复变函数 杨励华.

课程教学网站：“浙大钉” “学在浙大”等

总评成绩占比：
线下作业与平时表现：30%
阶段测试：20%
期末考试：50%

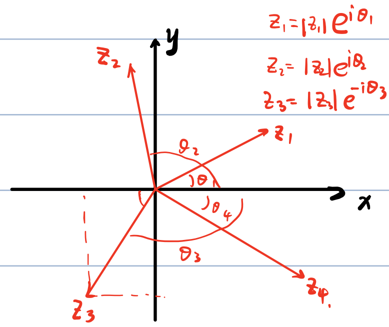
期末考试：统一命题，由学校安排考场，统一标准阅卷。
阶段测试：用四-五等级评分，采用相对评分办法。
作业：每周一次

第一章 复数基础

1. 辐角：$\mathrm{Arg}\, z$：定义为实轴正向与 z 表示的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 所夹角

把介于 $[-\pi, \pi]$ 的 $\theta_0 = \arg z$ 叫作辐角主值

即 $\mathrm{Arg}\, z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$.



$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$

$z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

$z_3 = |z_3| e^{-i\theta_3}$

$\theta_1 = \arg z = \arctan\frac{y}{x}$

$\theta_2 = \arg z = \pi - (\arctan\frac{y}{-x})$

$= \pi + \arctan\frac{y}{x}$

记法：在±π突变 但角度连续

$\theta_3 = \pi - \arctan\frac{y}{x} = -\arg z.$

$\theta_4 = -\arctan\frac{y}{x} = -\arg z.$

故 $\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{I, IV象限 } (x>0) \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & (x<0,\ y>0) \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & (x<0,\ y<0) \end{cases}$

- 易混：x轴下方的向量，夹角一定记得变成负的!!!

2. 复数运算的几何意义 → 乘积旋转；加减线性. 开根多解.

1. $z_1 = A_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z_2 = A_2 e^{i\theta_2}$

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ (不是所有都等)

但注意 $\arg(z_1 z_2) \underset{\text{不一定}}{\neq} \arg(z_1) + \arg(z_2)$

反例：$z_1 = -1 = e^{\pi i}$

$z_2 = +i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\arg(z_1 z_2) \neq \arg(z_1) + \arg(z_2)$

但 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) \overset{\text{存在一组}}{=} \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

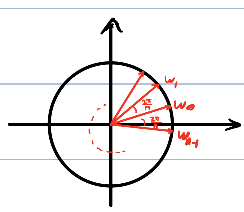
2. 开根：对于复数 $z = re^{i(\theta_0 + 2k\pi)} = re^{i\theta_0}$

↓注意这里kπ不能省☆ 正是此处导致开根多解.

$w^n = z$. 则 $w^n = re^{i(\theta_0 + 2k\pi)}$

$w = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k)} = w_0 \cdot e^{i \frac{2\pi}{n} k}$

$\therefore w_k = w_0 e^{ik\Delta}$, $\Delta = \frac{2\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.



3. 球面映射.

3. 复球面、扩充复平面与无穷远点

用三维空间中的球面投影法来引进扩充的复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 与无穷远点 (∞) 概念.

设 S 是三维空间中以 $(0, 0, \frac{1}{2})$ 为中心、直径为 1 的球面；$N(0, 0, 1)$ 为球的北极，$O(0, 0, 0)$ 是球的南极，复平面 $\mathbb{C}$ 与球面 S 在 O 点相切. 球面 S 上的点的坐标由 3 个实数 (x, y, ξ) 确定，其中复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 被认为是点 $(x, y, 0)$，见图 1-1. 设复平面 $\mathbb{C}$ 上点 $z(x, y, 0)$，考虑三维空间中连结 z 与 S 上的北极点 N 的线段 L，则 L 与 S 的交点只有一点为 P，反之，对于 S 上的一点 P_i，就有 $\mathbb{C}$ 上的 z_i 与之对应，这就建立了复平面 $\mathbb{C}$ 与球面除 N 以外的一一对应 $z \leftrightarrow P$. 复平面上模为 1 的点

$$z = x + \mathrm{i}y,\ z \in \{z;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

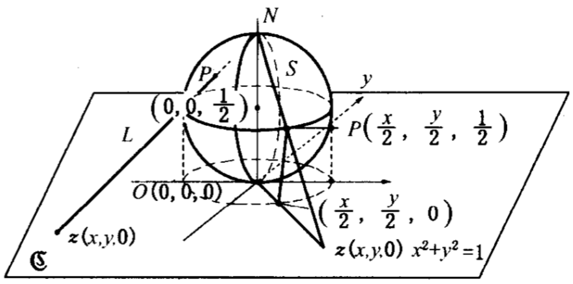


图 1-1 复球面

复数 $z = 0$ 对应了南极点 O，当 $|z| \to +\infty$ 时的 z 所对应的 $P \to N$. 复平面 $\mathbb{C}$ 上与球面 S 的北极点 N 相对应的点为无穷远点，记 $z = \infty$，它是模为 $+\infty$ 的点. 有限复平面 $\mathbb{C}$ 加上无穷远点"∞"，称为扩充的复平面. 记 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，与扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 相对应的球面 S 称为复球面.

注意：复平面 ∞ 只有 一个点". 区别于 $\pm\infty$.

4. 复数域 $\mathbb{C} = \{ z = x+iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ 是一个数域. 封闭

5. 平面点集： 详见微积分.

$1 < |z - z_0| \le 2$ ⟹ 注意它既不是开集也不是闭集

§ 1.2 平面点集

图 8-4

定义 8.3 设 $P(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$，把

$$\mathring{U}(P_0, \delta) \overset{\text{def}}{=\!=} \{P(x,y) : 0 < \rho(P_0, P) < \delta\}$$
$$= \{P(x,y) : 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}$$

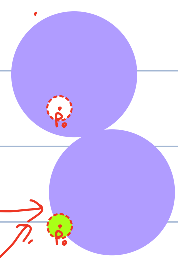
称为 P_0 的 δ 空心邻域$(\delta > 0)$，若 δ 不指明，可写为 $\mathring{U}(P_0)$. 把 $U(P_0, \delta) \overset{\text{def}}{=\!=} \{P(x,y) : \rho(P_0, P) < \delta\} = \{P(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}$ 称为 P_0 的 δ 邻域，若 δ 不指明，可写为 $U(P_0)$.

我们可利用邻域来描述点和点集之间的关系. 任意一点 $P_0 \in \mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E \subset \mathbf{R}^2$ 之间必存在以下三种关系之一：

(1) 内点——若存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使得 $U(P_0) \subset E$，则称点 P_0 是点集 E 的内点，当然 $P_0 \in E$. E 的全体内点构成的集合称为 E 的内部，记作 int E.

(2) 外点——若存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使得 $U(P_0) \cap E = \varnothing$，则称点 P_0 是点集 E 的外点，显然 $P_0 \notin E$.

(3) 边界点——若在点 P_0 的任一邻域内既含有属于 E 的点又含有不属于 E 的点，则称点 P_0 是点集 E 的边界点. 即对任何 $\delta > 0$，都有 $U(P_0, \delta) \cap E \ne \varnothing$ 且 $U(P_0, \delta) \cap \complement_E \ne \varnothing$. E 的全体边界点构成 E 的边界，记作 ∂E. 由定义易知，边界点可能属于 E，也可能不属于 E.



根据点集中所属点的特征，我们给点集做以下分类：

(1) 开集——若平面点集 E 中的每一点都是 E 的内点，即 int $E = E$，则称 E 为开集.

(2) 闭集——若平面点集 E 的余集 $\mathbf{R}^2 - E$ 是开集，则称 E 为闭集.

例如 $P_0 \in \mathbf{R}^2$，$U(P_0, \delta)$，$\mathring{U}(P_0, \delta)$，$\mathbf{R}^2$，$\varnothing$ 是开集；$\mathbf{R}^2$，$\varnothing$ 是闭集.

若 E 中任意两点之间都可用一条完全含于 E 的有限条折线（由有限条直线段连接而成的折线）相连接，则称 E 具有连通性.

若 E 既是开集又具有连通性，则称 E 为开区域.

例如 $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 是一个开区域（图 8-5），而 $\{(x,y) : xy > 0\}$ 不是一个开区域（图 8-6）.

(3). 连通集：具有连通性

(4). 开区域：

(5). 开区域 ∪ 边界 = 闭区域

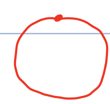
(6) 有界集：$\forall P \in E$ (E为点集)，$\exists K > 0, K \in R$，使 $P \subseteq U(O, K)$. 则为有界集. 无界集：反之 为无界

(7) 聚点：P点的任一邻域，总有无穷个点属于点集E 则称P为点集E的聚点.

