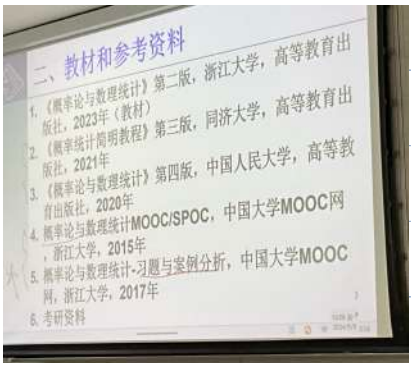
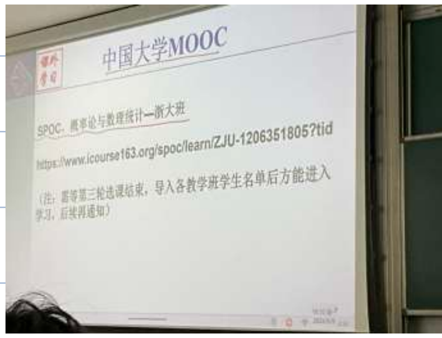
吴闰桢.

课程要求:





1、平时成绩60%+考试40%

①作业+签到:25%

分A,B,C.等级.

②学在浙大 5% 讨论

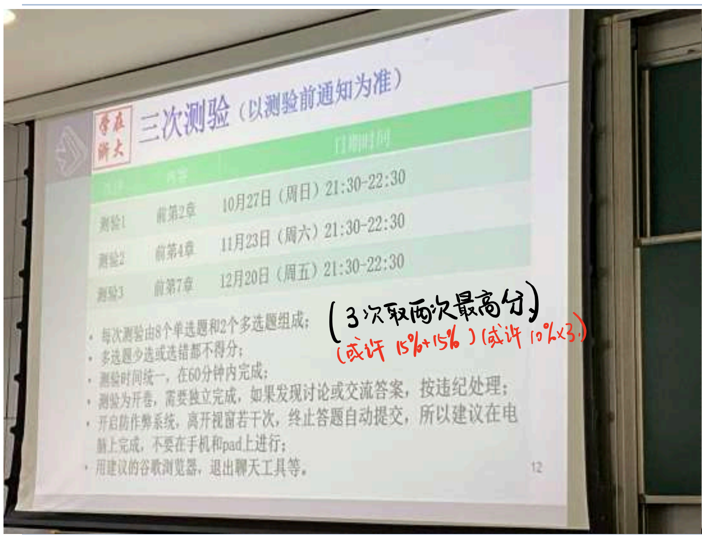
③学在浙大 小测 50% (3次

期末

周一3.4.5. 助教:余文婷. → 助教君.

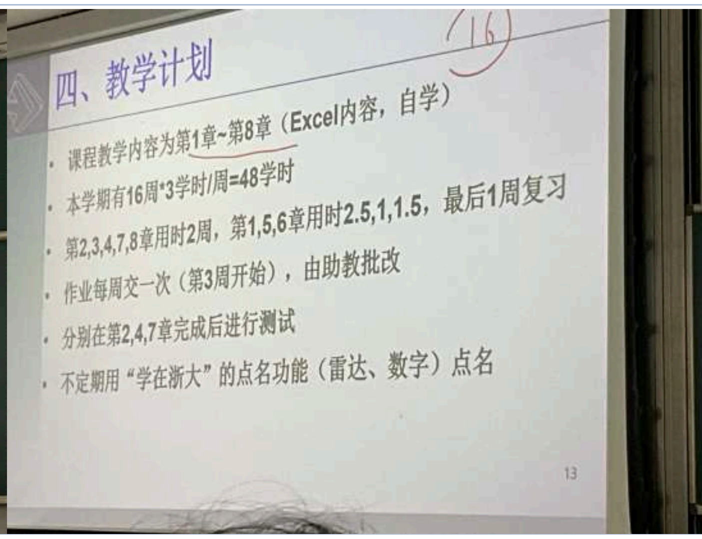
答疑:某三个周六上午(在群里公布).

2、斩杀线:期末低于红线斩杀/作业点名过少.



(3次取两次最高分)

(或许 15%+15%)(或许 10%×3)



(16)

§1.1.

一、样本空间与随机事件.

现象/事件: 随机事件 / 必然事件.

• special: 明天天气情况: (实际确定) 视为不确定.

1. 随机试验 ①相同条件重复进行 ②事先知道所有结果 ③不知道哪个结果会发生.

2. 样本空间: 随机试验(E)的所有结果构成的集合称为E的样本空间

记为 $S=\{e\}$, 并称 S中元素e为样本点, 一个元素的单点集称为基本事件.

(注意相同样本点不能重复出现在同一样本空间中)

① 可列个样本点 → 人数 $S=\{1, 2, 3, \dots\}$ (有限)

② 无穷样本点 → 一批产品寿命 $S=\{x \mid a\le x\le b\}$

③ $S=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$ 取球(有放回)

$S=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B, x\neq y\}$ 无放回

$S=\{(x,y) \mid x,y\in A, x<y\}$ 一次取两球

$C_m^n=\frac{A_m^n}{A_n^n}$ (maybe)

3. 一般称S的一个子集A为E的随机事件.

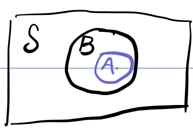
当且仅当A所包含的样本点发生 ⇒ 称事件A发生.

反过来看, 那S就是一个特殊事件 ⇒ 必然事件.

$\emptyset$就是不可能事件.

二、事件关系运算.

1. $A\subset B$.

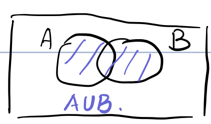


• 读作: A包含于B
B包含A.

• A发生, B一定发生.

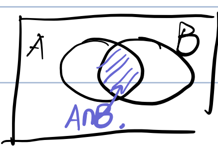
2. $A=B$ 充要条件: $A\subset B$且$B\subset A$

3. $A\cup B$: 和事件



记法: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow A_1\cup A_2\cup A_3 \cdots A_n$. $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots$

4. $A\cap B$ 积事件. $A\cap B \Leftrightarrow AB \Leftrightarrow A\cdot B$



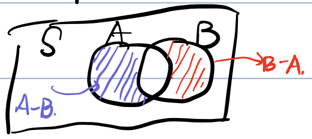
类似地 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$

5、当 $A\cap B=\varnothing$ 时，A、B 称为互斥事件.

6、$\bar{A}$ 对立事件 or A^c or 互逆

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$

7. 差事件：$A-B=A\cap\bar{B}=A\bar{B}=\{x \mid x\in A 且 x\notin B\}$



- 运算律：① $AB=BA$ $\quad A\cup B=B\cup A$

② $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

③ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\quad A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$

④ 德摩根定律：$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}=\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A_j}$ $\quad \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_j}$

$AB=A(S-\bar{B})=A-A\bar{B}$

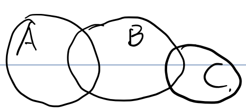
$A-B=A\bar{B}=A(S-B)=A-AB.=(A\cup B)-B.$

注意运算顺序.

$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)=(AA)\cup(AC)\cup(AB)\cup(BC).$

$(A-B)(A-C)$ 不支持

$(A\cup B)-C \overset{?}{=} A\cup(B-C)$ ×



成立 but.

$(A\cup B)-C \neq A\cup(B-C)$.

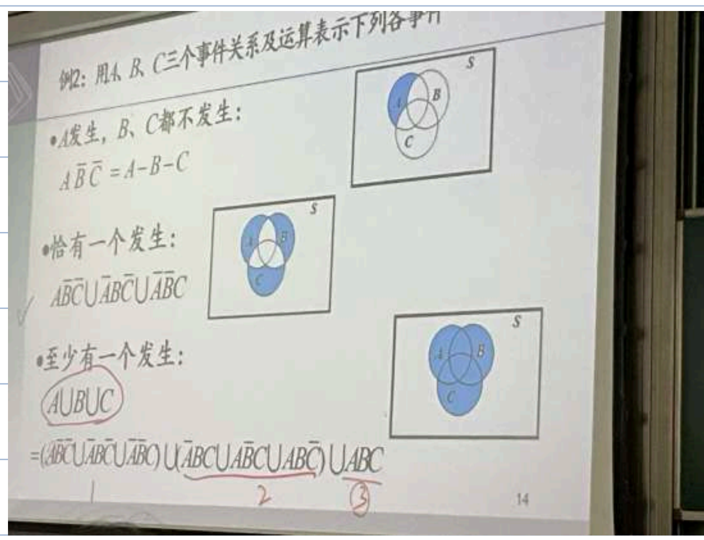
但 $((A\cup B)-C)\cup AC=A\cup(B-C)$.

注意：$\overline{AB}$ 与 $\bar{A}\bar{B}$ 区别 ☆

$\bar{A}\cup\bar{B}$ $\quad \bar{A}\cap\bar{B}$

$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B.$

$=(\bar{A}\bar{B}\cup(A\cup B))$



A.B.C 三事件

1. 恰有1个发生.

$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$.

2. 至少一个发生

$A\cup B\cup C$.

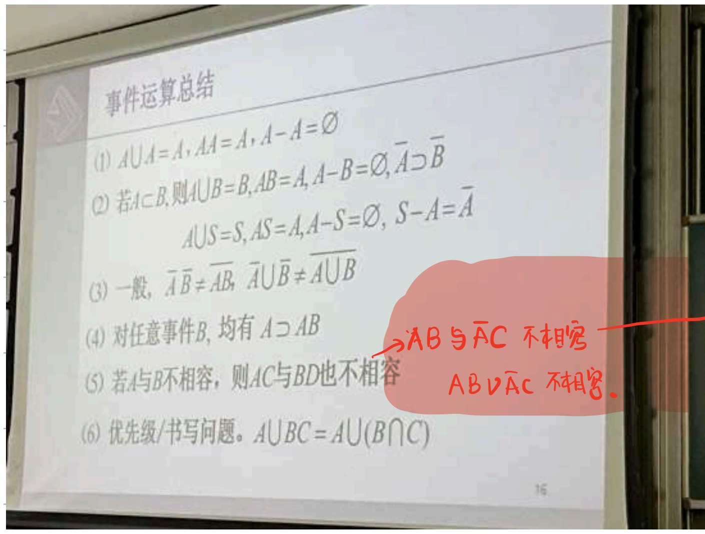
3. $A\bar{B}\bar{C} = A-B-C$

4. 至少有一个发生

$A\cup B\cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

5. 至少两个发生.

$(AB)\cup(BC)\cup(AC)$



AB 与 $\bar{A}C$ 不相容 → 判断技巧.

$AB\cup\bar{A}C$ 不相容.

§1.2. 频率与概率.

1. 频率 $\frac{n_A}{n}$. 频数 n_A.

$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

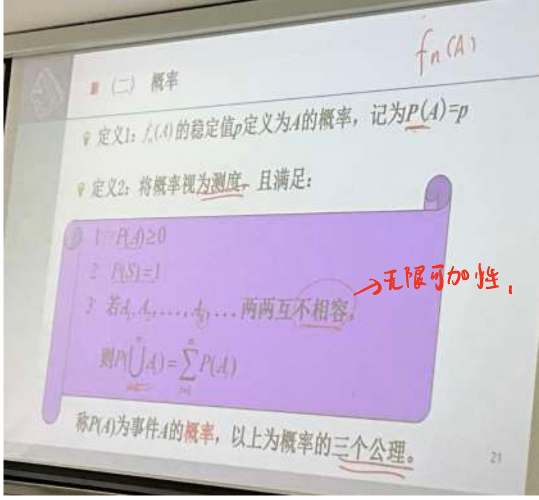
2. 性质: ① $0\le f_n(A_i)\le 1$

② $f_n(S)=1$

③ $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$.

$n_{A_1\cup A_2} \xlongequal{A_1\cap A_2=\emptyset} n_{A_1}+n_{A_2}$.

④ 当 $n\to+\infty$, $f_n(A)$ 稳定于一个值 → 概率 $P(A)$. 与试验次数无关.



性质1. $P(\varnothing)=0$. 注意 $P(A)=0$ 与 $A=\varnothing$ 不等价. ↙回放看下、

$P(B)=1 \nRightarrow B=S$.

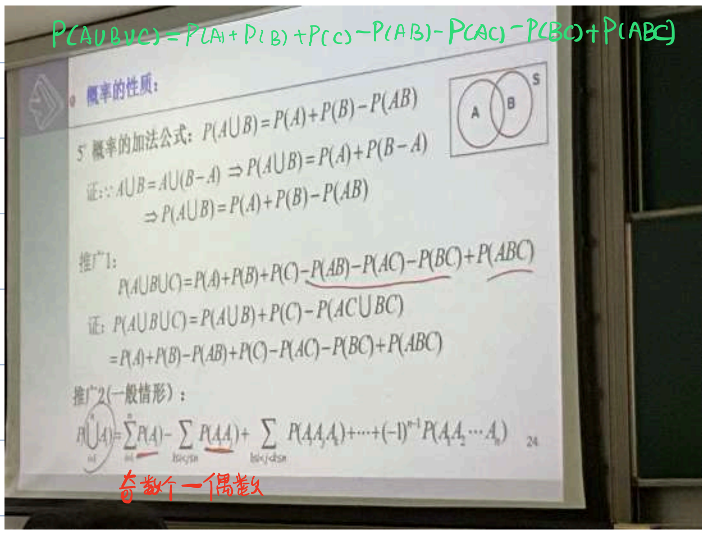
2、任意两两互不相同事件 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

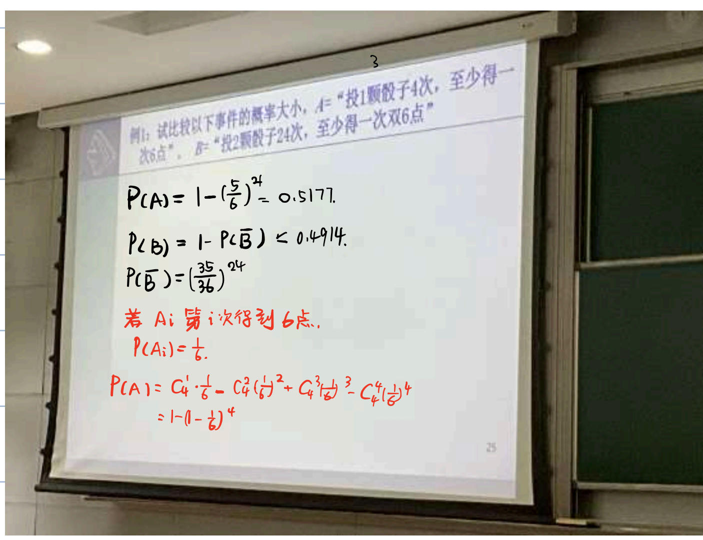
3、A.B任意事件, $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，当 $A\supset B$时, $P(A-B)=P(A)-P(B)$，$P(A)\geq P(B)$

4. $P(A)=1-P(\bar{A})$.

5、



若 A_i两两不相容. $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$



例2：两位数（10-99）能被2或3整除概率。

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

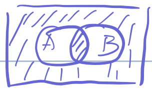
$P(A)=\frac{45}{90}$ ； $P(B)=\frac{1}{3}$ ； $P(AB)=\frac{15}{90}$ *

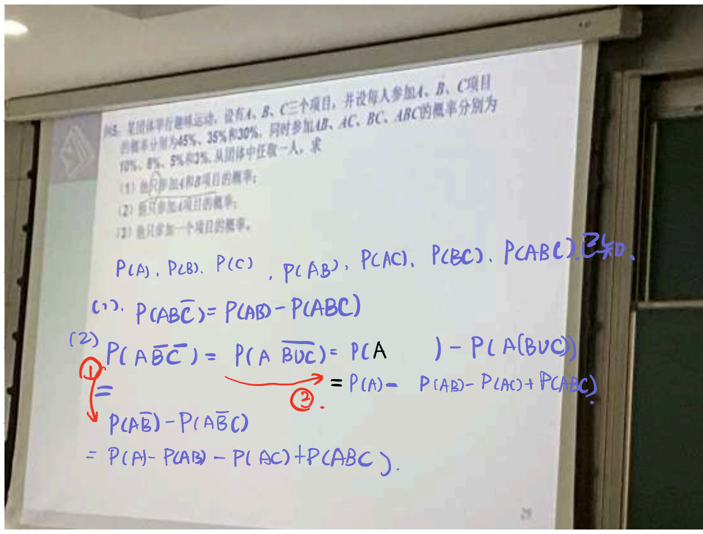
$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$.

例3： $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$ ， $P(A)=r$ 求 $P(B)$

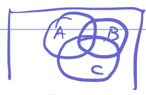
$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB)$

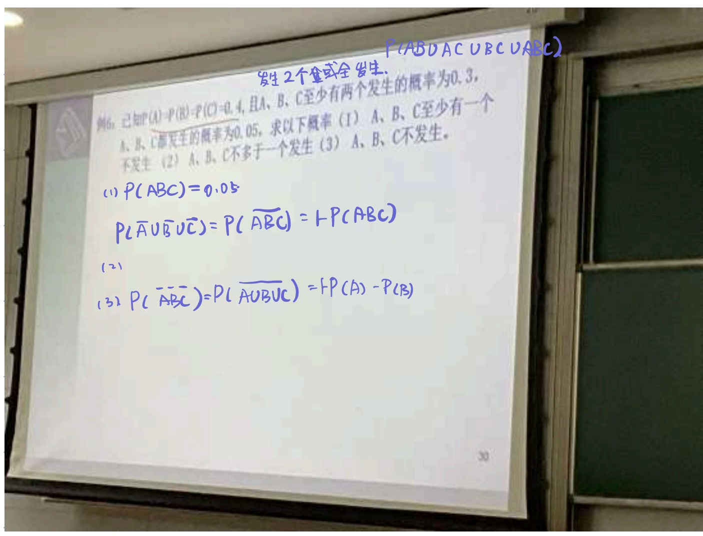
∴ $P(A)+P(B)=1 \Rightarrow P(B)=1-r$.

另：Ven 图  ⇒  $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=\varnothing$



(3) $P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$. 



