作者：Boyer 审稿：Lizer, Squareroot_2.

Taller and Higher

> 源于生活，高于生活.

回顾

上次我们介绍了最基本的数学语言, 并亲自上手完成了一些命题或定理的证明。通过证明的过程我们感受到了来自数学世界的秩序, 已经来到了高山的山脚下。这座高山深入云巅, 奇幻莫测, 美丽至极, 在开始正式登山之前, 我们会在本节准备一些登山工具 —— 常用的数学工具。

多少年来, 数学家们不断创造、维护甚至不断打破数学世界的秩序, 如此的反反复复这也才造就了如今如此辉煌的数学世界 —— 尽管她还不够完善, 但她一直在成长。

Lesson 2 Tools —— 常用数学工具

数学世界如此之大, 自然少不了用于构筑这些世界的数学工具, 本节我们讲介绍如下的一些数学工具：集合、函数、序列（数列）、归纳原理、递归定义。这些数学工具的理论基础为《集合论》, 即集合论公理系统保证了这些数学工具的存在和正确性, 虽然我们目前并不直接接触集合论公理系统, 但是着并不影响我们介绍和使用这些数学工具。

其中, 函数将在初一第一次接触；集合和数列会在高一第一次接触；归纳原理和递归定义会在竞赛和大学之后的课程反复使用。不同于课本教材, 本文更注重这些数学概念本身和其作用, 而不是解题技巧。所以请不要担心, 本文会从无到有, 一点点将这些数学工具建立起来。

2.1 形式化的开端——命题逻辑和谓词逻辑

数学家们为了更加精确、统一地描述和研究问题, 创造了纯粹由数学符号描述的逻辑语言也叫形式化语言。与日常生活中的自然语言不同, 形式化语言是严谨的、精确的、毫不含糊的, 数学家们希望使用这一门语言实现把推理变为演算的想法。

我们即将接触到的, 是逻辑语言中最基础的：命题逻辑和谓词逻辑, 也称命题演算和谓词演算。除此之外, 逻辑语言还包括描述能力更强的高阶逻辑, 与之相对地, 命题逻辑也称零阶逻辑, 谓词逻辑也称一阶逻辑。

一阶逻辑是数学基础中很重要的一部分, 许多公理系统都将一阶逻辑系统作为自己的公理之一。但由于普遍使用的一阶逻辑公理本身较为抽象不易理解, 为了方便理解, 我们将以更加形象的 *自然演绎系统* 的11条演绎规则作为公理, 并以此代替原有的3条模式公理和一条推理规则来介绍一阶逻辑系统。

2.1.1 命题逻辑

在上一节中, 我们已经接触过了基本的命题、证明等数学概念, 现在我们将进一步将命题“符号化”, 证明“运算化”。即从现在起, 一个变量x不再仅仅代表一个未知数或者数字的变量, 她可以代表一个命题；一个计算过程不仅仅是数字间的运算, 她还可以代表一个证明的推理过程。

2.1.1.1 命题的再认识

上一节中我们已经接触过命题了, 命题指的是**具有真假意义的陈述句**。如：

命题2.1 如果现在是下雨天, 那么现在天上有乌云。

命题2.2 现在是下雨天。

命题2.3 现在天上有乌云。

值得注意的是, 上述的三个命题具有一定的关系：**命题2.2**和**命题2.3**都是**命题2.1**的一部分, 这叫命题之间的复合关系。如果**命题2.1**和**命题2.2**同时为真, 那么我可以得到**命题2.3**为真的结论, 这叫命题间的因果关系。

直观上来理解因果关系, 如果没有**命题2.1**为**真**的前提条件, 仅仅从**命题2.2**为真出发, 我们无法得到**命题2.3**为真的结论。但是如果**命题2.1**是真的, 那么当命题**命题2.2**为真时就能自然而然的推导出**命题2.3**为真了。

