Lista 3

Klaudia Bała

Zadanie 1

Mamy zadane jednorodne równanie ciepła na odcinku $x \in [-1, 1]$ z jednorodnym warunkiem brzegowym Neumanna w $x = -1$ oraz $x = 1$. Zakładamy, że współczynnik dyfuzji $D = 1$ oraz warunek początkowy $u_0(x) = cos(\pi x)$. Zatem możemy to zapisać jako układ

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x(-1) = 0 \\ u_x(1) = 0 \\ u_0 = cos(\pi x) \end{cases} \tag{1}$$

Do rozwiązania tego układu posłużymy się metodą szeregów Fouriera, stąd będziemy zakładali następującą postać rozwiązania

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

gdzie $X(x)$ i $T(t)$ są pewnymi nieznanymi funkcjami jednej zmiennej.

Stąd mamy

$$u_t = u_{xx} \Rightarrow X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Następnie otrzymujemy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda,$$

gdzie λ to pewna stała.

Na początek zajmijmy się równaniem $X''(x) = \lambda X(x)$.

$\lambda > 0$

Rozwiązanie ma wtedy postać $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Wykorzystajmy nasz warunek brzegowy (który sprowadził się do postaci $X'(-1) = X'(1) = 0$) do wyznaczenia wartości parametrów.

$X'(x) = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})$

Z $X'(-1) = 0$ mamy $0 = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow C_2 = C_1 e^{-2\sqrt{\lambda}}$.

Z $X'(1) = 0$ mamy $0 = C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} \Rightarrow C_2 = C_1 e^{2\sqrt{\lambda}}$.

Stąd $C_1 e^{-2\sqrt{\lambda}} = C_1 e^{2\sqrt{\lambda}} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0$, czyli $X(x) = 0$, ale jest to mało interesujący przypadek, bo wtedy $u(x,t) = 0$ i to rozwiązanie nie spełnia warunku początkowego $u_0(x) = cos(\pi x)$ dla $x \in [-1, 1]$.

$\lambda = 0$

W takim przypadku rozwiązanie przyjmuje postać $X(x) = A + Bx$.

$X'(x) = B$, stąd uwzględniając warunki brzegowe mamy $B = 0$ i rozwiązanie jest postaci $X(x) = A$. Niestety to rozwiązanie nie spełnia warunku początkowego, gdyż $u(x, 0) = A \cdot T(0)$ a nasz warunek początkowy miał postać $u_0(x) = cos(\pi x)$ dla $x \in [-1, 1]$. Zatem to rozwiązanie odrzucamy.

$\lambda < 0$

Dla takich λ rozwiązanie przyjmuje postać $X(x) = C_3 cos(\sqrt{|\lambda|}x) + C_4 sin(\sqrt{|\lambda|}x)$.

$X'(x) = \sqrt{|\lambda|}(-C_3 sin(\sqrt{|\lambda|}x) + C_4 cos(\sqrt{|\lambda|}x))$

Z $X'(-1) = 0$ mamy $0 = \sqrt{|\lambda|}(-C_3 sin(-\sqrt{|\lambda|}) + C_4 cos(-\sqrt{|\lambda|})) \Rightarrow$

$C_3 sin(-\sqrt{|\lambda|}) = C_4 cos(-\sqrt{|\lambda|})$.

Dodatkowo wiedząc, że $sin(-\sqrt{|\lambda|}) = -sin(\sqrt{|\lambda|})$ i $cos(-\sqrt{|\lambda|}) = cos(\sqrt{|\lambda|})$ dostajemy $-C_3 sin(\sqrt{|\lambda|}) = C_4 cos(\sqrt{|\lambda|})$.

Z $X'(1) = 0$ mamy $0 = \sqrt{|\lambda|}(-C_3 sin(\sqrt{|\lambda|}) + C_4 cos(\sqrt{|\lambda|})) \Rightarrow C_3 sin(\sqrt{|\lambda|}) = C_4 cos(\sqrt{|\lambda|})$.

Zatem dostajemy $C_3 sin(\sqrt{|\lambda|}) = -C_3 sin(\sqrt{|\lambda|}) \Rightarrow 0 = 2C_3 sin(\sqrt{|\lambda|})$, stąd $C_3 = 0$ lub $sin(\sqrt{|\lambda|}) = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = k\pi$ dla k całkowitych i $k \geqslant 1$.

