Sum of the velocities.

System S': u. $x' = u_i t'$; velocity of S: $v = \text{const.}$

What is his speed in S? (Galileo: $\vec{v} + \vec{u}$).

back transformation:

$$\begin{cases} t = a\left(t' + \dfrac{(uv)t'}{c^2}\right) = at'\left(1 + \dfrac{(uv)}{c}\right) \\ x_i = t'\left(u_i + a v_i + \dfrac{(a-1)}{v^2}(uv)\, v_i\right) \end{cases}$$

$$x_i = u_i t \Rightarrow w_i = \frac{\left(u_i + a v_i + (a-1)(uv)v_i/v^2\right)}{a\left(1 + (uv)/c^2\right)}$$

$u, v \ll c$ (i.e. $c \to \infty$): $w_i \to u_i + v_i$

$\vec{v} \perp \vec{u}$, $(uv) = 0 \Rightarrow w_i = v_i + u_i/a$

$$\vec{v} \parallel \vec{u} \Rightarrow w = \frac{u + a v + (a-1)u}{a\left(1 + uv/c^2\right)} = \frac{u+v}{1 + uv/c^2}$$

这页讲解了在相对论框架下如何处理速度叠加的问题：

1. 问题设定：

- 在系统S'中，粒子速度为u（$x' = ut'$）
- S'相对于S的速度为v（常量）
- 求：在系统S中粒子的速度是多少？

2. 使用逆变换：

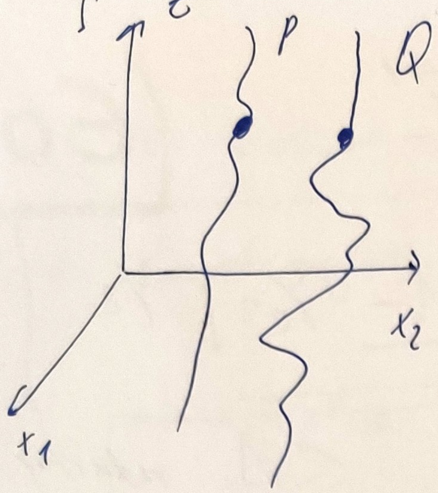
- $t = at'(1 + (u\cdot v)/c^2)$
- $x_i = t'(u_i + av_i + (a-1)(u\cdot v)v_i/v^2)$

3. 导出速度变换公式： $x_i = u_i t$ 得到： $u_i = (u_i + av_i + (a-1)(u\cdot v)v_i/v^2)/(a(1 + (u\cdot v)/c^2))$

4. 特殊情况讨论：

- 当u, v << c时（非相对论极限）：
  - $u_i \to u_i + v_i$（回到伽利略速度加法）
- 当v⊥u时（速度垂直）：
  - $(u\cdot v) = 0$
  - $u_i = v_i + u_i/a$
- 当v∥u时（速度平行）：
  - $u = (u+av+(a-1)u)/(a(1+uv/c^2))$
  - 简化为：$u = (u+v)/(1+uv/c^2)$

这个推导展示了相对论速度加法与经典伽利略速度加法的区别，并说明了为什么光速是宇宙速度的上限。



Galileo: $t'(P) = t'(Q)$

$S: t(P) = t(Q)$

Lorenz: $t'(P) \neq t'(Q)$

S

lenght: $|\vec{x}(P) - \vec{x}(Q)|$ at $t(P) = t(Q)$

$S': |\vec{x}'(P) - \vec{x}'(Q)|$ at $t'(P) = t'(Q)$

Galileo: $|\vec{x}(P) - \vec{x}(Q)| = |\vec{x}'(P) - \vec{x}'(Q)|$

Lorentz: let the rod (stick) obtain $v'=0$ at S'

know $\Delta x_i'$ in S'. Want: find Δx_i in S at $\Delta t=0$.

$$\left.\begin{aligned} \Delta t &= a\left(\Delta t' + \frac{(v\Delta x')}{c^2}\right) \\ \Delta\vec{x} &= \Delta x' + a\vec{v}\Delta t' + \frac{(a-1)}{v^2}(v\Delta x')\vec{v} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}' - \frac{a-1}{av^2}(v\Delta x')\vec{v}$$

$\vec{v} \perp \Delta\vec{x}$: $\Delta\vec{x}' = \Delta\vec{x}$

$\vec{v} \parallel \Delta\vec{x}$: $\Delta\vec{x}' = v_i \dfrac{(v\Delta x')}{v^2} \Rightarrow \Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}' \cdot \underbrace{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}_{\leq 1}$

$\Rightarrow$ lenght reducing.

这页讲义讨论了相对论中的长度收缩效应，让我帮你分析其中的关键内容：

1. 不同变换下同时性的比较：

- 伽利略变换：$t'(P) = t'(Q)$
- 简单时间：$t(P) = t(Q)$
- 洛伦兹变换：$t'(P) \neq t'(Q)$

2. 长度测量的定义：

- 在S系统中：$|\vec{x}(P) - \vec{x}(Q)|$ 在 $t(P) = t(Q)$ 时测量
- 在S'系统中：$|\vec{x}'(P) - \vec{x}'(Q)|$ 在 $t'(P) = t'(Q)$ 时测量

3. 长度变换的推导：

- 已知S'系统中棒的长度$\Delta x'_i$（在$t' = 0$时）
- 要求：求在S系统中$t = 0$时的长度Δx_i

4. 变换方程：

- $\Delta t = a(\Delta t' + (v \cdot \Delta x')/c^2)$
- $\Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}' + a\vec{v}\Delta t + ((a-1)/v^2)(v \cdot \Delta x')\vec{v}$

5. 特殊情况分析：

- 当$\vec{v} \perp \Delta\vec{x}$时：$\Delta\vec{x}' = \Delta\vec{x}$（垂直方向长度不变）
- 当$\vec{v} \parallel \Delta\vec{x}$时：$\Delta\vec{x}' = \Delta\vec{x}/\gamma$（平行方向发生长度收缩） 其中$\gamma = (1-v^2/c^2)^{(-1/2)}$

这表明在相对论中，物体的长度会随着运动速度的增加而收缩，这种效应被称为洛伦兹收缩，但只发生在运动方向上。这是相对论中最著名的效应之一，与时间延缓效应一起构成了相对论的基本现象。

Dilation o time:

S': $\Delta t'$ known; $\Delta x'_i = 0$ S' is moving with v respectively to S

back transformation: $\Delta t = a\left(\Delta t' + \frac{(v \Delta x')}{c^2}\right)$; $\Delta x' = 0$

$\Rightarrow \Delta t = a \, \Delta t' = \Delta t' \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$

$\Delta t \geq \Delta t'$

关键条件：

1. 在S'系统中：
    - $\Delta t'$是已知的时间间隔
    - $\Delta x'_i = 0$（同一空间点）
    - S'系统相对于S系统以速度v运动
2. 使用逆变换公式： $\Delta t = a(\Delta t' + (v \cdot \Delta x')/c^2)$ 由于$\Delta x' = 0$，简化为： $\Delta t = a\Delta t' = \Delta t'(1 - v^2/c^2)^\wedge(-1/2)$
3. 重要结论： $\Delta t > \Delta t'$ 这表明运动系统中的时间流逝比静止系统慢

这就是著名的相对论时间延缓效应，表明运动物体的时钟相对于静止参考系走得更慢。这是相对论中最基本的效应之一，已经通过多种实验得到验证，包括μ介子寿命实验和精密原子钟实验。