Tensors under Lorentz.

$\Lambda^T g \Lambda = g$. & $\underline{\Lambda_{00} \geq 1 \,;\ \det \Lambda = +1}$ $SO^+(1,3)$

scalar: $\varphi' = \varphi$

vector: $x' = \omega x$, $\partial' = \omega x$ $O(3)$

$x' = L x$, $\partial' = L^{-1T} x$ => two types of vectors: co- $\nearrow \partial_\alpha$

contra- $\searrow x_\alpha$

$A'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} A_\beta$ contravariant vector

$A'_\alpha = \bar{\Lambda}_{\alpha\beta} A_\beta$ covariant vector , $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1T})_{\alpha\beta}$

$O(3)$: $\omega^{-1} = \omega^T \Rightarrow \omega^{-1T} = \omega$

$SO(1,3)$: $\Lambda^{-1} \neq \Lambda^T \Rightarrow$ two types

Tensor is co- or contra- for each index

$T'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} T_{\mu\nu}$ contra-contra-

$T'_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}_{\alpha\mu} \bar{\Lambda}_{\beta\nu} T_{\mu\nu}$ co-co-

$T'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu\nu} \bar{\Lambda}_{\beta\nu} T_{\mu\nu}$ contra-co-

$T'_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}_{\mu\nu} \Lambda_{\beta\nu} T_{\mu\nu}$ co-contra-

1. 基本条件：

- $\Lambda^T g \Lambda = g$
- $\Lambda_0{}^0 > 1$
- $\det \Lambda = \pm 1$
- SO^+ (1,3)群特性

2. 不同类型的变换规则：

- 标量：$\varphi' = \varphi$
- 矢量有两种变换方式：
  - $x' = \omega x, \partial' = \omega\partial$ （O(3)群）
  - $x' = Lx, \partial' = L^{-T}x$ （对应两种类型的矢量：共变和反变）

3. 矢量变换规则：

- 反变矢量：$A'_u = \Lambda_{u\beta} A_\beta$ （上指标）
- 共变矢量：$A'_u = \bar{\Lambda}_{u\beta} A_\beta$ （下指标） 其中 $\bar{\Lambda}_{u\beta} = (\Lambda^{-T})_{u\beta}$

4. 重要性质：

- O(3)群：$\omega^{-1} = \omega^T \Rightarrow \omega^{-T} = \omega$
- SO(1,3)群：$\Lambda^{-1} \neq \Lambda^T \Rightarrow$ 存在两种类型

5. 张量的变换规则： 对每个指标可以是共变或反变，导致四种组合：

- $T'_{u\beta} = \Lambda_{u\gamma} \Lambda_{\beta v} T_{\gamma v}$ （反变-反变）
- $T'_{u\beta} = \bar{\Lambda}_{u\gamma} \bar{\Lambda}_{\beta v} T_{\gamma v}$ （共变-共变）
- $T'_{u\beta} = \Lambda_{u\gamma} \bar{\Lambda}_{\beta v} T_{\gamma v}$ （反变-共变）
- $T'_{u\beta} = \bar{\Lambda}_{u\gamma} \Lambda_{\beta v} T_{\gamma v}$ （共变-反变）

这种分类对于理解相对论性物理中的张量变换非常重要，因为它确保了物理定律在不同参考系中的协变性。共变和反变的区分是相对论性张量分析的一个核心特征，这与经典力学中的张量变换有显著不同。

$\not\exists$: $g_{\alpha\beta}$: it is co-co- or contra-contra-

$$g' = \Lambda g \Lambda^T \quad ; \quad g' = \bar{\Lambda} g \bar{\Lambda}^T = \Lambda^{-1T} g \Lambda^{-1}$$

Definition: $g' = g$. We have: is Λ is Lorentz, Λ^{-1} and Λ^T is also Lorentz

$\Rightarrow g' = \Lambda^{-1T} g \Lambda^{-1}$ is OK.

mixed: $g' = \Lambda g \bar{\Lambda}^T$ is <u>not</u>.

$\not\exists$ $\delta_{\alpha\beta}$: $\quad 1' = \Lambda \cdot 1 \cdot \bar{\Lambda}^T = \Lambda \Lambda^{-1} = 1$

$1' = \bar{\Lambda} \cdot 1 \cdot \Lambda^T = \Lambda^{-1T} \cdot \Lambda^T = 1$ $\quad \Rightarrow \delta_{\alpha\beta}$ is co-contra or contra-co.

