

Maxwell's equation
in integral form.

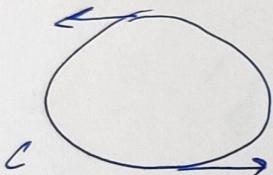
Stokes theorem:

$$1) \iiint_V dv (\operatorname{div} \vec{A}) = \iint_S A_n dS , \quad A_n = \vec{A} \cdot \vec{n} \text{ - normal component}$$



flow of the vector \vec{A} via surface S

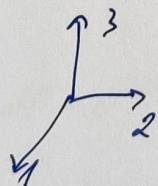
$$2) \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A} = \iint_D dx_i A_i$$



circulation of vector \vec{A} via closed contour C

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{A})_n dS = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A} ; \quad C = dS$$

"right" vectors:



标题:

"Maxwell's equation in integral form" (Maxwell方程组的积分形式)

主要内容分为两个部分的Stokes定理:

1. 第一个公式: $\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} = \iint_S A_n dS$ 其中 $A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$ 是法向分量 (normal component) 这个公式描述了通过闭合曲面S的向量场A的流量 (flow of the vector A via surface S)
2. 第二个公式: $\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A} = \int d\vec{s} \cdot \vec{A}$ 这描述了沿着闭合回路C的向量场A的环量 (circulation of vector A via closed contour C)

图中还包含了:

- 示意图显示了表面和闭合曲线的几何关系
- 一个右手坐标系 ("right" vectors) 的简图, 显示了1、2、3三个正交轴

这些定理是电磁学中Maxwell方程组积分形式的基础, 用于描述电磁场的几何和拓扑性质。它们将体积、面积和线积分联系起来, 是电磁学中非常重要的数学工具。

L9

Integral form of Maxwell's equations.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \mu_0 \rho : \int_V \rho dV, \quad \text{Arbitrary.}$$

$$\int_V dV \operatorname{div} \vec{E} = \iint_S E_n dS \Rightarrow \iint_S E_n dS = \mu_0 \underbrace{\int_V \rho dV}_{Q}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \iint_S E_n dS = \mu_0 Q \\ \iint_S B_n dS = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{B} = 0 & \int_S \int ds & \iint_S (\operatorname{rot} \vec{B})_n dS = \int d\vec{l} \cdot \vec{B} \\ & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{E} = \frac{\mu_0}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int d\vec{l} \cdot \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S E_n dS = \frac{\mu_0}{c} \underbrace{\iint_S j_n dS}_{I - \text{current via surface } S}$$

$$\underbrace{\int d\vec{l} \cdot \vec{E}}_{\text{em conduction}} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \underbrace{\iint_S B_n dS}_{\text{flow of the magnetic field}} = 0 \quad - \text{Faraday's law}$$

1. 高斯定律部分:

- 对于磁场: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- 对于电场: $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ 其中对任意体积V有: $\int_V dV \operatorname{div} \vec{E} = \iint_S E_n dS = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi Q$

这里Q代表电荷, $\iint_S B_n dS = 0$ 表示磁场无源。

2. 电磁感应部分:

- 法拉第电磁感应定律: $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
- 安培-麦克斯韦定律: $\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

积分形式表示为:

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint B_n dS = 0 \text{ (法拉第定律)}$$

其中:

- 第一项表示电场的感生电动势 (electro induction)
- 第二项表示磁场随时间变化产生的磁通量 (flow of the magnetic field)
- \vec{j} 表示通过面S的电流密度 (current via surface S)

这些方程完整描述了电磁场的行为, 包括:

- 电荷产生电场 (高斯定律)
- 磁场无源 (磁单极子不存在)
- 变化的磁场产生电场 (法拉第定律)
- 电流和变化的电场产生磁场 (安培-麦克斯韦定律)

Example:

✓ spherical symmetry:

$$\vec{E} = E(r) \cdot \hat{n}$$

$$\oint E_n dS = 4\pi Q$$

$$\iint E_n dS = E_n \cdot \iint dS = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$4\pi r^2 \cdot E(r) = 4\pi Q \Rightarrow E(r) = Q/r^2$$

Continuity equation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad | \partial V \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad | c \cdot \operatorname{div} \end{array} \right.$$

$$\partial_t \operatorname{div} \vec{E} + \underbrace{c \cdot \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}}_0 - \cancel{\frac{1}{c} \partial_t \operatorname{div} \vec{E}} = 4\pi \rho + 4\pi \operatorname{div} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \cancel{\partial_t \rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \{ \rho, \vec{j} \} \text{ is not arbitrary!}$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad | dV \Rightarrow \partial_t Q = - \iint j_n dS$$

charge's conservation law.

