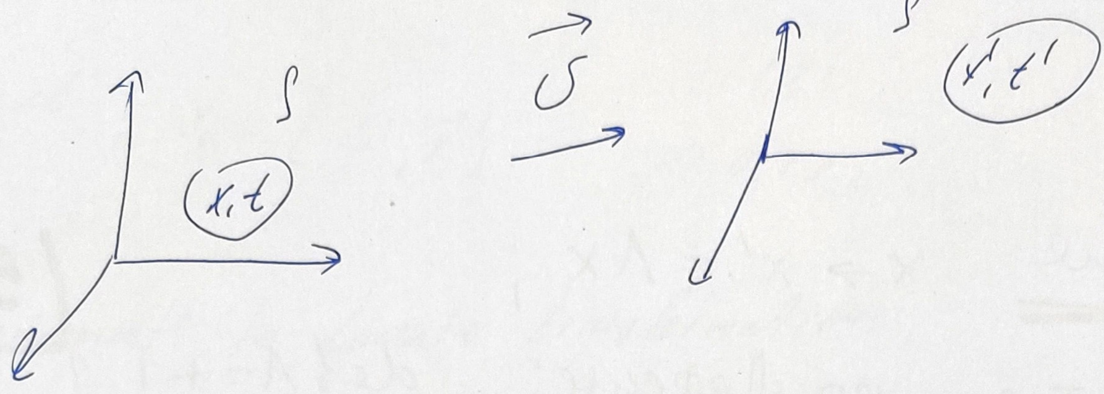
Relativity.



Galileo: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$, $t' = t$, $\vec{v} = \text{const}$

summation of velocities: $\vec{x}' = \vec{u}\, t' \Rightarrow \vec{x} = (\vec{v} + \vec{u})\, t$

All inertial frames are the same:

$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Galileo: $\vec{F}' = \vec{F}$, $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \vec{a}'$, $m' = m$

Maxwell + Galileo: <u>no</u>. $c' = c$

So: 1) <u>relativity</u> is not true

2) <u>Galileo</u> is not true

$v/c \ll 1 \Rightarrow$ difference is small

1. 相对论变换图示:
- 图中展示了两个参考系S(x,t)和S'(x',t')之间的关系
- 通过矢量v表示相对运动
2. 伽利略变换:
- $x' = x - vt$
- $t' = t$
- $v = const$（相对速度为常数）
3. 速度叠加定律:
- $v' = dx'/t'$
- 推导得到 $x = (v \pm u)t$（经典速度叠加）
4. 惯性系的力学特性:
- $F = ma$（牛顿第二定律）
- $F_1 = -F_2$ （作用力与反作用力）
5. 伽利略变换下的力学量:
- $F' = F$
- $a' = \ddot{x}' - a$（加速度变换）
- $m' = m$（质量不变）
6. Maxwell方程组与伽利略变换的冲突:
- Maxwell方程组给出 $c' = c$
- 这与伽利略变换不相容
7. 重要结论:
- 1. 相对性原理不成立，或
- 2. 伽利略变换不正确
8. 实践发现:
- 当$v/c \ll 1$时，差异很小
- 这解释了为什么在低速情况下伽利略变换仍然是很好的近似

这个内容揭示了经典物理学（伽利略变换）与电磁学（Maxwell方程组）之间的根本矛盾，这个矛盾最终导致了狭义相对论的诞生。关键点在于:

1. 光速在所有惯性系中都应该保持不变（来自Maxwell方程组）
2. 这与伽利略变换下的速度叠加规则不相容
3. 在低速情况下，伽利略变换仍是很好的近似
4. 这个矛盾最终需要通过洛伦兹变换来解决，这就是爱因斯坦相对论的基础

Lorentz.

$x_0 = ct$, $x_\alpha = \{x_0, \vec{x}\}$ $i = 1,2,3$

$\alpha = 0,1,2,3$

Requirements to Lorentz transformations:

1) inertial frame of reference → to inertial 惯性系
2) $c = const$
3) Group
4) tensors under $O(3)$ are preserved
5) continuity

1): $x_i = a_i x_0 + b_i \longrightarrow x_i' = a_i' x_0' + b_i'$ line (S) → line (S')

$\Rightarrow x_\alpha' = \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta + C_\alpha$. - line transformations.

