见图 4-7）. 除去上述两种情况外，$f(z)$ 在 z_0 点的台劳级数收敛半径 $\widetilde{R}$ 必满足 $R-|z_0|<\widetilde{R}<R+|z_0|$.

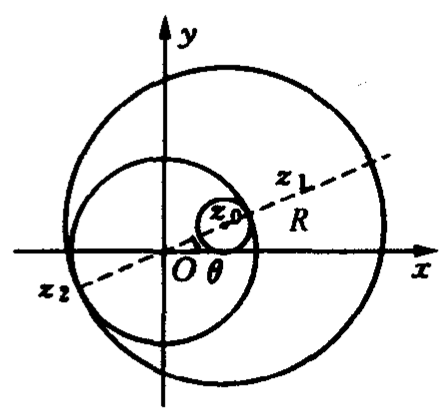


图 4-7

例如幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 的收敛半径 $R=1$，和函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$，收敛圆域为 $D=\{z;\ |z|<1\}$，$f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上解析.

(1) $z_0=\dfrac{1}{2}\in\{z;\ |z|<1\}$，$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z_0=\dfrac{1}{2}$ 处可展开台劳级数

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\left(z-\frac{1}{2}\right)^{n}\quad\left(\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\right)$$

它的收敛半径$\widetilde{R}=\frac{1}{2}\left(因为 R-|z_0|=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)$.

(2) 在 $z_1=-\frac{1}{2}\in\{z;|z|<1\}$ 处，$f(z)$ 的台劳级数

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{n}\quad\left(\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}\right)$$

它的收敛半径$\widetilde{R}=\frac{3}{2}\ \left(R+|z_1|=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\right)$.

而当 $z_0=re^{i\theta}$(其中 $0<r<1$, $\theta\neq 0$, $\theta\neq\pi$ 时，$|z_0|=r$, $\widetilde{R}=\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}$，有 $1-r<\widetilde{R}<1+r$，即 $1-|z_0|<\widetilde{R}<1+|z_0|$.

9. 证明复分析中罗必达法则：设 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 点解析，且 z_0 均为 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 的 k 级零点($k\geqslant 1$)，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P^{(k)}(z_0)}{Q^{(k)}(z_0)}$$

证 因为 $P(z)$与 $Q(z)$在 z_0 点解析，z_0 是 $P(z)$与 $Q(z)$的 k ($k\geqslant 1$)级零点，所以由定理 4.13，存在 $\delta_1>0$，使得在$\{z;|z-z_0|<\delta_1\}$ 中 $P(z)$ 可表示为

$$P(z)=(z-z_0)^kP_1(z)\tag{1}$$

其中 $P_1(z)$总在 z_0 解析，且有

$$P_1(z_0)=\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}\tag{2}$$

同样，存在 $\delta_2>0$，使得在$\{z;|z-z_0|<\delta_2\}$ 中，$Q(z)$ 可表示为

$$Q(z)=(z-z_0)^kQ_1(z)\tag{3}$$

其中 $Q_1(z)$在 z_0 点解析，且有

$$Q_1(z_0)=\frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!}\tag{4}$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则在$\{z;|z-z_0|<\delta\}$ 中，(1) 和(3) 式同时成立，所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^kP_1(z)}{(z-z_0)^kQ_1(z)}=\frac{P_1(z_0)}{Q_1(z_0)}=\frac{P^{(k)}(z_0)}{Q^{(k)}(z_0)}$$

10. 假设函数 $f(z)=e^{z^2}$，则有 $f^{(2n)}(0)=\dfrac{(2n)!}{n!}$，试不用直接求导计算.

（提示：台劳展开）

解 $\because f(z)=e^{z^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!}\quad(|z|<+\infty)$（记 $0!=1$）

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}\quad(|z|<+\infty)$$

所以 $C_{2n}=\dfrac{1}{n!}$；又因为 $C_{2n}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\ (n=0,1,2,\cdots)$（台劳系数），所以

$$\frac{1}{n!}=\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\quad 即\quad f^{(2n)}(0)=\frac{(2n)!}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

11. 如果 $f(z)$ 是偶函数，且 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 $|z|<R$ 中收敛 $(R>0)$，证明 $C_{2n+1}=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

（即偶函数的麦克劳林级数中不含 z 的奇数次幂项，同理可证明奇函数的麦克劳林级数中不含 z 的偶数次幂项）

证 因为 $f(z)$ 是偶函数，所以有

$$f(-z)=f(z)\quad z\in\{z;\ |z|<R\}$$

即 $$f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n=f(z)\quad(z\in\{z;\ |z|<R\})$$

$\therefore$ $$\sum_{n=0}^{\infty}C_n[z^n-(-1)^nz^n]=0$$

即 $$\sum_{n=k}^{\infty}2C_{2k+1}\cdot z^{2k+1}=0\Rightarrow C_{2k+1}=0\ (k=0,1,2,\cdots)$$

12. 证明

(1) $\left(\dfrac{z^n}{n!}\right)^2=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{z^ne^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}$；

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2z\cos\theta}d\theta.$

（提示：(1) 利用高阶导数的柯西积分公式；(2) 对(1)式求和.）

证 (1) 等式右边

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\frac{z^n}{n!}\oint_{|\zeta|=1}\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\frac{z^n}{(n!)^2}\cdot\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

$$=\frac{z^n}{(n!)^2}(e^{z\zeta})^{(n)}_{\zeta=0}=\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2$$

（因为 $e^{z\zeta}$ 在 $|\zeta|\leqslant 1$ 中解析，所以由高阶导数柯西积分公式可得）

(2) 由(1)知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n!}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\cdot\zeta^n}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n}{n!}\cdot\frac{e^{z\zeta}}{\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{e^{\frac{z}{\zeta}}\cdot e^{z\zeta}}{\zeta}d\zeta$$

令 $\zeta=e^{i\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，$d\zeta=ie^{i\theta}d\theta$，则

$$e^{z\zeta}=e^{z(\cos\theta+i\sin\theta)},\ e^{\frac{z}{\zeta}}=e^{z(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$\therefore\ e^{\frac{z}{\zeta}}\cdot e^{z\zeta}=e^{2z\cos\theta}$$

$$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2z\cos\theta}}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2z\cos\theta}d\theta.$$

13. 求下列各函数在指定圆环内的罗朗级数.

(1) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$　　在 $2<|z|<3$ 中；

(2) $\dfrac{z-1}{z^2}$　　在 $|z-1|>1$ 中；

(3) $\sin\dfrac{z}{z+1}$　　在 $0<|z+1|<+\infty$ 中；

(4) $e^{-\frac{1}{z^2}}$　　在 $0<|z|<+\infty$ 中；

(5) $\dfrac{1}{z(z^2+1)}$　　在 $0<|z|<1$ 与 $1<|z|<+\infty$ 中；

(6) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$　　在 $0<|z+2|<2$ 中；

(7) $\dfrac{1}{(1-z)^3}$　　在 $|z|<1$ 中.

解　(1) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$

$$\because \frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (|z|<3)$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad (|z|>2)$$

所以在$\{z;\ 2<|z|<3\}$中$\frac{1}{(z-2)(z-3)}$的罗朗展开式为：

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

(2) $\frac{z-1}{z^2}=(z-1)\cdot\frac{1}{z^2}$，在$\{z;\ |z-1|>1\}$中

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$(|z-1|>1)$$

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \quad (|z-1|>1)$$

$$\therefore \frac{z-1}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\frac{1}{(z-1)^n} \quad (|z-1|>1)$$

(3) $$\sin\frac{z}{z+1}=\sin\frac{z+1-1}{z+1}=\sin\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$=\sin 1\cos\frac{1}{z+1}-\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z+1}$$

$$=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n}}$$

$$-\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n+1}} \quad (0<|z+1|<+\infty)$$

(4) $$e^{-\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^{2n}} \quad (0<|z|<+\infty)$$

(5) $\frac{1}{z(z^2+1)}$：

(i) 在$\{z; 0<|z|<1\}$中的罗朗展开式

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1}\quad(0<|z|<1)$$

(ii) 在$\{z; 1<|z|<+\infty\}$中的罗朗展开式

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+3}}\quad(1<|z|<+\infty)$$

(6) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}=\dfrac{1}{(z+2)^3}\cdot\dfrac{1}{z}$

$$\because\ \frac{1}{z}=-\frac{1}{2-(z+2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+1}}\quad(0<|z+2|<2)$$

$$\therefore\ \frac{1}{z(z+2)^3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-3}}{2^{n+1}}\quad(0<|z+2|<2)$$

(7) $\because\ \dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n\quad(|z|<1)$

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\quad(|z|<1)$$

$$\therefore\ \frac{1}{(1-z)^3}=\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]'\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}\quad(|z|<1)$$

14. 如果k满足$k^2<1$的实数，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

考虑、$f(z)=re^{i\alpha}=$

I

$g(z)=e^{-i\alpha}f(z)=r;$

$\left(\text{提示：令 } z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)\text{，在}\{z;\ |z| > |k|\}\text{ 中将函数} \frac{1}{z-k} \text{ 展开}\right.$

成罗朗级数，再比较等式两边的实部与虚部.$\Big)$

证 当 $z \in \{z;\ |k| < |z| < +\infty\}$ 时

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{z\left(1-\dfrac{k}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{z^{n+1}} \quad (|k| < |z| < +\infty)$$

$$\text{等式右边} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta} \quad \begin{pmatrix}\text{令 } z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ \therefore\ |z| = 1 > |k| \text{ 成立，级数收敛}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} k^n [\cos(n+1)\theta - \mathrm{i}\sin(n+1)\theta] \tag{1}$$

$$\text{等式左边} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - k} = \frac{1}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta - k}$$

$$= \frac{(\cos\theta - k) - \mathrm{i}\sin\theta}{(\cos\theta - k)^2 + \sin^2\theta} = \frac{(\cos\theta - k) - \mathrm{i}\sin\theta}{1 - 2k\cos\theta + k^2} \tag{2}$$

比较(1)，(2)式得

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos\theta - k}{1 - 2k\cos\theta + k^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1 - 2k\cos\theta + k^2}.$$

15. 令 $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{t\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) z^n$ 是对于每个固定的 t，函数在 $z=0$ 的环域中的罗朗级数，$J_n(t)$ 称为 n 阶贝塞尔(Bessel) 函数，证明：

(1) $J_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$；

(2) $J_n(-t) = J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t) \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

$\left(\text{提示：(1) 利用 } J_n(t) \text{的积分表达式；(2) 分别用} \frac{1}{z} \text{和} -z \text{ 替代 } z\text{，再比较两}\right.$

边 z 的同次幂系数.$\Big)$

证 $\because$ $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{t\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2}}$ 在$\{z;\ 0 < |z| < +\infty\}$ 中解析，所以可展开罗朗级数

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)z^n$. 其中罗朗系数 $J_n(t)$ $(n \geqslant 0)$ 的表达式为

(1) $$J_n(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\exp \dfrac{t\left(\zeta - \dfrac{1}{\zeta}\right)}{2}}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t\sin\theta - n\theta)} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(t\sin\theta - n\theta) + \mathrm{i}\sin(t\sin\theta - n\theta)] \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [\cos(t\sin\theta - n\theta) + \mathrm{i}\sin(t\sin\theta - n\theta)] \mathrm{d}\theta \right.$$

$$\left. + \int_{\pi}^{2\pi} [\cos(t\sin\theta - n\theta) + \mathrm{i}\sin(t\sin\theta - n\theta)] \mathrm{d}\theta \right\} \quad \begin{array}{l}(\text{在第二个积分中}\\ \text{令 } \theta = 2\pi - u)\end{array}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [\cos(t\sin\theta - n\theta) + \mathrm{i}\sin(t\sin\theta - n\theta)] \mathrm{d}\theta \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} [\cos(t\sin u - nu) - \mathrm{i}\sin(t\sin u - nu)] \mathrm{d}u \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta) \mathrm{d}\theta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{i}$$

(2) 对于 $n \leqslant -1$ 时的罗朗系数 $J_{-n}(t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，可在式(i)中用 $-n$ 代 n，得

$$J_{-n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta + n\theta) \mathrm{d}\theta \quad (\text{令 } \theta = \pi - u)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[t\sin u + n(\pi - u)] \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[(t\sin\theta - n\theta) + n\pi] \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta) \mathrm{d}\theta$$

$$= (-1)^n J_n(t) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{ii}$$

若在(i)式中用$-t$代t,也可得到

$$J_n(-t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[-(t\sin\theta + n\theta)]\mathrm{d}\theta \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta + n\theta)\mathrm{d}\theta = J_{-n}(t)$$

$$= (-1)^n J_n(t)$$

(ii)式证明亦可用提示的方法.在$z = 0$的去心邻域$\{z;\ 0 < |z| < +\infty\}$中

$f(z) = \exp\left[\dfrac{t\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2}\right]$的罗朗展开式为

$$f(z) = \exp\left[\frac{t\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) z^n \quad (0 < |z| < +\infty)$$

用$\dfrac{1}{z}$替代z,得

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left[\frac{t\left(\frac{1}{z} - z\right)}{2}\right] = \exp\left[-\frac{t\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) \frac{1}{z^n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{-n}(t) z^n \quad (0 < |z| < +\infty)$$

用$-z$替代z

$$f(-z) = \exp\left[\frac{t\left(-z + \frac{1}{z}\right)}{2}\right] = \exp\left[-\frac{t\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)(-z)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(t) z^n \quad (0 < |z| < +\infty)$$

因为$f\left(\dfrac{1}{z}\right) = f(-z)$,所以$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_{-n}(t) z^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(t) z^n$,比较两边$z$的同次幂系数得

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

第五章　留　数

【基本要求】

(1) 了解解析函数的孤立奇点是怎样进行分类的：是根据函数在孤立奇点的去心邻域中罗朗展开式的主部情况来决定该孤立奇点的类别，它们分别是可去奇点、极点、本性奇点三类.

(2) 讨论几个判断孤立奇点类别的等价性定理，特别是判断可去奇点与极点的定理，说明不一定非得将函数在孤立奇点的去心邻域中进行罗朗展开而得到结论，还可用等价定理去判断. 对于孤立奇点是极点的情况，还得进一步确定极点的级，在讨论了零点与极点的关系之后再来判断极点的级会很方便.

(3) 了解一个函数在孤立奇点处留数的定义：函数在孤立奇点 z_0 点的留数就是函数在 z_0 点的去心邻域 $\{z;\ 0<|z-z_0|<\delta\}$ 中罗朗展开式的负一次幂 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 项的系数 C_{-1}. 显然，函数在可去奇点处的留数为零；对于本性奇点，其留数的求法只能依赖于函数在该点的去心邻域中的罗朗展开式. 对于极点，除罗朗展开外，还有许多不同的计算公式，应该灵活运用各种等价性定理去进行留数计算.

(4) 会运用留数定理计算某些复积分. 联系第三章中利用柯西积分公式与高阶导数柯西积分公式进行复积分计算的情况，从中找出它们之间的联系与区别. 会运用留数公式表计算留数.

(5) 了解某些实积分与复积分之间的转换关系. 从列出的三类主要实积分可以看出，实分析中的某些积分(或某些主值意义下的广义

积分)计算较为困难,但如果能将它转化成闭围道上的复积分,再利用留数定理进行计算将会比较简单,甚至更多类型的实积分也可以化为复积分方法去计算,从而使我们了解数学方法的互通性与灵活性.

【基本概念】

1. 孤立奇点的分类及其性质

使函数 $f(z)$ 不解析的点称为 $f(z)$ 的奇点.

定义 5.1 已知 $z=a$ 是 $f(z)$ 的奇点,若存在着 a 的一个邻域 $D(a, R)=\{z; |z-a|<R\}$ $(R>0)$, $f(z)$ 在 $D(a, R)$ 中除 a 外别无其他奇点(即 $f(z)$ 在 $\{z; 0<|z-a|<R\}$ 中解析),则称 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

可见奇点有孤立与不孤立之分. 例如 $z=2$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ 的孤立奇点,而 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$ 的非孤立奇点. 又如 $f(z)=\ln z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{x+\mathrm{i}y; x\leqslant 0, y=0\}$ 上解析. 因此原点 $z=0$ 与负实轴上的点均是 $\ln z$ 的非孤立奇点.

本章我们只对孤立奇点感兴趣,特别是对解析函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 的去心邻域 $\{z; 0<|z-a|<R\}$ 中的罗朗展开式的讨论,以此来判断该奇点的性态.

定义 5.2 设 $f(z)$ 有孤立奇点 z_0,它在 z_0 的去心邻域 $\{z; 0<|z-z_0|<R\}$ 中解析,其罗朗展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$(0<|z-z_0|<R) \tag{5.1}$$

(5.1)式右边第二式 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 称为罗朗级数的解析部分，第一部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n$ 称为罗朗级数的主要部分(或简称主部). 如果

(1) $f(z)$的罗朗级数(5.1)式中主部为零(即$(z-z_0)$的负幂项系数全为零)，则称 z_0 为 $f(z)$的**可去奇点**；

(2) $f(z)$的罗朗级数(5.1)式中主部只有有限项. 设 $C_{-m}\neq 0$，但 $C_{-(k+m)}=0\ (k=1,2,\cdots)$ (m 为正整数)，此时主部为

$$\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}\quad (C_{-m}\neq 0)$$

则称 z_0 为 $f(z)$的 **m 级极点**；

(3) $f(z)$的罗朗级数(5.1)式中主部有无穷多项，则称 z_0 为 $f(z)$的**本性奇点**.

例 1 已知 $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^2}$，$z=0$ 是 $f(z)$的孤立奇点，则 $f(z)$在$\{z;\ 0<|z|<+\infty\}$中的罗朗展开式

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{\cos z-1}{z^2}\\&=\frac{1}{z^2}\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots-1\right]\\&=-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}+\cdots\\&\qquad\qquad(0<|z|<+\infty)\end{aligned}$$

中不含有 z 的负幂项. 如果补充定义 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$，则 $f(z)$在 $z=0$ 处连续. 由第三章习题 16 及定理 3.6(莫累拉定理)知 $f(z)$在 $z=0$ 解析，所以该奇点是可去的.

我们要鉴别一个解析函数的孤立奇点是何种孤立奇点，是否必须将函数在孤立奇点的去心邻域中罗朗展开，然后再由主部情况来

判断呢？下面我们将介绍判断孤立奇点类型的一些等价性定理，可以让我们比较简捷的对孤立奇点进行分类.

定理 5.1 设 z_0 是 $f(z)$的孤立奇点，则下面的结论等价：

(1) z_0 是 $f(z)$的可去奇点；

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在(且$\neq\infty$)； (5.2)

(3) $f(z)$在 z_0 的一个邻域内有界； (5.3)

(4) $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$. (5.4)

(证明见参考书目[1] 120 页)

定理 5.2 设 $f(z)$在 z_0 点的去心邻域 $\{z; 0<|z-z_0|<R\}$ 中解析，则 z_0 是 $f(z)$的 $m\ (m\geqslant 1)$ 级极点的充要条件是 $f(z)$可表示成如下形式

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} \tag{5.5}$$

其中 $\psi(z)$在 z_0 点解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$.

定理 5.3 z_0 是函数 $f(z)$的 $m\ (m\geqslant 1)$ 级极点的充要条件是：z_0 是函数$\dfrac{1}{f(z)}$的 $m\ (m\geqslant 1)$ 级零点.

推论 1 设 z_0 分别是 $f(z)$与 $g(z)$的 m 级与 n 级 $(m, n\geqslant 1)$ 极点，则 z_0 是 $f(z)\cdot g(z)$的 $m+n$ 级极点.

推论 2 设 z_0 分别是 $f(z)$与 $g(z)$的 m 级与 n 级 $(m, n\geqslant 1)$ 零点，设 $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$，

(1) 如果 $m\geqslant n$，则 z_0 是 $f(z)$的可去奇点；如果 $h(z_0)=0$，则 z_0 是 $h(z)$的 $m-n$ 级零点；

(2) 如果 $m<n$，则 z_0 是 $f(z)$的 $n-m$ 级极点.

推论 3 若 z_0 是 $f(z)$的孤立奇点，则 z_0 是 $f(z)$的极点的充分必要条件是

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty \tag{5.6}$$

例 2 指出函数 $h(z)=\dfrac{\tan z}{z}$ 的孤立奇点,并将其分类.

解 $h(z)=\dfrac{\tan z}{z}=\dfrac{\sin z}{z\cos z}$ 的孤立奇点为:

$$z=0,\ z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\quad(k=0,\pm 1,\cdots)$$

因为 $z=0$ 是分母的一级零点, $z_n=n\pi\ (n=0,\pm 1,\cdots)$ 是分子的零点,因为 $\sin z_n=0$, $(\sin z)'_{z_n}=\cos z_n\neq 0$, 所以 $z_n=n\pi$ 是分子的一级零点. $n=0$ 时 $z=0$ 也是分子的一级零点. 所以 $z=0$ 是 $h(z)=\dfrac{\tan z}{z}$ 的可去奇点.

对于 $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots)$, 改写 $h(z)$ 为 $h(z)=\dfrac{\sin z/z}{\cos z}$, 所以 z_k 不是分子的零点,是分母的一级零点. $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots)$ 是 $h(z)$ 的单极点.

例 3 设 z_0 是 $f(z)$ 的 $k\ (k\geqslant 1)$ 级零点,则 z_0 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的单极点.

证 因为 z_0 是 $f(z)$ 的 $k\ (k\geqslant 1)$ 级零点,由(4.31)式知, $f(z)$ 可表示成

$$f(z)=(z-z_0)^k\psi(z)\quad(|z-z_0|<\delta)$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0 点解析,且 $\psi(z_0)\neq 0$.

$$f'(z)=k(z-z_0)^{k-1}\psi(z)+(z-z_0)^k\psi'(z)\quad(|z-z_0|<\delta)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-z_0}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

因为 $\psi(z)$ 在 z_0 点解析, $\psi(z_0)\neq 0$, 所以 $\dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 在 z_0 点解析. 在 z_0 的一个邻域 $D(z_0,\rho)\ (\rho\leqslant\delta)$ 中可台劳展开为

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0) \quad (|z-z_0|<\rho)$$

所以

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \quad (0<|z-z_0|<\rho)$$

由定义 5.2 知 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\{z;\ 0<|z-z_0|<\rho\}$ 的罗朗展开只有 $C_{-1}=k\neq 0$，其余负幂部分系数均为零，所以 z_0 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的单极点.

例 4 设 z_0 是 $f(z)$ 的 $k(k\geqslant 1)$ 级极点，则 z_0 是 $f'(z)$ 的 $k+1$ 级极点，也是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的单极点.

证 由定理 5.2 知，若 z_0 是 $f(z)$ 的 k $(k\geqslant 1)$ 级极点，则在 z_0 的一个去心邻域中，$f(z)$ 可表示为

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$，

$$f'(z) = \frac{-k\cdot\psi(z)}{(z-z_0)^{k+1}} + \frac{\psi'(z)}{(z-z_0)^k},\quad \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z-z_0} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

因为 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 在 z_0 点解析，与例 3 同样理由，$z=z_0$ 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的单极点.

定理 5.4 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 既不存在也不为 ∞.

对于本性奇点，我们通常是将函数在奇点的去心邻域中罗朗展开以后再来判断.

2. 留数定理及留数计算

(1) 留数的定义及留数定理

定义 5.3 设 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个

去心邻域 $D(z_0, R)\backslash\{z_0\} = \{z_0;\ 0 < |z - z_0| < R\}$ 中解析. 其罗朗展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

定义 $\frac{1}{z - z_0}$ 的系数 C_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数, 记为

$$\operatorname{Res}[f;\ z_0] = C_{-1} \tag{5.7}$$

由于系数公式 $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$ $0 < r < R,\ C_r = \{z;\ |z - z_0| = r\})$, 所以有

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(\zeta) d\zeta \tag{5.8}$$

即
$$\operatorname{Res}[f;\ z_0] = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(\zeta) d\zeta$$

$$\oint_{C_r} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i C_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}[f;\ z_0] \tag{5.8$'$}$$

此处 z_0 是函数在闭曲线 C_r 内部的唯一孤立奇点.

(5.8)$'$式也给出了函数在闭曲线上积分计算的一个重要方法.

例 5 求积分 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{2}{z}} dz$.

解 $z = 0$ 是函数 $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$ 的孤立奇点, $e^{\frac{2}{z}}$ 在 $\{z;\ 0 < |z| < +\infty\}$ 中的罗朗展开式为

$$e^{\frac{2}{z}} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \cdots$$
$$(0 < |z| < +\infty)$$

$z = 0$ 是 $e^{\frac{2}{z}}$ 的本性奇点, 有 $C_{-1} = 2 = \operatorname{Res}[e^{\frac{2}{z}};\ 0]$, 所以

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i \mathrm{Res}[e^{\frac{2}{z}}; 0] = 4\pi i$$

定理 5.5 （留数定理）设 C 是单连通区域 D 内的一条简单闭曲线（正向），如果 $f(z)$ 在 C 上解析，且在 C 内部除了有限个孤立奇点 z_1，z_2，…，z_n 外解析，则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f; z_k] \tag{5.9}$$

证 作 $C_k = \{z; |z - z_k| = \rho_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，设

$$\delta = \min\{\min_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \zeta \in C}} |\zeta - z_k|, \min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i - z_j|\} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

取 $\rho_k < \dfrac{\delta}{2}$，则 C_k 落在 C 内部，且互不包含互不相交. 每个 C_k 内只含有 $f(z)$ 的一个孤立奇点 $z_k(k = 1, 2, \cdots, n)$（见图 5－1）.

由柯西积分定理 3.2 的推论 2 中(3.6)式与(5.8)′式，得

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z) dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \mathrm{Res}[f; z_k]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f; z_k]$$

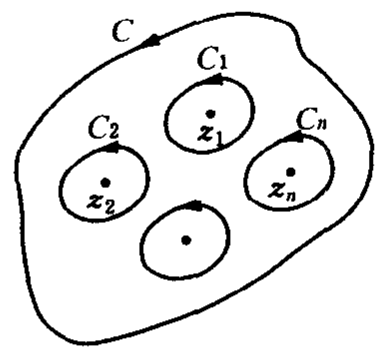


图 5－1

(2) 留数计算

关于函数在孤立奇点处的留数计算，主要就是讨论函数在极点处的留数计算公式. 因为可去奇点的留数显然为零（函数在可去奇点的去心邻域中的罗朗展开式的负幂项系数均为零，所以 $C_{-1} = 0$），而对函数在本性奇点处的留数，除了用罗朗展开找出 C_{-1} 外没有其他更简捷的方法. 下面就极点的情况讨论留数的计算公式（当然最基本的方法仍然是罗朗展开后求 C_{-1} 的方法）.

定理 5.6 设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点 $(m \geqslant 1)$，则

$$\mathrm{Res}[f;\ z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \quad (5.10)$$

$m = 1$ 时

$$\mathrm{Res}[f;\ z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) \quad (5.11)$$

推论 1 若 $f(z)$可表示成 $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$，其中 $m \geqslant 2$ 为整数；$\psi(z)$在 z_0 点解析，且 $\psi(z_0) \neq 0$，则

$$\mathrm{Res}[f;\ z_0] = \frac{\psi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad (5.12)$$

推论 2 若 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z_0) \neq 0$，$Q(z_0) = 0$，$Q'(z_0) \neq 0$，（即 z_0 是 $f(z)$的单极点）则

$$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)};\ z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \quad (5.13)$$

推论 3 若 z_0 是 $g(z)$的 k $(k \geqslant 1)$ 级零点，是 $h(z)$的 $k+1$ 级零点，此时 z_0 是 $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的单极点，则

$$\mathrm{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};\ z_0\right] = (k+1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)} \quad (5.14)$$

（证明见本章思考题及解答第 8 题） $-$ π $\dfrac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$

例 6 求 $f(z) = \dfrac{\pi \cot \pi z}{z^2}$ 在 $z_0 = 0$ 处的留数.

解 $f(z) = \dfrac{\pi \cot \pi z}{z^2} = \dfrac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$. $z_0 = 0$ 是 $f(z)$的分母的三级零点，不是分子的零点，所以 $z_0 = 0$ 是 $f(z)$的三级极点. 由公式(5.10)知

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\pi \cot \pi z}{z^2};\ 0\right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3 \cdot \frac{\pi \cot \pi z}{z^2}\right]$$

$\dfrac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$ $\quad f(t) = \dfrac{t \cos t}{\sin t}$

$\dfrac{1}{z^3}($ $\quad f'(t) = \dfrac{-t}{\sin^2 t} + \dfrac{\cos t}{\sin t}$

$$\pi^2 f''(t) = -\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{t\,2\sin t\cos t}{\sin^4 t} - \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{2t\cos t - 2\sin t}{\sin^3 t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\frac{t\cos t}{\sin t} - 2}{\sin^2 t}$$

$$\frac{2+(1-\frac{t^2}{2})-2(t-\frac{t^3}{6})+O(t^3)}{t^3}$$

$$= \frac{2[t-\frac{t^3}{2}-t+\frac{t^3}{6}]}{t^3} \quad \frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z\pi\cot\pi z)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\pi\cot\pi z - \pi^2 z\csc^2\pi z)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}[-2\pi^2\csc^2\pi z + 2\pi^3 z\csc^2\pi z \cdot \cot\pi z]$$

$$= \pi^2 \lim_{z\to 0}\csc^2\pi z(\pi z\cot\pi z - 1)$$

$$= \pi^2 \lim_{z\to 0}\frac{\pi z\cos\pi z - \sin\pi z}{\sin^3\pi z}$$ （利用 L'Höpital 法则见第四章习题及解答第 9 题）

$$= \pi^2 \lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2 z\sin\pi z}{3\sin^2\pi z\cos\pi z \cdot \pi}$$

$$= -\frac{\pi^2}{3}\lim_{z\to 0}\frac{\pi z}{\sin\pi z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos\pi z} = -\frac{\pi^2}{3}$$

如果 $f(z)$ 是一个有理分式，即 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$，$Q(z)$ 分别为 z 的 m 与 n 次（$m<n$，m、n 非负整数）多项式且无公共因子，则此时 $f(z)$ 除了有限个极点外在 $\mathbb{C}$ 上别无其他孤立奇点．为了计算 $f(z)$ 在闭曲线 C 上的复积分（$f(z)$ 在闭曲线 C 上解析，但在 C 内部含有 $f(z)$ 的若干个奇点的情况），往往会将 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 用初等方法转化成部分分式后再利用柯西积分公式或高阶导数的柯西积分公式去计算．这里，我们可以利用留数计算一步到位．此处只介绍两种情况：

（1）设 $P(z)$ 为一个二次多项式，z_1，z_2，z_3 是复常数，则

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}+\frac{C}{z-z_3} \tag{5.15}$$

其中 $A = \mathrm{Res}[f;\ z_1] = \dfrac{P(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$

$$B=\text{Res}[f;\ z_2]=\frac{P(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}$$

$$C=\text{Res}[f;\ z_3]=\frac{P(z_3)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}$$

证 假设 $f(z)$能分解成下面形式的部分分式

$$f(z)=\frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}+\frac{C}{z-z_3}$$

因为 $\frac{B}{z-z_2}+\frac{C}{z-z_3}$ 在 $z=z_1$ 点解析.

$$\frac{B}{z-z_2}=\frac{B}{z-z_1+z_1-z_2}=\frac{-B}{z_2-z_1}\frac{1}{1-\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B}{(z_2-z_1)^{n+1}}(z-z_1)^n$$

(在 $|z-z_1|<|z_2-z_1|$ 中)

$$\frac{C}{z-z_3}=-\frac{C}{z_3-z_1}\frac{1}{1-\frac{z-z_1}{z_3-z_1}}=-\frac{C}{z_3-z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z_3-z_1)^n}(z-z_1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C}{(z_3-z_1)^{n+1}}(z-z_1)^n$$

(在 $|z-z_1|<|z_3-z_1|$ 中)

令 $\delta\leqslant\min\{|z_2-z_1|,|z_3-z_1|\}$,所以在 $|z-z_1|<\delta$ 中,$\frac{B}{z-z_2}+\frac{C}{z-z_3}$ 的台劳展开式为:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{B}{(z_2-z_1)^{n+1}}+\frac{C}{(z_3-z_1)^{n+1}}\right](z-z_1)^n$$

则在 $0<|z-z_1|<\delta$ 中,$f(z)$的罗朗展开式为:

$$f(z)=\frac{A}{z-z_1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_1)^n\quad(0<|z-z_1|<\delta)$$

其中

$$C_n = -\left[\frac{B}{(z_2 - z_1)^{n+1}} + \frac{C}{(z_3 - z_1)^{n+1}}\right] \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

所以

$$\mathrm{Res}[f;\ z_1] = A$$

又因为

$$\mathrm{Res}[f;\ z_1] = \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)};\ z_1\right] \quad (z_1\text{ 为单极点})$$

$$= \lim_{z \to z_1}[(z - z_1)f(z)]$$

$$= \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}$$

所以有

$$A = \mathrm{Res}[f;\ z_1] = \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}$$

同理可得

$$B = \mathrm{Res}[f;\ z_2] = \frac{P(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)}$$

$$C = \mathrm{Res}[f;\ z_3] = \frac{P(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}$$

(2) 如果 $P(z)$最多是二次多项式,则

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_1)^2(z - z_2)}$$

$$= \frac{A}{(z - z_1)^2} + \frac{B}{z - z_1} + \frac{C}{z - z_2} \tag{5.16}$$

其中 $A = \mathrm{Res}[(z - z_1)f(z);\ z_1]$

$B = \mathrm{Res}[f;\ z_1]$

$C = \mathrm{Res}[f;\ z_2]$

证略.

例 7 展开 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z(z-1)(z-2)}$ 为部分分式.

解 由(5.15)式知

$$\frac{3z+2}{z(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-2}$$

其中 $$A=\operatorname{Res}[f;\ 0]=1$$

$$B=\operatorname{Res}[f;\ 1]=\lim_{z\to1}\frac{3z+2}{z(z-2)}=-5$$

$$C=\operatorname{Res}[f;\ 2]=\lim_{z\to2}\frac{3z+2}{z(z-1)}=4$$

例 8 将 $f(z)=\dfrac{z^2-7z+4}{z^2(z+4)}$ 展开为部分分式.

解 由(5.16)式知

$$\frac{z^2-7z+4}{z^2(z+4)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z+4}$$

其中 $$A=\operatorname{Res}[zf(z);\ 0]=\lim_{z\to0}\frac{z^2-7z+4}{z+4}=1$$

$$B=\operatorname{Res}[f;\ 0]=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2-7z+4}{z+4}\right]$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{(z+4)(2z-7)-(z^2-7z+4)}{(z+4)^2}=-2$$

$$C=\operatorname{Res}[f;\ -4]=\lim_{z\to-4}\frac{z^2-7z+4}{z^2}=3$$

所以有

$$\frac{z^2-7z+4}{z^2(z+4)}=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{3}{z+4}$$

例 9 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z^4-z^3-2z^2}\mathrm{d}z$.

解 被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4-z^3-2z^2}=\dfrac{1}{z^2(z+1)(z-2)}$ 在

$|z|<\dfrac{3}{2}$ 内有两个孤立奇点 $z_1=0$，$z_2=-1$. 所以

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z^4-z^3-2z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}(f;0)+\mathrm{Res}(f;-1)]$$

因为 $z=0$ 为 $f(z)$的二级极点,所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f;0]&=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}\right]\\&=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\\&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{(z-2)^2}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

因为 $z=-1$ 是单极点,所以

$$\mathrm{Res}[f;-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{z^2(z-2)}=-\frac{1}{3}$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z^4-z^3-2z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right]=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}$$

例 10 求 $\mathrm{Res}\left[z^4\sin\dfrac{1}{z};0\right]$.

解 因为 $z=0$ 是函数 $z^4\sin\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点,它在 $\{z;0<|z|<+\infty\}$ 中罗朗展开式

$$\begin{aligned}z^4\sin\frac{1}{z}&=z^4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}+\cdots\right)\ (0<|z|<+\infty)\\&=z^3-\frac{z}{3!}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots\quad(0<|z|<+\infty)\end{aligned}$$

所以有

$$\mathrm{Res}\left[z^4\sin\frac{1}{z};0\right]=\frac{1}{5!}$$

3. 留数定理的应用

借助于留数定理能计算某些类型的定积分. 如果这个定积分能够转化成可参数化的光滑曲线 C 上的复积分来计算，该复积分的被积函数 $f(z)$ 在 C 上解析，在 C 内部只有有限个孤立奇点（一般为极点的情况），那么我们就可用留数定理来计算此复积分的值. 下面讨论几种类型的实积分.

(1) $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 型积分

其中 $R(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 表示是 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的有理函数.

定理 5.7 设 $R(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 是 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的有理函数，且在 $[0,\ 2\pi]$ 上连续，则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\sum\{f(z)\ \text{在单位圆内极点处的留数}\} \tag{5.17}$$

其中

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z}R\left[\frac{z^2+1}{2z},\ \frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}}\right)$$

(证明见参考书目[1] 143 页)

例 11 计算 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值.

解 设 C: $\{z;\ |z|=1\}$ 的参数式表示为

$$C:\ z = z(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

$$z^2 = \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta,\ \frac{1}{z^2} = \cos 2\theta - \mathrm{i}\sin 2\theta$$

所以

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^4+1}{2z^2}$$

$$f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}=\frac{1}{\mathrm{i}z^2}\frac{z^4+1}{3z^2+10z+3}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{z^4+1}{z^2(3z+1)(z+3)}=\frac{1}{3\mathrm{i}}\frac{z^4+1}{z^2\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}$$

在$\{z;\ |z|<1\}$中，$f(z)$有二级极点$z_1=0$，有单极点$z_2=-1/3$

$$\mathrm{Res}[f;\ 0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2\cdot f(z)]$$

$$=\frac{1}{3\mathrm{i}}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^4+1}{\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{3\mathrm{i}}\lim_{z\to 0}\frac{\left(z^2+\frac{10}{3}z+1\right)4z^3-(z^4+1)\left(2z+\frac{10}{3}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2(z+3)^2}$$

$$=\frac{1}{3\mathrm{i}}\frac{-\frac{10}{3}}{\frac{1}{9}\times 9}=\frac{-10}{9\mathrm{i}}=\frac{10}{9}\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Res}\left[f;\ -\frac{1}{3}\right]=\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{3\mathrm{i}}\cdot\frac{z^4+1}{z^2(z+3)}\right]=-\frac{41}{36}\mathrm{i}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}(f;\ 0)+\mathrm{Res}\left(f;\ -\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{10}{9}\mathrm{i}-\frac{41}{36}\mathrm{i}\right]=\frac{\pi}{18}$$

例 12 计算$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$的值.

解 $$\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}=\frac{\left(\frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}}\right)^2}{5-4\,\frac{z^2+1}{2z}}$$

$$f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\frac{-\frac{(z^2-1)^2}{4z}}{5z-2(z^2+1)}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(2z^2-5z+2)}$$

$$=\frac{1}{8\mathrm{i}}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

在 $|z|<1$ 中，有二级极点 $z_1=0$，有单极点 $z_2=\frac{1}{2}$.

$$\mathrm{Res}[f;\,0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^4-2z^2+1}{8\mathrm{i}(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right]=-\frac{5}{16}\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Res}\left[f;\,\frac{1}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^4-2z^2+1}{8\mathrm{i}z^2(z-2)}=\frac{\frac{9}{16}}{8\mathrm{i}\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}(f;\,0)+\mathrm{Res}\left(f;\,\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{5}{16}\mathrm{i}+\frac{3}{16}\mathrm{i}\right]=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 型积分

$f(x)$为有理函数，如果下式右边极限存在，定义 $f(x)$的柯西主值积分为

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x \tag{5.18}$$

定理 5.8 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$与 $Q(z)$分别是 z 的 m

与 n 次多项式(m, n 为非负整数). 如果对所有实数 x 有 $Q(x) \neq 0$, 且 $n \geqslant m+2$, 则

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)};\ z_j\right] \tag{5.19}$$

其中 $z_j(j=1, 2, \cdots, k)$ 是函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在上半平面的极点. (证明见参考书目[1] 146 页)

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x)\mathrm{d}x$ 型积分

设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数, $P(x)$ 与 $Q(x)$ 分别是 x 的 m 与 n 次多项式, 其中 $n \geqslant m+1$. 如果对所有 x, $Q(x) \neq 0$, 则

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x \text{ 与 } P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x \tag{5.20}$$

是收敛的广义积分. 这种类型的积分在富里叶(Fourier)变换与富里叶积分中经常会遇到. 我们将用留数的方法来说明这种积分是可以求得的. 我们可以利用恒等式

$$\cos\alpha x = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}],\ \sin\alpha x = \mathrm{Im}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}] \quad (\alpha \text{ 为正实数})$$

在解决了下面(5.21)式的积分计算后, 就能得到(5.20)式的积分值.

定理 5.9 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 与 $Q(z)$ 分别是 z 的 m 与 n 次多项式, 其中 $n \geqslant m+1$, 且 $Q(z)$ 在实轴上无零点. 如果 $\alpha > 0$, 则

$$\begin{aligned} I &= P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)};\ z_j\right] \end{aligned} \tag{5.21}$$

其中 $z_j(j=1, 2, \cdots, k)$ 是 $f(z)$ 在上半平面的极点. 所以有

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}[I] \tag{5.22}$$

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}[I] \tag{5.23}$$

注意：我们不能用 $\cos\alpha z$ 或 $\sin\alpha z$ 代替公式(5.21)中的 $e^{i\alpha z}$ 来计算(5.22)式或(5.23)式的积分值.

（证明见参考书目[1] 148 页）

例 13 求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$.

解 令 $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+5}=\frac{1}{(z-1)^2+2^2}$，$z=1+2i$ 是 $f(z)$ 在上半平面内的单极点. 又有 $\alpha=1>0$，所以

$$\mathrm{Res}[e^{iz}f(z);\ 1+2i]=\left.\frac{e^{iz}}{2(z-1)}\right|_{z=1+2i}=\frac{e^{i(1+2i)}}{4i}=\frac{e^{-2+i}}{4i}$$

由公式(5.21)

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iz}f(z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z^2-2z+5}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\mathrm{Res}[e^{iz}f(z);\ 1+2i]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{-2+i}}{4i}=\frac{\pi}{2e^2}(\cos 1+i\sin 1)$$

由公式(5.22)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{z^2-2z+5}\mathrm{d}z=\mathrm{Re}(I)=\frac{\pi\cos 1}{2e^2}$$

如果在定理 5.8 与定理 5.9 中，函数 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在实轴上有单极点，那么有如下相类似的公式.

定理 5.10 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 分别是 z 的 m 与 n 次多项式，其中 $n\geqslant m+2$. $Q(z)$ 在实轴上有单极点 $t_j(j=1,2,\cdots,l)$，则

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)};\ z_j\right]$$

$$+\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)};\ t_j\right] \qquad (5.24)$$

其中 $z_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在上半平面的极点.

将公式(5.24)与(5.19)比较,等式右边多了实轴上单极点处留数之和乘以 $\pi\mathrm{i}$.

定理 5.11 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$,其中 $P(z)$与 $Q(z)$分别是 z 的 m 与 n 次多项式,其中 $n\geqslant m+1$, $Q(z)$在实轴上有单极点 $t_j(j=1,2,\cdots,l)$, α 是正实数,则

$$I = P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z);\ z_j]+\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Res}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z);\ t_j] \quad (5.25)$$

其中 $z_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)$在上半平面的极点,

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}[I] \qquad (5.26)$$

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}[I] \qquad (5.27)$$

公式(5.25)与(5.21)相比较,等式右边多了有关实轴上单极点 $t_1, t_2, \cdots, t_l$ 的留数值之和乘 $\pi\mathrm{i}$.

为了证明定理 5.10 与定理 5.11,先介绍如下引理.

引理 设 $f(z)$在实轴上有单极点 z_0,如果 C: $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,则

$$\lim_{r\to 0}\int_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}[f;\ z_0]$$

证 因为 z_0 是 $f(z)$的单极点,所以 $f(z)$在 z_0 的去心邻域

$D(z_0, \delta)\backslash\{z_0\}$中的罗朗级数为

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + g(z)$$

其中 $C_{-1} = \text{Res}[f; z_0]$，$g(z)$ 在 z_0 点解析.

曲线 C：$z = z_0 + re^{i\theta}$.（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$），（$0 < r < \delta$）

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \left[\frac{C_{-1}}{z - z_0} + g(z)\right]\mathrm{d}z$$

$I=I_0$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{C_{-1}}{re^{i\theta}} + g(z_0 + re^{i\theta})\right]\cdot ri e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi i C_{-1} + ir\int_0^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

因为 $g(z)$在 z_0 点解析，必连续，则必存在 $M > 0$，使 $|g(z_0 + re^{i\theta})| \leqslant M$ （$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）

所以

$$\left|\lim_{r\to 0} r\int_0^{\pi} g(z_0 + re^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \lim_{r\to 0} r\int_0^{\pi} M\mathrm{d}\theta = \lim_{r\to 0} r\pi M = 0$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_C f(z)\mathrm{d}z = \pi i C_{-1} = \pi i\text{Res}[f; z_0]$$

下面我们来证明定理 5.10.

