

# Lista 1

Klaudia Bała

## Zadanie 1

W tym zadaniu mamy populację, której dynamika została opisana modelem logistycznym z parametrami  $K = 1$  oraz  $r = 0.25$  z uwzględnieniem zasady Allego, tzn. gdy populacja spadnie poniżej poziomu  $A = 0.5$ , to zaczyna ona spadać ze względu na zbyt niską pulę genów.

Uwaga: W zadaniu zostały zmienione parametry zgodnie z sugestią, tak by rozwiązanie analityczne było zadane jawnym wzorem.

### (1.1)

Równanie różniczkowe w ogólnej postaci opisujące to zjawisko ma postać:

$$\frac{dy}{dt} = -ry\left(1 - \frac{y}{A}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right), \text{ gdzie } y = y(t).$$

Uwzględniając ustaloną wartość parametrów w naszym przypadku otrzymujemy równanie postaci:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}y(1 - 2y)(1 - y).$$

### (1.2)

Aby znaleźć stany stacjonarne musimy rozważyć, kiedy pochodna przyjmuje wartość 0, tzn. rozwiązać równanie postaci:

$$0 = -\frac{1}{4}y(1 - 2y)(1 - y).$$

Zatem rozwiązaniami są  $y = 0 \vee y = \frac{1}{2} \vee y = 1$ . Zbadamy teraz ich stabilność obserwując jak zmienia się znak pochodnej.

Przedział	Znak pochodnej
$(-\infty, 0)$	plus
$(0, \frac{1}{2})$	minus
$(\frac{1}{2}, 1)$	plus
$(1, \infty)$	minus

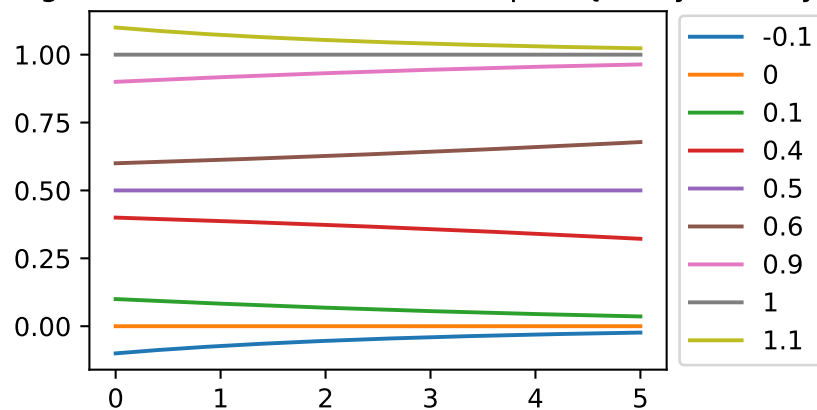
Z analizy znaku pochodnej wynika, że rozwiązania  $y = 0$  oraz  $y = 1$  są rozwiązaniami przyciągającymi (znak pochodnej zmienia się z plusa do minusa, co oznacza, że rozwiązania startujące np. w przedziale  $(\frac{1}{2}, 1)$  są rosnące i zbliżają się do rozwiązania stacjonarnego  $y = 1$  (ale nie przecinają go), zaś startujące w przedziale  $(1, \infty)$  są malejące, dlatego również wraz ze wzrostem  $t$  zbliżają się do rozwiązania stacjonarnego, ale nigdy go nie przecinają), czyli są stabilne, zaś rozwiązanie  $y = \frac{1}{2}$  jest odpychające, czyli niestabilne.

### (1.3)

Teraz z użyciem jawnego schematu Eulera (JSE) z odpowiednio dobranym krokiem  $h$ , rozwiążemy zagadnienie dla kilku warunków początkowych. Dobierzemy je tak (warunki początkowe), by dodatkowo uzasadnić numerycznie stabilność rozwiązań stacjonarnych.

```
# fragment kodu używający JSE
for j in range(n):
    Xs.append(Xs[j] + h)
    for i in range(len(N_0)):
        Ys[i].append(Ys[i][j] - h*Ys[i][j]*r*(1-Ys[i][j]/K)*(1-Ys[i][j]/A))
```

