MODELOWANIE DETERMINISTYCZNE

Przydatne materiały do laboratoriów.

Dokumentacje:

1. numpy - algebra liniowa,
2. matplotlib - podstawowe wizualizacje.

Materiały dodatkowe:

1. Collaboratory 1 - moje notatki z poprzedniego roku. Omówione zostały podstawowe metody różniczkowania, całkowania numerycznego wraz z metodą Newtona do rozwiązywania równań nieliniowych. Wraz z przykładami, bez kodów.
2. Collaboratory 2 - moje notatki z poprzedniego roku. Omówione zostały metody jawna i niejawne Eulera, wyprowadzane metodą całkowania numerycznego. Wraz z przykładami, bez kodów.

Zadanie 1.
Niech $y := y(t)$ oznacza liczebność populacji w chwili $t \geqslant 0$. Dynamika tej populacji opisana jest modelem logistycznym z parametrami $K = 1$ oraz $r = 0.25$ z uwzględnieniem zasady Alleego (*Allee effect*), tzn. gdy populacja spadnie poniżej poziomu $A = 0.1$, to zaczyna ona spadać ze względu na zbyt niską pulę genów.

(1.1) Zapisz równanie różniczkowe, które opisuje to zjawisko.

(1.2) Znajdź stany stacjonarne dla tego równania oraz zbadaj ich stabilność (analitycznie).

(1.3) Za pomocą jawnego schematu Eulera z odpowiednio dobranym krokiem, rozwiąż zagadnienie dla kilku warunków początkowych. Wybierz taki zestaw warunków początkowych, aby móc uzasadnić numerycznie stabilność punktów stacjonarnych.

(1.4) Rozwiąż równanie analitycznie dla $y_0 = 0.5$ i oblicz błąd między rozwiązaniem analitycznym a numerycznym z jawnego schematu Eulera, w zależności od kroku $h \in [0.01, 0.5]$.

(1.*) Powtórz polecenie (1.4) z $r = 33$ dla jawnego oraz niejawnego schematu Eulera.

Zadanie 2.
Niech $y := y(t)$ oznacza liczebność robaczków *Choristoneura fumiferana (Clemens)*, gdzie dynamika tej populacji jest opisana przez następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) \\ y(0) = y_0 \geqslant 0, \end{cases} \qquad f(y) = ry\left(1 - \frac{y}{8}\right) - \frac{10y^2}{1+y^2}.$$

(2.1) Dla parametru r zaproponuj dwie wartości $r_1, r_2 > 0$, spełniające warunek $r_2 > r_1$, gdzie dla r_1 równanie $f(y) = 0$ ma cztery rozwiązania, a dla r_2 ma dwa rozwiązania. *Wskazówka:* zero jest oczywistym rozwiązaniem. Liczbę pozostałych rozwiązań można wyznaczyć przez wizualne badanie przecięć wykresów funkcji

$$r\left(1 - \frac{y}{8}\right) \quad \text{oraz} \quad \frac{10y}{1+y^2}.$$

(2.2) Dla każdej wartości r_1, r_2 wykonaj jeden rysunek, na którym uzasadnisz stabilność/niestabilność rozwiązań stacjonarnych przy pomocy symulacji wykonanych z pomocą jawnego schematu Eulera. Dobierz warunki początkowe oraz krok h w odpowiedni sposób.

(2.3) Niech $y_0 = 0.25$. Sporządź wykres rozwiązania na podstawie symulacji z jawnego schematu Eulera, dla którego **parametr r zmienia się w czasie** w następujący sposób

$$r = \begin{cases} r_1, & 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ r_2, & 3 \leqslant t \leqslant 6 \\ r_1, & 6 \leqslant t \leqslant 9. \end{cases} \tag{1}$$

Dobierz odpowiedni krok h. Czy widzisz związek ze zjawiskiem histerezy?