在命题逻辑中, 我们更关注“证明”本身, 即“推理”, 我们会将命题间的推理抽象成一种演算, 从而在一定程度上忽略一个命题原本自身的意义。我们重新考虑上述命题：

命题2.1 $P \to Q$

命题2.2 P

命题2.3 Q

无论P和Q换成其他什么命题, 在因果关系$P \to Q$为真的情况下, 只要P为真, 那么Q就是真命题。

在习惯上, 我们会使用一个大写的英文字母来表示命题, 例如：用B表示命题“北京是中国的首都”、

用R表示“雪是黑色的”等。在这里由于我们只重点关注命题间的关系（各种各样的复合和因果），而尽量忽略命题本身, 于是上面三条命题中的P,Q可以换成任何命题, 你可以将一个真命题放到P中, 也可以将一个假命题放到P中, 也就是说, 在这里P和Q仅仅只是一个变量, 就如同解方程中的x一般, 不过每一个命题变量只能取值True或者False意味着真或者假, 别无其它。

2.1.1.2 命题的运算 —— 联结词

上面我们已经简单的接触到命题之间的复合结构了, 在这里我们将更加详尽的研究命题之间的因果关系。

给出公理之前, 我们定义公理中将使用的一些符号。对于这些符号的含义, 我们将使用**真值表**来进一步解释, 真值表的左边**穷举**了所有可能出现的情况, 右边是某些我们关注的式子在**对应情况**下的取值。

定义2.1(否定, 非, $\neg$): 设P是一个命题, “P的否定”是一个命题, 记作$\neg P$, 这两个命题总是真假相反。$\neg P$常读作“非P”。

P与$\neg P$的因果关系可以用如下真值表进行表述:

P	$\neg P$
False	True
True	False

表格的左边是P的所有可能出现情况, 表格的右边是$\neg P$对于P所有可能出现情况的因果关系。

例如：**命题2.2**中, P表示“现在是下雨天”, 那么$\neg P$就表示“现在不是下雨天”。

定义2.2(析取, 或): 设P, Q为两个命题, “P, Q的析取”是一个命题, 记作$P \vee Q$。如果P和Q中至少有一个命题是真的, 那么$P \vee Q$就是真的; 反过来也一样, 如果$P \vee Q$是真的, 那么P和Q中至少有一个命题是真的。$P \vee Q$常读作“P或Q”。

P,Q与$P \vee Q$的因果关系可以用如下真值表进行表述:

P	Q	$P \vee Q$
False	False	False
Flase	True	True
True	False	True
True	True	True

表格的左边两列是P和Q的所有可能出现情况的组合, 表格的右边是$P \vee Q$对于P和Q的所有可能出现情况的因果关系。

例如：用P表示“现在是下雨天”, 用Q表示“现在是大风天”, 那么$P \vee Q$就表示“现在是下雨天或刮风天”, 其为真命题时现在可以只下雨, 可以只刮风, 也可以既刮风又下雨。

定义2.3(合取, 且): 设P, Q为两个命题, “P, Q的合取”是一个命题, 记作$P \wedge Q$。如果P和Q都是真的, 那么$P \wedge Q$就是真的; 反过来也一样, 如果$P \wedge Q$是真的, 那么P和Q都是真的。$P \wedge Q$常读作“P且Q”。

P,Q与$P \wedge Q$的因果关系可以用如下真值表进行表述：

P	Q	$P \wedge Q$
False	False	False
Flase	True	False
True	False	False
True	True	True

例如：用P表示“现在是下雨天”, 用Q表示“现在是大风天”, 那么$P \wedge Q$就表示“现在是下雨天同时也是刮风天”, 其为真命题时现在既刮风又下雨。

定义2.4(蕴涵, 推出): 设P, Q为两个命题, “P蕴涵Q”是一个命题, 记作$P \to Q$。如果P为真时Q一定为真(P为假时对Q没有任何限制), $P \to Q$为真; 反过来, 如果$P \to Q$为真, 那么P为真时Q一定为真(P为假时对Q没有任何限制)。$P \to Q$常读作“如果P则Q”。