Rozwiązanie zagadnienia dla kilku warunków początkowych z użyciem JSE



Jak wynika z wykresu powyżej, numeryczne obliczenia potwierdzają nasze rozumowanie analityczne. Możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem czasu rozwiązania z warunkami początkowymi

$y_0 = -0.1$  i  $y_0 = 0.1$ , „zbliżają” się do rozwiązania stacjonarnego  $y = 0$ . Analogicznie mamy dla rozwiązań z warunkami początkowymi  $y_0 = 0.9$  i  $y_0 = 1.1$ , które „zbliżają się” do rozwiązania stacjonarnego  $y = 1$  wraz ze wzrostem  $t$ . Z kolei rozwiązania o warunkach początkowych  $y_0 = 0.4$  i  $y_0 = 0.6$ , wraz z wzrostem  $t$  coraz bardziej „oddalają się” od rozwiązania stacjonarnego  $y = \frac{1}{2}$ .

Uwaga: Biorąc pod uwagę interpretację naszego układu równań i parametrów, nie ma sensu rozważanie rozwiązań startujących poniżej 0, ponieważ populacja nie może być ujemna, jednak dla pokazania stabilności rozwiązań możemy na chwilę zapomnieć o interpretacji i patrzeć na ten układ w kontekście czysto teoretycznym (numerycznym). Wtedy możemy rozważać takie rozwiązania i lepiej pokazać stabilność rozwiązania stacjonarnego  $y = 0$ , stąd na wykresie zostało uwzględnione takie rozwiązanie.

#### (1.4)

Teraz rozwiążemy to zagadnienie dla warunku początkowego  $y_0 = \frac{3}{4}$ . Zatem mamy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{4}y(1-2y)(1-y) \\ y_0 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (1)$$

Używając metody rozdzielonych zmiennych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \frac{-4}{s(1-2s)(1-s)} ds &= \int_{t_0}^t 1 dz \\ \int_{t_0}^t 1 dz &= t - t_0 = t, \text{ bo } t_0 = 0 \\ \int_{y_0}^y \frac{-4}{s(1-2s)(1-s)} ds &= -4 \int_{y_0}^y \frac{1}{s(1-2s)(1-s)} ds = -4 \int_{y_0}^y \frac{1}{s} + \frac{4}{(1-2s)} + \frac{-1}{(1-s)} ds = \\ &= -4 \int_{y_0}^y \frac{1}{s} + (-2) \cdot \frac{-2}{(1-2s)} + \frac{-1}{(1-s)} ds = -4 [\ln|s| - 2\ln|1-2s| + \ln|1-s|]_{y_0}^y = \\ &= -4 \left( \ln(y) - 2\ln(2y-1) + \ln(1-y) - \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) \right) = \\ &= -4\ln\left(\frac{4y(1-y)}{3(2y-1)^2}\right) \end{aligned}$$

Przyrównujemy wyniki obu całek:

$$-4\ln\left(\frac{4y(1-y)}{3(2y-1)^2}\right) = t \Rightarrow \ln\left(\frac{4y(1-y)}{3(2y-1)^2}\right) = -\frac{1}{4}t \Rightarrow \frac{4y(1-y)}{3(2y-1)^2} = e^{-\frac{1}{4}t} \Rightarrow$$

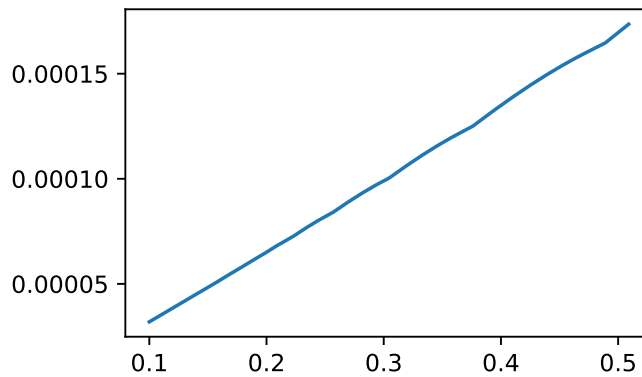
$$\Rightarrow \dots \Rightarrow 0 = y^2(1 + 3e^{-\frac{1}{4}t}) - y(1 + 3e^{-\frac{1}{4}t}) + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}t}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy rozwiązanie

$$y(t) = \frac{1 + 3e^{-\frac{1}{4}t} + \sqrt{1 + 3e^{-\frac{1}{4}t}}}{2(1 + 3e^{-\frac{1}{4}t})} = \frac{3 + e^{\frac{t}{4}} + \sqrt{e^{\frac{t}{4}}(3 + e^{\frac{t}{4}})}}{2(3 + e^{\frac{t}{4}})}$$

