

# 一、 绪论

## 1 背景描述

我们所在的自然，物体大多都是以三维的形式存在，储存记录信息，然后用这些信息重新构建这些三维物体便成为了计算机视觉领域的一个重要的研究课题。三维重构在医学、建筑、航空、机械制造等行业中都有着广泛的运用，比如施工管理虚拟环境中的 CAD 识别，医学断层图像三维重构，基于连续超薄切片的线粒体三维重构，激光共焦扫描显微镜中的三维重构，机器人加工控制——在加工一个零件的毛胚之前，机器人必须先建立毛胚的三维模型；计算机辅助设计——一个自然三维体模型的自动生成可作为 CAD 系统的输入；动画制作——为动画制作者提供大量真实世界的模型，等等。随着三维重构的方法不断完善，要求不断降低，将会有越来越多的领域使用这项技术。

目前三维重构的方法主要分为两大类：动态重构和静态重构。

动态重构利用三维激光扫描仪等仪器得到物体表面的三维点坐标。这种方法的局限性在于，扫描对象的尺寸有限，无法应用于大型实体如建筑物、火箭、航天飞机、山川等等，另外成本目前还比较高，且要求用户具备一定操作水平。

静态重构则是利用实体的二维几何与拓扑信息，使用算法近似构建物体的表面，重构其三维信息。逆向重构法以及当前的课题基于二维照片的三维重构法都属于静态重构，静态重构一般对设备和操作人员的要求不高，精度比动态方法要高，而且一般精度可以根据要求调整，但是整体算法比较复杂。

## 2 动态重构的基本方法

目前通过不同方向拍摄的二维照片恢复三维信息的动态重构主要的算法主要分为八叉树算法和光线追踪算法。

八叉树算法要求确定物体的中心和能够完全包围物体的立方体，在到达要求的精度要求之前，进行进一步细分。在细分的过程中，分辨当前点是黑的（处于物体内部），灰的（处于物体边界）还是白的（处于物体外部），并给予相对的处理。完成细分后，确定结点之间的空间位置以及连接信息，使用三角剖分的方式找出三角面片形成网格，最后再贴上纹理实现三维的重构。

在早期的八叉树算法中，只是简单的将物体包裹在一个立方体当中，从中心沿三个轴向将物体一分为八，并记录所有结点的信息。但这样的算法的时间空间复杂度都非常的高，除了能够将本身就是矩形或者是由矩形简单组合的物体较为精确地重构出来以外，对于形状较为不规则的物体，无法进行有效地重构，而且会浪费大量的时间和空间。在重新绘制八叉树记录点时，也不考虑遮挡，重复绘制，导致整个八叉树算法效率的进一步的降低。

在第二阶段，八叉树算法有了改进，在细分的过程中对于在物体外部的无效点不加以记录和處理，并且在重绘八叉树细分以后的点的时候，考虑面对面的遮挡，面对线的遮挡，并对于被遮挡的面和线不加以绘制[1]。但是在计算遮挡的过程中必须要对几乎所有的面和所有的边之间进行“交”的计算，这个计算本身增加了时间的耗费，而且对于遮挡关系复杂的物体，在计算完毕后还会将一条直线分成一系列的直线段，绘制这些直线段的时耗要远远大于绘制一整条直线。所以采用遮挡计算对时间的影响还和物体本身的形状复杂度有关。但在大多数的情况下，效率还是提高了的。

第二阶段的八叉树，对于大型的物体，时间和空间的耗费依然是不可容忍的，考虑到这种算法重构的是体像素，而在视觉的观察中，内部的点是无法被观察到的，所以，之重构物体表面的“壳”也可以达到同样的视觉效果而且能够很大程度上地节省时间和空间。在这个基础上，Jingliang Peng 和 C.-C. Jay Kuo 对细分的结点进行了优先级的计算和挑选[2]，使同

样的细分次数中，有效细分的次数更多，被细分的结点处于物体表面的可能性更大，进一步提高了使用八叉树重构的效率。

虽然八叉树重构的效率得以提高，但是由于八叉树的本质是将一个立方体有限次的细分得到一个物体的大致三维信息，最后八叉树信息是以基本单位结点（node）存在的，这就使得重构得到的物体表面存在阶梯状（如图 1），无法得到连续的表面，在这种情况下，光线追踪算法可以解决一定问题。

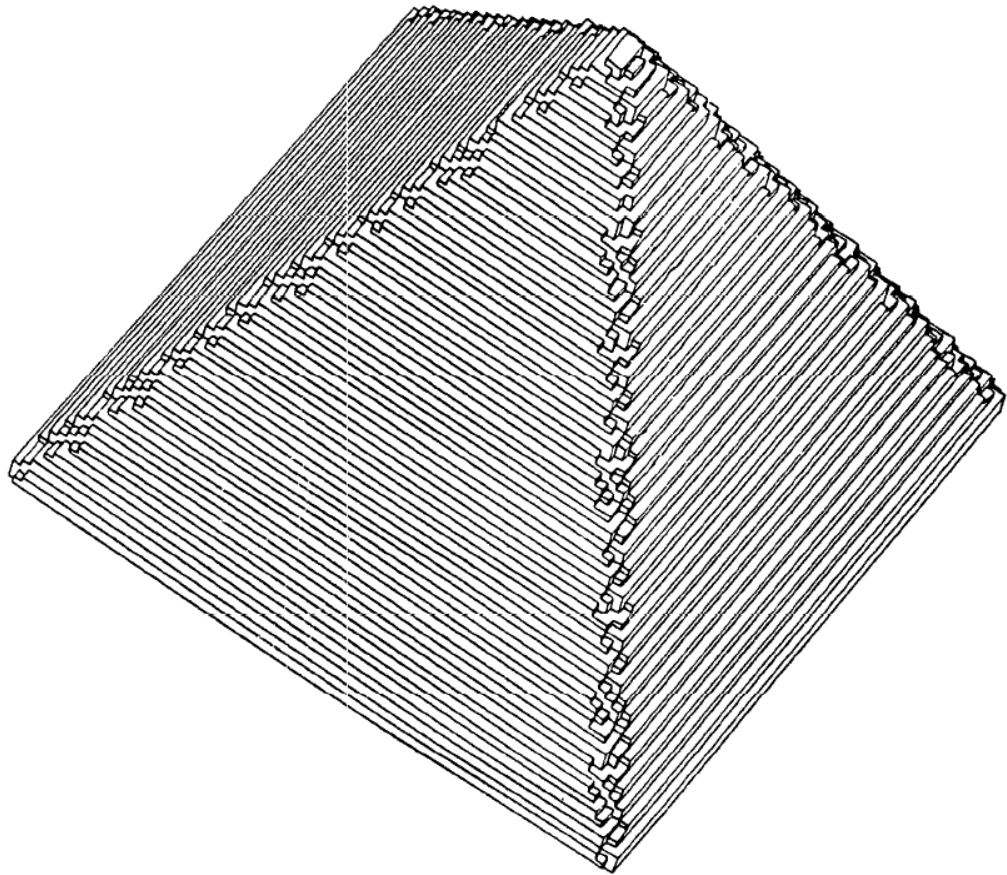


图 1：金字塔状物体的八叉树重构

光线追踪算法的原理是，一个三维物体在不同角度的相机的拍摄下，得到一系列的照片（相机个数大于等于两个）。在空间取任意一点  $A$ ，在相机  $C$  中观察到其像点  $a$ ，则  $A$  必定在  $Ca$  的连线上某一点。如果同时用相机  $C$ 、 $C'$  观察同一点  $A$ ，则  $A$  必定在  $Ca$  和  $C'a'$  的连线交点上，它的空间位置是唯一的。当提供多幅图的时候，空间点的位置受到了更多的约束，所得的解会更精确[3]。为了改进算法的时间空间复杂度，同样只对物体表面上的三维点做映射在光线追踪算法中，开始是以相机焦点为顶点，从顶点向照片掩膜边界引射线，形成光锥，再用其他光锥中的射线一一和当前光锥相交，得到物体的近似外包壳，光锥越多，得到的“壳”越接近物体表面，但是这对定标和三维立体几何计算的计算有非常精确的要求，而且从二维照片映射到三维空间是一个比较困难的过程，所以这种算法在实际运用中往往得不到较好的效果。

