Vectors $\vec{E}, \vec{B} \longrightarrow$ potentials $\varphi, \vec{A}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rot grad } \varphi = 0 \\ \text{div rot } \vec{A} = 0 \end{array}\right\}$$

Maxwell: $$\left.\begin{array}{l} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$: definition of $\vec{A}$. $\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{x})$

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = \text{rot}\underbrace{\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t A\right)}_{-\nabla\varphi} = 0$$

$-\nabla\varphi$: definition of φ.

$\Rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$

Maxwell': $$\left.\begin{array}{l} \text{div}\vec{E} = 4\pi\rho \\ \text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\text{div}(-\text{grad}\,\varphi}^{\Delta} - \frac{1}{c}\partial_t A) = 4\pi\rho \\ \underbrace{\text{rot rot}\vec{A}}_{\vec{\nabla}\,\text{div}A - \partial^2 A} + \frac{1}{c}\partial_t\left(\text{grad}\,\varphi + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}\right\}$$

Def: wave operator $\Box = \left(\frac{1}{c}\partial_t\right)^2 - \Delta$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Box\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\left(\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \varphi\right) = 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\text{div}A + \frac{1}{c}\partial_t\varphi\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}\right\}$$

1. 基本关系（向量 $\vec{E}, \vec{B}$ 到势 $\phi, \vec{A}$ 的转换）：

起始方程:

- $\text{rot grad } \phi = 0$
- $\text{div rot } \vec{A} = 0$

Maxwell方程:

- $\text{div } \vec{B} = 0$
- $\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0$

2. 电磁势定义:

- $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$（磁矢势的定义）
- $\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{r})$（磁矢势是时空函数）
- $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$（电标势与磁矢势的关系）

3. Maxwell方程用势表示（Maxwell'）：

- $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$
- $\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

展开后得到:

- $\text{div}(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}) = 4\pi\rho$
- $\text{rot rot } \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t(\nabla\phi + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

4. 波算符定义: $\Box = (\frac{1}{c}\partial_t)^2 - \Delta$ 其中 Δ 是拉普拉斯算符
5. 最终方程组: $\Box\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi) = 4\pi\rho \, \Box\vec{A} + \nabla(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

这些方程完整描述了电磁场的势表示，它们是Maxwell方程组的另一种等价形式。使用势表示的优点是:

- 自动满足某些Maxwell方程
- 在求解某些问题时更方便
- 与规范变换理论有深刻联系
- 在量子电动力学中有重要应用

Gauge.

$$\exists \quad A \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Phi, \qquad \varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\partial_t \Phi \qquad \forall \Phi = \Phi(t, \vec{x})$$

$$\vec{B}' = \mathrm{rot}\,\vec{A}' = \mathrm{rot}\,(\vec{A} + \vec{\nabla}\Phi) = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\Phi = \vec{E}$$

Maxwell': also true

gauge invariance of equations: set of solutions $\to$ set of solutions

We <u>may</u> fix: $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ Coulomb

$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \varphi = 0$ Lorentz

Lorentz: $\Box\varphi = 4\pi\rho$; $\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ two <u>non</u>-chained equations

Coulomb: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$; $\Box\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\varphi = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ φ is <u>un</u>chained, then it is possible to find A.

Possibility:

$\exists\,\mathrm{div}\,A \neq 0$: I <u>want</u> then $\mathrm{div}\,A' = \mathrm{div}(A + \nabla\Phi) = 0$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = -\mathrm{div}\,A$$

The same as: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$: ρ is known, φ is seeing for. For sure, φ exists for some ρ.

$\Rightarrow \Phi$ exists for any A.

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ is possible gauge.

1. 规范变换的基本形式：

- $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Phi$
- $\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\Phi$ 其中 $\Phi = \Phi(t, \vec{r})$ 是任意标量函数

2. 物理量在规范变换下的不变性：

- $\vec{B}' = \text{rot}\,\vec{A}' = \text{rot}\,(\vec{A} + \nabla\Phi) = \vec{B}$
- $\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}' = \vec{E}$

3. 规范条件选择： 可以选择：

- Coulomb规范：$\text{div}\,\vec{A} = 0$
- Lorentz规范：$\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi = 0$

4. 在不同规范下的方程： Lorentz规范下：

- $\Box\phi = 4\pi\rho$
- $\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Coulomb规范下：

- $\Delta\phi = -4\pi\rho$
- $\Box\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\phi = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

5. 存在性证明： 对于任意 $\text{div}\,\vec{A} \neq 0$，总可以找到适当的 Φ 使得 $\text{div}\,\vec{A}' = 0$。

这个规范理论说明：

- 物理量（$\vec{E}, \vec{B}$）不依赖于势的具体选择
- 可以通过选择合适的规范简化计算
- 规范自由度是电磁理论的基本特征之一

Lorentz:

$$\operatorname{div} A' + c^{-1}\partial_t \varphi' = 0 \qquad A,\varphi \to A',\varphi'$$

$$\nexists \quad \operatorname{div}\vec{A} + c^{-1}\partial_t\varphi + \underbrace{\operatorname{div}\nabla\varphi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi}_{= -\Box\varphi}$$

$$\Rightarrow \Box\varphi = \left(\operatorname{div}\vec{A} + c^{-1}\partial_t\varphi\right)$$ - wave ~~eq~~ equation.

Solution exist for "good" r.h.s.

1. 洛伦兹规范的基本条件：$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\partial_t\phi' = 0$ 这里 $\vec{A}'$ 和 ϕ' 是规范变换后的势
2. 规范变换后，将变换式代入得到：$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi + \operatorname{div}\nabla\Phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Phi = 0$
3. 其中：$-\Box\Phi = \operatorname{div}\nabla\Phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Phi$ 是波算符作用在 Φ 上
4. 最终得到波动方程：$\Box\Phi = -(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi)$

图中注明，对于"好的"右手边（r.h.s.），这个波动方程存在解。

这个推导展示了：

- 洛伦兹规范的自洽性
- 通过求解波动方程可以找到合适的规范变换
- 规范变换的存在性依赖于波动方程的可解性

这是电磁场理论中规范自由度的重要体现。