Następnie, skoro mamy już rozwiązanie analityczne, to wyznaczmy błąd między nim a rozwiązaniem numerycznym z JSE w zależności od kroku  $h \in [0.01, 0.5]$ . Do wyliczenia błędu posługujemy się wzorem  $\max_{t \in T} |y(t) - y_{JSE}(t)|$ .

Błąd między rozwiązaniem analitycznym i numerycznym w zależności od kroku  $h$



Jak wynika z wykresu wraz ze wzrostem wartości kroku  $h$  zwiększa się błąd między rozwiązaniem analitycznym a numerycznym. Błąd rośnie liniowo.

## Zadanie 2

W tym zadaniu mamy populację robaczek *Choristoneura fumiferana* (Clemens), gdzie dynamika tej populacji jest opisana przez następujące zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases} \quad f(y) = ry(1 - \frac{y}{8}) - \frac{10y^2}{1 + y^2} \quad (2)$$

### (2.1)

Dla parametru  $r$  proponujemy dwie wartości  $r_1$  i  $r_2$ , tak by  $r_2 > r_1 > 0$  oraz równanie  $f(y) = 0$  miało dla  $r_1$  cztery rozwiązania, zaś dla  $r_2$  dwa. Rozwiążemy to graficznie z pomocą

aplikacji Desmos badając wizualnie przecięcia funkcji  $r(1 - \frac{y}{8})$  oraz  $\frac{10y}{1+y^2}$ . Poniżej zostały dodane ilustracje, na podstawie których zostały wybrane parametry.

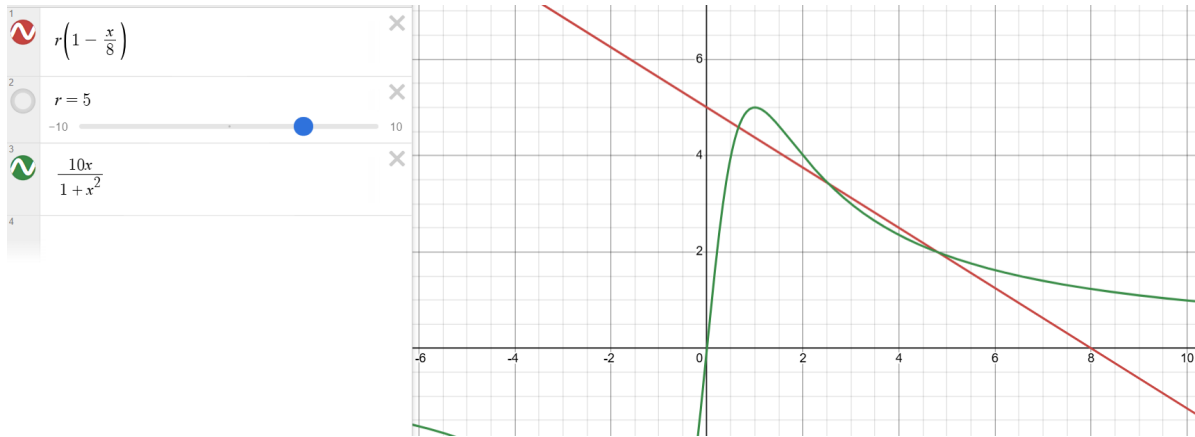


Figure 1: Wybór współczynnika  $r_1$

Wybraliśmy  $r_1 = 5$ , jak widać z powyższej ilustracji wykresy przecinają się w 3 miejscach, czyli razem z zerowym rozwiązaniem mamy 4 rozwiązania, więc spełniony jest zadany warunek.