古典概型

定义：若试验E满足

① 样本空间有限。 ② 每个样本点概率相等。

· 同样试验、观测目的不同，概型也不尽相同

例1：一袋中有8个球，其中3个为红球，5个为黑球，求任取一球是红球（A）的概率。若从袋中不放回取两球，求两种颜色的球都被取到（B）的概率。

非古典概型转化为古典概型。

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

· 超几何分布：$\frac{C_a^k C_{n-a}^{n-k}}{C_N^n}$ HYPGEOM

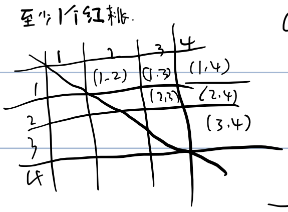
例2：从一副扑克牌（52张）中任取13张牌，设A="13张牌中恰有2张红桃、3张方块"，B="13张牌中缺红桃"，C="13张牌中至少有2张红桃"，D="13张牌中$\boxed{D_1}$缺红桃$\boxed{D_2}$但不缺方块"，求以上事件的概率。

$\boxed{2}$红

$$P(A) = \frac{C_{13}^2 C_{13}^3 C_{26}^8}{C_{52}^{13}} \qquad P(B) = \frac{C_{13}^0 C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}.$$

$$P(C) = \sum_{i=2}^{13} \frac{C_{13}^i C_{39}^{13-i}}{C_{52}^{13}} = 1 - \frac{C_{13}^0 C_{39}^{13} + C_{13}^1 C_{39}^{12}}{C_{52}^{13}} = \frac{C_{13}^2 \cancel{C_{50}^{11}}}{C_{52}^{13}}. \quad \frac{C_{13}^2 C_{50}^{11}}{C_{52}^{13}}. \times$$

错，重复了。



$C_4^2 = \frac{4\times3}{2} = 6.$

$\frac{5}{6}$

$\frac{C_2^1 C_3^1}{6}. \times$

$$P(D) = P(D_1) - P(D_1 D_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{13} \frac{C_{13}^i C_{13}^0 C_{26}^{13-i}}{C_{52}^{13}}$$

$$= \frac{C_{13}^0 C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}} - \frac{C_{13}^0 C_{13}^0 C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}.$$

例4：将n个不同的球，随机地投入N个不同的盒中，求（1）第1盒为空（A）的概率（2）第1盒或第2盒为空（B）的概率（3）设盒子多于球数，求n个球落入n个不同的盒子（C）的概率（也即盒子中最多有一个球的概率）。

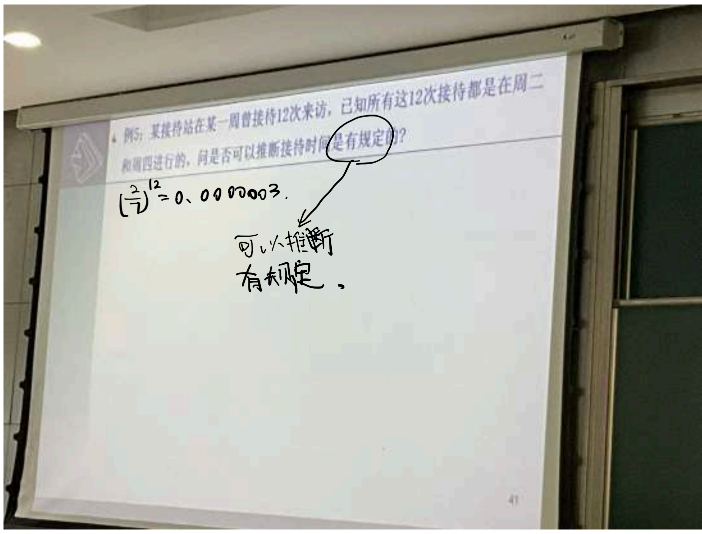
$\boxed{没写不同，一般认为不一样}$

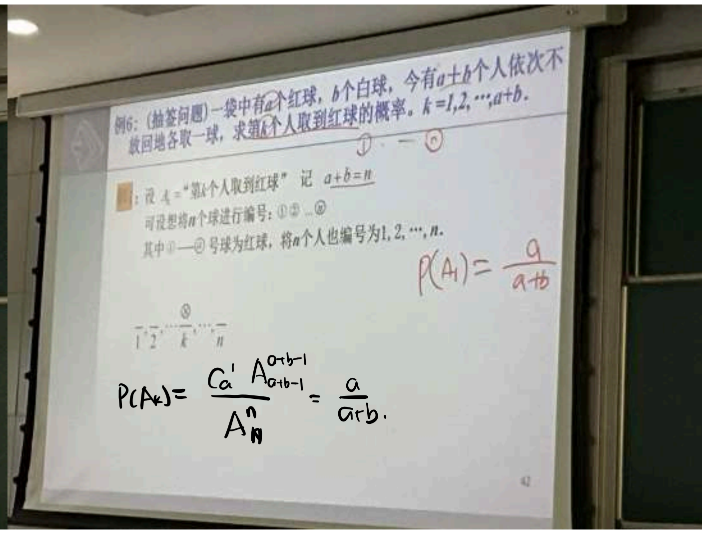
$$P(C) = \frac{A_N^n}{N^2} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^2}.$$

计算：50个人至少有2个人同生日概率。

一年N天。

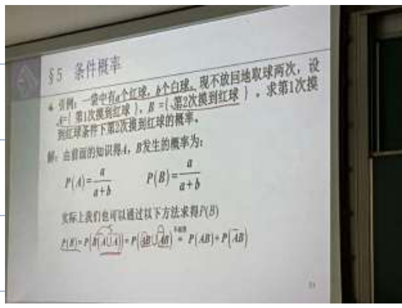
$$P = 1 - \frac{A_N^n}{N^2} = 97\%$$





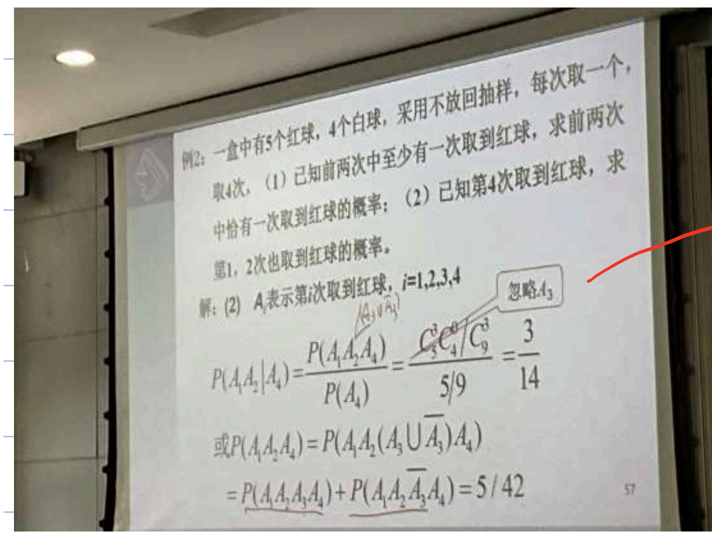
几何概型.

条件概率



$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$



充分利用抽签问题.

$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

$f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$

- 概率的乘法公式

一般按事物发展进程有序展开.

$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)\cdots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$

$P(C|A|B)=P(C|AB)$

例1：设袋中有r只红球，t只白球，每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解：设 $A_i=\{$第i次取到红球$\}$，$i=1,2,3,4$.

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3)$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{a+t}{r+t+3a}$$

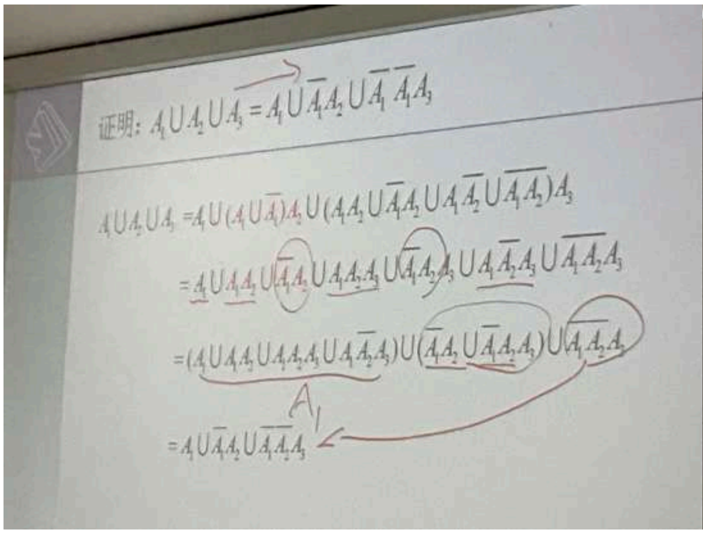
例3：某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人最多参加3次；某人第一次参加能通过的概率为50%；如果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为60%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为70%。求这人能通过考核的概率。

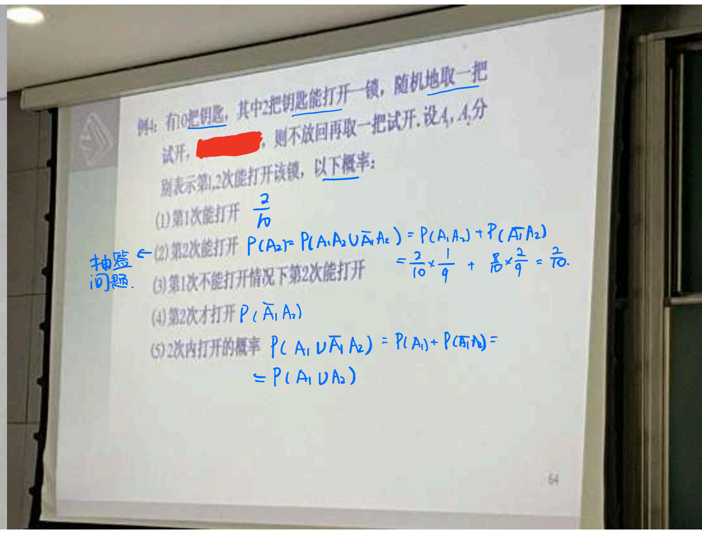
A

证明：$A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3=A_1\cup A_2\cup A_3$

$$=A_1\cup(A_1\cup\bar{A}_1)A_2\cup(A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2\cup A_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2)A_3$$

$$=A_1\cup(A_1A_2)\cup\bar{A}_1A_2\cup A_1A_2A_3\cup A$$





三、全概率公式与贝叶斯公式

1. 定义：S为试验E样本空间，$B_1,\dots B_n$为E的一组事件，满足

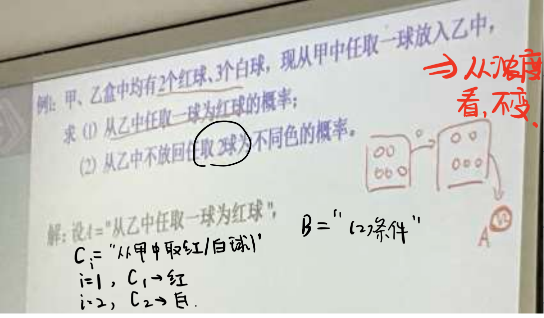
(1) $B_iB_j=\phi$，$i,j=1,2,3,\dots,n$，$i\neq j$

(2) $B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n=S$.

则称$B_1,B_2,\dots B_n$为S的一个划分，或称S的一个完备事件组

2. 全概率公式 $P(A)=P(A\cap(B_1\cup B_2\dots B_n))=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)$.

3. 贝叶斯公式 $P(B_k|A)=\frac{P(B_kA)}{P(A)}=\frac{P(B_kA)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$



(1) $P(A)=P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)$

$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}$

$=\frac{2}{5}$

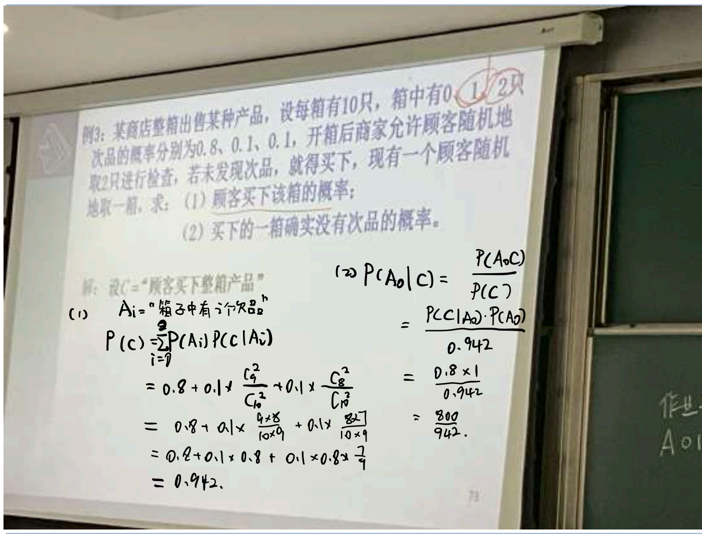
(2) $P(B)=P(C_1)P(B|C_1)+P(C_2)P(B|C_2)$

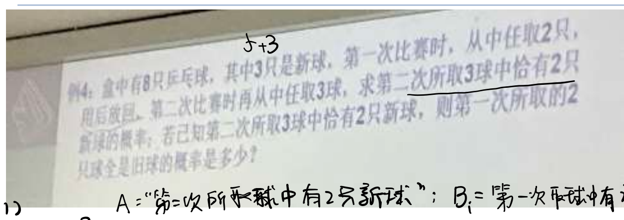
$P(B|C_1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{9}{\frac{6\times5}{2}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

$P(B|C_2)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$

$P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{8}{15}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{14}{15}=\frac{14}{25}$





(1) A="第二次所取球中有2只新球"; B_i=第一次取球中有i个新球.

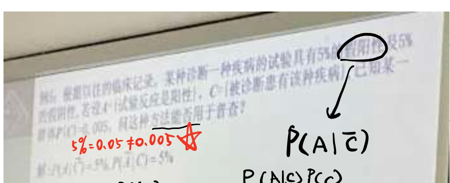
$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(A|B_i)P(B_i)$

$P(B_0)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5\times4}{8\times7}=\frac{5}{14}$

$P(B_1)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$

$P(B_2)=$ ....

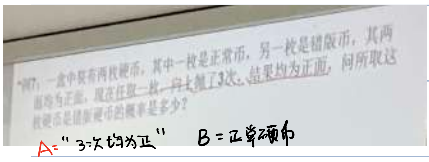
(2) $P(B_2|A)$



$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\bar{C})P(\bar{C})}$

$=0.087.$

若$P(C)$较大，$P(C|A)$大 ⇒能用于普查.

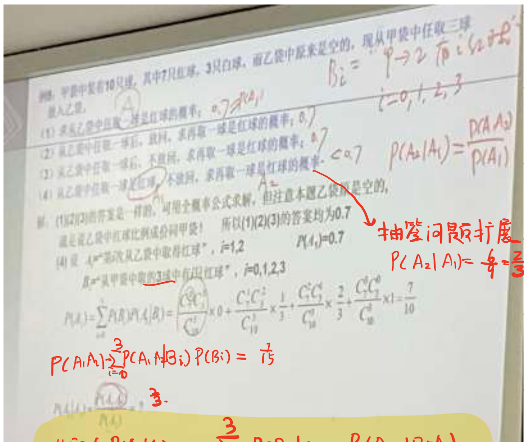


A="3次均为正"　B=正常硬币

$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}\cdot 1=\cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{9}{16}$　3次!!!

$P(\bar{B}|A)=\frac{P(A|\bar{B})P(\bar{B})}{P(A)}=\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}}.=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{16}}=\frac{8}{9}$



抽签问题扩展
$P(A_2|A_1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$

$P(A_1A_2)=\sum_{i=0}^{3}P(A_1A_2|B_i)P(B_i)=\frac{7}{15}$

3.

其实有 $P(A_2|A_1)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i|A_1)\cdot P(A_2|B_iA_1)$

概率的独立性:

- 若 $P(A|B)=P(A)$，则有 $P(B|A)=P(B)$　(若 $P(A),P(B)\neq 0$)

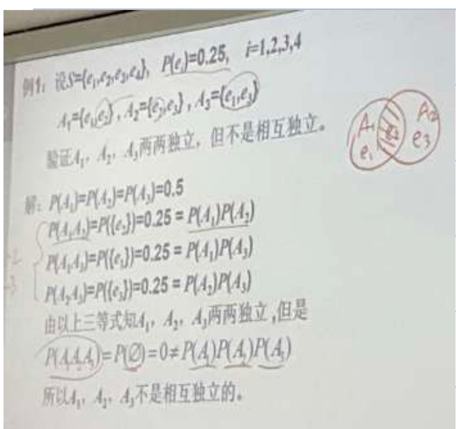
证明 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(B|A)=P(B)$

- 独立事件判定：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

- 相互独立：$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$

　对 $\forall k\in[2,n]$，$k\in\mathbb{Z}$，均成立。　$C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1-n$ 个等式

- 两两独立：$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$　$i\neq j$ 对 $\forall i,j$ 成立．C_n^2 个等式



注意!!!

$P(A_1A_2|A_3)=P(A_1|A_3)P(A_2|A_3)$ 吗？

×　只有相互独立才成立

$P(A_1A_2|A_3)=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_3)}$　　$\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_3)}$ —　$P(A_3)^2$

$P(A_1|A_3)=\frac{P(A_1A_3)}{P(A_3)}$

$P(A_2|A_3)=\frac{P(A_2A_3)}{P(A_3)}$

- 推论：① 必然事件及不可能事件与任何事件独立

　② A,B 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A},B$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $A,\bar{B}$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A},\bar{B}$ 相互独立

证：$P(AB)=P(A)P(B)$　　$P(A)P(\bar{B})=P(A)(1-P(B))=P(A)-P(AB)=P(A\bar{B})$，证毕.

另：$P(A|\bar{B})=P(A)$；$P(\bar{A}|B)=P(\bar{A})$都表明A,B独立

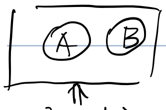
③ 若 $P(A)\cdot P(B)>0$，则"A.B独立"与"A、B不相容"不会同时成立。

作为一个很重要的判定不相容的结论。

证明：(1) ⇒ 设A.B独立 $P(AB)=P(A)P(B)>0$ ⇒ A.B相容

(2) $P(AB)=0 \Rightarrow P(A|B)P(B)=0 \Rightarrow P(A|B)=0 \neq P(A)$.

故 结论成立



一定不独立.