I) $C_3 = 0$

Wtedy mamy $0 = C_4 cos(\sqrt{|\lambda|})$. Zatem dostajemy $C_4 = 0$, co prowadzi nas do $X(x) = 0$, czyli przypadku który już wcześniej odrzuciliśmy, lub $cos(\sqrt{|\lambda|}) = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla k całkowitych i $k \geqslant 1$.. Wtedy rozwiązanie przyjmuje postać $X_k(x) = C_4 sin((\frac{\pi}{2} + k\pi)x)$ dla $\lambda_k = -(\frac{\pi^2}{4} + k^2\pi^2 + k\pi^2)$

II) $\sqrt{|\lambda|} = k\pi$

Tutaj również dostajemy dwa przypadki jak poprzednio z tym, że przypadek $C_4 = 0$ nie odrzucamy i wtedy rozwiązanie ma postać $X_k(x) = C_3 cos(k\pi x)$ dla $\lambda_k = -(k\pi)^2$, zaś przypadek $cos(\sqrt{|\lambda|}) = 0$ odrzucamy gdyż funkcja sin nie zeruje się dla tych samych argumentów co funkcja cos.

Teraz przejdziemy do zajęcia się równaniem $T'(t) = \lambda T(t)$.

Rozwiązanie takiego zagadnienia ma postać $T(t) = C_5 e^{\lambda t}$

Używając wcześniej wyznaczonych λ_k dochodzimy do dwóch rozwiązań

$u_k(x,t) = a_k e^{-(k\pi)^2 t} cos(k\pi x)$ dla $\lambda_k = -(k\pi)^2$ oraz $u_k(x,t) = b_k e^{-(\frac{\pi^2}{4}+k^2\pi^2+k\pi^2)t} sin((\frac{\pi}{2}+k\pi)x)$ dla $\lambda_k = -(\frac{\pi^2}{4} + k^2\pi^2 + k\pi^2)$

Ogólne rozwiązanie będzie kombinacją liniową $u_k(x,t)$.

dla $\lambda_k = -(\frac{\pi^2}{4} + k^2\pi^2 + k\pi^2)$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{\pi^2}{4}+k^2\pi^2+k\pi^2)t} sin((\frac{\pi}{2} + k\pi)x)$

Teraz wyznaczmy współczynniki z warunku początkowego $u(x,t) = cos(\pi x)$

$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin((\frac{\pi}{2} + k\pi)x)$

Niestety zauważamy, że w naszej sumie nie ma w ogóle cosinusów, więc i składnika $cos(\pi x)$, stąd odrzucamy to rozwiązanie.

dla $\lambda_k = -(k\pi)^2$

Rozwiązanie ma postać:

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(k\pi)^2 t} cos(k\pi x)$

Teraz wyznaczmy współczynniki z warunku początkowego $u(x,t) = cos(\pi x)$

$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(k\pi x)$, stąd $a_k = 1$ dla $k = 1$ pozostałe współczynniki się zerują.

Zatem ostatecznie nasze rozwiązanie przyjmuje postać $u(x,t) = e^{-(\pi)^2 t} cos(\pi x)$.

Zadanie 2

Mamy obszar L zadany jako sumę mnogościową dwóch podobszarów $L = L_1 \cup L_2$ gdzie:

$$L_1 = \left\{(x,y) \in [-1,1]^2 : -1 \leqslant x \leqslant 0,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\right\},$$

$$L_2 = \left\{(x,y) \in [-1,1]^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Na tak zdefiniowanym obszarze rozpatrujemy niejednorodne równanie ciepła z mieszanymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) + \varepsilon \mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]^2\}}(x,y), & (x,y) \in L,\ 0 < t \leq 10, \\ u(-1,y,t) = 0, & y \in [-1,1],\ 0 < t \leq 10, \\ u(x,-1,t) = 0, & x \in [-1,1],\ 0 < t \leq 10, \\ u_x(1,y,t) = 0, & y \in [-1,\frac{1}{2}],\ 0 < t \leq 10, \\ u_x(0,y,t) = 0, & y \in [\frac{1}{2},1],\ 0 < t \leq 10, \\ u_x(x,1,t) = 0, & x \in [-1,0],\ 0 < t \leq 10, \\ u(x,\frac{1}{2},t) = 0, & x \in [0,1],\ 0 < t \leq 10, \\ u(x,y,0) = \exp\left(-((x+1)^2 + (y+1)^2)\right), & (x,y) \in L. \end{cases} \tag{2}$$

1.1

Nasz układ rozwiążemy oddzielnie na obszarze L_1 i oddzielnie na obszrze L_2. Używając znanego nam schematu numerycznego postaci:

$$u(x,y,t+h_t) = u(x,y,t) + \frac{h_t}{h^2}(u(x+h,y,t) + u(x-h,y,t) + u(x,y-h,t) + u(x,y+h,t) - 4u(x,y,t)) + h_t \cdot f(x,y), \tag{3}$$