证明 设 $f(z)$在实轴上只有有限个单极点，那么能够选取充分小的 $r > 0$，使落在上半平面内的半圆

$$C_j: z = t_j + re^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, j = 1, 2, \cdots, l)$$

是互不相交，互不包含，且均不包含 $f(z)$ 在上半平面内的极点 $z_j (j = 1, 2, \cdots, k)$.

设 R 充分大，使得 $f(z)$在上半平面内的极点包含在半圆 C_R：$z = Re^{i\theta}$ （$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）之中，且使 $f(z)$在实轴上的单极点落在 $(-R, R)$内部.

设 $C = C_R + \sum_{j=1}^{l} C_j^- + I_R$（见图 5－2），$I_R$ 是$[-R, R]$区间上落在$(t_j - r, t_j + r)$ $(j = 1, 2, \cdots, l)$ 外的部分.

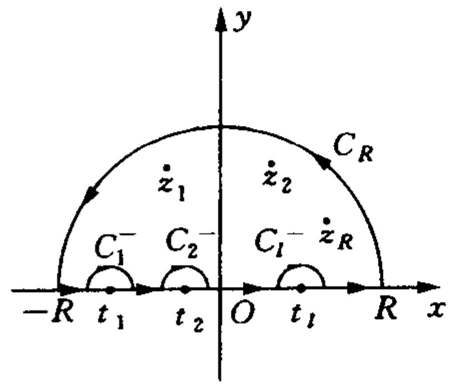


图 5－2

由留数定理知

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}[f;\ z_j]$$

而

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{l}\int_{C_j^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{I_R} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{l}\int_{C_j} f(z)\mathrm{d}z + \int_{I_R} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{I_R} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}(f;\ z_j) + \sum_{j=1}^{l}\int_{C_j} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

当 $R \to +\infty$，$r \to 0$ 时与定理 5.8 证明一样，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

且

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}}\int_{I_R} f(x)\mathrm{d}x$$

由引理

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_j} f(z)\mathrm{d}z = \pi \mathrm{i}\mathrm{Res}[f,\ t_j]$$

所以

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}(f;\ z_j) + \pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Res}(f;\ t_j)$$

（定理 5.11 的证明方法与此相同，此处从略）

例 14 求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^3 - 8}\mathrm{d}x$.

$\frac{z}{(z-2)(z-z_2)}\Big|_{z=z_1}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^3-8} = \oint\frac{z}{z^3-8}dz = \oint\frac{z}{(z-2)(z-z_1)(z-z_2)}dz = 2\pi i\cdot\left[\frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{4\pi}{3}})}\right.$

$\theta=\frac{2k\pi}{3}$ $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}k}$ $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ +

$z^3=8$

$e^{i3\theta}=e^{i2k\pi}$

$$\pi i \cdot \left[\frac{\cancel{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\, 1}{(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{i\frac{4\pi}{3}})} + \frac{1}{(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{i\frac{4\pi}{3}})} + \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{(1-e^{i\frac{4\pi}{3}})(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})} \right.$$

解 设 $f(z)=\dfrac{z}{z^3-8}=\dfrac{z}{(z-2)(z^2+2z+4)}$

$$=\frac{z}{(z-2)[(z+1)^2+3]}$$

其中 $z=2$ 是实轴上的单极点，$z=-1+i\sqrt{3}$ 是上半平面的单极点，则

$$\mathrm{Res}[f,\ 2]=\lim_{z\to 2}\frac{z}{z^2+2z+4}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Res}[f,\ -1+i\sqrt{3}]=\lim_{z\to -1+i\sqrt{3}}\frac{z}{(z-2)(z+1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-(1+i\sqrt{3})}{12}$$

由(5.24)式知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^3-8}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}(f;\ -1+\sqrt{3}i)+\pi i\mathrm{Res}(f;\ 2)$$

$$=2\pi i\,\frac{-(1+\sqrt{3}i)}{12}+\pi i\cdot\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

例 15 求积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1-x^2)}\mathrm{d}x$.

解 设 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$ 在实轴上有三个单极点 $z_1=0$，$z_2=1$，$z_3=-1$，则

$$\mathrm{Res}[e^{iz}f(z);\ 0]=1$$

$$\mathrm{Res}[e^{iz}f(z);\ 1]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^{iz}}{z(1-z^2)}\right]$$

$$=-\frac{e^{i}}{2}=-\frac{1}{2}(\cos 1+i\sin 1)$$

$$\operatorname{Res}[e^{iz}f(z); -1] = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{e^{iz}}{z(1-z^2)}\right]$$

$$= \frac{-e^{-i}}{2} = \frac{-1}{2}(\cos 1 - i\sin 1)$$

所以由(5.25)式知

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(1-x^2)}dx = \pi i\sum_{j=1}^{3}\operatorname{Res}[e^{iz}f(z); z_j]$$

$$= \pi i\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}i\sin 1\right) - \frac{1}{2}\cos 1 + \frac{i}{2}\sin 1\right]$$

$$= \pi i(1-\cos 1)$$

再由(5.27)式知原积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1-x^2)}dx = \operatorname{Im}[I] = \pi(1-\cos 1)$$

*4. 关于解析函数在无穷远点的性态与无穷远点留数

(1) 解析函数在无穷远点的性态

定义 5.4 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的一个去心邻域 $\{z;\ R<|z|<+\infty\}$ $(R\geqslant 0)$ 内解析,则称 $z=\infty$ 为函数的孤立奇点.

定义 5.5 设无穷远点 $z=\infty$ 为孤立奇点,则 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点的某个邻域 $\{z;\ R<|z|<\infty\}$ 中解析,则在此邻域内 $f(z)$ 可展开成罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_nz^n = \sum_{n=-\infty}^{0}C_nz^n + \sum_{n=1}^{\infty}C_nz^n \quad (R<|z|<\infty) \tag{5.28}$$

(5.28)式右边第一部分 $\sum\limits_{n=-\infty}^{0}C_nz^n$ 称为罗朗级数的解析(或正则)部分;第二部分 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_nz^n$ 称为罗朗级数的主要部分(简称主部).如果

(1°) 主部为零(即 z 的正幂项系数全为零),则称 $z=\infty$ 点为 $f(z)$的可去奇点;

(2°) 主部只有有限项不为零,设 $C_m \neq 0$ ($m \geqslant 1$ 整数),$C_{m+k}=0$, $k=1, 2, 3, \cdots$ 主部为

$$C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_m z^m$$

则称 $z=\infty$ 点为 $f(z)$的 m 级极点;

(3°) 主部有无穷多项(即 z 的正幂项系数有无穷多个不为零),则称 $z=\infty$ 为 $f(z)$的本性奇点.

例 16 验证 $z=\infty$ 点是函数 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ 的可去奇点.

解 因为 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ 在∞点的去心邻域 $\{z;\ 0<|z|<+\infty\}$ 内解析,它的罗朗级数为

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

它不含有主部,所以 $z=\infty$ 是 $\sin\dfrac{1}{z}$的可去奇点.

例 17 验证 $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 的本性奇点.

解 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在∞点的邻域 $\{z;\ |z|<+\infty\}$ 中的罗朗级数

$$f(z)=\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \quad (|z|<\infty)$$

因为主部有无穷多项,所以∞点是 e^z 的本性奇点.

例 18 验证 $z=\infty$ 是函数 $f(z)=z^2+1+\dfrac{1}{z+1}$ 的二级极点.

解 在∞的去心邻域 $\{z;\ 1<|z|<+\infty\}$ 中 $f(z)$解析,它的罗朗级数为

$$f(z)=z^2+1+\frac{1}{z+1}=z^2+1+\frac{1}{z\left(1+\dfrac{1}{z}\right)}$$

$$=z^2+1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}\quad(1<|z|<\infty)$$

主部只有有限项，$C_2\neq 0$，$C_{2+k}=0\ (k=1,2,\cdots)$，所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$的二级极点.

如果 $z=\infty$ 是 $f(z)$的孤立奇点，即 $f(z)$在 $\{z;R<|z|<+\infty\}\ (R\geqslant 0)$ 中解析. 做变换 $z=\dfrac{1}{\zeta}$，记 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)=g(\zeta)$，此时 Z 平面上的环域 $\{z;R<|z|<+\infty\}$ 被映射为 ζ 平面上的 $\zeta=0$ 的去心邻域 $\left\{\zeta;0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}\right\}$ $\left(如果 R=0，规定\dfrac{1}{R}=\infty\right)$，$z=\infty$ 点映射成 $\zeta=0$，所以 $\zeta=0$ 是 $g(\zeta)$的孤立奇点，

$$g(\zeta)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_{-n}\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\zeta^{-n}\left(0<|\zeta|<\frac{1}{R}\right)\tag{5.29}$$

它对应了

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}C_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_nz^n\quad(R<|z|<+\infty)$$

(5.29) 式右边第 2 式是 $g(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 的去心邻域 $\left\{\zeta;0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}\right\}$ 中罗朗级数的主部，所以 $\zeta=0$ 是 $g(\zeta)$的可去奇点、m 级极点、本性奇点就对应了 $z=\infty$ 是 $f(z)$的可去奇点、m 级极点、本性奇点.

与有穷的孤立奇点一样，判断它是可去奇点、极点、本性奇点的方法中除了用定义 5.5 外，也有相应的等价定理来判断，在此不再详细讨论.

如果 $z=\infty$ 是函数的可去奇点，通常称函数 $f(z)$在∞点是解析的，且规定它的极限值(存在，且为有限值)就是函数在∞点的值，即

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$.

如果 $z=\infty$ 是函数的极点，则有 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

如果 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在也不为∞.

(2) 函数在无穷远点的留数

定义 5.6 设∞点是 $f(z)$的孤立奇点，$f(z)$在∞点的去心邻域 $\{z;\ R<|z|<+\infty\}$ 内解析，则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r^-} f(z)\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$在∞点的留数，记为

$$\mathrm{Res}[f(z);\ \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{5.30}$$

其中 $C_r^- = \{z;\ |z|=r\}$ $(R<r)$ 沿顺时针方向.

设 $f(z)$在 $\{z;\ R<|z|<+\infty\}$ 内的罗朗级数为

$$f(z) = \cdots + \frac{C_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{C_{-1}}{z} + C_0 + C_1 z + \cdots$$
$$+ C_n z^n + \cdots \quad (R<|z|<+\infty)$$

对上式两边沿着 $C_r = \{z;\ |z|=r\}$ (逆时针方向)逐项积分，得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\oint_{C_r} C_n z^n \mathrm{d}z = C_{-1}$$

所以

$$\mathrm{Res}[f;\ \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r^-} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = -C_{-1} \tag{5.31}$$

亦即 $\mathrm{Res}[f;\ \infty]$等于 $f(z)$在∞点的去心邻域内的罗朗展开式中$\dfrac{1}{z}$项系数 C_{-1}的负值. 下面的定理对于计算复积分是很有用的，特别是对于被积函数在闭围道内部有许多的孤立奇点而在围道外部只有很

少的孤立奇点(或只有孤立奇点是∞点)的情况.

定理 5.12 如果函数 $f(z)$在扩充的复平面上只有有限个孤立奇点(包括∞点在内),设为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 与∞点,则 $f(z)$在所有孤立奇点处的留数之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f;\ z_k]+\mathrm{Res}[f;\ \infty]=0 \tag{5.32}$$

证 作以原点为中心、充分大的以 R 为半径的圆 $C_R=\{z;\ |z|=R\}$,使孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 全被围在 C_R 内部,由留数定理可知

$$\oint_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f;\ z_k]$$

$$2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f;\ z_k]-\oint_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f;\ z_k]+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R^-} f(z)\mathrm{d}z=0$$

由(5.30)式知

$$\mathrm{Res}[f;\ \infty]=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R^-} f(z)\mathrm{d}z$$

所以有

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f;\ z_k]+\mathrm{Res}[f;\ \infty]=0$$

关于∞点留数计算,除用公式(5.32)外,再介绍一个∞点留数计算公式:

$$\mathrm{Res}[f;\ \infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2};\ 0\right] \tag{5.33}$$

事实上，由∞点留数定义，$f(z)$在∞点去心邻域$\{z;\ R<|z|<\infty\}$中解析，则

$$\mathrm{Res}[f;\ \infty]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r^-}f(z)\mathrm{d}z$$

其中$C_r^-=\{z;\ |z|=r\}$顺时针方向，$R<r$. 作$z=\frac{1}{\zeta}$，$\mathrm{d}z=-\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$. $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$\zeta=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$，此时$\rho=\frac{1}{r}$，$\varphi=-\theta$. 所以当$z$沿着$C_r^-$按顺时针方向转一圈时，则$\zeta$沿着$C_{R_1}=\left\{\zeta;\ |\zeta|=R_1=\frac{1}{r}\right\}$的逆时针方向转一圈，而$f(z)$在$\{z;\ R<|z|<+\infty\}$解析，$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=g(\zeta)$在$\left\{\zeta;\ 0<|\zeta|<\frac{1}{R}\right\}$ $\left(R_1=\frac{1}{r}<\frac{1}{R}\right)$中解析，所以

$$\mathrm{Res}[f;\ \infty]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r^-}f(z)\mathrm{d}z=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

函数$\dfrac{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2}$在$\left\{\zeta;\ 0<|\zeta|<\frac{1}{R}\right\}$中解析，$\zeta=0$是$\dfrac{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2}$的孤立奇点，由留数定理得

$$\mathrm{Res}[f;\ \infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2};\ 0\right]$$

注意：如果z_0是$f(z)$的有穷可去奇点，由前面可知必有$\mathrm{Res}[f;\ z_0]=0$，但如果无穷远点∞是$f(z)$的可去奇点，则该结论未必成立. 例如$f(z)=z\left(1-\cos\frac{1}{z}\right)$，在$\infty$点的去心邻域$\{z;\ 0<|z|<+\infty\}$中可展开罗朗级数

$$f(z)=z\left(1-\cos\frac{1}{z}\right)$$

$$=z\left[1-\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!z^{2n}}+\cdots\right)\right]$$

$$=z\left[\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{4!z^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!z^{2n}}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2z}-\frac{1}{4!z^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!z^{2n-1}}+\cdots\quad(0<|z|<+\infty)$$

按定义 5.5，$z=\infty$ 是 $f(z)$的可去奇点，但由(5.31)式知

$$\mathrm{Res}[f(z);\ \infty]=-C_{-1}=-\frac{1}{2}\neq 0.$$

例 19 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z}{(z^4+1)(z-3)}\mathrm{d}z.$

解 在 $\{z;\ |z|<2\}$ 中，$f(z)=\dfrac{z}{(z^4+1)(z-3)}$ 有 4 个单极点 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)}{4}\pi\mathrm{i}}$ $(k=0,1,2,3)$；在 $\{z;\ |z|>2\}$，有单极点 $z=3$ 与孤立奇点∞点. 由留数定理知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{|z|=2}\frac{z}{(z^4+1)(z-3)}\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}[f;\ z_k]$$

又由(5.32)知

$$\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}[f;\ z_k]+\mathrm{Res}[f;\ 3]+\mathrm{Res}[f;\ \infty]=0$$

所以 $$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{|z|=2}\frac{z}{(z^4+1)(z-3)}\mathrm{d}z=-[\mathrm{Res}(f;\ 3)+\mathrm{Res}(f;\ \infty)]$$

因为 $f(z)$在∞点去心邻域 $\{z;\ 3<|z|<+\infty\}$ 中解析，$f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 在 $\left\{z;\ 0<|z|<\dfrac{1}{3}\right\}$ 中解析，所以

$$\mathrm{Res}[f;\ 3]=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^4+1)(z-3)};\ 3\right]=\lim_{z\to3}\frac{z}{z^4+1}=\frac{3}{82}$$

$$\mathrm{Res}[f;\infty]=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^4+1)(z-3)};\infty\right]$$

$$=-\mathrm{Res}\left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2};0\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(1+z^4)(1-3z)};0\right]$$

因为

$$\frac{z^2}{(1+z^4)(1-3z)}=z^2(1-z^4+z^8+\cdots)[1+3z+(3z)^2+\cdots]$$

$$\left(0<|z|<\frac{1}{3}\right)$$

所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2};0\right]=0\quad\left(0<|z|<\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^4+1)(z-3)}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f;3]=-\frac{3}{41}\pi\mathrm{i}$$

【思考题及解答】

1. 什么是解析函数的孤立奇点？它可以分成几种类型？它们是怎样定义的？

答 解析函数的孤立奇点定义为：设 z_0 是 $f(z)$的奇点(即 $f(z)$在 z_0 点不解析)，但在 z_0 点的某个去心邻域 $\{z;0<|z-z_0|<\delta\}$ 中 $f(z)$是解析的，则称 z_0 为 $f(z)$的孤立奇点.

解析函数的孤立奇点可分为三类：可去奇点、极点、本性奇点. 它是由$f(z)$在孤立奇点的去心邻域中展开的罗朗级数的主部来定义的：

设 z_0 是 $f(z)$的孤立奇点，则在 z_0 的某个去心邻域 $\{z;0<|z-z_0|<\delta\}$ 内，$f(z)$可展开成罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

其中$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$的罗朗级数的解析部分.

$\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$的罗朗级数的主要部分或简称主部.

(1) $f(z)$的罗朗级数中的主部为零（即$(z-z_0)$ 的负幂次系数 $C_n=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$)，此时称 z_0 为 $f(z)$的可去奇点；

(2) $f(z)$的罗朗级数中的主部只有有限项，即 $(z-z_0)$ 的负幂次系数只有有限个不为零，$C_{-m}\neq 0\ (m\geqslant 1)$，但 $C_{-(m+k)}=0\ (k=1,2,\cdots)$.

注意：系数 C_{-m+1}，C_{-m+2}，$\cdots$，C_{-1}可以为零，也可以不为零，此时罗朗级数表示为

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$(0<|z-z_0|<\delta)$$

则称 z_0 为 $f(z)$的极点，且为 m 级极点；

(3) $f(z)$的罗朗级数中主部有无穷多项，即 $(z-z_0)$ 的负幂次系数有无穷多个不为零，则称 z_0 为 $f(z)$的本性奇点.

2. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $\{z;\ 1<|z|<2\}$ 中的罗朗级数为

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\quad(1<|z|<2)$$

其中有 z 的无穷多个负幂次项系数不为零，那么是否可以说 $z=0$ 是 $f(z)$的本性奇点？为什么？

答 不可以. 因为 $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的解析点而不是孤立奇点. $z=1$ 与 $z=2$ 才是函数的孤立奇点. 要判断它们是什么样的孤立奇点，必须按定义将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=1$ 的去心邻域 $\{z;\ 0<|z-1|<1\}$ 与 $z=2$ 的去心邻域 $\{z;\ 0<|z-2|<1\}$ 中展开罗朗级数后由负幂次项系数来确定孤立奇点的性态.

3. 请证明 z_0 是函数 $f(z)$的 $m(m\geqslant 1)$级极点的充要条件为 z_0 是$\dfrac{1}{f(z)}$的 m 级零点.

证 必要性证明：设 z_0 是 $f(z)$的 $m(m\geqslant 1)$级极点. 由定理 5.2 知，在 z_0 的某个去心邻域 $\{0;\ 0<|z-z_0|<\delta\}$ 中，$f(z)$可表示为

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$$

其中 $\psi(z)$在 z_0 点解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$. 令 $\varphi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$，所以 $\varphi(z)$在 z_0 点解析，此时

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)\ (m\geqslant 1)$$

其中 $\varphi(z)$在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)=\dfrac{1}{\psi(z_0)}\neq 0$. 所以由定理 4.13 知，$z_0$ 为$\dfrac{1}{f(z)}$的 $m(m\geqslant 1)$级零点.

充分性证明事实上就是逆此过程的证明，此处略去.

4. 试问 $z=0$ 是函数 $\dfrac{\sin z^2}{(\sin z)^2}$ 的什么类型的孤立奇点？

答 $z=0$ 是$\dfrac{\sin z^2}{(\sin z)^2}$的可去奇点，这是因为

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}=1,\ \lim_{z\to 0}\frac{(\sin z)^2}{z^2}=1$$

可见 $z=0$ 是 $\sin z^2$ 的二级零点，也是$(\sin z)^2$ 的二级零点，所以 $z=0$ 是$\dfrac{\sin z^2}{(\sin z)^2}$的可去奇点.

$\left(\text{注：或因为 } \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z^2}{(\sin z)^2}=1 \text{ 直接用定理 5.1 得到}\right)$

5. 试举出函数非孤立奇点的例子，在非孤立奇点处函数可否展开成罗朗级数？

解 例如 $z_0=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$ 的非孤立奇点. 因为 $z_n=\dfrac{1}{n\pi}$ $(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 也是函数的奇点，且有

$$z_n=\frac{1}{n\pi}\to z_0=0\ (n\to\infty)$$

所以 $z_0=0$ 是函数 $f(z)$的奇点的极限点，它并非是孤立的.

因为函数 $f(z)$在非孤立奇点 z_0 的任何去心邻域中总存在着 $f(z)$的无穷多个其他奇点，因此函数 $f(z)$在非孤立奇点 z_0 的任何去心邻域中都不解析，亦即函数在非孤立奇点处不能罗朗展开.

6. 设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=z_0$ 为 m 级与 n 级极点 $(m, n\geqslant 1)$，问下列三个函数：

(1) $\varphi(z)\psi(z)$；　(2) $\varphi(z)+\psi(z)$；　(3) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

在 $z=z_0$ 处有什么性质？

解　已知 z_0 是 $\varphi(z)$ 的 $m(m\geqslant 1)$ 级极点，所以存在 $\delta_1>0$，使当 $z\in\{z;\ 0<|z-z_0|<\delta_1\}$ 时，$\varphi(z)$ 可表示为

$$\varphi(z)=\frac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^m} \tag{i}$$

其中 $\varphi_1(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\varphi_1(z_0)\neq 0$.

同样，因为 z_0 是 $\psi(z)$ 的 $n(n\geqslant 1)$ 级极点，所以存在 $\delta_2>0$，使当 $z\in\{z;\ 0<|z-z_0|<\delta_2\}$ 时，$\psi(z)$ 可表示为

$$\psi(z)=\frac{\psi_1(z)}{(z-z_0)^n} \tag{ii}$$

其中 $\psi_1(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\psi_1(z_0)\neq 0$，所以当 $z\in\{z;\ 0<|z-z_0|<\delta\}$ 时(其中 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$)，(i)、(ii)式同时成立.

(1) 因为 $\varphi(z)\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)\psi_1(z)}{(z-z_0)^{m+n}}$，$(z\in\{z;\ 0<|z-z_0|<\delta\})$ 且 $\varphi_1(z)\psi(z)$ 在 z_0 点解析，并且 $\varphi_1(z_0)\psi_1(z_0)\neq 0$，所以 z_0 是 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $(m+n)$ 级极点.

(2) 不妨设 $m\geqslant n$，因为

$$\begin{aligned}\varphi(z)+\psi(z)&=\frac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^m}+\frac{\psi_1(z)}{(z-z_0)^n}\\&=\frac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)(z-z_0)^{m-n}}{(z-z_0)^m}\quad(0<|z-z_0|<\delta)\end{aligned}$$

其中 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)(z-z_0)^{m-n}$ 在 z_0 点解析，且

$$\varphi_1(z_0)+\psi_1(z_0)(z_0-z)^{m-n}=\varphi_1(z_0)\neq 0$$

所以 z_0 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点.

(3) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}}{(z-z_0)^{m-n}}\quad(0<|z-z_0|<\delta)$

其中 $\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$ 在 z_0 点解析，且 $\dfrac{\varphi_1(z_0)}{\psi_1(z_0)}\neq 0$. 当 $m>n$ 时，z_0 是$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的 $(m-n)$ 级极点，当 $m\leqslant n$ 时，z_0 是$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的可去奇点.

7. 当有 $\mathrm{Res}[f(z);\ z_0]=0$ 时，可否断定点 z_0 必是 $f(z)$的可去奇点或解析点？

答 不能. 因为 $f(z)$在孤立奇点 z_0 处的留数，就是 $f(z)$在 z_0 的一个去心邻域中罗朗展开式的 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 C_{-1}，即

$$C_{-1}=\mathrm{Res}[f(z);\ z_0]$$

而当 z_0 是 $f(z)$的极点或是本性奇点时，其罗朗展开式中的 C_{-1}也可能为零. 例如

(1) $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z^2)}$ 的二级极点，$f(z)$在 $\{z;\ 0<|z|<1\}$ 中的罗朗展开式为

$$\frac{1}{z^2\cdot(1-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n-2}\quad(0<|z|<1)$$

而此时有 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{z^2(1-z^2)};\ 0\right]=0$.

(2) $z=0$ 是 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$ 的本性奇点，而

$$f(z)=\sin\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}}+\cdots$$

$$(0<|z|<+\infty)$$

此时也有 $\mathrm{Res}\left[\sin\dfrac{1}{z^2};\ 0\right]=0$.

8. 设 z_0 是 $P(z)$的 k 级零点和 $Q(z)$的 $k+1$ 级零点($k\geqslant 0$ 整数)，由此可知 z_0 是 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的单极点的一般情况，试写出 $\mathrm{Res}[f(z);\ z_0]$ 的计算公式.

解 因为 z_0 是 $P(z)$的 k 级零点和 $Q(z)$的 $k+1$ 级零点($k\geqslant 0$ 整数)，所以存在 $R>0$，使 $z\in\{z;\ |z-z_0|<R\}$ 时有(见定理 4.13)

$$P(z)=(z-z_0)^kP_1(z)$$

其中 $P_1(z)$在 z_0 点解析，且

$$P_1(z_0)=\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0,\ Q(z)=(z-z_0)^{k+1}\cdot Q_1(z)$$

其中 $Q_1(z)$在 z_0 点解析,且 $Q_1(z_0)=\dfrac{Q^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}\neq 0$,则

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\dfrac{P_1(z)}{Q_1(z)}}{z-z_0}$$

其中$\dfrac{P_1(z)}{Q_1(z)}$在 z_0 点解析,且

$$\frac{P_1(z_0)}{Q_1(z_0)}=\frac{\dfrac{P^{(k)}(z_0)}{k!}}{\dfrac{Q^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}}=(k+1)\frac{P^{(k)}(z_0)}{Q^{(k+1)}(z_0)}\neq 0.$$

所以 $z=z_0$ 是 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的单极点.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)};\ z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}=(k+1)\frac{P^{(k)}(z_0)}{Q^{(k+1)}(z_0)}$$

9. 试讨论留数定理与柯西积分定理、柯西积分公式(包括高阶导数的柯西积分公式)在求围道积分中的联系与区别.

解 (1) 先讨论用留数定理计算围道积分与柯西积分定理、柯西积分公式之间的联系.

留数定理计算围道积分公式

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f;\ z_k]\qquad (*)$$

其中 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是 $f(z)$在 C 内的所有孤立奇点.

公式($*$)蕴含了柯西积分定理、柯西积分公式、高阶导数的柯西积分公式等积分计算式.那是因为如果 $f(z)$在 C 及其内部解析时,($*$)式右边为 0,得

$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$ (柯西积分定理);

如果被积函数为$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$,其中 $f(z)$在 C 及其内部解析,z_0 是闭曲线 C 内部的点时,$z=z_0$ 是 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 的单极点,所以由公式($*$)可知

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z-z_0};\ z_0\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi\mathrm{i}f(z_0)\quad \text{(柯西积分公式)};$$

如果被积函数为 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中 $f(z)$在 C 及其内部解析，z_0 是闭曲线 C 内部的点时，z_0 是 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的 $n+1$ 级极点，由公式(＊)可得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}};\ z_0\right]$$

$$=\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[(z-z_0)^{n+1}\cdot\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right] = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

此即为高阶导数的柯西积分公式. 从而可知，凡可用柯西积分定理、柯西积分公式或高阶导数的柯西积分公式计算的围道积分，均可用留数定理计算.

(2) 留数定理计算围道积分与柯西积分定理、柯西积分公式之间的区别.

有些围道积分可以用留数定理求得而未必可用柯西积分定理、柯西积分公式(或高阶导数的柯西积分公式)求得. 如被积函数在闭围道 C 及其内部的极点不是以明显的 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ $(m\geqslant 1)$ 形式来表达时(其中 $f(z)$在 C 及其内部 D 内解析，$z_0\in D$)，就不能用柯西积分公式(或高阶导数的柯西积分公式)而只能用留数定理计算了.

例如积分 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{d}z$，被积函数 $f(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$ 在 $\{z;\ |z|<1\}$ 有单极点 $z=0$，它可以用留数定理计算

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^z-1};\ 0\right] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^0} = 2\pi\mathrm{i}$$

而不能用柯西积分公式计算.

10. 不经计算能否回答 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2\sin(z^2)}\mathrm{d}z=?$

答 能. 因为 $f(z)=\frac{1}{z^2\sin(z^2)}$ 在 $\left\{z;\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$ 中有唯一的孤立奇点 $z_0=0$，且 $f(z)$为偶函数，所以它在以原点为中心的去心邻域中的罗朗级数只

含有 z 的偶数次幂项，可知 $C_{-1}=\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{z^2\sin(z^2)};0\right]=0$，由留数定理得

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2\sin(z^2)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin(z^2)};0\right]=0$$

11. 函数 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 解析，则由定义知

$$\operatorname{Res}[f(z);\infty]=-C_{-1}$$

试问：C_{-1}是否是 $f(z)$在以原点为中心的去心邻域中罗朗展开式的$\dfrac{1}{z}$项系数？为什么？在什么情况下可以是，请举例说明.

答 不是.那是因为函数 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 解析，则由定义知

$$\operatorname{Res}[f(z);\infty]=-C_{-1}$$

其中 C_{-1}是 $f(z)$在 $\{z;R<|z|<+\infty\}$ 中罗朗展开式$\dfrac{1}{z}$项的系数.

但是，如果 $R=0$，即函数 $f(z)$在全平面中只有奇点 $z=0$，$z=\infty$，亦即 $f(z)$在 $\{z;0<|z|<+\infty\}$ 中解析，则此时有 $C_{-1}=\operatorname{Res}[f(z);0]$（因为由定理 5.12 可知，如果函数 $f(z)$在扩充复平面$\overline{\mathbb{C}}$上只有孤立奇点 $z=0$ 与$z=\infty$，则由(5.32) 式得 $\operatorname{Res}[f(z);0]+\operatorname{Res}[f(z);\infty]=0$).

例如 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z}$ 在$\{z;0<|z|<+\infty\}$ 中解析.它的罗朗展开式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^z}{z}&=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\quad(0<|z|<+\infty)\end{aligned}$$

$\therefore \operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z}{z};0\right]=1$，$\operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^z}{z};\infty\right]=-1$.

12. 设 $f(z)$在$\mathbb{C}$上除孤立奇点 z_0 外解析，试问可否用孤立奇点∞的邻域$\{z;0<|z-z_0|<+\infty\}$ 中的罗朗级数展开式的 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 项的系数 C_{-1}的负值来表示函数在∞点的留数：

$$\operatorname{Res}[f(z);\infty]=-C_{-1}$$

答 可以.若 $f(z)$在$\mathbb{C}$上除孤立奇点 z_0 外处处解析，则孤立奇点∞的邻域既可用 $D_1=\{z;|z_0|<|z|<+\infty\}$ 来表示也可以用 $D_2=\{z;0<|z-z_0|<$

$+\infty\}$ 来表示. $\mathrm{Res}[f(z);\infty]$ 的计算既可用 $f(z)$ 在 D_1 中的罗朗展开式中 $\frac{1}{z}$ 项的系数 C_{-1} 的负值表示，也可以用 $f(z)$ 在 D_2 中的罗朗展开式中 $\frac{1}{z-z_0}$ 项的系数 C_{-1} 的负值表示. 例如，

$$f(z)=\frac{e^z}{z-1}=\frac{e^z}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots\right)\quad(1<|z|<+\infty)$$

级数相乘后找出 $\frac{1}{z}$ 项的系数 C_{-1}（其余项不必注意）

$$C_{-1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$$

所以有

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z-1};\infty\right]=-C_{-1}=-e$$

又因为

$$f(z)=\frac{e^z}{z-1}=\frac{1}{z-1}e\cdot e^{z-1}$$

$$=\frac{e}{z-1}\left[1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}(z-1)^n+\cdots\right]$$

$$(0<|z-1|<+\infty)$$

找出 $\frac{1}{z-1}$ 项的系数 $C_{-1}=e$. 同样有

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z-1};\infty\right]=-C_{-1}=-e$$

【习题及解答】

1. 指出下列函数的孤立奇点类别，如果是极点，写出它是几级极点：

(1) $\frac{1}{z(z^2+1)^2}$；　(2) $\frac{1}{z^4+1}$；　(3) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$；　(4) $z\cos\frac{1}{z}$；

(5) $\dfrac{z^2}{\operatorname{ch}az-1}$；　(6) $e^{\frac{1}{z-1}}$；　(7) $\dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$；　(8) $\dfrac{z}{z^2+2z+5}$.

解　(1) 因为 $z_1=0$ 是分母 $z(z^2+1)^2$ 的一级零点，不是分子的零点，所以 $z_1=0$ 是函数 $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的单极点.

因为 $z_{2,3}=\pm i$ 是分母 $z(z^2+1)^2$ 的二级零点，不是分子的零点，所以 $z_{2,3}=\pm i$ 是函数 $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的二级极点.

(2) $z^4+1=0$，$z^4=-1$，$z_k=e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}(k=0,1,2,3)$，

因为 $(z^4+1)'_{z_k}\neq 0$，所以 $z_k(k=0,1,2,3)$ 是 $z^4+1=0$ 的一级零点；$z_k(k=0,1,2,3)$ 是 $\dfrac{1}{z^4+1}$ 的单极点.

(3) 对于函数 $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$，因为 $z=0$ 是分子 $(1-e^{2z})$ 的一级零点，$z=0$ 是分母 z^4 的四级零点，所以 $z=0$ 是函数 $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的三级极点.

(4) ∵ $$z\cos\frac{1}{z}=z\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}+\cdots\right)$$
$$=z-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}}+\cdots$$
$$(0<|z|<+\infty)$$

∴ $z=0$ 是 $z\cos\dfrac{1}{z}$ 的本性奇点.

(5) 对于函数 $\dfrac{z^2}{\operatorname{ch}az-1}$，因为 $z=0$ 是分子 z^2 的二级零点，又使 $\operatorname{ch}az=1$，即 $e^{az}+e^{-az}=2$ 时，由 $e^{2az}-2e^{az}+1=0$ 得 $e^{az}=1$. 由 $az_k=2k\pi i$ 得 $z_k=\dfrac{2k\pi i}{a}$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$. 因为 $\operatorname{ch}az_k-1=0$，$(\operatorname{ch}az-1)'_{z_k}=a\operatorname{sh}az_k=0$，$(\operatorname{ch}az-1)''_{z_k}=a^2\operatorname{ch}az_k=a^2\neq 0$. 所以 $z_k=\dfrac{2k\pi i}{a}$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 是分母 $\operatorname{ch}az-1$ 的二级零点，$z=0$ 是函数 $\dfrac{z^2}{\operatorname{ch}az-1}$ 的可去奇点，$z_k=\dfrac{2k\pi i}{a}$ $(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 不是分子 z^2 的零点，而是函数 $\dfrac{z^2}{\operatorname{ch}az-1}$ 的二级极点.

(6) 因为 $e^{\frac{1}{z-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$ $(0<|z-1|<+\infty)$，所以 $z=1$ 是 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 的本性奇点.

(7) 对于函数 $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$，因为 $z=1$ 是分母 $(z-1)^2$ 的二级零点，不是分子 e^{z^2} 的零点，所以 $z=1$ 是函数 $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$ 的二级极点.

(8) 对于函数 $\frac{z}{z^2+2z+5}=\frac{z}{(z+1)^2+2^2}$，因为 $z=-1\pm 2i$ 是分母 z^2+2z+5 的一级零点，不是分子的零点，所以 $z=-1\pm 2i$ 是函数 $\frac{z}{z^2+2z+5}$ 的一级极点.

2. 求下列函数 $f(z)$ 在孤立奇点处的留数(有限孤立奇点)：

(1) $\frac{1}{z^4+1}$； (2) $\tan z$； (3) $\frac{1-e^{2z}}{z^n}$(n 为自然数)；

(4) $\frac{1+e^z}{z^2}+\frac{1}{z}$； (5) $\sin\frac{1}{z-2}$； (6) $\frac{1}{z\sin z}$； (7) $\sin\frac{z}{z+1}$；

(8) $z^2 e^{\frac{1}{z-1}}$； (9) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$； (10) $\frac{1}{z}e^{zt-\frac{1}{z}}$.

解 (1) 由第 1 题的(2)可知 $z_k=e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$ $(k=0,1,2,3)$ 是函数 $\frac{1}{z^4+1}$ 的 4 个一级极点，所以

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4+1};\ z_k\right]=\left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_k}=\frac{1}{4z_k^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z_k}{z_k^4}=-\frac{z_k}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}\quad(k=0,1,2,3)$$

(2) 因为 $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ 使分母 $\cos z=0$ 的点为 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，且 $(\cos z)'_{z_k}=-\sin z_k\neq 0$. 所以 z_k 是分母的一级零点，不是分子 $\sin z$ 的零点. 所以，$z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是函数 $\tan z$ 的一级极点，

$$\operatorname{Res}[\tan z;\ z_k]=\operatorname{Res}\left[\frac{\sin z}{\cos z};\ z_k\right]=\frac{\sin z_k}{(\cos z)'_{z_k}}=-1$$

(3) 对于函数 $\dfrac{1-e^{2z}}{z^n}$ (n 为自然数)，$z=0$ 是分母的 n 级零点. 因为 $(1-e^{2z})_{z=0}=0$，$(1-e^{2z})'_{z=0}=-2e^{2z}\ |_{z=0}\neq 0$，所以 $z=0$ 是分子 $(1-e^{2z})$ 的一级零点.

当 $n=1$ 时 $z=0$ 是函数 $\dfrac{1-e^{2z}}{z}$ 的可去奇点，$n\geqslant 2$ 时，$z=0$ 是函数 $\dfrac{1-e^{2z}}{z^n}$ 的 $n-1$ 级极点，

$$\frac{1-e^{2z}}{z^n}=\frac{1}{z^n}\left\{1-\left[1+2z+\frac{1}{2!}(2z)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(2z)^{n-1}+\cdots\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{z^n}\left(2z+\frac{2^2}{2!}z^2+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}z^{n-1}+\cdots\right)\quad(0<|z|<+\infty)$$

$$\therefore\ \mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^n};\ 0\right]=\begin{cases}-\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}, & n\geqslant 2;\\ 0, & n=1.\end{cases}$$

(4) 对于函数 $\dfrac{1+e^z}{z^2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1+e^z+z}{z^2}$，显然 $z=0$ 为函数 $\dfrac{1+e^z}{z^2}+\dfrac{1}{z}$ 的二级极点.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1+e^z}{z^2}+\frac{1}{z};\ 0\right]=\mathrm{Res}\left(\frac{1+e^z+z}{z^2};\ 0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{1+e^z+z}{z^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}(e^z+1)=2$$

(5) $\because\ \sin\dfrac{1}{z-2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^{2n+1}}\quad(0<|z-2|<+\infty)$

所以 $z=2$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{z-2}$ 的本性奇点，

$$\mathrm{Res}\left[\sin\frac{1}{z-2};\ 2\right]=C_{-1}=1$$

(6) 对于函数 $\dfrac{1}{z\sin z}$，因为 $z=0$ 是分母的二级零点，不是分子的零点；$z_k=k\pi\quad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是分母的一级零点，不是分子的零点. 所以，$z=0$ 是函数 $\dfrac{1}{z\sin z}$ 的二级极点，$z_k=k\pi\ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是函数 $\dfrac{1}{z\sin z}$ 的一级极点.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\sin z};\ 0\right]=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right]=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{\sin z}\right)=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2\sin z\cos z}=0$$

(或者因为 $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$ 是偶函数，它在 $z=0$ 的去心邻域 $\{z;\ 0<|z|<\pi\}$ 中的罗朗展开式不含 z 的奇数次幂，所以 $C_{-1}=\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{z\sin z};\ 0\right]=0$)

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\sin z};\ k\pi\right]=\operatorname{Res}\left[\frac{\frac{1}{z}}{\sin z};\ k\pi\right]=\frac{\frac{1}{k\pi}}{(\sin z)'_{z=k\pi}}$$

$$=(-1)^k\frac{1}{k\pi}\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

(7) 对于函数 $\sin\dfrac{z}{z+1}$，$z=-1$ 是它的孤立奇点(且为本性奇点)，函数在 $\{z;\ 0<|z+1|<+\infty\}$ 中的罗朗展开式为

$$\sin\frac{z}{z+1}=\sin\frac{z+1-1}{z+1}=\sin\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$=\sin1\cdot\cos\frac{1}{z+1}-\cos1\cdot\sin\frac{1}{z+1}$$

$$=\sin1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}}$$

$$-\cos1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n+1}}\quad(0<|z+1|<+\infty)$$

$$\therefore\ \operatorname{Res}\left[\sin\frac{z}{z+1},\ -1\right]=-\cos1$$

(8) 对于函数 $z^2\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$，$z=1$ 是它的孤立奇点(且为本性奇点)，函数在 1 的去心邻域 $\{z;\ 0<|z-1|<+\infty\}$ 内的罗朗展开式为

$$z^2\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=[(z^2-2z+1)+(2z-2)+1]e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$=[(z-1)^2+2(z-1)+1]\cdot$$

$$\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\cdots\right]$$

$$=(z-1)^2\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\cdots\right]$$

$$+2(z-1)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!(z-1)^{n-1}}+\cdots\right]$$

$$+\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!(z-1)^{n-1}}+\cdots\right]$$

$$(0<|z-1|<+\infty)$$

$$C_{-1}=\frac{1}{3!}+\frac{2}{2!}+1=2\frac{1}{6}$$

$\therefore \operatorname{Res}[z^2 e^{\frac{1}{z-1}};1]=2\frac{1}{6}$

(9) 对于函数 $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$，$z=-1$ 是函数的 n 级极点.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{(1+z)^n};-1\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(1+z)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\{2n(2n-1)\cdots[2n-(n-2)]\cdot z^{2n-(n-1)}\}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n(2n-1)\cdots(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

(10) 对于函数 $\frac{1}{z}e^{zt-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}e^{zt}\cdot e^{-\frac{1}{z}}$，$z=0$ 是函数的本性奇点，函数在 $z=0$ 的去心邻域 $\{z;0<|z|<+\infty\}$ 中的罗朗展开式为

$$\frac{1}{z}e^{zt-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}e^{zt}\cdot e^{-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\left[1+zt+\frac{1}{2!}(zt)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(zt)^n+\cdots\right]$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots\right]\quad(0<|z|<+\infty)$$

所以相乘后的级数 $\frac{1}{z}$ 的系数 C_{-1} 为

$$C_{-1}=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z}e^{zt-\frac{1}{z}};0\right]$$

$$=1-t+\frac{1}{(2!)^2}t^2+\cdots+(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}$$

3. 利用留数定理计算下列积分：

(1) $\oint_C \frac{\sin z}{z}dz$，其中 C 为圆周曲线 $\left\{z;\ |z|=\frac{3}{2}\right\}$；

(2) $\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz$，其中 C 为圆周曲线 $\left\{z;\ |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$；

(3) $\oint_{|z|=1} \frac{z}{z^2+2z+5}dz$；

(4) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz$；($t$ 为实数)

(5) $\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch}\pi z}{z(z^2+1)}dz$；

(6) $\oint_{|z|=9} \frac{1}{e^z-1}dz$；

(7) $\oint_{|z|=r} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz \quad (r>1)$；

(8) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(e^{-z})}{z^2}dz$；

(9) $\oint_{|z|=8} \cot z dz$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$，所以 $z=0$ 为 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点，所以

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z};\ 0\right)=0,\quad \oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}dz=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z};\ 0\right)=0$$

(2) 对于被积函数 $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$，只有孤立奇点 $z=2$ 落在积分曲线 $C=\left\{z;\ |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$ 的内部，且是二级极点，所以

$$\oint_C\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2};\ 2\right]\quad\left(\text{其中 } C:\ |z-2|=\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[(z-2)^2\cdot\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\right]=-2\pi i$$

(3) 因为被积函数 $\frac{z}{z^2+2z+5}$ 在 $\{z;\ |z|\leqslant 1\}$ 上解析(虽有奇点 $z_{1,2}=-1\pm 2i$，但它们不在 $|z|<1$ 内部)，所以

$$\oint_{|z|=1}\frac{z}{z^2+2z+5}dz=0$$

(4) 因为被积函数 $\frac{e^{zt}}{z^2+1}$ 的奇点 $z=\pm i$ 在 $\{z;\ |z|<2\}$ 内部，且都是单

极点，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{e^{zt}}{z^2+1}dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+1};\ i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+1};\ -i\right)\right]$$

$$=\frac{e^{it}}{2i}+\frac{e^{-it}}{-2i}=\sin t$$

(5) 因为在 $|z|<2$ 内被积函数 $\dfrac{\operatorname{ch}\pi z}{z(z^2+1)}$ 有 3 个单极点 $z_1=0$，$z_2=i$，$z_3=-i$，所以

$$\oint_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch}\pi z}{z(z^2+1)}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{ch}\pi z}{z(z^2+1)};\ z_k\right)=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\frac{\operatorname{ch}\pi z_k}{3z_k^2+1}$$

$$=2\pi i\left[\operatorname{ch}0+\frac{\operatorname{ch}\pi i}{-3+1}+\frac{\operatorname{ch}(-\pi i)}{-3+1}\right]$$

$$=2\pi i\left(1+\frac{\cos\pi}{-2}+\frac{\cos\pi}{-2}\right)=2\pi i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4\pi i$$

(6) 因为 $z_k=2k\pi i\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为被积函数 $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的单极点，只有 $z_{-1}=-2\pi i$，$z_0=0$，$z_1=2\pi i$ 落在积分曲线 $C=\{z;\ |z|=9\}$ 的内部，所以

$$\oint_{|z|=9}\frac{1}{e^z-1}dz=2\pi i\sum_{k=-1}^{1}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{e^z-1};\ z_k\right]=2\pi i\sum_{k=-1}^{1}\frac{1}{e^{z_k}}=2\pi i\cdot 3=6\pi i$$

(7) 因为被积函数 $\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ 的两个单极点 $z_1=0$，$z_2=1$ 均在积分曲线 $C=\{z;\ |z|=r,\ r>1\}$ 的内部，所以

$$\oint_{|z|=r}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz=2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{5z-2}{z(z-1)};\ 0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{5z-2}{z(z-1)};\ 1\right]\right\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{-2}{-1}+\frac{3}{2-1}\right]=10\pi i$$

(8) 因为 $z=0$ 是被积函数在 $\{z;\ |z|<1\}$ 内的二级极点，所以

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cos(e^{-z})}{z^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(e^{-z})}{z^2};\ 0\right]=2\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{\cos(e^{-z})}{z^2}\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}[-\sin(e^{-z})\cdot e^{-z}\cdot(-1)]=2\pi i\sin1$$

(9) 因为被积函数 $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ 的奇点为 $z_k=k\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

且为单极点，$\mathrm{Res}\left(\frac{\cos z}{\sin z};k\pi\right)=\frac{\cos k\pi}{(\sin z)'_{z=k\pi}}=1$，但只有 $z_k=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2)$ 5 个单极点落在 $\{z;|z|<8\}$ 中，所以

$$\oint_{|z|=8}\cot z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=-2}^{2}\mathrm{Res}[\cot z;k\pi]=2\pi\mathrm{i}\times 5=10\pi\mathrm{i}$$

4. (1) 设函数 $f(z)$在简单闭曲线 C 及其内部解析，在 C 上不取零值，z_0 是 $f(z)$在 C 的内部唯一的 m $(m\geqslant 1)$ 级零点，试求$\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 的值.