$\exists C_\alpha = 0$ (transitions are trivial)

$\Rightarrow x' = \Lambda x$; $x_\alpha' = \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta$

首先介绍了基本定义：

- $x_0 = ct$（时间分量）
- $x_u = \{x_0, \bar{x}\}$（四维时空坐标）
- $i = 1,2,3$（空间指标）
- $\mu = 0,1,2,3$（四维指标）

洛伦兹变换的必要条件（Requirements）：

1. 惯性系之间的变换 ("inertial frame of reference → to inertial")
2. 光速不变（$c = const$）
3. 群特性（Group）
4. 张量在O(3)群下保持不变（tensors under O(3) are preserved）
5. 连续性（continuity）

变换的数学形式：

1. 线性变换形式：
   - $x_i = a_i x_0 + b_i \rightarrow x'_i = a'_i x'_0 + b'_i$
   - 这表示从线性(1)到线性(1')的变换
2. 推导得到：
   - $x'_u = \Lambda_{u\beta} x_\beta + C_u$（线性变换）
   - 其中$C_u = 0$（平移是平凡的）
3. 最终形式：
   - $x' = \Lambda x$
   - $x'_u = \Lambda_{u\beta} x_\beta$

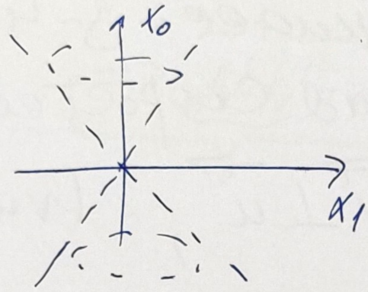
这些条件和变换形式构成了特殊相对论中洛伦兹变换的基础，确保了相对论原理和光速不变原理的统一。它解决了之前提到的Maxwell方程组与伽利略变换之间的矛盾。

2) $c = const$

$x_i = n_i ct \Rightarrow \underline{x_i' = n_i' \cdot ct}$; $c' = c$

$\vec{x} = \vec{n} x_0 \Rightarrow \underline{x_i x_i = x_0^2} \Rightarrow x_0^2 - x_i x_i = 0$: equation of cone.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$? - general form of cone.



$\Rightarrow$ point $\in$ cone $\rightarrow$

point $\in$ cone.

Def: $g_{\alpha\beta}$: $g_{00} = 1$; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$; $g_{\alpha\beta} = 0$ if $\alpha \neq \beta$.

Property: $g^2 = I$; $g^{-1} = g$.

So, $g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = (gx, x) = (x, gx)$

light cone: $\underline{(x, gx) = 0.}$

$c = const \Rightarrow (x', gx') = (\Lambda x, g\Lambda x) = 0.$

Statement: if two forms are equal to zero at the same time $\Rightarrow$

$(x', gx') = a(x, gx)$; moreover, $a > 0$.

主要讨论了光速不变原理($c = const$)的数学推导和几何意义：

1. 时空坐标关系：

- $x_i = n_i ct \rightarrow x'_i = n'_i ct$，其中$c' = c$
- $\bar{x} \cdot \bar{n} = x_0$ 推导出 $x_0^2 - x_i x_i = 0$ (光锥方程)

2. 光锥的一般形式： $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ 这个方程描述了四维时空中的光锥结构。
3. 闵氏度规(g_{uv})的定义：

- $g_{00} = 1$
- $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$
- $g_{uv} = 0$ (当$\mu \neq v$)

4. 度规的重要性质：

- $g^2 = I$ (单位矩阵)
- $g^{-1} = g$

5. 基于度规的四维内积： $g_{uv} x_u x_v = (x,gx) = (x',gx')$
6. 光锥条件： $(x,gx) = 0$
7. 由光速不变性推导出： $(x',gx') = (\Lambda x, g\Lambda x) = 0$
8. 重要结论： 如果两项同时为零，则： $(x',gx') = a(x,gx)$，且 $a>0$

这些内容构成了特殊相对论中的基本数学框架，特别是描述了光锥结构和闵氏度规如何保证光速不变原理的实现。光锥的几何结构直观地展示了因果关系在相对论中的表现。

$p(z) = \text{const} \cdot \prod_i (z - z_i)$ roots of the polynom.