在后来的改进算法中，改进了从二维照片映射到三维空间的困难[4]，方法改为由三维空间映射到二维空间，这在一定程度上减小了整个算法的误差。要实现这种改进必须先找出立体空间里的三维点到照片掩膜中的二维点的对应方式，目前最常用的是 DLT（Direct linear transformation）系统。

### 3 本文的目的和贡献

鉴于光线追踪算法能够在比较好的时间和空间复杂度下，较为精确地重构一个物体，是目前动态重构的一个较好的方法，但是这种算法对于误差的敏感度非常高，目前还没有非常好的改进方式，尤其是物理测量形成的误差。本文使用 Maya 建模，对于各种参数的输入的扰动进行分析，得到各种参数偏差对参数的影响以及对最后重构结果造成的影响，使得在重构时可以根据要求精度和本文分析所得的误差度进行比较，分析重构的可行性。

### 4 论文组织安排

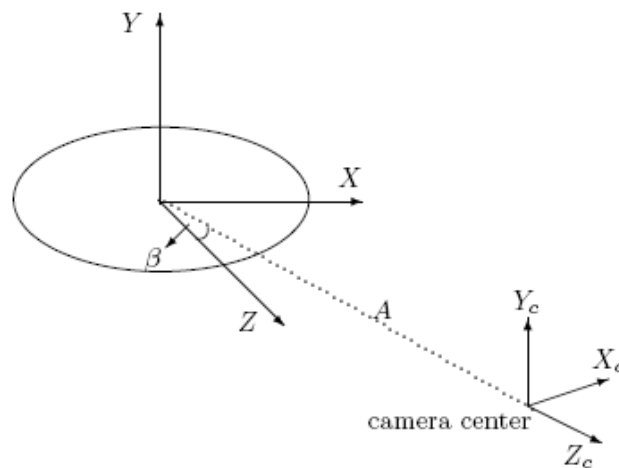
解下来的章节中，将有对基本算法的介绍和对偏差产生的影响的分析。第二章介绍了主要定标的 DLT 算法及其参数具体计算方法和重构所用到的光线追踪算法。第三章和第四章是论文的主要部分：第三章分析了输入数据对物理参数的影响和对 DLT 参数的影响程度，第四章则通过实验分析了，不同的物理参数和 DLT 参数对重构结果产生的影响。第五章介绍了一个用于误差分析的小程序；第六章则对使用以上误差分析方法得到的结果进行了一个小结，并提出了一些建议。

## 二、 DLT 算法以及光线追踪算法

### 1 DLT 算法介绍

#### 1.1 算法分析

DLT 系统分为参照坐标系（转台坐标系）、相机坐标系和照片坐标系，其中参照坐标系和相机坐标系是三维坐标系，照片坐标系是二维坐标系。坐标系一律采用右手参照坐标系，图（2.1）。



图（2.1）

DLT 定标算法本质上是找出几个特征点，使它们的参照坐标系中的三维坐标和照片坐标系中的二维坐标一一对应，以用来确定整个坐标系的特征。然后再用确定下来的坐标系的特征找出其他点的三维坐标和二维坐标的对应。

由于照片坐标系的原点在相机和参照两个坐标系原点的连线上，且与相机坐标系的 XOY 平行，照片坐标系点的坐标轴与这个点在相机坐标系中的坐标只有一个位移，所以求三维物体到二维照片的映射点也就是求这个点从转台坐标系到相机坐标系的转换，公式（2.1）。

$$X_c = M^T (X - X_{cr}) \quad \text{公式(2.1)}$$

通过这个公式可以得到相机在参照坐标系中的坐标，其中  $M^T$  是旋转矩阵，公式 (2.2)， $m_{ij}$  是对应旋转矩阵  $M^T$  中的  $i$  行  $j$  列，转角  $\beta$  可参见图 (2.1)

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \text{公式 (2.2)}$$

所以可以解得  $X_{cr}$  的坐标为公式 (2.3)， $X_{cr}$  是相机在参照坐标系中的坐标， $A$  为相机中心到参照坐标系中心的距离， $y_{cr}$  是相机平台的高度（相对于转台）：

$$X_{cr} = (A \sin\beta, y_{cr}, A \cos\beta)^T \quad \text{公式 (2.3)}$$

根据相机的物理参数，包括焦距，转台到相机焦点的距离，相机转过的角度等等推算，再经过相机非线性的扭曲误差的调整，以上式子可以转化成为：

$$\begin{aligned} x &= x_0 - c_x * [m_{11}*(X - X_{cr}) + m_{21}*(Y - Y_{cr}) + m_{31}*(Z - Z_{cr})] / [m_{13}*(X - X_{cr}) + m_{23}*(Y - Y_{cr}) + m_{33}*(Z - Z_{cr})] + c_x \Delta x \\ y &= y_0 - c_y * [m_{12}*(X - X_{cr}) + m_{22}*(Y - Y_{cr}) + m_{32}*(Z - Z_{cr})] / [m_{13}*(X - X_{cr}) + m_{23}*(Y - Y_{cr}) + m_{33}*(Z - Z_{cr})] + c_y \Delta y \end{aligned} \quad \text{公式 (2.4)}$$

$c_x$ 、 $c_y$  为相机比例因子， $x_0$  和  $y_0$  是照片坐标系的原点在转台坐标系中的坐标。

DLT 算法的基本对应方程为公式 (2.5)，其中  $L_1$  至  $L_{11}$  为 11 个 DLT 参数， $X, Y, Z$  为三维点的坐标， $x, y$  为对应点照片坐标系坐标。

$$\begin{pmatrix} xw \\ yw \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{公式 (2.5)}$$

这个式子展开以后即为公式 (2.6)

$$\begin{aligned} x - \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + L_1} &= 0 \\ z - \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + L_1} &= 0 \end{aligned}$$

公式 (2.6)

联立公式 (2.5) 和公式 (2.6) 得到公式 (2.7)

$$\begin{cases} L = A(\sin^2\beta - \cos^2\beta) \\ L_1 = (-x_0\sin\beta - c_x\cos\beta)/L \\ L_2 = 0 \\ L_3 = (x_0\cos\beta - c_x\sin\beta)/L \\ L_4 = A/L(x_0(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2c_x\sin\beta\cos\beta) = x_0 + 2\frac{c_x\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta - \cos^2\beta} \\ L_5 = -y_0\sin\beta/L \\ L_6 = -c_y/L \\ L_7 = y_0\cos\beta/L \\ L_8 = A/L(y_0(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + c_y y_{cr}/L) = y_0 + c_y y_{cr}/L \\ L_9 = -\sin\beta/L \\ L_{10} = 0 \\ L_{11} = \cos\beta/L \end{cases}$$

公式 (2.7)

其中 A、x0、y0、cx、cy、ycr 为未知数，需要三个不对称的点（对称的点会导致整个矩阵不是满秩的，无法解出唯一解）来解出这些未知数。

## 1.2 参数计算

为了消去一些未知数，简化方程，我们可以从参数  $\beta$  入手考虑，因为  $\beta$  为 0 的时候是相机的起始位置，比较好精确地取得，而且  $\beta$  为 0 的时候  $\sin\beta$  的值也是 0，这时 L5 和 L9 就可以简单地化为 0。使用 k 代替 1/A，可以得到十一个参数公式 (2.8)：

$$(L_1, L_2, \dots, L_{11})^T = (kc_x, 0, -kx_0, x_0, 0, kc_y, -ky_0, y_0 - kc_y y_{cr}, 0, 0, -k)^T$$

公式 (2.8)

如果我们可以使用 m 个定标点，它们的照片坐标和三维参照坐标的转换公式是：

$$\begin{aligned} L_1 X_i + L_2 Y_i + L_3 Z_i + L_4 &= (L_9 X_i + L_{10} Y_i + L_{11} Z_i + 1) \hat{x}_i, \\ L_5 X_i + L_6 Y_i + L_7 Z_i + L_8 &= (L_9 X_i + L_{10} Y_i + L_{11} Z_i + 1) \hat{y}_i. \end{aligned}$$

公式 (2.9)

因为在三维坐标系中，Z 是深度坐标系，相对来说比较不好取得，所以用于定标的点大部分应该是 Z 为 0 的点，但根据公式 (2.9)，Z 等于 0 时，参数 L3, L7, L11 就无法计算得出，所以不能所有的点都取 Z 等于 0。