(2) 如果 $f(z)$在简单闭曲线 C 及其内部 D 除 z_0 外解析，且在 C 上不取零值(z_0 不在 C 上)，z_0 是 $f(z)$的 m $(m\geqslant 1)$ 级极点，试求$\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 的值.

解 (1) 已知 $f(z)$在简单闭曲线 C 及其内部 D 解析，在 C 上不取零值，z_0 是 $f(z)$在 C 内部唯一的 m $(m\geqslant 1)$ 级零点.

对于被积函数 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$，$z=z_0$ 是分母 $f(z)$的 m 级零点，是分子 $zf'(z)$的 $m-1$ 级零点 $(z_0\neq 0)$；所以当 $z_0\neq 0$ 时，$z=z_0$ 是$\frac{zf'(z)}{f(z)}$的一级极点(当 $z_0=0$ 时，它是 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 的可去奇点).

$f(z)$在 z_0 的一个邻域 $D=\{z;|z-z_0|<\rho\}$ 中可表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z) \qquad (*)$$

其中 $\varphi(z)$在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 由于 $f(z)$在 C 及其内部解析，又因为 z_0 是 $f(z)$在 D 内唯一的零点，所以在 D 内有 $\varphi(z)\neq 0$，$\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$在 D 内解析. 由$(*)$式，得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=z\cdot\frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\frac{zm}{z-z_0}+\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

$$\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{mz}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_C\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}mz_0+0=2\pi\mathrm{i}mz_0$$

当 $z_0=0$ 时，显然有$\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=0$.

(2) 已知 $f(z)$在简单闭曲线 C 及其内部除 z_0 外解析，且在 C 上 $f(z)$不取零值(z_0 不在 C 上)，z_0 是 $f(z)$的 m $(m\geqslant 1)$ 级极点.

令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. 由定理 5.3 可知，z_0 是 $g(z)$在 C 内部的唯一的 m 级零点 $(z_0\neq 0)$，则

$$\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{z\left(\dfrac{-g'(z)}{g^2(z)}\right)}{\dfrac{1}{g(z)}}\mathrm{d}z=-\oint_C \frac{zg'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi\mathrm{i}mz_0 \quad (\text{由第(1)部分可知})$$

当 $z_0=0$ 时，$\oint_C \dfrac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=0$.

5. 设 z_0 是函数 $f_1(z)$与 $f_2(z)$的单极点，证明 z_0 是 $f_1(z)\cdot f_2(z)$的二级极点，导出 $f_1(z)\cdot f_2(z)$在 z_0 点的留数计算公式.

解 z_0 是函数 $f_1(z)$与 $f_2(z)$的单极点，则在 z_0 的某个去心邻域 $\{z;0<|z-z_0|<\delta\}$ 中，$f_1(z)$与 $f_2(z)$可表示为

$$f_1(z)=\frac{\varphi_1(z)}{z-z_0},\ f_2(z)=\frac{\varphi_1(z)}{z-z_0}$$

其中 $\varphi_1(z)$与 $\varphi_2(z)$在 z_0 点解析，且 $\varphi_1(z_0)\neq 0$, $\varphi_2(z_0)\neq 0$, 所以在 $\{z;0<|z-z_0|<\delta\}$ 中，$f_1(z)\cdot f_2(z)$可表示成

$$f_1(z)\cdot f_2(z)=\frac{\varphi_1(z)\varphi_2(z)}{(z-z_0)^2}$$

其中 $\varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z)$在 z_0 点解析，且 $\varphi_1(z_0)\cdot\varphi_2(z_0)\neq 0$，所以 z_0 是 $f_1(z)\cdot f_2(z)$ 的二级极点.

由于 $\mathrm{Res}[f_1(z);z_0]=\varphi_1(z_0)$, $\mathrm{Res}[f_2(z);z_0]=\varphi_2(z_0)$，所以

$$\mathrm{Res}[f_1(z)\cdot f_2(z);z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-z_0)^2\cdot\frac{\varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z)}{(z-z_0)^2}\right]$$

$$=\varphi'_1(z_0)\varphi_2(z_0)+\varphi_1(z_0)\varphi'_2(z_0)$$

$$=\varphi'_1(z_0)\cdot\mathrm{Res}[f_2(z);z_0]$$

$$+\varphi'_2(z_0)\cdot\mathrm{Res}[f_1(z);z_0]$$

*6. 判定 $z=\infty$ 是下列函数的什么类型奇点，且求出 $\mathrm{Res}[f(z);\infty]$ 的值，设 $f(z)$为

(1) $\dfrac{e^z}{z^2-1}$;　　(2) $e^{\frac{1}{z-1}}$;　　(3) $\sin z$;

(4) $\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$;　　　　(5) $\dfrac{(z-1)^3}{z^4}$.

解　(1) 取 $z\to\infty$ 两条不同途径求极限

$$\lim_{z=x\to+\infty}\frac{e^z}{z^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty,$$

$$\lim_{z=x\to-\infty}\frac{e^z}{z^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2-1}=0$$

所以 $z=\infty$ 是函数 $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 的本性奇点.

由于函数 $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在扩充复平面有三个孤立奇点：$z_1=1$，$z_2=-1$(单极点)，$z_3=\infty$，所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2-1};1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2-1};-1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2-1};\infty\right]=0$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2-1};\infty\right]=-\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2-1};1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2-1};-1\right]\right\}$$

$$=-\left(\frac{e^1}{2}+\frac{e^{-1}}{-2}\right)=-\mathrm{sh}1$$

(2) $e^{\frac{1}{z-1}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}$　$(0<|z-1|<+\infty)$，$z=\infty$ 是 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 的可去奇点，

$$\mathrm{Res}\left[e^{\frac{1}{z-1}};\infty\right]=-C_{-1}=-1.$$

(3) $\sin z=z-\dfrac{1}{3!}z^3+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots$　$(|z|<+\infty)$，所以 $z=\infty$ 是 $\sin z$ 的本性奇点，

$$\mathrm{Res}[\sin z;\infty]=-C_{-1}=0$$

(4) $$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}=\frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{z}}=z^2\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$=z^2\left[1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots\right]\cdot$$

$$\left[1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right]\quad(1<|z|<+\infty)$$

所以 $z=\infty$ 是函数 $\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$ 的二级极点.

上述两级数相乘后，找出 $\dfrac{1}{z}$ 的系数，

$$C_{-1}=1\times\frac{1}{3!}+(-1)\times\frac{1}{2!}+1\times\frac{1}{1!}+(-1)\times 1=-\frac{1}{3}$$

$\therefore \operatorname{Res}\left[\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}};\infty\right]=-C_{-1}=\dfrac{1}{3}$

(5) $\dfrac{(z-1)^3}{z^4}=\dfrac{1}{z^4}(z^3-3z^2+3z-1)$

$$=\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{3}{z}-\frac{1}{z^4}\quad(0<|z|<+\infty)$$

所以 $z=\infty$ 是函数 $\dfrac{(z-1)^3}{z^4}$ 的可去奇点，

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^3}{z^4};\infty\right]=-C_{-1}=-1$$

7. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}dz$；　　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=r>1}\frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$；

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2-1)(z^4+3)^3}dz$.

解 (1) 被积函数在扩充复平面上有奇点 $z_1=0$，$z_2=-2$，$z_3=\infty$，$\dfrac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}$ 在 $\{z;2<|z+2|<+\infty\}$ 中解析（$z=\infty$ 的去心领域），且

$$\lim_{z\to\infty}\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}=\lim_{z\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)^3}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)^3}=0$$

所以 $z=\infty$ 是 $\dfrac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}$ 的可去奇点.

$\because \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z+2-2}=\dfrac{1}{(z+2)\left(1-\dfrac{2}{z+2}\right)}\quad(|z+2|>2)$

$$=\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+2}\right)^n\quad(2<|z+2|<+\infty)$$

$$(z-1)^3=[(z+2)-3]^3=(z+2)^3-9(z+2)^2+27(z+2)-27$$

$$\therefore \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}=\left[1-\frac{9}{z+2}+\frac{27}{(z+2)^2}-\frac{27}{(z+2)^3}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{z+2}\left[1+\frac{2}{z+2}+\frac{2^2}{(z+2)^2}+\cdots\right]\quad(2<|z+2|<+\infty)$$

级数相乘后，找出 $\frac{1}{z+2}$ 的系数 $C_{-1}=1$，

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3};\infty\right]=-C_{-1}=-1$$

$$\therefore \oint_{|z|=3}\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}dz=-2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3};\infty\right]=2\pi i.$$

或 $$\oint_{|z|=3}\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}dz=2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3};0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3};-2\right]\right\}$$

$$=2\pi i\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\left[\frac{(z-1)^3}{z}\right]''_{z=-2}\right\}$$

$$=2\pi i\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(z^2-3z+3-\frac{1}{z}\right)''_{z=-2}\right]$$

$$=2\pi i\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{8}\right)\right]=2\pi i$$

(2) 在 $\{z;\ |z|=r>1\}$ 内部，$f(z)=\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ 有奇点 $z_k=e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，而 $f(z)$ 在 $\{z;\ r<|z|<+\infty\}$ 中解析，所以

$$\oint_{|z|=r>1}\frac{z^{2n}}{1+z^n}dz=-2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n};\infty\right]$$

在 $\{z;\ 1<r<|z|<+\infty\}$ 中，

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n}=\frac{z^{2n}}{z^n\left(1+\frac{1}{z^n}\right)}=z^n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^n}}=z^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z^n)^k}$$

$$=z^n-1+\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{2n}}+\cdots+\frac{(-1)^k}{z^{n(k-1)}}+\cdots\quad(1<|z|<+\infty)$$

$$\therefore C_{-1}=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n};\ \infty\right]=-C_{-1}=\begin{cases}-1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

$$\therefore \oint_{|z|=r>1}\frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n};\ \infty\right]=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

(3) $$\frac{z^{15}}{(z^2-1)(z^4+3)^3}=\frac{z^{15}}{z^2\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)\cdot z^{12}\left(1+\dfrac{3}{z^4}\right)^3}$$

$$=\frac{z}{\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)\left(1+\dfrac{3}{z^4}\right)^3}$$

在 $3<|z|<+\infty$ 中解析.

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots\quad(1<|z|<+\infty)$$

$$\because \frac{1}{(1+u)^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}\right)''=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(-1)^n\cdot u^{n-2}\quad(|u|<1)$$

$$\therefore \frac{1}{\left(1+\dfrac{3}{z^4}\right)^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\cdot\left(\frac{3}{z^4}\right)^{n-2}\quad(\sqrt[4]{3}<|z|<+\infty)$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-3\cdot 2\,\frac{3}{z^4}+4\cdot 3\left(\frac{3}{z^4}\right)^2+\cdots\right]$$

$$(\sqrt[4]{3}<|z|<+\infty)$$

所以在 $3<|z|<+\infty$ 中有

$$\frac{z^{15}}{(z^2-1)(z^4+3)^3}=z\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot$$

$$\left[2-3\cdot 2\,\frac{3}{z^4}+4\cdot 3\left(\frac{3}{z^4}\right)^2+\cdots\right]$$

级数相乘后，$\dfrac{1}{z}$ 的系数 $C_{-1}=1$.

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{z^{15}}{(z^2-1)(z^4+3)^3};\ \infty\right]=-C_{-1}=-1$$

$$\therefore \oint_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2-1)(z^4+3)^3}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{z^{15}}{(z^2-1)(z^4+3)^3};\ \infty\right]=2\pi\mathrm{i}$$

8. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\sin\theta}\mathrm{d}\theta$；　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{2\cos\theta+3}\mathrm{d}\theta$；

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta\quad(0<|\rho|<1)$；

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$；　　　　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\quad(0<b<a)$.

解　令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\ \cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\quad\therefore\ \mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\quad(\text{利用}(5.17)\text{式})$$

$$(1)\ \int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2-\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$=2\oint_{|z|=1}\frac{1}{4z\mathrm{i}-z^2+1}\mathrm{d}z=-2\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2-4\mathrm{i}z-1}\mathrm{d}z$$

使 $z^2-4\mathrm{i}z-1=0$ 的点 $z_{1,2}=\dfrac{4\mathrm{i}\pm\sqrt{-16+4}}{2}=(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}$ 为函数 $\dfrac{1}{z^2-4\mathrm{i}z-1}$ 的两个单极点，其中只有 $z_2=(2-\sqrt{3})\mathrm{i}\in\{z;\ |z|<1\}$ 内部，

$$\therefore\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2-4\mathrm{i}z-1};\ (2-\sqrt{3})\mathrm{i}\right]=\frac{1}{2z-4\mathrm{i}}\bigg|_{z=(2-\sqrt{3})\mathrm{i}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}$$

$$\therefore\ \text{原积分}=-2\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2-4\mathrm{i}z-1};\ (2-\sqrt{3})\mathrm{i}\right]=-4\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

$$(2)\ \because\ \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2\cos\theta+3}\mathrm{d}\theta\xlongequal{\text{令}\,\theta=2\pi-u}\int_{\pi}^{0}\frac{1}{2\cos u+3}(-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2\cos\theta+3}\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{1}{2\cos\theta+3}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\cos\theta+3}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 \cdot \frac{z^2+1}{2z} + 3} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

$$= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3z+1} dz$$

使 $z^2+3z+1=0$ 的点为 $z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$，它们是函数 $\frac{1}{z^2+3z+1}$ 的两个单极点，其中只有

$$z_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \in \{z;\ |z| < 1\} \text{ 内部}$$

$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2+3z+1};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right] = \left.\frac{1}{2z+3}\right|_{z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ 原积分 $= \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2+3z+1};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} d\theta \quad (0 < |\rho| < 1)$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1-2\rho\frac{z^2+1}{2z}+\rho^2} \cdot \frac{1}{iz} dz = -\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{\rho(z^2+1)-(1+\rho^2)} dz$$

$$= -\frac{1}{i\rho} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)z+1} dz = -\frac{1}{i\rho} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)} dz$$

被积函数 $\frac{1}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)}$ 有两个单极点 $z_1 = \rho$，$z_2 = \frac{1}{\rho}$.

$\because 0 < |\rho| < 1$，$\therefore$ 只有单极点 $z_1 = \rho \in \{z;\ |z| < 1\}$

$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)};\ \rho\right] = \frac{1}{\rho-\frac{1}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho^2-1}$

$\therefore$ 原积分 $= -\frac{1}{i\rho} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right)};\ \rho\right] = \frac{2\pi}{1-\rho^2}$

(4) $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{2}{3-\cos 2\theta} d\theta$

$$\xlongequal{(令\ 2\theta = t)}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = \oint_{|z|=1} \frac{1}{3-\dfrac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2-6z+1}\mathrm{d}z$$

使 $z^2-6z+1=0$ 的点为 $z_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}=3\pm2\sqrt{2}$，它们是被积函数 $\dfrac{1}{z^2-6z+1}$ 的两个单极点，其中只有

$$z_2 = 3-2\sqrt{3} \in \{z;\ |\ z\ | < 1\}\ 内部$$

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2-6z+1};\ 3-2\sqrt{2}\right] = \left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=3-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\therefore 原积分 = -\frac{2}{\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2-6z+1};\ 3-2\sqrt{2}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(5) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(a+b\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z}{[2az+b(z^2+1)]^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{b^2\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(z^2+\dfrac{2a}{b}z+1\right)^2}\mathrm{d}z$$

使 $z^2+\dfrac{2a}{b}z+1=0$ 的点为 $z_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，且为函数 $\dfrac{1}{\left(z^2+\dfrac{2a}{b}z+1\right)^2}$ 的两个二级极点.

$$\because \left|\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right| = \left|\frac{(\sqrt{a^2-b^2})^2-a^2}{b(\sqrt{a^2-b^2}+a)}\right|$$

$$= \left|\frac{-b}{\sqrt{a^2-b^2}+a}\right| < 1 \quad (0<b<a)$$

而 $$\left|\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right| = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} > 1$$

$\therefore$ 只有 $z_1 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \in \{z;\ |z|<1\}$，$z_2 = \dfrac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ 不在 $\{z;\ |z|<1\}$ 内部，舍去.

$$\therefore \text{原积分} = \frac{2}{b^2\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(z^2+\frac{2a}{b}z+1\right)^2};\ z_1\right]$$

$$= \frac{4\pi}{b^2}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2};\ z_1\right]$$

$$= \frac{4\pi}{b^2}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-z_1)^2 \cdot \frac{1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{b^2} \cdot \left.\frac{-(z+z_2)}{(z-z_2)^3}\right|_{z=z_1} = \frac{4\pi}{b^2}\frac{\frac{2a}{b}}{\left(\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^3}$$

$$= \frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

9. 证明 $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}$.

证 $$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi(\sin^2\theta)^n\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^n\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2^n}\int_0^\pi(1-\cos2\theta)^n\mathrm{d}\theta \quad (\text{令 } t=2\theta)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^n\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\oint_{|z|=1}\left(1-\frac{z^2+1}{2z}\right)^n \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\mathrm{i}} \cdot \oint_{|z|=1}\frac{(z^2-2z+1)^n}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\mathrm{i}} \cdot \oint_{|z|=1}\frac{(z-1)^{2n}}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} \cdot \mathrm{i}}2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{Res}\left[\frac{(z-1)^{2n}}{z^{n+1}};\ 0\right]$$

$$=\frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{n!}[(z-1)^{2n}]^{(n)}_{z=0}$$

$$=\frac{(-1)^n\pi}{2^{2n}\cdot n!}\cdot 2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)\cdot(-1)^n$$

$$=\frac{\pi}{2^{2n}\cdot n!}\frac{(2n)!}{n!}=\frac{\pi(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}$$

10. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$；

(3) $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$ (n 为自然数).

解　利用公式(5.19).

(1) $f(z)=\frac{1}{z^6+1}$，分子是零次多项式，分母为 6 次多项式. 分母比分子多项式次数高 6 次，函数在上半平面内有 3 个单极点：

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k+1}{6}\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,1,2)(\text{即 } z_0=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}},\ z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}},\ z_2=\mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}})$$

积分 $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x$　　$\frac{1}{z^6+1}$, z_k　$\lim\limits_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{z^6+1}=\frac{1}{z^5}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^6+1};\ z_k\right]$$

$$=\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{6\cdot z_k^5}=\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{2}\frac{z_k}{6\cdot z_k^6}$$

$$=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}(z_0+z_1+z_2)$$

$$=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}[\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}]$$

$$=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})+\mathrm{i}+\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})\right]=\frac{\pi}{3}$$

(2) 设 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\ (a>0)$，分母多项式次数比分子多项式次数高二次. $f(z)$在实轴上无奇点，在上半平面内有一个二级极点 $z_0=a\mathrm{i}\quad(a>0)$.

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2};\ a\mathrm{i}\right]$$

$$= \pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-a\mathrm{i})^2\cdot\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right]$$

$$= \pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]$$

$$= \pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\cdot\frac{2za\mathrm{i}}{(z+a\mathrm{i})^3} = \frac{\pi}{4a}$$

(3) 设 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)}$，分母多项式次数比分子多项式次数高二次；$f(z)$在实轴上无奇点，在上半平面有两个单极点 $z_1=3\mathrm{i}$，$z_2=2\mathrm{i}$.

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)};\ 3\mathrm{i}\right]\right.$$

$$\left.+\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)};\ 2\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$= \pi\mathrm{i}\left[\frac{z^2}{(z+3\mathrm{i})(z^2+4)}\bigg|_{z=3\mathrm{i}} + \frac{z^2}{(z^2+9)(z+2\mathrm{i})}\bigg|_{z=2\mathrm{i}}\right]$$

$$= \pi\mathrm{i}\left[\frac{-9}{6\mathrm{i}\cdot(-5)} + \frac{-4}{5\cdot 4\mathrm{i}}\right] = \frac{\pi}{10}$$

(4) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ (n 为自然数)，分母多项式次数至少高于分子多项式 4 次 ($n\geqslant 1$)，它在上半平面有一个 $(n+1)$ 级的极点 $z_0=\mathrm{i}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}};\ \mathrm{i}\right]$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{n!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[(z-\mathrm{i})^{n+1}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\cdot(z+\mathrm{i})^{-(2n+1)}\bigg|_{z=\mathrm{i}}$$

$$=\frac{2\pi i}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\cdot(2n)!}{n!}\frac{1}{(2i)^{2n+1}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}\pi$$

11. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}dx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}dx\quad(a>0,b>0)$；

(4) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx\quad(a>0,b>0,a\neq b)$；

(5) $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx\quad(a>0,b>0)$；

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin tx}{(x-a)^2+b^2}dx\quad(b>0,t>0)$.

解　利用公式(5.21)，(5.22)与(5.23)，设

(1) $f(z)=\frac{z}{1+z^2}$，分母多项式次数比分子多项式次数高一次，所以 $z=i$ 是函数在上半平面内唯一的一个单极点.

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\right]$$

而
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{1+z^2};i\right]=2\pi i\frac{i\cdot e^{-1}}{2i}=\pi i\cdot e^{-1}$$

∴ 原积分 $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}[\pi ie^{-1}]=\frac{\pi}{2e}$

(2) $f(z)=\frac{z^3}{(z^2+1)^2}$，分母多项式次数比分子多项式次数高一次，$z=i$ 是函数在上半平面内唯一的一个二级极点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx\right]=\mathrm{Im}[I]$$

而
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{iz}}{(z^2+1)^2};i\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{z^3e^{iz}}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}=2\pi i\left.\frac{[(z+i)(3z^2+z^3i)-2z^3]e^{iz}}{(z+i)^3}\right|_{z=i}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{4e}=\frac{\pi i}{2e}$$

$\therefore$ 原积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left[\frac{\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{e}}\right]=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ $(a>0)$，分母多项式次数比分子多项式次数高二次，$z=a\mathrm{i}$ $(a>0)$ 是函数在上半平面内的唯一单极点.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2+a^2};\ a\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b(a\mathrm{i})}}{2a\mathrm{i}}=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-ab}$$

$$\therefore \text{原积分}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}[I]=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-ab}$$

(4) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq 0)$ 的分母多项式次数比分子多项式次数高 4 次，$z_1=a\mathrm{i}$ 和 $z_2=b\mathrm{i}$ 是函数在上半平面内的二个单极点.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)};\ a\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)};\ b\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a\mathrm{i}(b^2-a^2)}+\frac{\mathrm{e}^{-b}}{(a^2-b^2)2b\mathrm{i}}\right]=\frac{\pi(a\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-a})}{ab(a^2-b^2)}$$

$$\therefore \text{原积分}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\pi(a\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-a})}{ab(a^2-b^2)}\right]$$

$$=\frac{\pi(a\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-a})}{2ab(a^2-b^2)}$$

(5) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+b^2)^2}$ $(b>0)$，分母多项式次数比分子多项式次数高 4 次，$z=b\mathrm{i}$ 是函数在上半平面内唯一的一个二级极点.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x\quad(a>0,\ b>0)$$

$$=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z^2+b^2)^2};\ b\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to b\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+b\mathrm{i})^2}\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to bi}\left[\frac{ai(z+bi)-2}{(z+bi)^3}e^{iaz}\right]=2\pi i\cdot\frac{-2ab-2}{-8b^3 i}e^{-ab}$$

$$=\frac{(ab+1)\pi}{2b^3}e^{-ab}$$

$\therefore$ 原积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{(x^2+b^2)^2}dx\right]$$

$$=\frac{(ab+1)\pi}{4b^3}e^{-ab}$$

(6) $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^2+b^2}$ $(b>0)$，分母多项式次数比分子多项式次数高 2 次，$z=a+bi$ 是函数在上半平面内唯一的一个单极点.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{(x-a)^2+b^2}dx$$

$$=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{e^{itz}}{(z-a)^2+b^2};\ a+bi\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{itz}}{2(z-a)}\bigg|_{z=a+bi}=2\pi i\frac{e^{-tb+at i}}{2bi}$$

$$=\frac{\pi}{b}e^{-tb}[\cos at+i\sin at]$$

$\therefore$ 原积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin tx}{(x-a)^2+b^2}dx=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{(x-a)^2+b^2}dx\right]$

$$=\frac{\pi}{b}e^{-tb}\cdot\sin at$$

第六章 保角映射

【基本要求】

(1) 理解保角映射的概念(两曲线之间的夹角保持方向与大小的不变性). 了解保角映射的几个一般性定理: 黎曼映照定理(保角映射的存在性与唯一性定理)、边界对应原理等. 理论证明不作要求,只要求在讨论具体的保角映射中能够运用它们.

(2) 了解几个最基本的初等函数的保角映射. 如整线性映射、倒数映射、指数映射、幂函数映射等,从而了解一些简单的初等函数的映射关系.

(3) 了解分式线性映射的一般表达式及唯一确定一个分式线性映射的条件,着重掌握两个重要的分式线性映射:

① 将上半平面(或角域或带域)映射成单位圆内部的分式线性映射;

② 将单位圆内部映射为单位圆内部的分式线性映射.

(4) 会将简单的映射进行分解,能够指出该映射将已知的区域映射成什么区域;会将基本初等函数与分式线性函数进行复合,寻求两个已知区域之间(简单区域)的保角映射.

【基本概念】

1. 保角映射的概念及几个一般性定理

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 上解析,$z_0\in D$. 如果 $f'(z_0)\neq 0$,那么 $f(z)$ 可表示为

$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\alpha(z)(z-z_0)$

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\alpha(z)(z-z_0) \tag{6.1}$$

其中 $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z)=0$.

设线性函数

$$S(z)=A+B(z-z_0)\ (=Bz+A-Bz_0). \tag{6.2}$$

其中 $A=f(z_0)$, $B=f'(z_0)$. 显然,当 z 充分接近 z_0 时,映射 $w=f(z)$ 与线性映射 $S(z)$ 就非常接近.

我们将从本章的第 2 部分中得知,线性映射 $S(z)=A+B(z-z_0)$ 是一个复合映射,它是由一个辐角为 $\alpha=\mathrm{Arg}(B)$ 的旋转映射与因子 $|B|$ 的伸缩映射及向量 $A-Bz_0$ 的平移映射复合而成.

定义 6.1 如果一个映射 $w=f(z)$ 在 z_0 处保持两有向曲线之间的角度、方向不变以及保持其伸缩率不变,则称 $w=f(z)$ 在 z_0 点是保角的;如果 $w=f(z)$ 在区域 D 内处处保角,则称 $w=f(z)$ 为 D 内的保角映射.

定理 6.1 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析,$z_0\in D$. 如果 $f'(z_0)\neq 0$,则 $f(z)$ 在 z_0 点是保角的.

证 设 C: $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 是过 $z_0=z(t_0)(t_1\leqslant t_0\leqslant t_2)$ 的一条光滑曲线,曲线 C 在 z_0 处的切向量为 T,即

$$T=z'(t_0)\quad (t_1\leqslant t_0\leqslant t_2) \tag{6.3}$$

T 与 x 轴正向夹角为

$$\beta=\mathrm{Arg}z'(t_0) \tag{6.4}$$

在映射 $w=f(z)$ 下,曲线 C 的象曲线为

$$\begin{aligned} K:\ w=w(t)&=f[z(t)]\\ &=u[x(t),\ y(t)]+\mathrm{i}v[x(t),\ y(t)]\quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)\end{aligned}$$

K 过 z_0 的象点为 $w_0=w[z(t_0)]$. 由链法则,象曲线 K 在点 w_0 的切向量

$$T^*=\left.\frac{\mathrm{d}w[z(t)]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=f'(z_0)z'(t_0) \tag{6.5}$$

T^* 在 w 平面上与 u 轴正向的夹角为

$$\gamma = \operatorname{Arg}[f'(z_0)] + \operatorname{Arg}z'(t_0) = \alpha + \beta \tag{6.6}$$

其中

$$\alpha = \operatorname{Arg}[f'(z_0)] \tag{6.7}$$

因此，在 z_0 点的曲线 C 的切线经过映射 $w = f(z)$ 后，象曲线 K 在 w_0 点的切线旋转了角度 $\alpha = \operatorname{Arg}[f'(z_0)]$（见图 6-1）.

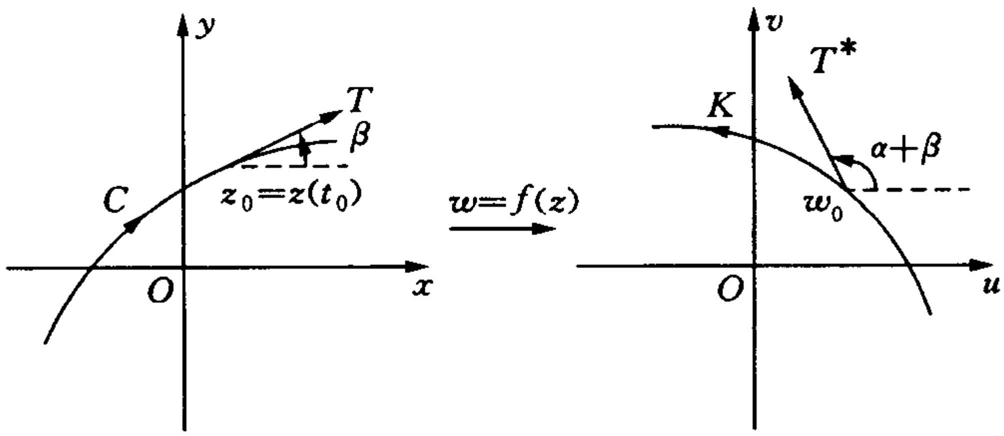


图 6-1　过 z_0 点曲线 C 的切向量 T 与过 w_0 点曲线 K 的切向量 T^*，$f'(z_0) \neq 0$

设 C_1 与 C_2 是过 z_0 点的光滑曲线(C_1, $C_2 \subset D$)，C_1 与 C_2 在 z_0 点的切向量分别为 T_1 与 T_2；再设 β_1 和 β_2 分别表示 T_1 和 T_2 与 x 轴正向的夹角，即 $\beta_1 = \operatorname{Arg}z_1'(t_0)$，$\beta_2 = \operatorname{Arg}z_2'(t_0)$，[其中 $z_1(t)$ 与 $z_2(t)$ 分别为 C_1 与 C_2 的参数表示式]；又设 $w_0 = f(z_0)$，曲线 C_1 与 C_2 在映射 $w = f(z)$ 下的象曲线为 K_1 与 K_2，它们在 w_0 点处的切向量分别为 T_1^* 与 T_2^*. T_1^* 与 T_2^* 与 u 轴正向夹角分别为 γ_1 与 γ_2，利用等式(6.6)有

$$\gamma_1 = \alpha + \beta_1 \text{ 与 } \gamma_2 = \alpha + \beta_2 \tag{6.8}$$

其中 $\alpha = \operatorname{Arg}f'(z_0)$. 显然，(6.8)式也可写为

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \beta_2 - \beta_1 \tag{6.9}$$

这说明象曲线 K_1 与 K_2（自 K_1 至 K_2）的夹角 $\gamma_2 - \gamma_1$，其大小、

方向与曲线 C_1 和 C_2（自 C_1 至 C_2）的夹角保持不变，因此映射 $w=f(z)$ 在 z_0 点是保角的（见图 6－2）.

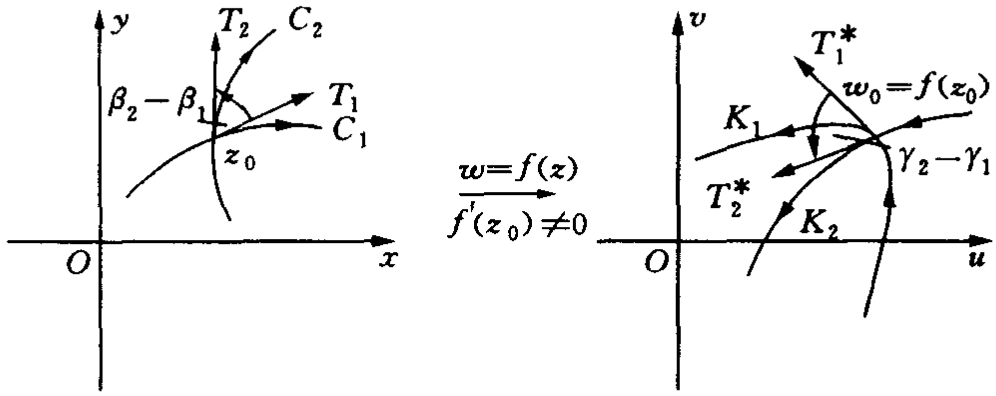


图 6－2　$f'(z_0)\neq 0$ 时，解析函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点是保角的，$\gamma_2-\gamma_1=\beta_2-\beta_1$

设 $w=f(z)$ 是区域 D 内不恒为常数的解析函数（即在 D 内 $f'(z)\not\equiv 0$），如果对于某个点 $z_0\in D$，有 $f'(z_0)=0$，则称 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的临界点，此时 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点是不保角的．我们常常可以利用这些点的不保角性进行角形区域的放大与缩小．

下面初步讨论解析函数在临界点处的映射状况．

定理 6.2　设 $w=f(z)$ 在 z_0 点解析，如果 $f'(z_0)=0$，$f''(z_0)=0$，…，$f^{(k-1)}(z_0)=0$，而 $f^{(k)}(z_0)\neq 0$（k 为整数，且 $k\geqslant 2$），则映射 $w=f(z)$ 把过 z_0 点的两曲线间的夹角放大 k 倍．

证　因为 $w=f(z)$ 在 z_0 点解析，则在 z_0 点的一个$\boxed{\text{邻域}}$内 $f(z)$ 可进行台劳级数展开．已知 $f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(k-1)}(z_0)=0$，$f^{(k)}(z_0)\neq 0$，所以

$$f(z)=f(z_0)+a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots$$

其中 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$，上式可改写为

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^k\varphi(z) \tag{6.10}$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$.

由于 $w=f(z)$，$w_0=f(z_0)$，从(6.10)式得

$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)^k\varphi(z)$

$\mathrm{Arg}[f(z)-f(z_0)]$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(w-w_0) &= \operatorname{Arg}[f(z)-f(z_0)] \\ &= k\operatorname{Arg}(z-z_0)+\operatorname{Arg}[\varphi(z)] \qquad (6.11)\end{aligned}$$

设 C 是过 z_0 点的光滑曲线，如果沿着曲线 C 令 $z \to z_0$，则对应于沿着 C 的象曲线 K 有 $w \to w_0$. 曲线 C 在 z_0 点的切线 T 与 x 轴正向的夹角为 β，象曲线 K 在象点 w_0 处的切线 T^* 与 u 轴正向的夹角为 γ.

$$\beta = \lim_{z\to z_0}\operatorname{Arg}(z-z_0),\ \gamma = \lim_{w\to w_0}\operatorname{Arg}(w-w_0) \qquad (6.12)$$

由(6.11)式与(6.12)式，当 $z \to z_0$ 时

$$\gamma = \lim_{z\to z_0}[k\operatorname{Arg}(z-z_0)+\operatorname{Arg}\varphi(z)] = k\beta+\delta \qquad (6.13)$$

其中

$$\delta = \operatorname{Arg}[\varphi(z_0)] = \operatorname{Arg}(a_k) = \operatorname{Arg}[f^{(k)}(z_0)]. \qquad (6.14)$$

设 C_1 与 C_2 是过 z_0 点的两条光滑曲线，K_1 与 K_2 分别是 C_1 与 C_2 的象曲线，则由(6.13)式得

$$\begin{aligned}\Delta\gamma = \gamma_2-\gamma_1 &= (k\beta_2+\delta)-(k\beta_1+\delta) = k(\beta_2-\beta_1) \\ &= k\Delta\beta \qquad (6.15)\end{aligned}$$

这说明象曲线 K_1 与 K_2 的夹角 $\Delta\gamma$ 是曲线 C_1 与 C_2 的夹角的 k 倍，即两曲线在 z_0 点的顶角放大 k 倍(见图 6-3).

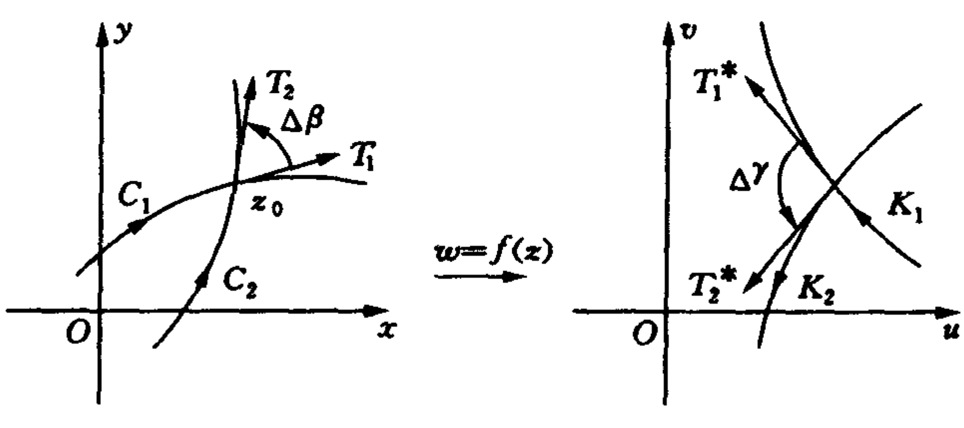


图 6-3 $w=f(z)$ 在 z_0 点解析，$f'(z_0)=\cdots=f^{(k-1)}(z_0)=0$，$f^{(k)}(z_0)\neq 0$，$\Delta\gamma = k\Delta\beta$

下面介绍几个定理，只作叙述而不给证明，定理的结论保证了我们在具体进行保角映射操作时的可行性.

定理 6.3 （黎曼映射定理）设 D 与 G 是两个不同于复平面 $\mathbb{C}$ 的单连通区域（或者称边界多于一点的单连通区域），任取 $z_0 \in D$，$w_0 \in G$ 及实数 $\alpha \in (-\pi, \pi]$，则存在唯一从 D 到 G 的保角映射 $w = f(z)$，使得 $w_0 = f(z_0)$，$\arg f'(z_0) = \alpha$.

定理 6.4 （边界对应原理）设简单闭曲线 P 和 P' 围成的区域 D 和 D'，则 D 到 D' 的保角映射 $w = f(z)$ 可以延拓为由 $D \cup P$ 到 $D' \cup P'$ 的一一对应的连续映射，且 $f(z)$ 将 P 的正向映射为 P' 的正向.

例 1 找出下列映射 $w = f(z)$ 在指定点 z_0 处的旋转角 $\alpha = \operatorname{Arg} f'(z_0)$ 与伸缩率 $|f'(z_0)|$.

(1) $w = \dfrac{1}{z}$ 在点 $z_0 = 1$ 与 $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ 处；

(2) $w = \sin z$ 在点 $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}, 0$ 与 $-\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}$ 处.

解 (1) $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$，$\quad f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$，

(a) $f'(1) = -1 = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$，所以 $\alpha = \arg f'(1) = \pi$，$|f'(1)| = 1$；

(b) $f'(1+\mathrm{i}) = -\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$，

$$\alpha = \arg f'(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}, \quad |f'(1+\mathrm{i})| = \frac{1}{2};$$

(2) $w = f(z) = \sin z$，$f'(z) = \cos z$，

(a) $f'\left(\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right) = -\sin \mathrm{i} = -\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1 = \mathrm{sh}1\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$

$$\arg f'\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \left|f'\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right)\right| = \mathrm{sh}1.$$

(b) $f'(0) = 1$，$\arg f'(0) = 0$，$|f'(0)| = 1$

(c) $f'\left(-\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right) = \sin \mathrm{i} = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}1 = \mathrm{sh}1\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$，

$e^{\frac{1}{2}\ln z} = e^{\frac{1}{2}\ln(x+yi)}$

$$\arg f'\left(-\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{2},\ f'\left(-\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\right)=\mathrm{sh}1.$$

例 2 根式映射 $w=z^{\frac{1}{2}}$ 的主支将 Z 平面上的正交直线 $x=a$，$y=b\ (a>0,\ b>0)$ 映射成什么曲线？

解 根式映射的主支 $w=z^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln z}$ 是区域 $D=\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\ r>0$ 与 $-\pi<\theta<\pi\}$ 内的一一映射，且解析. 因为 $(z^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$，所以是保角的.

$$w=z^{\frac{1}{2}}\ \text{的逆映射}\ z=w^2$$

令 $w=u+\mathrm{i}v,\ z=x+\mathrm{i}y\Rightarrow x+\mathrm{i}y=(u+\mathrm{i}v)^2=u^2-v^2+2uv\mathrm{i}$. 所以有

$$\begin{cases}x=u^2-v^2\\ y=2uv\end{cases}$$

直线 c_1：$x=a$ 被映射为曲线 l_1：$u^2-v^2=a\ (a>0)$；

直线 c_2：$y=b$ 被映射为曲线 l_2：$2uv=b\ (b>0)$.

在 Z 平面上，c_1 与 c_2 在点 $a+\mathrm{i}b$ 处正交，映射后象曲线 l_1 与 l_2 在象点 $(a+\mathrm{i}b)^{\frac{1}{2}}$ 处正交.

2. 若干初等函数所确定的映射

(1) 整线性映射

$$w=Az+B\ (\text{其中}\ A\ \text{和}\ B\ \text{为复常数})\tag{6.16}$$

先观察下列三个映射：

(1°) $w=z+B\ (B=a+\mathrm{i}b\ \text{复常数})$

因为

$w=T(z)=z+B\ (B=a+\mathrm{i}b)$，$w=x+a+\mathrm{i}(y+b)$.

$$w'(z)=T'(z)=1\neq 0\tag{6.17}$$

所以该映射在全平面 $\mathbb{C}$ 上是保角映射，也是 Z 平面到 W 平面的一一对应映射，点 z 通过向量 $a+\mathrm{i}b$ 位移，到达一个新的位置 $w=$

$T(z)$(见图 6-6)，它的逆映射为

$$z = T^{-1}(w) = w - B = u - a + \mathrm{i}(v - b) \tag{6.18}$$

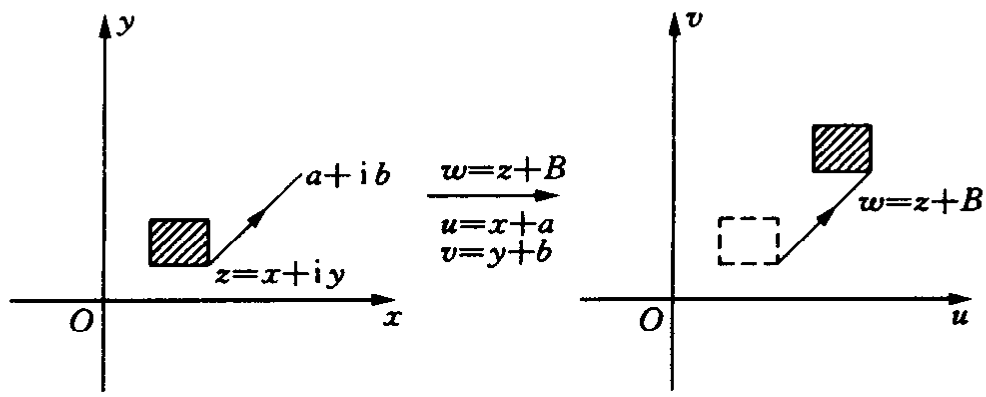


图 6-6　平移映射 $w = T(z) = z + B$

(2°) $w = R(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$ (α 为实数) (6.19)

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $R(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}$，因为 $R'(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 0$，所以 $R(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$ 是 Z 平面到 W 平面的一个一一对应的保角映射，是点 z 关于 Z 平面在原点旋转一个角度 α 到达的一个新的位置 $w = R(z)$(见图 6-7).

