MODELOWANIE DETERMINISTYCZNE

Przydatne materiały do laboratoriów.

Dokumentacje:

1. numpy - algebra liniowa,
2. matplotlib - podstawowe wizualizacje + matplotlib.animation - animacje,

Materiały dodatkowe:

1. Collaboratory IV - moje notatki. Wprowadzono metodę różnic skończonych wraz z przykładami dla różnych wymiarów n oraz warunków brzegowych.

Zadanie 1.
Rozwiąż analitycznie jednorodne równanie ciepła na odcinku $x \in [-1,1]$ z jednorodnym warunkiem brzegowym Neumanna w $x=1$ oraz $x=-1$. Zakładamy współczynnik dyfuzji $D=1$ oraz warunek początkowy $u_0(x)=\cos(\pi x)$.

Zadanie 2.
Definiujemy obszar

$$L \subset [-1,1]^2$$

w kształcie litery „L" jako sumę mnogościową dwóch podobszarów (prostokątów) $L = L_1 \cup L_2$, gdzie:

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ (x,y) \in [-1,1]^2 : -1 \leqslant x \leqslant 0,\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \right\}, \\ L_2 &= \left\{ (x,y) \in [-1,1]^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Na tak zdefiniowanym obszarze rozpatrujemy niejednorodne równanie ciepła z mieszanymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) + \varepsilon \mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-1/10,1/10]^2\}}(x,y), & (x,y) \in L, \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u(-1,y,t) = 0 & y \in [-1,1], \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u(x,-1,t) = 0 & x \in [-1,1], \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u_x(1,y,t) = 0 & y \in [-1,1/2], \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u_x(0,y,t) = 0 & y \in [1/2,1], \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u_x(x,1,t) = 0 & x \in [-1,0], \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u(x,1/2,t) = 0 & x \in [0,1], \quad 0 < t \leqslant 10, \\ u(x,y,0) = \exp\left[-(x+1)^2 - (y+1)^2\right] & (x,y) \in L. \end{cases}$$

Wykonaj poniższe polecenia:

(1.1) Zaproponuj schemat numeryczny, którym rozwiążesz podane zagadnienie. *Wskazówka: Możesz podzielić ten obszar na obszary, na których już umiesz rozwiązywać równanie ciepła. Wtedy pojawia się problem sklejania dwóch dziedzin. Dokładnie opisz jak to robisz.*

(1.2) Rozwiąż równanie ciepła podanym przez Ciebie schematem numerycznym dla $\varepsilon \in \{0.01, 0.1, 0\}$. Dobierz kroki h_x, h_t w taki sposób, aby schemat numeryczny był stabilny. Pokaż rozwiązania jako mapę ciepła.

(1.*) Przedstaw rozwiązanie jako animację z trzema mapami ciepła.

(1.4) Dla każdego ε z podpunktu (1.2) zaznacz na wykresie całkowitą energię Ψ, która została oddana do układu, zdefiniowaną jako

$$\Psi(t) = \int_0^t \int_L \varepsilon \mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-1/10,1/10]^2\}}(x,y)\, dx\, dy\, ds.$$

Energię oblicz w sposób analityczny i numerycznie. *Wskazówka: całkę możesz policzyć numerycznie metodą prostokątów.*