当 Z 等于 0 时，去掉值为 0 的项，公式 (2.9) 可以简化为公式 (2.10)

$$\begin{cases} L_1 X_i + L_2 Y_i + L_4 - L_9 \hat{x}_i X_i - L_{10} \hat{x}_i Y_i = \hat{x}_i, \\ L_5 X_i + L_6 Y_i + L_8 - L_9 \hat{y}_i X_i - L_{10} \hat{y}_i Y_i = \hat{y}_i. \end{cases}$$

公式 (2.10)

联立公式 (2.8) 和公式 (2.10) 可以得到公式(2.11)

$$\begin{cases} kc_x X_i + x_0 = \hat{x}_i, \\ kc_y (Y_i - y_{cr}) + y_0 = \hat{y}_i. \end{cases}$$

公式 (2.11)

现在，我们可以将方程中的未知数  $kc_x$  看成  $K_x$ ， $kc_y$  看成  $K_y$ ，这样整个方程一共有五个未知数： $K_x$ ,  $K_y$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  和  $K_y \cdot y_{cr}$ 。所以方程计算的矩阵我们可以写成公式 (2.12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -1 \\ \dots & & & & \\ 1 & 0 & X_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_m & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ K_x \\ K_y \\ K_y y_{cr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \dots \\ \hat{x}_m \\ \hat{y}_m \end{pmatrix}$$

公式 (2.12)

因为有五个未知数，所以至少需要五个方程，三个定标点，但是由于  $y_{cr}$  在实际情况中一般非常接近于 0，所以也可以将最后一个参数设为 0。如果最后一个参数存在，整个方程将会由线性方程转为非线性方程，增大解方过程中的误差，所以将最后一项设为 0 总体来说误差还是减小的。

在经过  $Z$  等于 0 的点计算以后， $K_x$ ,  $K_y$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  和  $K_y \cdot y_{cr}$  就成为了已知点，未知的只有  $k$ ，这个参数需要通过  $Z$  不等于 0 的点计算出来，这样的点只需要一个就可以了，最简单的是取一个  $X$ ,  $Y$  的值都为 0 的点，这样，可以借助公式 (2.10) 的任何一个方程，解一个线性方程就可以了。解出  $k$  以后， $cx$  和  $cy$  也可以通过  $K_x$ ,  $K_y$  得到。

在解方程的过程中未免会产生一定的误差，我们可以采取多使用几个定标点，对结果进行最小二乘的方法减小误差的产生，但是因为这种方法会掩盖偏差对误差的影响，所以在误差分析的过程中，只采用了计算参数所必要的最少数量的点。

## 2 光线追踪算法介绍

光线追踪算法主要有对整个三维物体进行光线追踪或是仅仅对物体表面进行光线追踪。显而易见地，前一种算法的容错性要比后一种好，但是前一种算法的时间和空间复杂度会随着被重构物体体积的增大比后一种算法要大出几个数量级，所以我们这里使用的是第二种算法。光线追踪的过程主要分为剪影的提取和通过光线跟踪计算近似表面点两个模块。

### 2.1 剪影的提取

照片摄取的过程也可以看成是物体固定在桌面上，而照相机绕着物体旋转一周进行拍照。使用的背景色和要重构的物体要尽量区别开来，以方便计算和辨认剪影。

重构计算时，以剪影为底面（剪影可以是多连通域）、与其对应的照相机的焦点为顶点，可确定一个锥体，称为投影锥。将锥体向桌面方向延伸，其表面应与三维物体外切，如图(2.1)所示。

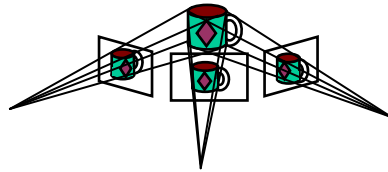


图 (2.1): 光线追踪示意图

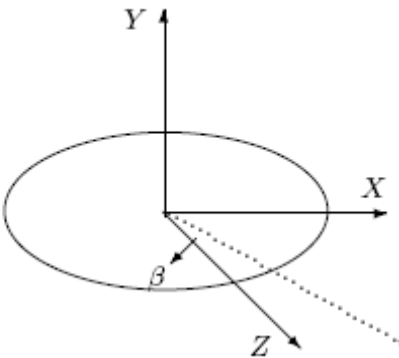
我们的目标是找到切点的近似位置，所以不需要把实心锥体进行延伸，而只要把锥的母线进行延伸即可。这就需要我们首先得到投影锥的准线——剪影的边界轮廓线。

轮廓线追踪的算法[1]可用于从实体的黑白掩模中提取边界像素，并用点列记录。这样得到的点列还是有序的（顺时针或逆时针），这一点对于后面的求交计算很重要。

另外由于算法的复杂度与每张剪影轮廓上的平均取点数的平方成正比，而且因为照片数一般不是很大（24 张、36 张、或 72 张），轮廓点取得太密不利于重构后的三角剖分，所以并不是取的点越密越好。我们希望用尽可能少的点表示出剪影轮廓的特征，即在曲率变化大的地方多取一些点，反之则少取一些点。

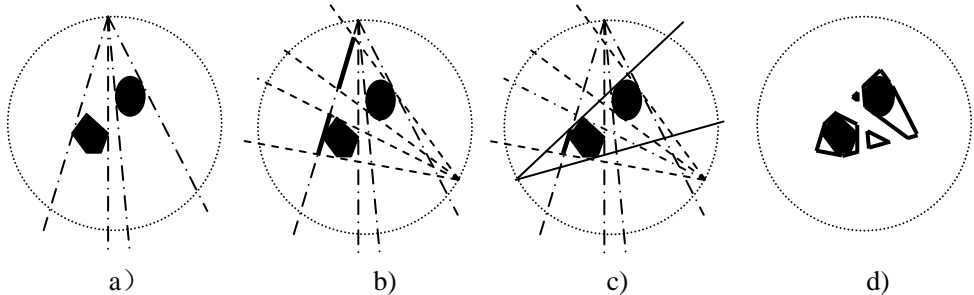
2.2 光线跟踪计算

整个系统的参照坐标系见图（2.2）。



图（2.2）参照坐标系

图（2.3）显示了二维光线跟踪计算的具体步骤



图（2.3）光线跟踪步骤

a) 图表示了第一个相机通过剪影，对需要重构的物体进行光线跟踪所得到的光锥，将两个物体完全地包含在光锥中；b) 图有了第二个光线跟踪，和 a) 相同，也将物体完全包含在光锥中，并和 a) 中的光锥相交，将 a) 的四条射线切分为 8 条线段，需要重构的物体必然包含在这些线段所形成的四个多边形区域当中，b) 将 a) 形成的区域细化了；c) 重复了 a) 和 b) 的步骤，将包含物体的空间更加精细化了。d) 是经过了 a) b) c) 的结果，d 中的多边形区域是经过三个相机光线追踪以后得到的物体表面的近似边。

可见在精确没有偏差的情况下，光锥越多，角度越全，所得到的多边形越接近物体表面，在光锥趋近于无数的情况下，能够得到精确的物体表面。但是一旦光锥偏斜，出现的误差也是不可补救的，因为任何一个光锥的偏斜都将导致一部分的物体表面被“切割”掉，而被切割掉的那部分表面无法通过别的光锥加入到物体当中。所以在存在误差的实际情况下，并不是光锥取得越多越好，因为在一定的误差积累后，物体很有可能已经被“切”地面目全非，或者甚至整个物体都被切除在光锥外。

三维物体与二维物体的光线追踪是类似的，只是得到的区域由二维的多边形变为了三维

的多面体。

### 三、 输入数据的偏差对参数的影响

#### 1. 输入数据的偏差对物理参数的影响

DLT 算法原本是以物理参数作为输入的，但是在实际运用的过程中，有些物理的参数不是能够直接得到的，即使能够得到，也因为设备、器材和环境等种种原因精确度不够，所以使用 DLT 定标算法时，大多是更具几个较为精确的三维点坐标和对应的二维照片坐标，以映射关系确定物理坐标，但是这种对应关系的会造成一定的物理参数的偏差，以下就是输入偏差对产生的物理参数影响的分析。