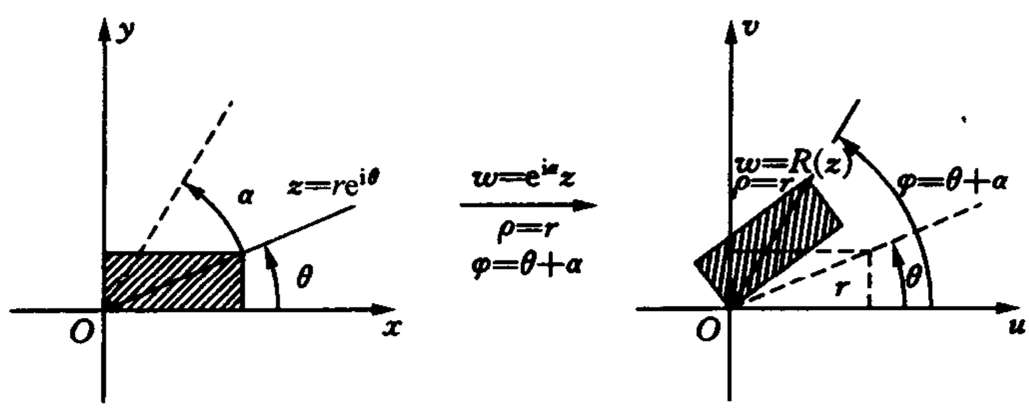


图 6-7　旋转映射 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$

如果令 $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则其逆映射

$$z = R^{-1}(w) = w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\alpha)} \tag{6.20}$$

(3°) 设 $k > 0$，则映射

$$w = S(z) = kz = kx + \mathrm{i}ky \tag{6.21}$$

是 Z 平面到 W 平面的一个一一映射. 由于 $w'(z) = S'(z) = k \neq 0$，所以它在全平面 $\mathbb{C}$ 上是保角映射.

如果 $k > 1$，点之间的距离伸展了 k 倍；

如果 $k < 1$，点之间的距离缩减了 k 倍；

如果 $k = 1$ ，则为恒等映射(见图 6-8).

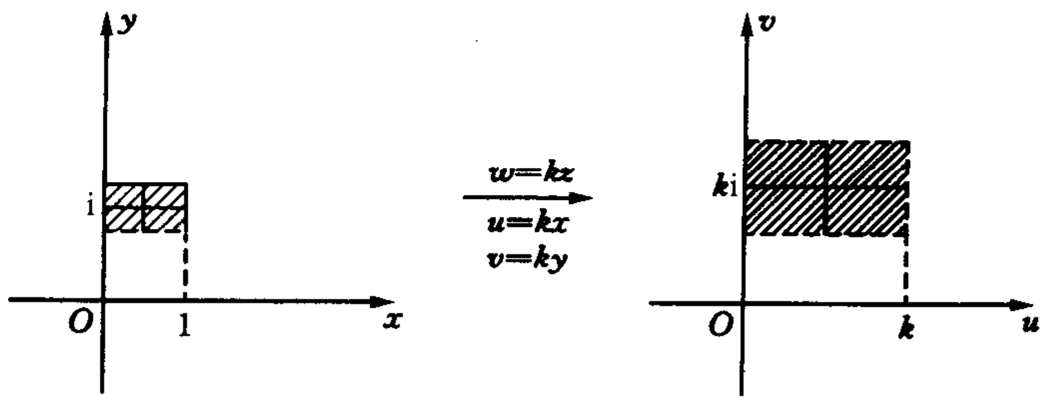


图 6-8　伸缩映射 $w = kz$

其逆映射

$$z = S^{-1}(w) = \frac{1}{k}w = \frac{1}{k}u + \mathrm{i}\,\frac{v}{k}. \tag{6.22}$$

由上可见，整线性映射

$w = f(z) = Az + B$ (其中 $A = ke^{\mathrm{i}\alpha} \neq 0$，$B = a + \mathrm{i}b$ 为复常数)

是上述三种映射的复合映射. 因为 $f'(z) = A \neq 0$，所以它在全平面 $\mathbb{C}$ 上是保角的，它的逆映射

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A} \tag{6.23}$$

仍是一个整线性映射.

例 3　求区域 $D = \{z;\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$ 在整线性映射 $w = (-1 + \mathrm{i})z - 2 + 3\mathrm{i}$ 下的象区域.

解　$w = (-1 + \mathrm{i})z - 2 + 3\mathrm{i}$，　$w'(z) = -1 + \mathrm{i} \neq 0$，

它的逆映射 $z = \dfrac{w + 2 - 3\mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i}}$，设 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则

$$x+\mathrm{i}y=\frac{u+\mathrm{i}v+2-3\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\frac{u+2+\mathrm{i}(v-3)}{-1+\mathrm{i}}$$

$$=\frac{-u+v-5}{2}+\mathrm{i}\,\frac{-u-v+1}{2}$$

$$x=\frac{-u+v-5}{2},\ y=\frac{-u-v+1}{2}$$

因为半平面 $D=\{z;\ \mathrm{Re}(z)>1\}=\{x+\mathrm{i}y;\ x>1\}$，所以有

$$\frac{-u+v-5}{2}>1 \quad \text{即为} \quad v>u+7.$$

所以 D 的象区域为 $G=\{u+\mathrm{i}v;\ v>u+7\}$（见图 6－9）.

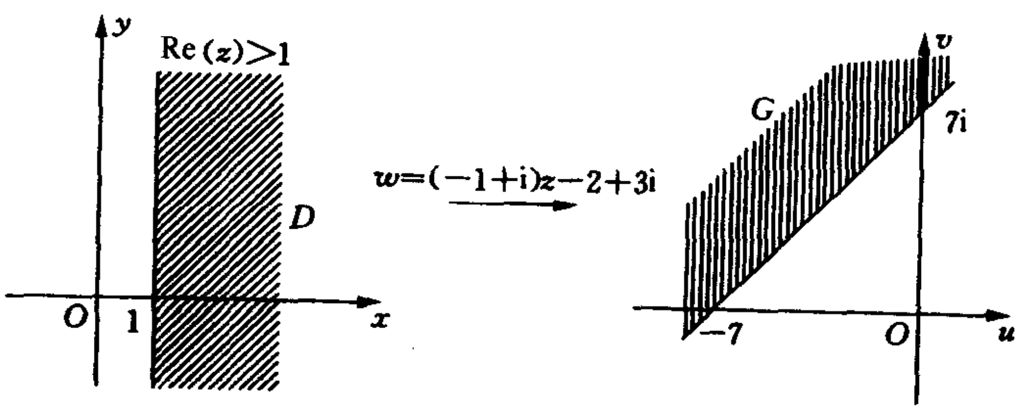


图 6－9　映射 $w=(-1+\mathrm{i})z-2+3\mathrm{i}$

例 4　设 $w=(3+4\mathrm{i})z-2+\mathrm{i}$，求圆周曲线

$$C:\ \begin{cases}x=1+\cos t\\ y=1+\sin t\end{cases}\quad(-\pi<t\leqslant\pi)$$

的象曲线.

解　$u+\mathrm{i}v=w=(3+4\mathrm{i})z-2+\mathrm{i}$

$$=(3+4\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)-2+\mathrm{i}$$

$$=(3x-4y-2)+(4x+3y+1)\mathrm{i}$$

$$=[3(1+\cos t)-4(1+\sin t)-2]$$

$$+[4(1+\cos t)+3(1+\sin t)+1]\mathrm{i}$$

$$=-3+3\cos t-4\sin t+\mathrm{i}(8+4\cos t+3\sin t)$$

$$u=-3+3\cos t-4\sin t$$

$$v=8+4\cos t+3\sin t \quad (-\pi<t\leqslant\pi)$$

或

$$\begin{cases} u+3=3\cos t-4\sin t \\ v-8=4\cos t+3\sin t \end{cases} \quad (-\pi<t\leqslant\pi)$$

$$\therefore \quad (u+3)^2+(v-8)^2=25=5^2.$$

即映射 $w=(3+4\mathrm{i})z-2+\mathrm{i}$，将曲线 $C=\{(x,y);(x-1)^2+(y-1)^2=1\}$ 映射为曲线 $K=\{(u,v);(u+3)^2+(v-8)^2=5^2\}$，或 $K=\{w;|w-(-3+8\mathrm{i})|=5\}$.

例 5 求将圆周曲线 $\{z;|z|=1\}$ 映射为圆周曲线 $\{w;|w-3+2\mathrm{i}|=5\}$，且满足 $\zeta(-\mathrm{i})=3+3\mathrm{i}$ 的整线性映射 $w=\zeta(z)$.

解 设

$w=\zeta(z)=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z+B$，$w-B=k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z$

已知 $w=\zeta(z)$ 时，$C=\{z;|z|=1\}$ 映射成 $K=\{w;|w-(3-2\mathrm{i})|=5\}$，所以

$$K:|w-B|=k|z|=k\ (\because\{z;|z|=1\})$$

因为 $B=3-2\mathrm{i}$，$k=5$，所以有 $w=\zeta(z)=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z+(3-2\mathrm{i})$，又已知 $\zeta(-\mathrm{i})=3+3\mathrm{i}$，所以

$$3+3\mathrm{i}=\zeta(-\mathrm{i})=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(-\mathrm{i})+3-2\mathrm{i}$$

$$5\mathrm{i}=-5\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=-1$$

所以，所求映射为 $w=\zeta(z)=-5z+3-2\mathrm{i}$.

例 6 证明整线性映射 $A(w-w_0)R_1=(z-z_0)R_2$（其中 R_1，R_2 为大于零的实数，A 是模为 1 的复数），将 Z 平面上的圆周 $C=\{z;|z-z_0|=R_1\}$ 映射为 W 平面上的圆周 $K=\{w;|w-w_0|=R_2\}$.

证 当 $z\in\{z;|z-z_0|=R_1\}$ 时，

$$|A(w-w_0)R_1|=|(z-z_0)R_2|=R_1R_2,$$

因为 $|A|=1$，所以有

$$|w-w_0|=R_2$$

反之，假设整线性函数为 $w=A(z-z_0)+B$（其中 $A=ke^{i\alpha}\neq 0$），由它将 $\{z;\ |z-z_0|=R_1\}$ 映射为 $\{w;\ |w-w_0|=R_2\}$ 来待定系数 A 与 B. 因为

$$w(z_0)=w_0 \text{ 与 } |w-B|=|A(z-z_0)|=|AR_1|=kR_1,$$

所以

$$B=w_0,\ kR_1=R_2\Rightarrow k=\frac{R_2}{R_1}$$

$$w=ke^{i\alpha}(z-z_0)+B=\frac{R_2}{R_1}e^{i\alpha}(z-z_0)+w_0$$

即

$$(w-w_0)R_1=(z-z_0)R_2\cdot e^{i\alpha},\ \frac{1}{e^{i\alpha}}(w-w_0)R_1=(z-z_0)R_2$$

不妨记 $\frac{1}{e^{i\alpha}}=A$，所以 $|A|=1$，则

$$A(w-w_0)R_1=(z-z_0)R_2 \tag{6.24}$$

(2) 倒数映射 $w=\frac{1}{z}$

映射 $w=\frac{1}{z}$ 将 Z 平面上的点 z ($z\neq 0$) 映射到 W 平面上的点 $\frac{1}{z}$，且 $w=0$ 没有原象点. 由于 $z\bar{z}=|z|^2$，所以映射 $w=\frac{1}{z}$ 可看成下面两个映射(反演映射与关于实轴的对称映射).

$$w=\bar{\zeta},\ \zeta=\frac{z}{|z|^2} \tag{6.25}$$

的复合映射，即 $w=\bar{\zeta}=\overline{\left(\frac{z}{|z|^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{1}{z}$，其中 $\zeta=\frac{z}{|z|^2}$ 是

关于单位圆 $|z|=1$ 的反演映射，且满足：

$$|\zeta||z|=1 \quad 且 \quad \mathrm{Arg}\zeta=\mathrm{Arg}z \tag{6.26}$$

因此，Z 平面上单位圆内部的点 $z\in\{z;\ |z|<1\}$ 被映射为 ζ 平面上单位圆外的点 $\zeta\in\{\zeta;\ |\zeta|>1\}$；反之亦然. Z 平面上单位圆上的点映射成 Z 平面上单位圆上的点 ζ（见图 6-10(a)，(b)）；而映射 $w=\overline{\zeta}$ 是从 ζ 平面到 W 平面的关于实轴的对称映射（见图 6-10(b)，(c)）.

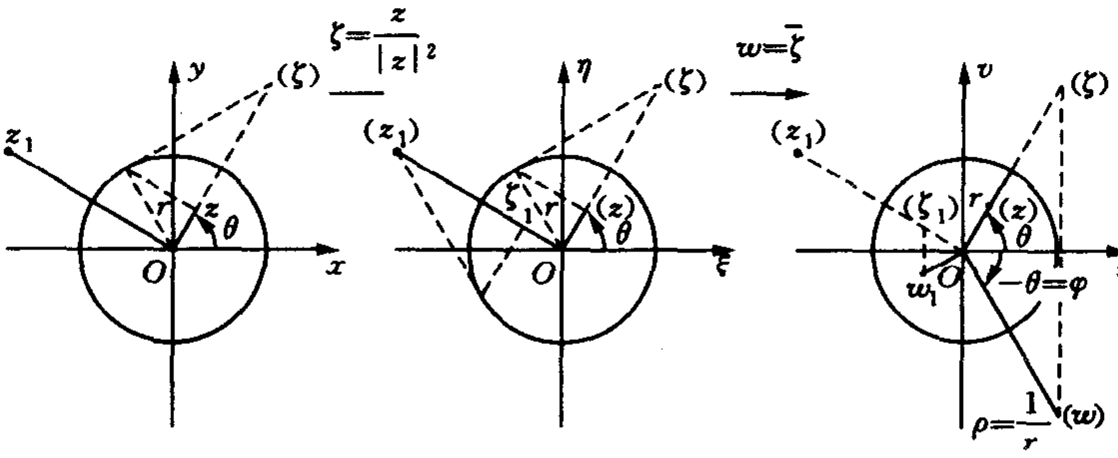


图 6-10

从图 6-10 可见，自(a)至(b)是反演映射 $\zeta=\dfrac{z}{|z|^2}$，自(b) 至(c) 是对称映射 $w=\overline{\zeta}$，而其复合映射为 $w=\dfrac{1}{z}$. 利用

$$w=\rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}(z=re^{i\theta}) \tag{6.27}$$

得

$$\rho=\frac{1}{r},\ \varphi=-\theta.$$

可见，Z 平面上射线 $l=\{re^{i\theta};\ r>0 与 \theta=\alpha\}$ 映射成 W 平面上的射线 $L=\{\rho e^{i\varphi};\ \rho>0 与 \varphi=-\alpha\}$，单位圆 $\{z;\ |z|=1\}$ 内的点映射成单位圆 $\{w;\ |w|=1\}$ 外的点. 反之亦然.

由于 $\dfrac{dw}{dz}=-\dfrac{1}{z^2}$，所以映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 除去 $z=0$ 与 $z=\infty$ 点处，在复平面上处处保角.

倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 还可延拓到扩充的复平面去.

假设在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下,$z=0$ 的象为 $w=\infty$; $z=\infty$ 的象为 $w=0$,即倒数映射可写为:

$$w=f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}, & \text{其中 } z\neq 0,\ z\neq\infty;\\ 0, & \text{其中 } z=\infty;\\ \infty, & \text{其中 } z=0.\end{cases}$$

此时若作出某些规定,映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 将扩充的 Z 平面保角映射到扩充的 W 平面去,则 Z 平面上的广义圆(圆周曲线或直线)映射为 W 平面上的广义圆(详见参考书目[1]).

例 7 求在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下,Z 平面上的区域 $D=\{z;\ \mathrm{Re}(z)>\dfrac{1}{2}$ 与 $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<1\}$ 的象区域.

解 $w=\dfrac{1}{z}$ 的逆映射 $z=\dfrac{1}{w}$,

$$x+\mathrm{i}y=\frac{1}{u+\mathrm{i}v}=\frac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2}\tag{6.28}$$

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}\tag{6.29}$$

区域 $D=\{z;\ \mathrm{Re}(z)>\dfrac{1}{2}$ 与 $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<1\}$,即

$$D=\{x+\mathrm{i}y;\ x>\frac{1}{2}\text{ 与 }\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<1\}$$

由 $x>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{u}{u^2+v^2}>\dfrac{1}{2}$,得

$$(u-1)^2+v^2<1$$

由$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<1 \Rightarrow x^2+y^2-x<\frac{3}{4}$，得

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2-\frac{u}{u^2+v^2}<\frac{3}{4}$$

即

$$\left(u+\frac{2}{3}\right)^2+v^2>\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

所以 D 的象区域

$$G=\left\{u+\mathrm{i}v;\ (u-1)^2+v^2<1 \text{ 与 } \left(u+\frac{2}{3}\right)^2+v^2>\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}$$

亦即 $G=\left\{w;\ |w-1|<1 \text{ 与 } \left|w+\frac{2}{3}\right|>\frac{4}{3}\right\}$（见图 6-11）.

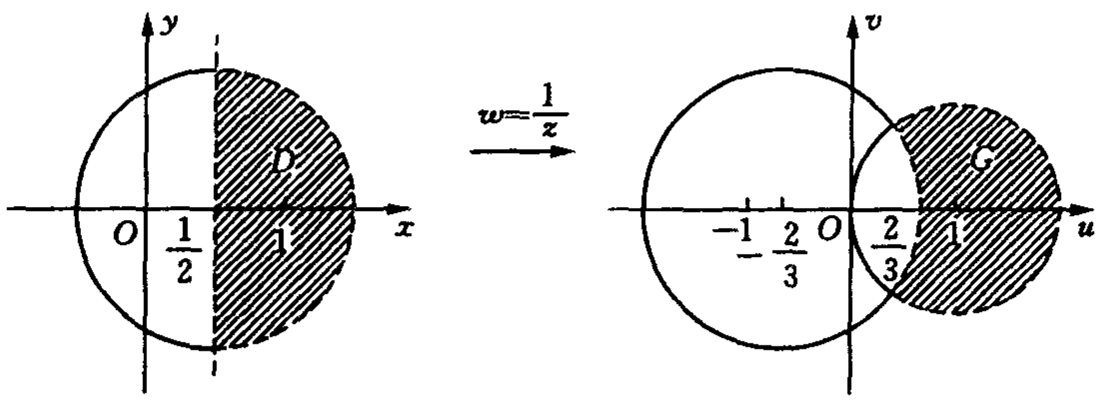


图 6-11　$w=\frac{1}{z}$ 将 D 映射为 G

(3) 幂函数映射与根式映射

(1°) 幂函数映射 $w=z^n$ ($n\geqslant 2$，为自然数)　　(6.30)

因为函数 $w=z^n$ 在 Z 平面上是处处可导的，且除去原点外导数都不为零，因此在 Z 平面上除原点 $z=0$ 外，映射 $w=z^n$ 是处处保角的.

设 $z=re^{i\theta}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，由 $w=z^n$ 得 $\rho e^{i\varphi}=(re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}$，所以有

$$\rho=r^n,\ \varphi=n\theta \tag{6.31}$$

可以看到，$w=z^n$ 将 Z 平面上的圆周曲线 $C_1=\{z;\ |z|=r_0\}$ 映射为 W 平面上的圆周曲线 $K_1=\{w;\ |w|=r_0^n\}$；将 Z 平面上的射线 $C_2=\{re^{i\theta};\ r>0 \text{ 与 } \theta=\theta_0\}$ 映射成 W 平面上的射线 $K_2=\{\rho e^{i\varphi};$

$\rho > 0$ 与 $\varphi = n\theta_0\}$ (见图 6-12).

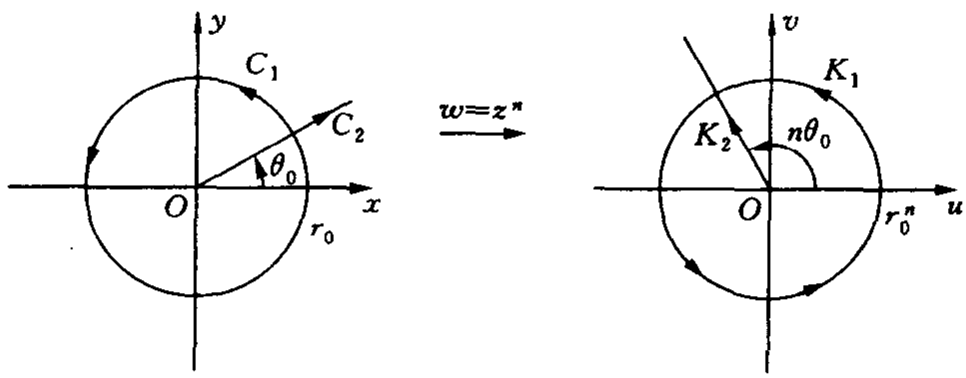


图 6-12 映射 $w = z^n$

如果考虑角形区域 $D = \{re^{i\theta};\ r > 0$ 与 $-\alpha < \theta < \alpha\}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{n}\right)$,则 $w = z^n (n \geqslant 2)$ 将区域 D 映射成 W 平面区域 G, $G = \{\rho e^{i\varphi};\ \rho > 0$ 与 $-n\alpha < \varphi < n\alpha\}$ (见图 6-13).

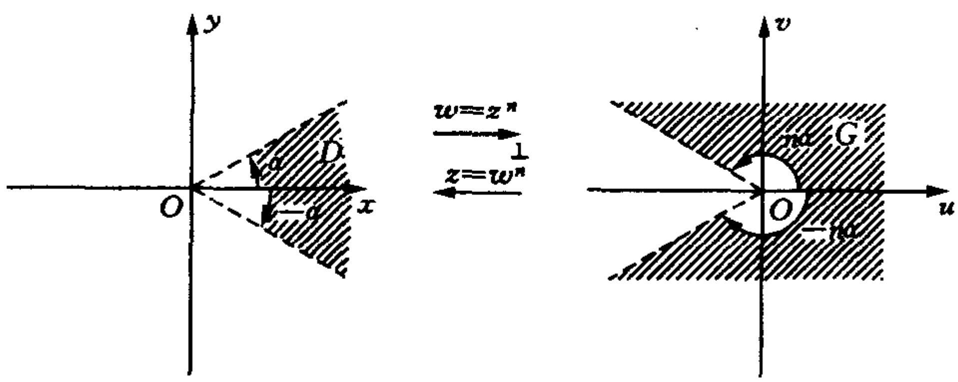


图 6-13 映射 $w = z^n$ 与 $z = w^{\frac{1}{n}}$,当 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{n}$ 时,
映射为一一对应的保角映射

如果 $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$,则 $w = z^n$ 将角形域 $D = \left\{re^{i\theta};\ r > 0 \text{ 与 } -\dfrac{\pi}{n} < \theta < \dfrac{\pi}{n}\right\}$ 映射成 W 平面上沿负轴剪开的区域 $G = \{\rho e^{i\varphi};\ \rho > 0$ 与 $-\pi < \varphi < \pi\}$. 因此,我们往往利用幂函数在原点处的不保角性,通过幂函数映射,将过原点的角域放大 n 倍.

(2°) 根式映射

它是幂函数映射的逆映射. 设 $z = re^{i\theta}$,则根式函数为 $w = \sqrt[n]{z}$,即有

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{n}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)\tag{6.32}$$

一般来说，它是多值的．如果取定 $-\pi<\theta<\pi$，那么对于每个固定的 k，映射是一一对应且保角的．此时(6.32)式，对于不同的 k，对应着 $w=\sqrt[n]{z}$ 不同的分支，$k=0$ 的那支称为 $\sqrt[n]{z}$ 的主支，它将 Z 平面上以原点为角点的角域缩小 $\frac{1}{n}$.

另外，设 $z=x+iy$，$w=u+iv$，考虑 $w=z^2$，得

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$$

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy\tag{6.33}$$

易见，$w=z^2$ 把 Z 平面上平行于虚轴的直线 $C_1=\{x+iy;\ x=a\}$ 映射成 W 平面上的抛物线

$a^2+b^2=\pm\frac{a^2+b^2}{c^2b^2}$ v^2

$v^2=(2ab)^2$

$$K_1=\left\{u+iv;\ u=a^2-\frac{v^2}{4a^2}\right\}\tag{6.34}$$

把 Z 平面上平行于实轴的直线 $C_2=\{x+iy;\ y=b\}$ 映射成 W 平面上的抛物线

$v=\pm 2ab$

$u=a^2-b^2$

$$K_2=\left\{u+iv;\ u=-b^2+\frac{v^2}{4b^2}.\right\}\tag{6.35}$$

可见，Z 平面上矩形区域 $D=\{x+iy;\ 0<x<a$ 与 $0<y<b\}$ 被映射成 W 平面上由(6.34)式与(6.35)式确定的抛物线与实轴所围的区域 G(见图 6－14).

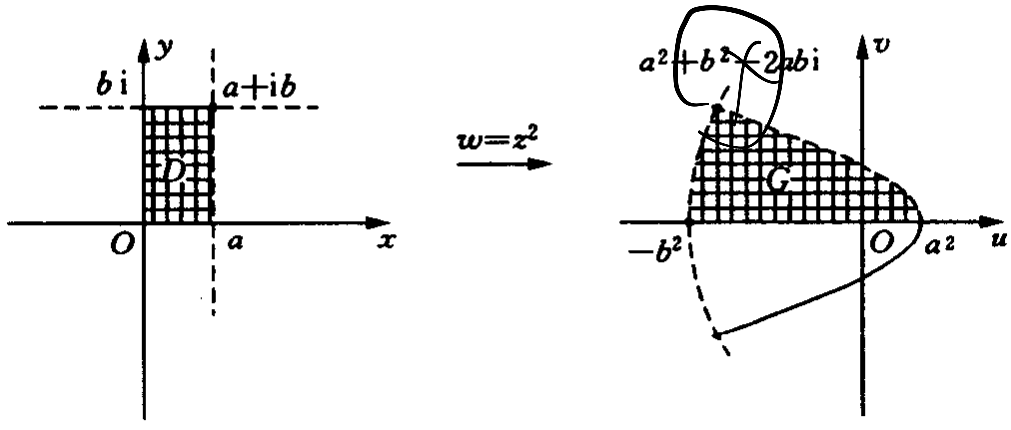


图 6－14　映射 $w=z^2$ 将区域 D 映射成区域 G

$u=x^2-y^2\le 1-y^2\le 1-\frac{v^2}{4}$

$u=1-y^2$

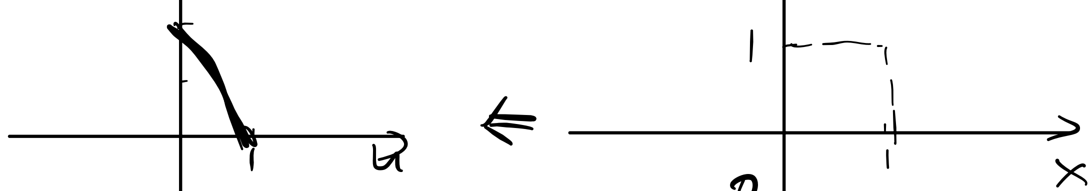
$2>v=2y>0$

$u=1-\frac{v^2}{4}$

$x=1$　$v=2y\in[0,2]$

v

y



由此我们不难讨论下面的例题了.

例 8 映射 $w=z^2$ 将正方形区域 $S=\{x+\mathrm{i}y;\ 0<x<1$ 与 $0<y<1\}$ 映射成什么区域?

解 因为 $w=f(z)=z^2$ 和 $f'(z)=2z$ 对于所有 $z\neq 0$ 的点处映射是保角的,而 $f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$, $k=2$,所以由定理 6.2 可知,在 $z=0$ 处映射是不保角的;它把过 z_0 点的两曲线间的夹角放大 2 倍.

$v\leq 2y$ y

设 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$,由 $w=z^2$ 得

$$u+\mathrm{i}v=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i},$$
$$\therefore\quad u=x^2-y^2,\ v=2xy.$$

正方形 $S=\{x+\mathrm{i}y;\ 0<x<1$ 与 $0<y<1\}$ 的四个角点为 $z_0=0$, $z_1=1$, $z_2=1+\mathrm{i}$, $z_3=\mathrm{i}$. 经映射 $w=z^2$ 后的对应象点为 $w_0=0$, $w_1=1$, $w_2=2\mathrm{i}$, $w_3=-1$.

直线段 $C_1=\{x+\mathrm{i}y;\ y=0$ 与 $0\leqslant x\leqslant 1\}$ 映射为 $K_1=\{u+\mathrm{i}v;\ v=0$ 与 $0\leqslant u\leqslant 1\}$.

直线段 $C_2=\{x+\mathrm{i}y;\ x=1$ 与 $0\leqslant y\leqslant 1\}$ 映射为 $K_2=\left\{u+\mathrm{i}v;\ u=1-\dfrac{v^2}{4}\right.$ 与 $\left.0\leqslant v\leqslant 2\right\}$.

直线段 $C_3^-=\{x+\mathrm{i}y;\ y=1$ 与 $0\leqslant x\leqslant 1\}$ 映射为 $K_3^-=\left\{u+\mathrm{i}v;\ u=-1+\dfrac{v^2}{4}\right.$ 与 $\left.0\leqslant v\leqslant 2\right\}$.

直线段 $C_4^-=\{x+\mathrm{i}y;\ x=0$ 与 $0\leqslant y\leqslant 1\}$ 映射为 $K_4^-=\{u+\mathrm{i}v;\ v=0,\ -1\leqslant u\leqslant 0\}$.

在正方形的顶点 $z_1=1$, $z_2=1+\mathrm{i}$, $z_3=\mathrm{i}$ 处,两直线段的夹角为直角. 因为 $f'(z_k)\neq 0\ (k=1,2,3)$,所以它们分别被映射后在点 $w_1=1$, $w_2=2\mathrm{i}$, $w_3=-1$ 处也为直角. 又因为 $f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$,所以在正方形 $z_0=0$ 处,两直线段 C_1 与 C_4^- 之间的夹角(直角)映射为 $w_0=0$ 处两象曲线 K_1 与 K_4^- 之间的夹角 π. 此时 $w=z^2$ 将正方形区域 $S=\{x+\mathrm{i}y;\ 0<x<1$ 与 $0<y<1\}$ 映射成上半平面内落

在抛物线 $u=1-\frac{v^2}{4}$ 与 $u=-1+\frac{v^2}{4}$ 与实轴 $v=0$ 所围区域 $G=\left\{u+\mathrm{i}v;\ u<1-\frac{v^2}{4}\text{ 与 } u>-1+\frac{v^2}{4}\text{ 与 } \mathrm{Im}v>0\right\}$ 中区域（见图 6-15）.

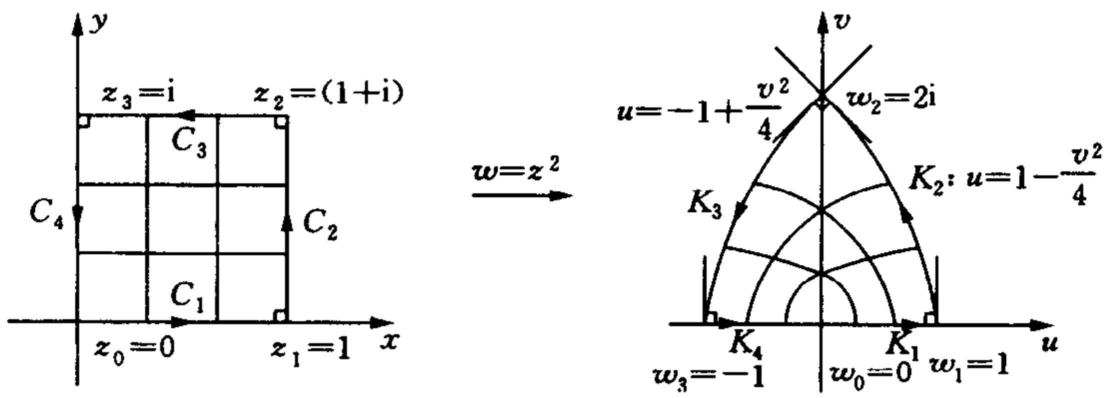


图 6-15　$w=z^2$

（4）指数函数与对数函数映射

（1°）指数映射

$$w=\mathrm{e}^z \tag{6.36}$$

由第二章可知，函数 $w=f(z)=\mathrm{e}^z$ 在 Z 平面上处处可导，且 $\mathrm{e}^z\neq0$. 它是一个以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数，是 Z 平面上的带域 $D=\{x+\mathrm{i}y;\ -\pi<y\leqslant\pi\}$ 与 W 平面上除去 $w=0$ 的区域 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 一一对应的映射，因为 $f'(z)=\mathrm{e}^z\neq0$，所以映射 $w=\mathrm{e}^z$ 在全平面处处保角.

例 9　讨论映射 $w=\mathrm{e}^z$ 将直线 $x=a$，$y=b$ 映射成两条什么样的曲线？

解　$w=f(z)=\mathrm{e}^z$，因为 $f'(z)=(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z\neq0$，所以 $w=\mathrm{e}^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处是保角的.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，由 $w=\mathrm{e}^z$ 得 $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. 由此推出

$$\rho=\mathrm{e}^x,\ \varphi=y+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

直线 $x=a$ 映射成 W 平面上圆周曲线 $C_1=\{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi};\ \rho=\mathrm{e}^a\}$.

直线 $y=b$ 映射成 W 平面上半射线 $C_2=\{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi};\ \rho>0\text{ 与 }\varphi=b\}$.

因为直线 $x=a$ 与 $y=b$ 在点 $z_0=a+\mathrm{i}b$ 处正交，所以象曲线 C_1

与 C_2 在 $w_0 = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$ 处正交(见图 6-16).

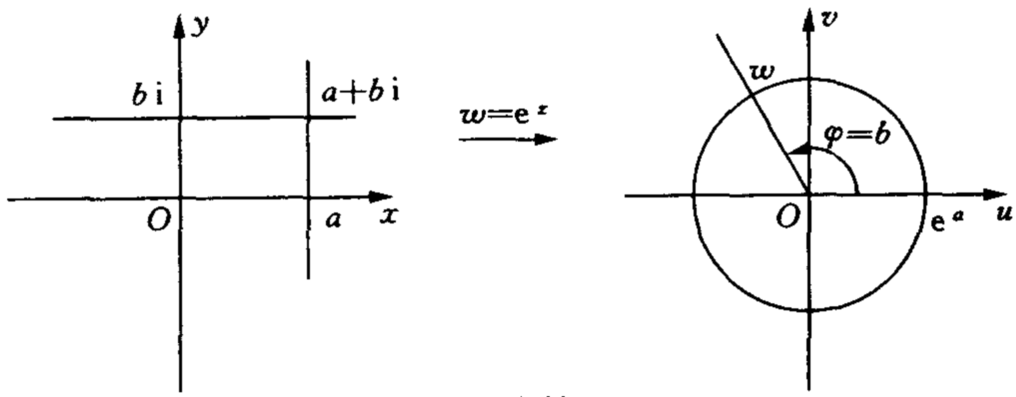


图 6-16 映射 $w = e^z$

$$\{x + iy;\ x = a\} \to \{\rho e^{i\varphi};\ \rho = e^a\}$$
$$\{x + iy;\ y = b\} \to \{\rho e^{i\varphi};\ \rho > 0,\ \varphi = b\}$$

映射 $w = e^z$ 一般将 Z 平面上的带域映射成 W 平面上的角域.

(2°) 对数映射

指数映射的逆映射为对数映射

$$w = \mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{6.37}$$

其中

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \tag{6.38}$$

是对数 $\mathrm{Ln}z$ 的主支,它是 Z 平面上区域 $C\backslash\{x + iy;\ x \leqslant 0$ 与 $y = 0\}$ 与 W 平面上带域 $\{w;\ -\pi < \mathrm{Im}w < \pi\}$ 的一一对应的保角映射.

对于(6.37)式表示的第 k 个对数分支,它是 Z 平面上区域 $\mathfrak{C}\backslash\{x + iy;\ x \leqslant 0,\ y = 0\}$ 与 W 平面上带域 $\{w;\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}w < (2k+1)\pi\}$ 的一一对应保角映射.

可见,对数函数一般将 Z 平面上的角域映射成 W 平面上的带域.

3. 分式线性映射

(1) 分式线性映射

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}\quad (a, b, c, d \text{ 为复常数}, ad - bc \neq 0) \tag{6.39}$$

其逆映射为

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \tag{6.40}$$

如果由

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

$$f^{-1}(\infty) = \lim_{w \to \infty} f^{-1}(w) = \lim_{w \to \infty} \frac{-d + \frac{b}{w}}{c - \frac{a}{w}} = -\frac{d}{c}$$

定义

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \tag{6.41}$$

则 $w = f(z)$ 是一个扩充复平面到另一个扩充复平面的一一映射，又因为 $f'(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$，所以映射是保角的．当 $c = 0$ 时，它是一个整线性映射；如果 $c \neq 0$，(6.39)式可改写成

$$w = f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} \tag{6.42}$$

由于 $ad - bc \neq 0$，所以 $f(z)$ 不为常数．从(6.42)式可见，分式线性映射实际上是由映射 $w_1 = z + \frac{d}{c}$，$w_2 = \frac{1}{w_1}$ 及整线性映射 $w = A + Bw_2\left(其中\ A = \frac{a}{c},\ B = \frac{bc-ad}{c^2}\right)$三个映射复合而成．由前面可知，复合映射的每个映射都具有保角性(保圆性)，因此分式线性映射是扩充复平面上的双向保角映射.

(2) 三对不同的点的对应唯一确定一个分式线性映射

(6.39)式所表示的分式线性映射表面上依赖四个常数 a, b, c, d，但由于 $w \neq k$（常数)，即或 $a \neq 0$ 或 $c \neq 0$，因此映射实际上只由

w

三个独立常数确定．假设 $a \neq 0$，那么(6.39)式可改写为

$$w = f(z) = \frac{z + b/a}{cz/c + d/a} = \alpha \frac{z - \beta}{z - \gamma} \qquad (6.39)'$$

所以分式线性映射实质上只依赖于三个独立的复常数．

如果已知扩充的 Z 平面上三个不同的点 $z_j\,(j = 1, 2, 3)$ 对应了扩充的 W 平面上的三个不同象点 $w_j\,(j = 1, 2, 3)$，即 $w_j = f(z_j)$ $(j = 1, 2, 3)$，那么就可以唯一地确定该分式线性映射 $w = f(z)$，它可以由下面的隐式公式给出

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \qquad (6.43)$$

上式中，如果 z_3 所对应的象点 $w_3 = \infty$，则(6.43)式可简化为

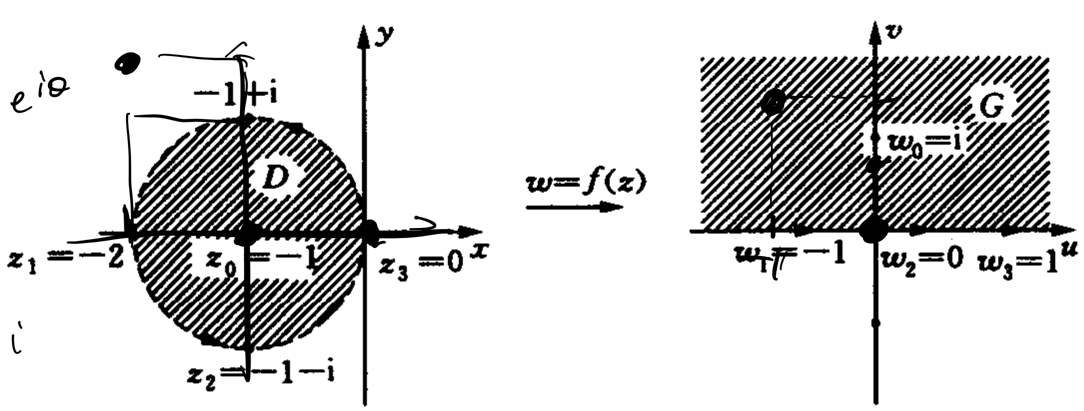
$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} \quad (w_3 = \infty)$$

其他情况可照此类推．

如果对于扩充的 Z 平面上的圆周曲线（或直线）上的所有的点经分式线性映射后都不映射为 ∞ 点，那么它们的象曲线将是半径为有限的圆周曲线；如果其上有一点的象点是 ∞ 点，则其象曲线必然是直线．

例 10 证明映射 $w = f(z) = \dfrac{(1-\mathrm{i})z + 2}{(1+\mathrm{i})z + 2}$ 将区域 $D = \{z;\ |z + 1| < 1\}$ 映射为上半平面 $G = \{w;\ \mathrm{Im}(w) > 0\}$（见图 6－17）．

$z = -1 + e^{i\theta}$



$\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} \cdot i$

图 6－17　$w = f(z) = \dfrac{(1-\mathrm{i})z + 2}{(1+\mathrm{i})z + 2}$

$W_1 = -\dfrac{z}{z+2} \cdot i$

$\dfrac{-y + xi}{(x+2) + yi}$

$(x+1)^2 + y^2 = 1$

$\dfrac{(xi - y)(x+2-iy)}{(x+2)^2 + y^2} = \dfrac{(x^2+y^2)i - (x+2)y + xy}{(x+2)^2 + y^2} = \dfrac{-2y + (x^2+y^2)i}{(x+2)^2 + y^2}$

$u=-\frac{2y}{(x+y)^2+y^2}$ $v=$ $-i$

证 $$w=f(z)=\frac{(1-\mathrm{i})z+2}{(1+\mathrm{i})z+2}=\frac{z+2/(1-\mathrm{i})}{z+2/(1+i)}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$
$$=-\mathrm{i}\,\frac{z+(1+\mathrm{i})}{z+(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}\cdot\frac{z-[-(1+\mathrm{i})]}{z-(-1+\mathrm{i})}$$

可见,圆周曲线 $C=\{z;\ |z+1|=1\}$ 上的点 $z=-1+\mathrm{i}$ 被映射为 $w=\infty$,所以 C 被映射为扩充的 W 平面上的直线.

选择 C 上三个点:$z_1=-2$,$z_2=-1-\mathrm{i}$ 与 $z_3=0$,它们沿着 C 的正向前进(区域 $D=\{z;\ |z+1|<1\}$,始终在 C 的左边).象点 $w_1=f(-2)=-1$,$w_2=f(-1-\mathrm{i})=0$,$w_3=f(0)=1$,沿着扩充 W 平面的实轴正向前进.由边界对应原理知 D 的象区域应该是 $G=\{w;\ \mathrm{Im}(w)>0\}$(见图 6-17).

例 11 求一个将月牙形区域 $D=\{z;\ |z-2|<2$ 与 $|z-1|>1\}$ 映射为水平带域 $G=\{w;\ 0<\mathrm{Im}(w)<1\}$ 的分式线性映射.

解 对于月牙形区域 $D=\{z;\ |z-2|<2$ 与 $|z-1|>1\}$(见图 6-18),边界点 $z=0$ 为两圆 $C_1=\{z;\ |z-2|=2\}$ 与 $C_2=\{z;\ |z-1|=1\}$ 的切点.