说明：① 内点必是聚点.

② 边界点可能是聚点. ? →单点集.

考虑 $x^2+y^2=1$ 这个点集. "边界点"也是聚点.



(8) 连通性 $\begin{cases} \text{单连通：D区域内任意简单闭区线都} \subset D \\ \text{多连通.} \end{cases}$

例① $E=\{z=x+iy \mid \begin{array}{l}0<x<1\\0<y<1\end{array},\ x,y\in$ 有理数$\}$.

集合的内点：無，任何邻域都存在外边界

外点：有！正方形区域外.

边界点：去掉内、外点，剩下边界点.

例②：有限个开集（D_i）的交集（E）若非空，则还是开集.

$P\in E$

$\bigcap_{i=1}^{n} D_i \neq \varnothing \Rightarrow$ E也是开集

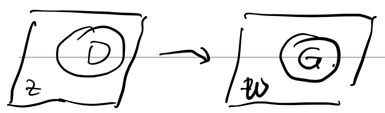
证明：$P\in E$，则 $\forall \delta_i>0$、$U(p,\delta_i)$ 均属于 D_i

取 $\delta_{min}=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$.　$U(p,\delta_{min})\subset D_i$，$\forall i\in[1,n], i\in\mathbb{Z}$.

$\therefore U(P,\delta_{min})\subset E \Rightarrow$ 故是开集.

第二章 复变函数

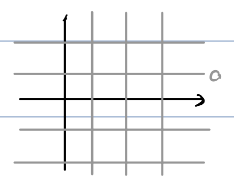
$z\in D$.　$w\in G$　$w=f(z)$.



$w=u(x,y)+iv(x,y)$
$=f(x+iy)$.

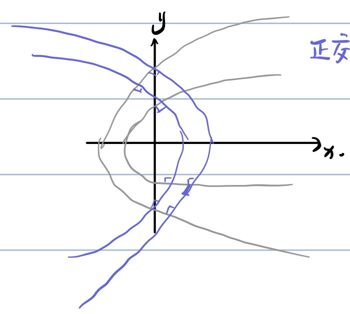
举例：$f(z)=z^2$
$=(x^2-y^2)+2xy\cdot i$

$u=x^2-y^2$
$v=2xy$.



$y=a$ 时
$u=\left(\frac{v}{2a}\right)^2-a^2$

$x=b$ 时
$v=b^2-\left(\frac{v}{2b}\right)^2$



正交抛物线簇.

- 关于解析函数与"保角"性的几点评注：

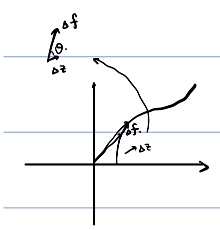
若一个函数解析，则有 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=A$.

即 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}\cdot e^{i(\mathrm{Arg}\Delta f-\mathrm{Arg}\Delta z)}=A$.

若 $A\neq 0$，则 $\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right|\neq 0$；$e^{i(\Delta\arg)}\neq 0$.

那这就说明一个问题，我们的 $\frac{\Delta f}{\Delta z}$，其实是旋转+伸缩的效果.

$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}\cdot e^{i\Delta\theta}$ 是定值.



一、极限和导数 → 类比推广

1. 极限：ε-δ语言

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使 $0<|z-z_0|<\delta$（模长）有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(z)$ 在 z_0 处极限为 w_0。

$w=u(x,y)+iv(x,y)$；$w_0=a+bi$　　同样地与路径无关的。

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to z_0} u(x,y)=a\\ \lim\limits_{z\to z_0} v(x,y)=b.\end{cases}$$

2. 连续：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$　$\Leftrightarrow$ $f(z)=f(z_0)+\alpha(z)$，$\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z)=0$.

3. 连续函数．且 [$f(z)$连续 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$, $v(x,y)$都连续]

连续函数 $\Rightarrow$ $|f(z)|<M$．有界．

- 复函数没有对应的介值定理．

4. 导数 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

5. 解析．

$f(z)$ 在 $N(z_0,\delta)$ 可导（解析），则 $f(z)$ 一定可写为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$．（收敛的）

定理：C-R方程：柯西-黎曼条件．

设D为 $f(z)=u+iv$ 的定义域．$z=x+iy$ 为D的内点，则 $f(z)$ 在 z点可导的充要条件是

$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x,y) 处可微且 $\begin{cases}\partial_x u=\partial_y v\\ \partial_x v=-\partial_y u.\end{cases}$ 满足此条件．$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

证明：① 必要性：（左 $\Rightarrow$ 右）．

先证可微　$f(z+\Delta z)-f(z)=(a+bi)\Delta z+O(\Delta z)$.

$\therefore\ \Delta w=f'(z_0)(\Delta x+i\Delta y)+O(\Delta x)+iO(\Delta y)$.

$=\Delta u+i\Delta v$.

$=a\Delta x-b\Delta y+(a\Delta y+b\Delta x)i+O(\Delta x)+iO(\Delta y)$

$$\begin{cases}\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+O(\rho),\quad \rho=|z|\\ \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+O(\rho)\end{cases}$$

u,v 可微．同时可知 $\begin{cases}du=a\,dx-b\,dy\\ dv=b\,dy+a\,dy\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=+\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

② 充分性：$\begin{cases}du=a\,dx-b\,dy\\ dv=b\,dx+a\,dy\end{cases}$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta u+i\Delta v)(\Delta x-i\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u\Delta x+\Delta y\Delta v}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}+i\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta v\Delta x-\Delta u\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+O(\Delta x)+O(\Delta y)$
$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+O(\Delta x)+O(\Delta y)$

$$\Rightarrow\ a+bi+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{O((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)+O(\Delta x\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=a+bi.$$

例①

$f(z)=\bar{z}$ 不可导：

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{1-i\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\dfrac{1-ik}{1+ik}$ ✗ .

例②. $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$. $z\neq 0$ 讨论解析性和连续性.(在 $z\to 0$)

$f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}\right)=\dfrac{2i\cdot xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

在 $(0,0)$ 点，不连续. 显然不可导 .

• 若 $f'(z)=0$，$\Rightarrow$ $f(z)=a+bi$ 为常数.

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，则有 $u(x,y)=C_1$ 与 $u(x,y)=C_2$ 两曲线正切.

$\vec{n_1}=\nabla u$; $\vec{n_2}=\nabla v$. $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$.

$f(z)=\varphi+i\Phi$ $\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\\[4pt]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\end{cases}$ $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\Rightarrow\nabla^2\varphi=0$

调和函数，φ 和 Φ 是共轭调和函数

$\Phi=\int\vec{E}\cdot d\vec{x}$

$\varphi=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$

$u(x,y)$ 连续 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=+\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\quad v(x,y)=\int\dfrac{\partial u}{\partial x}dy+f(x)$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\int\dfrac{\partial u}{\partial x}dy\right]+f'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$

另: $v=\int\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

$=\int-\dfrac{\partial u}{\partial y}dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}dy$ 是全微分

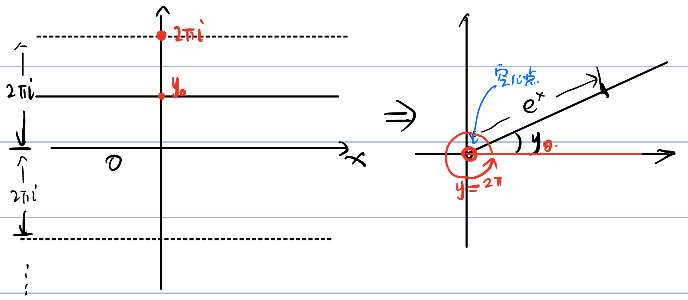
解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

(令 $x=z$, $y=0$ 常用办法) $=u(z,0)+iv(z,0)$.

基本初等函数

1、$w=e^z$, $z\in\mathbb{C}$

$w=e^x\cdot e^{iy}$, 当 $y=\text{const}$ 时



① $e^{z+2k\pi i}=e^z$, $k\in\mathbb{Z}$. ② $(e^z)'=e^z$.

2、$w=\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\sin(z+2k\pi)=\dfrac{e^{iz+2k\pi i}-e^{-iz-i\cdot 2k\pi}}{2i}=\sin z$.

$w'=(\sin z)'=\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\cos z$.