由于是光锥切割原理，照片上的二维点偏差和实物的三维点的偏差造成的影响有相似性，所以这里仅分析照片上点的偏差对物理参数的影响

##### 1.1 照片参数的偏差对参数的影响

###### 1.1.1 照片参数输入偏差对相机中心参数 $x_0$ 的影响

计算坐标时， $x$  的偏差对相机中心参数  $x_0$  的影响见图 (3.1)，首先采用的是球体模型对关系进行讨论，两条线斜率大的是位于  $y$  轴上的点，斜率小的是在  $x$  轴上的点，可以看出，在  $x$  轴上的点  $x$  取值有微小的偏差时，对  $x_0$  的影响几乎没有。具体数据可以参见表 (3.1)，表中的  $x$  的偏差是指计算时用的  $x$  值与标准值之间的差，单位是像素； $x_0$  的值是指用有偏差的  $x$  值计算出来的参数； $x_0$  的误差是指用有偏差的  $x$  值计算出来的  $x_0$  值与用标准的  $x$  值计算出来的  $x_0$  的差距；误差百分比是  $x_0$  的误差与标准  $x_0$  的比值。

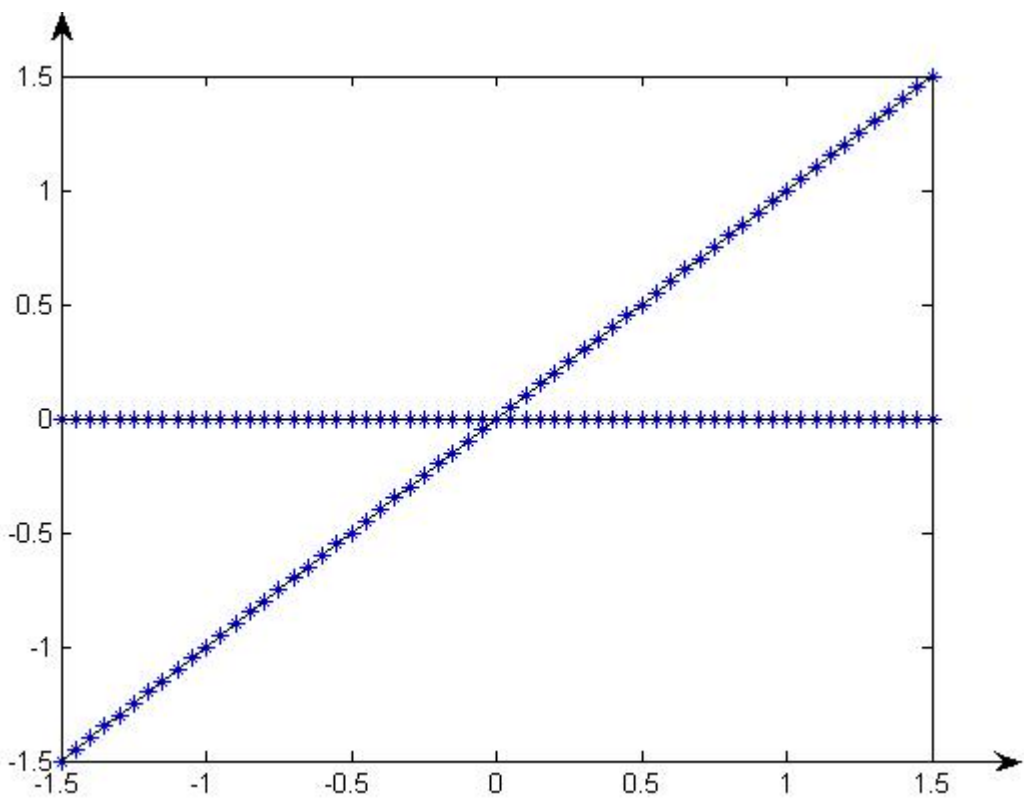


图 (3.1)

不同坐标的  $x$  对  $x_0$  的影响程度  
横坐标表示  $x$  的偏差，纵坐标表示  $x_0$  的误差



表 (3.1)

x 的偏差 (像素)	x0 的值	x0 的误差	误差百分比
-1.500000	318.500000	-1.500000	-0.470219%
-1.350000	318.650000	-1.350000	-0.423197%
-1.200000	318.800000	-1.200000	-0.376176%
-1.050000	318.950000	-1.050000	-0.329154%
-0.900000	319.100000	-0.900000	-0.282132%
-0.750000	319.250000	-0.750000	-0.235110%
-0.600000	319.400000	-0.600000	-0.188088%
-0.450000	319.550000	-0.450000	-0.141066%
-0.300000	319.700000	-0.300000	-0.094044%
-0.150000	319.850000	-0.150000	-0.047022%
0.000000	320.000000	0.000000	0.000000%
0.150000	320.150000	0.150000	0.047022%
0.300000	320.300000	0.300000	0.094044%
0.450000	320.450000	0.450000	0.141066%
0.600000	320.600000	0.600000	0.188088%
0.750000	320.750000	0.750000	0.235110%
0.900000	320.900000	0.900000	0.282132%
1.050000	321.050000	1.050000	0.329154%
1.200000	321.200000	1.200000	0.376176%
1.350000	321.350000	1.350000	0.423197%

x 对 x0 的影响程度

由表 (3.1) 可以初步看出 x 和 x0 之间是线性的关系, 但 x 离两个坐标轴的距离与 x0 的关系还不甚明晰, 在实验中, 我还使用了方形的定标系统, 来讨论 x 和 x0 的关系, 图 (3.2)。从斜率最大到斜率最小分别称为线一、线二和线三, 对应的照片上的点分别为点 1、点 2、点 3, 其中线一是 x 坐标为 0, y 坐标绝对值为 d 的点对 x0 的影响; 线二是 x 和 y 坐标绝对值都为 d 的点对 x0 的影响; 线三是 y 坐标为 0, x 坐标绝对值为 d 的点对 x0 的影响。从图中可以看出点的 x 坐标绝对值越小对 x0 的影响越大, 离 y 坐标绝对值越小对 x0 的影响越小。具体数据可以参见表 (3.2), 表中的 x 的偏差是指计算时用的 x 值与标准值之间的差, 单位是像素; x0 的误差是指用有偏差的 x 值计算出来的 x0 值与用标准的 x 值计算出来的 x0 的差距。

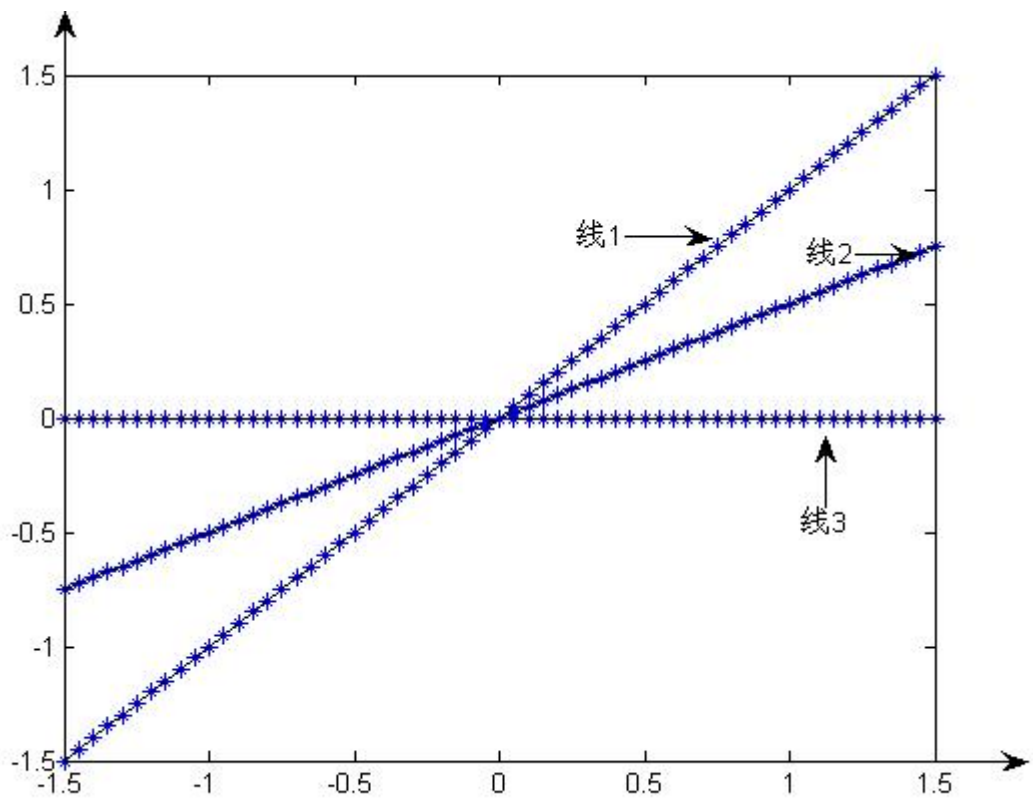


图 (3.2)

