Ed: tensors.

$\varphi, \vec{A}$; $\vec{E}, \vec{B}$ - tensors.

vector: 4 components

$T_{\alpha\beta}$: 16 components

antisymm: 6 components

$\Rightarrow (\varphi, \vec{A})$ - vector $\nearrow$ co ? $\searrow$ contra ?

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t \phi \\ A' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \end{aligned}\right\}$$

$\partial_i = \nabla_i,\ \partial^i = -\nabla^i \Rightarrow$

$\varphi' = \varphi - \partial^0 \phi,\ (A')_i = A_i - \partial^i \phi$

$\Rightarrow$ contra.

//

$B = \mathrm{rot}\, A,\quad E = -\nabla\varphi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t A$

$$\begin{cases} B_i = (\mathrm{rot}\, A)_i = \varepsilon_{ikl} \nabla_k A_l \\ E_i = -\nabla_i \varphi - \partial_0 A_i \end{cases}$$

$\Rightarrow F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$

标题 "Ed. tensors" 表明这是关于电动力学张量的内容。

首先列出了基本的电磁场量:

$\varphi, A\rightarrow$ (标量势和矢量势)

$E\rightarrow, B\rightarrow$ (电场和磁场)都是张量

然后给出了各个量的分量数:

- vector: 4 components (四维矢量,如四势$A\mu$)
- $T\_\alpha\beta$: 16 components (二阶张量,如电磁场张量,有16个分量)
- antisymm: 6 components (反对称张量,如电磁场张量$F\mu\nu$的独立分量数)

接着讨论了规范变换:

$q' = q - 1/c\ \partial t\ \varphi$

$A'\rightarrow = A\rightarrow + \nabla\rightarrow\varphi$

这是典型的电磁势的规范变换。

通过 $\partial' i = \partial i$, $\partial' t = -\partial t$ 的关系推导出:

$q' = q - \partial t\ \varphi$, $(A')i = Ai - \partial i\ \varphi$

得出结论是 contra (逆变)性质

最后给出了电磁场的定义:

$B = rotA\rightarrow$

$E = -\nabla\rightarrow\varphi - 1/c\ \partial t\ A$

并用分量形式写出:

$Bi = (rotA)i = \varepsilon ijk\ \partial jk\ Ak$

$Ei = -\partial i\varphi - \partial tAi$

最终得到电磁场张量:

$F\alpha\beta = \partial\alpha A\beta - \partial\beta A\alpha$

这些关系完整地描述了电磁场的张量结构,展示了电磁势和电磁场之间的关系,以及它们在规范变换下的性质。这是理解电动力学协变形式的基础内容。

Maxwell

$$\left.\begin{array}{l} \Box\varphi - \partial_0\left(\partial_0\varphi + \operatorname{div}\vec{A}\right) = 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} + \partial_i\left(\partial_0\varphi + \operatorname{div}\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}\right\}$$

$$\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_i\partial_i = \partial_\alpha\partial^\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \Box A^0 - \partial_0\partial_\beta A^\beta = 4\pi\rho \\ \Box A^i + \partial_i\partial_\beta A^\beta = \frac{4\pi}{c} j_i \end{array}\right\} \Rightarrow \Box A^\alpha - \partial^\alpha\left(\partial_\beta A^\beta\right) = \frac{4\pi}{c} J^\alpha,$$

$$J^0 = c\rho,\quad J^i = j_i$$

$$\Rightarrow K_{\alpha\beta} A^\beta = \frac{4\pi}{c} J_\alpha, \quad K_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\Box - \partial_\alpha\partial_\beta$$

K: $\partial^\alpha K_{\alpha\beta} = 0.$

// Continuity equation: $\partial_\alpha J^\alpha = 0.$

Gauge:

Lorenz: $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, $\Box A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha.$

Coulomb: $\partial_i A^i = 0.$

首先写出麦克斯韦方程组的原始形式:

$\square\varphi - \partial 0(\partial 0\varphi + \mathrm{div}\vec{A}) = 4\pi\rho$

$\square\vec{A} + \partial i(\partial 0\varphi + \mathrm{div}\vec{A}) = 4\pi/c\ \vec{j}$

其中 □ (达朗贝尔算符)的定义为:

$\square = 1/c^2\ \partial 0^2 - \partial i\partial i = \partial\mu\partial\mu$

然后将方程改写为张量形式:

$\square A^0 - \partial 0\partial\beta\ A^\beta = 4\pi\rho$

$\square A^i + \partial i\partial\beta\ A^\beta = 4\pi/c\ j^i$

这可以合并写为:

$\square A\alpha - \partial\alpha(\partial\beta A^\beta) = 4\pi/c\ j\alpha$

其中 $j^0 = c\rho,\ j^i = j_i$

引入了算符:

$k\alpha\beta\ A^\beta = 4\pi/c\ j\alpha$

其中 $k\alpha\beta = g\alpha\beta\square - \partial\alpha\partial\beta$

并指出这个算符满足:

$\partial\alpha k\alpha\beta = 0$

接着给出连续性方程:

$\partial\alpha j^\alpha = 0$

最后讨论了两种重要的规范条件:

洛伦兹规范(Lorenz gauge):

$\partial\alpha A^\alpha = 0,\ \square A\mu = 4\pi/c\ j\mu$

库仑规范(Coulomb gauge):

$\partial i A^i = 0$

这些内容展示了麦克斯韦方程组的协变形式,以及不同规范选择下方程的简化形式。洛伦兹规范和库仑规范是处理电磁场问题时最常用的两种规范条件。

General construction:

1) $KA = I$

2) $K \sim \partial^2$

3) Lorentz

4) Gauge invariance.

$1+3$: $K_{\alpha\beta} A^{\beta} = I_{\alpha}$

$2+3$: $K_{\alpha\beta} = a \Box g_{\alpha\beta} + b \partial_\alpha \partial_\beta$

4) $K_{\alpha\beta} \partial^{\beta} = 0 \Rightarrow a = -b$.

这张图片讨论的是电动力学中的"General construction"(一般构造)，主要列出了四个关键条件和它们的推导：

1. $KA = I$ (K算符作用于A给出单位算符)
2. $k \sim \partial^2$ (K算符与二阶导数算符有关)
3. Lorentz (满足洛伦兹不变性)
4. Gauge invariance (规范不变性)

右边给出了具体的数学表达和推导：

1+3: $k_{\alpha\beta}A^\beta = I_\alpha$
这表示K算符作用在四势上得到的方程应满足洛伦兹不变性

2+3: $k_{\alpha\beta} = a\Box g_{\alpha\beta} + b\partial_\alpha\partial_\beta$
这是最一般的二阶张量算符形式，其中：

- $\Box$ 是达朗贝尔算符
- $g_{\alpha\beta}$ 是度规张量
- $\partial_\alpha\partial_\beta$ 是二阶偏导数
- a,b 是待定系数

4. $k_{\alpha\beta}\partial^\beta = 0 \Rightarrow a = -b$ 由规范不变性要求，得到系数a和b之间的关系

这实际上是在构造一个满足电动力学基本要求的场论算符。这个算符必须：

- 保持洛伦兹不变性
- 包含适当的导数阶数
- 保持规范不变性
- 能够正确描述电磁场传播

这些条件最终会导出我们熟知的麦克斯韦方程的协变形式。