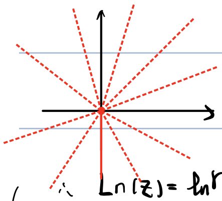
$\sin^2 z+\cos^2 z=1$. $\Rightarrow$ 解析函数解析延拓.

但注意 $|\sin z|\leq 1$ 不成立了.

思考: $f(z)=\frac{1}{e^z+1}$ 什么时候解析？$\Rightarrow$ 去除奇点就好了.

$z\neq \pi i+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.

3、对数函数

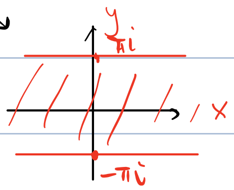


$\begin{cases} z=e^w=e^{u+iv}\\ z=re^{i\theta}\end{cases} \Rightarrow r=e^u,\ 2k\pi+\theta=v$ ∴ $u=\ln r,\ v=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

∴ $w=\ln r+(\theta+2k\pi)i$

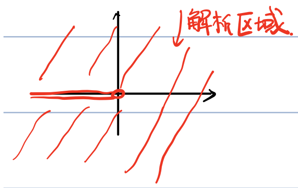
∴ $\mathrm{Ln}(z)=\ln r+\mathrm{Arg}z\cdot i=\ln r+\arg z\cdot i+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\ln z=\ln|z|+i\arg z$.



注意, $\mathrm{Ln}\,z$ 在负半轴上(即 $z=Ae^{i\theta}$, $\theta\to\pi$ 和 $\theta\to-\pi$ 时, $\mathrm{Ln}\,z$ 不同). (对Y一支)

$\mathrm{Ln}\,z=\ln z+2k\pi\cdot i$. $\mathrm{Ln}\,z_1z_2=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$. ($\ln z_1z_2 \overset{不定}{=} \ln z_1+\ln z_2$)



4. 幂函数

$f(z)=z^{\mu}=e^{\mu\cdot\mathrm{Ln}z}=e^{\mu(\ln z+i\cdot 2k\pi)}$.

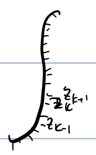
$f'(z)=e^{\mu\mathrm{Ln}z}\cdot\mu\cdot\frac{1}{z}=\mu\cdot z^{\mu-1}$

① μ 是整数, $f(z)=e^{\mu\ln z}$ 单值

② $\mu=\frac{q}{p}$, $f(z)=e^{\mu\ln z+\frac{2k\pi\cdot q}{p}i}$ 有 p 个值.

③ 无理数 (μ实部) 无穷解.

复变函数的积分



$z=z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$ (有向曲线)

$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z \triangleq \int_C f(z)\,dz$,

$\delta=\max\{\Delta s_i\}$ 弧长.

当 $f(z)$ 为连续函数

且曲线分段光滑时

$\Downarrow$

$\int f(z)dz$ 可积(极限存在)

$z_k = \alpha_k + i\beta_k$ $\boxed{性质}$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k + i\beta_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \delta\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \left(u(\alpha_k,\beta_k) + v(\alpha_k,\beta_k)\cdot i\right)(\Delta x_k + \Delta y_k\cdot i)$$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \delta\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \left(u(\alpha_k,\beta_k)\Delta x_k - v(\alpha_k,\beta_k)\Delta y_k\right) + i\cdot\left[v(\alpha_k,\beta_k)\Delta x_k + u(\alpha_k,\beta_k)\cdot\Delta y_k\right].$$

$$= \int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\cdot\int_C v\,dx + u\,dy.$$

$$= \int_C [u(t)x'(t) - v(t)y'(t)]\,dt + i\cdot\int_C [vx'(t) + uy'(t)]\,dt$$

① $\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\cdot\int_C v\,dx + u\,dy.$

② $\int_{C_1\cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

③ $\int_{C_1^-} f(z)\,dz = -\int_{C_1} f(z)dz.$

④ 线性 $k_1\int_{C_1} f_1(z)dz + k_2\int_{C_1} f_2(z)dz = \int_{C_1} (k_1f_1 + k_2f_2)\,dz$

⑤ 若 $\forall z\in\mathbb{C}$，有 $|f(z)|\le M$，则么 $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|\,ds = M\cdot l$

- 积分存在的充分条件：函数连续
- 积分计算：

$\int f(z)dz$ ① $\int_C f(z)\,dz = \int_C f(z(t))z'(t)\,dt.$

② Cauchy 积分公式

对连续 $f(z)$ 在单/多连通区域 D 内和边界连续，则有 $\oint_C f(z)dz = 0$

证明：step 1：单连通区域

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L (u\,dx - v\,dy) + i\cdot\oint_L (v\,dx + u\,dy)$$

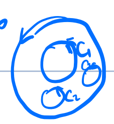
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma + i\cdot\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma$$

$$= 0$$

step 2：单连通 $\xRightarrow{叠加}$ 多连通.

$C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$

C_0



有 $\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz.$

例：计算 $\oint_L \frac{1}{(z-0)^n}dz$，L为包括原点的闭曲线

$F'(z)=f(z) \leftarrow F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$

- f 在单连通区域内解析，则我们有 N-L 公式

必须解析，否则不能与路径无关

积分路径不经过奇点。

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1)$$

证明：(补)

- 柯西积分公式：f(z)在有界闭区域解析。

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{z=z_0+Re^{i\theta}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz + 0$$

$$=\lim_{R\to 0}\int \frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\cdot iRe^{i\theta}$$

$$=\lim_{R\to 0}\int_0^{2\pi} i\cdot f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta$$

$$=2\pi i\cdot f(z_0)$$

平均值公式：$f(z_0)=\int_0^{2\pi} f(R\cdot e^{i\theta}+z_0)\,d\theta$

f(z) 解析 → $f^{(n)}(z)$ 都存在 ⇒ 无穷可微性.

证明 $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

先证 $f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ 成立。

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\cdot\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)}dz-\oint\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{(2\pi i)}\cdot\frac{1}{\Delta z}\cdot\oint\frac{f(z)\cdot\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{(2\pi i)}\cdot\oint\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz.$$

不能直接交换 lim 和 ∮

$$\Rightarrow \left|\oint\left[\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}-\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right]dz\right|=\left|\oint f(z)\cdot\frac{\Delta z}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}dz\right|$$

$$\le\oint\left|\frac{\Delta z\, f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\right|ds\le\oint\frac{|\Delta z|M}{\delta^2|z-z_0-\Delta z|}ds\le\oint\frac{|\Delta z|M}{\delta^2(|z-z_0|-|\Delta z|)}ds$$

$$\le\frac{\Delta z\cdot M}{\delta^2(\delta-|\Delta z|)}\cdot l\to 0.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$|z-z_0|=\delta$

$\delta<|z-z_0|$ 时，f(z)有界，Δz足够小，令$|\Delta z|<\delta$.

有下界

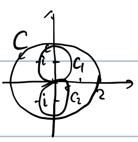
由此才能说 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$

n=2时…… 同理可得：解析函数无穷可微性.

记忆：$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\frac{f(z)}{z-z_0}dz$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\partial^n}{\partial z_0^n}\left[\frac{f(z)}{z-z_0}\right]dz.$$

例：$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z^2+1)^2}dz$



$$=\oint_C\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$$

$$=\oint_{C\cup C_1^-\cup C_2^-}\frac{1}{(z^2+1)^2}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{(z^2+1)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{(z^2+1)^2}dz.$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-i)^2}}{(z+i)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz.$$

$$= \frac{1}{r_1^2} \oint_{C_1} \frac{1}{(z+i)^2} dz + \frac{1}{r_2^2} \oint \frac{1}{(z-i)^2} dz.$$

$$= \cancel{0}$$

$$2\pi i \cdot \left(\frac{-2}{(z-i)^3}\right)\Big|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2}{(2i)^3}$$

$$= -\frac{4\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left|\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right| \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! \cdot M}{R^n}$$

柳维尔定理：有界$\underbrace{\text{整函}}_{\text{处处解析}}$数是一个常值函数。

$|f(z)| < M$.

$z \in \mathbb{C}$

$|f'(z_0)| \le \frac{M}{R}$ 对$\forall z_0$成立。

当R取$+\infty$时，$|f'(z_0)| \le 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$. 同理 $f^{(n)}(z_0) = 0$.

代数学基本定理：$P_m(z) = 0$ 有m个根。

$P_m(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m = 0$，$a_i$为复常数，$m \ge 1$，$a_m \ne 0$，

至少存在 $z_0 \in \mathbb{C}$，使 $P_m(z_0) = 0$.