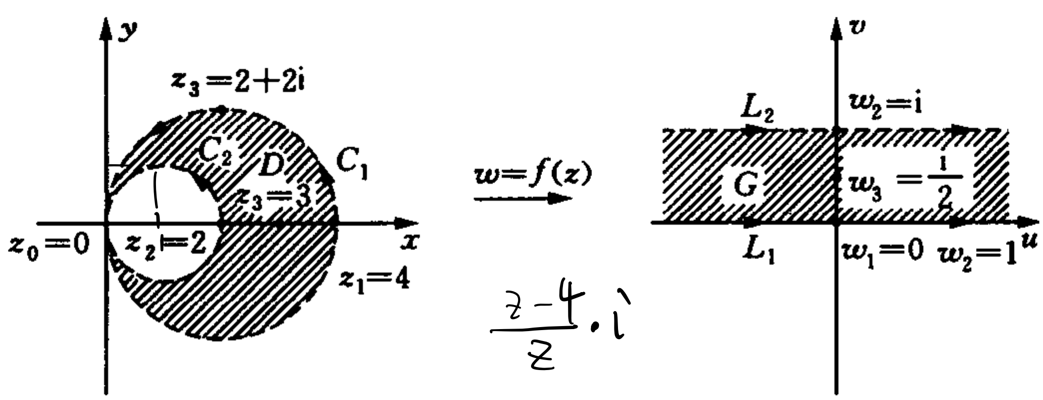


图 6-18 映射 $w=-\mathrm{i}\,\frac{z-4}{z}$

我们首先选择将 $z=0$ 映射为 $w=\infty$,此时 C_1 与 C_2 均可被映射为 W 平面上的直线 L_1 与 L_2;又因为 C_1 与 C_2 在 $z=0$ 点相切(夹角为 0 或 π),则象曲线 L_1 与 L_2 必是平行直线.然后我们选择其他的点,以便确定 L_1 与 L_2 的位置.由(6.39)$'$式,设
$$w=\alpha\,\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

由于 $z_0=0$ 映射为 $w=\infty$，所以有 $\gamma=0$，得 $w=\alpha\dfrac{z-\beta}{z}$. 如果将 $z_1=4$ 映射成 $w_1=0$，则 C_1 的象曲线（直线）L_1 必是过 $w_1=0$ 的直线. 由 $0=\alpha\dfrac{4-\beta}{4}$ 有 $\beta=4$，得

$$w=\alpha\frac{z-4}{z}$$

再将 $z_2=2$ 映射成 $w_2=\mathrm{i}$，则 C_2 的象曲线（直线）L_2 必是经过 $w_2=\mathrm{i}$ 的直线．由 $\mathrm{i}=\alpha\dfrac{2-4}{2}=-\alpha$，有 $\alpha=-\mathrm{i}$，得

$$w=-\mathrm{i}\frac{z-4}{z}$$

观察知，该映射将 C_1 上的点 $z_3=2+2\mathrm{i}$ 映射为 L_1 上的象点

$$w_3=-\mathrm{i}\frac{2+2\mathrm{i}-4}{2+2\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=1$$

所以 C_1 的象曲线 $L_1=\{w;\ \mathrm{Im}(w)=0\}$（实轴正向）. 当然 C_2 的象曲线 $L_2=\{w;\ \mathrm{Im}(w)=1\}$.

取 $z_3=3\in D$，它的象点 $w_3=-\mathrm{i}\dfrac{3-4}{3}=\dfrac{\mathrm{i}}{3}\in G$，所以 $w=-\mathrm{i}\dfrac{z-4}{z}$ 将区域 D 映射为区域 G.

(3) 两个重要的分式线性映射

(1°) 将上半平面 $\{z;\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ 映射成单位圆内部 $\{w;\ |w|<1\}$，且使上半平面内一点 $z_0\in\{z;\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ 映射成单位圆圆心 $w=0$ 的分式线性映射的一般形式是

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\tag{6.44}$$

其中 θ 为实数，$z_0\in\{z;\ \mathrm{Im}(z)>0\}$.

(2°) 将单位圆内部 $\{z;\ |z|<1\}$ 映射成单位圆内部 $\{w;\ |w|<1\}$，且使点 $z_0\in\{z;\ |z|<1\}$ 映射成单位圆圆心 $w=0$ 的

分式线性映射的一般形式是

$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \tag{6.45}$$

其中 $z_0 \in \{z;\ |z| < 1\}$，θ 为实数.

例 12 映射 $w = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$ 将 Z 平面上的水平带域 $D = \{x + iy;\ 0 < y < \pi\}$ 映射成 W 平面上什么区域？ $e^{x+iy} \Rightarrow$

解 映射 $w = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$ 是指数映射 $\zeta = e^z$ 与分式线性映射 $w = \dfrac{\zeta - i}{\zeta + i}$ 的复合映射. $\zeta = e^z$ 将 Z 平面上的水平带域 $D = \{x + iy;\ 0 < y < \pi\}$ 映射成 ζ 平面的上半平面 $D_1 = \{\zeta;\ \mathrm{Im}(\zeta) > 0\}$；而由(6.44)式知，$w = \dfrac{\zeta - i}{\zeta + i}$ 将 ζ 平面的上半平面 D_1 映射成 W 平面的单位圆内部 $G = \{w;\ |w| < 1\}$，且把上半平面内一点 $\zeta_0 = i$ 映射为单位圆的圆心 $w_0 = 0$. 所以，$w = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$ 将 Z 平面上带域 $D = \{x + iy;\ 0 < y < \pi\}$ 映射成 W 平面的单位圆内部 $G = \{w;\ |w| < 1\}$（见图 6－19).

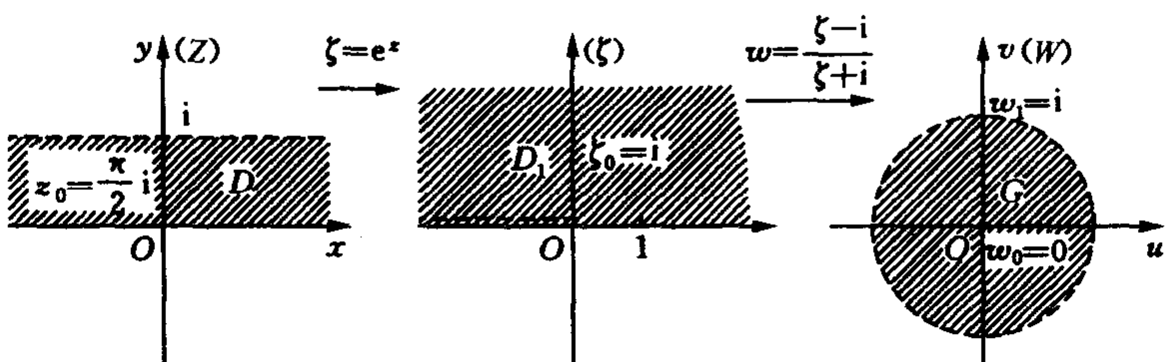


图 6－19 映射 $w = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$

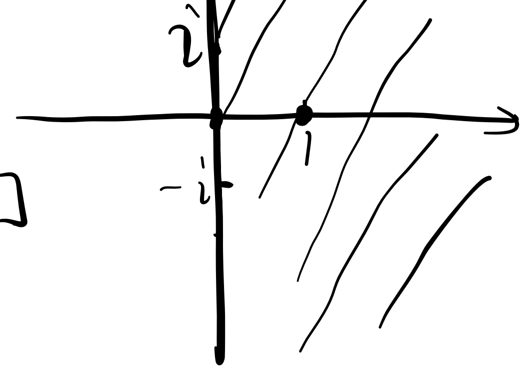
例 13 映射 $w = f(z) = \ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ 将一个单位圆内部 $D = \{z;\ |z| < 1\}$ 映射成什么区域？ $w = \frac{1+z}{1-z}$

解 映射 $w = f(z) = \ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ 实际上是分式线性映射 $\zeta =$

$w_1 = \frac{1+z}{1-z}$ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i$

$-\frac{\pi}{2}$

$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i$ iy $\frac{1+iy}{1-iy}=$



$\ln w_1$ $z=1$ $re^{i\theta}$ $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\ln r+\theta\cdot i$

$\dfrac{1+z}{1-z}$ 与对数主支映射 $w=\ln\zeta$ 的复合映射.

映射 $\zeta=\dfrac{1+z}{1-z}$ 将 Z 平面上圆周曲线 $C=\{z;\ |z|=1\}$ 上的一点 $z_0=1$ 映射成 ζ 平面上的 $\zeta_0=\infty$; $z_1=-1$ 映射为 $\zeta_1=0$,所以 C 的象曲线 l_1 是过原点 $\zeta_1=0$ 的直线. 再取 $z_2=\mathrm{i}$,它的象点 $\zeta_2=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$,所以 l_1 是 ζ 平面上的虚轴. 在 D 的内部取 $z_3=0$,它的象点 $\zeta_3=1$ 落在 D 的象区域 D_1 中,所以经映射 $\zeta=\dfrac{1+z}{1-z}$ 后,Z 平面上的 $D=\{z;\ |z|<1\}$ 被映射为 ζ 平面上的右半平面 $D_1=\{\zeta;\ \mathrm{Re}(\zeta)>0\}$ 或写成 $D_1=\left\{\zeta=\rho e^{\mathrm{i}\varphi};\ \rho>0 \text{ 与 } -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$. 其中 $|\zeta|=\rho>0$, $\arg(\zeta)\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$w=\ln\zeta=\ln|\zeta|+\mathrm{i}\arg(\zeta)$ 将 ζ 平面上的区域 D_1 映射为 W 平面上的区域(见图6-20)

$$G=\left\{u+\mathrm{i}v;\ -\infty<u<+\infty \text{ 与 } -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

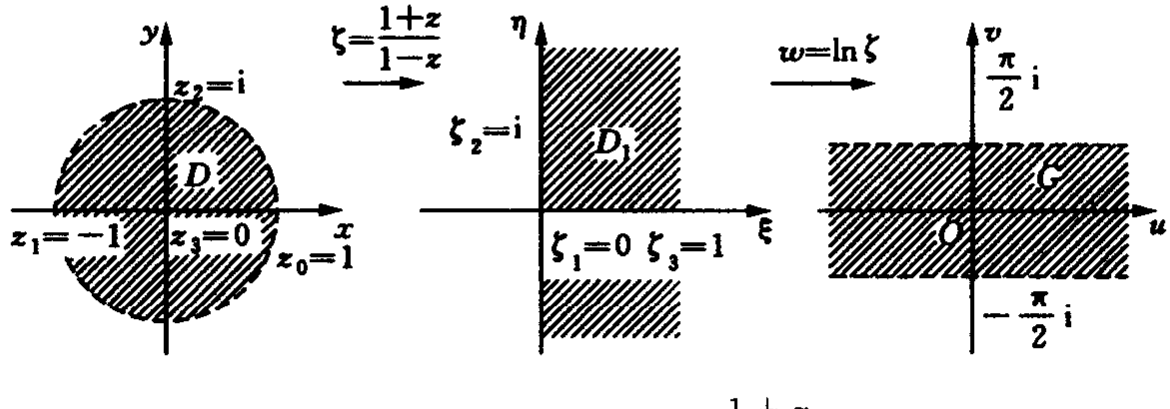


图 6-20 映射 $w=\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

【思考题及解答】

1. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析,且对于 $z_0\in D$,有 $f'(z_0)\neq 0$,请说

明它的几何意义.

答 因为 $f'(z_0)=|f'(z_0)|e^{i\arg f'(z_0)}$,所以 $f'(z_0)\neq 0$ 即为 $|f'(z_0)|\neq 0$.它表明:

(1) 映射 $w=f(z)$ 将经过点 z_0 处的很短的曲线段映射为过象点 $w_0=f(z_0)$ 处伸缩了 $|f'(z_0)|$ 倍的曲线段;

(2) 映射 $w=f(z)$ 使过 z_0 点的任意两条连续曲线之间的夹角大小与方向经映射后,使得过点 $w_0=f(z_0)$ 的两条象曲线之间的夹角大小与方向保持不变,即在导数不为零处映射具有伸缩率不变性及保角性.

2. 黎曼映射定理也可以叙述为:设 D 是单连通区域($D\neq\mathbb{C}$),则存在着唯一的双向保角映射 $w=f(z)$,它把 D 映射为单位圆内部,且对于任意固定的 $z_0\in D$,满足 $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$. 为什么?

答 我们且看黎曼映射定理(定理 6.3)的叙述为:设 D 与 G 是两个不同于复平面 $\mathbb{C}$ 的单连通区域(或者说边界多于一点的单连通区域),任取 $z_0\in D$, $w_0\in G$, $\alpha\in(-\pi,\pi]$,则存在着唯一从 D 到 G 的保角映射 $w=f(z)$,使得 $w_0=f(z_0)$, $\arg f'(z_0)=\alpha$. 现在我们通过逆映射与复合映射来实现这两种叙述方式的转化.

设有单连通区域 D ($D\neq\mathbb{C}$) 与单位圆域 $D_1=\{\zeta;\ |\zeta|<1\}$,取 $z_0\in D$, $0\in D_1$ 与 $\alpha=0$. 由此处所叙述的黎曼映射定理可知,存在唯一从 D 到 D_1 的双向保角映射,$\zeta=f(z)$ 使 $0=f(z_0)$, $\arg f'(z_0)=0$ (即 $f'(z_0)>0$).

同样,对于单连通区域 G ($G\neq\mathbb{C}$) 与单位圆域 D_1,取 $w_0\in G$; $0\in D_1$ 与 $\alpha\in(-\pi,\pi]$,则同上面一样的道理,存在唯一从 G 到 D_1 的双向保角映射 $\zeta=g(w)$,使 $0=g(w_0)$, $\arg g'(w_0)=-\alpha$.

现在可知对于单连通区域 D 与 G(都不是 $\mathbb{C}$),任取 $z_0\in D$, $w_0\in G$,$\alpha\in(-\pi,\pi]$,则必存在着唯一的从 D 到 G 的双向保角映射 $w=g^{-1}[f(z)]$(因为 $\zeta=g(w)$ 是 G 到 D_1 双向保角映射,所以其逆映射 $w=g^{-1}(\zeta)$ 是 D_1 到 G 的双向保角映射,而 $\zeta=f(z)$ 是由 D 到 D_1 的双向保角映射,所以其复合映射 $w=g^{-1}[f(z)]$ 是 D 到 G 的双向保角映射),因为 $\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{dg^{-1}}{d\zeta}\cdot\dfrac{df}{dz}=\dfrac{1}{\dfrac{dg}{dw}}f'(z)$,又因为 $f'(z_0)>0$,

$\arg\left(\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}\right)=-\arg g'(w_0)=\alpha$,所以有

$$w_0=g^{-1}[f(z_0)],\qquad \arg\{g^{-1}f(z)\}'_{z=z_0}=\alpha$$

这就由该处关于黎曼映射定理的叙述转为定理 6.3 的叙述,其本质是一致的(见图 6-21).

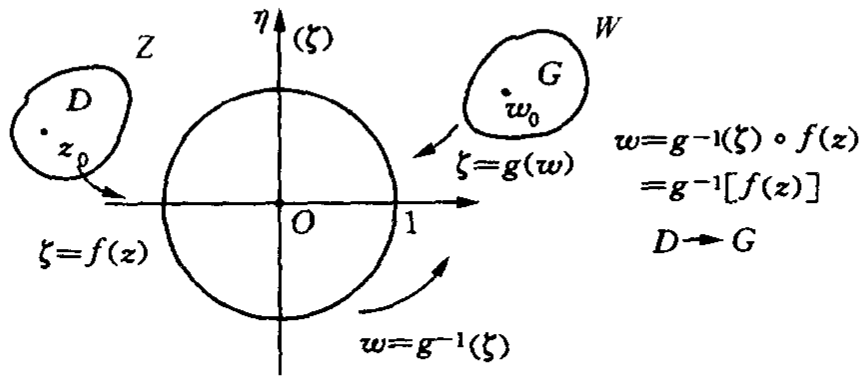


图 6-21

3. 试说明映射 $f(z)=z^2$ 在 $z=0$ 处是不保角的?

答 映射 $w=f(z)=z^2$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上解析. 因为 $f'(z)=2z\ (z\in\mathbb{C})$, 在 $z=0$ 处有 $f'(0)=0$,所以 $f(z)=z^2$ 在 $z=0$ 处是不保角的.

我们可以观察到:过 z 平面上 $z=0$ 的两条半射线

$$l_1: \{z=re^{i\theta} \mid 0<r<+\infty,\ \theta=0\}$$

$$l_2: \{z=re^{i\theta} \mid 0<r<+\infty,\ \theta=\theta_0\}$$

它们之间的夹角为 θ_0 经过映射 $w=f(z)=z^2$ 后,($w=z^2=r^2e^{i2\theta}=\rho e^{i\varphi}(\rho=r^2,\ \varphi=2\theta)$) 成为 W 平面上过象点 $w=0$ 的两条半射线

$$L_1: \{w=\rho e^{i\varphi};\ 0<\rho<+\infty,\ \varphi=0\}$$

$$L_2: \{w=\rho e^{i\varphi};\ 0<\rho<+\infty,\ \varphi=2\theta_0\}$$

它们在 $w=0$ 处的夹角为 $2\theta_0$,因此在 $f'(z_0)=0$ 处,映射不具备保角性(见图 6-22).

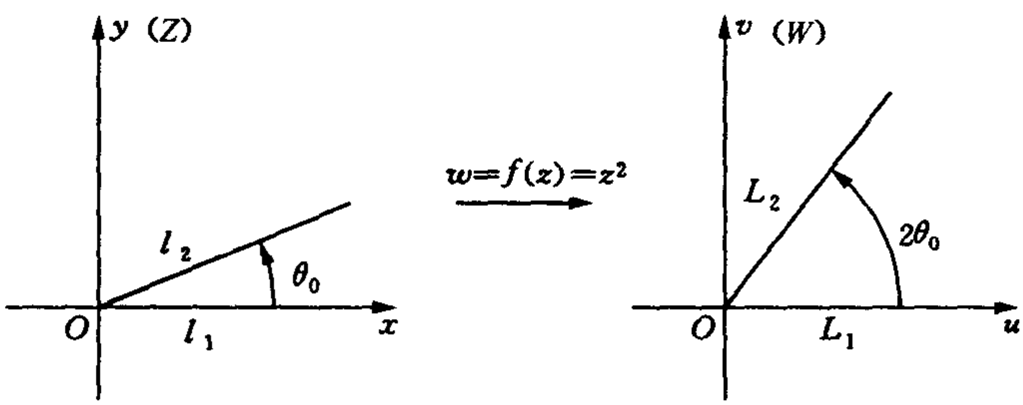


图 6-22

4. 整线性映射为什么具有保圆性？

答 因为整线性函数 $w=az+b$（a，b为常数，$a=ke^{i\alpha}\neq 0$）在全平面$\mathbb{C}$上解析，且有 $w'(z)=a\neq 0$（$z\in\mathbb{C}$），所以由定理 6.1 知，整线性映射是保角映射. 它是经伸缩、旋转、平移诸映射复合而成的，它将 Z 平面上的圆周曲线映射为 W 平面上的圆周曲线，因此具有保圆性.

5. 请描绘出下述各点 $z_1=\frac{1}{2}e^{i\theta_0}$，$z_2=1+i$，$z_3=\frac{1}{2}(1-i)$，$z_4=-1+\sqrt{3}i$ 在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下象点的位置.

解 在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下，点 z_i 的象点 w_i 分别为（见图 6-23）：

$$z_1=\frac{1}{2}e^{i\theta_0}\longrightarrow w_1=2e^{-i\theta_0}\text{；}$$

$$z_2=1+i\longrightarrow w_2=\frac{1}{2}(1-i)\text{；}$$

$$z_3=\frac{1}{2}(1-i)\longrightarrow w_3=1+i\text{；}$$

$$z_4=-1+\sqrt{3}i\longrightarrow w_4=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}i).$$

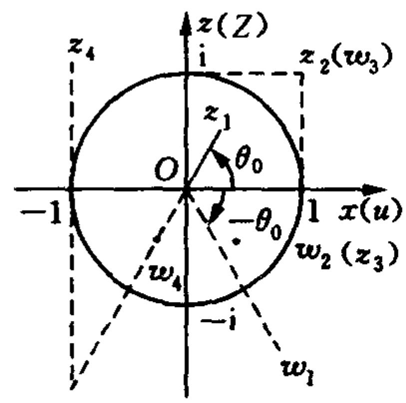


图 6-23

6. 请描绘出在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下，W 平面上两条正交直线 $u=1$，$v=2$ 在 Z 平面上的象原曲线.

解 根据映射 $w=\frac{1}{z}$，设 $z=x+iy$，$w=u+iv$，则

$$w=u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ u=\frac{x}{x^2+y^2},\ v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

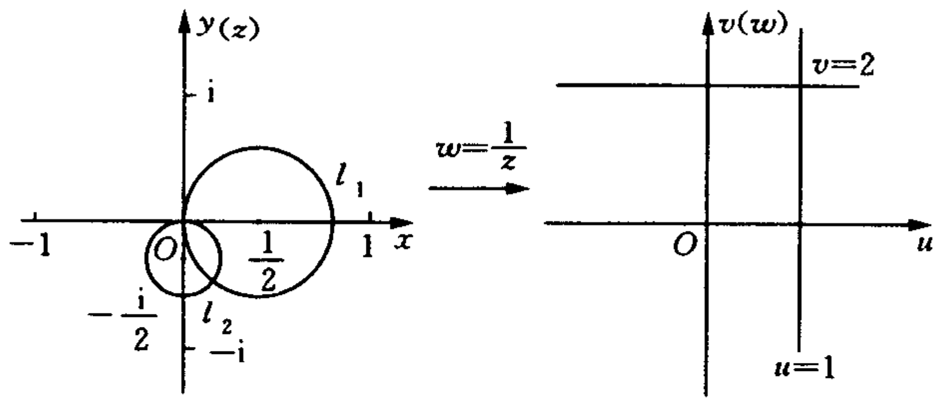
W 平面上的正交直线 L_1：$u=1$ 与 L_2：$v=2$ 的象原曲线满足

$$\frac{x}{x^2+y^2}=1\text{；}\ -\frac{y}{x^2+y^2}=2$$

即为

$$l_1:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\text{；}\ l_2:\ x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

它们是两个正交的圆周曲线(见图 6－24).



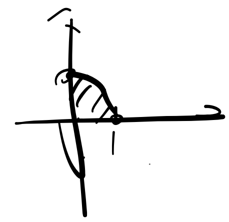


图 6－24

7. 区域 $D=\left\{z;\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2},\ |z|<1\right\}$在映射 $w=z^4$ 下的象区域是 W 平面的单位圆内部 $G=\{w;\ |w|<1\}$吗? $(0,2\pi)$

答 不是. 在 $w=z^4$ 的映射下,区域 D 的象区域应该是 W 平面上挖去[0,1)直线段的有裂痕的单位圆内部:$\{w=\rho e^{i\varphi};\ 0<\varphi<2\pi,\ \rho<1\}$(见图 6－25).

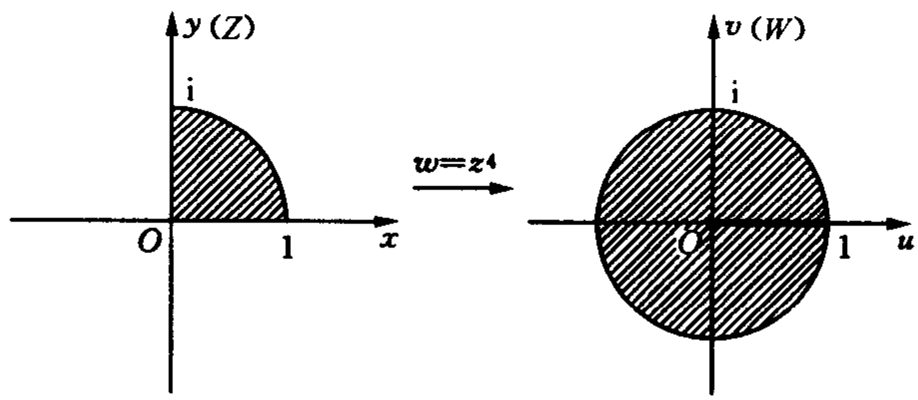


图 6－25

因为对于映射 $w=z^4$,设 $z=re^{i\theta}$, $w=\rho e^{i\varphi}$,则 $\rho e^{i\varphi}=r^4 e^{i4\theta}\Rightarrow \rho=r^4$, $\varphi=4\theta$, 于是 Z 平面上区域

$$D=\left\{z;\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2},\ |z|<1\right\},\text{即}\quad D=\left\{re^{i\theta};\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ r<1\right\}$$

经过映射 $w=z^4$ 后成为 W 平面上区域

$$G=\{\rho e^{i\varphi};\ 0<\varphi<2\pi,\ \rho<1\}$$

8. 请描绘带域 $D=\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<\pi\}$ 中与实轴、虚轴平行的正交直线网在映射 $w=e^z$ 下的象曲线族.

解 对映射 $w=\mathrm{e}^z$，设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

因为 $|w|=\mathrm{e}^x$，$\mathrm{Arg}w=y$，又因为 $u+\mathrm{i}v=w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$，所以

$$u=\mathrm{e}^x\cos y,\ v=\mathrm{e}^x\sin y,\ u^2+v^2=(\mathrm{e}^x)^2$$

Z 平面上的半带域 $D=\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<\pi\}$ 亦即 $D=\{x+\mathrm{i}y;\ x>0,\ 0<y<\pi\}$（见图 6-26）.

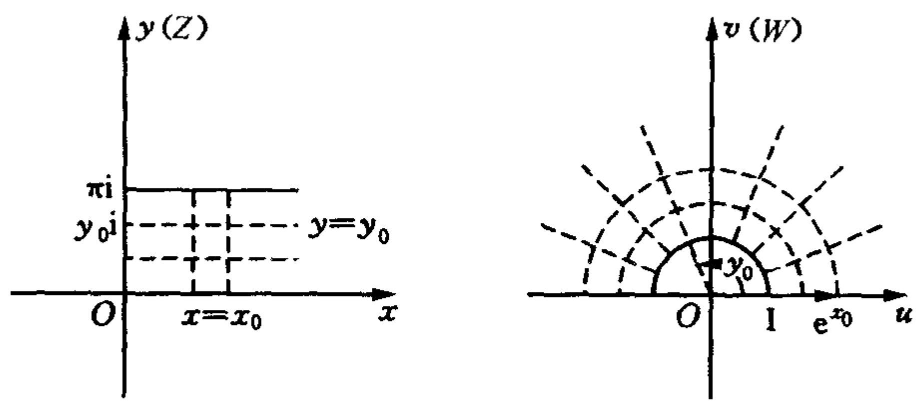


图 6-26

(1) Z 平面上平行于虚轴的直线：

$$\{x+\mathrm{i}y;\ x=x_0>0,\ 0<y<\pi\}$$

在 W 平面上的象曲线是以原点为中心、半径大于 1 的上半平面内的圆周曲线：

$$\{w;\ |w|=\mathrm{e}^{x_0}>1,\ 0<\arg w<\pi\}$$

(2) Z 平面上平行于实轴的直线

$$\{x+\mathrm{i}y;\ 0<y=y_0<\pi,\ x>0\}$$

在 W 平面上的象曲线是幅角为 y_0、模 $|w|$ 从 1 到 $+\infty$ 的半射线

$$\{w=u+\mathrm{i}v;\ 1<|w|<+\infty,\ \arg w=y_0\}$$

由此可见，映射 $w=\mathrm{e}^z$ 将 Z 平面上的半带域 $D=\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<\pi\}$ 映射成 W 平面上的上半单位圆外部 G. 在 D 内平行于虚轴的直线段映射成 G 内的同心的半圆周曲线段（中心在原点、半径大于 1）；在 D 内平行于实轴的直线族

映射成G内幅角自0到π、模自1到$+\infty$的半射线族.这两族象曲线也是正交的(见图6-26).

9. 分式线性映射是哪些映射的复合映射?请写出复合关系式.

解 因为分式线性映射$w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$可表示为

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}$$

所以可以将它看成是$w_1=cz+d$(整线性映射)、$w_2=\frac{1}{w_1}$(倒数映射)、$w_3=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}w_2$(整线性映射)的复合映射.

10. 在分式线性映射下说明两区域之间点的对应最多只可能有两个不动点,除非它是一个恒等映射.(使$f(z_0)=z_0$的点z_0称为$f(z)$的不动点)

证 我们只需证明在分式线性映射下两个区域之间点的对应.若有三个不动点时,则该映射必为恒等映射$w=f(z)\equiv z$.

设有Z平面上区域D和W平面上区域G.我们知道两区域之间任意给定三对点的对应可以唯一地确定一个分式线性映射$w=f(z)$.设$z_k\in D$ $(k=1,2,3)$对应$w_k\in G$ $(k=1,2,3)$,则$w=f(z)$的表达式可由下面比式

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

给出.

不妨设z_k $(k=1,2,3)$是三个不动点,亦即$w_k=f(z_k)=z_k$ $(k=1,2,3)$,则上式可转化为$\frac{w-z_1}{w-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$,化简得$w=f(z)\equiv z$,即恒等映射.证毕.

11. 两条相交圆弧(或一圆弧一直线段)所围的区域,在分式线性映射下,什么时候(1)仍被映射为两圆弧所围的区域?(2)被映射为相交于一有限点(或原点)的两条半射线所界的角域?

答 (1)如果两相交圆弧(或一圆弧一直线段)上的点在分式线性映射下无一映射到无穷远点∞,那么它们的象曲线仍为两相交圆弧(或一圆弧一直线段),它们所围的象区域仍为有界区域.

(2)如果两相交圆弧(或一圆弧一直线段)上某个交点在分式线性映射下被映射为无穷远点,另一交点被映射成原点(或某个有限点),那么两相交圆

弧（或一圆弧一直线段）的象曲线为相交于原点（或某个有限点）的两条半射线，两条相交圆弧（或一圆弧一直线段）所围区域的象区域就是相交于原点（或某个有限点）的两条半射线所围的角形区域，它是一个无界区域.

12. 如果把角域映射为角域（张角放大或缩小），一般采用什么保角映射？如果把带域映射为角域、角域映射为带域，一般又采用什么保角映射？

答 （1）将角域映射为角域（张角放大或缩小），一般采用幂函数映射；

（2）将带域映射为角域，一般采用指数函数映射；将角域映射为带域，一般采用对数函数映射.

13. 能否找到一个保角映射，将区域 $A=\{z;\ 1<|z|<2\}$ 保角且双向地映射到区域 $B=\{w;\ 0<\mathrm{Re}w<1\}$ 中去？如果存在，请写出函数；如果不能，请说明理由.

答 不能. 因为区域 $B=\{w;\ 0<\mathrm{Re}w<1\}$ 虽是单连通区域，但区域 $A=\{z;\ 1<|z|<2\}$ 却为多连通区域，而它不符合黎曼映射定理的条件，所以不能找到这样一个保角映射.

$z'(t)=\frac{\sqrt{3}}{3}$　　$f'(z)=2z=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

【习题及解答】

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$

1. 设光滑曲线在过 $z=1+\mathrm{i}$ 点处的切线与 Ox 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{6}$，问通过映射 $w=z^2$ 后，其象曲线在 $z=1+\mathrm{i}$ 象点处的切线与 Ou 轴正向的夹角是多少？

解 映射 $w=f(z)=z^2$ 将 $z_0=1+\mathrm{i}$ 映射为点 $w_0=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$f'(z)=2z\ (z\in\mathbb{C})$，$f'(1+\mathrm{i})=2(1+\mathrm{i})=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，$\arg f'(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$，已知 $\theta_0=\frac{\pi}{6}$，所以

$$\varphi_0=\theta_0+\arg f'(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}.$$

象曲线在过象点 $w_0=2\mathrm{i}$ 处的切线与 Ou 轴正向夹角为 $\frac{5\pi}{12}$.

2. 在映射 $w=\mathrm{i}z$ 下，下列图形被映射成什么图形？

（1）以 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=-1$，$z_3=1$ 为顶点的三角形；

（2）闭圆域：$\{z;\ |z-1|\leqslant 1\}$.

解 映射 $w=\mathrm{i}z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}z$ 实际上是一个向逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转映射，所以

（1）以 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=-1$，$z_3=1$ 为顶点的三角形被映射成以 $w_1=-1$，$w_2=-\mathrm{i}$，$w_3=\mathrm{i}$ 为顶点的三角形（见图 6-27）.

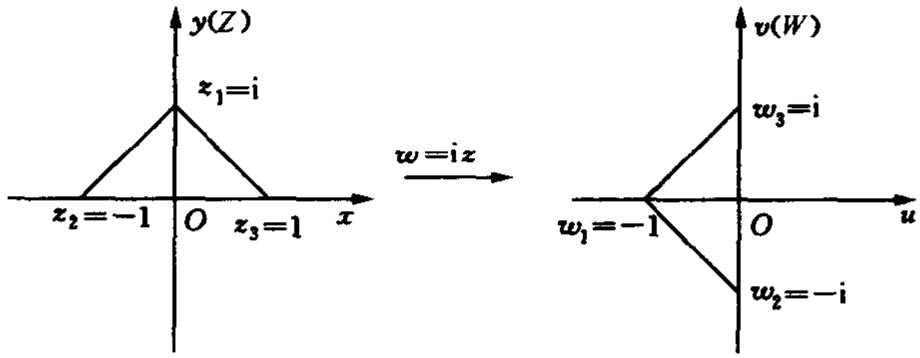


图 6 - 27

(2) 闭圆域 $\{z;\ |z-1|\leqslant 1\}$ 被映射成闭圆域 $\{w;\ |w-\mathrm{i}|\leqslant 1\}$ (见图6 - 28).

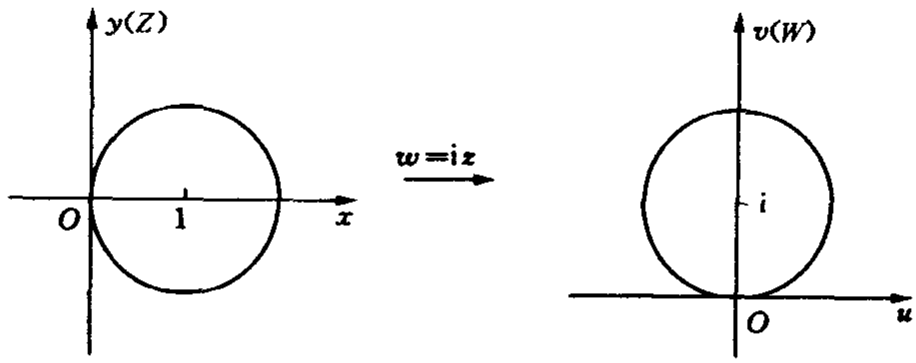


图 6 - 28

3. 证明:在映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 下, $x=C_1$ 与 $y=C_2$ 两直线分别被映射成 $v=u\tan C_1$, $u^2+v^2=\mathrm{e}^{-2C_2}$.　　$u+iv=e^{ix-y}=e$

证　对映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$,设 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$,则

$$w=u+\mathrm{i}v=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}=\mathrm{e}^{-y+\mathrm{i}x}=\mathrm{e}^{-y}(\cos x+\mathrm{i}\sin x),$$

$$\begin{cases} u=\mathrm{e}^{-y}\cos x \\ v=\mathrm{e}^{-y}\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=\mathrm{e}^{-2y}, \\ v=u\tan x. \end{cases}$$

直线 $x=C_1$ $(-\infty<y<+\infty)$ 被映射成 $v=u\tan C_1$;

直线 $y=C_2$ $(-\infty<x<+\infty)$ 被映射成 $u^2+v^2=\mathrm{e}^{-2C_2}=(\mathrm{e}^{-C_2})^2$ (见图6 - 29).

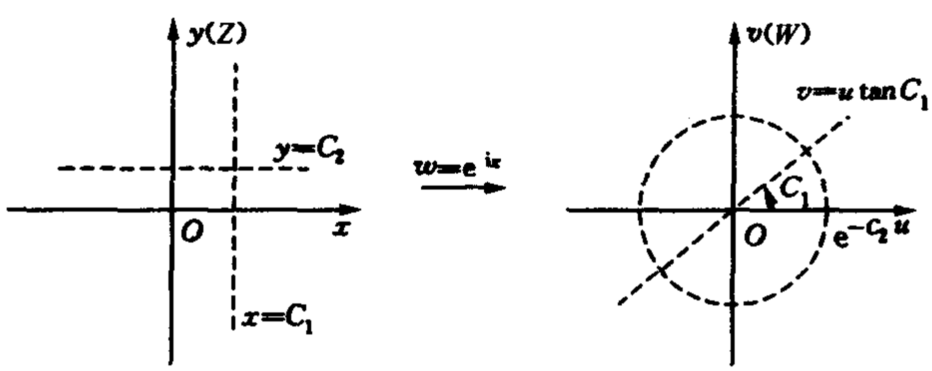


图 6 - 29

4. 下列区域或曲线在指定的映射下映射成什么区域或曲线？

(1) $\{z;\ \mathrm{Re}z>0\}$ 与 $w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$；

(2) $\{z;\ \mathrm{Im}z>0\}$ 与 $w=(1+\mathrm{i})z$；

(3) $\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<2\}$ 与 $w=\mathrm{i}z+1$；

$x_1=x_2=x$

$y_1+y_2=2$

(4) 直线 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (α,β,γ 为实数，且 α,β 不同时为零) 与 $w=\dfrac{1}{z}$；

$z=x+iy$

$z'=x+i(2-y)$

$=x-iy+2i$

$z'=\bar{z}+2i$

(5) 圆周曲线 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 与 $w=\dfrac{1}{z}$；

(6) $\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<1\}$ 与 $w=\dfrac{1}{z}$.

$x\in(0,+\infty)$　$w=\dfrac{1}{x+i}$　$\dfrac{x-i}{x^2+1}=u+iv$　$u=\dfrac{x}{x^2+1}$　$v=-\dfrac{1}{x^2+1}$　$u^2+v^2=-v$

解 (1) 对映射 $w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$，设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$\begin{cases} z,\ \bar{z}+2i \text{ 对称.} \\ w-w_0 \text{ 与 } \dfrac{R^2}{\bar{w}-\bar{w}_0} \text{ 对称} \end{cases}$

$\bar{z}-a$

$|\bar{w}-a||w-a|=R^2$

$$w=u+\mathrm{i}v=\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}=-y+\mathrm{i}(1+x),$$

$z=i$　$\bar{z}=-i$

$$\begin{cases} u=-y \\ v=1+x \end{cases}$$

$w=-i$

区域 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0\}$ 即为 $\{x+\mathrm{i}y;\ x>0\}$. 因为 $x>0\Rightarrow v=1+x>1$，所以映射 $w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$ 将区域 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0\}$ 映射成区域 $\{w;\ \mathrm{Im}w>1\}$.

$-i-w_0=\dfrac{R^2}{i-\bar{w}_0}$

事实上，可将映射 $w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}z+\mathrm{i}$ 分解为两个映射：$w_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}z$ (旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 角的旋转映射) 与平移映射 $w=w_1+\mathrm{i}$ (向虚轴正向平移 1) 的复合映射(见图 6-30).

$(\bar{w}_0-i)(w_0+i)=w_0\bar{w}_0$

$1=0$

$\begin{cases} 1+(\bar{w}_0-w_0)i=0 \\ w_0\bar{w}_0=R^2 \end{cases}$

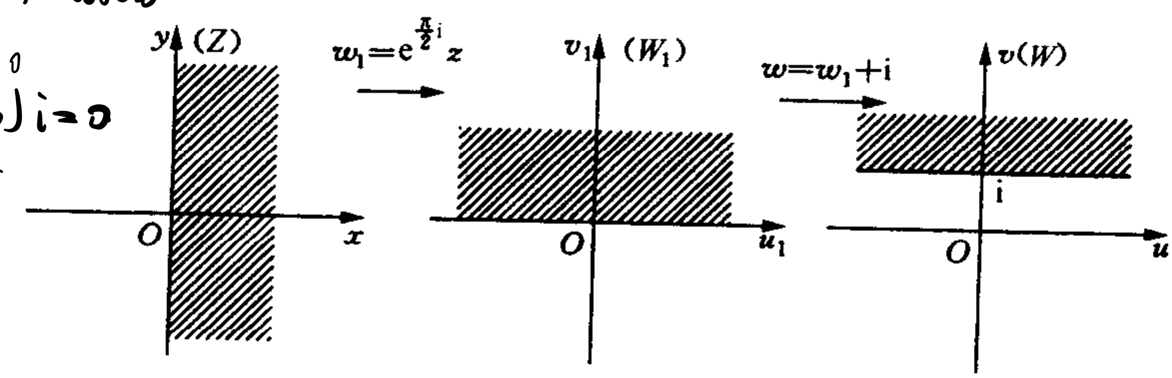


图 6-30　$w=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$

(2) 对映射 $w=(1+\mathrm{i})z$，设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$w=u+\mathrm{i}v=(1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)=x-y+\mathrm{i}(x+y)$$

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases}\Rightarrow\quad v-u=2y,\ y>0\Rightarrow v-u>0.$$

所以映射 $w=(1+\mathrm{i})z$ 将 Z 平面上区域 $\{z;\ \mathrm{Im}z>0\}$，即 $\{x+\mathrm{i}y;\ y>0\}$ 映射成 W 平面上区域 $\{u+\mathrm{i}v;\ v>u\}$，$\{w:\ \mathrm{Im}w>\mathrm{Re}w\}$（见图 6-31）.

（事实上，将映射 $w=(1+\mathrm{i})z$ 写成 $w=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}z$ 的形式后. 可知它是经过一个放大 $\sqrt{2}$ 倍与旋转 $\frac{\pi}{4}$ 角的复合映射）.

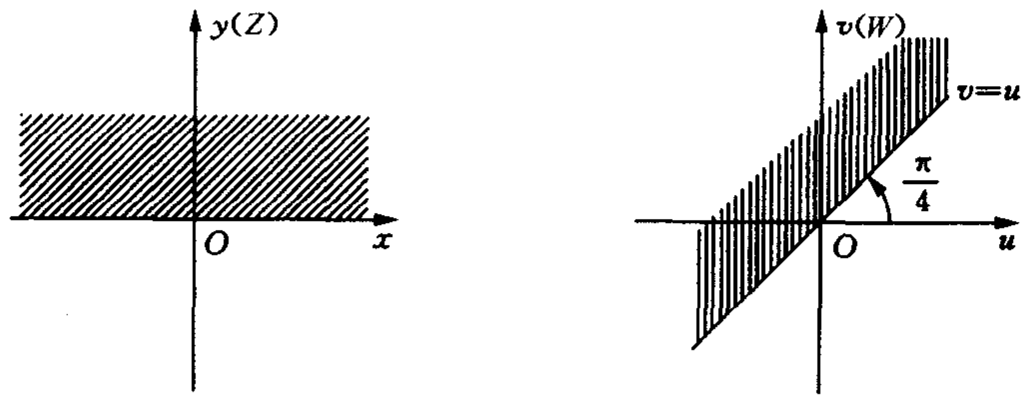


图 6-31　$w=(1+\mathrm{i})z$

(3) 对映射 $w=\mathrm{i}z+1$，设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$u+\mathrm{i}v=\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+1=1-y+\mathrm{i}x,\quad \text{所以}\begin{cases}u=1-y\\ v=x\end{cases}$$

由 $x>0 \Rightarrow v>0$，$0<y<2 \Rightarrow -1<u=1-y<1$，所以映射 $w=\mathrm{i}z+1$ 将 Z 平面上区域 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<2\}$（即 $\{x+\mathrm{i}y;\ x>0,\ 0<y<2\}$）映射成 W 平面上的区域 $\{u+\mathrm{i}v;\ -1<u<1,\ v>0\}$（即 $\{w;\ -1<\mathrm{Re}w<1,\ \mathrm{Im}w>0\}$）（见图 6-32）.

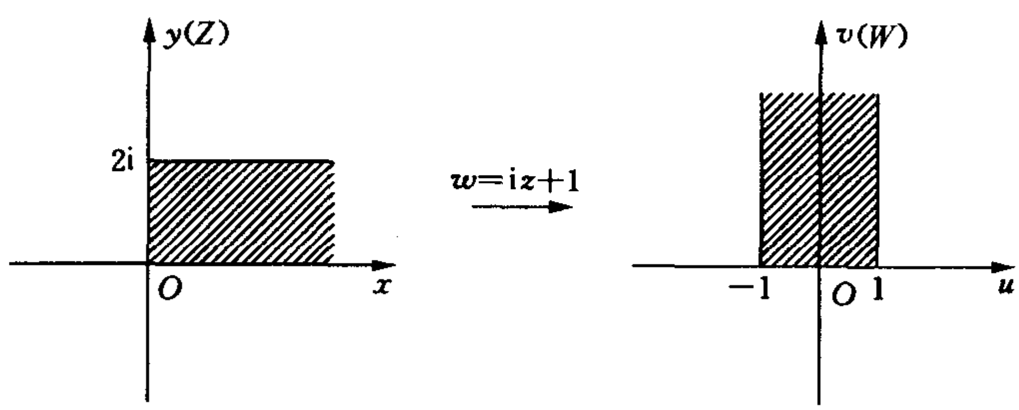


图 6-32　$w=\mathrm{i}z+1$

(4) 对映射 $w=\dfrac{1}{z}$，令 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，其逆映射为

$$z=\frac{1}{w},\ x+\mathrm{i}y=\frac{1}{u+\mathrm{i}v}=\frac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=-\dfrac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

由 $\alpha x+\beta y+\gamma=0 \Rightarrow \frac{\alpha u}{u^2+v^2}-\frac{\beta v}{u^2+v^2}+\gamma=0 \Rightarrow \gamma(u^2+v^2)+\alpha u-\beta v=0$，所以，映射 $w=\frac{1}{z}$，将 Z 平面上的直线 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 为实数，且 α，β 不同时为零）映射成 W 平面上的广义圆（圆周曲线或直线）

$$\gamma(u^2+v^2)+\alpha u-\beta v=0$$

（5）Z 平面上的圆周曲线 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$[或可写为 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$，或 $\{z;\ |z+(1+\mathrm{i})|=1\}$]在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下的象曲线为圆周曲线：

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2u}{u^2+v^2}-\frac{2v}{u^2+v^2}+1=0$$

即 $u^2+v^2+2u-2v+1=0$，所以映射圆周曲线为 $\{w=u+\mathrm{i}v;\ (u+1)^2+(v-1)^2=1\}$ 或 $\{w;\ |w-(-1+\mathrm{i})|=1\}$（见图 6－33）.