点 1:  $x$  坐标为 0,  $y$  坐标绝对值为  $d$

点 2:  $x$  和  $y$  坐标绝对值都为  $d$

点 3:  $x$  坐标绝对值为  $d$ ,  $y$  坐标为 0

横坐标表示  $x$  的偏差, 纵坐标表示  $x_0$  的误差

表 (3.2)

$x$ 的偏差 (象素)	$x_0$ 的误差 (点 1)	$x_0$ 的误差 (点 2)	$x_0$ 的误差 (点 3)
-1.500000	-1.500000	-0.750000	0.000000
-1.350000	-1.350000	-0.675000	0.000000
-1.200000	-1.200000	-0.600000	0.000000
-1.050000	-1.050000	-0.525000	0.000000
-0.900000	-0.900000	-0.450000	0.000000
-0.750000	-0.750000	-0.375000	0.000000
-0.600000	-0.600000	-0.300000	0.000000
-0.450000	-0.450000	-0.225000	0.000000
-0.300000	-0.300000	-0.150000	0.000000
-0.150000	-0.150000	-0.075000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.150000	0.150000	0.075000	0.000000
0.300000	0.300000	0.150000	0.000000
0.450000	0.450000	0.225000	0.000000

0.600000	0.600000	0.300000	0.000000
0.750000	0.750000	0.375000	0.000000
0.900000	0.900000	0.450000	0.000000
1.050000	1.050000	0.525000	0.000000
1.200000	1.200000	0.600000	0.000000
1.350000	1.350000	0.675000	0.000000
1.500000	1.500000	0.750000	0.000000

立方体定标中不同的点的 x 的偏差对 x0 的影响

由以上的实验可以得出，x 的取值和 x0 的关系是 $|\Delta x_0| = |k\Delta x|$ ，k 的值由所取的点的 x 坐标和 y 坐标决定，所以整个方程也可以表示为

$$|\Delta x_0| = f(|x|, |y|) * \Delta x$$

其中 f(|x|, |y|)是关于|x|的递减函数，关于|y|的递增函数。

当不只一个 x 值有偏差是，两个 x 的偏差方向如果相同则造成误差叠加，相反则造成误差相消，具体数据见表 (3.3)，其中 x 的偏差是指计算时用的 x 值与标准值之间的差，单位是像素；标有点 1 和点 2 的是点单独对 x0 造成的影响，标有同向的是两个点的 x 偏差都是朝着 x 轴正方向 / 反方向，然后这两个偏差联合对 x0 造成的影响，标有异向的是两个点的 x 偏差方向相反，然后这两个偏差联合对 x0 造成的影响。

表 (3.3)

x 的偏差	x0 的误差 (点 1)	x0 的误差 (点 2)	x0 的误差 (同向)	x0 的误差 (异向)
-1.500000	-0.750000	-0.750000	-1.500000	0.000000
-1.350000	-0.675000	-0.675000	-1.350000	0.000000
-1.200000	-0.600000	-0.600000	-1.200000	0.000000
-1.050000	-0.525000	-0.525000	-1.050000	0.000000
-0.900000	-0.450000	-0.450000	-0.900000	0.000000
-0.750000	-0.375000	-0.375000	-0.750000	0.000000
-0.600000	-0.300000	-0.300000	-0.600000	0.000000
-0.450000	-0.225000	-0.225000	-0.450000	0.000000
-0.300000	-0.150000	-0.150000	-0.300000	0.000000
-0.150000	-0.075000	-0.075000	-0.150000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.150000	0.075000	0.075000	0.150000	0.000000
0.300000	0.150000	0.150000	0.300000	0.000000
0.450000	0.225000	0.225000	0.450000	0.000000
0.600000	0.300000	0.300000	0.600000	0.000000
0.750000	0.375000	0.375000	0.750000	0.000000
0.900000	0.450000	0.450000	0.900000	0.000000
1.050000	0.525000	0.525000	1.050000	0.000000
1.200000	0.600000	0.600000	1.200000	0.000000
1.350000	0.675000	0.675000	1.350000	0.000000
1.500000	0.750000	0.750000	1.500000	0.000000

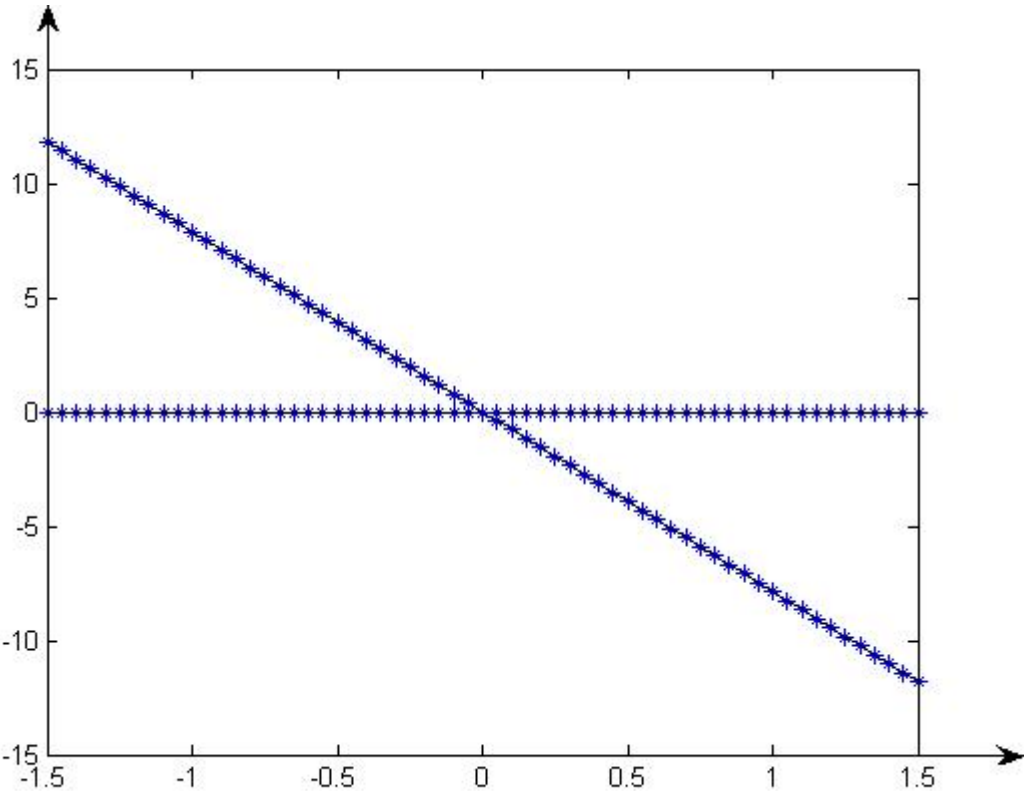
几个点偏差的联合对 x0 造成的影响

总体来说，m 个点的 x 的偏差对 x0 的影响可以表示成 $|\Delta x_0| = f(|x_1|, |y_1|) * \Delta x_1 + f(|x_2|,$

$|y_2| \cdot \Delta x_2 + \dots + f(|x_m|, |y_m|) \cdot \Delta x_m|$ 。  
 $y$  的偏差对  $x_0$  不造成任何影响。

### 1.1.2 照片参数输入偏差对相机中心参数 $y_0$ 的影响

计算坐标时， $y$  的偏差对相机中心参数  $y_0$  的影响见图（3.3），首先采用的是球体模型对关系进行讨论，两条线斜率绝对值大的是位于  $x$  轴上的点，斜率的绝对值小的是在  $y$  轴上的点，可以看出，在  $y$  轴上的点  $y$  取值有微小的偏差时，对  $y_0$  的影响几乎没有。具体数据可以参见表（3.4），表中的  $y$  的偏差是指计算时用的  $y$  值与标准值之间的差，单位是像素； $y_0$  的值是指用有偏差的  $y$  值计算出来的参数； $y_0$  的误差是指用有偏差的  $y$  值计算出来的  $y_0$  值与用标准的  $y$  值计算出来的  $y_0$  的差距；误差百分比是  $y_0$  的误差与标准  $y_0$  的比值。