● 相容与否定义在事件基础上；独立是定义在概率基础上。

● $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 一般事件

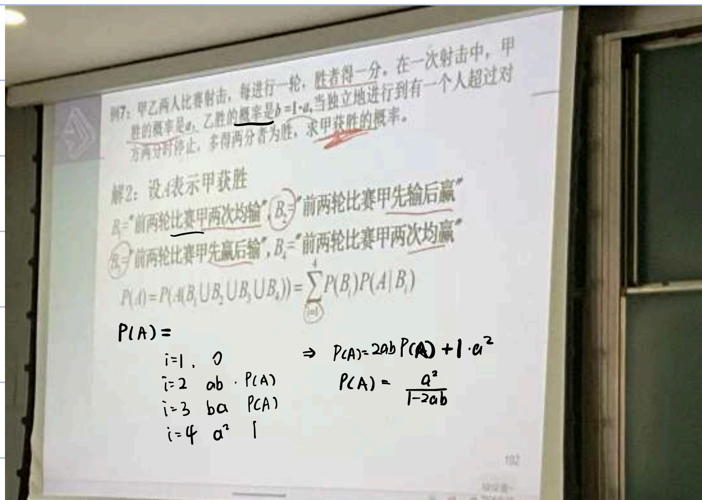
$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ 独立事件

$=1-P(\bar{A}\bar{B})$

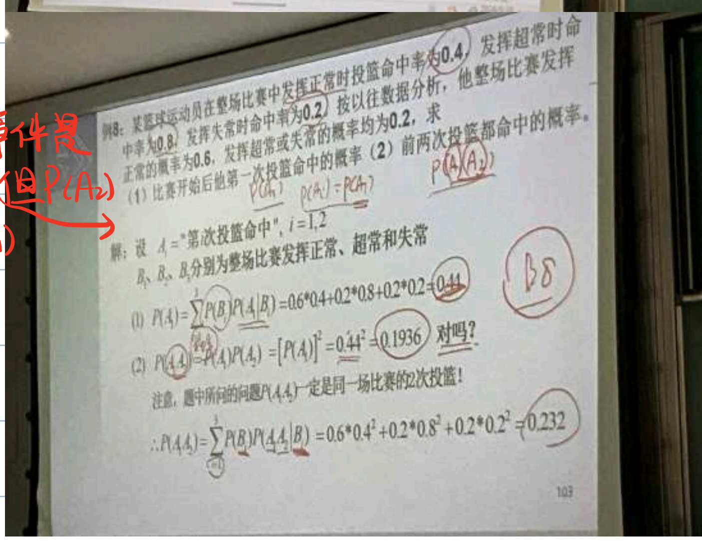
$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

引申：

$$P(A_1\cup A_2\cdots A_n)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i)$$



注意！：事件是独立的，但$P(A_2)$不$=P(A_1)$



第二章 随机变量及其分布

中心问题：将试验结果数量化

把样本点映射到实数

一、随机变量

随机变量的定义

设随机试验的样本空间为$S=\{e\}$，

若$X=X(e)$为定义在样本空间上的实值单值函数，

则称X为随机变量。

3.7 A, B

- 一般采用大写英文字母X, Y, Z来表示随机变量
- 引入随机变量的目的是用来描述随机现象

常见的两类随机变量：离散型的；连续型的

(一) 离散形随机变量分布

定义：随机变量的取值是有限个或可列个，称为离散型随机变量或称为离散量。

离散量的概率分布律形如：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

样本空间$S=\{X=x_1, X=x_2, \ldots, X=x_n, \ldots\}$

由于各样本点两两不相容，所以：

$$1=P(S)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i$$

概率分布律：① 罗列型；② 表格型；③ 公式型。

- 几个重要的离散型随机变量分布

1. 0-1分布

X	0	1
P	$1-p$	p

$\Leftrightarrow$ $X\sim B(1,p)$ 或 $X\sim 0\text{-}1(p)$ 或 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$, $k=0,1$

- 用途：关心两个方面的试验.
- 贝努利试验：只有两种可能结果的实验，称为贝努利实验.

2、二项分布

- n重贝努利试验.

n重贝努利试验：设试验E只有两个可能的结果：A与$\overline{A}$，$P(A)=p$, $0<p<1$，将E独立地重复进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重贝努利试验。

在相同条件下重复进行

即每次试验结果互不影响

$\Rightarrow$ 关注A发生k次的概率

即 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n$.

① 则 X 服从参数为 p 的二项分布，$X\sim B(n,p)$

0-1分布是特殊的二项分布.

设X表示n重贝努利试验中事件A发生次数，则

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

称X服从参数为$P(A)=p$的二项分布，记 $X\sim B(n,p)$

以$n=3$为例，设$A_i=\{$第i次A发生$\}$，$i=0,1,2,3$

$P(X=0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=C_3^0(1-p)^3$

$P(X=1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=C_3^1p^1(1-p)^{3-1}$

$P(X=2)=P(A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3)=C_3^2p^2(1-p)^{3-2}$

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=C_3^3p^3$

一般 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n$

注：$1=(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}$，其中$q=1-p$

excel：$P(X=k)=BINOM.DIST(k,n,p,FALSE)$

$P(X\le k)=BINOM.DIST(k,n,p,TRUE)$

判断X服从二项分布的方法：
1. 各次试验间相互独立
2. 一次试验有两方面
3. X为某方面发生次数

②二项分布的极值

例3：某人骑了自行车从学校到火车站，一路上要经过8个独立的交通灯，且设各灯为红灯的概率为0.6，以X表示一路上遇到红灯的次数。求X的概率分布律。

解：设A=“遇到交通灯是红灯”，$P(A)=0.6$，$X\sim B(8,0.6)$ n p

$$P(X=k)=C_8^k0.6^k0.4^{8-k},\ k=0,1,2,\cdots 8$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.007	0.0079	0.0413	0.1239	0.2322	0.2787	0.2090	0.0896	0.0168

一般，当$(n+1)p$是整数时，X最可能取值是$(n+1)p$及$(n+1)p-1$.

当$(n+1)p$不是整数时，X最可能取值是$(n+1)p$的整数值.

本例中$(n+1)p$=5.4不是整数，X最可能取值是5.4的整数值5.

excel：$P(X=5)=BINOMDIST(5,8,0.6,FALSE)=0.27869184$

极值.

③二项分布的极限($n\to\infty$) ⇒ 正态分布.

例题

例6：一袋有10个球，其中4红6白，若从中取三次，每次取一只，问恰有一只红球的概率$P(B)$多少？

解：不放回取球时，各次取球不独立

用分步法：$P(B)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

红 白 白 白 红 白 白 白 红

用超几何分布概率公式：$P(B)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$

注意要引入定义： ⇒ 放回取球时，各次取球独立，可用二项分布

设A=“任取一球为红球”，$P(A)=0.4$

X表示所取三只球中红球的只数

则 $X\sim B(3,0.4)$

$P(B)=P(X=1)=C_3^10.4\times0.6^2=0.432$

例7：

设有80台同类型设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是0.01，且一台设备的故障只能由一个人来处理。 p

现考虑两种配备维修工人的方案，

A：其一是由3个人共同维护80台； 27

B：其二是由4个人维护，每人负责20台。 20

试比较这两种方案在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小。

① X表示出故障的台数

$P(X=k)=C_{80}^k p^k(1-p)^{80-k}$

$P(A)=\sum_{k=4}^{80}P(X=k>,4)$

② $1-P(\bar{A_1})P(\bar{A_2})P(\bar{A_3})P(\bar{A_4})$

例9：某单位在进货时，一般从一大批产品中任取10件，若其中次品数不多于一件，则接受该批产品．现有一大批产品其次品率为0.05，则在以上验收方案下产品能被接受的概率$P(B)$是多少？

分析：注意到本题的产品数很多，所以可作近似处理：

1、可以认为抽检时，产品是一件一件抽取的

2、每取出一件检验后，又放回

结论：经以上近似处理后，可以把抽取10件产品检验看作是做了10次独立试验。为此，设 A="任取一件产品为次品"

X表示10件品中的次品数， 则 $X\sim B(10,0.05)$ 92.

$P(B)=P(X=0)+P(X=1)=C_{10}^00.05^00.95^{10}+C_{10}^10.05^10.95^9\ =91.39\%$

	A	B	C
1	100	0.92314328	=HYPGEOM.DIST(1,A1*0.05,10,A1,1)
2	1000	0.91469243	=HYPGEOM.DIST(1,A2*0.05,10,A2,1)
3	10000	0.91394384	=HYPGEOM.DIST(1,A3*0.05,10,A3,1)
4	100000	0.91386985	=HYPGEOM.DIST(1,A4*0.05,10,A4,1)
5	二项分布	0.91386164	=BINOM.DIST(1,10,0.05,1)

各类分布的关系

1. 二项分布极限

$$P(X=k)=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(np)^k(1-p)^{-\frac{1}{p}[-p(n-k)]}$$

$$\overset{n\to+\infty}{\underset{p\to0}{=}}\frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.\quad \lambda=np.$$

称为泊松分布. $p\to0$ ⇒ 稀有事件 ⇒ 服从泊松分布.

二项分布与超几何分布关系

设有m只产品，其中a只正品，b只次品$(m=a+b)$，则不放回取n只产品中恰有k只元件正品的概率为：

$$P(X=k)=\frac{C_a^kC_{m-a}^{n-k}}{C_m^n},$$

此式即为超几何分布的概率公式。

当$m\to+\infty$时，记 $p=\frac{a}{m}, q=\frac{b}{m}$，则可证：

X近似服从二项分布$B(n,p)$，即

$$P(X=k)=\frac{C_a^kC_{m-a}^{n-k}}{C_m^n}\approx C_n^kp^kq^{n-k}$$

3. 引入泊松分布

① 记号：$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$.

称 X 服从参数为λ的泊松分布

记作：$X\sim P(\lambda)$，$X\sim\pi(\lambda)$

⇒

*产生泊松分布背景

若在不相重叠的“时间”区间内需要“服务”的“顾客”数相互独立，则单位“时间”内需要服务的“顾客”数往往可视为服从泊松分布的。

这里的“时间”、“服务”、“顾客”都是广义的概念。

② 概率与期望.

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{ke^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda.$$

例: $\boxed{\text{当 } X=x \text{ 时}, Y\sim P(x)}$ ⇔ $\boxed{Y\sim P(X)}$

意思是: $P(Y=k\mid X=x)$

写为: $(Y\mid X=x)\sim P(x)$ 　把 $Y\mid X=x$ 记为 Z_x, 有 Z_1, Z_2

已知 $P(X=1)=P(X=2)=0.5$, 求 (1) $P(Y\geq 1)$ (2) 补漏! ☆

(1) $P(Z_x=k)=\frac{x^k e^{-x}}{k!}$, $x=1,2$.

$$P(Y\geq 1)=P(Y\geq 1\mid X=1)P(X=1)+P(Y\geq 1\mid X=2)P(X=2)$$

$$=P(Z_1\geq 1)P(X=1)+P(Z_2\geq 1)P(X=2).$$

实际上当 $n>10$, $p<0.1$ 时,就可用泊松分布代替二项分布作近似计算。

四、几何分布(Geometric)

设独立重复试验中,每次试验有两个结果 $A,\bar{A}$. $P(A)=p$, 随机变量 X 表示直到事件 A 发生为止所做的试验次数,则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad, \quad k=1,2,3,\cdots$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。

记为: $X\sim G(p)$

几何分布反映了直到事件 A 发生为止,所做的试验次数恰为 k 次的概率问题,也即反映了直到第 k 次才发生事件 A 的概率问题。

*五、帕斯卡(负二项)分布(Pascal)

设独立重复试验中,每次试验有两个结果 $A,\bar{A}$. $P(A)=p$, 随机变量 X 表示直到事件 A 发生了 r 次为止所做的试验次数,则

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \quad, \quad k=r,r+1,r+2,\ldots,$$

其中 r 为正整数, $0<p<1$.

称 X 服从参数为 (r,p) 的帕斯卡分布, $X\sim NB(r,p)$

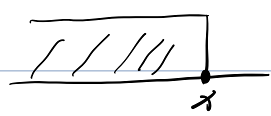
帕斯卡分布反映了独立试验中直到第 k 次发生了 r 次事件 A 的概率问题。

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}\cdot p$$

(三) 随机变量的分布函数

注意到 $\{a<X\leq b\}=\{X\leq b\}-\{X\leq a\}$

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$



$F(b)\triangleq P(X\leq b)$ 称为 X 的概率分布函数.

注意

(1) $F(x)$ 是单调不减函数 $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2) \end{cases}$

(2) $0 \le F(x) \le 1$ 且 $F(+\infty)=1$; $F(-\infty)=0$

(3). $F(x)$ 右连续 $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

(4) $F(b)-F(a) = P(a<X\le b)$.

例1：

X	0	1
p	q	p

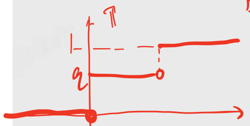
求X的概率分布函数$F(x)$及$P(X\ge 1)$的值。

解：

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ q, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

常数，则离散的。

等号不能随意写。



$P(X\le x)$

$= P(\{-\infty<X<0\} \cup \{X=0\})$

$= 0 + P(X=0)$

$= 0 + q$

45

区别：$P(X\ge 1)=p$ 与 $F(x)=1$ 当 $x\ge 1$

注意：$P(0<x\le 1) = P(0<x<1) + P(X=1) = p$

或 $\underline{\underline{\quad}}$ $F(1)-F(0) = 1-q = p$

$P(0\le x\le 1) = F(1)-F(0) + P(X=0) = 1$

离散型随机变量的分布函数

一般，离散型随机变量X的分布律为：

$P\{X=x_k\}=p_k$, $\quad k=1,2,\cdots$

$x_1 \quad x_2 \quad x_k \quad x \quad x_n$

$p_1 \quad p_2 \quad p_k \quad p_n$

由概率的可列可加性得X的分布函数为：

$$F(x) = P(X\le x) = \sum_{x_k\le x} P\{X=x_k\} = \sum_{x_k\le x} p_k$$

分布函数$F(x)$在$X=x_k$ $(k=1,2,\cdots)$处有跳跃，其跳跃值为 $p_k = P\{X=x_k\}$

实际有 $P(X=x_0) = F(x_0+0) - F(x_0-0)$

例2：设
$$X \sim F(x) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ 0.2, & -1\le x<2 \\ 0.7, & 2\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}$$

左

看等号：$x=-1$; $x=2$, $x=4$ 3个点

$P(X=-1) = 0.2$

$P(X=2) = 0.7-0.2 = 0.5$

$P(X=4) = 1-0.7 = 0.3$

例：$X \sim F(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{1+x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ ，求 A 和 $P(1<X<2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A = 1 \Rightarrow A=1$

$\therefore F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

$F(x) = P\{X\le x\}$

$P(1<X\le 2) = P(X\le 2) - P(X\le 1) = F(2)-F(1) = \frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

例：$F(x) = \begin{cases} A+Be^{-x}, & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} F(\infty) = A = 1 \\ \text{右连续 } F(0^+) = F(0) = 0 \Rightarrow A+B=0. \end{cases}$

连续随机变量：

对于 X 的分布函数，若 ∃ 非负的 $f(x)$，使对于 $\forall x$ 有 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 或 $P(X\in D) = \int_D f(t)dt$

称 X 为连续随机变量，$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数

$f(x)$ 的性质：① $f(x)\ge 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

③ $\forall a,b\in\mathbb{R},\ b>a,\ P\{a<X\le b\} = \int_a^b f(t)dt.$

$\Rightarrow P(X=c)=0,\ \forall c\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} P\{a-\Delta x<X\le a\} = \int_{a-\Delta x}^{a} f(t)dt = 0 \Rightarrow P(X=a)=0$

$\begin{cases} \text{离散随机变量没有概率密度概念.} \\ \text{连续随机变量没有分布列的概念.} \end{cases}$

④ $F'(x) = f(x)$ 在 $f(x)$ 连续点成立

⑤ $f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$

$\therefore P(x<X\le x+\Delta x) \approx f(x)\cdot\Delta x \longrightarrow$ 概率密度.

例：

例1：设随机变量 X 的密度函数为

$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0\le x<0.5 \\ 6-6x, & 0.5\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求分布函数 $F(x)$。

解：参考 $f(x)$ 的分段情况

$F(x) = P\{X\le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt =$

$\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx = 0, & x<0 \\ 0+\int_0^x 2x dx = x^2, & 0\le x<0.5 \\ -3x^2+6x-2, & 0.5\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

53

例2：设 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} c & ,0<x<1 \\ 2/9 & ,3<x<6 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$

(1) 求常数 c 的值；

(2) 写出 X 的概率分布函数；

(3) 要使 $P(X<k) = \frac{2}{3}$，求 k 的值。

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c + 3\cdot\frac{2}{9} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

(2) 略

(3) $F(k) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow k = \dots = 4.5 = \frac{9}{2}$

54

例4：设$F_1(x), F_2(x)$为两个分布函数，其相应的密度函数$f_1(x), f_2(x)$是连续函数，则必为概率密度的是

~~(A)~~ $f_1(x)f_2(x)$　　~~(B)~~ $2f_2(x)F_1(x)$

~~(C)~~ $f_1(x)F_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x) = (F_1F_2)'$

一、均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

称X在(a,b)上服从均匀分布 $X\sim U(a,b)$

$[a,b]$　　$X\sim U[a,b]$.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

均匀分布的性质

① $P(s<X<s+L)=\frac{L}{b-a}$ 与s无关

例1：在区间$(-1, 2)$上任取一实数X，(1) 试写出X的概率密度；(2) 求$P(X>0)$的值；(3) 若在该区间上任取10个数，求10个数中恰有两个数大于0的概率。

(1) 均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in(-1,2)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(2) $P(X>0)=\frac{2}{3}$

(3) $C_{10}^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^8$

$=\frac{4}{3^{10}}\cdot\frac{10\times9}{2}$

$=\frac{20}{3^8}$

61

例2：设X的分布律为：

X	1	2	3
P_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

设$Y\sim U(0, X)$，求 $P(Y<0.5)$，$P(X=1|Y<0.5)$

理解为$Y|X=x\sim U(0,x)$ ☆

二、指数分布

X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

记为 $X\sim E(\lambda)$

有时写为 $X\sim E(\theta)$. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

性质：无记忆性：$t_0>0$, $t>0$时

$$P(X>t_0+t\mid X>t_0)=\frac{P(X>t_0+t)}{P(X>t_0)}=\frac{e^{-\lambda t_0-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}}=e^{-\lambda t}=P(X>t).$$

⇒ 无论使用时间t_0多久，再大于t时间不坏的概率仍为$e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow P(X>t_0+t)=P(X>t)\,P(X>t_0)$$

例：$P(X>1)=e^{-1}$

$$P(X>3)=[P(X>1)]^3=e^{-3}$$

三、正态分布

定义：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$

其中 μ，σ^2 为常数，X服从参数为μ，σ^2的正态分布（Gauss分布）．记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$G_0(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha(x^2+y^2)}r\,dr\,d\theta}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha r^2}dr^2\cdot 2\pi}=\sqrt{-\frac{\pi}{\alpha}\cdot(0-1)}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$．　$G_1(\alpha)=\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2\alpha}$

$G_n(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^ne^{-\alpha x^2}dx$　　$-\frac{\partial G_n(\alpha)}{\partial\alpha}=G_{n+2}(\alpha)$　$\Rightarrow$　$G_2(\alpha)=\sqrt{\pi}\cdot(\alpha^{-\frac{1}{2}})'\times(-1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\alpha^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

正态分布密度函数的性质

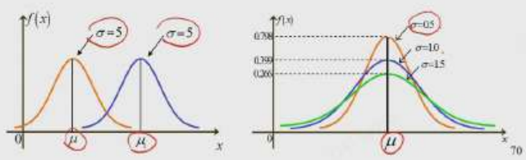
1° $f(x)$关于$x=\mu$对称

2° $f_{\max}(x)=f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

3° $\lim\limits_{|x-\mu|\to\infty}f(x)=0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ为位置参数(决定对称轴位置)　σ为尺度参数(决定曲线分散性) → 随着σ增大，数据离散度越大。



$\mu=0$，$\sigma=1$ 称为标准正态分布．

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\begin{cases}\Phi(x)+\Phi(-x)=1\\ \varphi(-x)=\varphi(x)\end{cases}$$

附表 2　标准正态分布表

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$$

$\Phi(1.23)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(3.49)$

$\Phi(c)=0.95$，$c=1.645$

$\Phi(d)=0.025=1-\Phi(-d)$

$\Phi(-d)=0.975\Rightarrow -d=1.96$

$d=-1.96$．

✦ 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，即X为一般正态分布。

$\because F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$　　作变换：$\frac{t-\mu}{\sigma}=z$

$$\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

P364

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X>a)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

实际上：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$　则　$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

例: $P(|X-\mu|<k\sigma)=P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)=\Phi(k)-\Phi(-k)=2\Phi(k)-1$

$=\begin{cases}0.6826, & k=1\\ 0.9544, & k=2\\ 0.9974, & k=3\end{cases}$ 　　3σ法则: 3σ以外的数据可认为是异常数据.