$$\left.\begin{aligned}(x, gx) &= 1 \cdot x_0^2 - x_i x_i \\ (x', gx') &= x_\alpha (\Lambda^T g \Lambda)_{\alpha\beta} x_\beta\end{aligned}\right\} \Rightarrow a = (\Lambda^T g \Lambda)_{00}$$

$\underline{a > 0}$. $\exists\, x_0 = 0$ u $\vec{x}: \Lambda_{0k} x_k = 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{x_i' x_i'}_{>0} = a \underbrace{x_i x_i}_{>0} \Rightarrow \underline{a > 0}$$

$\underline{a = 1}$!

Def: Lorentz is $(x', gx') = (x, gx)$; $x' = \Lambda x$

$(x, gx) = (x', gx') = (x, \Lambda^T g \Lambda x)$.

N3: $O(3)$ is $\underline{\omega^T = \omega}$

$\Rightarrow$ def': Lorentz is $\underline{\Lambda^T g \Lambda = g}$.

Com: $\Lambda^T g \Lambda$ is symmetrical, $\Rightarrow$ if $(x, Ax) = 0 \Rightarrow A = 0$ (if $A = A^T$).

//

$\Lambda \in$ Lorentz $\Rightarrow \Lambda^T, \Lambda^{-1}, \Lambda^{-1T} \in$ Lorentz.

1. 首先给出多项式的根： $P(z) = const\cdot\prod_i(z-z_i)$
2. 内积关系：

- $(x,gx) = t^2-x_0^{\ 2} - x_ix_i$
- $(x',gx') = x_u(\Lambda^T g \Lambda)_{uv}x_v$ 这两个式子推导出 $a = (\Lambda^T g \Lambda)_{0\ 0}$

3. 时间分量性质： 当$a>0$时，若$x_0 \geq 0$且$\bar{x}$：non-spacelike，则$\Lambda x_0 >0$
4. 洛伦兹变换的定义：

- $(x',gx') = (x,gx)$
- $x' = \Lambda x$ 这导致 $(x,gx) = (x',gx') = (x,\Lambda^T g\Lambda x)$

5. 重要结论：

- 定义：洛伦兹变换满足 $\Lambda^T g\Lambda = g$
- 注：$O(3)$中有$\omega^T = \omega^{-1}$

6. 进一步推论：

- $\Lambda^T g\Lambda$是对称的
- 如果$(x,Ax) = 0$，那么$A = 0$（如果$A = A^T$）

7. 最终总结： 如果Λ是洛伦兹变换，那么Λ^T、Λ^{-1}、Λ^{-T}也都是洛伦兹变换

这些数学关系揭示了洛伦兹变换的几个关键特性：

1. 保持闵可夫斯基度规不变
2. 形成群结构
3. 保持因果关系
4. 时间方向的一致性

这些性质对于理解相对论中的时空结构和物理规律的协变性非常重要。特别是$\Lambda^T g\Lambda = g$这个条件，它确保了在不同惯性系之间的变换保持了闵可夫斯基度规的形式不变。

Types of Lorentz.

$O(3)$: $\det \omega = \pm 1$.

Lorentz: $\Lambda^T g \Lambda = g \;|\det \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \underline{\det \Lambda = \pm 1}$.

$1 = g_{00} = (\Lambda^T g \Lambda)_{00} = (\Lambda^T)_{0\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta 0} = \Lambda^T_{00}\Lambda_{00} - \Lambda^T_{0i}\Lambda_{i0} = \Lambda_{00}^2 - \Lambda_{i0}\Lambda_{i0}$

$\Rightarrow \Lambda_{00}^2 = 1 + \Lambda_{i0}\Lambda_{i0} \geq 1 \quad \Rightarrow \left.\begin{matrix}\Lambda_{00} \geq 1 \\ \Lambda_{00} \leq -1\end{matrix}\right\}$

4 classes

All: $O(1,3)$

$\det \Lambda > 0$: $SO(1,3)$

$\det \Lambda > 0,\ \Lambda_{00} > 0$: $SO^+(1,3)$

P: $x_0' = x_0,\ x_i' = -x_i$ $\quad \det \Lambda = -1,\ \Lambda_{00} > 0$

T: $x_0' = -x_0;\ x_i' = x_i$ $\quad \det \Lambda = -1,\ \Lambda_{00} < 0$

PT: $x_0' = -x_0;\ x_i' = -x_i$ $\quad \det \Lambda = 1,\ \Lambda_{00} < 1$

I: $\det \Lambda = 1,\ \Lambda_{00} > 0$. – restricted Lorentz group

$SO(1,3)$ – proper Lorentz group.

