作者：Boyer 审稿：Lizer, Squareroot_2.

Taller and Higher

源于生活，高于生活.

回顾

上次我们介绍了最基本的数学语言，并亲自上手完成了一些命题或定理的证明。通过证明的过程我们感受到了来自数学世界的秩序，已经来到了高山的山脚下。这座高山深入云巅，奇幻莫测，美丽至极，在开始正式登山之前，我们会在本节准备一些登山工具 —— 常用的数学工具。

多少年来，数学家们不断创造、维护甚至不断打破数学世界的秩序，如此的反反复复这也才造就了如今如此辉煌的数学世界 —— 尽管她还不够完善，但她一直在成长。

Lesson 2 Tools —— 常用数学工具

数学世界如此之大，自然少不了用于构筑这些世界的数学工具，本节我们讲介绍如下的一些数学工具：集合、函数、序列（数列）、归纳原理、递归定义。这些数学工具的理论基础为《集合论》，即集合论公理系统保证了这些数学工具的存在和正确性，虽然我们目前并不直接接触集合论公理系统，但是着并不影响我们介绍和使用这些数学工具。

其中，函数将在初一第一次接触；集合和数列会在高一第一次接触；归纳原理和递归定义会在竞赛和大学之后的课程反复使用。不同于课本教材，本文更注重这些数学概念本身和其作用，而不是解题技巧。所以请不要担心，本文会从无到有，一点点将这些数学工具建立起来。

2.1 形式化的开端——命题逻辑和谓词逻辑

数学家们为了更加精确、统一地描述和研究问题，创造了纯粹由数学符号描述的逻辑语言也叫形式化语言。与日常生活中的自然语言不同，形式化语言是严谨的、精确的、毫不含糊的，数学家们希望使用这一门语言实现把推理变为演算的想法。

我们即将接触到的，是逻辑语言中最基础的：命题逻辑和谓词逻辑，也称命题演算和谓词演算。除此之外，逻辑语言还包括描述能力更强的高阶逻辑，与之相对地，命题逻辑也称零阶逻辑，谓词逻辑也称一阶逻辑。

一阶逻辑是数学基础中很重要的一部分，许多公理系统都将一阶逻辑系统作为自己的公理之一。但介于一阶逻辑公理本身较为抽象不易理解，我们将定理的方式给出与一阶逻辑系统常用的演算规则，而将公理本身和定理的证明置于文末。

2.1.1 命题逻辑

在上一节中，我们已经接触过了基本的命题、证明等数学概念，现在我们将进一步将命题“符号化”，证明“运算化”。即从现在起，一个变量x不再仅仅代表一个未知数或者数字的变量，她可以代表一个命题；一个计算过程不仅仅是数字间的运算，她还可以代表一个证明的推理过程。

2.1.1.1 命题

上一节中我们已经接触过命题了，命题指的是**具有真假意义的陈述句**。如：

命题2.1 如果现在是下雨天，那么现在天上有乌云。

命题2.2 现在是下雨天。

命题2.3 现在天上有乌云。

值得注意的是，上述的三个命题具有一定的关系：**命题2.2**和**命题2.3**都是**命题2.1**的一部分，这叫命题之间的复合关系。如果**命题2.1**和**命题2.2**同时为真，那么我可以得到**命题2.3**为真的结论，这叫命题间的因果关系。

直观上来理解因果关系，如果没有**命题2.1**为**真**的前提条件，仅仅从**命题2.2**为真出发，我们无法得到**命题2.3**为真的结论。但是如果**命题2.1**是真的，那么当命题**命题2.2**为真时就能自然而然的推导出**命题2.3**为真了。

在命题逻辑中，我们更关注“证明”本身，即“推理”，我们会将命题间的推理抽象成一种演算，从而在一定程度上忽略一个命题原本自身的意义。我们重新考虑上述命题：

命题2.1 $P \to Q$

命题2.2 P

命题2.3 Q

无论P和Q换成其他什么命题，在因果关系$P \to Q$为真的情况下，只要P为真，那么Q就是真命题。

在习惯上，我们会使用一个大写的英文字母来表示命题，例如：用B表示命题“北京是中国的首都”、用R表示“雪是黑色的”等。在这里由于我们只重点关注命题间的关系（各种各样的复合和因果），而尽量忽略命题本身，于是上面三条命题中的P,Q可以换成任何命题，你可以将一个真命题放到P中，也可以将一个假命题放到P中，也就是说，在这里P和Q仅仅只是一个变量，就如同解方程中的x一般。