等价有n个根。

$P_n(z) = 0$有解的证明：

反证！：假设没有根，$P_n(z) \ne 0$，$z \in \mathbb{C}$

令 $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$，$f(z)$也是解析的、无奇点

$\because f(z)$ 是整函数，而 $f(z) = \frac{1}{P_n(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}$

当$z \to \infty$时，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{a_0 + \cdots + a_n \cdot z^n} = \lim\limits_{z\to+\infty} \frac{1}{\frac{a_0}{z^n} + \cdots + a_n} \cdot \frac{1}{z^n} = 0.$

极限存在 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，对$\forall |z| > N$，总有 $|f(z)| < \varepsilon$成立。

取$\varepsilon = 1$、$\exists R$，$\forall |z| > R$，有$|f(z)| < 1$.

在闭区域外，$f(z)$有界；在闭区域内，仍有界 $\Rightarrow$ $f(z)$有界。

$f(z)$有界整函数 $\Rightarrow f(z) = const = 0 \Rightarrow$ 矛盾。

故$f(z)$必有奇点，亦即$\exists z_0 \in \mathbb{C}$，$P_n(z_0) = 0$

$P_n(z) = (z - z_0) P_{n-1}(z) \Rightarrow \cdots$ 递推下去，证明代数学基本定理。

考虑 $f(z) = u + iv$ 是整函数、若 u有上界，$u \le u_0$，$f(z)$也是常值函数

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad v = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy =$$

$F = e^{f(z)} = e^u \cdot e^{iv}$ $F(z)$整函数且有界

$F'(z) = f'(z) e^{f(z)} = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) \sim const.$

那若 u有下界，$u \ge u_0$ $G = e^{-f(z)}$也是有界的。

• 复数列。

1. 数列的极限：$|a_n - A| < \varepsilon$. 使用 ε、n 语言

2. 柯西判别法：$\forall m, n$，$\exists N > 0$，$n > N$时 $|a_m - a_n| < 0$ 证明极限存在。

定理 复数列 $\{z_n\} = \{a_n + ib_n\}$ 收敛于 $z_0 = a + ib$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

证： 由数列极限的定义及下列不等式易证，略。

$$\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \le |z_n - z_0| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$$

复数项级数　　　　　通项

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

若部分和数列

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \to S \ (n \to \infty)$$

则称级数收敛于 S，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

若 S_n 不收敛，则称级数发散。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛。

4

收敛级数的性质

定理 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.（级数收敛的必要条件）

定理 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充分必要条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(z_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}(z_n)$ 都收敛。

定理 绝对收敛的级数一定收敛，反之不成立。

例子：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{8}\right) + i\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$

收敛

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 收敛域：

一、幂级数

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ / or $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$

定理（阿贝尔定理）（i）若 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $z=z_0\neq 0$ 处收敛，那么当 $|z|<|z_0|$ 时，幂级数绝对收敛。

（ii）若幂级数在 $z=z_1$ 处发散，那么当 $|z|>|z_1|$ 时，幂级数发散。

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z_0^n = A \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} C_n z_0^n = 0 \Rightarrow |C_n z_0^n|$ 有界，$\leq M$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_n z_0^n \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |C_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 收敛.

故 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛.

收敛半径：$R = \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \text{ 收敛}\}$

当 $|z|<R$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|z|>R$ 时，幂级数发散；当 $|z|=R$ 时，不确定。

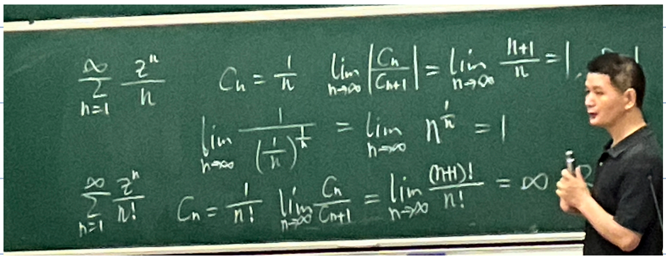
收敛圆：$B_R = \{z\in C \mid |z|<R\}$

当 $R=0$ 时，级数仅在 $z=0$ 处收敛；

当 $R=+\infty$ 时，级数在整个复平面收敛。

定理（收敛半径的计算）

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}.$$



例: 若$\{C_n\}$收敛, $\{|C_n|\}$发散 ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 收敛半径为1.

取$z=1$ ⇒ $R=1$ 内收敛; 若 $R>1$ $1<|z_0|<R$

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z_0^n$ 收敛 ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n z^n|$ 收敛 $|z|<z_0$, 取 $z=1$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|$ 收敛 ⇒ 矛盾

故 $R=1$

• 和函数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ ⇒ ① $\lim_{z\to z_0} S(z)=S(z_0)$

② 导数与求和号可交换 ⇐ 是一致收敛的.

$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cdot n\cdot z^{n-1}$ 收敛半径不变.

$\int_{z_0}^{z} S(\xi)\,d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(z^n-z_0^n)}{n+1}$ 求和与积分可交换.

解析的

解析函数展开:

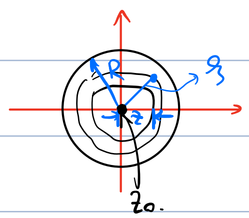
Taylor展开: $f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析, $f(z)$在圆内可展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ 且展开式唯一

又∵ $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$ $C_r: |\xi-z_0|\le r$, $0<r<R$

注意: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ 要求在边界和内部$f(z)$均解析.

$\exists r$, 使 $|z|<r<R$, $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$



$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}d\xi$$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\cdot(z-z_0)^n$$

$$=\frac{2\pi i}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

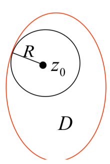
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

推论: $f(z)$ 在区域 D 内解析 ⇔ $f(z)$ 在 D 内任一点 z_0 处可展开成幂级数。

z_0处台劳级数的收敛半径

$$R=\min_{\zeta\in\Gamma}|\zeta-z_0|.$$

其中 Γ 为 D 的边界。



二 一些初等函数的台劳展开式

例6. $f(z)=e^z$ 在复平面上解析, $(e^z)^{(n)}|_{z=0}=1$,

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots(|z|<+\infty)$$

例7. $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n+(-iz)^n}{n!}$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$(|z|<+\infty)$

类似

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

$$shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

$$chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad (|z|<1)$$

15

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

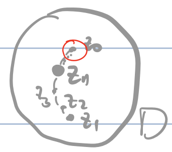
解析函数零点的孤立性：

- 孤立零点
- 非孤立零点举例：$x\cdot\sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{k\pi}, k=1,2,\dots,\infty$

定理：$f(z)$在D上解析，$f(z_n)=0$，$n=1,2,\dots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 存在 $\Rightarrow f(z)\equiv 0$，$z\in D$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$，$f(z_0)=f(\lim\limits_{n\to\infty} z_n) \xlongequal{\text{解析}} \lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)=0$

$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$



只要证明 $C_1=C_2=\cdots=C_n=\cdots=0$

若$f(z)\not\equiv 0$，则至少有1个系数不为0，设 $C_0=C_1=\cdots=C_{m-1}=0$，$C_m\neq 0$

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$
$$=\sum_{n=m}^{\infty} C_m(z-z_0)^{n-m}(z-z_0)^m$$
$$=(z-z_0)^m\sum_{n=1}^{\infty} C_{m-n}(z-z_0)^n$$
$$=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$$

$\varphi(z_0)\neq 0=C_m$，∵ $\varphi(z)$解析 $\Rightarrow \exists\,\delta>0$，$0<|z-z_0|<\delta$，$\varphi(z)\neq 0$

对于$f(z)$，在$0<|z-z_0|<\delta$域内，只有1个零点 $\Rightarrow$ 孤立零点，但这与 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 矛盾.