P,Q与$P \to Q$的因果关系可以用如下真值表进行表述：

P	Q	$P \to Q$
False	False	True
Flase	True	True
True	False	False
True	True	True

从真值表中可以看出, $P \to Q$ 为真而P为假时, Q可真可假。这里可能有些抽象，我们结合之前的例子来帮助理解。

继续考虑**命题2.1**、**命题2.2**、**命题2.3**。当**命题2.1**为真时，下雨一定有乌云(P为真时Q一定为真)，不下雨时可能有乌云也可能没有乌云(P为假时对Q没有任何限制)，也就是不下雨时有没有乌云并不影响我们要表述的因果关系。

定义2.5(等价, 当且仅当): 设P, Q为两个命题, “P等价于Q”是一个命题, 记作$P \leftrightarrow Q$。如果P和Q总是真假相同, 那么$P \leftrightarrow Q$为真; 反过来也一样, 如果$P \leftrightarrow Q$为真, 那么P和Q总是真假相同。$P \leftrightarrow Q$常读

作“P当且仅当Q”, 也常直接读“P等价于Q”。

P,Q与$P \leftrightarrow Q$的因果关系可以用如下真值表进行表述:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
False	False	True
Flase	True	False
True	False	False
True	True	True

例如: 用P表示“现在是下雨天”, 用Q表示“现在是大风天”, 那么$P \leftrightarrow Q$就表示“现在是下雨天当且仅当现在也是刮风天”, 其为真命题时, 要么现在既刮风又下雨, 要么两者都不。

2.1.1.3 更复杂的命题 —— 复合, 命题公式

我们已经知道, 两个命题可以通过联结词构成一个新的命题, 这就意味着我们可以从一些初始命题出发, 不断使用联结词反复套娃, 以此构建更多复杂的命题。

定义2.6(命题公式)我们采用**递归定义**:

- True和False是命题公式。
- 命题变量是命题公式。如: P, Q等。
- 如果A, B是命题公式, 那么$(\neg A)$、$(A \vee B)$、$(A \wedge B)$、$(A \to B)$、$(A \leftrightarrow B)$都是命题公式。
- 任何命题公式都由上述有限次复合得到。

于是我们的系统逐渐复杂起来:

$$
\begin{gathered}
(((P \vee Q) \to W) \leftrightarrow (\neg X \wedge (Q \to P))) \\
((((A_0 \vee A_1) \vee A_2) \vee A_3) \vee A_4) \\
(B_0 \to (B_1 \to (B_2 \to (B_3 \to B_4)))) \\
((\text{True} \vee \text{False}) \leftrightarrow \text{True})
\end{gathered}
$$

这些都是命题公式, 每一条都是由若干命题复合成的命题, 当然它们可能是真命题也可能是假命题。

在实际使用时, 为了方便的书写, 我们引入以下约定来减少括号的数量, 其目的仅仅为了书写方便, 在容易引起歧义的地方我们还是要勤用括号。

- 最外层的括号可以省略。
- 对逻辑联结词规定优先级, 就像乘法优先级比加法高那样, 我们约定逻辑联结词按优先级从高到低的顺序依次排列为:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

当遇到同一种联结词, 通常情况下从左往右运算即可, 其理论基础为**结合律**, 但是注意联结词$\rightarrow$并不满足结合律，所以连续的$\rightarrow$括号不可以轻易删除。关于结合律我们会在稍后讨论。

按照这样的书写逻辑我们可以把上面的命题公式稍微减少一些括号：

$$P \vee Q \rightarrow W \leftrightarrow \neg X \wedge (Q \rightarrow P)$$
$$A_0 \vee A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4$$
$$B_0 \rightarrow (B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow (B_3 \rightarrow B_4)))$$
$$\text{True} \vee \text{False} \leftrightarrow \text{True}$$

再次提醒，减少括号目的仅仅为了书写方便, 在容易引起歧义的地方我们还是要勤用括号。在不确定的时候删除括号有可能导致命题的改变，就如同$5 \times 3 + 2$ 不能写成$5 \times (3 + 2)$一样。

2.1.1.4 自然演绎系统

我们已经较为全面的认识了什么是命题，以及了解了如何用联结词构造更复杂的命题，现在我们将给出自然演绎系统的推理规则并把它们作为公理，以此构建我们的命题逻辑公理系统即零阶逻辑系统。