例2: 例6: 一批钢材(线材)长度(cm) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ (1)若 $\mu=100$, $\sigma=2$, 求这批钢材长度小于97.8cm的概率; (2)若 $\mu=100$, 要使这批钢材的长度至少有90%落在区间(97, 103)内, 问 σ 至多取何值?

解:(1) $P(X<97.8)=\Phi(\frac{97.8-100}{2})=\Phi(-1.1)=1-\Phi(1.1)$

$-\Phi(-50)$

查附表 $===1-0.8643=0.1357$

$\Phi(-50)\approx 0$

(2) $P(97<X<103)\geq 0.9$

$\Phi(\frac{3}{\sigma})-\Phi(-\frac{3}{\sigma})=2\Phi(\frac{3}{\sigma})-1\geq 0.9$

$\Phi(\frac{3}{\sigma})\geq 0.95\Rightarrow \frac{3}{\sigma}\geq 1.645\Rightarrow \sigma\leq 1.8237$

• 随机变量的函数分布

已知 X 分布, $Y=g(X)$, 求 Y 的概率分布.

1. 离散型: 列表即可

2. 对于连续型随机变量.

$f_X(x)\leftrightarrow f_Y(y)$

$F_X(x)=P\{X\leq x\}$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}$

若 $g(x)=y$ 为严格单调函数 $h(x)\triangleq g^{-1}(x)$

$F_Y(y)=P\{X\leq g^{-1}(y)\}$

$=F_X(g^{-1}(y))$

$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\cdot\frac{1}{g'(y)}$

例3: 设随机变量X具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & 其他\end{cases}$ 求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解: 分别记X,Y的分布函数为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}$

当 $y\leq 0$ 时, $F_Y(y)=0$;

当 $y\geq 16$时, $F_Y(y)=1$;

当 $0<y<16$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}$

$=P(\{-\sqrt{y}<X\leq 0\}\cup\{0<X<\sqrt{y}\})=P(0<X<\sqrt{y})$ $\boxed{=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{t}{8}dt=\frac{y}{16}}$ 繁

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & 0<y<16\\ 0, & 其他\end{cases}$ 　Y在区间(0, 16)上均匀分布。

$P(0<X<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(0)$

$\Rightarrow F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})-F_X(0)$

$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{8}=\frac{1}{16}$, $0<x<16$

例4: 随机变量X的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, -1<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$, $Y=1-|X|$, 求Y的密度函数。

$-1<x<1$ 时. $0\leq|x|<1$

$\Rightarrow Y\in(0,1]$.

①$y\leq 0$ $F_Y=P(Y\leq y)=0$

②$y>1$ $F_Y=P(Y\leq y)=1$

③$0<y\leq 1$ $F_{Y(y)}=P(Y\leq y)=0+P\{0<Y\leq y\}$

$=P(1-|x|\leq y)$

$=P((X\geq 1-y)\cup(X\leq y-1))$

$|x|\geq 1-y$

$=1-F_X(1-y)+F_X(y-1)$

$F_Y(y) = 1 - F_X(1-y) + F_X(y-1)$

$f_Y(y) = f_X(1-y) + f_X(y-1)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3(y-1)^2 & 0 < y \le 1 \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

例：$X \sim N(\mu, \sigma)$，$Y = aX + b$，求 f_Y

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

$$f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b-a\mu}{a\sigma}\right)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|\sigma a|} e^{-\frac{1}{2}\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{|a\sigma|^2}}$$

$\Rightarrow$ $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

前述结论验证 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

例：随机过程

例8：设某纺纱机在任一时间间隔 t(分钟)内出现的断头次数 $N(t) \sim P(\lambda t)$，求

随机过程

(1) 首次断头在10分钟以后出现的概率；

(2) 两次断头之间的间隔时间 Y(分钟)的概率密度。

$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

(1) $P(N(10) = 0) = e^{-10\lambda}$

(2) $F(y) = P\{Y \le y\} = 1 - P\{Y > y\}$
$= 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$
$= 0$　$y < 0$

91

例8：设某纺纱机在任一时间间隔 t(分钟)内出现的断头次数 $N(t) \sim P(\lambda t)$，求

(1) 首次断头在10分钟以后出现的概率；

(2) 两次断头之间的间隔时间 Y(分钟)的概率密度。

解：泊松分布分布律：$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$

(1) $P(N(10) = 0) = \frac{(10\lambda)^0 e^{-10\lambda}}{0!} = e^{-10\lambda}$

(2) $y > 0$，$F_Y(y) = P(Y \le y) = 1 - P(Y > y)$

$= 1 - P(N(y) = 0) = 1 - \frac{(\lambda y)^0 e^{-\lambda y}}{0!} = 1 - e^{-\lambda y}$

$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$　$\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

指数

91

例10：$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数。设$Y = F(X)$，试证$Y \sim U(0,1)$

证：由前知，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$\therefore Y = F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda X}, & X > 0 \\ 0, & X \le 0 \end{cases}$　$\Rightarrow 0 \le Y \le 1$　注意：$P(X > 0) = 1$

记$F_Y(y)$为Y的分布函数，

当$y \le 0$时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$;　当$y \ge 1$时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$;

当$0 < y < 1$时，$F_Y(y) = P\{1 - e^{-\lambda X} \le y\} = P\{e^{-\lambda X} \ge 1 - y\}$

$= P\left\{X \le -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right\} = F\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right) = 1 - e^{-\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right]} = y$

即 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$，$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$　$\Rightarrow Y \sim U(0,1)$.

rnd( )

$X = F^{-1}(Y)$

100

93

例：利用均匀分布产生随机数

例10：$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$，$F(x)$为$X$的分布函数。设$Y = F(X)$，试证$Y \sim U(0,1)$

$F(x)$　　$F_Y(y)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dv$　　$Y = F(X)$.

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$　$\Rightarrow 0 \le Y \le 1$

$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\} = P\{X \le F^{-1}(y)\}$
$= F(F^{-1}(y)) = y$

$$F_Y(Y) = \begin{cases} 1 & y \ge 1 \\ 0, & y \le 0 \\ y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

利用均匀分布产生随机数？略云

重要定理

定理：设 $X\sim f_X(x), -\infty<x<+\infty$，$Y=g(X)$，$g'(x)>0$ (或 $g'(x)<0$)，

反函数为 $X=h(Y)$，则：　$f_X(x)\ |x'|$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha=g(-\infty)$，$\beta=g(\infty)$　{当 $g'(x)<0$ 时 $\alpha=g(\infty)$，$\beta=g(-\infty)$}

证：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le g^{-1}(y)\}=F_X(g^{-1}(y))$，($g'(x)>0$ 条件下)

当 $y\le g(-\infty)$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge g(+\infty)$，$F_Y(y)=1$

在 $\alpha<y<\beta$ 时，

$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|[g^{-1}(y)]'\right|$

推论：设 $Y=g(X)$ 的反函数为 $X=h(Y)$，X 的密度函数为 $f_X(x)$，

在 $f_X(x)$ 的非零区间 (a,b) 上有 $g'(x)>0$ (或 $g'(x)<0$)。则：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min(g(a),g(b))$，$\beta=\max(g(a),g(b))$。

说明：可以对定理放宽条件，即 $y=g(x)$ 只要在 $f(x)$ 的非零区域上单调即可。

当然，函数关系不是单调，就需从定义出发求解。

例：

例14：$X\sim f(x)=\begin{cases} x/6, & 0\le x<3 \\ 2-x/2, & 3\le x<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$　$Y=X^2$，求 $f_Y(y)$。

因为 $y'=g'(x)=2x>0$ (当 $x\in[0,4)$)，故可应用定理的推论。

在 $0\le x<3$ 和 $3\le x<4$ 时　　$y=x^2$

$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|$　　$x=\sqrt{y}$

$h'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{6}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{12}, & 0\le y\le 9 \\ \left(2-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{4}, & 9<y\le 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

102

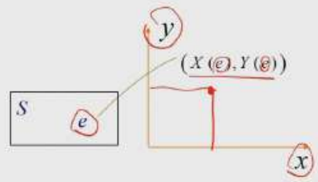
第三章 多维随机变量及其分布

二维随机变量

二维随机变量

定义：

设E是一个随机试验，样本空间$S=\{e\}$；设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)叫做二维随机变量或二元随机向量。



3

§1、二维离散随机变量

（一）离散随机变量的联合概率分布律

设(X,Y)所有可能取值为(x_i, y_j)，称

“,”是交集的关系

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}\quad, i,j=1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布律。书写习惯尽量一致.

简称(X,Y)的分布律，也可简称(X,Y)的概率分布。(X,Y)的分布律可用如图的表格来表示.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

• 性质 (1) $p_{ij} \geq 0$

(2) $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$

(3) $P((X,Y)\in D) = \sum\limits_{(i,j)\in D} p_{ij}$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$ D		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

例：例1：设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值，试求(X, Y)的联合概率分布及X、Y的分布。

$(X=i, Y=j)$ 取值 $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3,4$.

$$P(X=i, Y=j)=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i} & i\geq j\\ 0, & i<j\end{cases}$$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	1

例2:

例3. 袋中有1个红球,2个黑球,3个白球，现有放回地取两次，每次取一球，以X,Y,Z分别表示两次取球所得的红、黑、白球个数。求

(1)$P(X=1|Z=0)$; $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times2=\frac{4}{9}$

(2)$P(X=1,Z=0)$; $=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times2=\frac{1}{9}$

(3)(X,Y)的联合概率分布律.

$P(X=0,Y=0)=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times2=\frac{1}{3}$.

二、边际分布.

证明: $\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=P(Y=j)\\ \sum_{j=1}^{n}p_{ij}=P(X=i)\end{cases}$

$\Downarrow$

$P(X=i)=\sum_{j=1}^{n}P(X=i,Y=j)=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}$

$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{m}P(X=i,Y=j)=\sum_{i=1}^{m}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}$

称为边际分布律.

例：盒子里装有3只红球,2只白球，现分两次从中任取1球，以X Y分别表示取到第1,2次取到的红球数。采用不放回与放回抽样分别求：X,Y的联合分布律及边缘分布律。

解：$X=\begin{cases}0,\text{第1次取到白球}\\1,\text{第1次取到红球}\end{cases}$, $Y=\begin{cases}0,\text{第2次取到白球}\\1,\text{第2次取到红球}\end{cases}$

采用不放回抽样

$X\backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

采用放回抽样

$X\backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

联合分布 $\overset{\not}{\Rightarrow}$ 边缘分布

三、条件分布.

$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 有关 $Y=y_j$条件下，X的分布律.

$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$ 有关 $X=x_i$条件下，Y的分布律.

例2：(X,Y)的联合分布律为

$X\backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

已知：$P(Y\le0|X<2)=0.5$

求：(1) a,b的值；

(2) $\{X=2\}$条件下Y的~~条件分布律;~~

(3) $\{X+Y=2\}$条件下X的条件分布律。

(1) $\begin{cases}\frac{a+0.2}{a+0.4}=0.5 \Rightarrow a=0\\ a+b+0.6=0 \quad b=0.4.\end{cases}$

$\frac{1}{6}$;	$\frac{1}{6}$,	$\frac{2}{3}$

$P\{X=2|X+Y=2\}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$; $P\{X=1|X+Y=2\}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$

例3：一射手进行射击，击中目标的概率为p $(0<p<1)$，射击直至击中目标两次为止，设以X表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的(1)联合分布律(2)边际分布律(3)条件分布律。

(1) $P\{X=s, Y=t\} = q^{s-1}p \cdot q^{t-s-1}p$ $\quad s=1,2,3,\ldots t-1$, $t=2,3,\ldots$

$= p^2 q^{t-2}$

(2) $P(X=s) = \sum_{t=s+1}^{\infty} p^2 q^{t-2} = p^2 \cdot \frac{q^{s-1}}{p} = pq^{s-1}$, $s=1,2,\ldots$ ← 几何分布

$P(Y=t) = \sum_{s=1}^{t-1} p^2 q^{t-2} = (t-1)p^2q^{t-2}$, $t=2,3,\ldots$

帕斯卡分布

(3) $P(X=s \mid Y=t) = \frac{p^2 q^{t-2}}{(t-1)p^2q^{t-2}} = \frac{1}{t-1}$ 均等分布

$P(Y=t \mid X=s) = \frac{p^2q^{t-2}}{pq^{s-1}} = p \cdot q^{t-s-1}$ 指数分布（几何分布） $t=s+1, s+2, \ldots$

§2、二维随机变量分布函数

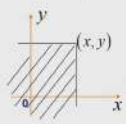
§2 二维随机变量的分布函数

（一） 联合分布函数

定义：设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，

二元函数

$$F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \stackrel{\text{记成}}{=} P(X \le x, Y \le y)$$



称为二维随机变量(X, Y)的联合分布函数。

前例，设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在1~X中等可能地取一整数值，求$F(3.5, 2)$。

已得(X, Y)的联合概率分布律为：

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

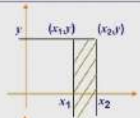
$F(3.5, 2)$

$F(x, y) = \Delta S$ 对应阴影部分面积。

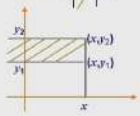
分布函数$F(x,y)$的性质

1° $F(x,y)$关于x, y单调不减，即：

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$



$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$



2° $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(+\infty, +\infty) = 1$

对任意x, y

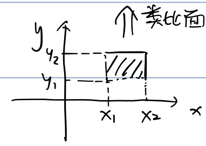
$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

38

3、$F(x,y)$关于x y右连续

4、$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

↑类比面积即可。



- 边缘分布函数

$F_X(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y)$

$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y)$

例2. 设(X,Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0 \\ 0.5y, & 0 \le x < 1, 0 \le y < 1 \\ y, & x \ge 1, 0 \le y < 1 \\ 0.5, & 0 \le x < 1, y \ge 1 \\ 1, & x \ge 1, y \ge 1 \end{cases}$$

求(1)$F_X(x), F_Y(y)$ (2)$P(X \le 0.5, Y > 0.5)$

解：(1) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.5 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ y, & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

$P(X \le 0.5, Y > 0.5) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$

A= “$X \le 0.5$”

B= “$Y \le 0.5$”

$= F_X(0.5) - F(0.5, 0.5)$

$= 0.5 - 0.5 \times 0.5$

$= 0.25$

● 条件分布函数（离散随机变量）

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X\le x \mid Y=y) = \frac{P(X\le x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

连续随机变量条件分布函数的处理方法

若$P(Y=y)=0$，对任给$\varepsilon>0$，$P(y<Y\le y+\varepsilon)>0$

则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X\le x|Y=y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}$$

例1：设$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 0.4, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$，$P(X=1,Y=0)=0.1$，

求 (1)联合分布律 (2) 当$Y=0$时X的条件分布律 $P(X=k|Y=0)$

(3)$Y=0$时X的条件分布函数。

(1)

X\Y	0	1	$P_{i\cdot}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$P_{\cdot j}$	0.4	0.6	

(2)

X|Y=0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$F_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.25 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

§3. 二维连续型随机变量

§3 二维连续型随机变量

（一） 联合概率密度

定义：对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负函数$f(x,y)$，使对于任意x,y，有

$$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv}$$

F(x,y) 一定是二维连续函数.

称(X,Y)为二维连续型随机变量.

称$f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数或概率密度函数或概率密度或密度函数。

1. 归一性 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv=1$

2. $f(x,y)\ge 0$

3. $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$. $x^2+y^2\le 1$ 就未必了。是线不是面☆

$P(X=1, Y=1)=P(X+Y=2)=P(X^2+Y^2=1)=0$

4. 在 $f(x,y)$ 的连续点 (x,y)，有 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y)$.

例1：设二维随机变量(X,Y)具有概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1)求常数k；(2)求分布函数$F(x,y)$；

(3)求$F(2,1)$；(4) 求$P(Y\le X)$的概率.

解：(1) $\iint\limits_D ke^{-(2x+3y)}\,dx\,dy$

$= k\left(\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot k=1$

$\therefore k=6$

(2) $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0 \text{且} y>0\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$

(3) $F(2,1)=(1-e^{-4})(1-e^{-3})$

(4) $P(Y\le X)$

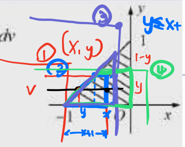
二维均匀分布

设二维随机变量(X, Y)在二维有界区域D上取值,且有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例: 例4: 已知(X,Y)是在图示区域D上的均匀分布随机变量,求 $F(x,y)$。

解: $f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in D\\0,(x,y)\notin D\end{cases}$ 提示: $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$



边界区域的划分:

① $y\le 0$ 或 $x\le -1$, $F(x,y)=0$

② $0\le y\le x+1$ 且: $-1<x<0$

$F(x,y)=\iint 2\cdot dxdy = \int_0^y dy\cdot\int_{y-1}^{x}2dx = \cancel{2(x+1-y)}d$

易混★

$=\int_0^y dv\int_{v-1}^{x}2\cdot du = 2\int_0^y(x-v+1)\,dv = 2xy+2y-y^2$

③ $y>x+1$ 且 $-1<x<0$, $F(x,y)=2\cdot(x+1)^2\cdot\frac{1}{2}=(x+1)^2$.