∴在 $\mathring{U}(z_0,\delta)$ 内 $f(z)\equiv 0$，

$\Downarrow$

在D内$f(z)\equiv 0$

推论1：孤立零点定理：不恒为0的解析函数零点必是孤立的

推论2：解析函数唯一性定理：f,g解析，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0\in D$，对$\forall n$，均有$f(z_n)=g(z_n)$

则D内恒有$f(z)=g(z)$

- 解析延拓：在实数范围内成立的恒等式在复数域内也成立（解析条件下）

$f(z)=e^x\sin y-ie^x\cos y$，将其写为z的形式

$\boxed{\text{令}\ y=0\ f(x)=-ie^x,\ \Rightarrow f(z)=-ie^z}$

原理是：$\int$

- m级零点：$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$f^{(0)}(z_0)=f^{(1)}(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

双边级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (z-z_0)^{-n}$$

$|z-z_0| < R_2$. $\boxed{\text{这个?}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n$$

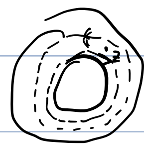
$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < R \Rightarrow |z-z_0| > \frac{1}{R} \triangleq R_1$$

$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$ 收敛范围是 $R_1 < |z-z_0| < R_2$

• 罗朗定理. $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 中解析，则在此圆环内

$f(z)$ 可以展开成级数 $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n \quad (R_1 < |z-z_0| < R_2)$

其中 $C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0,\pm 1,\dots) \qquad R_1 < R < R_2$



证明：$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} d\zeta - \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right].$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta\right] \cdot (z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta$$

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta = \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} d\zeta = \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \oint_{\Gamma_1} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \oint \frac{(z-z_0)^{-n-1}}{(\zeta-z_0)^{-n}} f(\zeta) d\zeta$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta\right] (z-z_0)^n$$

故成立.

孤立奇点：z_0 为孤立奇点，$R_1<|z-z_0|<R_2$，$R_1=0$；$R_2=R$，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n$$

① 若 $C_n=0$ $(n=-1,-2,-3,\dots)$ 称 z_0 为可去奇点，

② 若罗朗级数的主部只有有限项，$C_{-m}\neq0$ $(m\geq1)$ 但 $C_{-(m+k)}=0$ $(k=1,2,\cdots)$

称为 m 级级点，且 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$；$\varphi(z_0)=C_m\neq0$

③ 本性奇点：$f(z)$ 罗朗级数主部中有无穷多项，即 $(z-z_0)$ 的负幂次系数有无穷多个不为 0

• 可去奇点判定 ① 定义

② $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 极限存在 $\Rightarrow$ z_0 为 $f(z)$ 可去奇点

③ $f(z)$ z_0 邻域有界（在 $0<|z-z_0|<\delta$）

④ $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$

由④证①
$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$
$$=\lim_{z\to z_0}\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^{n+1}+\lim_{z\to z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

$$C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{(\xi-z_0)^n f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$ $0<|z-z_0|<R$ 令 $r\to0$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{1}\cdot\left[\cancel{(\xi-z_0)^n}f(\xi)\right]\Big|_{\xi=z_0}$$ $\longrightarrow$ 为什么不行：因为 $f(\xi)$ 不必在区域内都解析

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}(\xi-z_0)f(\xi)\cdot(\xi-z_0)^{n-2}d\xi$$

$$|C_{-n}|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_r}(\xi-z_0)f(\xi)(\xi-z_0)^{n-2}d\xi\right|$$ $|\xi-z_0|=r$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi r\cdot\max|\xi-z_0||f(\xi)||\xi-z_0|^{n-2}$$
$$\leq r\cdot\max|\xi-z_0||f(\xi)|\cdot r^{n-2}$$
$$=r^{n-1}\max|(\xi-z_0)f(\xi)|.\to0$$

$\therefore$ $|C_{-n}|=0$.

• m 极极点：$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ 判定.

• 本性极点：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$
{ ① 存在，是可去奇点
② 存在，且是 ∞，是极点，
③ 不存在且不 $\to\infty$，是本性极点，

$$\lim_{z\to0}\frac{z-\ln(1+z)}{\ln(1+z)z}=\lim_{z\to0}\frac{z-\ln(1+z)}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{1-\frac{1}{1+z}}{2z}=\lim_{z\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}$$

极限存在 $\Rightarrow$ 是可去奇点、.

or $\lim\limits_{z\to0}z\left(\frac{1}{\ln(1+z)}-\frac{1}{z}\right)=\lim\limits_{z\to0}\frac{z}{\ln(1+z)}-1=0$ 成立 $\Rightarrow$ 可去奇点.

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^{z^2}+1}{z^4} = \infty$ 故是极点, 四阶极点.

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^4} = \infty$ 也是极点.

$\lim\limits_{z\to 0} z^4\cdot\left(\dfrac{e^{z^2}-1}{z^4}\right) = \lim\limits_{z\to 0} e^{z^2}-1 = 0$

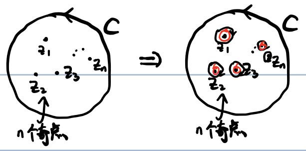
$\lim\limits_{z\to 0} z^3\cdot \dfrac{e^{z^2}-1}{z^4} = 0$

$\lim\limits_{z\to 0} z^2\cdot \dfrac{e^{z^2}-1}{z^4} = 1$ ∴是 2级极点.

• 留数: $\mathrm{Res}[f(z), z_0] \triangleq \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz$

$f(z)$在 $0<|z-z_0|\le R$ 上解析, 默认逆时针方向.

对一个一般曲线 C 积分



在 C 上除去 $z_1, z_2, \dots z_n$ 上解析

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_i].$$

问题转化为留数的计算

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz\cdot\frac{1}{2\pi i}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

当 $n=-1$时, $C_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{|\xi-z_0|=r} f(\xi)d\xi = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$.

① 奇点可去时, $C_{-1}=0$

② 本性奇点: 罗朗级数求 C_{-1}.

③ m阶极点: $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\delta} f(z)dz$.

$$f(z) = C_{-m}(z-z_0)^{-m}+\dots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n\cdot C_n$$

$$(z-z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0)+\dots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\dots$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)} = (m-1)!\,C_{-1}$$

$$\therefore\ C_{-1} = \lim_{z\to z_0}\frac{\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}}{(m-1)!}$$

若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\varphi(z_0)\ne 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \dfrac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $\left[P(z_0)\ne 0 \text{ 且 } Q'(z_0)\ne 0,\ Q(z_0)=0\right]$, 1级零点, 有 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{(z-z_0)P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$

$h(z) = (z-z_0)^{k+1}h_1(z)$ $\Rightarrow$ $f(z) = \dfrac{g_1(z)}{(z-z_0)h_1(z)}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g_1(z)}{h_1(z)} =$

$g(z) = (z-z_0)^k g_1(z)$

$\begin{cases} g^{(k)}(z_0)=k!\,g_1(z_0) \\ h^{(k+1)}(z_0)=(k+1)!\,h_1(z_0) \end{cases} \Rightarrow Res[f(z),z_0]=\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}(k+1)$.

若：$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$，$g(z_0)\neq 0$　　$Res[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^2\frac{g(z)}{h(z)}\right]'$

$h(z_0)=h'(z_0)=0$　　$=\lim\limits_{z\to z_0}\left[\frac{g(z)}{h_1(z)}\right]'$

$h''(z_0)\neq 0$　　$=\frac{g'(z_0)h_1(z_0)-g(z_0)h_1'(z_0)}{h_1^2(z_0)}$

$h(z)=(z-z_0)^2h_1(z)$

$h_1(z_0)$

$h_1'(z_0)$　　$=$

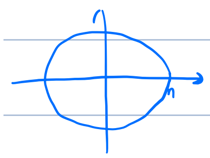
例：求 $Res[e^{(z+\frac{1}{z})},0]=$

$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n!})(1+\frac{1}{z}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{-n}}{n!})$

$=\frac{1}{z}+z\cdot\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^2}{2!}\cdot\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^3}{3!}\cdot\frac{z^{-4}}{4!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{z^{-(n+1)}}{(n+1)!}+\cdots$

$=1+\frac{1}{1!\,2!}+\frac{1}{2!\,3!}+\cdots+\frac{1}{n!\,(n+1)!}$

$\oint\limits_{|z|=n}\tan\pi z\,dz=4ni$.　　$\sin\pi z_k=\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)\neq0$



奇点为 $z_k=\frac{1}{2}+k$，$k\in\mathbb{Z}$　且易求 $\cos'\pi z_k\neq0$　z_k为一级级点

在 $|z|=n$ 内奇点有 $z_k=\frac{1}{2}+k$，$-n\le k\le n-1$ 且 $k\in\mathbb{Z}$

$\therefore \oint\limits_{|z|=n}\tan\pi z\,dz=2\pi i\cdot\sum\limits_{k=-n}^{n-1}Res[\tan\pi z,z_k]$

$=2\pi i\cdot\sum\limits_{k=-n}^{n-1}\frac{\sin\pi z_k}{-\pi\sin\pi z_k}$

$=2\pi i\cdot(2n-1)\cdot\frac{1}{\pi}$　　$-n$ — $n-1$ 共有 $n-1-(-n)+1=2n$ 个

$\cancel{=(4n-2)i}$

$=2\pi i\cdot\frac{2n}{\pi}$

$=4ni$

例：$Res[\frac{\sin z}{z^6},0]=\frac{1}{5!}=\frac{1}{5\times4\times6}=\frac{1}{120}$

$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}$

$\frac{\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^5}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-1}}{5!}$

• 留数定理的应用

1. 计算含三角函数的积分

$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$

令 $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$　$(z\triangleq e^{i\theta})$

$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$

$dz=e^{i\theta}\cdot i\,d\theta=z\cdot i\,d\theta$

$\therefore\int_0^{2\pi}R(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz})\frac{dz}{iz}$

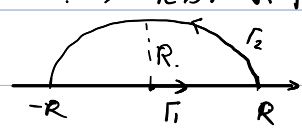
$=\oint\limits_{|z|=1}R(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz})\cdot\frac{dz}{iz}$.