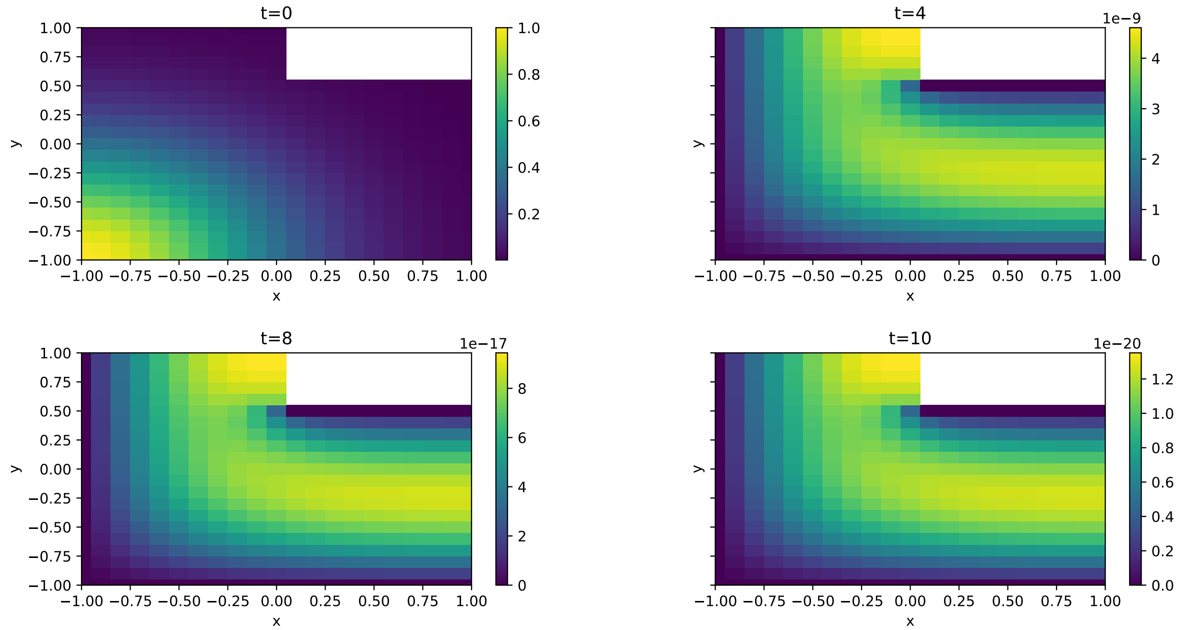
gdzie $f(x,y) = \varepsilon \mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]^2\}}(x,y)$ oraz zakładamy, że $h_x = h_y = h$. Dodatkowo na brzegach uwzględnimy odpowiednio warunek Dirichleta lub Neumanna zgodnie z układem równań. W miejscu cięcia dwóch obszarów brzegi będziemy uzupełniać jako średnia arytmetyczna dwóch sąsiadów (t i y jest stałe zmieniamy tylko x). Zauważmy dodatkowo, że jeśli $x = 0$ uwzględnimy w obszarze L_1 jak i L_2 to w obu obszarach pozostanie nam "pasek" nieuzupełnionych danych, ale tak naprawdę to ten sam pasek (przynajmniej tam gdzie oba obszary istnieją), ponieważ w obu obszarach są to miejsca dla $x = 0$. Zatem chcąc wyznaczyć punkt w tym "pasku" bierzemy jego sąsiada znajdującego się po lewej stronie w obszarze L_1 oraz prawego sąsiada z obszaru L_2, co możemy zapisać dla ustalonego t i y mamy