④ $0\le y\le x+1$ 且 $x\ge 0$. $F(x,y)=2(\frac{1}{2}-\frac{(1-y)^2}{2})=2y-y^2$

⑤ $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 1.\end{cases}\Rightarrow F(x,y)=1$ 66

二维正态分布

二维正态随机变量

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$;

称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,

记为: $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$;

边缘(际)密度函数

性质之: $F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$

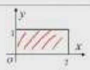
$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy\right]dx$$

$\Rightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

同理 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$.

例: 例1: 设$f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0<x<2, 0<y<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$, 求$f_X(x)$

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$



① $x<0$时, $f_X(x)=0$

② $0<x\le 2$时 $f_X(x)=\int_0^1 xy\,dy=\frac{x}{2}$.

③ $x>2$时, $f_X(x)=0$

例: 二维正态分布边际概率密度.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\rho\right]^2\right\}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}.$$ ← 恰说明边际密度无法确定联合密度函数.

条件概率密度函数

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X\le x \mid Y=y) = \lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{[F(x,y+\Delta y)-F(x,y)]/y}{[F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)]/y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F'_Y(x,y)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

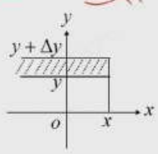
$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

用分布函数导出条件概率密度

证：$F_{X|Y}(x|y) = P(X\le x|Y=y) = \lim\limits_{\Delta y\to 0^+}\dfrac{P(X\le x, y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}$

$$= \lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)} = \lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{(F(x,y+\Delta y)-F(x,y))/\Delta y}{(F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y))/\Delta y} = \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{F'_Y(y)}$$

$$= \frac{\frac{\partial\left(\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv\right)}{\partial y}}{f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$



故 $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

例：例1：设数X在区间(0,1)上随机取值，当观察到 $X=x\,(0<x<1)$ 时，数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的概率密度 $f_Y(y)$。

$Y\sim U(X,1)$ [类似]

$f_X = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

对任给 $x\,(0<x<1)$ 条件下，Y条件概率密度

$f_{X|Y}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

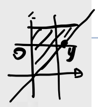
$f(x,y) = f_{X|Y}(y|x)\cdot f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & 0<x<y<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-x}dx$

$= \int_0^y \frac{1}{1-x}dx$

$= -\ln(1-y)$

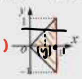
or $=0$ (其它)



例3：设二维随机变量(X,Y)在区域$\{(x,y):|y|<x<1\}$内均匀分布，求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$及$P(X>\frac{2}{3}|Y=\frac{1}{2})$.

解：由图得，(X,Y) 的概率密度为：

(1)



$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

结论：二维均匀分布的条件分布仍为均匀分布

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 1-|y|, & -1<y<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$P(X>\frac{2}{3}|X=\frac{1}{2})$

(2) $y=\frac{1}{2}$. $\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}$

(3) $P(X>\frac{2}{3}|Y>\frac{1}{2}) = \dfrac{P(X>\frac{2}{3}, Y>\frac{1}{2})}{P(Y>\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$

例4：设二元随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

解：$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

即在$X=x$条件下，Y的条件分布仍是正态分布，

$$Y|X=x\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ (1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$$

同理，在$Y=y$条件下，X的条件分布是正态分布。

总结

条件分布函数：$F_{X|Y}(x|y) = P(X\le x|Y=y)$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{x_k\le x} P(X=x_k|Y=y) & ，离散 \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx & ，连续 \end{cases}$$

设X,Y是连续随机变量，则

$$P(a<X\le b|Y=y) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$$

$$P(a<X\le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P((X,Y)\in D) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

三类分布形式

1.联合分布 $\begin{cases} F(x,y)=P(X\le x,Y\le y) \\ P_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j) \\ f(x,y)=\partial^2F(x,y)/\partial x\partial y \end{cases}$

2.边际分布 $\begin{cases} F_X(x)=F(x,+\infty) \\ P_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty}P_{ij},i=1,2,\cdots \\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \end{cases}$

(Y取定时)
3.条件分布 $\begin{cases} F_{X|Y}(x\mid y)=P(X\le x\mid Y=y) \\ P(X=x_i\mid Y=y_j)=P_{ij}/P_{\cdot j},i=1,2,\cdots \\ f_{X|Y}(x\mid y)=f(x,y)/f_Y(y) \end{cases}$

随机变量的独立性.

独立性定义：

设$F(x,y)$是二元随机变量(X,Y)的分布函数，

$F_X(x)$是X的边际分布函数，$F_Y(y)$是Y的边际分布函数，

若对所有x,y有：

$P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$ 即

$\boxed{F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)}$

称随机变量X,Y相互独立。

89

$\boxed{\text{等价判断}}$

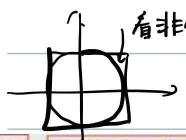
1.均离散： 对于$\forall i,j$. 都有 $P_{ij}=P_i\cdot P_j$

2.均连续： $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 对于平面上的点上(x,y)几乎处处成立.

(个别点(孤立点)不同可以接受) (除去面积为0的区域)

若：$f(x,y)$、$f_X(x)$、$f_Y(y)$均为连续函数，任意点都成立.

注意 $f(x,y)=h(x)g(y)$ 的未必相互独立



看非0区域是否对称 ? 否么.

定理 连续量X与Y独立的充要条件是$f(x,y)$几乎处处可写成x函数与y函数的乘积，即$f(x,y)=m(x)n(y)$。

例5 证明：对于二维正态随机变量(X,Y)，

X与Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$

证：设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$，则：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其边际概率密度的乘积为：

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

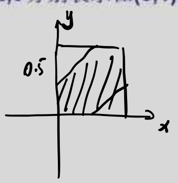
96

例7：在区间**(0,1)**上任取两数，求这两数之差的绝对值小于**0.5**的概率。

Y

$P(|X-Y|<0.5)$

解：设以***X,Y***分别表示在**(0,1)**上任取的两数，则



$$P(|X-Y|<0.5)=\iint\limits_{|x-y|<0.5} f(x,y)\,dxdy = 1-0.5^2=0.75$$

$M=\max\{X,Y\}$ 和 $N=\min\{X,Y\}$ 分布。

若 X, Y 相互独立

$F_M(z)=P\{M\le z\}=P(X\le z 且 Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$

$F_N(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

$$\begin{cases} F_M(z)=\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z) \\ F_N(z)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(z)) \end{cases}$$

例3：已知X,Y独立且均服从参数为0.1的指数分布，求

(1)$P(max(X,Y)\ge 10)$, (2)$P(max(X,Y)\ge 10, min(X,Y)\le 10)$.

(2)设 $A=$"$\max(X,Y)<10$"，$B=$"$\min(X,Y)>10$"

$P(max(X,Y)\ge 10, min(X,Y)\le 10)=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)$

$=1-F(10)^2-(1-F(10))^2$

$\boxed{\begin{matrix} \text{max 转化为 } \le \\ \text{min 转化为 } > \end{matrix}}$

例5：重复独立投掷均匀骰子3次，点数记为X_1,X_2,X_3求$P(\min(X_1,X_2,X_3)=2)$

$P(\min(X_1,X_2,X_3)=2)=P(\min(X_1,X_2,X_3)\ge 2)-P(\min(X_1,X_2,X_3)>2)$

$=[P(X\ge 2)]^3-[P(X>2)]^3$

$=(\frac{5}{6})^3-(\frac{4}{6})^3$

例6：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且均服从$U[0,\theta]$，记

$U=\max(X_1,\cdots,X_n)$，$V=\min(X_1,\cdots,X_n)$，求(U,V)的密度函数.

$$F_U(u)=\begin{cases}1, & x>\theta \\ \frac{x}{\theta}, & x\in[0,\theta] \\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$F_U(u)=\begin{cases}1 & x>\theta \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & x\in[0,\theta] \\ 0 & x<0\end{cases};\quad F_V=\begin{cases}1, & x>\theta \\ 1-(1-\frac{x}{\theta})^n & 0\le x\le\theta \\ 0 & x<0\end{cases}$$

$F(u,v)=P(U\le u, V\le v)$

$=P(U\le u)-P(U\le u, V>v)$

$=F_U(u)-P\{v\le X_1,X_2,\cdots X_n<u\}$

$=F_U(u)-[F_U(u)-F_U(v)]^n$

回看下每元

例6：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且均服从$U[0,\theta]$，记

$U=\max(X_1,\cdots,X_n)$，$V=\min(X_1,\cdots,X_n)$，求(U,V)的密度函数.

解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, 0\le x\le\theta \\ 0, \quad 其他\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta \\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$P(AB)=P(A\bar{\bar{B}})=P(A-\bar{B})=P(A)-P(A\bar{B})$，设 $A=\{U\le u\}, B=\{V\le v\}$

$F(u,v)=P(U\le u, V\le v)=P(U\le u)-P(U\le u, V>v)$

$=P(\max(X_1,X_2,\cdots X_n)\le u)-P(\max(X_1,X_2,\cdots X_n)\le u, \min(X_1,X_2,\cdots X_n)>v)$

$=P(X_1\le u, X_2\le u,\cdots X_n\le u)-P(v<X_1,X_2,\cdots X_n\le u)$

$=P(X_1\le u)P(X_2\le u)\cdots P(X_n\le u)-P(v<X_1\le u)P(v<X_2\le u)\cdots P(v<X_n\le u)$

$=[F(u)]^n-[F(u)-F(v)]^n$

$\therefore f(u,v)=\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\partial v}=n(n-1)f(u)f(v)[F(u)-F(v)]^{n-2}=\begin{cases}\frac{n(n-1)}{\theta^n}(u-v)^{n-2}, 0\le v\le u\le\theta \\ 0, \quad 其他\end{cases}$

数学期望

§1 数学期望

定义：

设离散型随机变量X的分布律为：$P(X=x_i)=p_i \quad ,i=1,2,\cdots$，

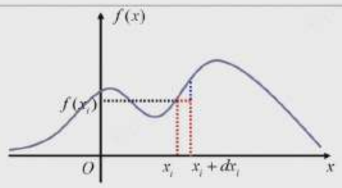
若级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$绝对收敛（即$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i<+\infty$），

则称级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$的值为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$，

即 $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i}$

连续型：

连续型随机变量的平均取值处理



曲边梯形面积：p_i　矩形面积：$f(x_i)dx_i$

当dx_i取很小时，$p_i\approx f(x_i)dx_i$　x_i → p_i

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i\approx\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$ 要绝对收敛

期望不存在的例子

$$P\left(X=(-1)^{i+1}\frac{3^i}{i}\right)=\frac{2}{3^i}$$

$$E=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\cdot\frac{3^i}{i}\cdot\frac{2}{3^i}=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1}{i}$$ 不绝对收敛

柯西分布 $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx\to\infty$$

例5：设 $X\sim U(0,1)$，对X独立观测n次得到 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求 $E(Y)$

$F(y)=$

例5：设 $X\sim U(0,1)$，对X独立观测n次得到 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求 $E(Y)$

解：$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$　$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & 其他\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y)=[F_X(y)]^n=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y^n, & 0<y<1\\ 1, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=([F_X(y)]^n)'=n[F_X(y)]^{n-1}f_X(y)=\begin{cases}ny^{n-1}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot ny^{n-1}dy=\frac{n}{n+1}\to 1$$

例6：有2个相互独立工作的电子装置，它们的寿命(小时)X_1,X_2,服从同一指数分布，其概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$，若将这2个电子装置串联联接组成整机，求整机寿命$Z$的数学期望。

解：$X_k\ (k=1,2)$的分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$F_Z(z)=1-(1-F(x))^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$E_Z(z)=\frac{1}{2\lambda}$$

常用随机变量分布的数学期望

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P_k & 1-p & p \end{array}$$

1. $X \sim B(1,p)$

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=p$$

2. $X \sim B(n,p)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad k=0,\cdots,n$$

$$\therefore E(X)=\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np$$

16

3. $X\sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

注意 $\lambda \triangleq np$ 是二项分布 np 一定时的极限

4. $X\sim U[a,b]$

$$E(X)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{2}(a+b)$$

5. 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(X)=\mu$$

随机变量函数的数学期望.

$$E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$$ 存在的条件是绝对收敛 ☆

or $$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,dx$$

推广: $Z=h(X,Y)$

$$E(Z)=\sum h(x_i,y_i)p_i$$

$$E(Z)=\iint_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)f(x,y)\,dxdy.$$

数学期望的性质

1. 设 C 为常数，有 $E(CX)=CE(X)$

2. X, Y 为两个随机变量 $E(c_1X+c_2Y+c_3) = c_1E(X)+c_2E(Y)+c_3$

推广：$E(\sum_{i=1}^{n} c_iX_i) = \sum_{i=1}^{n} c_iE(X_i)$

设 $f(x,y)$，$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy$

$= E(X)+E(Y)$

3. 若 X, Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

推广：若 X_i $i=1,2,3,\dots,n$ 相互独立

则 $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

设 $f(x,y) \Rightarrow E(XY)=\iint_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy$

$\overset{独立}{=} \iint xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy$

$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy\right]$

$= E(X)E(Y)$

但是 $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ 推不出 X, Y 相互独立 ☆

X, Y 若无线性关系，$E(XY)=E(X)E(Y)$ 也成立 ☆

例：例3：民航送客车载有20位旅客自机场出发，旅客有10个车站可下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$。（设每位旅客在各车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）

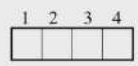
设 X_i 为旅客在第 i 个车站下车人数 >0 时 $X_i=0$；否则 $X_i=1$

$X=\sum_{i=1}^{10} X_i$

$E(X)=E(\sum_{i=1}^{10} X_i) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10E(X_1) = 10 \times 1 \cdot [1-(\frac{9}{10})^{20}]$

例2：设有5只球，随机地丢入编号为1，2，3，4的四个盒子中，若某盒落入的球的个数恰好与盒子的编号数相同，则称为一个配对，以 X 记配对的个数，求 $E(X)$.

$X=0,1,2$. 概率很难算



设 $Y_i=0$，第 i 盒不配对；$Y_i=1$，第 i 盒配对.

$X=\sum_{i=1}^{4} Y_i$；$E(X)=\sum_{i=1}^{4} E(Y_i)=$

$E(Y_i)=P(Y_i=i)=C_5^i \cdot (\frac{1}{4})^i \cdot (\frac{3}{4})^{5-i}$

$E(X)=\sum_{i=1}^{4} C_5^i (\frac{1}{4})^i (\frac{3}{4})^{5-i} = \frac{195}{256}$.

方差

数据差异的表达 ① $\sum_{i=1}^{n} |x_i-E(x)| \frac{1}{n}$

② $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2$

$Var(X)=E([X-E(x)]^2) = E[X^2-2XE(x)+E^2(x)]$

$= E(X^2)-E^2(X)$

重要公式：$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$ 称为均方差/标准差

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $Var(X)=\sigma^2 \neq 0$，

记 $X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$，称 X^* 为 X 的标准化变量.

证明：$E(X^*)=0$，$Var(X^*)=1$，

$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$

$Var(X^*)=E(X^{*2})-E^2(X^*)=\frac{1}{\sigma^2}E((X-\mu)^2)=\frac{1}{\sigma^2}E([X-E(X)]^2)=1$

常见分布方差

1. 泊松分布 $X \sim P(\lambda)$

$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!}=\lambda^2+\lambda$

$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\lambda$

$\Rightarrow Var(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

$\Rightarrow E(X)=\lambda$; $Var(X)=\lambda$、泊松分布 $E(X)=Var(X)$

2、均匀分布: $X \sim U[a,b]$,

$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{2}(a+b)$

$E(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)$

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+b^2+ab}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{1}{12}(a^2+b^2-2ab)=\frac{1}{12}(b-a)^2$

3. 指数分布:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\quad \lambda>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$E(X)=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\Gamma(2)=\frac{1}{\lambda}$

$E(X^2)=\int_0^{+\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2 e^{-\lambda x}d(\lambda x)=\frac{\Gamma(3)}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}$

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

求出 $E(X)$ 后千万记得 $Var(X)\neq E(X^2)$ 而 $=E(X^2)-E^2(X)$

4. 二项分布

5. 正态分布、

方差的性质，c=const条件下

1. $Var(c_1X+c_2)=c_1^2Var(X)$

2、X、Y两个随机变量. $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2E([X-E(X)][Y-E(Y)])$

若X,Y独立或无线性关系 $(E(XY)=E(X)E(Y))$. $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$

$E([X-E(X)][Y-E(Y)])=E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]=E(XY)-E(X)E(Y)\triangleq Cov(X,Y)$

3. $Var(X) \le E((X-c)^2)$ 当且仅当 $c=E(X)$ 取等

4. $Var(X)=0 \Leftrightarrow P(X=E(X))=1$

随机变量的标准化与变异系数

对于 X，若方差 $Var(X)$ 存在，令 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$，称 X^* 为标准化随机变量

目的是消除量纲，显然有 $E(X^*)=0$；$Var(X^*)=1$

类似地，若想要度量分布离散性的数字特征，为了消除量纲及取值大小，定义 $C_v=\dfrac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$，称为变异系数，定义其值的离散程度。

协方差与相关系数

1. 定义：当 $[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 数学期望存在时，

$$Cov(X,Y) \triangleq E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} = E(XY)-E(X)E(Y)$$

2. 性质：若 X、Y 协方差存在，则

① $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

② $Cov(X,X)=Var(X)$

③ $Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$

④ $\sum_{i=1}^{n} Cov(X_i,Y) = Cov(\sum_{i=1}^{n} X_i, Y)$

证明：$Cov(\sum_{i=1}^{n} X_i, Y) = E(\sum_{i=1}^{n} X_iY) - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Cov(X_i,Y)$

⑤ X，Y 相互独立 $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

⑥ 当 $Var(X)\cdot Var(Y)\neq 0$ 时，有 $Cov(X,Y)^2 \le Var(X)Var(Y)$，

当且仅当 XY 有严格线性关系时等号成立

证明：① 必要性：$Y=c_1X+c_2$，$E(Y)=c_1E(X)+c_2$；$E(XY)=E(c_1X^2+c_2X)=c_2E(X)+c_1E(X^2)$

$Cov(X,Y)=c_2E(X)+c_1E(X^2)-c_1E^2(X)-c_2E(X)=c_1Var(X)=\frac{1}{c_1}Var(Y)$

$\Rightarrow Cov^2(X,Y)=Var(X)Var(Y)$.