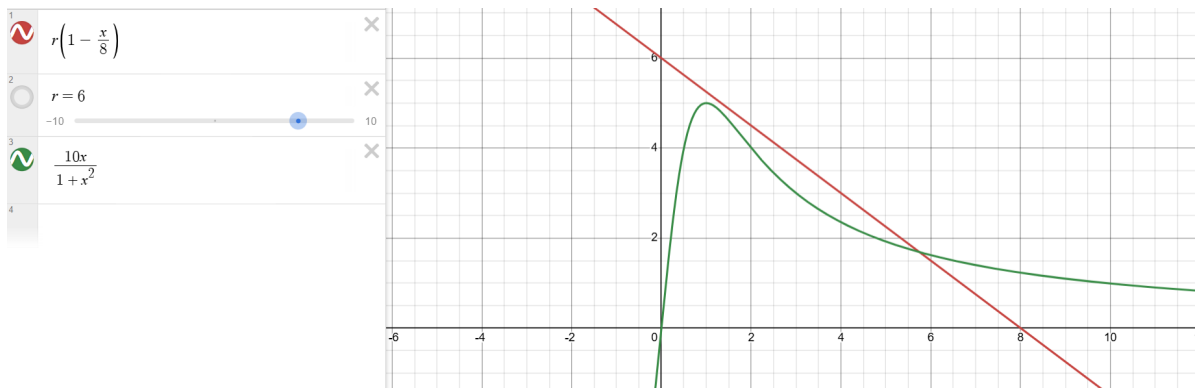


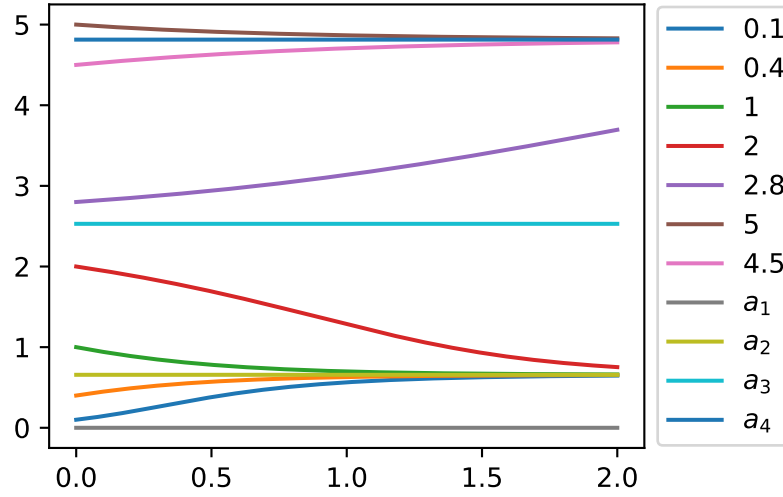
Figure 2: Wybór współczynnika  $r_2$

Wybraliśmy  $r_2 = 6$ , jak widać z powyższej ilustracji wykresy przecinają się w 1 miejscu, czyli razem z zerowym rozwiązaniem mamy 2 rozwiązania. Dodatkowo  $r_2 = 6 > r_1 = 5$ , zatem spełnione są wszystkie zadane warunki.

## (2.2)

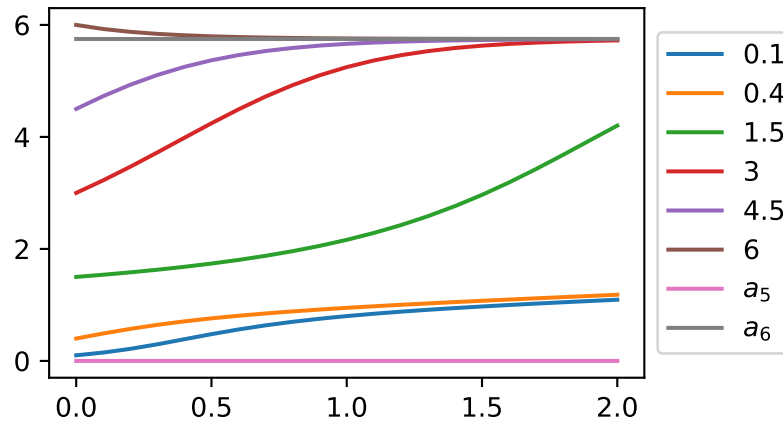
Następnie dla każdej z wybranych wartości  $r$  wykonamy po jednej ilustracji uzasadniającej stabilność rozwiązań stacjonarnych. Jako że nie wyznaczamy dokładnej wartości rozwiązań stacjonarnych (oprócz oczywistego 0), będziemy je oznaczać  $a_1, a_2, a_3, a_4$  dla parametru  $r_1$  oraz  $a_5, a_6$  dla parametru  $r_2$ , pamiętając, że  $a_1 = 0$  oraz  $a_5 = 0$ . Dla lepszego przedstawienia sytuacji wykorzystano przybliżone wartości tych rozwiązań odczytane z aplikacji Desmos i zostały one użyte przy tworzeniu tych wykresów.

