MODELOWANIE DETERMINISTYCZNE

Przydatne materiały do laboratoriów.

Dokumentacje:

1. numpy - algebra liniowa,
2. matplotlib - podstawowe wizualizacje + matplotlib.pyplot.quiver - portrety fazowe,
3. seaborn - zaawansowane wizualizacje.

Materiały dodatkowe:

1. Collaboratory III - moje notatki. Omówione zostały standardowe schematy numeryczne dla układów równań (RK2 oraz RK4). W szczególności jest tam też teoria i przykłady portretów fazowych. Pokazane jest też jak zrobić animację w pythonie.

Zadanie 1.
W 1961 roku Richard FitzHugh, a w 1962 roku Jinichi Nagumo, niezależnie zaproponowali następujący układ równań zwyczajnych

$$\begin{aligned} v' &= v - \frac{v^3}{3} - w + RI_{ext}, \\ \tau w' &= v + a - bw, \\ v(0) &= v_0,\ w(0) = w_0. \end{aligned}$$

Układ ten opisuje proces aktywacji i dezaktywacji impulsu neuronowego. Przyjmujemy następujące parametry: $a = 0.7,\ \tau = 12.5,\ R = 0.1,\ b = 1.2$, typowe dla tego zagadnienia. Dla każdego z parametrów $I_{ext} \in \{0, 5, 10\}$:

(1.1) Wyznacz równania opisujące nullcline-y.

(1.2) Wyznacz stany stacjonarne równania.

(1.3) Nałóż krzywe i punkty z podpunktów (1.1) oraz (1.2) na portret fazowy.

(1.4) Wykonaj symulacje dla warunku początkowego $(v_0, w_0) = (-1, 1)$ korzystając ze schematu RK4. Nałóż otrzymane rozwiązania na odpowiadające im portrety fazowe. Narysuj rozwiązanie (v, w) w zależności od czasu.

(1.5) Porównaj portrety fazowe oraz wykresy rozwiązań otrzymane dla różnych parametrów I_{ext}. Czy widzisz jakąś zależność? Czy jesteś w stanie ją uzasadnić?

Zadanie 2.
Edward Norton Lorenz w 1963 roku przedstawił następujący model konwekcji termicznej w atmosferze

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= rx - y - xz, \\ z' &= xy - qz, \\ x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0. \end{aligned}$$

gdzie $x := x(t)$ opisuje ruch konwekcyjny, $y := y(t)$ różnicę temperatur w atmosferze, $z := z(t)$ określa rozkład pionowy temperatury w atmosferze, natomiast σ jest liczbą Prandtla, r liczbą Rayleigha i $q > 0$ to rozmiar obszaru. Na potrzeby zadania przyjmujemy $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ oraz $\sigma = 10.0, r = 28.0, q = \frac{8}{3}$.

MODELOWANIE DETERMINISTYCZNE

(2.1) Napisz schematy numeryczne (wzory) dla jawnego schematu Eulera oraz dla metody RK4.

(2.*) Dla obu tych metod, oblicz błąd między między rozwiązaniem obliczonym dla kroku h oraz rozwiązaniem obliczonym dla kroku $h/2$ (porównuj rozwiązania tylko w odpowiadających sobie punktach). Przedstaw wykres błędu w zależności od kroku $h \in [10^{-4}, 5 \cdot 10^{-2}]$.

(2.3) Zastosuj wybrany przez siebie schemat (w domyśle - lepszy) do numerycznego rozwiązania układu Lorenza z podanymi wcześniej parametrami. Zwizualizuj tak zwany *atraktor Lorenza* na wykresie trójwymiarowym, dobierz odpowiednio czas $T > 0$, aby uzyskać odpowiedni efekt. Czy widzisz dlaczego jest mowa o tak zwanym *efekcie motyla*?