② 充分性：$Cov^2(X,Y)=[E(XY)-E(X)E(Y)]^2 = E^2(XY)+E^2(X)E^2(Y)-2E(X)E(Y)E(XY)$

$[E(X^2)-E^2(X)][E(Y^2)-E^2(Y)]$

$Var(X)Var(Y)=E^2(X)E^2(Y)+E(X^2)E(Y^2)-E^2(X)E(Y^2)-E(X^2)E^2(Y)$

$=[E(X^2)-E^2(X)][E(Y^2)-E^2(Y)]$

$=E[(X-E(X))^2]E([Y-E(Y)]^2)$

$Var(tX-Y)=t^2Var(X)+Var(Y)-2tCov(X,Y)\geq 0$

$\Rightarrow [2Cov(X,Y)]^2-4Var(X)Var(Y)\le 0$

$\Rightarrow$ 取等时 $t=\dfrac{2Cov(X,Y)}{2Var(X)}=\dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}=\sqrt{\dfrac{Var(Y)}{Var(X)}}$

$Var(tX-Y)=Var(Y)+Var(Y)-2\cdot Var(Y)=0$

$\Rightarrow Y=kX+b$

对于随机变量 X, Y，$E(X^2), E(Y^2)$ 均存在且 $Var(X)\cdot Var(Y)\neq 0$ 时，

称 $\rho_{XY} \triangleq \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$ 为 X, Y 的相关系数

$$= Cov\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}, \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right)$$

① 若 X, Y 独立 $\Rightarrow \rho_{X,Y}=0$，反之不成立

② 若 $|\rho_{XY}|=1 \Rightarrow X, Y$ 有严格线性关系.

③ 若 $\rho_{XY}=0 \Rightarrow$ 没有线性关系 .

• 其它数字特征

• 矩　$\mu_k \triangleq E(X^k)$（若存在,则）称为 X 的 k 阶（原点）矩

$\nu_k \triangleq E([X-E(X)]^k)$　称为 X 的 k 阶中心矩.

$E(X^k Y^l)$　称为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合（原点）矩.

大数定律和中心极限定理

(一) 依概率收敛

设 $\{Y_n, n\geq 1\}$ 为一随机变量序列，c 为一常数，对于 $\forall \varepsilon>0$，都有

$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - c| > \varepsilon\} = 0$，则称 $\{Y_n, n\geq 1\}$ 依概率收敛于常数 c.

记为：$Y_n \xrightarrow{P} c$，当 $n\to+\infty$ 时.

性质：若 $X_n \xrightarrow{P} a$，$Y_n \xrightarrow{P} b$，g 在 (a,b) 连续

则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$

特别地，若 $X_n \xrightarrow{P} a$，$f(x)$ 在点 a 处连续，则 $f(x) \xrightarrow{P} a$

例：设 $X_n \sim N(0, \frac{1}{n})$，求证 $X_n \xrightarrow{P} 0$

证明：$X_n \sim N(0,\frac{1}{n})$　$P\{|X_n - 0| > \varepsilon\} = P\{X_n > \varepsilon\} + P\{X_n < -\varepsilon\} = 1-\Phi(\varepsilon\cdot\sqrt{n}) + \Phi(-\varepsilon\cdot\sqrt{n})$

$= 2(1-\Phi(\varepsilon\sqrt{n}))$

$n\to\infty$，$P\{|X_n| > \varepsilon\} \to 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$

(二) 马尔可夫不等式与切比雪夫不等式

1. 马尔可夫不等式：

设随机变量 k 阶矩均存在 $(k\geq 1)$

对于 $\forall \varepsilon>0$，有 $P\{|Y|>\varepsilon\} \leq \dfrac{E[|Y|^k]}{\varepsilon^k}$ 成立

特别地，当 Y 为取非负值的随机变量时，有 $P\{Y>\varepsilon\} \leq \dfrac{E(Y^k)}{\varepsilon^k}$

证明：对于 $\forall \varepsilon>0$，令 $Z = \begin{cases} \varepsilon, & \text{当 } |Y|\geq\varepsilon \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } |Y|<\varepsilon \text{ 时.} \end{cases}$

则 $Z\leq |Y| \Rightarrow Z^k \leq |Y|^k \Rightarrow E(Z^k) \leq E(|Y|^k)$

而 $E(Z^k) \triangleq \varepsilon^k \cdot P\{|Y|\geq\varepsilon\}$

$\Rightarrow P\{|Y|\geq\varepsilon\} = \dfrac{E(Z^k)}{\varepsilon^k} \leq \dfrac{E(|Y|^k)}{\varepsilon^k}$

2. 切比雪夫不等式

设 X 方差 $Var(X)$ 存在，对 $\forall \varepsilon>0$，有 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\} \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$ 成立

证明. 利用马尔可夫不等式，令 $Y = |X-E(X)|$，有 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\} \leq \dfrac{E((X-E(X))^2)}{\varepsilon^2} = \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

- 有什么用呢，举例：

① 已知 $E(X)=\mu$，$Var(X)=\sigma^2$

则 $P(|X-\mu|<3\sigma) = 1-P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\} \geq 1-\dfrac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \dfrac{8}{9}$

② 已知 $E(X_n)=0$，$Var(X_n)=\frac{1}{n}$，求证 $X_n \xrightarrow{P} 0$.

$P\{|X_n|\geq\varepsilon\} \leq \dfrac{Var(X_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2\cdot n}$

取 $n\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n|\geq\varepsilon\} = 0$，$X_n \xrightarrow{P} 0$

(三) 几个大数定律

1. (弱)大数定律，设 $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ 为一个随机变量，若存在常数序列 $\{c_n, n\geq 1\}$，使得

当 $n\to+\infty$，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i - c_n \xrightarrow{P} 0$

即 $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i - c_n|\geq\varepsilon\}=0$

2. 切比雪夫大数定律

设 $X_1, X_2, \dots X_n$ 相互独立，具有相同的数学期望 μ 和相同的方差 σ^2，则当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu$

证明

随机样本与统计量

- **总体**：研究对象的全体。如一批灯泡。
- **个体**：组成总体的每个元素。如某个灯泡。

  总体是某一数量指标的全体，是具有确定分布的随机变量。
- **抽样**：从总体X中抽取有限个个体，进行观察的取值过程。
- **随机样本**：随机抽取的n个个体的集合$(X_1,X_2,\dots,X_n)$，n为样本容量
- 满足以下两个条件的随机样本$(X_1,X_2,\dots,X_n)$称为**简单随机样本**：
  1. 代表性：每个X_i与X同分布
  2. 独立性：$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的随机变量

[说明]：后面提到的样本均指简单随机样本。

由概率论知，若总体X具有概率密度$f(x)$，

则样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$具有联合密度函数：

$$f_n(x_1,x_2,\cdots x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

3

- **统计量**：不含任何未知参数的样本的函数。

一般地，使用

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体X的样本，

1. 样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
2. 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$S$为样本标准差
3. 样本k阶(原点)矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \quad (k=1,2,\cdots)$
4. 样本k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k \quad (k=2,\cdots)$

注：$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$，$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$

样本与总体的各阶矩对比表

特征数据	样本(随机变量) $\xrightarrow{P}$	总体（常数）
均值	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i$
方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	$Var(X)=E(X-E(X))^2$
均方差/标准差	$S=\sqrt{S^2}$	$\sigma=\sqrt{Var(X)}$
k阶原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$\mu_k=E(X^k)$
k阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$	$\nu_k=E(X-E(X))^k$

5

例1：$X_1,\dots X_n$是总体X的样本，$E(x)=\mu$，$Var(x)=\sigma^2$

求 $E(\bar{X})$，$Var(\bar{X})$ $E(S^2)$

$E(X_i^2)=E^2(X_i)+Var(X_i)=\sigma^2+\mu^2$

$E(\bar{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$； $Var(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$ ； $E(\bar{X}^2)=E(\bar{X})^2+Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$

$E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right]=\frac{n}{n-1}\left[E(X^2)-E(\bar{X}^2)\right]$

$=\frac{n}{n-1}\left[E(X^2)-E^2(X)-(E(\bar{X}^2)-E^2(\bar{X}))\right]$

$=\frac{n}{n-1}\left[\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}\right]=\sigma^2$

or $=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2-2\bar{X}X_i+\bar{X}^2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(E(X_i^2)-2\mu^2+E(\bar{X}^2))=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(E(X_i^2)-\mu^2+\frac{\sigma^2}{n})$

错误处. X_i与$\bar{X}$有关联，不独立

例2：$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2,\dots X_n$为样本

求$E(\bar{X})$，$E(S^2)$，$E(\bar{X}^2)$，$P(\bar{X}=E(x))$

解：$E(\bar{X})=E(X)$； $E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=Var(X)$；

$E(\bar{X}^2)=Var(\bar{X})+E^2(\bar{X})$ ； $P(\bar{X}=E(X))=0$ $\boxed{?}$ ✓ 正确的.

$=\frac{1}{n}Var(X)+E^2(X)$

$E(X)=\int_0^1 2x(1-x)dx=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$； $E(X^2)=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\therefore E(\bar{X})=\frac{1}{3}$； $E(S^2)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$ ； $E(\bar{X}^2)=\frac{1}{18n}+\frac{1}{9}$ ； $P(\bar{X}=E(X))=0$ ✓

例3: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 $N(12,4)$ 样本. $X \sim N(12,4)$, $n=5$

(1) 求 $P(\bar{X}-12>1)$ (2) 求 $P\{\min\{X_1, X_2, \dots X_5\} \le 10\}$

(1) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $E(\bar{X})=12$, $Var(\bar{X})=\frac{1}{5}Var(X)=\frac{4}{5}$

$\bar{X} \sim N(12, \frac{4}{5})$

$P(\bar{X}-12>1) = 1-P(\frac{\bar{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}} \le \frac{\sqrt{5}}{2}) = 1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})$

(2) $P(\min\{X_1,\dots X_5\} \le 10\} = 1-P\{\min\{X_1, X_2, \dots X_5\}>10\} = 1-\prod_{i=1}^{5} P(X_i>10)$

$= 1-[P(X>10)]^5$

$= 1-(1-\Phi(-1))^5$

标准正态分布的上侧α分位数

设 $X \sim N(0,1)$，若 z_α 满足条件 $P\{X>z_\alpha\}=\alpha$, $0<\alpha<1$，称 z_α 为标准正态分布的上侧α分位数.

$\Phi(z_\alpha) = 1-\alpha$

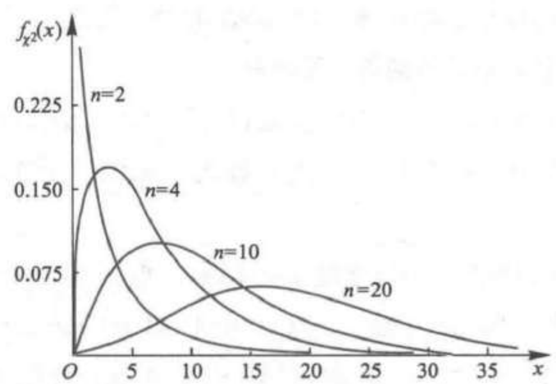
常用的分布函数

(一) χ^2 分布, $X_1, X_2, \dots X_n$ 相互独立, $X_i \sim N(0,1)$ $(i=1,2,3,\dots n)$

$X \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为n的 $\chi^2(n)$ 分布，自由度是独立的标准正态分布的随机变量

密度函数: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$
且 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$



■ 图 6.2.1 $\chi^2(n)$ 分布的密度函数

$Y \sim \chi^2(n)$

性质: (1) χ^2 分布可加性. $Y_1 \sim \chi^2(n_1)$; $Y_2 \sim \chi^2(n_2)$ 且 Y_1, Y_2 相互独立, 则有 $Y_1+Y_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

若m个独立 $Y_1+\dots+Y_m \sim \chi^2(n_1+n_2+\dots+n_m)$

(2) $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = nE(X^2) = n[\overset{1}{Var(X)}+\overset{0}{E^2(X)}] = n$

$Var(Y) = nVar(X^2) = n[E(X^4)-\underset{1}{E^2(X^2)}]$ $=2n$

$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3.$

χ^2分布的上侧α分位数

$\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)dx=\alpha$ 点 $\chi^2_\alpha(n)$ 称为 $\chi^2(n)$分布的上(侧)α分位数

当n>40时，有近似公式 $\chi^2_\alpha(n)=\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

记号说明：χ^2 — 随机变量

$\chi^2(n)$ — 随机变量/分布

$\chi^2_\alpha(n)$ → 分位数，是一个常数

(二) t分布

$\boxed{X, Y要独立☆}$

1. $X\sim N(0,1)$　$Y\sim\chi^2(n)$，$t\triangleq\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$　称t服从自由度为n的t分布

密度函数为：$f_t(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$，$x\in\mathbb{R}$.

当n→∞时，$f_t(x)\to\varphi(x)$标准正态密度函数

2. 性质：① $f_t(x)$为偶函数（单峰关于y轴对称）

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

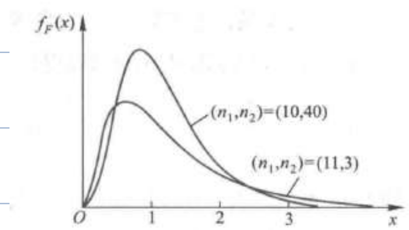
③ t分布上α分位数 $\triangleq t_\alpha(n)$.

(三) F分布

1. 设 $U\sim\chi^2(n_1)$；$V\sim\chi^2(n_2)$；$F\triangleq\frac{U/n_1}{V/n_2}\sim F(n_1,n_2)$ 服从F分布

分布函数为：$f_F(x)=\frac{\Gamma((n_1+n_2)/2)(n_1/n_2)^{n_1/2}x^{n_1/2-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+\frac{n_1x}{n_2}]^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$，$x>0$

如右图



■ 图 6.2.5　$F(n_1,n_2)$ 分布的密度函数

2. 性质 ① 若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$　(显然)

② 若 $X\sim t(n)$，则 $X^2\sim F(1,n)$

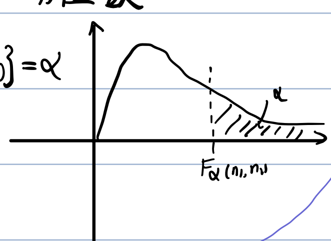
证明：$X\sim\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$，其中 $Z\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$

$\Rightarrow X^2\sim\frac{Z^2}{Y/n}$，$Z^2\sim\chi^2(1)$，$Y\sim\chi^2(n)$.

$\Rightarrow\frac{Z^2}{Y/n}\sim F(1,n)$，亦即 $X^2\sim F(1,n)$

③ F分布函数的上α分位数

$F_\alpha(n_1,n_2)\triangleq P\{X\geq F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$



$1-\alpha=1-P\{X\leq F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}$

$\Rightarrow\alpha=P\{\frac{1}{X}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\}$

$\Rightarrow\alpha=P\{F(n_2,n_1)\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\}$

$\Rightarrow F_\alpha(n_2,n_1)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$

且有：$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$　证明

抽样分布定理

1. 设 $(X_1, X_2, \dots X_n)$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$，S^2 分别是抽样样本均值和样本方差

有 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

2. 且有 ① $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

② $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立

通俗理解：$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^2$ 类比 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ $\chi^2(n)$

由于增加了 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 这一条约束，自由度 -1

于是 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

2.①证明：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2-2\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(Y_i^2+\overline{Y}^2-2Y_i\overline{Y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2$$

通过正交变换可证明 - - - - -

②证明：$\overline{X}$ 为均值，S^2 为偏差指标 $\Rightarrow$ 两者独立。

3. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

证明：$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\cdot\frac{\sigma}{S} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}}} = \frac{U}{\sqrt{V/n-1}} \sim t(n-1)$$

4. $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ $(Y_1, Y_2, \dots Y_{n_2})$ 分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$

且两者相互独立，样本方差为 S_1^2，S_2^2，则

① $F \triangleq \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1, n_2)$

证明：$U \triangleq \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$　　$\frac{\frac{U}{n_1-1}}{V/n_2-1} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

$V \triangleq \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$

② $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

证明：$\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n_1}} \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ $\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2) \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$\frac{\overline{Y}-\mu_2}{\sigma_2/\sqrt{n_2}} \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

③ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$ 时

$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，其中 $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$S_w=\sqrt{S_w^2}$

$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$

$$\begin{cases}\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1) \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)\end{cases} \Rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \Big/ \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)\sigma^2}} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-1)$$

例： $X_1, X_2, \dots X_{10}$ 为总体 $N(0, 0.3^2)$ 的样本，求 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$

设 $Y = \sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{\sigma^2}$ ， $Y \sim \chi^2(10)$

$P(Y > \frac{1.44}{0.3^2})$ = ①近似计算 ⇒ 中心极限定理，

$\Rightarrow P(Y > 16) = \alpha = P(Y > \chi^2_\alpha(10)) \simeq 0.10$

$\chi^2_{0.10}(10) = 15.987$ $P(Y > 15.987) = 0.10$

$\chi^2_{0.05}(10) = 18.307$ $P(Y > 18.307) = 0.05$

例： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， $(X_1, X_2, \dots X_n)$ 为样本，求 $E(S^2)$ $Var(S^2)$ $Var(\bar{X} S^2)$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

① $E(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = n-1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$

② $Var(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = 2(n-1) \Rightarrow Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

③ $Var(\bar{X} S^2) \overset{?}{=} Var(\bar{X}) Var(S^2)$ ✗

$= E(\bar{X}^2 S^4) - E^2(\bar{X} S^2)$

$= E(\bar{X}^2) E(S^4) - E^2(\bar{X}) E^2(S^2)$

$E(\bar{X}^2) = Var(\bar{X}) + E^2(\bar{X}) = \mu^2 + \frac{1}{n}\sigma^2$

$E(S^4) = Var(S^2) + E^2(S^2) = \sigma^4 + \frac{2}{n-1}\sigma^4 = \frac{n+1}{n-1}\sigma^4$

于是 $Var(\bar{X} S^2) = (\mu^2 + \frac{1}{n}\sigma^2)(\frac{n+1}{n-1}\sigma^4) - \mu^2\sigma^4$

$= \frac{n+1-n+1}{n-1}\mu^2\sigma^4 + \frac{n^2+n+n-1}{n(n-1)}\sigma^6$

$= \frac{2}{n-1}\mu^2\sigma^4 + \frac{n^2+2n-1}{n(n-1)}\sigma^6$

思考： $Var[n(\bar{X}-\mu)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2] = ?$

$= Var[n(\bar{X}-\mu)^2 - (n-1)S^2]$

$= Var(n(\bar{X}-\mu)^2) + (n-1)^2 Var(S^2)$

$= \sigma^4 Var((\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2) + (n-1)^2 \cdot \frac{2\sigma^4}{n-1}$

$= \sigma^4 \cdot 2n + (2n-2)\sigma^4 = \sigma^4 \cdot 2 + (2n-2)\sigma^4$

$= 2n\sigma^4$

例：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， $(X_1, X_2, \dots X_4)$ 与 $(Y_1, \dots Y_9)$ 两独立样本均取自 X， $(\bar{X}, S_1^2)$ $(\bar{Y}, S_2^2)$

(1) 证明： $\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{4}} \sim t(8)$ 是自由度，来自于S；样本个数

(3) $\frac{b\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2}{S_2^2} \sim F(n_1, n_2)$ ，求 b, n_1, n_2

(2) $a\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1} \sim t(k)$ ，求 a, k

(4) 若 $b \cdot \frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{S_2^2} \sim F(n_1, n_2)$ ，求 b, n_1, n_2

(1) 证明： $U \triangleq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{4}} \sim N(0, 1)$

$V = \frac{(9-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9-1) = \chi^2(8)$

$t \triangleq \frac{U}{\sqrt{V/9-1}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{4}}}{S_2/\sigma} = \frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{4}} \sim t(8)$

(2) $\bar{X}-\bar{Y} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{4}+\frac{\sigma^2}{9})$

$U_2 \triangleq \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\frac{\sigma^2}{9}}} \sim N(0,1)$

于是 $a = \frac{6}{\sqrt{13}}$

$k = 3$.