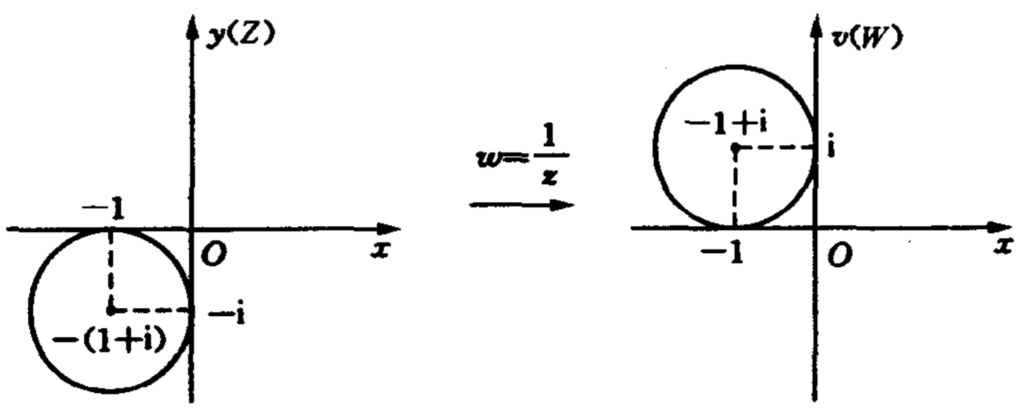


图 6－33

（6）Z 平面上区域 $D=\{z;\ \mathrm{Re}z>0$ 与 $0<\mathrm{Im}z<1\}$（或 $D=\{x+\mathrm{i}y;\ x>0$ 与 $0<y<1\}$），由

$$x>0 \Rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2}>0 \Rightarrow u>0$$

$$0<y<1 \Rightarrow 0<y=\frac{-v}{u^2+v^2}<1 \Rightarrow v<0,\ u^2+v^2+v>0,$$

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

知：在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，Z 平面上区域 $D=\{x+\mathrm{i}y;\ x>0$ 与 $0<y<1\}$ 映射为 W 平面上区域 $G=\left\{u+\mathrm{i}v;\ u>0,\ v<0,\ u^2+\left(v+\dfrac{1}{2}\right)^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}$ 或 $G=\left\{w;\ \mathrm{Re}w>0,\ \mathrm{Im}w<0, 且 \left|w+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|>\dfrac{1}{2}\right\}$（见图 6 - 34）.

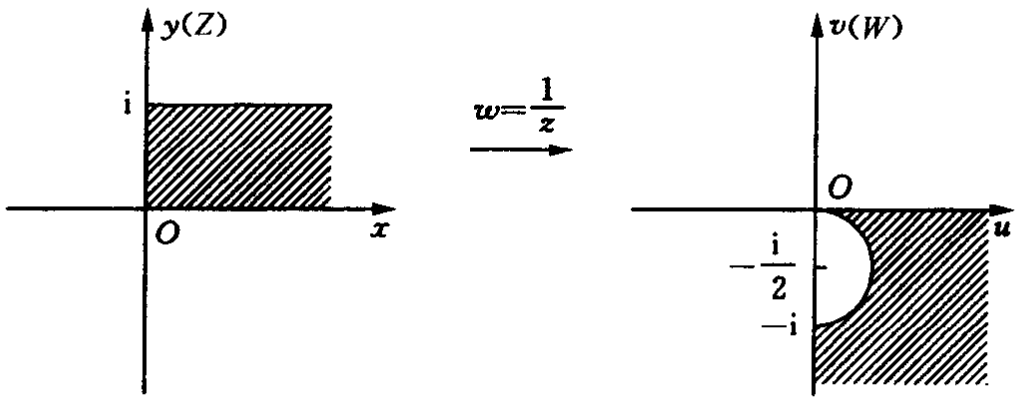


图 6 - 34

5. 求把上半平面映射成单位圆内部的分式线性映射 $w=f(z)$，且使

(1) $w(\mathrm{i})=0$，$\arg w'(\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}$；(2) $w(\mathrm{i})=0$，$w(-1)=1$.

解 由(6.44)式知，将上半平面映射成单位圆内部的分式线性映射的一般形式为

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$

其中 θ 为实数，$z_0\in\{z;\ \mathrm{Im}z>0\}$.

(1) 已知 $w(\mathrm{i})=0$，所以有 $z_0=\mathrm{i}$，$\bar{z}_0=-\mathrm{i}$.

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

$$w'(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{(z+\mathrm{i})-(z-\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}$$

$$w'(\mathrm{i})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2\mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

已知 $\arg w'(\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}$,所以有 $\theta-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=0$,最后得到

$$w=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

(2) 已知 $w(\mathrm{i})=0$,所以有 $z_0=\mathrm{i}$, $\overline{z_0}=-\mathrm{i}$, $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$, 又已知

$$w(-1)=1\Rightarrow 1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)},$$

所以有 $\theta+\frac{\pi}{2}=0$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$, 最后得到

$$w=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\text{或 } w=-\mathrm{i}\,\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

6. 求将单位圆内部映射成单位圆内部的分式线性映射 $w=f(z)$, 且使

(1) $w\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$; $W=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$

(2) $w\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $w(-1)=1$;

(3) $w(0)=0$, $\arg w'(0)=-\frac{\pi}{2}$.

解 由(6.45)式知,将 Z 平面上单位圆内部 $\{z;\ |z|<1\}$ 映为 W 平面上的单位圆内部 $\{w;\ |w|<1\}$ 的分式线性映射的一般形式为

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

其中 θ 为实数, $z_0\in\{z;\ |z|<1\}$.

(1) 已知 $w\left(\frac{1}{2}\right)=0$,所以有 $z_0=\frac{1}{2}$, $\bar{z}_0=\frac{1}{2}$,

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2z-1}{2-z}$$

$$w'(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2(2-z)+(2z-1)}{(2-z)^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{3}{(2-z)^2}$$

$$w'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \therefore\ \arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\theta$$

又已知 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$,所以 $\theta=-\frac{\pi}{2}$,最后得到

$$w=e^{-\frac{\pi}{2}i}\frac{2z-1}{2-z}\quad 或\quad w=-i\,\frac{2z-1}{2-z}.$$

(2) 已知 $w\left(\frac{1}{2}\right)=0$,所以有 $z_0=\frac{1}{2}$, $\bar{z}_0=\frac{1}{2}\Rightarrow w=e^{i\theta}\frac{2z-1}{2-z}$. 又已知 $w(-1)=1\Rightarrow 1=e^{i\theta}\frac{-2-1}{2+1}=-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}\Rightarrow\theta+\pi=0$, $\theta=-\pi$, 最后得

$$w=e^{-\pi i}\frac{2z-1}{2-z}=\frac{2z-1}{z-2}$$

(3) 已知 $w(0)=0$,所以有 $z_0=0$, $\bar{z}_0=0\Rightarrow w=e^{i\theta}\frac{z}{1}$,

$$w'(z)=e^{i\theta},\ w'(0)=e^{i\theta},\ \arg w'(0)=\theta$$

又已知 $\arg w'(0)=-\frac{\pi}{2}=\theta$, 最后得

$\frac{w-w_1}{w-w_2}\ \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$

$$w=-iz.$$

7. 试写出分式线性映射,它将 z_1, z_2, z_3 依次映射为 w_1, w_2, w_3. 已知:

(1) $z_1=2$, $z_2=i$, $z_3=-2$; $w_1=1$, $w_2=i$, $w_3=-1$;

(2) $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-i$; $w_1=1$, $w_2=0$, $w_3=-1$.

解 (1) 由(6.39)$'$式知,在 Z 平面与 W 平面上各任意给定三个相异的对应点 z_1, z_2, z_3 和 w_1, w_2, w_3,则存在唯一的分式线性映射 $w=f(z)$, 其表达式由下式确定

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

已知 $z_1=2\leftrightarrow w_1=1$, $z_2=i\leftrightarrow w_2=i$, $z_3=-2\leftrightarrow w_3=-1$,所以

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1}=\frac{z-2}{z-i}\cdot\frac{-2-i}{-2-2}$$

再由 $\frac{w-1}{w-i}=\frac{z-2}{z-i}\cdot\frac{2+i}{4}\cdot\frac{2}{1+i}=\frac{z-2}{z-i}\cdot\frac{3-i}{4}$,解之得

$$w=\frac{-3zi+2}{z-6i}\ \left(或\ w=\frac{3z+2i}{iz+6}\right).$$

(2) 分式线性映射的一般形式 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 也可表示成

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

其中 k，α，β 为三个独立的常数.

已知 $z_1=1\leftrightarrow w_1=1$，$z_2=\mathrm{i}\leftrightarrow w_2=0$，$z_3=-\mathrm{i}\leftrightarrow w_3=-1$，所以有

$$0=k\frac{\mathrm{i}-\alpha}{\mathrm{i}-\beta}\Rightarrow\alpha=\mathrm{i}\Rightarrow w=k\frac{z-\mathrm{i}}{z-\beta}.$$

再由

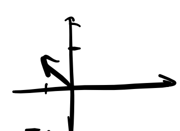
$$\begin{cases}1=k\dfrac{1-\mathrm{i}}{1-\beta}\\[2ex]-1=k\dfrac{-\mathrm{i}-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}-\beta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta+k(1-\mathrm{i})=1\\\beta+2k\mathrm{i}=-\mathrm{i}\end{cases}$$

解出 β，k

$$k=\frac{1+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}},\quad\beta=1-k(1-\mathrm{i})=-\frac{1+3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$$

最后得到

$$w=\frac{1+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}}=\frac{(1+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})z+(1+3\mathrm{i})}$$



$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

或

$w=k\frac{z-1}{z+1}$　　$\frac{i-1}{i+1}\cdot k=1$

$\frac{1+i}{i-1}=$

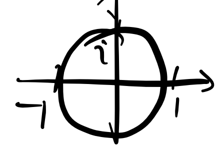
$$w=\frac{(1+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{(1+z)+3\mathrm{i}(1-z)}.$$

8. 试求 Z 平面上的点 -1，1，i 依次映射为 W 平面上的点 ∞，0，1 的唯一分式线性映射，并问此映射将 $\{z;\ |z|<1\}$ 映射为什么区域？

解　由分式线性映射的一般形式 $w=k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$（其中 k，α，β 为常数)，得

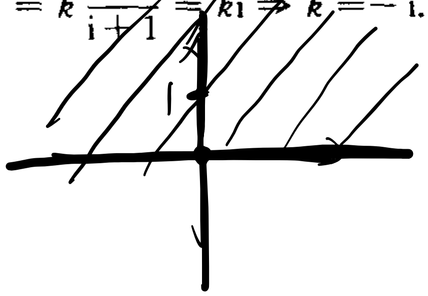
$W=-i\cdot\frac{z-1}{z+1}$

$$w_k=k\frac{z_k-\alpha}{z_k-\beta}\ (k=1,2,3),$$



由 $z_2=1\leftrightarrow w_2=0$，得 $0=k\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}\Rightarrow\alpha=1$，所以 $w=k\dfrac{z-1}{z-\beta}$；由 $z_1=-1\leftrightarrow w_1=\infty$，则 $\infty=k\dfrac{-1-1}{-1-\beta}\Rightarrow\beta=-1$，所以有 $w=k\dfrac{z-1}{z+1}$；由 $z_3=\mathrm{i}\leftrightarrow w_3=1$，则 $1=k\dfrac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=k\mathrm{i}\Rightarrow k=-\mathrm{i}$.

$\frac{z-i}{z+i}\cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$



所以，所求的唯一分式线性映射为

$$w=-\mathrm{i}\,\frac{z-1}{z+1}$$

它的逆映射为 $z=-\dfrac{w-\mathrm{i}}{w+\mathrm{i}}$，因为

$$|z|<1 \Rightarrow \left|-\frac{w-\mathrm{i}}{w+\mathrm{i}}\right|<1 \Rightarrow |w-\mathrm{i}|<|w+\mathrm{i}|.$$

所以，对于 Z 平面上区域 $D=\{z;\ |z|<1\}$，经映射后的象区域是复平面 W 上凡与点 i 的距离小于与点$(-\mathrm{i})$的距离的点的集合，也就是 W 平面的上半平面$\{w;\ \mathrm{Im}w>0\}$.

1 2 3　　1 2 3

9. 试求将 Z 平面上的点∞，0，1 依次映射为 W 平面上的点 0，1，∞的唯一分式线性映射，并问此映射将 $\{z;\ \mathrm{Im}z>0\}$ 映射为 W 平面上什么区域？

解　已知

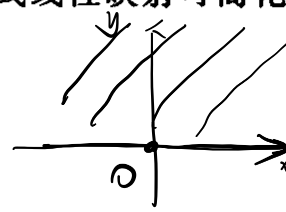
$$\begin{cases} z_1=\infty \leftrightarrow w_1=0 \\ z_2=0 \leftrightarrow w_2=1 \\ z_3=1 \leftrightarrow w_3=\infty \end{cases}$$

$\dfrac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\dfrac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

$\dfrac{w}{1-0}=\dfrac{0-1}{z-1}$　　$w=\dfrac{1}{1-z}$

当 $z_1=\infty$，$w_3=\infty$ 时，三对点对应的唯一确定的分式线性映射可简化为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{z_3-z_2}{z-z_2}$$



所以有

$$\frac{w-0}{w-1}=\frac{1-0}{z-0} \Rightarrow \frac{w}{w-1}=\frac{1}{z} \Rightarrow w=\frac{1}{1-z}.$$

因此，将 Z 平面上的点∞，0，1 依次映射为 W 平面上的点 0，1，∞的唯一分式线性映射是 $w=\dfrac{1}{1-z}$.

它的逆映射为 $z=\dfrac{w-1}{w}$. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$z=x+\mathrm{i}y=\frac{u+\mathrm{i}v-1}{u+\mathrm{i}v}=\frac{1}{u^2+v^2}[(u-1)+\mathrm{i}v](u-\mathrm{i}v)$$

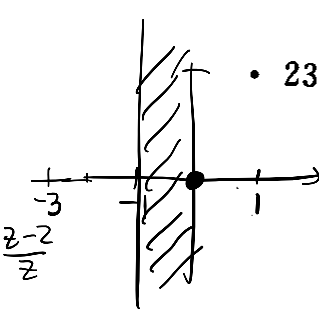
$$=\frac{1}{u^2+v^2}[u(u-1)+v^2+\mathrm{i}v]$$

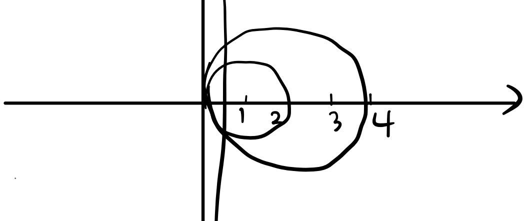
所以 $y=\dfrac{v}{u^2+v^2}$，由 $y>0 \Rightarrow v>0$.

$1-\dfrac{2}{z}$

$\dfrac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}}$　　$1-4=-3$

$\zeta=\dfrac{z-2}{z}=1-\dfrac{2}{z}$　　$\zeta=\dfrac{z-2}{z}$

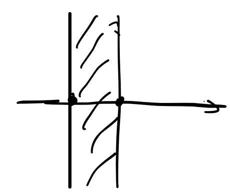




$w = \zeta + 1$

$\zeta = \frac{z-2}{z}$

$\zeta = \frac{z-\alpha}{z-\beta} = \frac{z-\alpha}{z} \cdot k$ $\quad 1 - \frac{2}{z}$



对于 Z 平面上的区域 $\{z;\ \mathrm{Im}z > 0\}$(上半平面),经映射 $w = \frac{1}{1-z}$ 后在 W 平面上的象区域为 $\{w;\ \mathrm{Im}w > 0\}$.

10. 求将区域 $A = \{z;\ |z-1| > 1$ 与 $|z-2| < 2\}$ 映射为区域 $B = \{w;\ 0 < \mathrm{Re}w < 1\}$ 的任一保角映射.

解 Z 平面上区域 $A = \{z;\ |z-1| > 1$ 与 $|z-2| < 2\}$ 是由两个相内切的(切点在 $z = 0$ 处)的圆周曲线 $C_1 = \{z;\ |z-1| = 1\}$ 与 $C_2 = \{z;\ |z-2| = 2\}$ 所围的区域.

第一步:因为只求两区域之间的保角映射,对点的对应未作出要求,因此我们可任取. 在分式线性映射的一般形式中,不妨取 $k = 1$, $\zeta = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$.

由于要将两个相切圆弧同时映射为直线,那么必须使切点 $z = 0$ 映射为 $\zeta = \infty$ 点,有 $\zeta = \frac{z-\alpha}{z}$. 此时 C_1 与 C_2 的象曲线均为直线. 因为 C_1 与 C_2 在 $z = 0$ 处相切(交角为 0),所以在 ζ 平面上两象曲线是平行直线.

接下来:如果我们希望圆周曲线 $C_1 = \{z;\ |z-1| = 1\}$ 被映射成 ζ 平面上过原点的直线,那么令 $z = 2$ 映射为 $\zeta = 0$,此时有 $\zeta = \frac{2-\alpha}{2} = 0$,所以有 $\alpha = 2$,由此得到 $\zeta = \frac{z-2}{z}$.

现在我们来判断一下 Z 平面上的圆周曲线 C_1 在 $\zeta = \frac{z-2}{z}$ 映射下的象曲线(直线)究竟是什么? 我们取 C_1 上的另外一点 $z_1 = 1+\mathrm{i} \in C_1$,它在平面上的象点为 $\zeta = \frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$,所以映射 $\zeta = \frac{z-2}{z}$ 将 Z 平面上圆周曲线 $C_1 = \{z;\ |z-1| = 1\}$ 映射为 ζ 平面上的虚轴 $L_1 = \{\zeta;\ \mathrm{Re}\zeta = 0\}$;又因为 $z = 4 \in C_2$ 的象点为 $\zeta = \frac{1}{2}$,所以映射 $\zeta = \frac{z-2}{z}$ 将 Z 平面上的圆周曲线 $C_2 = \{z;\ |z-2| = 2\}$ 映射为过象点 $\zeta = \frac{1}{2}$ 且平行于 L_1 的直线 $L_2 = \left\{\zeta;\ \mathrm{Re}\zeta = \frac{1}{2}\right\}$.

取点 $z = 3 \in A$ 的象点为 $\zeta = \frac{1}{3}$,所以 $\zeta = \frac{z-2}{z}$ 将 Z 平面上区域 $D = \{z;\ |z-1| > 1$ 与 $|z-2| < 2\}$ 映射为 ζ 平面上的区域 $D_1 = \left\{\zeta;\ 0 < \mathrm{Re}\zeta < \frac{1}{2}\right\}$. ($\because\ \zeta = \frac{1}{3} \in D_1$)

第二步：作伸缩映射 $w=2\zeta$，它将 ζ 平面上的区域 $D_1=\left\{\zeta;\ 0<\mathrm{Re}\zeta<\frac{1}{2}\right\}$ 映射为 W 平面上的区域 $G=\{w;\ 0<\mathrm{Re}w<1\}$，所以复合映射 $w=\frac{2(z-2)}{z}$ 就是将 Z 平面上区域 $D=\{z;\ |z-1|>1$ 与 $|z-2|<2\}$ 映射为 W 平面上区域 $G=\{w;\ 0<\mathrm{Re}w<1\}$ 的一个分式线性映射（见图 6－35）.

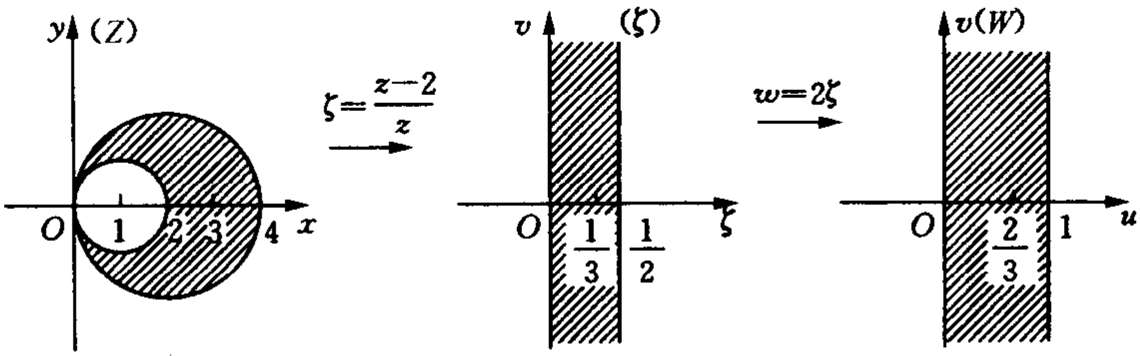


图 6－35

11. **求将区域 $A=\{z;\ |z-\mathrm{i}|<1\}$ 映射为区域 $B=\{w;\ |w|<1\}$ 的任一保角映射.**

解 作映射 $w=z-\mathrm{i}$. 因为 $|w|=|z-\mathrm{i}|<1$，$z\in A=\{z;\ |z-\mathrm{i}|<1\}$，则映射将 Z 平面上的圆域 $A=\{z;\ |z-\mathrm{i}|<1\}$ 平移映射成 W 平面上的圆域 $B=\{w,\ |w|<1\}$.（见图 6－36）

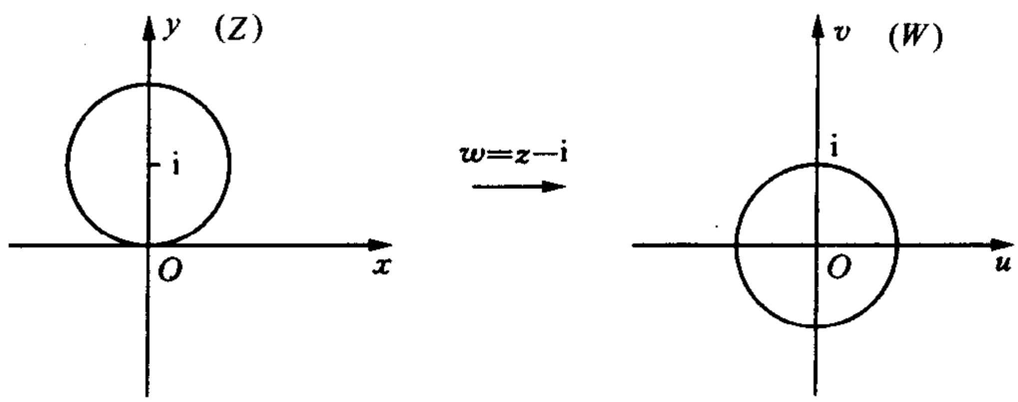
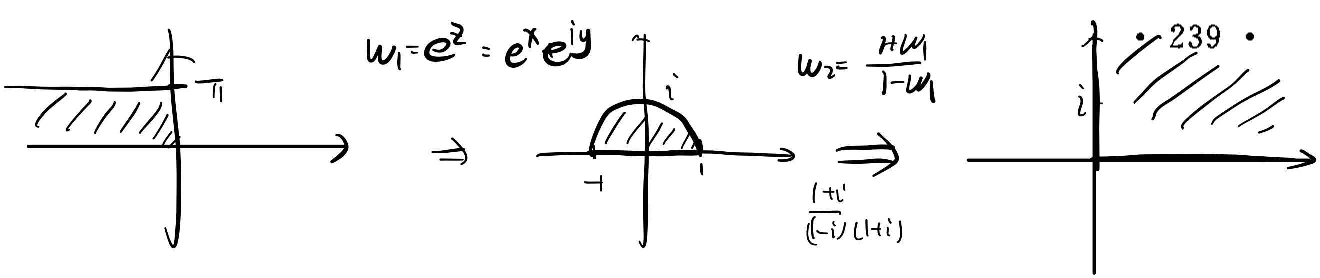


图 6－36

12. **求将区域 $A=\{z;\ \mathrm{Re}z<0,\ 0<\mathrm{Im}z<\pi\}$ 映射为 W 平面上的第一象限的任一保角映射.**

解 (1) 作 $w_1=\mathrm{e}^z$. 它将 Z 平面上区域 $A=\{z;\ \mathrm{Re}z<0,\ 0<\mathrm{Im}z<\pi\}$



$\left(\frac{1+e^z}{1-e^z}\right)^2$

映射为 W_1 平面上的上半单位圆内部 $A_1 = \{w_1;\ |w_1| < 1,\ \mathrm{Im}w_1 > 0\}$.

(2) 作 $w = \dfrac{w_1+1}{1-w_1}$. 它是一个分式线性映射,它将区域 A_1 的边界曲线上的点 $w_1 = -1$ 映射为 $w = 0$、$w_1 = 1$ 映射为 $w = \infty$,所以该分式线性映射必然把两广义圆所围区域 A_1 映射成以 $w = 0$ 为顶点的角域$\left(\text{夹角为}\dfrac{\pi}{2}\right)$. 又因为点 $w_1 = 0$ 映射为 $w = 1$,根据边界对应原理可知,映射 $w = \dfrac{w_1+1}{1-w_1}$ 将 W_1 平面上的区域 A_1 映射为 W 平面上的第一象限.

所以,复合函数 $w = \dfrac{e^z+1}{1-e^z}$ 是把 Z 平面上的半带域 $A = \{z;\ \mathrm{Re}z < 0,\ 0 < \mathrm{Im}z < \pi\}$ 映射为 W 平面上的第一象限 $B = \{w;\ \mathrm{Re}w > 0,\ \mathrm{Im}w > 0\}$ 的一个保角映射(见图 6 - 37).

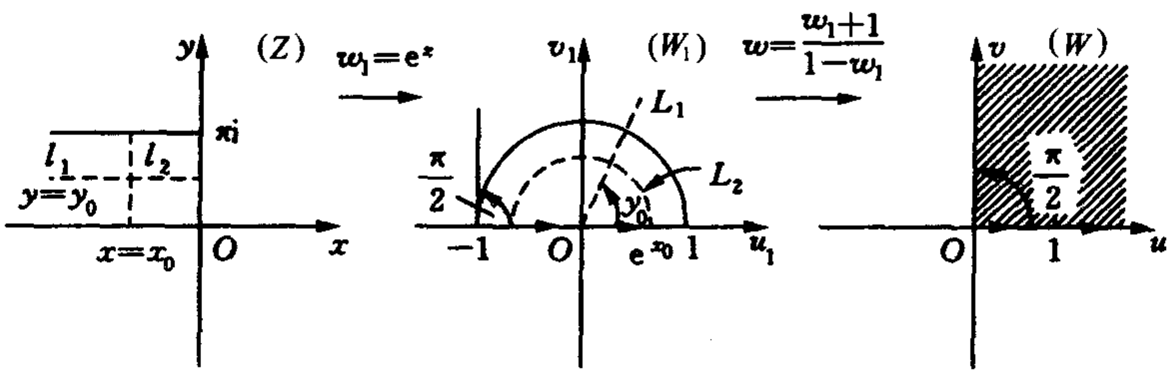


图 6 - 37

13. 证明映射 $w = \dfrac{1}{z+i}$ 将区域 $A = \{z;\ \mathrm{Im}z \geq 0\}$ 映射为 W 平面上的区域 $B = \left\{w;\ \left|w + \dfrac{i}{2}\right| < \dfrac{1}{2}\right\}$.

$z+i = \frac{1}{w}$　　$z = \frac{1-wi}{w} = \frac{(1+v)-ui}{u+iv}$

$= \frac{[(1+v)-ui](u-iv)}{u^2+v^2}$

$= \frac{u(1+v)-uv - [u^2-v(v+1)]i}{u^2+v^2}$

$= \frac{u-(u^2+v^2+v)i}{u^2+v^2}$

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$;　$y = -\frac{v}{u^2+v^2} - 1$

证　映射 $w = \dfrac{1}{z+i}$ 的逆映射为分式线性映射:

$$z = \frac{1-wi}{w}.$$

设 $z = x + iy$, $w = u + iv$,则由

$$x + iy = \frac{1-(u+iv)i}{u+iv} = \frac{1}{u^2+v^2}[(1+v) - iu](u - iv)$$

$y \geq 0$

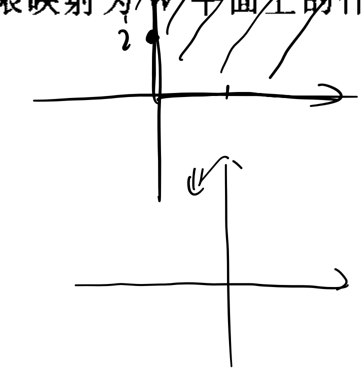
$$= \frac{1}{u^2+v^2}[u - (u^2+v^2+v)i]$$

$$\therefore \quad x = \frac{u}{u^2+v^2},\ y = -\frac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}.$$

由 $y>0 \Rightarrow u^2+v^2+v<0 \Rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2$，所以映射 $w=\frac{1}{z+\mathrm{i}}$ 将 Z 平面上区域 $A=\{z;\ \mathrm{Im}z>0\}$ 映射为 W 平面上区域 $B=\left\{u+\mathrm{i}v;\ u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$，即 $B=\left\{w;\ \left|w+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|<\frac{1}{2}\right\}$. 证毕.

14. 函数 $w=\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$ 将 Z 平面上的第一象限映射为 W 平面上的什么区域？

解 映射 $w=\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$ 的逆映射为



$$z=\frac{(1-w)\mathrm{i}}{1+w}$$

设 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$，则由

$$x+\mathrm{i}y=\frac{[1-(u+\mathrm{i}v)]\mathrm{i}}{1+(u+\mathrm{i}v)}$$

$$=\frac{[(1-u)-\mathrm{i}v][(1+u)-\mathrm{i}v]\mathrm{i}}{[(1+u)+\mathrm{i}v][(1+u)-\mathrm{i}v]}=\frac{(1-u^2-v^2)\mathrm{i}+2v}{(1+u)^2+v^2}$$

有

$$x=\frac{2v}{(1+u)^2+v^2},\ y=\frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}$$

对 Z 平面上第一象限 $\{x+\mathrm{i}y;\ x>0,\ y>0\}$，因 $x>0 \Rightarrow v>0$；$y>0 \Rightarrow u^2+v^2<1$，所以函数 $w=\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$ 将 Z 平面上第一象限 $\{x+\mathrm{i}y;\ x>0,\ y>0\}$ 映射为 W 平面上区域 $\{u+\mathrm{i}v;\ u^2+v^2<1,\ v>0\}$，或记为 $\{w;\ |w|<1,\ \mathrm{Im}w>0\}$（上半单位圆内部）.

15. 函数 $w=\frac{z-1}{z+1}$ 将

(1) $\{z;\ \mathrm{Re}z>0\}$；　　　(2) $\{z;\ |z|<1\}$.

映射为 W 平面上的什么区域？

解 映射 $w=\frac{z-1}{z+1}$ 的逆映射为

$$z=\frac{w+1}{1-w}$$

设 $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$,则由

$$x + \mathrm{i}y = \frac{u + \mathrm{i}v + 1}{1 - (u + \mathrm{i}v)} = \frac{(u+1) + \mathrm{i}v}{(1-u) - \mathrm{i}v}$$

$$= \frac{1}{(1-u)^2 + v^2}[(u+1) + \mathrm{i}v] \cdot [(1-u) + \mathrm{i}v]$$

$$= \frac{1}{(1-u)^2 + v^2}[(1 - u^2 - v^2) + \mathrm{i}v]$$

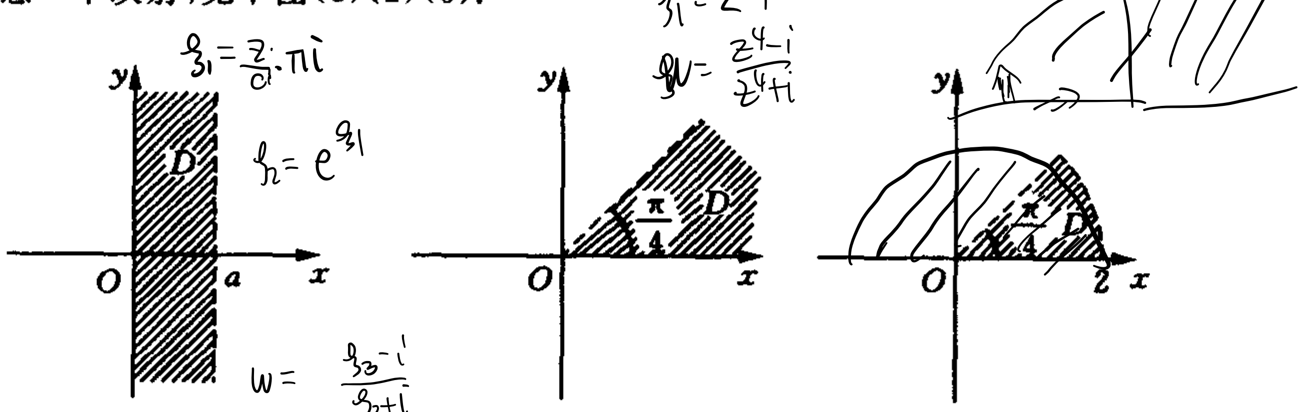
$$x = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1-u)^2 + v^2},\ y = \frac{v}{(1-u)^2 + v^2}.$$

(1) 在 Z 平面上区域 $\{z;\ \mathrm{Re}z > 0\}$ 即 $\{x + \mathrm{i}y;\ x > 0\}$,因 $x > 0 \Rightarrow 1 - u^2 - v^2 > 0 \Rightarrow u^2 + v^2 < 1$,所以映射 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 将 Z 平面上区域 $\{z;\ \mathrm{Re}z > 0\}$ 映射为 W 平面上的区域 $\{u + \mathrm{i}v;\ u^2 + v^2 < 1\}$ 或 $\{w;\ |w| < 1\}$.

(2) 在 Z 平面上区域 $\{z;\ |z| < 1\}$,因 $|z| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{w+1}{1-w}\right| < 1 \Rightarrow |w+1| < |w-1|$,所以映射 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 将 Z 平面上单位圆内部区域 $\{z;\ |z| < 1\}$ 映射为 W 平面上的左半平面 $\{w;\ \mathrm{Re}w < 0\}$(即在 W 平面上与点 -1 的距离小于与点 1 的距离的点的集合).

16. 求将下列各区域保角且互为单值地映射为 W 平面上的单位圆内部的任意一个映射,见下图(1)(2)(3).

$\xi_1 = z^4$



(1) (2) (3)

解 (1) 第一步:先作映射 $w_1 = \dfrac{\pi \mathrm{i}}{a}z$ 将 Z 平面上带域 $D = \{z;\ 0 < \mathrm{Re}z < a\}$ 映射为 W_1 平面上的带域 $D_1 = \{w_1;\ 0 < \mathrm{Im}(w) < \pi\}$(见图 6-38).

第二步：作映射 $w_2=e^{w_1}$ 将 W_1 平面上的带域 D_1 映射为 W_2 平面上的上半平面 $D_2=\{w_2;\ \mathrm{Im}w_2>0\}$.

第三步：作映射 $w=\dfrac{w_2-i}{w_2+i}$ 将 W_2 平面上的区域 D_2 映射为 W 平面上的单位圆内部 $G=\{w;\ |w|<1\}$.（见图 6－38）

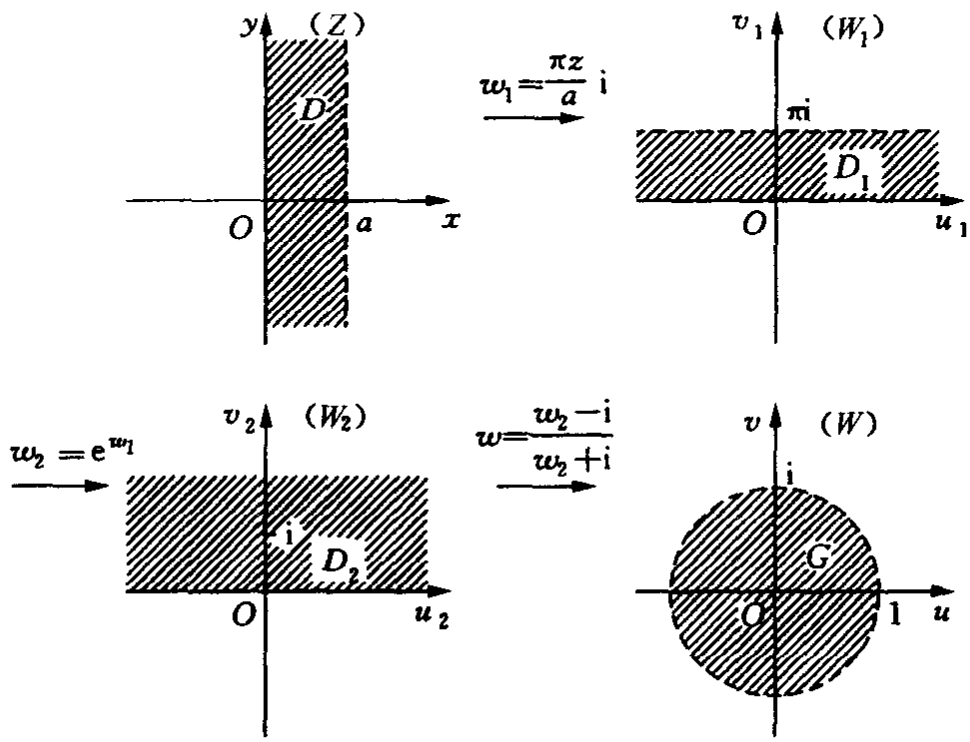


图 6－38

复合上述各保角映射，得映射：

$$w=\frac{e^{\frac{\pi}{a}zi}-i}{e^{\frac{\pi}{a}zi}+i}$$

这就是将区域 $D=\{z;\ 0<\mathrm{Re}z<a\}$ 映射成单位圆内部 $G=\{w;\ |w|<1\}$ 的一个保角映射.

(2) 第一步：作 $w_1=z^4$，将 Z 平面上的角域 $D=\{z;\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$ 映射（放大）为 W_1 平面上的上半平面 $D_1=\{w_1;\ \mathrm{Im}w_1>0\}$.

第二步：作 $w=\dfrac{w_1-i}{w_1+i}$，将 W_1 平面上区域 D_1 映射为 W 平面上的单位圆内部 $G=\{W;\ |w|<1\}$.

复合上述两个保角映射，得映射：

$$w = \frac{z^4 - \mathrm{i}}{z^4 + \mathrm{i}}$$

这就是将区域 $D = \left\{z;\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$映射成单位圆内部 $G = \{w;\ |w| < 1\}$ 的一个保角映射（见图 6 - 39）.

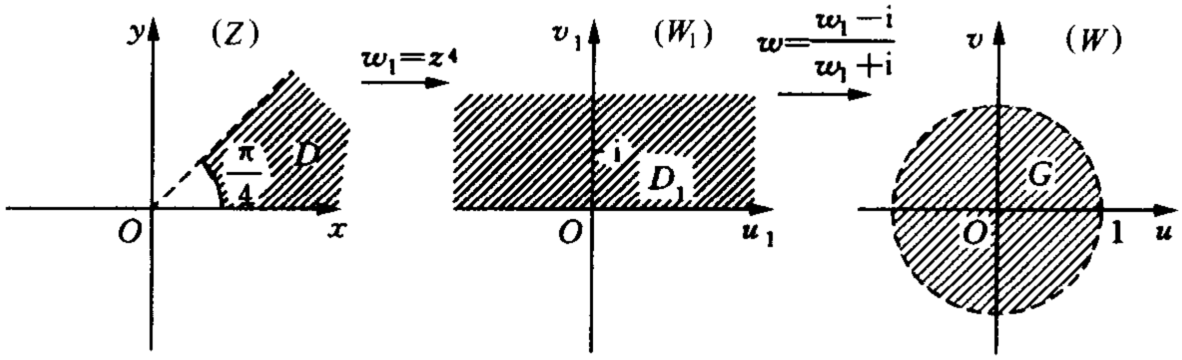


图 6 - 39　$w = \frac{z^4 - \mathrm{i}}{z^4 + \mathrm{i}}$

(3) 第一步：作 $w_1 = \left(\frac{z}{2}\right)^4$，将 Z 平面上的区域 $D = \{z;\ |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ 映射为 W_1 平面上的上半单位圆内部 $D_1 = \{w_1;\ |w| < 1,\ \mathrm{Im}w_1 > 0\}$.

第二步：作 $w_2 = \frac{1 + w_1}{1 - w_1}$，将 W_1 平面上区域 D_1 映射为 W_2 平面上的第一象限 $D_2 = \{w_2;\ \mathrm{Re}w_2 > 0,\ \mathrm{Im}w_2 > 0\}$.

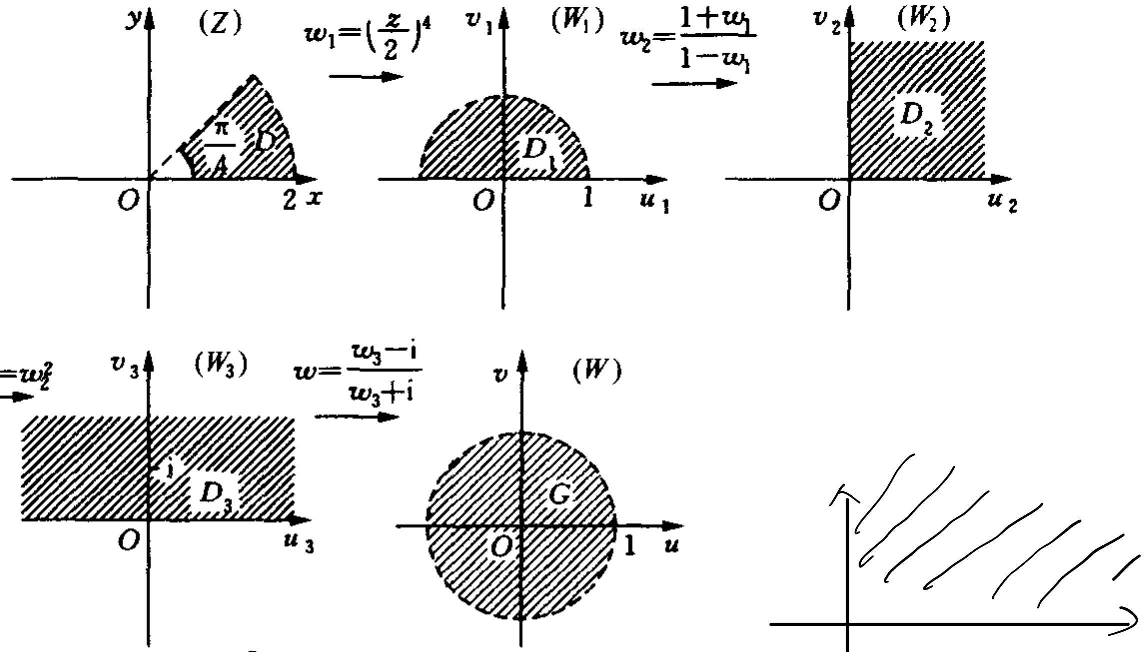
第三步：作 $w_3 = w_2^2$，将 W_2 平面上区域 D_2 映射为 W_3 平面上的上半平面 $D_3 = \{w_3;\ \mathrm{Im}w_3 > 0\}$.

第四步：作 $w = \frac{w_3 - \mathrm{i}}{w_3 + \mathrm{i}}$，将 W_3 平面上区域 D_3 映射为 W 平面上的单位圆内部 $G = \{w;\ |w| < 1\}$.

复合上述四个保角映射，得映射：

$$w = \frac{(z^4 + 2^4)^2 - \mathrm{i}(z^4 - 2^4)^2}{(z^4 + 2^4)^2 + \mathrm{i}(z^4 - 2^4)^2}.$$

这就是将 Z 平面上的扇形区域 $D = \left\{z;\ |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$ 映射为 W 平面上单位圆内部 $G = \{w;\ |w| < 1\}$ 的一个保角映射（见图 6 - 40）.



$w_1=z^2$ $\quad w_1=(1+i)^2=2i$

$w=e^{i\theta}\cdot\frac{w_1-2i}{w_1+2i}=e^{i\theta}\frac{z^2-2i}{z^2+2i}$

图 6-40 $\quad w(0)=e^{i\theta}\cdot(-1)=1 \Rightarrow \theta=\pi$

17. 求将区域 $\left\{z;\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$ 映射为单位圆内部 $\{w;\ |w|<1\}$，且使 $z=1+i$，0 分别映射为 $w=0$，1 的唯一保角映射.

解 (1) $w_1=z^2$ 将 Z 平面上区域 $D=\left\{z;\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$ 映射为 W_1 平面上的上半平面 $D_1=\{w_1;\ \mathrm{Im}w_1>0\}$，且使 $\quad w=\frac{2i-z^2}{2i+z^2}$

$$z=1+i\rightarrow w_1=2i,\ z=0\rightarrow w_1=0$$

(2) 由分式线性映射 $w=e^{i\theta}\cdot\frac{w_1-w_1^0}{w_1-\overline{w}_1^0}$，将 W_1 平面上的上半平面 D_1 映射为 W 平面上的单位圆内部 $G=\{w;\ |w|<1\}$，再根据点的对应来确定常数 θ 与 $w_1{}^0$.

因为 $z=1+i$ 映射为 $w_1=2i$，再要使它映射为 $w=0$，必须有 $w_1{}^0=2i$. 而 $\overline{w}_1{}^0=-2i$，所以映射为 $w=e^{i\theta}\frac{w_1-2i}{w_1+2i}$.