图（3.3）  
 不同坐标的  $y$  对  $y_0$  的影响程度  
 横坐标表示  $y$  的偏差，纵坐标表示  $y_0$  的误差

表（3.4）

$y$ 的偏差（像素）	$y_0$ 的值	$y_0$ 的误差	误差百分比
-1.500000	251.822488	11.822488	4.510342%
-1.350000	250.640239	10.640239	4.059307%
-1.200000	249.457991	9.457991	3.608273%
-1.050000	248.275742	8.275742	3.157239%
-0.900000	247.093493	7.093493	2.706205%
-0.750000	245.911244	5.911244	2.255171%

-0.600000	244.728995	4.728995	1.804137%
-0.450000	243.546746	3.546746	1.353102%
-0.300000	242.364498	2.364498	0.902068%
-0.150000	241.182249	1.182249	0.451034%
0.000000	240.000000	0.000000	0.000000%
0.150000	238.817751	-1.182249	-0.451034%
0.300000	237.635502	-2.364498	-0.902068%
0.450000	236.453254	-3.546746	-1.353102%
0.600000	235.271005	-4.728995	-1.804137%
0.750000	234.088756	-5.911244	-2.255171%
0.900000	232.906507	-7.093493	-2.706205%
1.050000	231.724258	-8.275742	-3.157239%
1.200000	230.542009	-9.457991	-3.608273%
1.350000	229.359761	-10.640239	-4.059307%
1.500000	228.177512	-11.822488	-4.510342%

由表（3.4）可以初步看出  $y$  和  $y_0$  之间是线性的关系，但  $y$  离两个坐标轴的距离与  $y_0$  的关系还不甚明晰，和在检测  $x$  与  $x_0$  的关系时一样，我另外用了方形的定标系统，来讨论  $y$  和  $y_0$  的关系，图（3.4）。线一、线二和线三的定义如图，对应的照片上的点分别为点 1、点 2、点 3，其中线一是  $y$  坐标为 0， $x$  坐标绝对值为  $d$  的点对  $y_0$  的影响；线二是  $x$  和  $y$  坐标绝对值都为  $d$  的点对  $y_0$  的影响；线三是  $x$  坐标为 0， $y$  坐标绝对值为  $d$  的点对  $x_0$  的影响。从图中可以看出点的  $y$  坐标绝对值越小对  $y_0$  的影响越大， $x$  坐标绝对值越小对  $y_0$  的影响越小。具体数据可以参见表（3.5），表中的  $y$  的偏差是指计算时用的  $y$  值与标准值之间的差，单位是像素； $y_0$  的误差是指用有偏差的  $y$  值计算出来的  $y_0$  值与用标准的  $y$  值计算出来的  $y_0$  的差距。

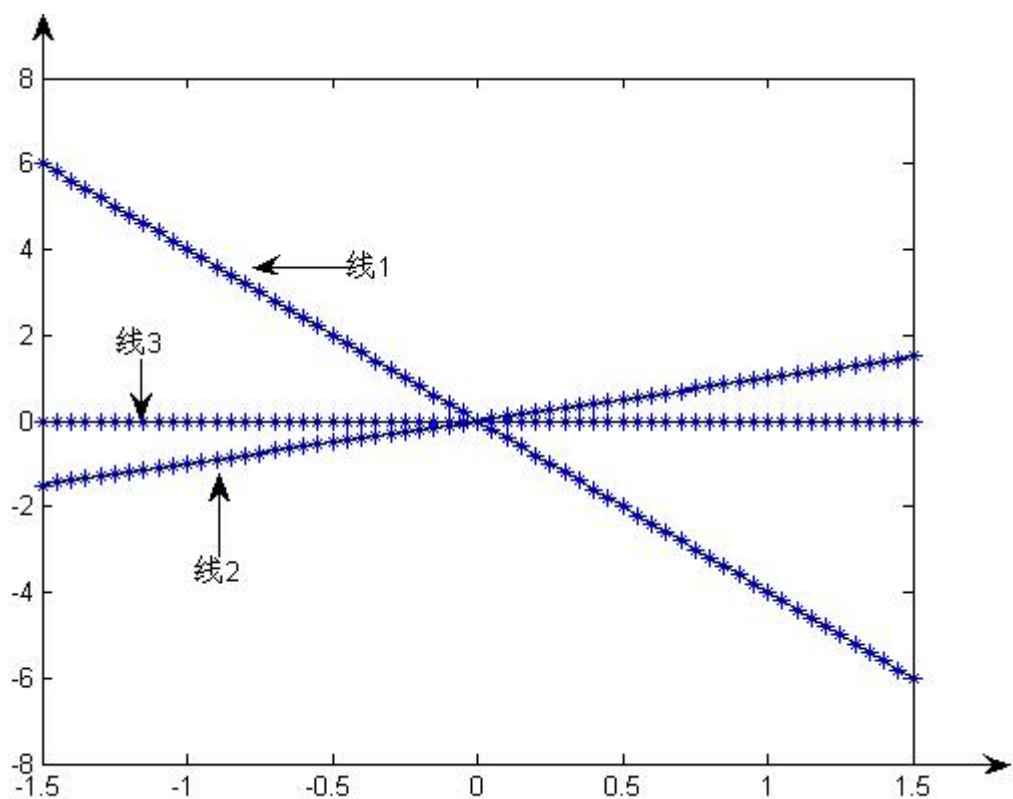


图 (3.4)

点 1:  $x$  坐标绝对值为  $d$  ,  $y$  坐标为 0

点 2:  $x$  和  $y$  坐标绝对值都为  $d$

点 3:  $x$  坐标为 0,  $y$  坐标绝对值为  $d$

横坐标表示  $y$  的偏差, 纵坐标表示  $y_0$  的误差

表 (3.5)

$y$ 的偏差 (象素)	$y_0$ 的误差 (点 1)	$y_0$ 的误差 (点 2)	$y_0$ 的误差 (点 3)
-1.500000	6.003556	-1.499112	0.000000
-1.350000	5.403200	-1.349201	0.000000
-1.200000	4.802845	-1.199290	0.000000
-1.050000	4.202489	-1.049379	0.000000
-0.900000	3.602133	-0.899467	0.000000
-0.750000	3.001778	-0.749556	0.000000
-0.600000	2.401422	-0.599645	0.000000
-0.450000	1.801067	-0.449734	0.000000
-0.300000	1.200711	-0.299822	0.000000
-0.150000	0.600356	-0.149911	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.150000	-0.600356	0.149911	0.000000
0.300000	-1.200711	0.299822	0.000000
0.450000	-1.801067	0.449734	0.000000
0.600000	-2.401422	0.599645	0.000000

0.750000	-3.001778	0.749556	0.000000
0.900000	-3.602133	0.899467	0.000000
1.050000	-4.202489	1.049379	0.000000
1.200000	-4.802845	1.199290	0.000000
1.350000	-5.403200	1.349201	0.000000
1.500000	-6.003556	1.499112	0.000000

立方体定标中不同的点的 x 的偏差对 y0 的影响

由以上的实验可以得出, y 的取值和 y0 的关系是 $|\Delta y_0| = |k \Delta y|$ , k 的值由所取的点的 x 坐标和 y 坐标决定, 所以整个方程也可以表示为

$$|\Delta y_0| = |f(|x|, |y|) * \Delta y|$$

其中  $f(|x|, |y|)$  是关于  $|y|$  的递减函数, 关于  $|x|$  的递增函数, 而且  $|y|$  的影响比  $|x|$  要大。

当不只一个 y 值有偏差是, 两个 y 的偏差方向如果相同则造成误差叠加, 相反则造成误差相消, 具体数据见表 (3.6), 其中 y 的偏差是指计算时用的 y 值与标准值之间的差, 单位是像素; 标有点 1 和点 2 的是点单独对 y0 造成的影响, 标有同向的是两个点的 y 偏差都是朝着 y 轴正方向 / 反方向, 然后这两个偏差联合对 y0 造成的影响, 标有异向的是两个点的 y 偏差方向相反, 然后这两个偏差联合对 y0 造成的影响。