$V_2 \triangleq \frac{(4-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4-1) = \chi^2(3)$ 由于 U_2 和 V_2 相互独立 ☆

$\Rightarrow t_2 \triangleq \frac{U_2}{\sqrt{V_2/(4-1)}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}} = \frac{6}{\sqrt{13}} \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1} \sim t(3)$

(3) $U_3 = \sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(4)$

$V_3 \triangleq \frac{(9-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9-1) = \chi^2(8)$

$F \triangleq \frac{U_3/4}{V_3/8} = \frac{2\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2}{8S_2^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2}{S_2^2} \sim F(4, 8)$

$b = \frac{1}{4}$， $n_1 = 4$， $n_2 = 8$

$$\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2=(4-1)S_1^2$$

(4)

$$\frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3S_1^2}{S_2^2}\sim F(3,8)$$

$b=\frac{1}{3}$, $n_1=3$, $n_2=8$

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

① $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\sim N(0,1)$$

(1) $P\{\sqrt{5}(\bar{X}-\bar{Y}-1)<0.3\sqrt{5}\}=\Phi(0.3\sqrt{5})=0.749$

(2) $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{S_w\frac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{5}(\bar{X}-\bar{Y}-1)}{S_w}=\dfrac{\sqrt{5}}{0.9479}(1.3-1)=0.707$

$S_w=\sqrt{\dfrac{9S_1^2+9S_2^2}{9+9}}=\sqrt{\dfrac{S_1^2+S_2^2}{2}}=0.9479$

注意给的是方差还是标准差 ☆

参数的点估计

(一)矩估计法：设总体 X 分布函数为 $F(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)$，$(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)$ 是待估计的未知参数，假定总体 X 的 $i(i=1,2,\dots,m)$ 阶原点矩 $E(X^i)$（记为μ_i）存在且含未知参数（若不存在就用下一阶矩），则

$$\left\{\begin{array}{l}\mu_1=E(X^1)=g_1(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)\\ \vdots\\ \mu_m=E(X^m)=g_m(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)\end{array}\right.\Rightarrow \text{解出 } \theta_1,\theta_2,\dots\theta_m$$

由于 $A_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^i\xrightarrow{P}\mu_i=E(X^i)$

μ_i可用 A_i 来估计.

例：设总体 $X\sim U[0,\theta]$，对θ进行估计，抽取样本$(X_1,X_2,\dots X_n)$

(1) 求θ矩估计量　(2) $n=5$，样本为：(1.3, 2.1, 3.0, 3.5, 4.1)，求θ的矩估计值.

矩估计量：$E(X)=\frac{1}{2}\theta\Rightarrow\hat{\theta}=2\bar{X}$

$E(X)=\frac{1}{2}\theta=\bar{x}\Rightarrow\theta=2\bar{x}=5.6$

(3) 若 $X\sim U(-\theta,\theta)$，求矩估计量：$E(X)=0$，$Var(X)=\frac{(2\theta)^2}{12}=\frac{\theta^2}{3}=E(X^2)$ $\Rightarrow$ $\theta=\sqrt{3\mu_2}$，$\hat{\theta}=\sqrt{3A_2}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i^2}$

例：X的均值为μ，方差为σ^2，均存在，μ,σ^2均未知，$(X_1,X_2,\dots X_n)$取自总体X，求μ,σ^2估计

$$\begin{cases}\mu_1=E(X)=\mu \\ \mu_2=E(X^2)=\sigma^2+\mu^2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\mu=\mu_1 \\ \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}=A_1=\overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=B_2.$$

即也可用中心矩来建立方程，但注意两种方法估计出来的值不相同

例：设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\dots X_n)$为总体X的样本.

(1) μ,σ^2未知，求矩估计 ；(2) $\mu=\mu_0$已知，求矩估计.

(1) $$\begin{cases}E(X)=\mu_1=\mu \\ \nu_2=Var(X)=\sigma^2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\mu=\mu_1 \\ \sigma^2=\nu_2\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X} \\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=B_2\end{cases}$$

(2) 若μ已知，$\mu=\mu_0$.

使用矩估计 $$\begin{cases}E(X^2)=\mu_0^2+\sigma^2=\mu_2 \\ \Rightarrow \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu_0^2\end{cases}$$

使用中心矩估计. $$\begin{cases}\nu_2=Var(X)=\sigma^2 \\ \Rightarrow \hat{\sigma}^2=B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2\end{cases}$$

两者哪个更好？
看 $Var(\mu)$，$E(\mu)$，再判断

(二) 极大似然估计法.

极大似然原理 $L(\hat{\theta}(x_1,x_2,\dots x_n))=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta)$

$L(\theta)$取max值时的$\hat{\theta}(x_1,x_2,\dots x_n)$即为所求

例：$f(x)=\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}$，$0<x\le1$，$\theta>0$为参数，求极大似然估计

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$l(\theta)=\ln[L(\theta)]=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

$$\Rightarrow \theta=n^2\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^{-2}$$

$\Rightarrow \theta_L=n^2\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^{-2}$ 为极大似然估计.

例：总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，求$\hat{\mu}_L$，$\hat{\sigma}_L$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$l(\mu,\sigma)=\ln(L(\mu,\sigma))=n\ln(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$=n\left[-\ln\sigma-\frac{1}{2}\ln 2\pi\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\mu-x_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=0 \quad \sum_{i=1}^{n}\mu-x_i=0\Rightarrow \mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma}=0\Rightarrow -\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^3}=0\Rightarrow \sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

$$\hat{\sigma}_L^2=Var(X)=B_2$$

参数估计的无偏性准则

定义：若参数θ的估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,X_3,X_4,\dots,X_n)$，满足 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是θ的一个无偏估计量。

若 $E(\hat{\theta})\neq\theta$，称 $E(\hat{\theta})-\theta$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 的偏差。

若 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是θ的渐近无偏估计量。

例：$X\sim f(x)=\frac{1}{2\mu}e^{-\frac{|x|}{\mu}}$，求极大似然估计量，证明是无偏估计

$f(x_i,\mu)=\frac{1}{2\mu}e^{-\frac{|x_i|}{\mu}}$

$L(\mu)=\frac{1}{(2\mu)^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|/\mu} \Rightarrow l(\mu)=-n\cdot\ln(2\mu)-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$\frac{\partial l(\mu)}{\partial\mu}=-\frac{n}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0 \Rightarrow \mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \cancel{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$E(\hat{\mu}_L)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|x_i|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|x|)=E(|x|)$

$E(|x|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\mu}e^{-\frac{|x|}{\mu}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mu}xe^{-\frac{x}{\mu}}dx=\mu\cdot\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha}d\alpha=\mu\cdot\Gamma(2)=\mu$

$\therefore E(\hat{\mu}_L)=\mu$，无偏估计

例2：$X\sim U[0,\theta]$ 极大似然估计为 $\hat{\theta}_L=\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$，检验其无偏性

$g(X)=\max\{X_1,X_2,X_3,\dots,X_n\}$

$F_n(x)=P\{g(x)\le x\}=P\{\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}\le x\}$

$=P(X_1\le x)P(X_2\le x)\cdots P(X_n\le x)$

$=F^n(x)$

$\therefore F_n(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ (\frac{x}{\theta})^n & 0\le x\le\theta\\ 1 & x>\theta\end{cases}$　　$f_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}xf_n(x)dx=\int_0^{\theta}n(\frac{x}{\theta})^n d(\frac{x}{\theta})=\frac{n\theta}{n+1}$

$\therefore E(\hat{\theta})=\frac{n}{n+1}\theta$　说明 $\hat{\theta}_L$ 是有偏的，而 $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L$ 是无偏估计。

对于有偏估计的纠偏方法

- 若 $E(\hat{\theta})=a\theta+b$，其中 a,b 为常数，且 $a\neq0$，则 $\frac{1}{a}(\hat{\theta}-b)$ 是θ的无偏估计
- 若 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计，且 $Var(\hat{\theta})>0$，则 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

证明：$E(\hat{\theta}^2)=Var(\hat{\theta})+E^2(\hat{\theta})=\theta^2+Var(\hat{\theta})\neq\theta^2$，证毕。

有效性准则：

设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是θ的两个无偏估计，若 $Var(\hat{\theta}_1)\le Var(\hat{\theta}_2)$，对一切 $\theta\in\Theta$ 成立且至少有1个 $\theta\in\Theta$ 使不等号成立，

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。

例：总体X，样本 $(X_1,X_2,X_3,\dots,X_n)$，$E(X_i)=E(\bar{X})=\mu$

每个 X_i 都可看作对总体的无偏估计。

$Var(E_i)=\sigma^2>Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

说明用 $\bar{X}$ 估计会更准。

- 另一种评估标准：**均方误差准则**：

设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的点估计，方差存在，则称 $E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$ 是估计量的均方误差，记为 $Mse(\hat{\theta})$，即 $Mse(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$

若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计 $\Rightarrow Mse(\hat{\theta})=Var(\hat{\theta})$，即为前述的有效性准则。

例：抽取正态 X 总体中样本方差 S^2 和二阶中心矩 B_2，在均方误差准则标准下，来估计 σ^2 哪个最优：

$E(S^2)=\sigma^2$

$E(B_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2-\bar{X}^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

① $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi_{(n-1)}$

$Var(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2)=(\frac{n-1}{\sigma^2})^2Var(S^2)=2(n-1)$

$Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=E(S^4)-E^2(S^2)\Rightarrow E(S^4)=\frac{n+1}{n-1}\sigma^4$

由于 $E(S^2)=\sigma^2$ 无偏估计，故 $Mse(S^2)=Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

② $(\theta=\sigma)$

$Mse(B_2)=E[(B_2-\theta^2)^2]$ ↗进行拆项

$=E(B_2^2)+E(\theta^4)-2E(B_2)\cdot\theta^2$

$E(B_2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

$E(B_2^2)=(\frac{n-1}{n})^2E(S^4)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\sigma^4=\frac{n^2-1}{n^2}\sigma^4$

$Mse(B_2)=(1-\frac{1}{n^2})\sigma^4+\sigma^4-2\sigma^2\cdot(1-\frac{1}{n})\sigma^2$

$=(1-\frac{1}{n^2}+1-2+\frac{2}{n})\sigma^2$

$=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^2$

$Mse(B_2)=E((B_2-\sigma^2)^2)=Var(B_2-\sigma^2)+E^2(B_2-\sigma^2)$

$=Var(B_2)+[E((1-\frac{1}{n})S^2-\sigma^2)]^2$

$=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$

当 $n>1$ 时，$\frac{2}{n-1}>\frac{2n-1}{n^2}\Rightarrow$ 均方误差准则下，B_2 优于 S^2

相合性(一致性)准则

- 估计量 $\hat{\theta}$ 依概率趋近于 θ，即 $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta$，称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合/一致估计量

① 用矩/极大似然估计都是相合性估计。（总体分布满足一定条件时才是）

② 无偏估计 ⇎ 相合性估计

例：设总体的各阶矩 $E(X^j)=\mu_j$，$Var(X)=\sigma^2$ 存在，$(X_1,X_2,\dots X_n)$ 样本

(1) $A_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^j$ 是 μ_j 的相合性估计

(2) B_2 与 S^2 均为 σ^2 的相合性估计

(3) S 是 σ 的相合性估计.

其实直接就是辛钦大数定律的体现
直接使用辛钦大数定律更快

(1) $P\{|A_j-\mu_j|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{Var(A_j-\mu_j)}{\varepsilon^2}=1-\frac{Var(A_j)}{\varepsilon^2}$

$Var(A_j)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i^j)=\frac{1}{n}Var(X^j)=\frac{1}{n}(\mu_j-\mu_i^2)$

$\lim_{n\to\infty}P\{|A_j-\mu_j|<\varepsilon\}\geq\lim_{n\to+\infty}1-\frac{\mu_j-\mu_i^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}=1$

于是 $A_j\xrightarrow{P}\mu_j$，$(n\to\infty$ 时$)$

(2) $P\{|B_2-\sigma^2|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}Var(B_2-\sigma^2)$

① $Var(B_2-\sigma^2)=Var(B_2)=Var(\frac{n-1}{n}S^2)=(\frac{n-1}{n})^2Var(S^2)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2n-2}{n^2}\sigma^4$

$B_2\xrightarrow{P}\sigma^2$

② $P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}Var(S^2)=1-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1}$

$S^2\xrightarrow{P}\sigma^2$

(3) $P\{|S-\sigma|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{Var(S-\sigma)}{\varepsilon^2}=1-\frac{Var(S)}{\varepsilon^2}$

$Var(S)=E(S^2)-E^2(S)$

$E(S)=E(\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2})$

$S^2\xrightarrow{P}\sigma^2$

$\Downarrow$

$S\xrightarrow{P}\sigma$ ∴是相合估计.

例：
总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\sqrt[\theta]{x}}{\theta x}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$\theta>0$ 未知，$X_1,\dots X_n$ 为来自 X 的样本，

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，并判断是否为相合估计量.

(2) 求极大似然估计 $\hat{\theta}_2$，并判断是否无偏

(1) $E(X)=\int_0^1 xf(x,\theta)dx=\int_0^1\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\theta}}x^{\frac{\theta}{\theta+1}}\Big|_0^1=\frac{1}{\theta+1}=\mu$；

$E(X^2)=\int_0^1\frac{1}{\theta}x^{1+\frac{1}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{\theta}}\cdot 1=\frac{1}{2\theta+1}$

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$
$=\frac{1}{2\theta+1}-\frac{1}{(\theta+1)^2}=\frac{\theta^2+2\theta+1-2\theta-1}{(\theta+1)^2(2\theta+1)}$
$=\frac{\theta^2}{(\theta+1)^2(2\theta+1)}$

$\Rightarrow\theta=\frac{1}{\mu}-1\Rightarrow\hat{\theta}_1=\frac{1}{\mu_1}-1$；$\mu_1=\bar{X}$

∴ $\hat{\theta}_1=\frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$

不直接证 $\hat{\theta}_1\xrightarrow{P}\theta$，利用依概率收敛的性质，证 $\bar{X}\to\frac{1}{\theta+1}$ 来间接证明.

$Var(\bar{X}-\frac{1}{\theta+1})=\frac{1}{n}Var(X)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\theta^2}{(\theta+1)^2(1+2\theta)}$

$\Rightarrow\bar{X}\xrightarrow{P}\frac{1}{\theta+1}$

$\Rightarrow\bar{X}$ 的连续函数 $\frac{1}{\bar{X}}-1\xrightarrow{P}\frac{1}{\theta+1}$ 的连续函数 θ

$\Rightarrow$ 相合估计量.

(2) $L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\frac{1}{\theta}}}{x_i}$，$\Rightarrow l(\theta)=-n\ln\theta+(\frac{1}{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{dl(\theta)}{d\theta}=0\Rightarrow-\frac{n}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\Rightarrow\hat{\theta}_L=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$E(\hat{\theta}_L)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=-E(\ln X)$

$E(\ln X)=\int_0^1\ln x\cdot\frac{1}{\theta}\cdot x^{\frac{1}{\theta}-1}dx=\int_0^1\ln x\cdot d(x^{\frac{1}{\theta}})$

$=x^{\frac{1}{\theta}}\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}}\frac{dx}{x}$

$=-\frac{1}{\frac{1}{\theta}-1+1}\cdot x^{\frac{1}{\theta}}\Big|_0^1=-\theta$ $\Rightarrow E(\hat{\theta}_L)=\theta\Rightarrow$ 无偏估计.

例13：总体X，$(X_1, X_2, \dots X_n)$ 为样本，$E(X)=\mu$，$Var(X)=\sigma^2$，令 $T=a_1X_1+\dots+a_nX_n$

(1) T是μ的无偏估计，求 a_i 关系

(2) 无偏估计中哪个最有效？

(1) $E(T)=(a_1+a_2+\dots+a_n)\mu=\mu \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_i=1$

(2) 判定：$Var(T)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \cdot \sigma^2$，哪个最有效？

使 $Var(T)$ 最小，利用不等式 $\sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}=\frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geq \frac{1}{n}$

当且仅当 $a_1=a_2=\dots=a_n=\frac{1}{n}$ 成立.

于是无偏估计中 $\bar{X}$ 最有效.

区间估计

点估计：利用样本求出未知参数θ的估计量$\hat{\theta}$，由于其随机性，$\hat{\theta}$不可能恰好等于θ。点参数没有反映$|\hat{\theta}-\theta|$这个近似值的误差范围.

于是引入区间估计.

• 置信区间与置信度

设总体分布函数 $F(x;\theta)$ 含有未知参数θ，$(X_1, X_2, \dots X_n)$ 是来自总体X样本，对给定的值α $(0<\alpha<1)$，若有统计量 $\hat{\theta}_L=\theta_L(X_1,X_2,\dots X_n)$ $\hat{\theta}_U=\theta_U(X_1,X_2,\dots X_n)$

满足 $\hat{\theta}_L<\hat{\theta}_U$，且对给定的 $\alpha\in(0,1)$ 和任意的 $\theta\in\Theta$，有 $P\{\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U\}\geq 1-\alpha$，则称随机区间 $(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U)$ 是参数θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$\hat{\theta}_L \rightarrow$ 置信下限(双侧) $\hat{\theta}_U \rightarrow$ 双侧置信上限.