又因为 $z=0$ 映射为 $w_1=0$，再要使它映射为 $w=1$，所以必须有

$$1=e^{i\theta}\frac{0-2i}{0+2i}=-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$$

由此可得 $\theta+\pi=0$，$\theta=-\pi$，所以，得 $w=-\frac{w_1-2i}{w_1+2i}$.

复合上述两个保角映射，得

$$w=-\frac{z^2-2i}{z^2+2i}.$$

它就是将 Z 平面上的第一象限映为 W 平面的单位圆内部，且使 $z=1+\mathrm{i}$，0 分别映射为 $w=0$，1 的唯一保角映射(见图 6－41).

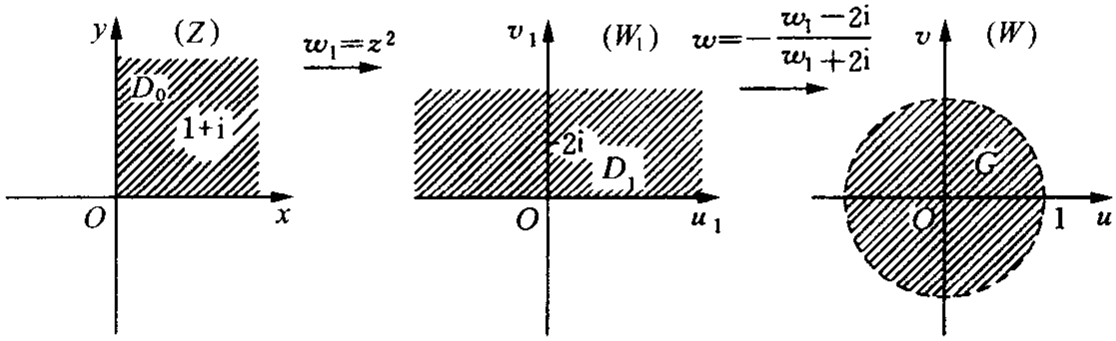
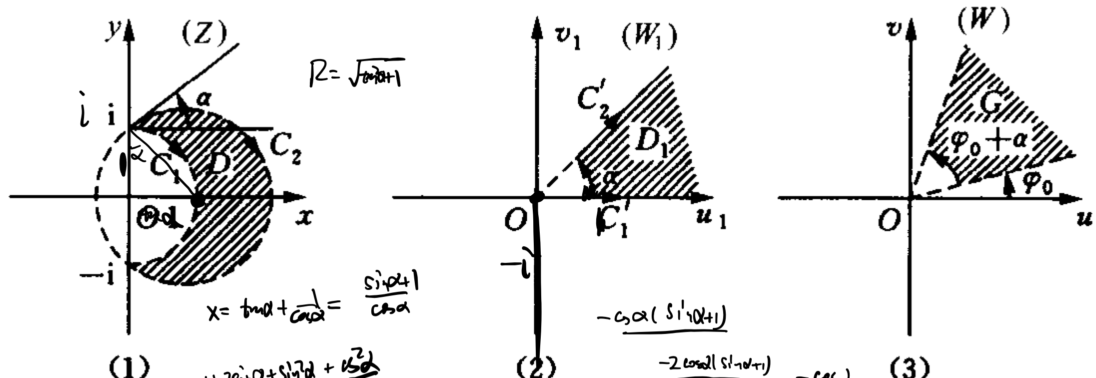


图 6－41 $\quad w=-\dfrac{z^2-2\mathrm{i}}{z^2+2\mathrm{i}}$

18. 求把图 6－42 中由圆弧曲线 C_1 与 C_2 所围成的交角为 α 的月牙形区域映射成角域 $\{w;\ \varphi_0<\arg w<\varphi_0+\alpha\}$ 的任一保角映射.



$W=\mathrm{i}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

图 6－42

解 图 6－42(1)中的月牙形区域 $D=\{z;\ |z|>1,\ |z-1|<\sqrt{2}\}$ 的边界曲线 C_1 与 C_2(自交点 $z=\mathrm{i}$ 点出发至另一交点 $z=-\mathrm{i}$)都是圆周曲线的一部分，它们在 $z=\mathrm{i}$ 处的交角(曲线 C_1 与 C_2 在 $z=\mathrm{i}$ 处切线的交角)为 α.

第一步：经分式线性映射 $w_1=k\dfrac{z-\alpha_0}{z-\beta_0}$，如果将 $z=\mathrm{i}$ 映射为 $w_1=0$；将 $z=-\mathrm{i}$ 映射为 $w_1=\infty$，此时必有 $\alpha_0=\mathrm{i}$，$\beta_0=-\mathrm{i}$，所以 $w_1=k\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ 将图 6－42(1)中的月牙形区域 D 映射为一个以原点为顶点、夹角为 α 的角域. 从图6－42(2)中可知，如果我们希望将 D 映射成 W_1 平面上的角域 $D_1=\{w_1;\ 0<\arg w_1<\alpha\}$，则必须将曲线 C_1 映射为 W_1 平面上的正实轴. 不妨取 $z=1$ 映射成 $w_1=1$，此时有 $1=k\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=k(-\mathrm{i})$，则 $k=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}$. 所以，将图 6－42(1)中的月牙形

区域 $D=\{z;\ |z|>1,\ |z-1|<\sqrt{2}\}$ 映射成 W_1 平面中图 6-42(2) 中的角域 $D_1=\{w_1;\ 0<\arg w_1<\alpha\}$ 的保角映射应为

$$w_1=\mathrm{i}\,\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

第二步：将图 6-42(2)中的角域 $D_1=\{w_1;\ 0<\arg w_1<\alpha\}$ 映射成图 6-42(3) 中的角域 $G=\{w;\ \varphi_0<\arg w<\varphi_0+\alpha\}$，只需经过一个旋转映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}w_1$ 就能实现.

复合上述两个保角映射 $w_1=\mathrm{i}\,\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ 与 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}w_1$ 得：

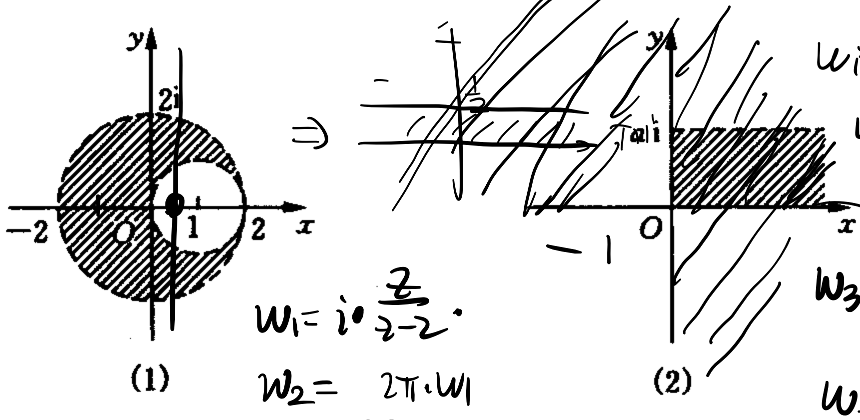
$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

它是将 Z 平面上的月牙形区域 $D=\{z;\ |z|>1,\ |z-1|<\sqrt{2}\}$ 映射到 W 平面上的角域 $G=\{w;\ \varphi_0<\arg w<\varphi_0+\alpha\}$ 的一个保角映射.

19. 求将下列区域保角且互为单值地映射为 W 平面的上半平面的任一函数.

(1) $\{z;\ |z|<2\}$ 与 $\{z;\ |z-1|>1\}$ 的公共区域(见图 6-43(1))；

(2) 半带域 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<a\}$ (见图 6-43(2)).



$w_1=\mathrm{i}\cdot\dfrac{z}{z-2}$

$w_2=2\pi\cdot w_1$

$W=e^{w_2}=e^{\frac{2\pi \mathrm{i} z}{z-2}}$

$w_1=\dfrac{\pi}{a}z$

$w_2=e^{w_1}$

$w_3=\dfrac{w_2-1}{w_2+1}$

$w=w_3\cdot e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$

图 6-43

解 (1) 图 6-43(1)中的区域 $D=\{z;\ |z-1|>1$ 与 $|z|<2\}$ 是一个由两条圆周曲线内切于点 $z=2$ 的月牙形区域. 记 $C_1=\{z;\ |z-1|=1\}$，$C_2=\{z;\ |z|=2\}$.

$w_2=e^{\frac{\pi z}{a}}$　　$w_3=\dfrac{e^{\frac{\pi z}{a}}-1}{e^{\frac{\pi z}{a}}+1}\cdot(-\mathrm{i})$

第一步：分式线性映射 $w_1=k\,\dfrac{z}{z-2}$，可将 $z=0$ 映射为 $w_1=0$，$z=2$ 映射为 $w_1=\infty$，所以曲线 C_1 与 C_2 将被映射成 W_1 平面上的两条平行直线. 因为 $z=0\in C_1$ 上，所以 C_1 的象曲线 Γ_1 一定过 W_1 平面的原点. 我们令 $z=1+\mathrm{i}$ 映射为 $w_1=1$，则此时 Γ_1 必为实轴 $\Gamma_1=\{w_1;\ \mathrm{Im}w_1=0\}$. 以此代入 $w_1=k\,\dfrac{z}{z-2}$

中得出 k 的值：

$$1 = k\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}-2} = k\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1} = -\mathrm{i}k,\ k = \mathrm{i}$$

$$\therefore\quad w_1 = \mathrm{i}\frac{z}{z-2}$$

又因为 $z=-2$ 的象点为 $w_1 = \mathrm{i}\frac{-2}{-4} = \frac{\mathrm{i}}{2}$，所以映射 $w_1 = \mathrm{i}\frac{z}{z-2}$ 将曲线 C_2 映射成 W_1 平面上过点 $w_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}$，且平行于实轴的直线 $\Gamma_2 = \left\{w_2,\ \mathrm{Im}w_2 = \frac{1}{2}\right\}$. 因为 $z=-1$ 的象点为 $w_1 = \frac{\mathrm{i}}{3}$，它落在 D 的象区域 D_1 中，所以经映射 $w_1 = \mathrm{i}\frac{z}{z-2}$ 后，区域 D 的象区域 $D_1 = \left\{w_1;\ 0 < \mathrm{Im}w_1 < \frac{1}{2}\right\}$.

第二步：作 $w = \mathrm{e}^{2\pi w_1}$ 将 W_1 平面上带域 D_1 映射为 W 平面的上半平面 $G = \{w;\ \mathrm{Im}w > 0\}$.

复合上述两个保角映射 $w_1 = \mathrm{i}\frac{z}{z-2}$ 与 $w = \mathrm{e}^{2\pi w_1}$ 得

$$w = \mathrm{e}^{\frac{2\pi z\mathrm{i}}{z-2}}$$

这就是将 Z 平面上的区域 $D = \{z;\ |z| < 2 与 |z-1| > 1\}$ 映射为 W 平面的上半平面 $G = \{w;\ \mathrm{Im}w > 0\}$ 的一个保角映射(见图 6-44).

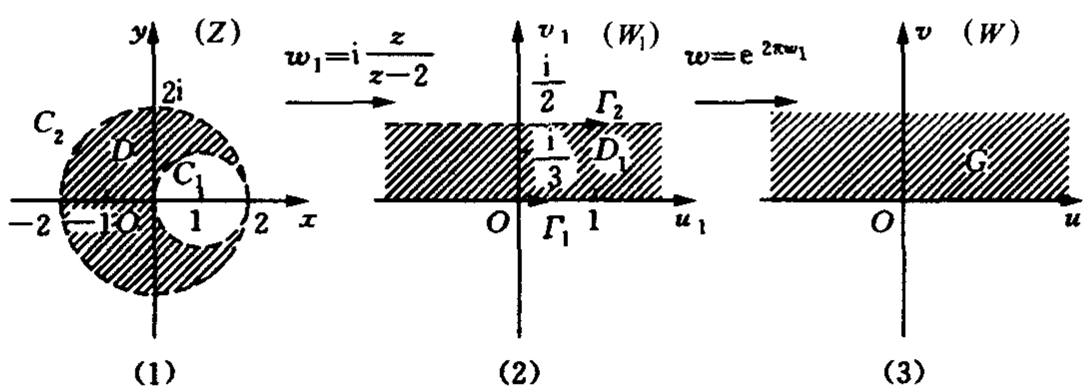


图 6-44

(2) 第一步：$w_1 = \frac{\pi}{a}z$ 将 Z 平面上半带域 $D = \{z;\ \mathrm{Re}z > 0,\ 0 < \mathrm{Im}z < a\}$ 映射为 W_1 平面上的半带域 $D_1 = \{w_1;\ \mathrm{Re}w_1 > 0,\ 0 < \mathrm{Im}w_1 < \pi\}$.

第二步：$w_2 = \mathrm{e}^{w_1}$ 将 W_1 平面上半带域 D_1 映射为 W_2 平面上区域 $D_2 = \{w_2;\ |w_2| > 1 且 \mathrm{Im}w_2 > 0\}$.

第三步：$w_3 = \dfrac{1}{w_2}$ 将 W_2 平面上区域 D_2 映射为 W_3 平面上区域 $D_3 = \{w_3;\ |w_3| < 1$ 且 $\mathrm{Im}w_3 < 0\}$.

第四步：$w_4 = \mathrm{i}\dfrac{1+w_3}{1-w_3}$ 将 W_3 平面上区域 D_3 映射为 W_4 平面上的第一象限 $D_4 = \{w_4;\ \mathrm{Re}w_4 > 0,\ \mathrm{Im}w_4 > 0\}$.

第五步：$w = w_4^2$ 将 W_4 平面上的第一象限 D_4 映射成 W 平面的上半平面 $G = \{w;\ \mathrm{Im}w > 0\}$.

复合上述几个保角映射：$w_1 = \dfrac{\pi}{a}z$，$w_2 = \mathrm{e}^{w_1}$，$w_3 = \dfrac{1}{w_2}$，$w_4 = \mathrm{i}\dfrac{1+w_3}{1-w_3}$，$w = w_4^2$，得到

$$w = -\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}z}+1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}z}-1}\right)^2 \quad 或 \quad w = -\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2a}z}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2a}z}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2a}z}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2a}z}}\right)^2 = -\frac{\mathrm{ch}^2\dfrac{\pi z}{2a}}{\mathrm{sh}^2\dfrac{\pi z}{2a}} = -\frac{1}{\mathrm{th}^2\frac{\pi z}{2a}}$$

这就是将 Z 平面上的半带域 $D = \{z;\ \mathrm{Re}z > 0,\ 0 < \mathrm{Im}z < a\}$ 映射为 W 平面的上半平面 $G = \{w;\ \mathrm{Im}w > 0\}$ 的一个保角映射(见图 6-45).

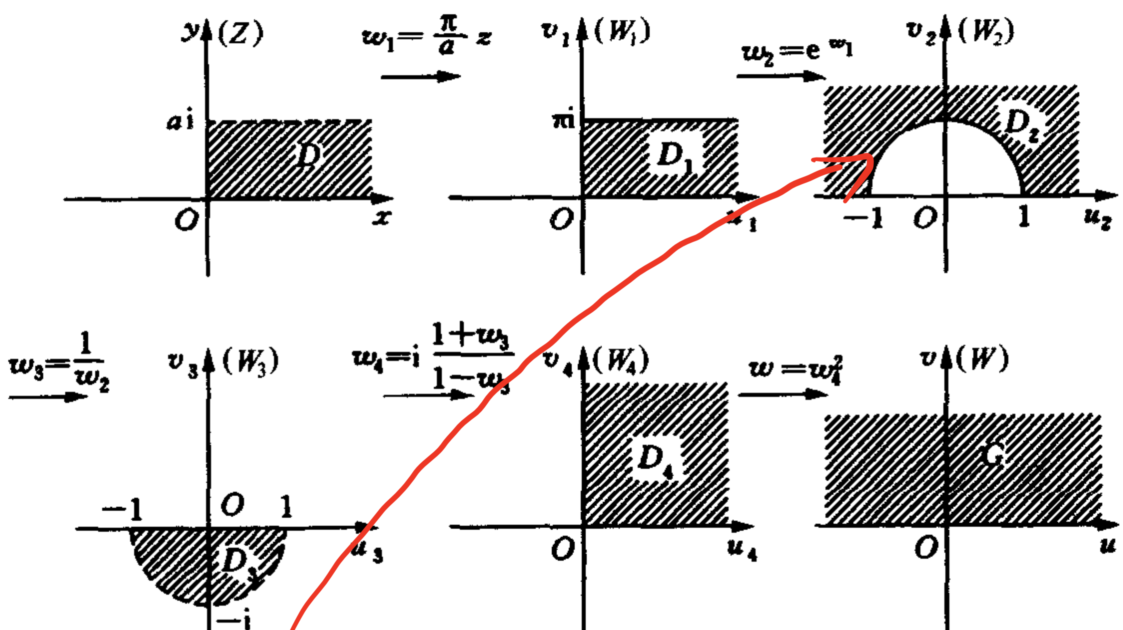


图 6-45

[注：该题自 $w_2 = \mathrm{e}^{w_1}$ 映射后，直接再做映射 $w = \dfrac{1}{2}\left(w_2 + \dfrac{1}{w_2}\right)$，复合而得 $w = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}z} + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}z}) = \mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{a}z$ 亦可.]

第七章　拉普拉斯变换

【基本要求】

(1) 了解拉普拉斯变换是一个积分变换.拉氏变换的存在性定理指出了满足一定条件的复值函数的拉氏变换必存在(它的证明涉及到复分析的知识,这正是本书将它列为复变函数的直接应用的原因之一).

(2) 了解拉氏变换的几个基本性质:线性性质、平移性质、微分性质、积分性质、极限性质、卷积性质等.学会对一个复值函数进行拉氏变换与对象函数进行拉氏逆变换,由这些性质可以导出基本初等函数的一些拉氏变换公式(了解"拉氏变换公式表"的出处).

(3) 了解拉氏逆变换的概念及其反演公式,了解如何用不同的方法求拉氏逆变换,特别是利用留数理论计算象原函数.

(4) 会应用"拉氏变换公式表"求一些函数的拉氏变换与拉氏逆变换.

(5) 作为拉氏变换的应用,要求能解常系数线性常微分方程的初值问题(通过拉氏变换将其转化为解象函数所满足的代数方程问题),能解常系数线性常微分方程组的初值问题和解某些微分、积分方程的初值问题.

【基本概念】

1. 拉氏变换的定义

对于复值函数 $f(t)$,若积分

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

在复平面$\mathbb{C}$上的某个区域 $D(s\in D)$内是收敛的，记为 $F(s)$，则称

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{7.1}$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯(Laplace)变换，简称拉氏变换 LT 或记为

$$L[f(t)]=F(s)$$

$F(s)$称为 $f(t)$的象函数，$f(t)$称为 $F(s)$的象原函数或拉氏逆变换 ILT，记为

$$L^{-1}[F(s)]=f(t)$$

例 1 证明 $L(e^{kt})=\dfrac{1}{s-k}$，其中 k 为复常数，$\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(k)$.

(7.2)

证 $L[e^{kt}]=\int_0^{\infty}e^{kt}\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-k)t}\,dt=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{R}e^{-(s-k)t}\,dt$

$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{e^{-(s-k)R}}{-(s-k)}+\frac{1}{s-k}=\frac{1}{s-k}$$

??

$$\left(\because\ \lim_{R\to+\infty}\left|\frac{e^{-(s-k)R}}{s-k}\right|=\lim_{R\to+\infty}\frac{e^{-\mathrm{Re}(s-k)R}}{\mathrm{Re}(s-k)}=0\right)$$

$$\therefore\ L[e^{kt}]=\frac{1}{s-k},\ \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(k)$$

例 2 证明 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$（称为单位阶跃函数），则 $L[u(t)]=\dfrac{1}{s}$. $(\mathrm{Re}(s)>0)$ $\quad L(u(t))=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}$

证 因为 $L[e^{kt}u(t)]=L(e^{kt})=\dfrac{1}{s-k}$ $(\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(k))$，特别

$\mathcal{L}[u(t-t_0)]=e^{-st_0}\cdot\frac{1}{s}$

当 $k=0$ 时，所以

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}\ (\mathrm{Re}(s) > 0) \tag{7.3}$$

（关于拉氏变换的存在性定理，见参考书目[1]，不再在此重述.）

2. 拉氏变换、拉氏逆变换的性质

关于拉氏变换与拉氏逆变换的性质（它们总是成对出现的）我们不在此一一证明，只把结果写于此. 这些性质对于导出拉氏变换的公式表起着非常重要的作用.（详见参考书目[1]）

(1) 线性性质

设 $L[f(t)] = F(s)$，$L[g(t)] = G(s)$，则

$$\begin{aligned} L[k_1 f(t) + k_2 g(t)] &= k_1 L[f(t)] + k_2 L[g(t)] \\ &= k_1 F(s) + k_2 G(s) \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}[k_1 F(s) + k_2 G(s)] &= k_1 L^{-1}[F(s)] + k_2 L^{-1}[G(s)] \\ &= k_1 f(t) + k_2 g(t) \end{aligned} \tag{7.5}$$

其中 k_1, k_2 为复常数.

$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT}\mathcal{L}[f(t)]$

(2) 平移性质

(1°) 时移性质（象原函数的平移）

$F(s) = e^{-sT}F(s)$

若 $L[f(t)] = F(s)$，则对于 $\tau > 0$，有

$$L[U(t-\tau)f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \tag{7.6}$$

其中 $U(t-\tau)$ 是单位阶跃函数的时移函数（$\tau \geqslant 0$）：

$$U(t-\tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau) \\ 1 & (t > \tau) \end{cases}$$

证 因为 $e^{-\tau s}F(s) = e^{-\tau s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-s(t+\tau)}\,dt$，令

$$u = t + \tau,\ t = u - \tau,\ dt = du.$$

$$\int_0^{+\infty} f(t+T)\,u(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t+T)e^{-st}dt = e^{sT}\int_0^{+\infty} f(t+T)\,e^{-s(t+T)}d(t+T)$$

$$= e^{sT}\int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

当 $t=0$ 时，$u=\tau$；$t=\infty$，$u=\infty$. 所以，上式为

$$F(s) = e^{sT}\left[F(s) - \int_0^T f(t)e^{-st}dt\right]$$

$$e^{-\tau s}F(s) = \int_{\tau}^{\infty} f(u-\tau)e^{-su}\,du$$

因为当 $u<\tau$ 时，$U(u-\tau)f(u-\tau)=0$；$u>\tau$ 时，$U(u-\tau)f(u-\tau)=f(u-\tau)$（见图 7-1），所以

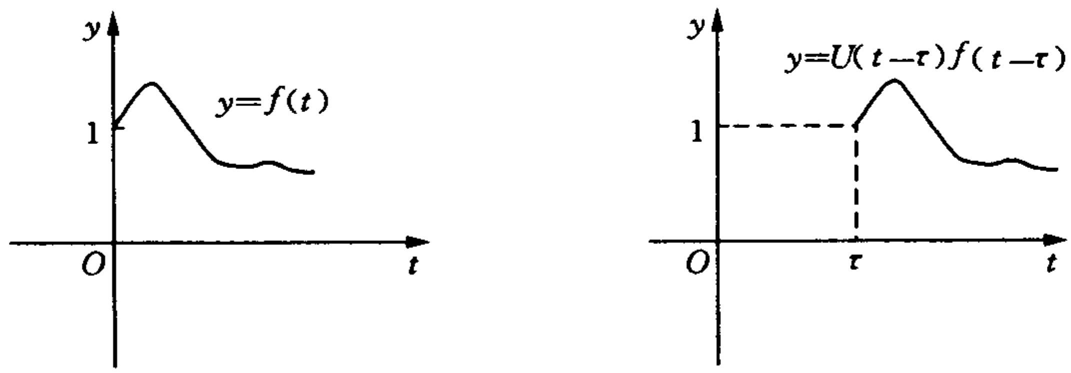


图 7-1　函数 $f(t)$ 与 $U(t-\tau)f(t-\tau)$ 的比较

$$e^{-\tau s}F(s) = \int_0^{\infty} U(u-\tau)f(u-\tau)e^{-su}\,du$$

$$= \int_0^{\infty} U(t-\tau)f(t-\tau)e^{-st}\,dt$$

以此导出周期函数 $f(t)$（以 T 为周期）的 LT 公式

$$L[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1-e^{-Ts}} \tag{7.7}$$

(7.6)式也可表示为

$$L^{-1}[e^{-\tau s}F(s)] = f(t-\tau)\ (\tau>0) \tag{7.6$'$}$$

(2°) 频移性质（象函数的平移）

若 $L[f(t)]=F(s)$，则对于任意常数 s_0，有

$$L[e^{s_0 t}f(t)] = F(s-s_0) \tag{7.8}$$

也有
$$L^{-1}[F(s-s_0)] = e^{s_0 t} f(t) \tag{7.8$'$}$$

(3) 微分性质

(1°) 象原函数的微分性质

设 $L[f(t)] = F(s)$，且 $f'(t)$ 也是象原函数，则
$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+) \tag{7.9}$$
其中 $f(0^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$. 可推广到 $f^{(k)}(t)$ $(k=1, 2, \cdots n)$ 为象原函数的情况
$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+) \tag{7.10}$$

(2°) 象函数的微分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$，则
$$L[(-t)^n f(t)] = F^{(n)}(s) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{7.11}$$
亦即
$$L^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-t)^n f(t) \tag{7.11$'$}$$

(4) 积分性质

(1°) 象原函数的积分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$，则
$$L\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{7.12}$$
可推广到积分 n 次情况
$$L\left[\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^{t_1} \mathrm{d}t \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s^n}F(s) \tag{7.13}$$

(2°) 象函数的积分性质

若 $L[f(t)] = F(s)$，积分 $\int_s^\infty F(u)\mathrm{d}u$ 收敛，则

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(u)\mathrm{d}u \tag{7.14}$$

亦即

$$L^{-1}\left[\int_s^{\infty}F(u)\mathrm{d}u\right]=\frac{f(t)}{t} \tag{7.14$'$}$$

（5）卷积性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，$L[g(t)]=G(s)$，则

$$L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=F(s)\cdot G(s) \tag{7.15}$$

亦即

$$L^{-1}[F(s)G(s)]=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7.15$'$}$$

$$\left(\text{或}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

由拉氏变换的性质首先导出了基本初等函数的拉氏变换公式，若 $L[f(t)]=F(s)$，则有下表。

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\dfrac{1}{s}$
2	e^{kt}	$\dfrac{1}{s-k}$
3	$t^m(m>-1)$	$\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$[注]
4	$t^m e^{kt}$	$\dfrac{\Gamma(m+1)}{(s-k)^{m+1}}$

［注］ 当 m 是 $\geqslant 1$ 的自然数时，$\Gamma(m+1)=m!$此时，$L[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}$．

$\mathcal{L}(\sin wt) = \frac{w^2}{w^2+s^2}$ $\mathcal{L}[\sin(w(t-t_0))] = e^{-st_0}\frac{w^2}{w^2+s^2}$

续 表

	$f(t)$	$F(s)$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
7	$\mathrm{ch}at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
8	$\mathrm{sh}at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

$= (-1)^n \mathcal{L}[(-t)^n e^{at}] = (-1)^n \frac{d}{ds}\mathcal{L}(e^{at}) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{s-a}\right)^{(n)}$
$= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

例 3 求 $L[t^n e^{at}]$.（n 为 $\geqslant 1$ 的自然数）

解 设 $f(t) = t^n$，则 $F(s) = L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$，再利用公式(7.8)，得

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

$$\therefore \quad L[t^n \cdot e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

例 4 已知 $F(s) = \frac{s^3 - 4s + 1}{s(s-1)^3}$，求 $L^{-1}[F(s)]$. $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s-1)^3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-1)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^3}\right]$

解 设 $= \frac{s^2}{(s-1)^3} - \frac{4}{(s-1)^3} + \frac{1}{s(s-1)^3}$

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s}.$$

$\frac{e^{st}}{s(s-1)^3}$

用与(5.16)式相类似的留数方法分解 $F(s)$ 成部分分式，则

$$A = \operatorname{Res}[F(s);\ 1]$$

$= \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}(s^2 e^{st})\Big|_{s=1} - \frac{4}{2!}t^2e^t + (-1) + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{e^{st}}{s}\right]$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}[(s-1)^3 F(s)] = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^3-4s+1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2 - 4 + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\left(2 + \frac{2}{s^3}\right) = 2$$

$$B = \operatorname{Res}[(s-1)F(s);\ 1]$$ $\frac{d^2[s^2 e^{st}]}{ds^2}$

$=$

$$= \lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^2-4+\frac{1}{s}\right)=\lim_{s\to 1}\left(2s-\frac{1}{s^2}\right)=1$$

$$C=\mathrm{Res}[(s-1)^2F(s);\ 1]=\lim_{s\to 1}\left(s^2-4+\frac{1}{s}\right)=-2$$

$$D=\mathrm{Res}[F(s);\ 0]=\lim_{s\to 0}\frac{s^3-4s+1}{(s-1)^3}=-1$$

$$\therefore\quad F(s)=\frac{s^3-4s+1}{s(s-1)^3}=\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{1}{s}$$

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{s^3-4s+1}{s(s-1)^3}\right]=2L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{2!}{(s-1)^3}\right]-L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=2\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t-t^2\mathrm{e}^t-1$$

3. 拉氏逆变换

定理 7.1 若复值函数 $f(t)$满足 LT 存在定理条件，则在$f(t)$的任意连续点处，都有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{7.16}$$

其中 $\mathrm{Re}(s)=\sigma>\sigma_0$，$\sigma_0$ 为 $f(t)$ 的增长指数.

已知象函数去求象原函数，除了可运用 LT 表及拉氏变换性质外，还可用卷积定理及留数方法.

定理 7.2 若 $F(s)$的全部奇点 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 都在 $\mathrm{Re}(s)<\sigma$ 内，且当 s 在 $\mathrm{Re}(s)\leqslant\sigma$ 上趋于无穷时，$F(s)$趋于零，则

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st};\ s_k]\quad(t>0) \tag{7.17}$$

（证明从略. 参见参考书目[1]）.

例 5 求 $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)}\right]$.

解 $s=0$ 是 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ 的二级极点，$s=-1$ 是 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ 的单极点.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st};0] &= \mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+1)};0\right]=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+1)}\right]\\ &=\lim_{s\to 0}\frac{[(s+1)t-1]\mathrm{e}^{st}}{(s+1)^2}=t-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st};-1] &= \mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+1)};-1\right]\\ &=\lim_{s\to -1}(s+1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+1)}=\mathrm{e}^{-t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(t) &= \mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st};0]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st};-1]\\ &=t-1+\mathrm{e}^{t}.\end{aligned}$$

定理 7.3 （展开定理）如果函数 $F(s)$ 在无穷远点 ∞ 处解析，且 $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$，即 $F(s)$ 在 $\{Z;R<|Z|<\infty\}$ 内的罗朗展开式为

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}}$$

则

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n \tag{7.18}$$

4. 拉氏变换的应用

一个未知函数所满足的常微分方程初值问题与两个未知函数所满足的微分方程组的初值问题经过拉氏变换后，转化为它的象函数所满足的代数方程与代数方程组，解此代数方程与代数方程组，然后再经拉氏逆变换就得到原方程与原方程组的解. 这种方法常常在电

路理论与自动控制理论的线性系统中应用.

（1）求常系数线性常微分方程的初值问题

例 6 求解微分方程：

$$y''(t)+y(t)=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$$

解 设 $L[y(t)]=Y(s)$，所以

$$L[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)-2$$

$$L[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-2s-3$$

对方程两边进行 LT，得

$$s^2Y(s)-2s-3+Y(s)=0$$

则 $(s^2+1)Y(s)=2s+3 \Rightarrow Y(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+1}=2\dfrac{s}{s^2+1}+3\dfrac{1}{s^2+1}$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=2L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+3L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$=2\cos t+3\sin t.$$

例 7 求解微分方程：

$$y''(t)+y(t)=u(t-\pi),\ y(0)=y'(0)=0$$

设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边进行 LT，得

$$(s^2+1)Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

则

$$Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$y(t)=L'^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s}\right)-L^{-1}\left[e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=u(t-\pi)-u(t-\pi)\cos(t-\pi)$$

$$=\begin{cases}0, & t<\pi;\\ 1-\cos t, & t>\pi.\end{cases}$$

(2) 解非常系数线性常微分方程的初值问题

例 8 求解微分方程：

$$ty''(t)-ty'(t)-y(t)=0\ (y(0)=0)$$

解 设 $L[y(t)]=Y(s)$，由公式(7.11)和(7.9)得

$$\because\quad L[ty(t)]=-Y'(s)$$

$$L[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)$$

$$L[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

$$\therefore\quad L[ty'(t)]=-[sY(s)-y(0)]'=-sY'(s)-Y(s)$$

$$\begin{aligned}L[ty''(t)]&=-[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]'\\&=-s^2Y'(s)-2sY(s)+y(0)\\&=-s^2Y'(s)-2sY(s)\end{aligned}$$

方程两边取 LT，得

$$-s^2Y'(s)-2sY(s)+[sY'(s)+Y(s)]-Y(s)=0$$

$$-s(s-1)Y'(s)-2sY(s)=0$$

$$Y'(s)+\frac{2}{s-1}Y(s)=0\ (\text{转化成全微分形式的微分方程})$$

$$\begin{aligned}\because\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-1)^2Y(s)]&=(s-1)^2Y'(s)+2(s-1)Y(s)\\&=(s-1)[(s-1)Y'(s)+2Y(s)]=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (s-1)^2Y(s)=c\ (\text{常数})$$

$$Y(s)=\frac{c}{(s-1)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{c}{(s-1)^2}\right]=cte^t.$$

(3) 解微分方程组的初值问题

例 9 求解微分方程组：

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - x(t) \\ x'(t) = 5y(t) - 3x(t) \end{cases} \quad y(0) = 1, \ x(0) = 2$$

解 设 $L[y(t)] = Y(s)$, $L[x(t)] = X(s)$,对方程组两边取LT,得

$$\begin{cases} sY(s) - y(0) = Y(s) - X(s) \\ sX(s) - x(0) = 5Y(s) - 3X(s) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-1)Y(s) + X(s) = 1 \\ 5Y(s) - (s+3)X(s) = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -(s+3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ 5 & -(s+3) \end{vmatrix}} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ 5 & -(s+3) \end{vmatrix}} = \frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+1}$$

取ILT,得

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\cos t$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+1}\right] = 2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t.$$

【习题及解答】

1. 求下列函数的拉氏变换

(1) $f(t) = \sin t \cos t$; (2) $f(t) = \operatorname{sh} at$;

(3) $f(t) = \cos^2 t$; (4) $f(t) = t^2$.

解 (1) ∵ $f(t)=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$,

$$\therefore\quad L[f(t)]=\frac{1}{2}L[\sin 2t]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{1}{s^2+4}.$$

(2) $L(\mathrm{sh}at)=L\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right]=\frac{1}{2}[L(e^{at})-L(e^{-at})]$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2-a^2}.$$

(3) ∵ $f(t)=\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$

$$\because\quad L[f(t)]=\frac{1}{2}[L(1+\cos 2t)]=\frac{1}{2}[L(1)+L(\cos 2t)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right]=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

(4) $L[f(t)]=L(t^2)=\frac{2}{s^3}$.

2. 求下列函数的拉氏变换

(1) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant\pi;\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 1, & 1<t<2;\\ 0, & t\geqslant 2.\end{cases}$

解 (1) $L[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\pi}\sin t e^{-st}\,dt$

$$=\frac{-1}{s^2+1}(e^{-st}\cos t+se^{-st}\sin t)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{s^2+1}(e^{-\pi s}+1).$$

(2) $L[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt=\int_1^{2}e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2=\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})$.

(Re$s>0$)

3. 求下列函数的象原函数

(1) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$; (2) $F(s)=\frac{s}{(s+3)(s+5)}$;

(3) $F(s)=\frac{s^3-s^2+s-1}{s^5}$.

解 (1) $f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{1}{2}\sin 2t.$

(2) ∵ $F(s)=\frac{s}{(s+3)(s+5)}=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{s+5}-\frac{3}{s+3}\right]$

∴ $f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{s}{(s+3)(s+5)}\right]$

$$=\frac{5}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right)-\frac{3}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)=\frac{1}{2}(5e^{-5t}-3e^{-3t}).$$

(3) ∵ $F(s)=\frac{s^3-s^2+s-1}{s^5}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^5}$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2!}\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{3!}\frac{3!}{s^4}-\frac{1}{4!}\frac{4!}{s^5}$$

∴ $f(t)=L^{-1}\left[\frac{s^3-s^2+s-1}{s^5}\right]$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{2!}L^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right)+\frac{1}{3!}L^{-1}\left(\frac{3!}{s^4}\right)-\frac{1}{4!}L^{-1}\left(\frac{4!}{s^5}\right)$$

$$=t-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{4!}t^4.$$

4. 证明 LT 相似性质. 即设 $L[f(t)]=F(s)$，则

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\ (a>0).$$

证 设 $L[f(t)]=F(s)$，由定义

$$L[f(at)]=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt.\ \left(令\ at=u,\ t=\frac{u}{a},\ dt=\frac{du}{a}.\right)$$

$$=\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\cdot\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}du=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

5. 求下列函数的拉氏变换

(1) $f(t)=1-te^t$；　(2) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at$；

(3) $f(t)=e^{-2t}\sin 5t$；　(4) $f(t)=u(3t-4)$；

(5) $f(t)=t^2u(t-1)$；　(6) $f(t)=t^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}$；

(7) $f(t)=(t+1)^n$（n 是一个正整数）；　(8) $f(t)=u(t-1)u(t-2)$；

(9) $f(t)=u(t-2)\sin t$.

解 (1) $f(t)=1-te^t$,

$$F(s)=L[f(t)]=L(1-te^t)=L(1)-L(te^t)$$

$$=\frac{1}{s}+L[(-t)e^t] \quad (\text{由 LT 的微分性质(7.11)})$$

$$=\frac{1}{s}+[L(e^t)]'_s=\frac{1}{s}+\left(\frac{1}{s-1}\right)'=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}.$$

(2) $f(t)=\dfrac{t}{2a}\sin at=-\dfrac{1}{2a}[(-t)\sin at]$

$$F(s)=L[f(t)]=L\left[\frac{t}{2a}\sin at\right]=-\frac{1}{2a}L^{-1}[(-t)\sin at]$$

$$=-\frac{1}{2a}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'=-\frac{1}{2a}\cdot\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}.$$

(3) $f(t)=e^{-2t}\sin 5t$

$$F(s)=L[f(t)]=L(e^{-2t}\sin 5t) \quad (\text{由频移性质(7.8)式})$$

$$=\frac{5}{(s+2)^2+5^2}.$$

(4) $f(t)=u(3t-4)$

$$u(3t-4)=\begin{cases}1, & t>\dfrac{4}{3};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(s)=L[f(t)]=L[u(3t-4)]$$

$$=\int_0^{\infty}u(3t-4)e^{-st}\,dt=\int_{\frac{4}{3}}^{\infty}e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}e^{-\frac{4}{3}s}.$$

(5) $f(t)=t^2u(t-1)=(-t)^2u(t-1)$

$$F(s)=L[f(t)]=L[t^2u(t-1)]$$

$$=L[(-t)^2u(t-1)] \quad (\text{由微分性质(7.11)式})$$

$$=(L[u(t-1)])''_s \quad (\text{由时移性质})$$

$$=\left(\frac{1}{s}e^{-s}\right)''=\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s}.$$

(6) $f(t)=t^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}$

$$F(s) = L[f(t)] = L[t^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda t}]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{(s+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(s+\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$（由频移性质(7.8)式）

（7）$f(t) = (t+1)^n$ （n 是一个正整数）

$$= t^n + nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} + \cdots + nt + 1$$

$$= n!\frac{t^n}{n!} + n!\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+ \frac{n!}{3!}\frac{t^{n-3}}{(n-3)!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!}t + \frac{n!}{n!}1$$

$$= n!\left[\frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{2!}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{3!}\frac{t^{n-3}}{(n-3)!} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!}t + \frac{1}{n!}\cdot 1\right],$$

$\because$ $L\left(\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{1}{s^{k+1}}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$\therefore$ $F(s) = L[f(t)] = L[(t+1)^n]$

$$= n!\left(\frac{1}{s^{n+1}} + \frac{1}{s^n} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^{n-1}} + \frac{1}{3!}\frac{1}{s^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{n!s}\right).$$

（8）$\because$ $f(t) = u(t-1)u(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$

$\therefore$ $u(t-1)u(t-2) = u(t-2)$

$$F(s) = L[f(t)] = L[u(t-1)u(t-2)]$$

$$= L[u(t-2)] = \frac{1}{s}e^{-2s}$$（由时移性质(7.6)式）

（9）$f(t) = u(t-2)\sin t$，由定义

$$F(s) = L[f(t)] = L[u(t-2)\sin t] = \int_0^{\infty} u(t-2)\sin t e^{-st}\,dt$$

$$= \int_2^{\infty} \sin t e^{-st}\,dt = \frac{-1}{s^2+1}[(\cos t + s\sin t)e^{-st}]\Big|_2^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2+1}(\cos 2 + s\sin 2)e^{-2s}.$$

6. 求下列周期函数的拉氏变换

(1) $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $0 < t < 2$, $f(t) = f(t+2)$;

(2) 图 7-2 中所示的单位脉冲函数.

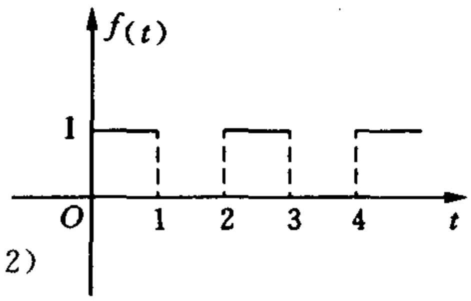


图 7-2

解 (1) 周期函数 $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $(0 < t < 2)$

$f(t) = f(t+2)$,周期 $T = 2$

$$L[f(t)] = \frac{\int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-2s}} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\int_0^2 \mathrm{e}^{-(s+1)t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{-1}{(1-\mathrm{e}^{-2s})(s+1)}\mathrm{e}^{-(s+1)t}\Big|_0^2 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2(s+1)}}{(1-\mathrm{e}^{-2s})(s+1)}.$$

(2) 图 7-2 中所示周期函数表达式为

$$f(t) = f_1(t),\ (0 < t < 2)\ 且\ f(t) = f(t+2),\ (t > 2)$$

周期 $T = 2$.

$$f_1(t) = \begin{cases} 1,\ 0 < t < 1; \\ 0,\ 1 < t < 2; \\ 0,\ 其他. \end{cases}$$

由公式(7.7)知

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{\int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-2s}} = \frac{\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-s})}{1-\mathrm{e}^{-2s}} = \frac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}.$$

7. 利用(7.2.22)式求下列积分值

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\,\mathrm{d}t$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})\,\mathrm{d}t$, $(a > 0,\ b > 0)$.

解 (1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} L(\sin wt)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\infty} \frac{w}{s^2+w^2}\,\mathrm{d}s = \arctan\frac{s}{w}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$

(2) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})\,\mathrm{d}t\ (a > 0,\ b > 0) = \int_0^{+\infty} [L(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})]\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{+\infty} [L(\mathrm{e}^{-at}) - L(\mathrm{e}^{-bt})]\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\ln\frac{s+a}{s+b}\Big|_0^{\infty}=-\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a}.$$

8. 求下列函数的象函数

(1) $f(t)=\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$;　　(2) $f(t)=t\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$;

(3) $f(t)=\int_0^t \frac{e^{-x}\sin x}{x}dx$;　　(4) $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$;

(5) $f(t)=\int_0^t e^{-3x}\sin 2x\,dx$.

解 (1) $f(t)=\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$

$$F(s)=L\left[\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx\right]\text{（由积分性质(7.12)式）}$$

$$=\frac{1}{s}L(e^{-t}\sin t)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}=\frac{1}{s[(s+1)^2+1]}.$$

(2) $f(t)=t\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx=-(-t)\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$

$$F(s)=L\left[t\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx\right]$$

$$=-L\left[(-t)\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx\right]\text{（由微分性质(7.11)式）}$$

$$=-\left[L\left(\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx\right)\right]_s'\text{（由第(1)题结果）}$$

$$=-\left(\frac{1}{s[(s+1)^2+1]}\right)'=\frac{3s^2+4s+2}{s^2[(s+1)^2+1]^2}.$$

(3) $f(t)=\int_0^t \frac{e^{-x}\sin x}{x}dx$

$$F(s)=L\left[\int_0^t \frac{e^{-x}\sin x}{x}dx\right]=\frac{1}{s}L\left(\frac{e^{-t}\sin t}{t}\right)\text{（由积分性质(7.14)式）}$$

$$= \frac{1}{s}\int_s^{\infty} L(e^{-t}\sin t)ds = \frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{1}{(s+1)^2+1}ds = \frac{1}{s}[\arctan(s+1)]\Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)\right].$$

(4) $f(t) = te^{-3t}\cdot\sin 2t$

$$F(s) = L[f(t)] = L[te^{-3t}\cdot\sin 2t] = -L[(-t)e^{-3t}\cdot\sin 2t]$$

$$= -[L(e^{-3t}\sin 2t)]_s' = -\left[\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right]' = \frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}.$$

(5) $f(t) = \int_0^t e^{-3x}\sin 2x dx$

$$F(s) = L[f(t)] = L\left(\int_0^t e^{-3x}\sin 2x dx\right) = \frac{1}{s}L(e^{-3x}\cdot\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{s}\frac{2}{(s+3)^2+2^2} = \frac{2}{s[(s+3)^2+4]}.$$

9. 求下列函数的拉氏逆变换

(1) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$； (2) $F(s) = \dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$；

(3) $F(s) = \dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$； (4) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s^2+1)}$；

(5) $F(s) = \ln\dfrac{s+1}{s-1}$； (6) $F(s) = \ln\dfrac{s^2+1}{s^2}$；

(7) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$； (8) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$.

