# Maxwell's equations

1'

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

1, 2, 3, 4

$\vec{B}, \vec{E}, \rho, \vec{j}$ – depend on $t, \vec{x}$ fields

$\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, = \{x_i\}; \quad i = 1, 2, 3$

$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}; \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \vec{\nabla} = \{\partial_i\}$

$\underline{\vec{H}, \vec{D}}$

We know $\rho, \vec{j}$ – we trying to find $\vec{E}, \vec{B}$.

Continuity equation
(charge conservation law) $\quad \boxed{\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$

1. 麦克斯韦方程组的四个基本方程:

- 方程1: $\text{div}\,\vec{B} = 0$(磁场无源方程)
- 方程2: $\text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$(高斯电场方程)
- 方程3: $\text{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0$(法拉第电磁感应定律)
- 方程4: $\text{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$(安培-麦克斯韦方程)

2. 场量依赖关系:

- 所有场量$(\vec{B}, \vec{E}, \rho, \vec{j})$依赖于时间t和位置向量$\vec{x}$
- 位置向量定义: $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, 其分量表示为$y^i = \{x^i\}, i = 1, 2, 3$
- 偏导数记号:
  - 时间偏导: $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$
  - 空间偏导: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$
  - 散度算符: $\vec{\nabla} = \{\partial_i\}$

3. 已知和待求量:

- 已知量: 电荷密度$\rho$和电流密度$\vec{j}$
- 待求量: 电场$\vec{E}$和磁场$\vec{B}$

4. 连续性方程（电荷守恒定律）: $\partial_t\rho + \text{div}\,\vec{j} = 0$

We use Gaussian system of units

SI system : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2$

$c = 299792458$ m/s

$\vec{E}$ – Electric field strenght

$\vec{B}$ – Magnetic induction vector

$\vec{D}$ – Electrc induction vector

$\vec{H}$ – Magnetic field strenght

1. 单位制说明：

- 使用高斯单位制（Gaussian system of units）
- 与SI（国际单位制）的关系：$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2$
- 光速常数：$c = 299792458\ \mathrm{m/s}$

2. 电磁场的基本物理量定义：

- $\vec{E}$ - 电场强度（Electric field strength）
- $\vec{B}$ - 磁感应强度（Magnetic induction vector）
- $\vec{D}$ - 电位移矢量（Electric induction vector）
- $\vec{H}$ - 磁场强度（Magnetic field strength）

# Dimensions

$L, T, Q$

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(3) $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0$ (4) $\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$$\boxed{\rho \sim \frac{Q}{L^3}, \quad \operatorname{div}, \operatorname{rot} \sim \frac{1}{L}, \quad \partial_t \sim \frac{1}{T}}$$

(1) $\frac{1}{L} E \sim \frac{Q}{L^3}$, $\boxed{E \sim \frac{Q}{L^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} (3)\ \frac{1}{L}\cdot\frac{Q}{L^2} \sim \frac{1}{c}\frac{1}{T} B \\ (4)\ \frac{1}{L} B \sim \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{T}\cdot\frac{Q}{L^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B \sim \frac{Q}{L^2} \\ c \sim \frac{L}{T} \end{array}}$$

(4) $\frac{1}{T}\cdot\frac{Q}{L^2} \sim j$ $\boxed{j \sim \frac{Q}{TL^2}}$

Ток: $j \times$ area $\approx J \sim \frac{Q}{T}$.

$(4\pi)^0$

1. 基本量纲：标题下标注了三个基本量纲

- L：长度（Length）
- T：时间（Time）
- Q：电荷（Charge）

2. 基本方程（顶部）： 麦克斯韦方程组的四个方程：

- (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$
- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0$
- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

3. 基本量纲关系（绿框中）：

- 电荷密度：$\rho \sim \frac{Q}{L^3}$
- 空间算符：$\operatorname{div}, \operatorname{rot} \sim \frac{1}{L}$
- 时间导数：$\partial_t \sim \frac{1}{T}$

4. 推导过程和结果（蓝框标出主要结果）：

- 电场强度：$E \sim \frac{Q}{L^2}$
- 磁场强度：$B \sim \frac{Q}{L^2}$
- 光速：$c \sim \frac{L}{T}$
- 电流密度：$j \sim \frac{Q}{TL^2}$

5. 补充说明（底部）：

- "Tok"（提示）：$j \times \text{area} \sim J \sim \frac{Q}{T}$ 表示电流（J）等于电流密度（j）乘以截面积（area）

# Mathematical notations

$\vec{x} = \{x_i\}, \quad i = 1, 2, 3; \quad i, k, l, m \ldots = 1 \ldots 3$

We deal with: scalar, vector $A_i$, tensor of rank $n$: $\underbrace{A_{i \ldots k}}_{n}$, $3^n$ components

Tensor

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Full anrisimmetric tensor $\epsilon_{ikl}$: (Levi-Civita symbol)

1) $\epsilon_{ikl} = -\epsilon_{kil}$ and so on

2) $\epsilon_{123} = +1$.