1. 球对称性例子：对于球对称电场， $\vec{E} = E(r)\vec{r}$ 利用高斯定律： $\iint E_n dS = 4\pi Q$ 通过球面积分得到： $E(r) = \frac{Q}{r^2}$ 这就是库仑定律的数学表达。

2. 连续性方程的推导：从Maxwell方程组的两个方程出发：

- $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$
- $\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

经过推导得到电荷守恒定律：

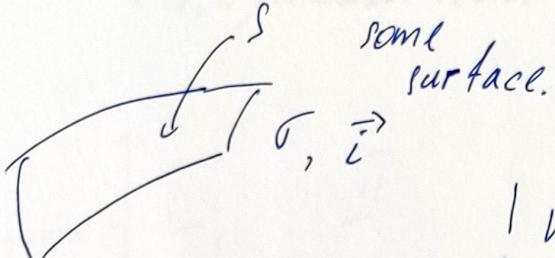
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

这个方程表明：

- $\frac{\partial Q}{\partial t} = - \iint j_n dS$ (电荷守恒定律)
- 系统中的电荷变化率等于通过闭合面的电流的负值
- 电荷和电流不是任意的，必须满足守恒关系

这个推导展示了Maxwell方程组内在的自洽性，以及电荷守恒这一基本物理定律是如何自然地从Maxwell方程组中推导出来的。

Maxwell's equations and boundary conditions.

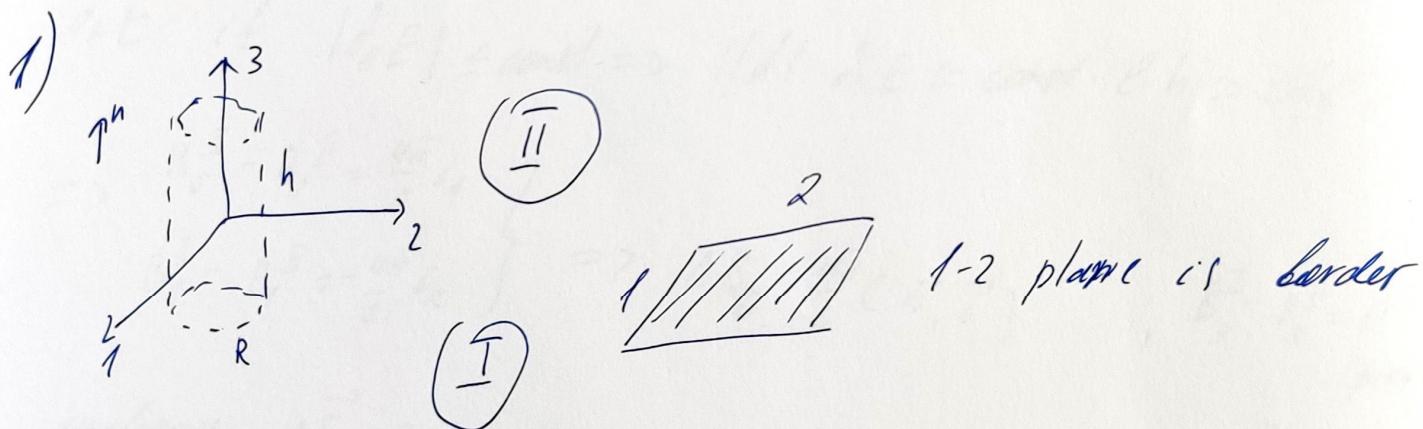
 some surface. out of surface: usual differentiable ρ, j

! We should agree solutions at M. equations in both areas: up and down.

Math: Divisible or N. conditions

Phys: postulate: Maxwell's equations are right even if the areas include border.

Explanation: there is no zero-thick surfaces in nature, all in nature is smooth.



$$h \ll R$$

$$\iint E_n dS = 4\pi i Q$$

$$\vec{R}_S \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}$$

$$\pi R^2 \cdot (E_3^{\text{II}} - E_3^{\text{I}}) = 4\pi \cdot Q \cdot \pi R^2$$

$$\Rightarrow \Delta E_n = E_3^{\text{II}} - E_3^{\text{I}} = 4\pi \sigma$$

$$\text{analogous: } \Delta B_n = B_3^{\text{II}} - B_3^{\text{I}} = 0$$

关键概念:

1. 表面物理特性:

- S : 表面
- σ : 表面电荷密度
- 表面上的物理量是可微分的

2. 数学和物理基础:

- 数学: 采用Dirichlet或Neumann边界条件
- 物理假设: Maxwell方程组在有边界的区域也是正确的
- 解释: 自然界中没有零厚度的表面, 一切都是平滑的

3. 边界条件推导: 对于1-2平面的边界:

- 电场的边界条件: $\iint E_n dS = 4\pi Q \pi R^2 (E_3^{II} - E_3^I) = 4\pi \sigma \pi R^2$ 简化得到:
$$\Delta E_n = E_3^{II} - E_3^I = 4\pi \sigma$$
- 磁场的边界条件 (类比) : $\Delta B_n = B_3^{II} - B_3^I = 0$

这些边界条件表明:

- 在界面处, 法向电场分量有跃变, 跃变量与表面电荷密度成正比
- 法向磁感应强度分量在界面处连续
- 这些条件确保了电磁场在边界处的物理行为是合理的

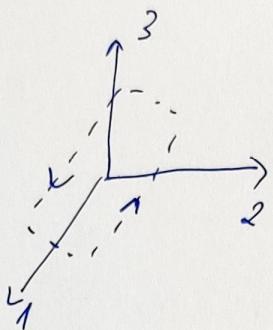
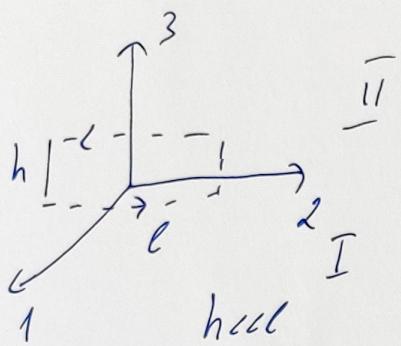
图中的坐标系显示了:

- 一个标准的三维直角坐标系
- $h \ll R$ (高度远小于半径) 的圆柱形区域
- 1-2平面作为边界面

这些边界条件在电磁学中非常重要, 它们确保了电磁场在不同介质界面处的正确行为。

$$\int d\mathbf{r}_i B_i - \frac{1}{c} \partial_t \iint E_n ds = \frac{4\pi}{c} \iint j_n ds$$

$\vec{i} = (i_1, i_2, 0)$ - 2d vector of current inside S .



We choose two contours.

$$\int d\mathbf{r}_i B_i: \ell (B_2^I - B_2^{II})$$

$$\int d\mathbf{r}_i B_i: \ell (-B_1^I + B_1^{II})$$

current: $i_1 \cdot \ell$ ($i_1 \perp \boxed{\frac{h}{\ell}}$) current: $i_2 \cdot \ell$

$\partial_t E$: if $|\partial_t E| \leq \text{const} \Rightarrow \iint dS \cdot \partial_t E \approx \text{const} \cdot \ell \cdot h \approx O(\ell^2)$.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} B_2^I - B_2^{II} = \frac{4\pi}{c} i_1 \\ B_1^I - B_1^{II} = -\frac{4\pi}{c} i_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta B_{\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{c} (\vec{n}, \vec{i}) ; \quad B_3^I - B_3^{II} = 0.$$

analogous: $\Delta \vec{E}_{\mathbf{r}} = 0$. (previously)

All together: $\Delta \vec{E}_n = 4\pi \vec{v}, \quad \Delta \vec{B}_n = 0$

$$\Delta \vec{E}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \Delta \vec{B}_{\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{c} (\vec{n}, \vec{i})$$

1. 起始方程: $\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint E_n dS = \frac{4\pi}{c} \iint j_n dS$

2. 电流向量表示: $\vec{i} = (i_1, i_2, 0)$ - 表示在S内的电流向量

3. 边界分析 (选取两个回路) :

- 图中显示了两个不同高度h的矩形回路

- 回路I和回路II跨越界面

4. 边界条件计算: 对于矩形回路:

- $\oint dl_i \cdot B_i : l(B_2^I - B_2^{II})$ (左侧回路)

- $\oint dl_i \cdot B_i : l(-B_1^I + B_1^{II})$ (右侧回路)

电流关系:

- 左侧: $i_1 \cdot l$

- 右侧: $i_2 \cdot l$

时间变化的电场项:

如果 $|\partial_t E| \leq const$, 则:

$$\iint dS \cdot \partial_t E \simeq const \cdot l \cdot h \simeq O(l^2)$$

5. 最终边界条件: $B_2^I - B_2^{II} = \frac{4\pi}{c} i_1$ $B_1^I - B_1^{II} = -\frac{4\pi}{c} i_2$

这可以写成向量形式:

$$\Delta \vec{B}_\tau = \frac{4\pi}{c} [\vec{n}, \vec{i}]$$

其中特别注意: $B_3^I - B_3^{II} = 0$ (previously)

6. 总结 (All together) :

- $\Delta \vec{E}_n = 4\pi \sigma$ (法向电场分量跃变)

- $\Delta \vec{E}_\tau = 0$ (切向电场分量连续)

- $\Delta \vec{B}_n = 0$ (法向磁场分量连续)

- $\Delta \vec{B}_\tau = \frac{4\pi}{c} [\vec{n}, \vec{i}]$ (切向磁场分量跃变与表面电流有关)