$$u(0,y,t) = \frac{u(h,y,t) + u(-h,y,t)}{2}.$$

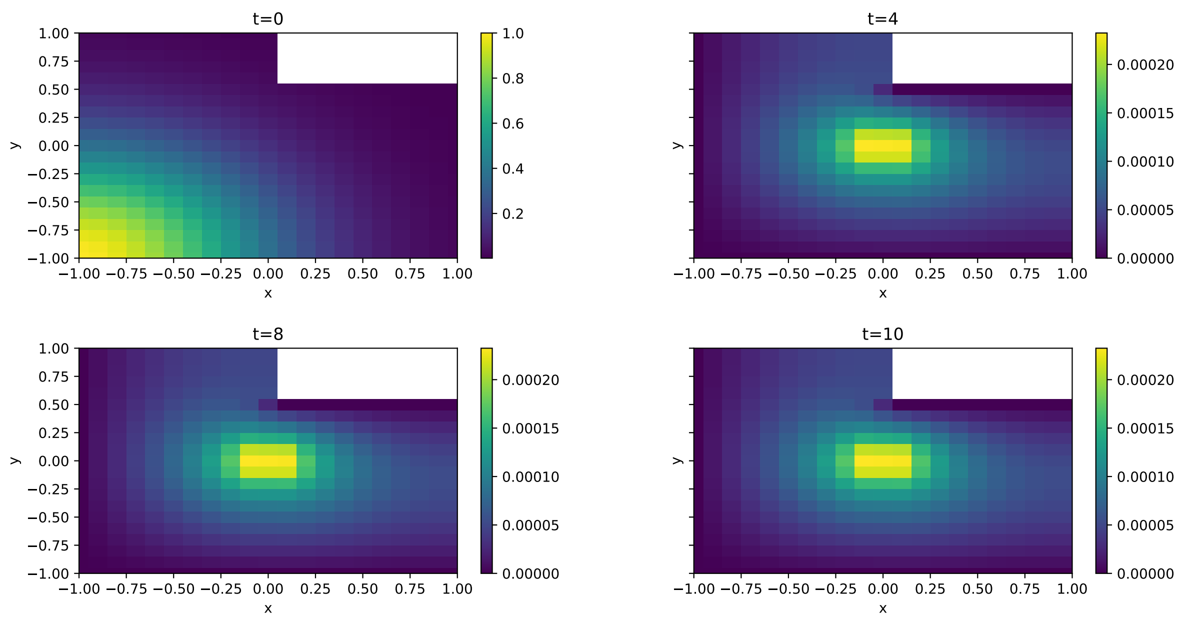
1.2

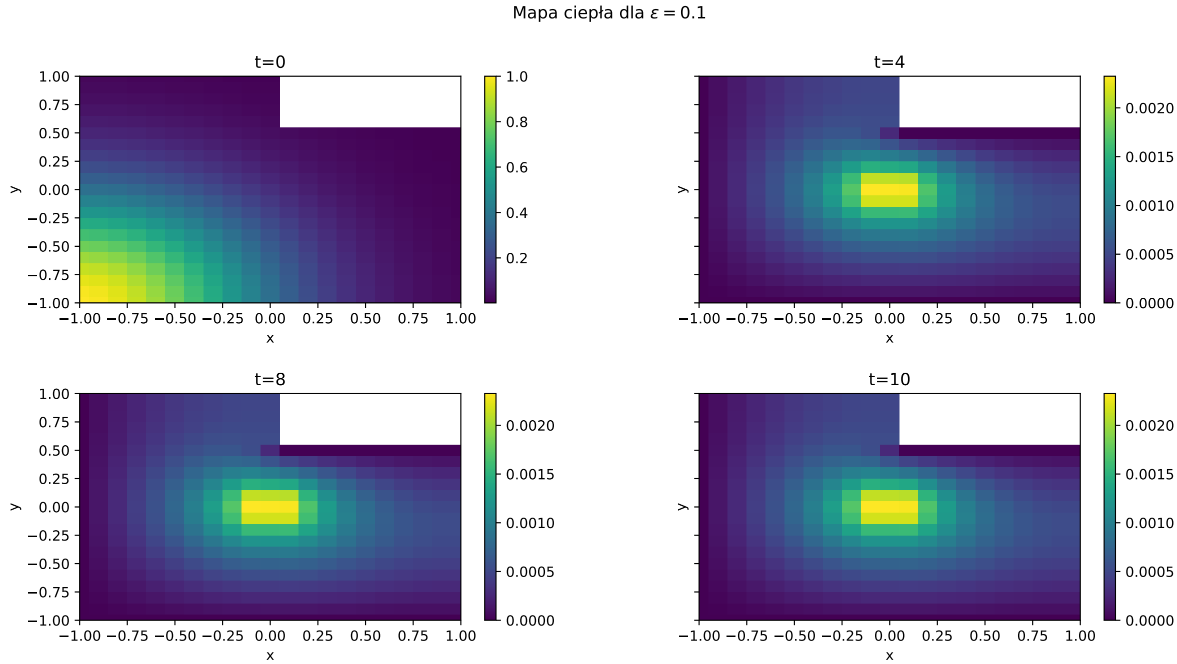
Dla $\varepsilon \in \{0, 0.01, 0.1\}$, $h_x = h_y = h = 0.1$ oraz $h_t = 0.001$ rozwiązemy nasz układ podanym wcześniej schematem numerycznym. Rozwiązanie pokażemy jako mapę ciepła dla kilku wybranych czasów.