表 (3.6)

y 的偏差	y0 的误差 (点 1)	y0 的误差 (点 2)	y0 的误差 (同向)	y0 的误差 (异向)
-1.500000	-1.499112	-1.499112	-2.998224	0.000000
-1.350000	-1.349201	-1.349201	-2.698402	0.000000
-1.200000	-1.199290	-1.199290	-2.398579	0.000000
-1.050000	-1.049379	-1.049379	-2.098757	0.000000
-0.900000	-0.899467	-0.899467	-1.798935	0.000000
-0.750000	-0.749556	-0.749556	-1.499112	0.000000
-0.600000	-0.599645	-0.599645	-1.199290	0.000000
-0.450000	-0.449734	-0.449734	-0.899467	0.000000
-0.300000	-0.299822	-0.299822	-0.599645	0.000000
-0.150000	-0.149911	-0.149911	-0.299822	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.150000	0.149911	0.149911	0.299822	0.000000
0.300000	0.299822	0.299822	0.599645	0.000000
0.450000	0.449734	0.449734	0.899467	0.000000
0.600000	0.599645	0.599645	1.199290	0.000000
0.750000	0.749556	0.749556	1.499112	0.000000
0.900000	0.899467	0.899467	1.798935	0.000000
1.050000	1.049379	1.049379	2.098757	0.000000
1.200000	1.199290	1.199290	2.398579	0.000000
1.350000	1.349201	1.349201	2.698402	0.000000
1.500000	1.499112	1.499112	2.998224	0.000000

几个点偏差的联合对 y0 造成的影响

总体来说, m 个点的 y 的偏差对 y0 的影响可以表示成 $|\Delta y_0| = |f(|x_1|, |y_1|) * \Delta y_1 + f(|x_2|, |y_2|) * \Delta y_2 + \dots + f(|x_m|, |y_m|) * \Delta y_m|$ 。

x 的偏差对 y0 不造成任何影响。

1.1.3 照片参数输入偏差对相机平台高度参数的影响

选取点的 x 的偏差对 ycr 的影响和实际的标准 ycr 的值相关,但是由于实际拍照实验时,相机和平台几乎是位于一个水平面上的, ycr 的值几乎为 0, 而且在 1.5 像素的误差范围内,精确到小数点后六位依然是 0, 所以产生的只是微量的误差。

选取点的 y 的偏差对 ycr 的影响和 x 产生的误差不同, y 偏差对 ycr 的影响不是微量的,具体见图 (3.5), 两条线斜率绝对值大的是位于 x 轴上的点, 斜率的绝对值小的是在 y 轴上的点, 可以看出, 在 y 轴上的点 y 取值有微小的偏差时, 对 y0 的影响几乎没有, 和参数对相机中心参数 y0 的影响较为相似, 只不过波动范围要相对较小。具体的数值见表 (3.7), 表中的 y 的偏差是指计算时用的 y 值与标准值之间的差, 单位是像素; ycr 的值是指用有偏差的 y 值计算出来的参数; ycr 的误差是指用有偏差的 y 值计算出来的 ycr 值与用标准的 y 值计算出来的 ycr 的差距, 因为标准的 ycr 值是 0, 所以无法计算百分比。

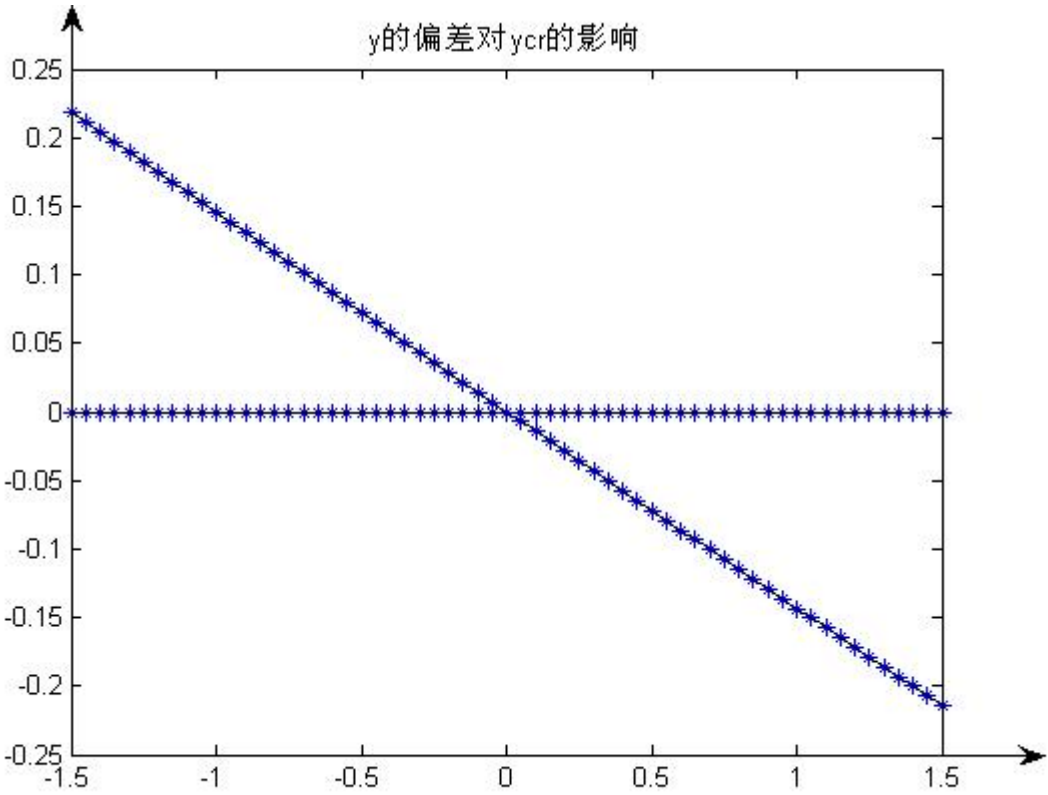


图 (3.5)  
横坐标表示 y 的偏差, 纵坐标表示 ycr 的误差

表 (2.7)

y 的偏差 (像素)	ycr 的值	ycr 的误差
-1.500000	0.218851	0.218851
-1.350000	0.196758	0.196758
-1.200000	0.174711	0.174711
-1.050000	0.152710	0.152710
-0.900000	0.130756	0.130756



-0.750000	0.108849	0.108849
-0.600000	0.086987	0.086987
-0.450000	0.065172	0.065172
-0.300000	0.043402	0.043402
-0.150000	0.021678	0.021678
0.000000	0.000000	0.000000
0.150000	-0.021633	-0.021633
0.300000	-0.043220	-0.043220
0.450000	-0.064763	-0.064763
0.600000	-0.086260	-0.086260
0.750000	-0.107713	-0.107713
0.900000	-0.129121	-0.129121
1.050000	-0.150484	-0.150484
1.200000	-0.171803	-0.171803
1.350000	-0.193077	-0.193077
1.500000	-0.214308	-0.214308

y 对 ycr 的影响

对用立方体定标产生的效果和  $y_0$  相似，对应的函数表达式也和  $y_0$  相似，可以参见上一个小结，这里不再详细描述。

#### 1.1.4 照片参数输入偏差对距离倒数参数的影响

距离的倒数，用  $k$  表示，经过数据表明是对物体大小敏感的一个参数，物体各种定标的参数的偏差，如果偏差的结果是物体变大了，那么  $k$  的值就会相应的变小，用于定标的球体如果只是半径参数的变化，那么仅对物理参数  $k$  造成影响，球体半径偏差 100%，那么  $k$  就会变为原来的 50%。所以可以预见，在  $k$  参数发生偏差的时候只有重构物体的尺寸会受到影响。可以用式子表示成为  $k'/k = \text{size}/\text{size}'$ ，其中  $k$  和  $\text{size}$  分别表示标准的参数和物体尺寸， $k'$  和  $\text{size}'$  表示带有误差的参数和物体尺寸。

#### 1.1.5 照片参数输入偏差对 $cx/cy$ 的影响

$cx/cy$  是横纵缩放比，所以两个相片的  $x$  坐标同向移动相同距离或者  $y$  坐标同向移动相同距离不会对它产生影响，相对的，如果两个  $x$  坐标的误差导致结果是  $x$  间的距离减小了，那么  $cx/cy$  就会比标准值要大，结果是  $y$  间的距离增大了，那么  $cx/cy$  就会比标准值要小。具体见图 (3.6)，其中横坐标表示膨胀的程度（如果是负的则表示缩小），纵坐标表示  $cx/cy$  的误差。具体的数据见表 (3.8)，表中还列出了  $x$ 、 $y$  同时产生误差时的情况，其中膨胀程度单位为像素，标有“同向”的数据栏里是  $x$  和  $y$  同时膨胀或者收缩时的情况，标有“异向”的数据栏里则时  $x$ 、 $y$  其中一个膨胀，一个收缩的情况。