$\epsilon_{112} = -\epsilon_{112} = 0$ and so on

for other:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = +1$$

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$$ – все.

Summation after repeated indixes

$$A_i B_i \equiv \sum_{i}^{3} A_i B_i = A_1 B_1 + \ldots = A_k B_k.$$

1. 首先定义了记号：
- $\vec{X} = \{x_i\}, i = 1, 2, 3; i, k, l, m, ... = 1..3$ 表示向量和索引的范围。
2. 图片讨论了三种数学对象：
- 标量
- 向量 $A_i$
- n阶张量 $A_{i...k}$（有n个指标），具有 $3^k$ 个分量
3. 引入了克罗内克张量(Kronecker delta) $\delta_{ik}$： $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$
4. 介绍了列维-奇维塔符号(Levi-Civita symbol) $\epsilon_{ikl}$，这是一个完全反对称张量：
- $\epsilon_{ikl} = -\epsilon_{kil}$ (交换任意两个指标改变符号)
- $\epsilon_{123} = +1$ (基准值)
- $\epsilon_{112} = -\epsilon_{112} = 0$ (重复指标为0)
5. 其他排列的值：
- $\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = +1$
- $\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$
6. 最后介绍了重复指标求和约定： $A_iB_i = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i = A_1B_1 + ... = A_kB_k$ 这展示了爱因斯坦求和约定，即对重复出现的指标自动求和。

$(\vec{A}\vec{B})(\vec{C}\vec{D}) = A_i B_i C_k D_k = A_i C_k B_i D_k =$ L4

$= A_s B_s C_m D_m$ и т.д., but no(!)

$A_i B_i C_i D_i$ and so on

In all expression number of free indexes (and their names) are the same

$C_i = T_{ik} A_k \qquad i = 1, 2, 3$ three expressions

$C_1 = T_{11} A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3$ and so one

1. 第一行展示了向量点乘的不同表示方法：$(\vec{A}\vec{B})(\vec{C}\vec{D}) = A_i B_i C_k D_k = A_i C_k B_i D_k = A_s B_s C_m D_m$

这里重要的是要注意：

- 所有这些表达式都是等价的
- 重复指标表示求和
- 可以使用不同的字母(i, k, s, m)来表示求和指标，只要保持配对关系

2. 图片强调了一个重要原则："In all expression number of free indexes (and their names) are the same" 即在所有表达式中，自由指标（非重复指标）的数量和名称都应保持一致。
3. 最后给出了一个具体的例子：$C_i = T_{ik} A_k \quad \text{where} \quad i = 1, 2, 3$

这可以展开为：
$C_1 = T_{11} A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3$

这个例子展示了：

- 如何将张量表达式展开为具体的代数式
- i 是自由指标，表示方程组的三个分量
- k 是求和指标，在每个分量中从1到3求和

# Tensors: summation

C1

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i \equiv A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 =$$

$$= A_i B_i = A_k B_k = A_m B_m$$

silent summation index

$$M_{is} \equiv T_{ik} R_{ks} = T_{im} R_{ms}$$

$$T_{ik} R_{ks} = R_{ks} T_{ik} \,, \quad A_i B_i = B_i A_i$$

But: $T_{ik} R_{ks} \neq T_{ik} R_{sk} \neq T_{ki} R_{ks}$

Matrices:

$$(\hat{A}\hat{B})_{im} = A_{ik} B_{km} \neq$$

$$\neq (\hat{B}\hat{A})_{im} = B_{ik} A_{km}$$

1. 显式求和表示： $\sum_{i=1}^{3} A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
2. 隐式（静默）求和指标表示： $A_iB_i = A_kB_k = A_mB_m$ 这里展示了爱因斯坦求和约定，重复指标自动表示求和，使用不同的字母（i、k、m）都是等价的。
3. 张量积运算规则： $M_{is} = T_{ik}R_{ks} = T_{im}R_{ms}$ 这显示了张量的链式乘法运算。
4. 一些重要的性质：