Statement: g changes the type of the vector.

$\exists A$ is contra, i.e. $A' = \Lambda A$

$\Rightarrow B' = gA' = g\Lambda \cdot A = g\Lambda \cdot g^2 A = (g\Lambda g) B$

$\not\exists$ $g\Lambda g$: $\quad g\Lambda g = \bar{\Lambda} = \Lambda^{-1T} \quad | \cdot \Lambda^T$

$g\Lambda g \Lambda^T = 1 \quad | \cdot g \quad \Rightarrow \Lambda g \Lambda^T = g$

1. 度规张量g的变换性质：

- 可以是共变-共变或反变-反变类型
- $g' = \Lambda g \Lambda^T$
- $g' = \bar{\Lambda} g \bar{\Lambda}^T = \Lambda^{-T} g \Lambda^{-1}$

2. 基本定义和验证：

- $g' = g$
- 若Λ是洛伦兹变换，则Λ^{-1}和Λ^T也是洛伦兹变换
- 因此 $g' = \Lambda^{-T} g \Lambda^{-1}$ 是合理的
- 但 $g' = \Lambda g \bar{\Lambda}^T$ 是不合理的（混合形式）

3. $\delta_{\mu\beta}$的性质：

- $1' = \Lambda \cdot 1 \cdot \bar{\Lambda}^T = \Lambda \Lambda^{-1} = 1$
- $1' = \bar{\Lambda} \cdot 1 \cdot \Lambda^T = \Lambda^{-T} \Lambda^T = 1$
- 因此$\delta_{\mu\beta}$是共变-反变或反变-共变的

4. 重要声明：

- g改变矢量的类型（从共变到反变，或从反变到共变）
- 如果A是反变的（$A' = \Lambda A$），则：
    - $B' = gA' = g\Lambda A = \bar{\Lambda} g A = \bar{\Lambda} B$
    - 证明：$B' = g'A' = (g\Lambda g)B$

5. g的代数性质：

- $g\Lambda g = \bar{\Lambda} = \Lambda^{-T}$
- $g\Lambda g\Lambda = 1| \cdot \Lambda^T$
- $g\Lambda g\Lambda^T = 1|g \Rightarrow \Lambda g \Lambda^T = g$

这些关系说明了度规张量g在相对论中的核心作用：

1. 它提供了共变和反变指标之间的转换
2. 它保持在洛伦兹变换下不变
3. 它与洛伦兹变换之间存在重要的代数关系

这些性质对于理解相对论性张量分析和物理定律的协变性至关重要。

Summation: $\varphi = A_\alpha B_\alpha$ $\qquad u \parallel v$

$\varphi' = \varphi$, φ is scalar.

$$\varphi' = (A', B') = (\Lambda A, \bar{\Lambda} B) =$$
$$= (A, \underbrace{\Lambda^T \bar{\Lambda}}_{=1} B) = (A, B)$$
co + contra.

$u \perp v$

$$\varphi' = (A' B') = (\Lambda A, \Lambda B) = (A, \underbrace{\Lambda^T \Lambda}_{=1} B)$$
contra + contra

$\Rightarrow$ in any tensors contractions is performed on different types.

Designation: contra: x^α ; co: ∂_α

up

down

$\Rightarrow g^{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$; $\delta^\alpha_\beta, \delta_\alpha^\beta$

$(A')^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta$; $(A')_\alpha = \bar{\Lambda}^\beta_\alpha A_\beta$; the same for tensors.

$\Rightarrow$ $A_\alpha B^\alpha$ is scalar.

$A_\alpha B_\alpha$ is possible, but is not a tensor.