Mapa ciepła dla $\varepsilon = 0$



Mapa ciepła dla $\varepsilon = 0.01$





Po przyjżeniu się wykresom widzimy, że dla $\varepsilon = 0$ rozwiązanie bardzo szybko zbiega do zera (widać to zwłaszcza po skali na pocznym pasku), zaś dla pozostałych dwóch przypadków wartość ε jest na tyle dominująca, że układ ma wyraźny pik w tym miejscu (oczywiście w zależności od ε sytuacje są “przeskalowane”, dobrze to widać po wartościach podziałek na bocznym panelu kolorów). Wszystkie układy się stabilizują.

1.4

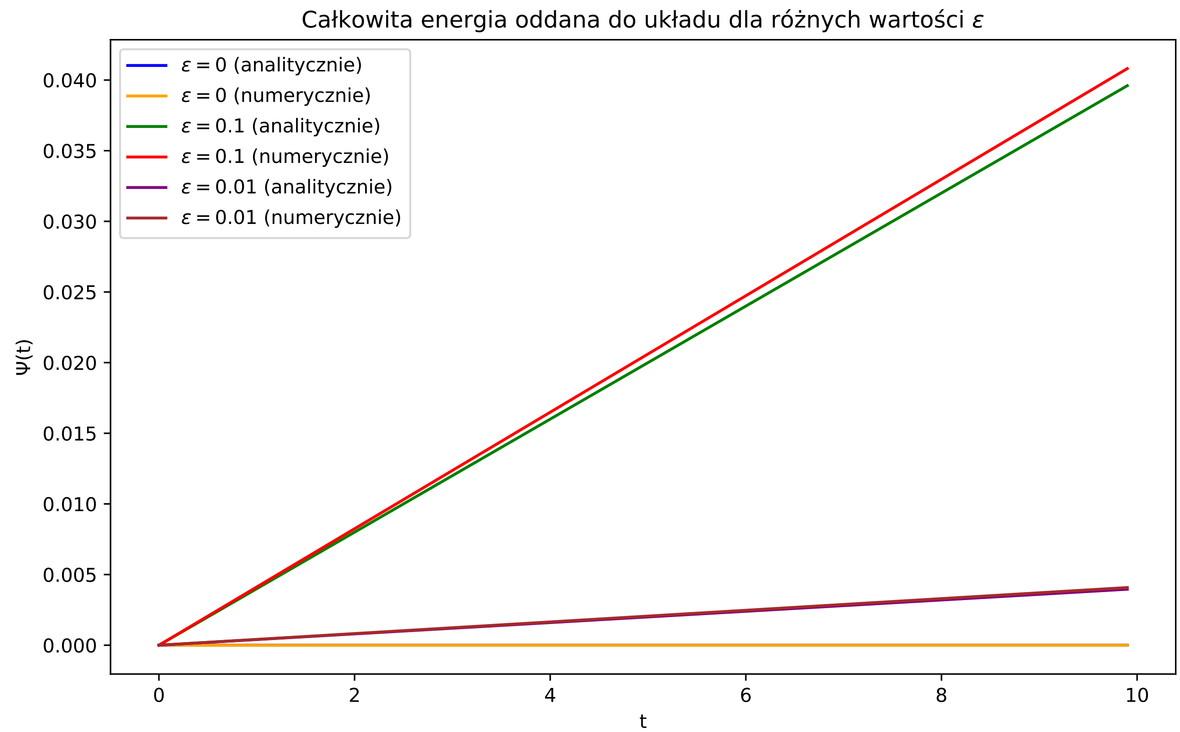
Teraz dla każdej wartości ε zaznaczymy na wykresie całkowitą energię Ψ, która została oddana do układu, zdefiniowaną jako

$$\Psi(t) = \int_0^t \int_L \varepsilon \mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]^2\}}(x,y) dx\ dy\ ds.$$

Energie wyznaczymy w sposób analityczny i numeryczny, a wyniki pokażemy na wykresie. Tutaj zaprezentujemy tylko analityczne obliczenia.

$$\Psi(t) = \int_0^t \int_L \varepsilon \mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]^2\}}(x,y) dx\ dy\ ds = \varepsilon \int_0^t \int_{-1/10}^{1/10} \int_{-1/10}^{1/10} 1 dx\ dy\ ds =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \int_{-1/10}^{1/10} \frac{1}{5} dy\ ds = \frac{\varepsilon}{5} \int_0^t \frac{1}{5} ds = \frac{\varepsilon}{25} t$$



Jak widać z powyższych wykresów wraz ze wzrostem czasu i wartości parametru ε wzrasta wartość energii oddanej do układu. Wartości obliczone numerycznie dość dobrze przybliżają analityczne wyniki.