- $T_{ik}R_{ks} = R_{ks}T_{ik}$ （某些情况下的交换性）
- $A_iB_i = B_iA_i$ （标量积的交换性）

5. 需要注意的重要区别（But:）： $T_{ik}R_{ks} \neq T_{ik}R_{sk} \neq T_{ki}R_{ks}$ 这表明指标的顺序很重要，交换指标位置会得到不同的结果。
6. 矩阵运算： $(\hat{A}\hat{B})_{im} = A_{ik}B_{km} \neq (\hat{B}\hat{A})_{im} = B_{ik}A_{km}$ 这说明：

- 矩阵乘法不满足交换律
- 指标的正确配对对于矩阵乘法至关重要
- 结果矩阵的元素由重复指标k的求和得到

## Summation rules

LC2

### True expressions

$$T_{ik} A_k = B_i$$

$$A_i + B_i = C_i$$

$$T_{ik} = A_k B_i \quad , \quad R_{ikm} = T_{ik} A_m$$

### Don't do this!

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i C_i = A_1 B_1 C_1 + A_2 B_2 C_2 + \ldots$$

$$= \cancel{A_i B_i C_i} \leftarrow$$ don't use these notations

$A_i = B_k$ ; $i = 1, 2, 3$ ; $k = 1, 2, 3$

$i=1)$ $A_1 = B_1$ , $A_1 = B_2$ , $A_1 = B_3$

$i=2)$ $A_2 = B_1$ , $A_2 = B_2$ , $A_2 = B_3$

strange and not clear

1. 正确的表达式（True expressions）：

- $T_{ik}A_k = B_i$ （张量与向量的积）
- $A_i + B_i = C_i$ （向量加法）
- $T_{ik} = A_kB_i, R_{ikm} = T_{ik}A_m$ （张量定义和运算）

2. 错误用法（Don't do this!）：

- 不要写：$\sum_{i=1}^{3} A_iB_iC_i = A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2 + \ldots$
- 不要使用诸如 $A_i\cancel{B_i}C_i$ 这样的记号

3. 容易混淆的表示方法（标记为"strange and not clear"）：当写 $A_i = B_k$ 其中 $i = 1,2,3; k = 1,2,3$ 时，可能导致混淆：

Copy

```
i=1) A₁ = B₁, A₁ = B₂, A₁ = B₃
i=2) A₂ = B₁, A₂ = B₂, A₂ = B₃
```

## Summation with $\delta_{ik}$:

$$A_i \delta_{ik} = A_k,$$

$$A_i B_k \delta_{ik} = A_i B_i = \vec{A}\vec{B} \quad \text{и т.д.}$$

## Vector product

$$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{A} \times \vec{B}.$$

$$C_i = \epsilon_{iks} A_k B_s = [\vec{A}, \vec{B}]_i. \quad \text{So:}$$

$$C_1 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2,$$

$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3, \quad C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 -$$

1. 求和运算（Summation with δ）部分：

- 展示了爱因斯坦求和约定的使用
- 公式：$A_i \delta_{ik} = A_k$
- 以及：$A_i B_k \delta_{ik} = A_i B_i = \vec{A}\vec{B}$

2. 向量积（Vector product）部分：

- 定义了向量 C 为 A 和 B 的叉积：$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{A} \times \vec{B}$
- 使用 Levi-Civita 符号（ε）表示的分量形式：$C_i = \epsilon_{iks} A_k B_s = [\vec{A}, \vec{B}]_i$
- 具体展开的分量表达式：
  - $C_1 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$
  - $C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$
  - $C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$

## Summation with $\epsilon$ tensor



$$\epsilon_{iks}\epsilon_{lms} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl} \quad (*)$$

(proving later)

$$\epsilon_{sik}\epsilon_{slm} = \epsilon_{iks}\epsilon_{slm} = \dots$$

Trace of $\delta$ $\quad \delta_{ii} = 3$.

$$(*) \rightarrow \quad \epsilon_{iks}\epsilon_{lks} = 2\delta_{il}$$

$$\epsilon_{iks}\epsilon_{iks} = 6$$

Very easy proving of expression for ``BAC - CAB"

$$[A[B,C]]_i = \epsilon_{iks}A_k[B,C]_s =$$

$$= \epsilon_{iks}A_k\epsilon_{sml}B_mC_l$$

$$\boxed{\epsilon_{iks}\epsilon_{mls} = \delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km}} \Big/ A_kB_mC_l$$

$$= B_iA_kC_k - C_iA_kB_k,$$

1. ε 张量的收缩性质： $\epsilon_{iks}\epsilon_{\ell ms} = \delta_{i\ell}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{k\ell}$ （标注为 "proving later" 表示这个性质将在后面证明）
2. ε 张量的一些重要关系：