2.1.1.1 命题的复合 —— 联结词

上面我们已经简单的接触到命题之间的复合结构了，在这里我们将更加详尽的研究命题之间的因果关系。为了方便理解，我们将以更加形象的 *自然演绎系统* 的11条演绎规则作为公理来介绍命题逻辑系统。更普遍的命题逻辑公理系统只有3条模式公理和1条推导公理，公理条数少，更加难以理解，不过不用担心，它们是等价的。

给出公理之前，我们定义公理中将使用的一些符号。对于这些符号的含义，我们将使用**真值表**来进一步解释。

定义2.1(否定, 非): 设P是一个命题, “P的否定”是一个命题，记作$\neg P$, 这两个命题总是真假相反。$\neg P$常读作“非P”。

P与$\neg P$的因果关系可以用如下真值表进行表述：

P	$\neg P$
False	True
True	False

表格的左边是P的所有可能出现情况，表格的右边是$\neg P$对于P所有可能出现情况的因果关系。

例如：**命题2.2**中，P表示“现在是下雨天”，那么$\neg P$就表示“现在不是下雨天”。

定义2.2(析取, 或): 设P, Q为两个命题, “P, Q的析取”是一个命题，记作$P \vee Q$。如果P和Q中至少有一个命题是真的, 那么$P \vee Q$就是真的; 反过来也一样, 如果$P \vee Q$是真的, 那么P和Q中至少有一个命题是真的。$P \vee Q$常读作“P或Q”。

P,Q与$P \vee Q$的因果关系可以用如下真值表进行表述：

P	Q	$P \vee Q$
False	False	False
True	False	True
False	True	True
True	True	True

例如：用P表示“现在是下雨天”, 用Q表示“现在是大风天”, 那么$P \vee Q$就表示“现在是下雨天或刮风天”, 其为真命题是现在可以只下雨, 可以只刮风, 也可以既刮风又下雨。

定义2.3(合取, 且):
定义2.4(蕴涵, 推出):
定义2.5(等价, 当且仅当):

2.1.2 谓词逻辑

2.2 集合

2.2.1 集合的基本概念及其表示方法

2.2.2 集合的运算

2.3 函数

2.3.1 函数的基本概念

2.3.2 函数的复合

2.3.3 函数举例（奇奇怪怪的函数，包括不限于基本初等函数，max, min, 各种取整）

2.4 序列

2.4.1 序列的定义

2.4.2 数列

2.6 递归定义

2.6.1 递归定义

2.6.2 举例（定义 a_0 和 递推式子）

2.5 归纳原理

2.5.1 归纳原理

2.5.2 举例

本节回顾

思考习题

习题1.1：证明命题：53是奇数。

习题1.2：证明：有理数满足乘法结合律。

习题1.3：根据欧几里得公理系统提供的公设和公理，证明《几何原本》的第一条命题：

《几何原本》第一卷 几何基础

命题I.1：已知一条线段，可以作一个等边三角形。（等边三角形的三条边长度相同。）

参考资料

1. 习题参考答案

习题1.1：证明命题：53是奇数。

证明:

$$\because 53 = 26 \times 2 + 1$$
$$\therefore 53 \div 2 = 26 \cdots \cdots 1 \neq 0$$

根据**定义1.2**，53是奇数。

$\square$

2. 阅读材料 —— 矩阵与矩阵乘法

3. 本节内容相关资料

[1] 有关几何的部分：《几何原本》
[2] 有关矩阵的部分：《线性代数》
[3] 有关命题，证明的论证逻辑部分：《数理逻辑》
[4] 有关数字本身的定义：《集合论》
[5] 有关运算性质的部分，如交换律、结合律、分配律等：《代数系统》
[6] 有关整数性质的部分：《数论》