

# Taller and Higher

源于生活，高于生活.

## 回顾

上次我们介绍了最基本的数学语言，并亲自上手完成了一些命题或定理的证明。通过证明的过程我们感受到了来自数学世界的秩序，已经来到了高山的山脚下。这座高山深入云巅，奇幻莫测，美丽至极，在开始正式登山之前，我们会在本节准备一些登山工具——常用的数学工具。

多少年来，数学家们不断创造、维护甚至不断打破数学世界的秩序，如此的反反复复这也才造就了如今如此辉煌的数学世界——尽管她还不够完善，但她一直在成长。

## Lesson 2 Tools —— 常用数学工具

数学世界如此之大，自然少不了用于构筑这些世界的数学工具，本节我们讲介绍如下的一些数学工具：集合、函数、序列（数列）、归纳原理、递归定义。这些数学工具的理论基础为《集合论》，即集合论公理系统保证了这些数学工具的存在和正确性，虽然我们目前并不直接接触集合论公理系统，但是着并不影响我们介绍和使用这些数学工具。

其中，函数将在初一第一次接触；集合和数列会在高一第一次接触；归纳原理和递归定义会在竞赛和大学之后的课程反复使用。不同于课本教材，本文更注重这些数学概念本身和其作用，而不是解题技巧。所以请不要担心，本文会从无到有，一点点将这些数学工具建立起来。

## 2.1 形式化的开端——命题逻辑和谓词逻辑

数学家们为了更加精确、统一地描述和研究问题，创造了纯粹由数学符号描述的逻辑语言也叫形式化语言。与日常生活中的自然语言不同，形式化语言是严谨的、精确的、毫不含糊的，数学家们希望使用这一门语言实现把推理变为演算的想法。

我们即将接触到的，是逻辑语言中最基础的：命题逻辑和谓词逻辑，也称命题演算和谓词演算。除此之外，逻辑语言还包括描述能力更强的高阶逻辑，与之相对地，命题逻辑也称零阶逻辑，谓词逻辑也称一阶逻辑。

一阶逻辑是数学基础中很重要的一部分，许多公理系统都将一阶逻辑系统作为自己的公理之一。但介于一阶逻辑公理本身较为抽象不易理解，我们将定理的方式给出与一阶逻辑系统常用的演算规则，而将公理本身和定理的证明置于文末。

### 2.1.1 命题逻辑

在上一节中，我们已经接触过了基本的命题、证明等数学概念，现在我们将进一步将命题“符号化”，证明“运算化”。即从现在起，一个变量 $x$ 不再仅仅代表一个未知数或者数字的变量，她可以代表一个命题；一个计算过程不仅仅是数字间的运算，她还可以代表一个证明的推理过程。

### 2.1.2 谓词逻辑

## 2.2 集合

### 2.2.1 集合的基本概念及其表示方法

### 2.2.2 集合的运算

## 2.3 函数

### 2.3.1 函数的基本概念

### 2.3.2 函数的复合

### 2.3.3 函数举例（奇奇怪怪的函数，包括不限于基本初等函数， $\max$ , $\min$ , 各种取整）

## 2.4 序列

### 2.4.1 序列的定义

### 2.4.2 数列

## 2.6 递归定义

### 2.6.1 递归定义

### 2.6.2 举例（定义 $a_0$ 和 递推式子）

## 2.5 归纳原理

### 2.5.1 归纳原理

### 2.5.2 举例

## 本节回顾

## 思考习题

**习题1.1：**证明命题：53是奇数。

**习题1.2：**证明：有理数满足乘法结合律。

**习题1.3：**根据欧几里得公理系统提供的公设和公理，证明《几何原本》的第一条命题：

**《几何原本》第一卷 几何基础**

**命题I.1：** 已知一条线段，可以作一个等边三角形。（等边三角形的三条边长度相同。）

# 参考资料

## 1. 习题参考答案

**习题1.1：**证明命题：53是奇数。

**证明：**

$$\begin{aligned}\because 53 &= 26 \times 2 + 1 \\ \therefore 53 \div 2 &= 26 \cdots \cdots 1 \neq 0\end{aligned}$$

根据**定义1.2**，53是奇数。



## 2. 阅读材料 —— 矩阵与矩阵乘法

### 3. 本节内容相关资料

- [1] 有关几何的部分：《几何原本》
- [2] 有关矩阵的部分：《线性代数》
- [3] 有关命题，证明的论证逻辑部分：《数理逻辑》
- [4] 有关数字本身的定义：《集合论》
- [5] 有关运算性质的部分，如交换律、结合律、分配律等：《代数系统》
- [6] 有关整数性质的部分：《数论》

版权声明 © Copyright 2024 Boyer.