2. 广义积分

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$，$x\in\mathbb{R}$.

充分条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. $\overset{即}{\Rightarrow}$ x充分大时，$f(x)<\frac{M}{|x|^{\alpha}}$. $\overset{\alpha>1}{\exists M>0}$. ($f(x)$在$x$轴无奇点)

构造闭曲线



$\oint f(z)\,dz=\int_{\Gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz$.

假定条件：$f(x)$在x轴无奇点、$f(z)$在上半(或下半)平面有有限个极点、

R取很大，$\int_{\Gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz=\oint f(z)\,dz$

$\lim\limits_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz\right|\le\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{M}{R^{\alpha}}\cdot\pi R=\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{M}{R^{\alpha-1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz=0$　$\Rightarrow$ 于是 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum\limits_{i}Res[f(z),z_k]$

例: ① $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \oint_{|z|=R}\frac{dz}{(z^2+1)^2} = \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right] + \cancel{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2}, -i\right]}\ [2\pi i]$

上半平面

$= -\frac{1}{4i^3}\cdot 2\pi i$

$= \frac{\pi}{2}$

② $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2\cos\theta+3} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2\cos\theta+3}$

$z=e^{i\theta}$ $\quad\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

$i\,d\theta=\frac{dz}{z}$

原式 $=\frac{1}{2}\oint\frac{\frac{dz}{iz}}{2\cdot\frac{z^2+1}{2z}+3}$

$=\frac{1}{2i}\cdot\oint\frac{dz}{z^2+3z+1}$

$=\frac{2\pi i}{2i}\mathrm{Res}[f(z), z_k]$

$=\frac{2\pi i}{2i}\cdot\frac{1}{z_1-z_2}$

$=\frac{\pi}{z_1-z_2}$

$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

例: $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$

$=\mathrm{Im}\left[\frac{2\pi i}{2}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{xe^{ix}}{1+x^2}, i\right]\right]$

$=\mathrm{Im}\left[\pi i\cdot\frac{1}{2e}\right]$

$=\frac{\pi}{2e}.$

• $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}f(x)\,dx$ $\quad$ $x\in\mathbb{R}$ $\left(|f(x)|<\frac{M}{|x|^{\beta}},\ \beta>0\right)$ $(\alpha>0)$

$=\sum_k \mathrm{Res}[e^{i\alpha z}, z_k]$

$\left|\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)\,dz\right|$

$z=Re^{i\theta}$, $\quad dz=Rie^{i\theta}d\theta$

$=R\cos\theta+iR\sin\theta$

$\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}e^{-\alpha R\sin\theta+i\alpha R\sin\theta}f(Re^{i\theta})\,Rie^{i\theta}d\theta\right|$, $\quad\theta_1,\theta_2<\pi$

$\leq\frac{MR}{R^{\beta}}\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2}e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta$

$\leq\frac{MR}{R^{\beta}}\int_0^{\pi}e^{-\alpha\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta$

$\sin\theta\geq\frac{2}{\pi}\theta$

$=\frac{MR}{R^{\beta}}\cdot\frac{\pi}{2\alpha R}(1-e^{-2\alpha R})$

$=\frac{M\pi}{2\alpha R^{\beta}}(1-e^{-2\alpha R})$

$\lim_{R\to\infty}$ $\nearrow$ $\quad\downarrow$ $\approx 0.$

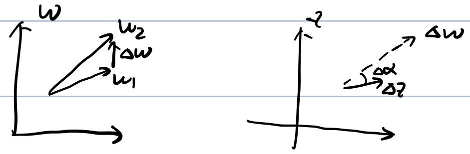
故 $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)\cdot e^{i\alpha z}dz=0$

保角映射

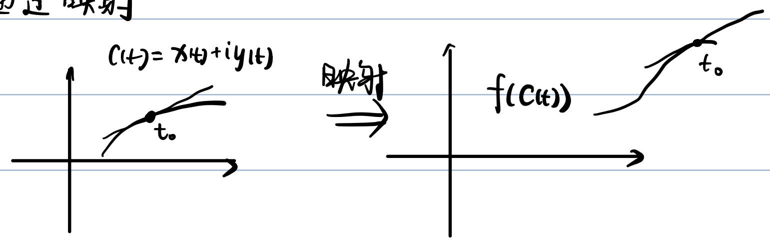
$|f'(z)| \approx \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$

$f'(z) \approx \frac{\Delta w}{\Delta z}$

$\mathrm{Arg}\, f'(z) \approx \mathrm{Arg}\,\Delta w - \mathrm{Arg}\,\Delta z$



通过映射



在t_0点切线. $C(t)=x(t)+iy(t)$

$C'(t)=x'(t)+iy'(t)$ ⇒ 也是切线方向

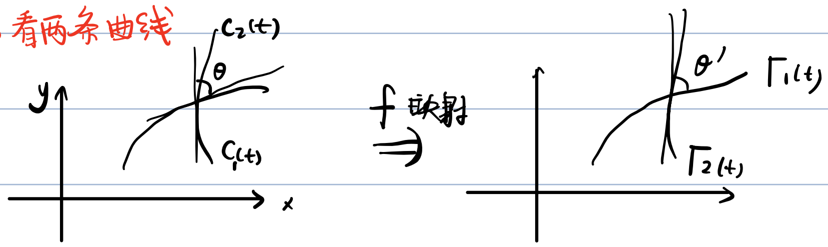
$\varphi = \mathrm{Arg}[C'(t)]$

$\Gamma(t)=f(C(t))$; $\Gamma'(t)=f'(C(t))\cdot C'(t)$

$\phi = \mathrm{Arg}[\Gamma'(t)] = \mathrm{Arg}[f'(C(t))]+\mathrm{Arg}[C'(t)]$

保角？保什么角？看不出来.

⇒ 看两条曲线



$\varphi_1 = \mathrm{Arg}\, C_1'(t)$

$\varphi_2 = \mathrm{Arg}\, C_2'(t)$

$\theta = \varphi_2-\varphi_1 = \mathrm{Arg}\, C_2'(t) - \mathrm{Arg}\, C_1'(t)$

同理在w平面. $\theta' = \mathrm{Arg}\, f'(C_1(t)) + \mathrm{Arg}\, C_1'(t) - (\mathrm{Arg}\, f'(C_2(t)) + \mathrm{Arg}\, C_2'(t))$

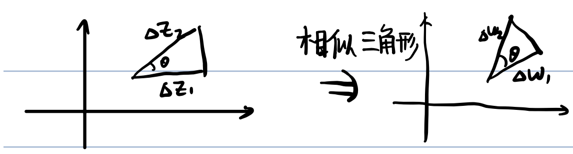
注意到 $C_1(t)=C_2(t)$ (由于是交点)，于是 $\mathrm{Arg}\, f'(C_1(t)) = \mathrm{Arg}\, f'(C_2(t))$

于是 $\theta' = \mathrm{Arg}\, C_2'(t) - \mathrm{Arg}\, C_1'(t) = \theta$

⇒ 保角映射, 保的是两条曲线的夹角 (此时联想到正交曲线系映射后仍为正交曲线系, ⇒ 椭圆坐标映射)

前提是模长 $\neq 0$, 即 $f'(z)\neq 0$

保角映射又称共形映射



局部保角：$f'(z)\neq 0$ 即可

保角映射要求 $\begin{cases} f'(z)\neq 0 \\ 一一映射. \end{cases}$

黎曼映射定理　对于单连通区域 D、G，边界多于一点（就是不扩展到无穷远点）

$z_0\in D$，$w_0\in G$，$\alpha\in[-\pi,\pi]$.