解 (1) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$，其中 $s_k = k\ (k=1, 2, 3)$ 是 $F(s)$ 的单极点，所以

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s-2)(s-3)};\ s_k\right]$$

$$= \frac{e^t}{(-1)\times(-2)} + \frac{e^{2t}}{1\times(-1)} + \frac{e^{3t}}{2\times 1}$$

$$= \frac{e^t}{2} - e^{2t} + \frac{e^{3t}}{2}.$$

(2) $F(s) = \dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$

$\because \quad \dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+2s+5}$

$$\therefore \quad 5s+3 = A(s^2+2s+5) + (s-1)(Bs+C)$$
$$= (A+B)s^2 + (2A-B+C)s + 5A - C$$

比较两边 s 的同次幂系数，定出 A,B,C：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B+C=5 \\ 5A-C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{-s+2}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{3}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$
$$= L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] + \frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]$$
$$= e^t - e^{-t}\cdot\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

(3) $F(s) = \dfrac{s}{s^4+5s^2+4} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+4}\right)$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{3}\left[L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

(4) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s^2+1)} = e^{-s}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}\right) = \dfrac{e^{-s}}{s} - e^{-s}\dfrac{s}{s^2+1}$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) - L^{-1}\left(e^{-s}\frac{s}{s^2+1}\right)$$
$$= u(t-1) - \cos(t-1)u(t-1).$$

(5) $F(s) = \ln\dfrac{s+1}{s-1}$

$$=-\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du\text{（由象函数的积分性质(7.14)式）}$$

$$=-L\left[\frac{g(t)}{t}\right].$$

其中 $g(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)=e^{-t}-e^{t}$

$$\therefore\quad F(s)=-L\left[\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}\right]=L\left(\frac{e^{t}-e^{-t}}{t}\right)$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=-\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}=\frac{e^{t}-e^{-t}}{t}=2\,\frac{\operatorname{sh}t}{t}$$

(6) $F(s)=\ln\frac{s^2+1}{s^2}=-2\int_s^{\infty}\left(\frac{u}{u^2+1}-\frac{1}{u}\right)du$

（由积分性质(7.14)式）

$$\because\quad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}\right)=\cos t-1$$

$$\therefore\quad F(s)=-2L\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)=L\left[\frac{2(1-\cos t)}{t}\right],$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=-2\cdot\frac{\cos t-1}{t}=\frac{2}{t}(1-\cos t).$$

(7) $F(s)=\frac{s}{(s^2+4)^2}=-\frac{1}{4}\,\frac{-4s}{(s^2+4)^2}=\frac{-1}{4}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)'$

$$\because\quad L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\sin 2t\ \left(\text{由微分性质有 }L[(-t)\sin 2t]=\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)'\right)$$

$$\therefore\quad L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[-\frac{1}{4}\,\frac{s}{(s+4)^2}\right]=\frac{-1}{4}L^{-1}\left[\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)'\right]$$

$$=-\frac{1}{4}(-t)\sin 2t=\frac{t}{4}\sin 2t.$$

(8) $F(s)=\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2}\right]$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)\right]=\frac{1}{2}(\sin t-te^{-t})$$

10. **求下列函数的卷积**

(1) $\sin t*\cos t$;　　　　(2) $t*e^{t}$;

(3) $f(t) * u(t-a)$，$(a>0)$； (4) $t * \mathrm{sh}t$.

解 (1) $\sin t * \cos t = \int_0^t \sin\tau \cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\sin[\tau+(t-\tau)]+\sin[\tau-(t-\tau)]\}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(2\tau - t)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\tau - t)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{4}\cos(2\tau - t)\Big|_0^t$$

$$= \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{4}[\cos t - \cos(-t)] = \frac{t}{2}\sin t.$$

(2) $t * \mathrm{e}^t = \int_0^t \tau \mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^t\int_0^t \tau\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau$

$$= -\mathrm{e}^t\int_0^t \tau\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\tau} = -\mathrm{e}^t\left[\tau e^{-\tau}\Big|_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= -\mathrm{e}^t[t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} - 1] = \mathrm{e}^t - t - 1.$$

(3) $f(t) * u(t-a) = u(t-a) * f(t) = \int_0^t u(\tau - a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= \begin{cases} 0, & t<a; \\ \int_a^t f(t-\tau)a\tau, & t \geqslant a. \end{cases}$$

(4) $t * \mathrm{sh}t = \mathrm{sh}t * t = \int_0^t \mathrm{sh}\tau(t-\tau)\mathrm{d}\tau = t\int_0^t \mathrm{sh}\tau\mathrm{d}\tau - \int_0^t \tau\mathrm{sh}\tau\mathrm{d}\tau$

$$= t\mathrm{ch}\tau\Big|_0^t - \tau\mathrm{ch}\tau\Big|_0^t + \int_0^t \mathrm{ch}\tau\mathrm{d}\tau = t(\mathrm{ch}t - 1) - t\mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t$$

$$= \mathrm{sh}t - t.$$

11. 求下列微分方程的解

(1) $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{-t}$，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$；

(2) $y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;

(3) $y'' - 2y' + 2y = 2e^t\cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$;

(4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0$, $y''(0) = 1$;

(5) $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 4; \\ 0, & t > 4. \end{cases}$ $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

解 (1) $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

设 $L[y(t)] = Y(s)$, $L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s)$

$L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$

方程两边取 LT,得

$$s^2Y(s) - 1 + 2sY(s) - 3Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 2s - 3)Y(s) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+2s-3)} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

$s_1 = -1$, $s_2 = 1$, $s_3 = -3$ 为 $Y(s)$ 的三个单极点,则

$$\begin{aligned} y(t) = L^{-1}[Y(s)] &= \sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}[Y(s)e^{st};\ s_k] \\ &= \mathrm{Res}\left[\frac{(s+2)e^{st}}{(s+1)(s-1)(s+3)};\ -1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{(s+2)e^{st}}{(s+1)(s-1)(s+3)};\ 1\right] \\ &\quad + \mathrm{Res}\left[\frac{(s+2)e^{st}}{(s+1)(s-1)(s+3)};\ -3\right] \\ &= \frac{e^{-t}}{(-2)\times 2} + \frac{3e^t}{2\times 4} + \frac{-e^{-3t}}{(-2)\times(-4)} \\ &= -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-3t}. \end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t \\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2 \end{cases}$

设 $L[y(t)] = Y(s)$, $L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) + 1$

$L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) + s + 2$

方程两边取 LT,得

$$s^2Y(s)+s+2-Y(s)=4\frac{1}{s^2+1}+5\frac{s}{s^2+2^2}$$

$$(s^2-1)Y(s)=\frac{4}{s^2+1}+\frac{5s}{s^2+2^2}-(s+2)$$

$$Y(s)=\frac{4}{(s^2-1)(s^2+1)}+\frac{5s}{(s^2-1)(s^2+2^2)}-\frac{s+2}{s^2-1}$$

$$=2\left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+1}\right)+s\left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+2^2}\right)-\frac{s}{s^2-1}-\frac{2}{s^2-1}$$

$$=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+2^2}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-2\sin t-\cos 2t.$$

(3) $\begin{cases} y''-2y'+2y=2e^t\cos t \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

令 $L[y(t)]=Y(s)$,方程两边取 LT.

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=2\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$(s^2-2s+2)Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}=-\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]'$$

因为由 LT 的象函数微分性质知,如果 $L[f(t)]=F(s)$,则

$L[(-t)f(t)]=F'(s)$,即 $L^{-1}[F'(s)]=-tf(t)=(-t)L^{-1}[F(s)]$

$\because\quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]=e^t\sin t$

$\therefore\quad L^{-1}\left\{\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right\}=-L^{-1}\left[\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)'\right]$

$$=-(-t)L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]=te^t\sin t.$$

(4) $\begin{cases} y^{(4)}+2y''+y=0 \\ y(0)=y'(0)=y'''(0)=0,\ y''(0)=1 \end{cases}$

设 $L[y(t)]=Y(s)$,则

$$L[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)$$

$$L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$
$$L[y'''(t)] = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3Y(s) - 1$$
$$L[y^{(4)}(t)] = s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)$$
$$= s^4Y(s) - s$$

方程两边取 LT,得

$$s^4Y(s) - s + 2s^2Y(s) + Y(s) = 0$$
$$(s^4 + 2s^2 + 1)Y(s) = s$$
$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$$

$$\therefore\quad y(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right] = \frac{1}{2}t\sin t$$

(5) $y'' + 4y = \begin{cases} 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 4; \\ 0,\ t > 4, \end{cases}$ $y(0) = 3,\ y'(0) = -2$

方程两边取 LT(令 $L[y(t)] = Y(s)$),

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \int_0^4 e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-4s})$$

$$(s^2+4)Y(s) - 3s + 2 = \frac{1}{s}(1 - e^{-4s})$$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-4s}}{s(s^2+4)} + \frac{3s-2}{s^2+4}$$
$$= \frac{1}{s(s^2+4)} + \frac{3s-2}{s^2+4} - e^{-4s}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) + 3\,\frac{s}{s^2+2^2} - \frac{2}{s^2+2^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-4s}}{s} - \frac{se^{-4s}}{s^2+2^2}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) + 3\cos 2t - \sin 2t$$
$$- \frac{1}{4}[1 - \cos 2(t-4)]u(t-4)$$

12. 求下列积分方程的解

(1) $y(t) + \int_0^t y(t-u)e^u\,du = 2t - 3$;

(2) $y(t) - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau = t$.

解 （1）令 $L[y(t)] = Y(s)$，对积分方程

$$y(t) + \int_0^t y(t-u)e^u du = 2t - 3 \quad 即\ y(t) + y(t) * e^t = 2t - 3$$

两边取 LT 得

$$Y(s) + Y(s) \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s}$$

$$Y(s)\left[1 + \frac{1}{s-1}\right] = \frac{2-3s}{s^2},$$

$$Y(s) = \frac{(2-3s)(s-1)}{s^3} = \frac{-3s^2+5s-2}{s^3} = -\frac{3}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{2}{s^3}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -3L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 5L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right)$$

$$= -3 + 5t - t^2.$$

（2）令 $L[y(t)] = Y(s)$，对积分方程

$$y(t) - \int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = t \quad 即\ y(t) - t * y(t) = t$$

两边取 LT 得

$$Y(s) - \frac{1}{s^2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right) = \operatorname{sh} t.$$

13. **求下列微分方程组的解.**

（1）$\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' + 3x - 2y = 2e^t \end{cases} x(0) = y(0) = 1;$

（2）$\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0 \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 \end{cases}$

$x(0) = x'(0) = 1,\ y(0) = y'(0) = 0;$

（3）$\begin{cases} x'' + 2x + \int_0^t y(t)dt = t, \\ x'' + 2x' + y = \sin 2t, \end{cases} x(0) = 1,\ x'(0) = -1;$

(4) $\begin{cases} y' - 2z' = f(t) \\ y'' - z'' + z = 0 \end{cases}$ $y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$

解 (1) $\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' + 3x - 2y = 2e^t \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$

设 $L[x(t)] = X(s)$, $L[y(t)] = Y(s)$

$L[x'(t)] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$

$L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$

微分方程组两式的两边取 LT,得一个 $X(s)$ 与 $Y(s)$ 的二元一次方程组

$$\begin{cases} sX(s) - 1 + X(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1}, \\ sY(s) - 1 + 3X(s) - 2Y(s) = \dfrac{2}{s-1} \end{cases}$$

或 $\begin{cases} (s+1)X(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 = \dfrac{s}{s-1}, \text{即 } Y(s) = (s+1)X(s) - \dfrac{s}{s-1} & \text{(i)} \\ 3X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{2}{s-1} + 1 = \dfrac{s+1}{s-1} & \text{(ii)} \end{cases}$

(i) 式代入(ii) 式,得

$$3X(s) + (s-2)\left[(s+1)X(s) - \frac{s}{s-1}\right] = \frac{s+1}{s-1}$$

$$(s^2 - s + 1)X(s) = \frac{s+1}{s-1} + \frac{s(s-2)}{s-1} = \frac{s^2 - s + 1}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-1}, \tag{iii}$$

所以有 $x(t) = e^t$. (iii) 代入(i) 得

$$Y(s) = (s+1)\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s+1} = \frac{1}{s-1}$$

$$\therefore \quad y(t) = e^t$$

(2) $\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0 \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 \end{cases}$

$$x(0) = x'(0) = 1,\ y(0) = y'(0) = 0$$

设 $L[x(t)] = X(s)$, $L[y(t)] = Y(s)$,微分方程组两边取 LT,得

$$\begin{cases} 2[s^2X(s) - s - 1] - [sX(s) - 1] + 9X(s) - [s^2Y(s) + sY(s) + 3Y(s)] = 0 \\ 2[s^2X(s) - s - 1] + [sX(s) - 1] + 7X(s) - [s^2Y(s) - sY(s) + 5Y(s)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(2s^2-s+9)X(s)-2s-1-(s^2+s+3)Y(s)=0 & \text{(i)}\\(2s^2+s+7)X(s)-2s-3-(s^2+s+5)Y(s)=0 & \text{(ii)}\end{cases}$$

(i)−(ii)得

$$X(s)=\frac{1}{s-1}-Y(s) \tag{iii}$$

(iii) 代入(i) 得

$$(2s^2-s+9)\left[\frac{1}{s-1}-Y(s)\right]-(s^2+s+3)Y(s)=2s+1$$

$$3(s^2+4)Y(s)=\frac{2s^2-s+9}{s-1}-(2s+1)=\frac{10}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{10}{3}\frac{1}{(s-1)(s^2+4)}=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{s^2+4}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+2^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\right] \tag{iv}$$

$$\therefore\quad y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{3}(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t) \tag{v}$$

(iv) 代入(iii) 得

$$X(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+2^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{s-1}+\frac{2}{3}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]+\frac{1}{3}\frac{2}{s^2+2^2}$$

$$\therefore\quad x(t)=L^{-1}[X(s)]=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t)$$

(3) $\begin{cases}x''+2x+\int_0^t y(\tau)d\tau=t\\x''+2x'+y=\sin 2t,\end{cases}\quad x(0)=1,\ x'(0)=-1,\ y(0)=4$

设 $L[x(t)]=X(s),\ L[y(t)]=Y(s)$

$L[x'(t)]=sX(s)-x(0)=sX(s)-1$

$L[x''(t)]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-s+1$

$L[\int_0^t y(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}Y(s)$

微分积分方程组两边取 LT,得

$$\begin{cases} s^2X(s)-s+1+2X(s)+\dfrac{1}{s}Y(s)=\dfrac{1}{s^2} \\ s^2X(s)-s+1+2[sX(s)-1]+Y(s)=\dfrac{2}{s^2+2^2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s^2+2)X(s)+\dfrac{1}{s}Y(s)=\dfrac{1}{s^2}+s-1 & \text{(i)} \\ (s^2+2s)X(s)+Y(s)=\dfrac{2}{s^2+2^2}+s+1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(i) $\times s-$ (ii) 得

$$(s^3+2s-s^2-2s)X(s)=\frac{1}{s}+s^2-s-\frac{2}{s^2+2^2}-s+1$$

$$=\frac{s^5-2s^4+3s^3-7s^2-6s+4}{s(s^2+2^2)}$$

$$s^2(s-1)X(s)=\frac{s^5-2s^4+3s^3-7s^2-6s+4}{s(s^2+2^2)}$$

$$X(s)=\frac{s^5-2s^4+3s^3-7s^2-6s+4}{s^3(s-1)(s^2+2^2)}$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-1}+\frac{Es+F}{s^2+2^2}$$

比较下式中 s 的同次幂系数,有

$$s^5-2s^4+3s^3-7s^2-6s+4=As^2(s-1)(s^2+4)+Bs(s-1)(s^2+4)$$
$$+C(s-1)(s^2+4)+Ds^3(s^2+4)+(Es$$
$$+F)(s-1)s^3,$$

得

$$\begin{cases} A+D+E=1 \\ -A+B+F-E=-2 \\ 4A-B+C+4D-F=3 \\ -4A+4B-C=-7 \\ -4B+4C=-6 \\ -4C=4 \end{cases}$$

解之,得

$$A=\frac{5}{2},\ B=\frac{1}{2},\ C=-1,\ D=-\frac{7}{5},\ E=-\frac{1}{10},\ F=-\frac{1}{10}.$$

$$\therefore\quad X(s)=\frac{5}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}-\frac{7}{5}\frac{1}{s-1}$$

$$-\frac{1}{10}\left(\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\right)\qquad\text{(iii)}$$

$$\therefore\quad x(t)=L^{-1}[X(s)]=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2-\frac{7}{5}e^t-\frac{1}{20}(2\cos 2t+\sin 2t)$$

(iii)代入(ii)得

$$Y(s)=\frac{2}{s^2+2^2}+s+1-s(s+2)X(s)$$

$$=\frac{2}{s^2+2^2}+s+1-s(s+2)\left[\frac{5}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}-\frac{7}{5}\frac{1}{s-1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{10}\cdot\frac{s+1}{s^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{2}{s^2+2^2}+s+1-\frac{5}{2}(s+2)-\frac{1}{2}\frac{s+2}{s}+\frac{s+2}{s^2}$$

$$+\frac{7}{5}\frac{s(s+2)}{s-1}+\frac{s}{10}\frac{(s+1)(s+2)}{s^2+2^2}$$

$$=\frac{2}{s^2+2^2}-\frac{3}{2}s-\frac{9}{2}+\frac{2}{s^2}+\frac{7}{5}\left(s+3+\frac{3}{s-1}\right)$$

$$+\frac{1}{10}\left(s+3-\frac{2s}{s^2+2^2}-\frac{12}{s^2+2^2}\right)$$

$$=\frac{4}{5}\frac{1}{s^2+2^2}-\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{2}{s^2}+\frac{21}{5}\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore\quad y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{2}{5}\sin 2t-\frac{1}{5}\cos 2t+2t+\frac{21}{5}e^t.$$

(4) $\begin{cases}y'-2z'=f(t)\\ y''-z''+z=0\end{cases}\quad y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0$

设$L[y(t)]=Y(s)$， $L[z(t)]=Z(s)$， $L[f(t)]=F(s)$

$L[y'(t)]=sY(s)\quad L[z'(t)]=sZ(s)$

$L[y''(t)]=s^2Y(s)\quad L[z''(t)]=s^2Z(s)$

方程组两边取 LT,得

$$\begin{cases} sY(s) - 2sZ(s) = F(s) & \text{(i)} \\ s^2Y(s) - s^2Z(s) + Z(s) = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(i) $\times s -$ (ii)，得

$$(s^2 - 1)Z(s) - 2s^2Z(s) = sF(s)$$

$$Z(s) = -\frac{s}{s^2 + 1}F(s) \tag{iii}$$

$$\therefore \quad z(t) = L^{-1}[Z(s)] = -f(t) * \cos t$$

$$= -\int_0^t f(\tau)\cos(t - \tau)\mathrm{d}\tau$$

(iii) 代入(i)，得

$$sY(s) - 2s\left[-\frac{s}{s^2 + 1}F(s)\right] = F(s)$$

$$sY(s) = \left(1 - \frac{2s^2}{s^2 + 1}\right)F(s) = \frac{1 - s^2}{1 + s^2}F(s)$$

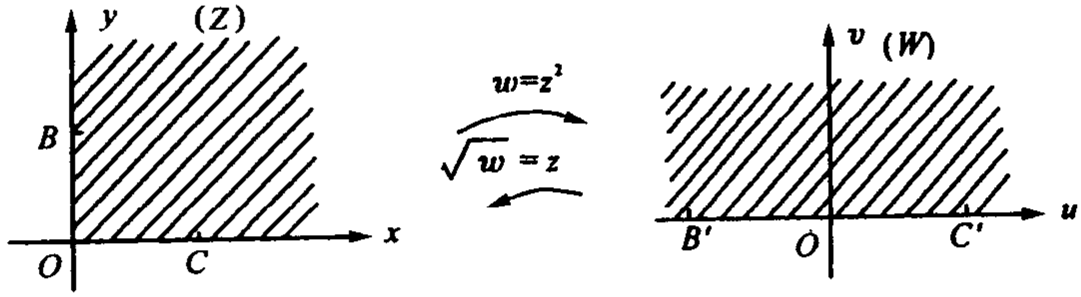
$$Y(s) = \frac{1 - s^2}{s(1 + s^2)}F(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{1 + s^2}\right)F(s)$$

$$\therefore \quad y(t) = L^{-1}[Y(s)] = (1 - 2\cos t) * f(t) = \int_0^t (1 - 2\cos\tau)f(t - \tau)\mathrm{d}\tau$$

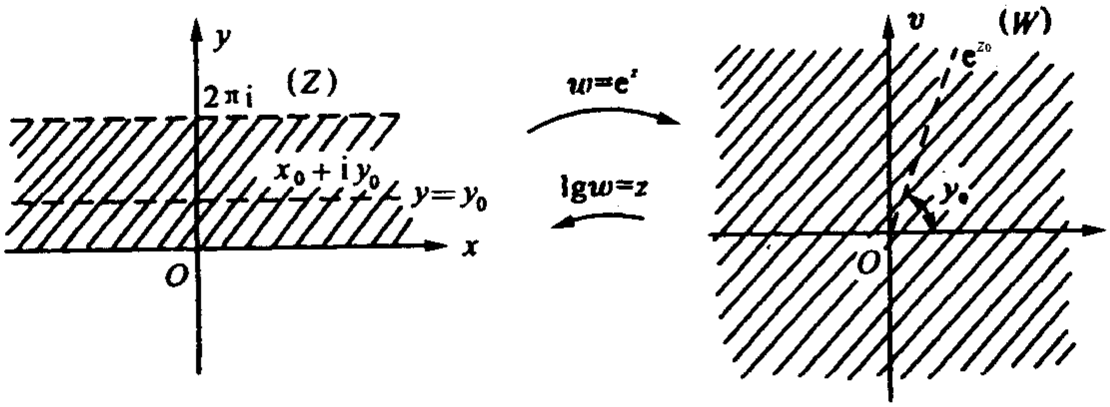
或

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)[1 - 2\cos(t - \tau)]\mathrm{d}\tau$$

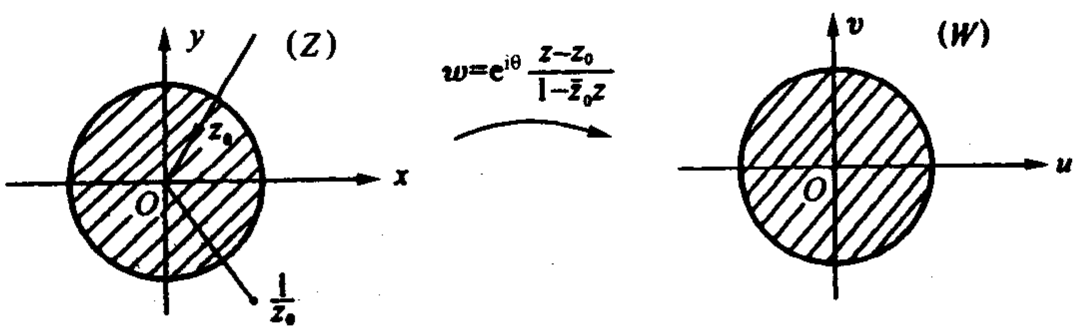
附表Ⅰ　某些保角映射及其示意图



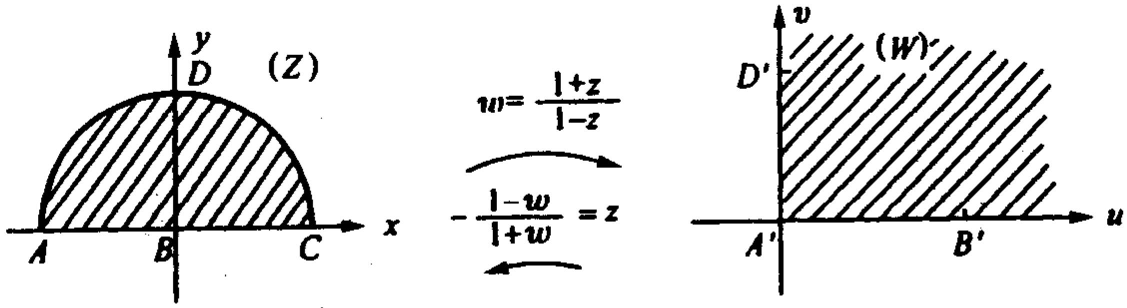
(1)



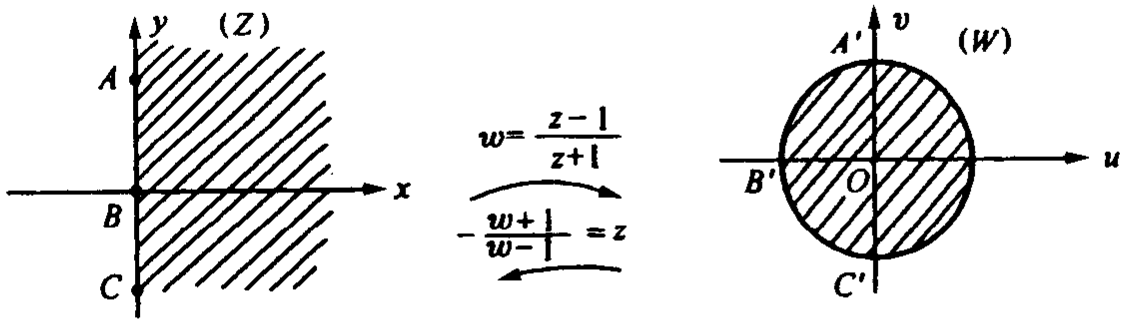
(2)



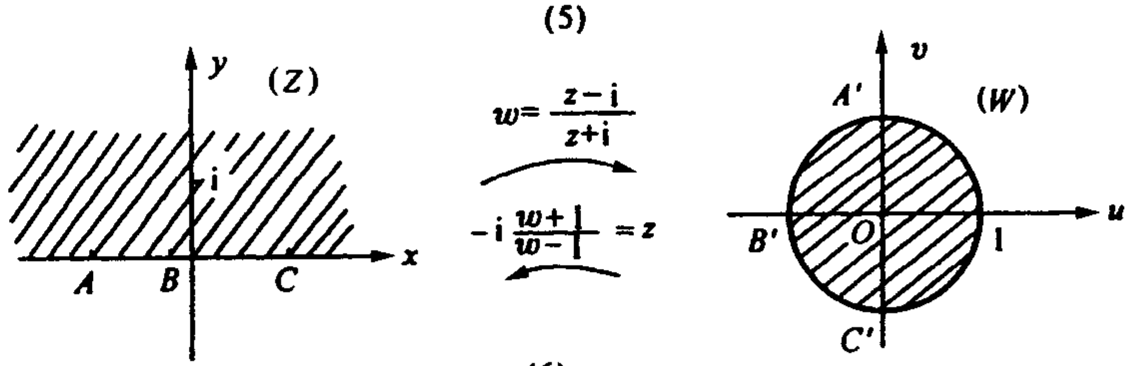
(3)



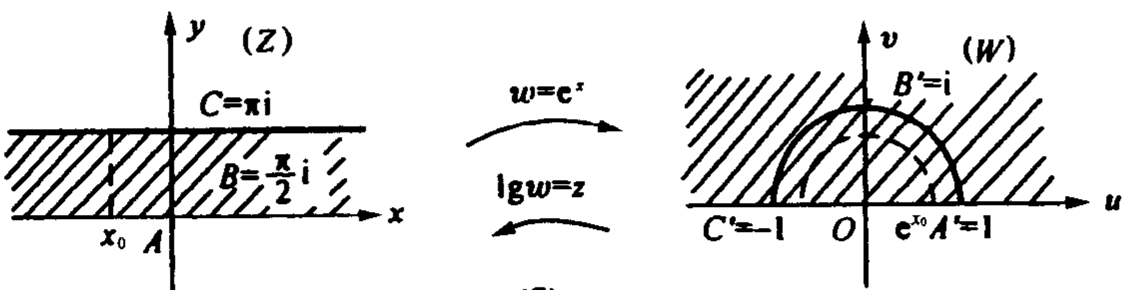
(4)


(Z)
A
B
C
w= (z−1)/(z+1)
−(w+1)/(w−1) = z
(W)
A′
B′
O
C′

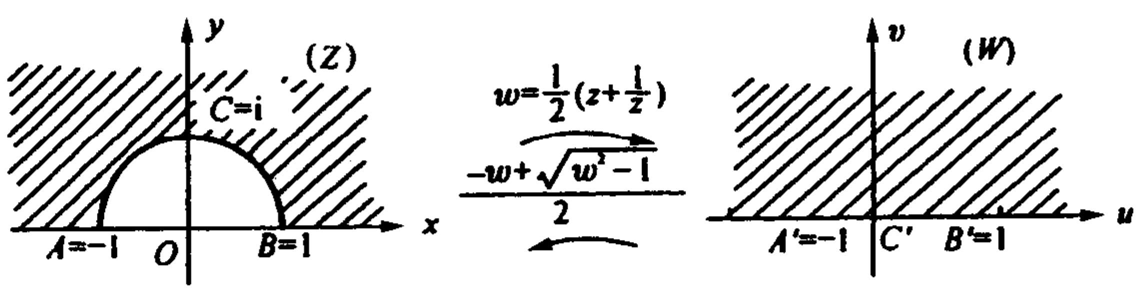
(5)


(Z)
i
A
B
C
w= (z−i)/(z+i)
−i (w+1)/(w−1) = z
(W)
A′
B′
O
1
C′

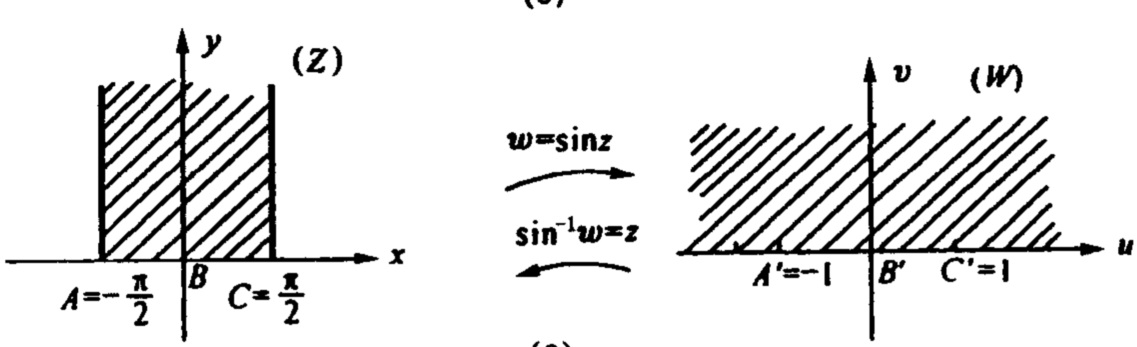
(6)


(Z)
C=πi
B=π/2 i
x₀
A
w=e^z
lgw=z
(W)
B′=i
C′=−1
O
e^{x₀}
A′=1

(7)


(Z)
C=i
A=−1
O
B=1
w=1/2(z+1/z)
(−w+√(w²−1))/2
(W)
A′=−1
C′
B′=1

(8)


(Z)
A=−π/2
B
C=π/2
w=sinz
sin⁻¹w=z
(W)
A′=−1
B′
C′=1

(9)

附表Ⅱ　留数公式表

函　数	条　　件	孤立奇点类型	在 z_0 点的留数公式
1. $f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$	可去奇点	$\text{Res}[f(z);\ z_0]=0$
2. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	z_0 是 $g(z)$ 与 $h(z)$ 的同级零点	可去奇点	$\text{Res}\left[\dfrac{g(z)}{h(z)};\ z_0\right]=0$
3. $f(z)$	z_0 是 $f(z)$ 的 m ($m\geqslant 1$) 级极点	m 级极点 ($m\geqslant 1$)	$\text{Res}[f(z);\ z_0]=\dfrac{1}{(m-1)!}\cdot\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$
4. $f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ 存在且不为零	单极点	$\text{Res}[f;\ z_0]\cdots=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
5. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$ $h(z_0)=0$ $h'(z_0)\neq 0$	单极点	$\text{Res}\left(\dfrac{g}{h};\ z_0\right)=\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
6. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	z_0 是 $g(z)$ 的 k 级零点，是 $h(z)$ 的 $k+1$ 级零点	单极点	$\text{Res}\left(\dfrac{g}{h};\ z_0\right)=(k+1)\dfrac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$
7. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$ $h(z_0)=h'(z_0)=0$ $h''(z_0)\neq 0$	二级极点	$\text{Res}\left(\dfrac{g}{h};\ z_0\right)=2\dfrac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\dfrac{2}{3}\dfrac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$

(续表)

函　数	条　件	孤立奇点类型	在 z_0 点的留数公式
8. $\frac{g(z)}{(z-z_0)^2}$	$g(z_0)\neq 0$	二级极点	$\mathrm{Res}\left[\frac{g(z)}{(z-z_0)^2};z_0\right]=g'(z_0)$
9. $f(z)$	$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，$\varphi(z_0)\neq 0$.	k 级极点	$\mathrm{Res}[f(z);z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$
10. $\frac{g(z)}{h(z)}$	z_0 是 $g(z)$ 的 l 级零点，是 $h(z)$ 的 $l+k$ 级零点.	k 级极点	$\mathrm{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};z_0\right]=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ 其中 $\varphi(z)=(z-z_0)^k\cdot\frac{g(z)}{h(z)}$.

附表Ⅲ　某些定积分的计算公式

积分类型	条件	公式
1. $I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)\mathrm{d}\theta$	R 为有理函数,在 θ 处连续	$I=2\pi\mathrm{i}\sum[f(z)$ 在单位圆内孤立奇点处的留数] 其中 $f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\ \frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}}\right)$
2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	(i) $f(z)$ 在实轴上无奇点 (ii) $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上只有有限个极点 (iii) $\lvert f(z)\rvert\leqslant\frac{M}{\lvert z\rvert^2}$,对充分大 $\lvert z\rvert$	$I=2\pi\mathrm{i}\sum[f(z)$ 在上半平面内极点处的留数]
3. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$	(i) $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别为 z 的 n 次和 m 次多项式 (ii) $m\geqslant n+2$ (iii) $Q(z)$ 在实轴上没有零点	$I=2\pi\mathrm{i}\sum\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\right.$ 在上半平面极点处的留数$\left.\right\}$
4. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\cdot f(x)\mathrm{d}x$ $(a>0)$	(i) $f(z)$ 在实轴上无奇点; (ii) $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上只有有限个极点; (iii) $\lvert f(z)\rvert\leqslant\frac{M}{\lvert z\rvert}$,对充分大 $\lvert z\rvert$.(若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},\ m\geqslant n+1$)	$I=2\pi\mathrm{i}\sum\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}f(z)$ 在上半平面极点处的留数}
5. $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(ax)f(x)\mathrm{d}(x)$ $(a>0)$	$f(z)$ 条件同 4.	$I_1=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x)\mathrm{d}x\right]$

（续表）

积分类型	条件	公式
6. $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha x) f(x) \mathrm{d}(x)$ $(\alpha > 0)$	$f(z)$ 条件同 4.	$I_2 = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x) \mathrm{d}x\right]$
7. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$	(i) $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别为 z 的 n 次和 m 次多项式 (ii) $m \geqslant n+2$ (iii) $Q(z)$ 在实轴上有单极点 $b_1, b_2, \cdots, b_l$. $(l \leqslant m)$	$I = 2\pi\mathrm{i} \sum \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} \text{在上半平面极点处留数} \right\} + \pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}; b_j\right]$
8. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$	(i) $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别为 z 的 n 次和 m 次多项式 (ii) $m \geqslant n+1$ (iii) $Q(z)$ 在实轴上有单极点 $b_1, b_2, \cdots, b_l (l \leqslant m)$	$I = 2\pi\mathrm{i} \sum \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} \frac{P(z)}{Q(z)} \text{在上半平面极点处留数} \right\} + \pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} \frac{P(z)}{Q(z)}; b_j\right]$
9. $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha x) \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$ $\alpha > 0$	$P(z)$ 与 $Q(z)$ 条件同 8	$I_1 = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x\right]$
10. $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha x) \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$	$P(z)$ 与 $Q(z)$ 条件同 8	$I_2 = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x\right]$

附表Ⅳ　拉普拉斯变换主要公式表

$f(t)$	$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$
1. $a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$，a_1 和 a_2 为常数
2. $f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad a>0$
3. $f(t-t_0)u(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-st_0}F(s)\quad t_0>0$
4. $\mathrm{e}^{s_0t}f(t)$	$F(s-s_0)$
5. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-\cdots-f^{(n-1)}(0^+)$，要求 $f^{(m)}(t)(m=1,2,\cdots,n-1)$ 是象原函数
6. $(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$
7. $\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s$
8. $\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{s}F(s)$
9. $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
10. $f(t)=f(t+T)$	$\dfrac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}$
11. $\lim\limits_{t\to0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$	
12. $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to0}sF(s)$	要求 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$ 存在，$sF(s)$ 的奇点在 $\mathrm{Re}(s)<\sigma_0$ 内

附表Ⅴ　拉普拉斯变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$t^m \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$
4	$t^m e^{at} \quad (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\mathrm{sh}\, at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\mathrm{ch}\, at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11	$t\,\mathrm{sh}\, at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
12	$t\,\mathrm{ch}\, at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
13	$t^m \sin at \quad (m > -1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2\mathrm{i}(s^2+a^2)^{m-1}} \cdot [(s+\mathrm{i}a)^{m+1} - (s-\mathrm{i}a)^{m+1}]$
14	$t^m \cos at \quad (m > -1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2(s^2+a^2)^{m+1}} \cdot [(s+\mathrm{i}a)^{m+1} + (s-\mathrm{i}a)^{m+1}]$
15	$\mathrm{e}^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
16	$\mathrm{e}^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
17	$\mathrm{e}^{-bt} \sin(at+c)$	$\frac{(s+b)\sin c + a\cos c}{(s+b)^2+a^2}$
18	$\mathrm{e}^{-bt} \cos(at+c)$	$\frac{(s+b)\cos c - a\sin c}{(s+b)^2+a^2}$
19	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
20	$\cos^2 at$	$\frac{s^2+2a}{s(s^2+4a^2)}$
21	$\sin at \sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$
22	$\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
23	$a\mathrm{e}^{at} - b\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$

（续表）

	$f(t)$	$F(s)$
24	$\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
25	$\cos at-\cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
26	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
27	$\frac{1}{a^4}(\cos at-1)+\frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2+a^2)}$
28	$\frac{1}{a^4}(\mathrm{ch}\,at-1)-\frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^2(s^2-a^2)}$
29	$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
30	$\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
31	$\frac{1}{a^4}(1-\cos at)-\frac{t}{2a^3}\sin at$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)^2}$
32	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
33	$t\left(1-\frac{a}{2}t\right)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^3}$
34	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
35[1]	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b}-\frac{e^{-at}}{a}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

(续表)

	$f(t)$	$F(s)$
36[1]	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
37[1]	$\frac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)}+\frac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)}+\frac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
38[1]	$\frac{a^2e^{-at}}{(c-a)(b-a)}+\frac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{c^2e^{-ct}}{(b-c)(a-c)}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
39[1]	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}[1-(a-b)t]}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
40[1]	$\frac{[a-b(a-b)t]e^{-bt}-ae^{-at}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
41	$e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$	$\frac{3a^2}{s^3+a^3}$
42	$\sin at\,\mathrm{ch}\,at-\cos at\,\mathrm{sh}\,at$	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$
43	$\frac{1}{2a^2}\sin at\,\mathrm{sh}\,at$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$

（续表）

	$f(t)$	$F(s)$
44	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{sh}at - \sin at)$	$\frac{1}{s^4 - a^4}$
45	$\frac{1}{2a^2}(\mathrm{ch}at - \cos at)$	$\frac{s}{s^4 - a^4}$
46	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
47	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
48	$\frac{1}{\sqrt{xt}}e^{at}(1 + 2at)$	$\frac{s}{(s-a)\sqrt{(s-a)}}$
49	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$
50	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
51	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{ch}2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
52	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
53	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\mathrm{sh}2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
54	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$

(续表)

	$f(t)$	$F(s)$
55	$\frac{2}{t}\operatorname{sh}at$	$\ln\frac{s+a}{s-a}$
56	$\frac{2}{t}(1-\cos at)$	$\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$
57	$\frac{2}{t}(1-\operatorname{ch}at)$	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$
58	$\frac{1}{t}\sin at$	$\arctan\frac{a}{s}$
59	$\frac{1}{t}(\operatorname{ch}at-\cos bt)$	$\ln\sqrt{\frac{s^2+b^2}{s^2-a^2}}$
60[2]	$\frac{1}{\pi t}\sin(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
61[2]	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}\quad(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
62	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
63	$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\quad(a\geqslant 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}}$
64	$\operatorname{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)\quad(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{a^2s^2}\operatorname{erfc}(as)$

(续表)

	$f(t)$	$F(s)$
65	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{as}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
66	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$
67	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}e^{at}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s(s-a)}}$
68	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-\sqrt{a}e^{at}\operatorname{erfc}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}+\sqrt{a}}$
69	$e^{at}\operatorname{erfc}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+\sqrt{a})}$
70	$\left[\dfrac{t}{a}\right]\quad(a>0)$	$\dfrac{1}{s(e^{as}-1)}$
71	$\lvert\cos at\rvert\quad(a>0)$	$\dfrac{1}{s^2+a^2}\left(s+\operatorname{ch}^{-1}\dfrac{\pi s}{2a}\right)$
72	$\lvert\sin at\rvert\quad(a>0)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\operatorname{cth}\dfrac{\pi s}{2a}$
73	$\delta(t)$	1
74	$\delta(t-a)\quad(a>0)$	e^{-as}
75	$\delta'(t)$	s
76	$\operatorname{sgn}t$	$\dfrac{2}{s}$
77	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$

	$f(t)$	$F(s)$
78	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
79	$t^m u(t) \quad (m > -1)$	$\frac{1}{s^{m+1}}\Gamma(m+1)$
80	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\sqrt{s}}\sin\sqrt{s}$
81	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}\cos\sqrt{s}$
82	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin at$	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}-s}{s^2+a^2}}$
83	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos at$	$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{s^2+a^2}}$
84[3]	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
85[3]	$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
86	$e^{-\frac{at}{2}}I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{s+a}}$
87	$\frac{1}{at}J_1(at)$	$\frac{1}{s+\sqrt{s^2+a^2}}$

(续表)

	$f(t)$	$F(s)$
88	$J_m(t)$	$\dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$
89	$\dfrac{1}{t}J_n(at)\quad(n>0)$	$\dfrac{1}{na^n}(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n$
90	$t^{\frac{m}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}e^{-\frac{1}{s}}$
91[4]	sit	$\dfrac{1}{s}\mathrm{arccot}s$
92[5]	cit	$\dfrac{1}{s}\ln\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$
93[6]	$-\mathrm{Ei}(-t)$	$\dfrac{1}{s}\ln(1+s)$
94	$\displaystyle\int_t^{\infty}\frac{I_0(t)}{t}\mathrm{d}t$	$\dfrac{1}{s}\ln(s+\sqrt{s^2+1})$
95[7]	$s(t)$	$\dfrac{1}{2s}\sqrt{\dfrac{\sqrt{s^2+a^2}-s}{s^2+a^2}}$

注释

[1] 式中 a，b，c 为不相等的常数.

[2] $\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 称为误差函数.

$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 称为余误差函数.

[3] $J_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$ 称为第一类 n 阶贝塞尔(Bessel) 函数.

$I_n(z)=\mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$ 称为第一类虚宗量的贝塞尔函数，或称为第一类变形的贝塞尔函数.

[4] $\mathrm{sit}=\displaystyle\int_0^t\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 称为正弦积分.

[5] $\mathrm{cit}=\int_{-\infty}^{t}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ 称为余弦积分.

[6] $\mathrm{Ei}(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\mathrm{d}t$ 称为指数积分.

[7] $s(t)=\int_{0}^{t}\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t$； $c(t)=\int_{0}^{t}\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t$ 称为结尔纳积分.

参 考 书 目

[1] 金忆丹,尹永成编. 复变函数与拉普拉斯变换(第三版). 杭州: 浙江大学出版社,2003

[2] 余家荣编. 复变函数. 北京: 人民教育出版社,2004

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名= 复变函数与拉普拉斯变换习题指导
作者= 金忆丹编著
页数= ２９８
ＳＳ号=１１２９１４１１
出版日期= ２００４年0８ 月第1 版

前言
目录
目　录