### Badanie stabilności rozwiązań stacjonarnych numerycznie dla $r_1$



Jak wynika z powyższej ilustracji rozwiązaniami stabilnymi są  $y = a_2$  i  $y = a_4$ , zaś  $y = a_1$  i  $y = a_3$  są niestabilne, czyli w sumie mamy 2 stabilne i 2 niestabilne rozwiązania stacjonarne.

### Badanie stabilności rozwiązań stacjonarnych numerycznie dla $r_2$



Jak wynika z powyższej ilustracji rozwiązaniem stabilnym jest  $y = a_6$ , zaś  $y = a_5$  jest niestabilne, czyli mamy jedno stabilne i jedno niestabilne rozwiązanie.

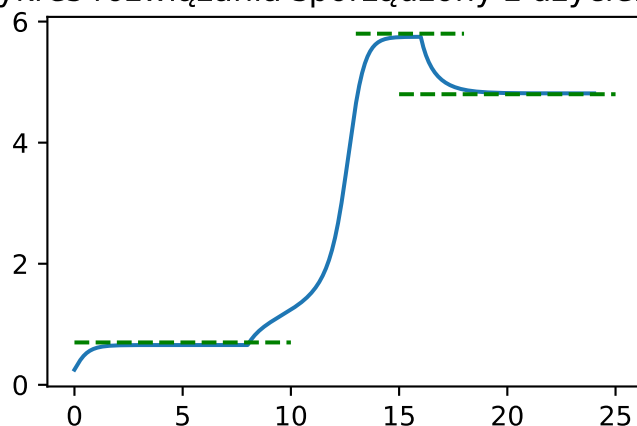
Analiza tych dwóch przypadków może wskazywać na to, że jeśli mamy parzystą liczbę rozwiązań stacjonarnych to połowa z nich jest stabilna, a druga połowa jest niestabilna.

### (2.3)

Zakładamy teraz, że  $y_0 = 0.25$ . Sporządzimy wykres rozwiązania na podstawie JSE dla którego parametr  $r$  zmienia się w czasie w następujący sposób:

$$r = \begin{cases} r_1, & 0 \leq t \leq 8 \\ r_2, & 8 < t \leq 16 \\ r_1, & 16 < t \leq 24 \end{cases} \quad (3)$$

Wykres rozwiązania sporządzony z użyciem JSE



Na powyższym wykresie rozwiązania możemy zauważyć związek ze zjawiskiem histerezy. Widzimy jak na pewnych poziomach (zaznaczonych pomocniczo zieloną przerywaną linią) rozwiązanie się stabilizuje, po czym następuje zmiana przez zmianę wartości parametru  $r$ . Jednak pomimo powrotu do pierwotnej wartości parametru (po zmianie na  $r_2$  ponowna zmiana na  $r_1$ )  $r$  tj.  $r_1$ , rozwiązanie nie stabilizuje się ponownie na tym samym poziomie, co pierwotnie ale już na innym. Oznacza to, że pamięta poprzednie zmiany i zależy nie tylko od aktualnie zadanych parametrów, ale także od poprzednich stanów.

Uwaga: Została zmieniona definicja parametru  $r$ . Ze względu na dobrane wartości parametrów  $r_1$  i  $r_2$  zaszła potrzeba modyfikacji zakresów wartości  $t$  dla poszczególnych przypadków, by lepiej zilustrować zachodzące zjawisko.