$\Rightarrow$ 存在 $w=f(z)$，$D\to G$，$f(z_0)=w_0$，$\arg f'(z_0)=\alpha$

整线性映射

1. 整线性映射　$w=az+b$　（$a\neq 0, b$ 常数）

$w'=a\neq 0$，　w 保角映射。记 $a=re^{i\theta}$　则

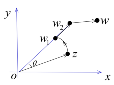
$w=re^{i\theta}z+b$　可分解为如下三映射的复合：

（1）$w_1=e^{i\theta}z$　（旋转映射）

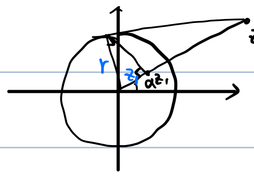
（2）$w_2=rw_1$　（相似映射）

（3）$w=w_2+b$　（平移映射）

整线性映射把Z平面上圆周曲线映为W平面上的圆周曲线（保圆性）



倒数映射：



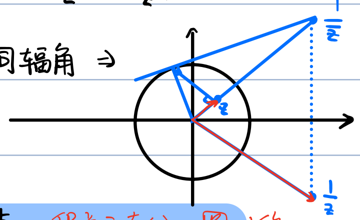
z_2　z_1、z_2 关于圆对称

$z_1\cdot\overline{z_2}=r^2$

$\left(\frac{|z_1|}{r}=\frac{r}{|z_2|}\Rightarrow |z_1||z_2|=r^2\right)$

倒数映射 $w=\frac{1}{z}=\overline{\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$

$\frac{1}{\bar z}$ 与 z 同辐角 $\Rightarrow$



- 保对称点 → 保关于直线 or 圆对称
- 倒数映射是保广义圆变换

$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$

（$A=0$ 为直线 ~ 广义圆）

$\begin{cases} z=x+iy \\ z=\frac{1}{w}=x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \end{cases}$

$\therefore\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=-\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases}\Rightarrow A\cdot\frac{1}{u^2+v^2}+B\frac{u}{u^2+v^2}+C\frac{(-v)}{u^2+v^2}+D=0$

$\Rightarrow D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$

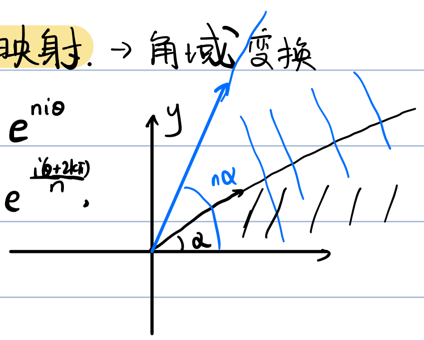
仍是广义圆

幂函数映射. → 角域变换

$W=z^n=r^n e^{in\theta}$

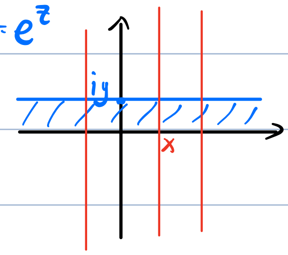
$w=z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$，

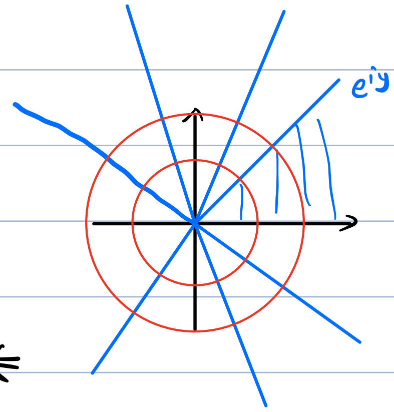
指定k，也为一一映射.



指数映射

$w=e^z$

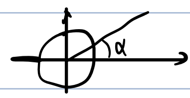




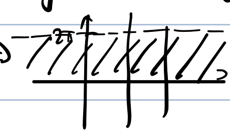
$\Leftarrow$

对数映射

$w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$



$\Rightarrow$



分式线性映射

$w=\frac{az+b}{cz+d}$　　$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0\Rightarrow ad-bc\neq 0.$

↳ 自由度其实只有3个

3. 三对点的对应唯一确定一个分式线性映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)$$

仅有三个独立常数。不妨设 $a\neq 0, c\neq 0$，则

$$w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\overset{记}{=}k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

给定三对点的对应，可唯一确定 $k,\alpha,\beta.$

$w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$

$=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)$

$=\frac{a}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{bc-ad}{cz+d}$

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}$$　分解：

$\begin{cases} w_1=cz+d & 整线性映射 \\ w_2=\frac{1}{w_1} & 倒数映射 \\ w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}w_2 & 整线性映射 \end{cases}$

w 保圆性：广义圆（直线或圆）→ 广义圆

（若有一点映为 ∞，象为直线或射线）

保对称性：关于广义圆 Γ 的对称点

→ 广义圆 $\Gamma'=w(\Gamma)$ 的对称点

定理 6.3.1 设 z_1, z_2, z_3 在Z平面上，w_1, w_2, w_3 在W平面上，则存在唯一的分式线性映射， 将 z_1, z_2, z_3 依次映为 w_1, w_2, w_3。

解：设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0)\Rightarrow w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}\quad (k=1,2,3)$

$$\therefore\ w-w_k=\frac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)}\quad (k=1,2)$$

$$w_3-w_k=\frac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)}\quad (k=1,2)$$

由上两式得：
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

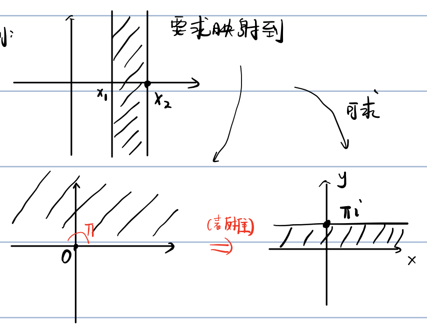
注：若有 ∞ 点，去掉含有该点的两项（视该俩项的商在无穷远处极限为 1）。

例如：若 $z_2=\infty$, 则
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z_3-z_1}.$$

若 $w_2=\infty$, 则
$$\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

定理 6.1.5（边界对应原理） 设简单闭曲线 Γ,Γ' 围成的区域 D, D'，则 D 到 D' 的保角映射 $w=f(z)$ 可以延拓为 $D\cup\Gamma$ 到 $D'\cup\Gamma'$ 的连续双射，且将 Γ 的正向映为 Γ' 的正向。

例:



step 1: $w_1=(z-x_1)i$

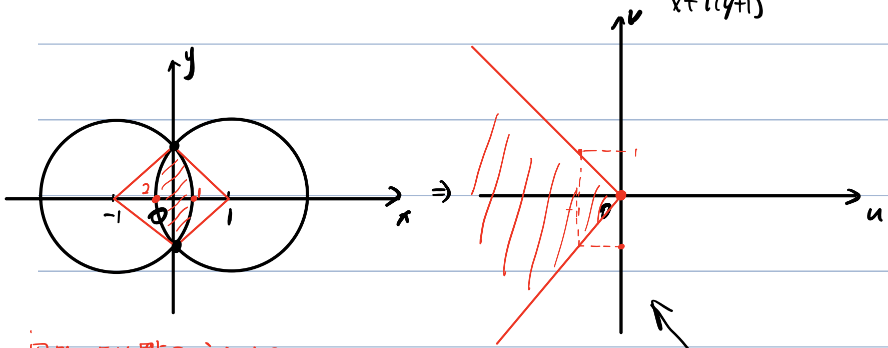
step 2: $w_2=\dfrac{\pi}{x_2-x_1}w_1$

step 3: $w=e^{w_2}$

$\Rightarrow\ w=e^{\frac{\pi(z-x_1)}{x_2-x_1}i}$

例 4 中心分别在 $z=1,-1$，半径为 $\sqrt{2}$ 的两圆弧 C_1, C_2 围成区域 D，试求在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的象区域 D'.