$A_\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$; $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$ $\qquad T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma} A^\gamma$

开头部分定义:

$q = Ad\ b2$

$q' = q$, q is scalar

这里定义了物理量q的变换性质,并强调它是标量量。

变换关系的推导:

$q' = (A',b') = (AA,Ab) = (A,A^{\pi} b) = (A,b)$ co + contra

以及

$q' = (A'b') = (AA,Ab) = (A,A^{\pi} A b)$ contra + contra

这展示了不同类型(协变和逆变)的变换关系。

重要原则:

"in any tensor contractions is performed on different layers"

说明张量收缩必须在不同层次上进行,这是处理向量和张量时的基本原则。

符号定义:

contra(逆变): $\vee_{\alpha}$ 上指标

co(协变): Ω 下指标

基本关系:

$g^{\alpha\beta}$, $f\alpha\beta$; $\delta^{\alpha}{}_{\beta}$, $\delta_{\alpha}{}^{\beta}$

这涉及度规张量和克罗内克delta符号,用于指标的升降。

变换规则:

$(A^{j})^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} A^{\beta}$

$(A^{j})_{\alpha} = \acute{A}^{\beta}{}_{\alpha} A_{\beta}$

"the same for tensor" 表明这些变换规则对张量同样适用。

重要结论:

$A_{\alpha} B^{\alpha}$ 是标量

$A_{\alpha} b_{\alpha}$ "possible, but is not a tensor"

这表明某些数学组合虽然可能,但可能不具有正确的张量性质。

最后给出的关系:

$A_{\alpha} = g^{\alpha\beta} A_{\beta}$

$A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta}$

$T_{\beta} = R_{\alpha\beta\gamma} A^{\gamma}$

这些是常见的指标升降关系和张量变换关系。

这些数学结构和符号系统在电动力学中很重要,因为它们:

1. 帮助描述电磁场和电磁势的变换性质
2. 确保物理量在坐标变换下的正确行为
3. 提供了处理向量和张量的严格数学框架

Components:

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta : \quad A_0 = A^0, \; A_i = -A^i$$

$$T_{\alpha\beta} : \; T_{00} = T^{00}, \; T_{0i} = -T^{0i}, \; T_{i0} = -T^{i0}, \; T_{ik} = T^{ik}$$

Starting point: $x^\alpha = \{x^0, x^i\} = \{ct, \vec{x}\}$

co: $x_\alpha = \{x_0, x_i\} = \{ct, -\vec{x}\}$ $\qquad x^i = -x_i$

$\partial_\alpha = \{\partial_0, \vec{\nabla}_i\}$ $\qquad \partial^\alpha = \{\partial_0, -\vec{\nabla}_i\}$

$$g_\alpha{}^\beta = g^{\beta\mu} g_{\alpha\mu} = \delta^\beta{}_\mu \quad (g^2 = 1) \; ; \; g^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$$

$\Rightarrow$ g, δ are same objects.

$g^2 = 1 \Rightarrow A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha$.

Tensor fields:

$\varphi'(x') = \varphi(x)$

$(A')^\alpha (x') = A^\alpha(x)$ and so on

$\partial_\alpha \varphi$ co-vector, if φ is scalar

$\partial_\alpha A^\alpha$ is scalar, if A^α is vector.

1. 开头定义了基本变换:

- $q = Ad\ b2$ 其中 q 是标量量(scalar)
- 这里的 A 很可能代表电磁势(electromagnetic potential)

2. 在规范变换下的行为:

- $q' = (A', b') = (AA, Ab) = (A, A^{\pi} b) = (A,b)$ 这里展示了在规范变换下的协变性质
- 标注的 co + contra 和 contra + contra 表示协变(covariant)和逆变(contravariant)分量的变换特性

3. 重要原则说明: "in any tensor contraction is performed on different layers" (任何张量收缩都要在不同层次进行)

- 这在电动力学中特别重要,因为它确保了规范不变性

4. 符号系统:

- contra(逆变): $\vee_\alpha$ 向上指标
- co(协变): Ω 向下指标 这种指标约定在描述电磁场和电磁势的变换性质时非常重要

5. 变换关系:

- $g^{\alpha\beta}$, $f\alpha\beta$ (这里的 f 可能表示电磁场张量)
- $\delta^{\alpha}{}_{\beta}$, $\delta_{\alpha}{}^{\beta}$ (克罗内克δ符号)
- $A_\alpha B^\alpha$ 是标量(规范不变量)
- $A_\alpha b_\alpha$ "possible, but is not a tensor" 这说明某些表面上合法的组合可能不具有正确的张量变换性质

6. 重要的变换关系:

- $A_\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$; $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$ (电磁势的协变和逆变形式间的转换)
- $T_\beta = R_{\alpha\beta\gamma} A^\gamma$ (可能涉及场强或其他物理量的变换)