$\nexists$ $SO^+(1,3)$. We want to know ~~eq~~ expressions for σ like Galileo transformations.

$M' \xrightarrow[\vec{v}]{}$ from M.

1. O(3)群的性质：

- $\det \omega = \pm 1$

2. 洛伦兹变换的基本性质：

- $\Lambda^T g \Lambda = g$
- $\det \Lambda = \pm 1$ (由于$(\det \Lambda)^2 = 1$)
- 时间分量特性：$\Lambda_{0\ 0}^{\ 2} = 1 + \Lambda_{i0} \Lambda_{i0} \geq 1$
- 因此：$\Lambda_{0\ 0} \geq 1$ 或 $\Lambda_{0\ 0} \leq -1$

3. 四种洛伦兹变换类型：

- P类：$x_0' = x_0$, $x_i' = -x_i$ (空间反射)
- T类：$x_0' = -x_0$, $x_i' = x_i$ (时间反演)
- PT类：$x_0' = -x_0$, $x_i' = -x_i$ (时空反演)
- I类：$\det \Lambda = 1, \Lambda_{0\ 0} > 0$ (恒等变换)

4. 洛伦兹群的分类：

- O(1,3)：完整洛伦兹群
- SO(1,3)：特殊洛伦兹群 ($\det \Lambda > 0$)
- $SO^+(1,3)$：正向洛伦兹群 ($\det \Lambda = 1, \Lambda_{0\ 0} > 0$)

5. 应用目标：

- 目标是理解$SO^+(1,3)$，因为这与伽利略变换有关
- 研究从参考系M到M'的变换（以速度v为参数）

这些分类对理解相对论性物理中的对称性和变换性质至关重要，特别是在理解粒子物理和场论中的各种对称性变换。

$SO^+(1,3)$群在物理中特别重要，因为它描述了实际的物理系统在不同惯性参考系之间的变换关系。

$$x' = \Lambda x \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_0' &= \Lambda_{00} x_0 + \Lambda_{0i} x_i \\ x_i' &= \Lambda_{i0} x_0 + \Lambda_{ik} x_k \end{aligned} \right\}$$

x_0, x_0' are pure scalars, x_i, x_i' – pure vectors.

$\Rightarrow$ (Lemma about contraction) $\Lambda_{0i}, \Lambda_{i0}$ pure vectors, Λ_{ik} – pure tensor.

We have: $\vec{v}$, δ_{ik} ε_{ijk}. $\leftarrow$ pseudo, $\Rightarrow$ prohibited.

$\Rightarrow \Lambda_{00} = a$, $\Lambda_{0i} = \alpha v_i$, $\Lambda_{i0} = \beta v_i$; $\Lambda_{ik} = \lambda \delta_{ik} + \mu v_i v_k$

So: $\begin{cases} x_0' = a x_0 + \alpha (vx) \\ x_i' = \beta x_0 v_i + \lambda x_i + \mu v_i (vx) \end{cases}$

1): $\beta + \lambda/c + \mu v^2/c = 0.$

2): $x_0^2 - x_i x_i = \underbrace{(x_0')^2 - x_i' x_i'}_{\shortparallel}$

$$(a x_0 + \alpha (vx))^2 - (\beta x_0 v_i + \lambda x_i + \mu v_i (vx))^2$$

1. 变换的基本形式 $x' = \Lambda x$:

- $x_0' = \Lambda_{0 0} x_0 + \Lambda_{0 i} x_i$
- $x_i' = \Lambda_{i0} x_0 + \Lambda_{iu} x_u$

2. 张量性质说明:

- x_0, x_0'是纯标量
- x_i, x_i'是纯矢量
- 引理指出: $\Lambda_{0 i}$, Λ_{i0} 是纯矢量, Λ_{iu}是纯张量

3. 考虑到已有的矢量和张量:

- v（速度矢量）
- δ_{iu}（克罗内克符号）
- ε_{ijk}（反对称张量）
- 赝矢量是被禁止的

4. 变换矩阵的一般形式:

- $\Lambda_{0 0} = a$
- $\Lambda_{0 i} = \alpha v_i$
- $\Lambda_{i0} = \beta v_i$
- $\Lambda_{iu} = \lambda\delta_{iu} + \mu v_i v_u$

5. 两个重要条件:

- 条件1: $\beta + \lambda/c + \mu v^2/c = 0$
- 条件2: $x_0^2 - x_i x_i = (x_0')^2 - x_i' x_i'$ 展开为: $(a x_0 + \alpha(v\cdot x))^2 - (\beta x_0 v_i + \lambda x_i + \mu v_i (v\cdot x))^2$

这些关系描述了洛伦兹变换的具体数学结构，展示了如何构建满足相对论要求的变换矩阵。这对于理解相对论中的参考系变换至关重要。

$$\left\{\begin{aligned} &1 = a^2 - \beta^2 v^2 \\ &0 = a\alpha - \beta\lambda - \beta\mu v^2 \\ &\lambda^2 = 1 \\ &\alpha^2 - \mu^2 v^2 - 2\mu\lambda = 0 \\ &+\ 0 = \beta + \lambda/c + \mu v^2/c \end{aligned}\right\}$$

Solution: $$\left.\begin{aligned} &a = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \\ &\alpha = \beta = -a/c\ ,\ \lambda = 1,\ \mu = \frac{a-1}{v^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} &x_0' = a\left(x_0 - \frac{(vx)}{c}\right) \\ &x_i' = x_i - \left(\frac{a}{c}\right) v_i x_0 + \left(\frac{a-1}{v^2}\right)(vx)\, v_i \end{aligned}\right.$$

$t = x_0/c$

$t' = x_0'/c$

if $c \to \infty \Rightarrow a = 1 \Rightarrow t' = t;\ x' = x - vt$ - Galileo!

Inversed: $x \rightleftarrows x',\ v \to (-v)$

Special cases:

$\vec{v} \perp \vec{x},\ \Rightarrow (vx) = 0:\quad t' = at,\ x_i' = x_i - av_i t$

$\vec{v} \parallel \vec{x},\ \Rightarrow x_i = v_i \frac{(vx)}{v^2}:\ t' = a\left(t - \frac{(vx)}{c}\right);\ x_i' = a(x_i - v_i t)$

1. 基本方程组:

- $1 = a^2 - \beta^2 v^2$
- $0 = a\alpha - \beta\lambda - \beta\mu v^2$
- $\lambda^2 = 1$
- $\lambda^2 - \mu^2 v^2 - 2\mu\lambda = 0$
- $0 = \beta + \lambda/c + \mu v^2/c$

2. 解的形式:

- $a = \gamma = (1 - v^2/c^2)^{\wedge}(-1/2)$ (洛伦兹因子)
- $\alpha = \beta = -a/c$
- $\lambda = 1$
- $\mu = (a-1)/v^2$

3. 洛伦兹变换的最终形式:

- $x_0' = a(x_0 - (v \cdot x)/c)$ 其中 $t = x_0/c, t' = x_0'/c$
- $x_i' = x_i - (a/c)v_i x_0 + ((a-1)/v^2)(v \cdot x)v_i$

4. 重要极限情况: 当 $c \to \infty$ 时:

- $a \to 1$
- $t' \to t$
- $x' \to x - vt$ (回到伽利略变换)

5. 特殊情况分析:

- 逆变换: $x \to x', v \to (-v)$
- 速度垂直情况（$v \perp x$）:
  - $(v \cdot x) = 0$ 时
  - $t' = at$
  - $x'_i = x_i - av_i t$
- 速度平行情况（$v \parallel x$）:
  - $x_i = v_i(v \cdot x)/v^2$
  - $t' = a(t - (v \cdot r)/c)$
  - $x'_i = a(x_i - v_i t)$

这些变换形式构成了特殊相对论的数学基础，展示了时空坐标在不同参考系之间如何变换。这对理解相对论效应（如长度收缩和时间延缓）至关重要。