$\dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$



思路：取边界点 ① $z=i\Rightarrow w=0$

② $z=\sqrt{2}-1$，$w=\dfrac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1+i)$

③ $z=-(1-\delta)i$

$w=\dfrac{-1+\delta-1}{\delta}=1-\dfrac{2}{\delta}\to-\infty$

$(x+1)^2+y^2=2$

$$w=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{(x+i(y-1))(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}-\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}i=u+iv$$

$$\begin{cases}u-v\leq 0 & ①\\ u+v\leq 0 & ②\end{cases}$$

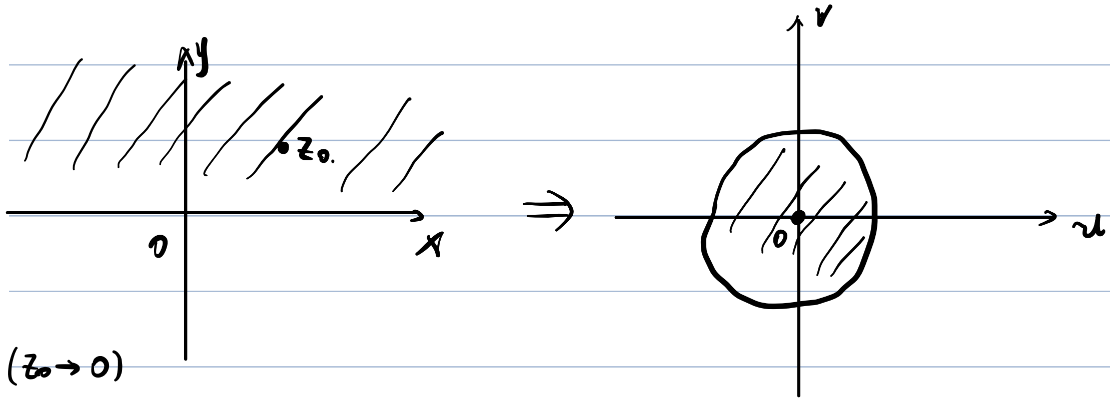
分式线性映射：

平面 $\xrightarrow{①}$ 平面

圆 $\xrightarrow{②}$ 圆

$\begin{cases} ①②\text{常见} \\ ③④\text{不常见} \end{cases}$

③ 平面映至圆



$(z_0 \to 0)$

$$w = k \cdot \frac{z - z_0}{z - \beta} = k \cdot \frac{x - x_0 + i(y - y_0)}{(x - \beta_x) + i(y - \beta_y)}$$

$$= k \cdot \frac{[(x - x_0) + i(y - y_0)][(x - \beta_x) - i(y - \beta_y)]}{(x - \beta_x)^2 + (y - \beta_y)^2}$$

$$= |k| e^{i\varphi} \frac{(x - x_0)(x - \beta_x) + (y - y_0)(y - \beta_y) + i[(x - \beta_x)(y - y_0) - (x - x_0)(y - \beta_y)]}{(x - \beta_x)^2 + (y - \beta_y)^2}$$

$$u_1 = \frac{(x - x_0)(x - \beta_x) + \beta_y y_0}{(x - \beta_x)^2 + \beta_y^2}$$

$$v_1 = \frac{\beta_y (x - x_0) - y_0 (x - \beta_x)}{(x - \beta_x)^2 + \beta_{y_0}^2}$$

$$u_1^2 + v_1^2 = \frac{\left((x - x_0)(x - \beta_x) + \beta_y y_0\right)^2 + [\beta_y (x - x_0) - y_0 (x - \beta_x)]^2}{[(x - \beta_x)^2 + \beta_{y_0}^2]^2} = \text{const}$$

$$\Rightarrow [x^2 - (x_0 + \beta_x) x + x_0 \beta_{x_0} + \beta_0 y_0]^2 + [(\beta_y - y_0) x + x_0 \beta_y + y_0 \beta_x]^2 = C[x^2 - 2\beta_x x + \beta_x^2 + \beta_y^2]^2$$

$$\begin{cases} C = 1 \\ (x_0 + \beta_x)^2 + 2(x_0 \beta_{x_0} + y_0 \beta_{y_0}) + (\beta_y - y_0)^2 = (2\beta_x)^2 + 2(\beta_x^2 + \beta_y^2) \\ -2(x_0 + \beta_x) x^3 = -2 \cdot 2\beta_x \cdot x^3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \beta_x \\ \beta_y = -y_0 \end{cases}$ 过于麻烦.

z_0 关于 x 轴对称点：$\overline{z_0}$

$$w_0 = k \frac{z - z_0}{z - \beta} = 0$$

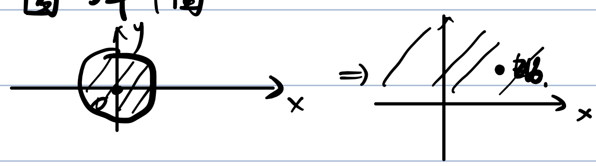
$$w_0' = \infty \Rightarrow w_0'(\overline{z_0}) = \infty \Rightarrow \beta = \overline{z_0}$$

$$w = k \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \qquad \overline{w} = \overline{k} \cdot \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{\overline{z} - z_0}$$

$z \in \mathbb{R}$ 时 $|w| = |k| \cdot \frac{|z - z_0|}{|\overline{z} - z_0|} = |k| = 1$

$$w = e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

② 圆 → 半平面

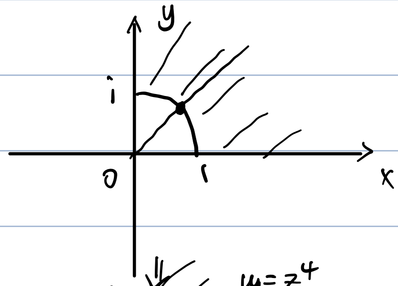


$w = e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$

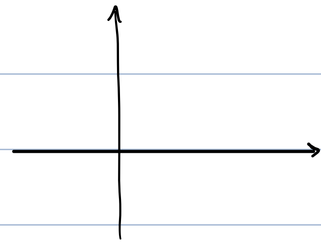
$(z-\bar{z}_0)\lambda = z-z_0$

$(1-\lambda)z = z_0-\lambda\bar{z}_0$

$z = \dfrac{z_0-\bar{z}_0e^{i\theta}w}{1-e^{i\theta}w}$

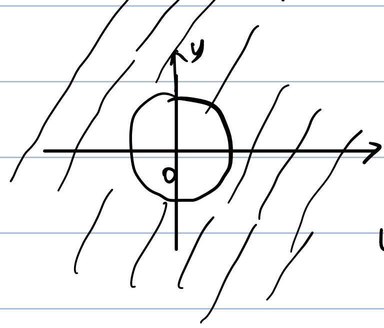


$\Rightarrow$

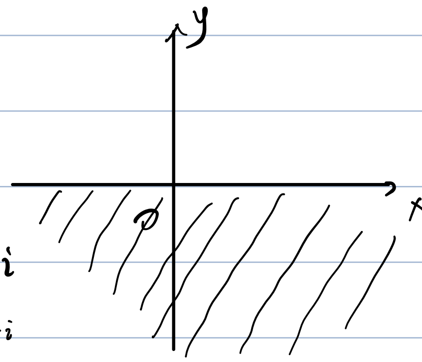


③ 圆 → 圆

$\Downarrow$ $w_1=z^4$



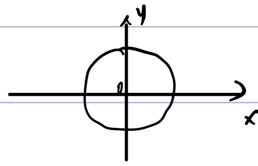
$\Rightarrow$



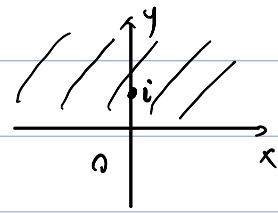
$w_2 = \dfrac{1+w_1}{1-w_1}i$

$= \dfrac{1+w_1}{1-w_1}\cdot i$

$w_2 = \dfrac{1+w_1}{1-w_1}i$; $w_3 = -w_2 = -i\cdot\dfrac{1+z^4}{1-z^4} = i\cdot\dfrac{z^4+1}{z^4-1}$



$\Leftarrow$



$w = \dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\cdot e^{i\theta}$

$w = \dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \dfrac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} = \dfrac{x^2+y^2-1+i(xy-x-xy-x)}{x^2+(y+1)^2}$

$= \dfrac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2} = u+iv$

$u = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ $\quad v = \dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$

$w = \dfrac{z-i}{z+i} \Rightarrow wz+wi = z-i$

$(w-1)z = -(w+1)i$

$z = \dfrac{w+1}{1-w}i$

Laplace 变换：

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

1. 存在性：① 充分条件 $\begin{cases} \text{step 1: 分段连续} \\ \text{step 2: 速度增长不超过 } e^{\alpha t} \end{cases}$

反例：$\mathcal{L}(t^{\alpha})=\int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}du$$

对吗？ $=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha>-1$ 即可

2. 常见变换

(1) $\mathcal{L}(e^{kt})=\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}dt=\frac{1}{s-k}$ 要求 $Re(s)>Re(k)$

(2) $\mathcal{L}(u(t))=\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=\frac{1}{s}$

(3) $\mathcal{L}(t^{\alpha})=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ $(\alpha>-1)$

(4) $\mathcal{L}(t^{\alpha}e^{kt})=\frac{\quad}{s-k}$