称区间平均长度 $E(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$ 为置信区间的精确度，称 $\frac{1}{2}E(\hat{\theta}_U-\hat{\theta})$ 为误差限. ⇒ 给定样本容量，置信区间越长 ⇒ 置信度越高 ⇒ 精确度越低

注意：确定区间，θ落于区间概率为0 or 1 $\neq 1-\alpha$
随机区间，θ落于区间概率为 $1-\alpha$

• 奈曼原则：在置信度达到一定的前提下($>90\%$; $>95\%$; $>99\%$)，取精确度尽可能高的区间

置信区间小 ↑ (精确度)

• 对于连续随机变量 $P\{\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U\}=1-\alpha$ 取等号为置信区间

• 单侧置信区间：

引例：总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1, X_2, \dots X_n)$ 为样本，

(1) σ^2已知，求μ置信度为$1-\alpha$的置信区间

$P(k_1<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<k_2)=1-\alpha \xrightarrow{\text{奈曼原则}} k_2=-k_1=z_{\alpha/2}$

置信区间 $-z_{\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2} \Rightarrow \left(\mu-\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}, \mu+\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

• 枢轴量与统计量：①枢轴量：是含有未知参数样本函数，其分布不依赖于未知参数.

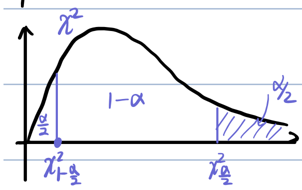
②统计量：不含未知参数的样本函数.

• 常用枢轴量：

$N(\mu,\sigma^2)$

①单总体：

		双侧区间估计.	单侧置信下限(1-α)	单侧置信上限.
a. σ^2已知求μ的区间估计：	$\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)$	$-z_{\alpha/2}<\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}<z_{\alpha/2}$	$\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}<z_\alpha\Rightarrow\mu>\bar X-\frac{\sigma}{\sqrt n}z_\alpha$	$\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}>-z_\alpha\Rightarrow(-\infty,\bar X+\frac{\sigma}{\sqrt n}z_\alpha)$
b. σ^2未知求μ的区间估计：	$\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$	$-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}<t_{\alpha/2}(n-1)$	$\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}<t_\alpha(n-1)\Rightarrow(\bar X-\frac{S}{\sqrt n}t_\alpha(n-1),+\infty)$	$(-\infty,\bar X+\frac{S}{\sqrt n}t_\alpha(n-1))$
c. μ未知，求σ^2的区间估计	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_\alpha(n-1)\Rightarrow(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)},+\infty)$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\Rightarrow(-\infty,\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)})$
d. μ已知，求σ^2的区间估计	$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(n)$			



② 双总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(1) σ_1^2,σ_2^2已知，$\mu_1-\mu_2$区间估计.　$\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$　类比，同理

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$但未知，$\mu_1-\mu_2$区间估计　$\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$　类比，同理.

(3). μ_1,μ_2未知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$区间估计　$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$　同理.

(4) μ_1,μ_2已知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$区间估计　$\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/\sigma_1^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1,n_2)$

(5) 若 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$未知，求$\mu_1-\mu_2$区间估计.

$\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)\sim N(0,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$.

①当n充分大时，$\frac{\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

②当n有限小时，$\frac{\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim t(k)$

其中 $k=\left[\frac{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}\right]$

$\simeq\min\{n_1-1,n_2-1\}$.

例：设某种植物的高度 X(cm) 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，随机选取36棵，其平均高度为15cm.

就以下几种情形，求μ的95%置信区间　(1) $\sigma^2=16$　(2) σ^2未知，$S^2=16$.

(1) 取 $G=\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{36}}=\frac{\bar X-\mu}{4/6}$　$\alpha=0.05$.

$-z_{\alpha/2}\le\frac{\bar X-\mu}{2/3}\le z_{\alpha/2}\Rightarrow(\bar X-\frac{2}{3}z_{\alpha/2},\ \bar X+\frac{2}{3}z_{\alpha/2})$

$z_{\alpha/2}=1.96$　$\Rightarrow$　(13.69cm, 16.31cm)

(2) 取 G= $\bar X-\mu$ = $\bar X-\mu$，同理

(2) 取 $G=\frac{\cdots}{S/\sqrt{36}}=\frac{\cdots}{2/3}$ ……

例：两个独立总体 $X\sim N(\mu_1,1)$；$Y\sim N(\mu_2,4)$，$\mu_1\mu_2$ 未知. $(X_1,X_2,\dots X_9)$ $(Y_1,Y_2,\dots Y_{16})$

求 $2\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间 $1-\alpha=95\%$

$$G=\frac{(2\bar{X}-\bar{Y})-(2\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{Var(2\bar{X}-\bar{Y})}}=\frac{(2\bar{X}-\bar{Y})-(2\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{4Var(\bar{X})+Var(\bar{Y})}}$$

置信区间……

非正态总体参数的区间估计.

①设 $X\sim B(1,p)$，求 p 的 $1-\alpha$ 的置信区间（容量大）

$$n\bar{X}=X_1+X_2+\dots+X_n\sim B(n,p)\overset{\text{中心极限}}{\sim}N(np,\ np(1-p))$$

$$\bar{X}\sim N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)\Rightarrow\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\sim N(0,1)$$

取枢轴量 $G=\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$，$G\sim N(0,1)\Rightarrow P\{-z_{\alpha/2}<G<z_{\alpha/2}\}\simeq1-\alpha\Rightarrow$ ……

② $U(0,\theta)$，大容量样本 $(X_1,\dots X_n)$

$$n\bar{X}\sim N\left(\frac{n\theta}{2},\frac{n\theta^2}{12}\right)$$

取 $G=\frac{n\bar{X}-\frac{n\theta}{2}}{\sqrt{\frac{n\theta^2}{12}}}\sim N(0,1)$

③ $X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$　$\lambda>0$ 且未知，样本 $(X_1,X_2,X_3,\dots X_n)$

(1) 证明 $2\lambda n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$　(2) 求置信上限 $(1-\alpha)$

$Y=2\lambda X$

$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$

$\Rightarrow\chi^2(2)$ $\Rightarrow Y\sim\chi^2(2)$

由 χ^2 分布可加性 $\Rightarrow 2\lambda n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$

(2) 略.

假设检验.

	原假设 H_0 真的	原假设 H_0 假的
接收 H_0	正解	第二类错误
拒绝 H_0	第一类错误	正解.

$P(\text{I类}) = P_{H_0\text{为真}}\{\text{拒绝}H_0\}$

$P(\text{II类}) = P_{H_0\text{为假}}\{\text{接收}H_0\}$

$p_1 = \alpha(C) = P\{\text{拒}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = P_{\mu=\mu_0}\{|\bar{x}-\mu_0| \geq C\}$

$= P_{\mu=\mu_0}\{\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}}\}$

$= 2-2\Phi(\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}})$

$H_0: \mu=\mu_0=6.0$
$H_1: \mu\neq\mu_0=6.0$
拒绝域 $|\bar{x}-\mu_0| \geq C$

$p_2 = P_{\mu\neq\mu_0}\{|\bar{x}-\mu_0| < C\}$

$\beta(C)$ $= P_{\mu\neq\mu_0}\{\mu_0-C < \bar{x} < C+\mu_0\}$

$= P_{\mu\neq\mu_0}\{\frac{\mu_0-C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0+C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}$

$= \Phi(\frac{\mu_0+C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{\mu_0-C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$ 此时 μ 未知,

只有 μ 已知才能求出第二类错误

$\alpha(C) = 2-2\Phi(\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}})$ $C\nearrow$. $\alpha(C)\searrow$. $\beta(C)\nearrow$

$\beta(C) = \Phi(\frac{\mu_0+C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{\mu_0-C-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$

把两类错误概率相互制约,但可增加样本容量,可使 $\alpha(C)$. $\beta(C)$ 在一定范围内.

检验统计量:用于判断原假设 H_0 是否成立的统计量 $T=T(X_1, X_2, \dots X_n)$ 称为对应假设问题的检验统计量

拒绝域:对应于拒绝 H_0 假设时样本值的范围, define 为 W.

$\bar{W}$ (补集)称为接受域

左侧例子中, 检验统计量为 $\bar{X}-\mu_0$ (或 $\bar{X}$), 拒绝域为 W.

$W=\{(x_1, x_2, \dots x_n): |\bar{x}-\mu_0| \geq C\}$

奈曼-皮尔逊原则

首先控制 I类 $\alpha(C) < \alpha$, α 为较小常数 $\alpha\in(0,1)$, 允许犯第一类最大概率.

前提下. 使 $\beta(C)$ 尽可能小

$p_1 = \alpha(C) = 2-2\Phi(\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}}) \leq \alpha$

$\Rightarrow \Phi(\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}}) \geq 1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$

取 $C \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$

C取最小 $C = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$

拒绝域 $|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| \triangleq |z| \geq z_{\alpha/2}$

假设类型：

原假设（零假设）H_0，备择假设 H_1

关于总体参数 θ 的假设：

H_0: $\theta=\theta_0$; H_1: $\theta\neq\theta_0$ （双边检验）

H_0: $\theta\geq\theta_0$; H_1: $\theta<\theta_0$ （左边检验） H_1 中小于号，左边检验

H_0: $\theta\leq\theta_0$; H_1: $\theta>\theta_0$ （右边检验） H_1 中为"大于号"，右边检验

总体参数写左边

（或 H_0: $\theta=\theta_0$，H_1: $\theta<\theta_0$ 左边检验

H_0: $\theta=\theta_0$; H_1 $\theta>\theta_0$ 右边检验）

左边假设检验

H_0: $\mu\geq\mu_0$; H_1: $\mu<\mu_0$ （$N(\mu,\sigma^2)$）

反证法确定拒绝域：

① 先假设 H_0 为真 $\Rightarrow$ $\bar{X}-\mu_0\leq k$

② $\bar{X}\geq\mu_0$ 为常态

$\bar{X}<\mu_0$ 也有可能

检验统计量取为：$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq C$

$\alpha(C)=p_1=P_{\mu\geq\mu_0}\{拒绝H_0\}=P_{\mu\geq\mu_0}\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq C\}$

$=P_{\mu\geq\mu_0}\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq C+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}$

$=\Phi(C+\underbrace{\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{负数})\leq\Phi(C)\triangleq\alpha$

$\Rightarrow C=z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

拒绝域 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -z_\alpha$

同理右边检验 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_\alpha$

另一种判定是否拒绝 H_0 的方法 $\Rightarrow$ P-值.

P-值：当 H_0 成立时，检验统计量取比观察到的结果更为极端的数值的概率

计算（解释）：引例中 $H_0\Rightarrow\mu=\mu_0=6.0$，$H_1$: $\mu\neq\mu_0$

拒绝域为 $|x-\mu_0|>z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

P-值为 $P\{|z|\geq z_0\}\triangleq\{|\frac{x-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|\geq z_0\}$

假设检验总结:

① μ 的假设检验: $z \triangleq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (或 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$) $\sim N(0,1)$ (或 $\sim t(n-1)$)

取决于 σ 是否已知

- 若为双边检验 $H_0: \mu=\mu_0$; $H_1\ \mu\neq\mu_0$,

大于号理解: 要判定 $\mu=\mu_0$、只要判定两者差很小, 小于一个c即可了, 那拒绝域自然是"$>$"

注意这里要代入t分布, 已经代错成 $z_{\alpha/2}$ 好几次了.

拒绝域为 $|\bar{x}-\mu_0| \boxed{>} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$ (或 $|\bar{x}-\mu_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} \boxed{t_{\alpha/2}(n-1)}$)

P-值 $\triangleq P\{|z| \geq |z_0|\}$ 的值. 其中 $z_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (或 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$).

$= 2(1-\Phi(|z_0|))$.

- 左边检验: (看 H_1 是小于号) $H_0: \mu \geq \mu_0$; $H_1\ \mu < \mu_0$

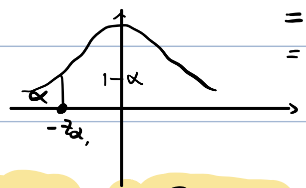
此时拒绝域 $\to \mu < \mu_0 \to \bar{x} < \square\ldots$

$z \triangleq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow$ $z<c$ 即可. $\Rightarrow \alpha(c) = P_{\mu\geq\mu_0}\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < c\}$

$= P_{\mu\geq\mu_0}\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < c + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}$

$= \Phi(c + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) \leq \Phi(c) \triangleq \alpha$.

意思就是:



$c \leq -z_\alpha$

c 取 $-z_\alpha$

于是 有 拒绝域 $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$

此时 P-值 $= \overset{\text{上界}}{\sup}\ P\{z < z_0\}$ $=\Phi(z_0)$

不管总之就是 $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 当正态看就好了 ($\mu=\mu_0$ 为放缩取sup上界的取等条件)

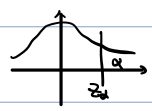
这时若 $\begin{cases} z_0 < -z_\alpha, \text{意思就相当于 } z_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 的}\bar{x}\text{落入拒绝域, 所以P-值与拒绝域殊途同归.} \\ \text{等价于P-值} < \alpha \end{cases}$

- 右边检验: (H_1 是 $>$) $H_0: \mu \leq \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$

$z \triangleq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, 拒绝域为 $z>c$.

$P_{\mu\leq\mu_0}\{z>c\} = P_{\mu\leq\mu_0}\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > c + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\} = 1-\Phi(c+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) < 1-\Phi(c) < \alpha$

$\Rightarrow \Phi(c) \triangleq 1-\alpha \Rightarrow c \triangleq z_\alpha$



$\therefore$ 拒绝域 $z > z_\alpha$ $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$

同理, 按理解: P-值 $= \{z > z_0\} = 1-\Phi(z_0)$

② σ^2 的假设检验 $\longrightarrow$ 对应 $\chi^2(n)$ 分布.

- 双边检验: $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$

自然取 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, 拒绝域同理, 有

$\chi^2 \in (-\infty, \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (\chi^2_{\alpha/2}(n-1), +\infty)$ 从双边可明显看出与置信区间关系.

P-值 $\Rightarrow$ $p_0 \triangleq P_{\sigma_0^2}(\chi^2 < \chi_0^2)$

$P_- \triangleq 2\min\{p_0, 1-p_0\}$ $\Rightarrow$ 相当于两边卡边界最后化简于此.

- 左/右边检验就很常规, 不会如此特殊, 略.

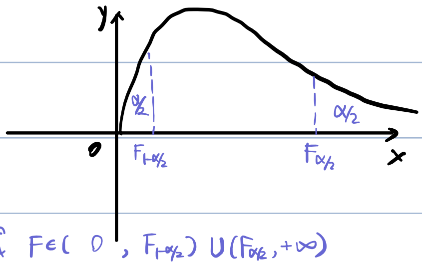
③ 双总体的 $\mu_1 \overset{?}{=} \mu_2$ 检验

取 $Z \triangleq \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma/\sqrt{n}} \Big/ \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，剩下化归为①情况

④ 双总体的 $\sigma_1^2 \overset{?}{=} \sigma_2^2$ 检验

$F \triangleq \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

对比 ②可知 • 双边检验：拒绝域从置信区间的补集考虑



拒绝域 $F \in (0, F_{1-\alpha/2}) \cup (F_{\alpha/2}, +\infty)$

P-值也同样，$P = \min\{P(F \geq f_0), P(F \leq f_0)\}$.

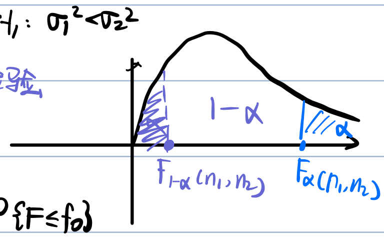
其中 $f_0 = S_1^2/S_2^2$.

• 左边检验：$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

拒绝域记忆方法：左边检验，

小概率事件 α 在左边

$F < F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$. $P = P\{F \leq f_0\}$



右边检验，小概率事件 α 在右边

$F > F_\alpha(n_1, n_2) \qquad P = P\{F \geq f_0\}$.

其余重点总结：事件概率关系

$P(A-B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) =$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$= P(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B)(A \cup C)$

之前笔记搬过来的

• 推论 ① 必然事件及不可能事件与任何事件独立

② A.B 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$.B 相互独立 $\Leftrightarrow$ A.$\bar{B}$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$.$\bar{B}$ 相互独立

证：$P(AB) = P(A)P(B) \qquad P(A)P(\bar{B}) = P(A)(1-P(B)) = P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$，证毕.

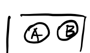
另：$P(A|B) = P(A)$； $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A})$ 都表明 A.B 独立

③ 若 $P(A) \cdot P(B) > 0$，则 "A.B 独立" 与 "A.B 不相容" 不会同时成立. 作为一个很重要的判定不相容的结论.

证明：(1) ⇒ 设 A.B 独立 $P(AB) = P(A)P(B) > 0 \Rightarrow$ A.B 相容

(2) $P(AB) = 0 \Rightarrow P(A|B)P(B) = 0 \rightarrow P(A|B) = 0 \neq P(A)$.

故结论成立



一定不独立.

• 相容与否定义在事件基础上；独立是定义在概率基础上.

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 一般事件

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ 独立事件

$= 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

引申： $= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$

• $P(A_1 \cup A_2 \cdots A_n) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$

常见分布：

指数分布和泊松别混

表1 几种常见分布的均值与方差

分布	分布率或 密度函数	数学期望	方差
0−1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,\dots,$	λ	λ
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

二元正态分布， 记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

性质： (1) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(2) $\rho=\rho_{XY}$

(3) X与Y独立 $\Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow X$与$Y$不相关

分布函数/f(x)相关

1. 已知 $g(x)$ 单调，$Y=g(X)$，

$F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y))$

$f(y)=f(g^{-1}(y))\cdot\left|\frac{1}{g'(y)}\right|$

2. $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

数字特征、大数定律

- $E(X)$ 比较简单
- $Var(X)$ easy
- $Cov(X,Y)$ easy
- $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$
- $\mu_k \triangleq E(X^k)$

样本与总体的各阶矩对比表

特征数据	样本(随机变量)	总体（常数）
均值	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$
方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$Var(X)=E(X-E(X))^2$
均方差/标准差	$S=\sqrt{S^2}$	$\sigma=\sqrt{Var(X)}$
k 阶原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$\mu_k=E(X^k)$
k 阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^k$	$\nu_k=E(X-E(X))^k$

大数定律不等式

- 对于 $\forall\varepsilon>0$，有 $P\{|Y|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E[|Y|^k]}{\varepsilon^k}$ 成立
- $\forall\varepsilon>0$ $\quad P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

其它：

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立