- 展示了 ε 张量的缩并关系： $\epsilon_{sik}\epsilon_{s\ell m} = \epsilon_{iks}\epsilon_{\ell ms}$
- Kronecker delta 的迹： $\delta_{ii} = 3$
- ε 张量的重要性质： $\epsilon_{iks}\epsilon_{\ell ks} = 2\delta_{i\ell}$ $\epsilon_{iks}\epsilon_{iks} = 6$

3. "BAC-CAB" 规则的证明： 该部分展示了向量三重积的证明过程： $[A[B,C]]_i = \epsilon_{iks}A_k[B,C]_s = \epsilon_{iks}A_k\epsilon_{sm\ell}B_mC_\ell$ 使用前面提到的 ε 张量收缩性质，最终得到： $= B_iA_kC_k - C_iA_kB_k$

# Vector analysis

L6

1. Gradient $\vec{\nabla}\varphi$ of scalar $\varphi = \varphi(\vec{x})$

is vector $(\vec{\nabla}\varphi)_i = \partial_i \varphi$

2. Divergency $\operatorname{div} \vec{A} = \partial_i A_i = \partial_1 A_1 + \dots$

3. Rotor $[\operatorname{rot} \vec{A}]_i = \epsilon_{iks} \partial_k A_s$.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A},$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Also we may consider something like $\partial_i A_k$.

Laplace operator $\Delta \equiv \partial^2 = \partial_i \partial_i$,

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

We know: $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \end{array}}$ $\forall \varphi, \vec{A}$.

Consequence of epsilon and fact the summation of simmetric tensor and antisimmetric one is zero

$A_{ik} = -A_{ki}$, $S_{ik} = S_{ki}$, то $A_{ik} S_{ik} = 0$.

1. 梯度（Gradient）

- 标量场 φ = φ(x) 的梯度是一个向量
- 分量表示：$(\nabla\varphi)_i = \partial_i\varphi$

2. 散度（Divergency）

- 向量场的散度：$div\vec{A} = \partial_i A_i = \partial_1 A_1 + ...$
- 符号表示：$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

3. 旋度（Rotor）

- 分量形式：$[rot\vec{A}]_i = \epsilon_{iks}\partial_k A_s$
- 符号表示：$rot\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

4. 拉普拉斯算子（Laplace operator）

- 定义：$\Delta = \partial^2 = \partial_i\partial_i$
- 对标量场：$\Delta\varphi = div\ grad\ \varphi$

5. 重要恒等式：

- 梯度的旋度为零：$rot\ grad\ \varphi = 0$
- 旋度的散度为零：$div\ rot\ \vec{A} = 0$

6. 关于对称和反对称张量的重要性质：

- 反对称张量性质：$A_{ik} = -A_{ki}$
- 对称张量性质：$S_{ik} = S_{ki}$
- 对称与反对称张量的缩并为零：$A_{ik}S_{ik} = 0$

Also we need: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = \epsilon_{iks}\,\partial_k\,(\mathrm{rot}\,\vec{A})_s =$$

$$= \epsilon_{iks}\,\partial_k\,\epsilon_{slm}\,\partial_l\,A_m$$

$$\epsilon_{iks}\epsilon_{lms} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl} \quad \Big/ \quad \partial_k\partial_l A_m$$

$$= \partial_i\,(\underbrace{\partial_k A_k}_{\nabla\cdot\vec{A} \,=\, \mathrm{div}\vec{A}}) - (\partial_k\partial_k)\,A_i\,, \qquad \text{qed.}$$

[illegible]: $d\vec{S} \equiv \vec{n}\,dS$

$\vec{A}\cdot d\vec{S}$

1. 核心公式（顶部）： $rot\ rot\vec{A} = grad(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
2. 详细推导过程:

- 从分量形式开始: $(rot\ rot\vec{A})_i = \epsilon_{iks}\partial_k(rot\vec{A})_s$
- 展开内部旋度: $= \epsilon_{iks}\partial_k(\epsilon_{s\ell m}\partial_\ell A_m)$

3. 使用 ε 张量的缩并关系:

- $\epsilon_{iks}\epsilon_{s\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{k\ell}$
- 应用到前面的表达式得到: $= \partial_i(\partial_k A_k) - (\partial_k\partial_k)A_i$

4. 最终结果的解释:

- 第一项 $\partial_i(\partial_k A_k)$ 是散度的梯度: $grad(div\vec{A})$
- 第二项 $(\partial_k\partial_k)A_i$ 是拉普拉斯算子作用于向量 A: $\Delta\vec{A}$

5. 补充说明:

- 在图的底部注明了一些微分几何中的注记: $d\vec{S} \equiv \vec{n}dS, \vec{A}\cdot d\vec{S}$
- "qed." 表示证明完毕（quod erat demonstrandum）