自然演绎系统定义了一套推理规则，每一个推理规则可以从一组真命题中得到另一条真命题。关于推理规则，我们引入两个新的符号：

定义2.7(语义后承 $\models$)设一组命题$q_0, q_1, ..., q_n, Q$, 如果$q_0, q_1, ..., q_n$ 都为真时, Q一定为真, 那么称Q是$q_0, q_1, ..., q_n$的语义后承, 记$\{q_0, q_1, ..., q_n\} \models Q$。

定义2.8(句法后承 $\vdash$)设一组命题$q_0, q_1, ..., q_n, Q$, 如果$q_0, q_1, ..., q_n$ 都为真时, **可以证明**Q一定为真, 那么称Q是$q_0, q_1, ..., q_n$的句法后承, 记$\{q_0, q_1, ..., q_n\} \vdash Q$。

这两个定义的区别仅为从前面的一组命题是否能证明后面的一个命题，如果所有的真命题都可被证明, 那么这两个定义没有区别，但遗憾的是，在许多系统中总存在不可证明的真命题。不过不用担心，这里介绍这两个概念只是为了方便给出我们的推理规则。

公理2.1(否定介入)$\{(p \rightarrow q), (p \rightarrow \neg q)\} \models \neg q$

公理2.2(否定消除)$\{\neg p\} \models (p \rightarrow r)$

公理2.3(双否定消除)$\{\neg\neg p\} \models p$

公理2.4(合取介入)$\{p, q\} \models (p \wedge q)$

公理2.5(合区消除)$\{p \wedge q\} \models p$, $\{p \wedge q\} \models q$

公理2.6(析取介入)$\{p\} \models (p \vee q)$, $\{q\} \models (p \vee q)$

公理2.7(析取消除)$\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \models r$

公理2.8(等价接入)$\{p \rightarrow q, q \rightarrow p\} \models (p \leftrightarrow q)$

公理2.9(等价消除)$\{p \leftrightarrow q\} \models (p \rightarrow q)$,$\{p \leftrightarrow q\} \models (q \rightarrow p)$

公理2.10(条件消除)$\{p, p \rightarrow q\} \models q$

公理2.11(条件介入)$\{p \vdash q\} \models p \rightarrow q$

2.1.1.5 常用等价公式

2.1.2 谓词逻辑

2.2 集合

2.2.1 集合的基本概念及其表示方法

2.2.2 集合的运算

2.3 函数

2.3.1 函数的基本概念

2.3.2 函数的复合

2.3.3 函数举例（奇奇怪怪的函数, 包括不限于基本初等函数, max, min, 各种取整）

2.4 序列

2.4.1 序列的定义

2.4.2 数列

2.6 递归定义

2.6.1 递归定义

2.6.2 举例（定义 a_0 和 递推式子）

2.5 归纳原理

2.5.1 归纳原理

2.5.2 举例

本节回顾

思考习题

习题1.1：证明命题：53是奇数。

习题1.2：证明：有理数满足乘法结合律。

习题1.3：根据欧几里得公理系统提供的公设和公理，证明《几何原本》的第一条命题：

《几何原本》第一卷 几何基础

命题I.1： 已知一条线段，可以作一个等边三角形。（等边三角形的三条边长度相同。）

参考资料

1. 习题参考答案

习题1.1：证明命题：53是奇数。

证明:

$$\because 53 = 26 \times 2 + 1$$
$$\therefore 53 \div 2 = 26 \cdots \cdots 1 \neq 0$$

根据**定义1.2**, 53是奇数。

$\square$

2. 阅读材料 —— 矩阵与矩阵乘法

3. 本节内容相关资料

[1] 有关几何的部分：《几何原本》
[2] 有关矩阵的部分：《线性代数》
[3] 有关命题, 证明的论证逻辑部分：《数理逻辑》
[4] 有关数字本身的定义：《集合论》
[5] 有关运算性质的部分, 如交换律、结合律、分配律等：《代数系统》
[6] 有关整数性质的部分：《数论》