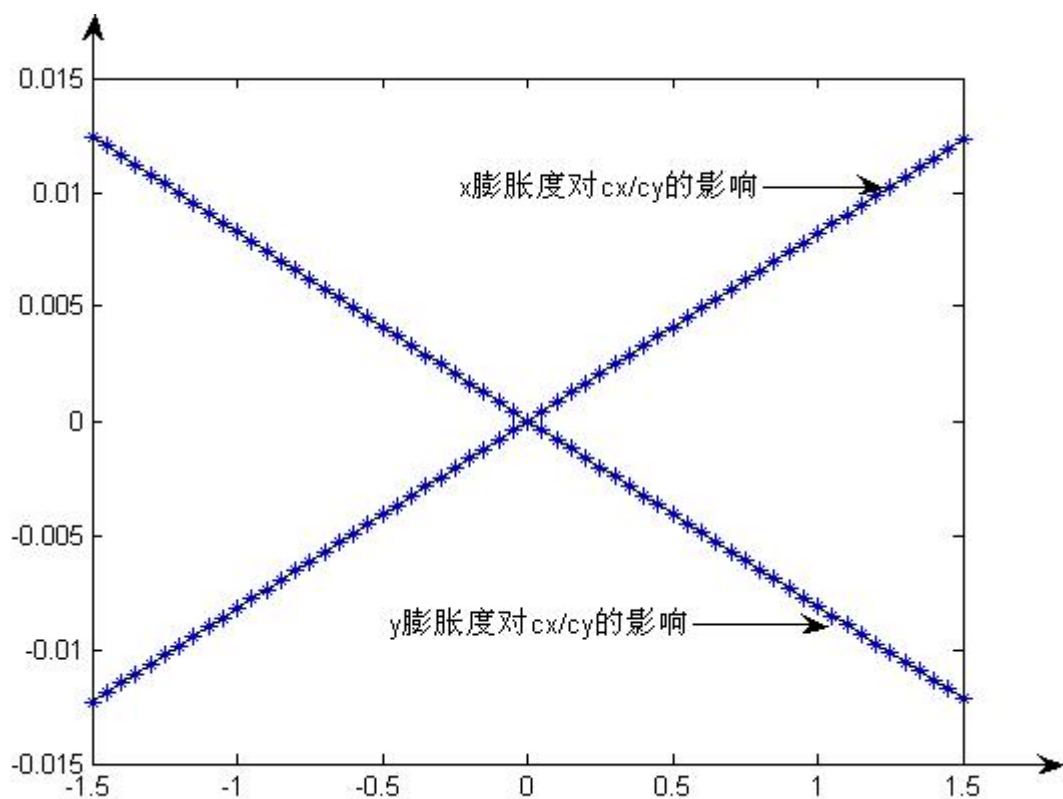


图 (3.6)

表 (3.8)

膨胀度	x 引起的误差	y 引起的误差	x、y 的误差 (同向)	x、y 的误差 (异向)
-1.50000	0.012448	-0.012295	0.000000	0.024896
-1.35000	0.011189	-0.011066	0.000000	0.022379
-1.20000	0.009934	-0.009836	0.000000	0.019868
-1.05000	0.008681	-0.008607	0.000000	0.017363
-0.90000	0.007432	-0.007377	0.000000	0.014864
-0.75000	0.006186	-0.006148	0.000000	0.012371
-0.60000	0.004942	-0.004918	0.000000	0.009885
-0.45000	0.003702	-0.003689	0.000000	0.007404
-0.30000	0.002465	-0.002459	0.000000	0.004930
-0.15000	0.001231	-0.001230	0.000000	0.002462
0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.15000	-0.001228	0.001230	0.000000	-0.002456
0.30000	-0.002453	0.002459	0.000000	-0.004906
0.45000	-0.003675	0.003689	0.000000	-0.007350
0.60000	-0.004894	0.004918	0.000000	-0.009788
0.75000	-0.006110	0.006148	0.000000	-0.012220
0.90000	-0.007323	0.007377	0.000000	-0.014646
1.05000	-0.008533	0.008607	0.000000	-0.017066
1.20000	-0.009740	0.009836	0.000000	-0.019481
1.35000	-0.010944	0.011066	0.000000	-0.021889

1.500000	-0.012146	0.012295	0.000000	-0.024291
----------	-----------	----------	----------	-----------

$x,y$  的收缩和膨胀对  $cx/cy$  的影响

整个影响如果表示成为函数的话是  $cx/cy = f(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$ ，函数对于  $|x_1-x_2|$  单调递增，对于  $|y_1-y_2|$  单调递减。

### 1.2 三维坐标偏差对参数的影响

三维坐标中接近 0 的点如果产生微小误差会使得方程得解的误差迅速放大,造成不可估计的影响,有时可能使得所有计算所得的参数错误而不只是产生误差,所以这种情况应尽可能地避免,下面讨论的,是三维坐标点  $x,y$  不为 0 的情况,即离  $x,y$  轴都较远的地方取到的点,有微小偏差导致的误差。

#### 1.2.1 三维坐标的偏差对相机中心参数 $x_0$ 的影响

计算坐标时,  $X$  的偏差对相机中心参数  $x_0$  的影响见图 (3.7), 三维坐标中的  $X$  对  $x_0$  的影响方式和二维坐标中的  $x$  相似。具体数据可以参见表 (3.9), 表中的  $X$  的偏差是指计算时用的  $X$  值与标准值之间的差, 单位是 mm;  $x_0$  的值是指用有偏差的  $X$  值计算出来的参数;  $x_0$  的误差是指用有偏差的  $X$  值计算出来的  $x_0$  值与用标准的  $X$  值计算出来的  $x_0$  的差距; 误差百分比是  $x_0$  的误差与标准  $x_0$  的比值。

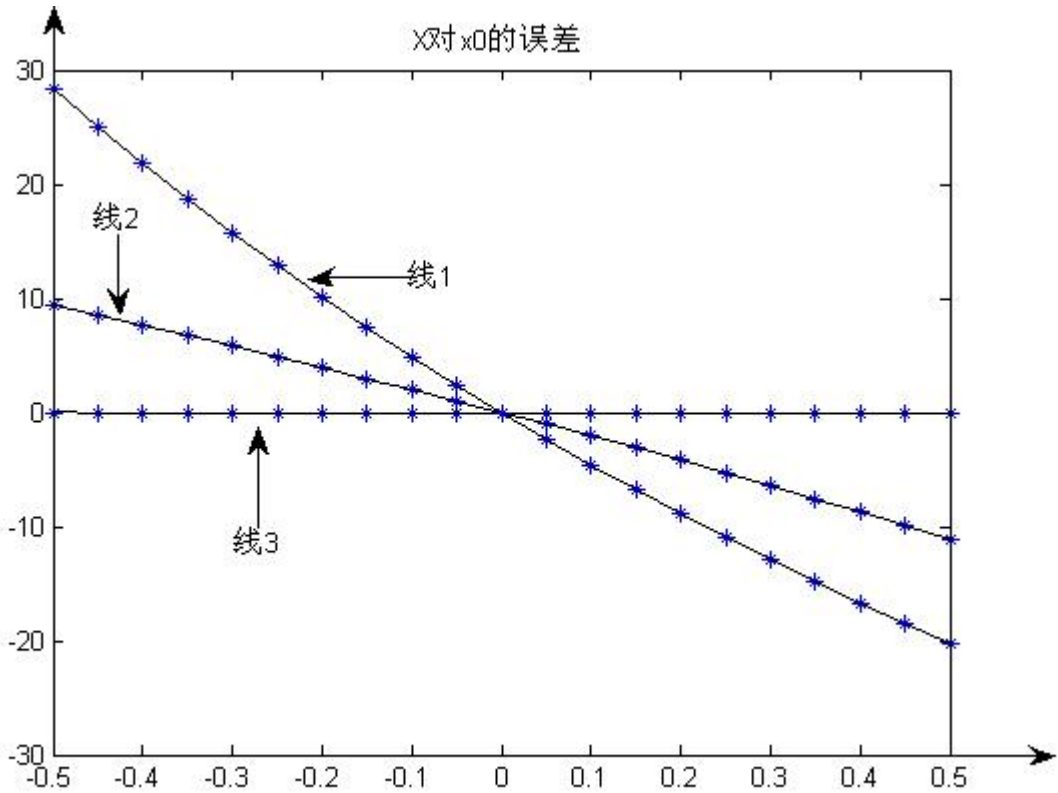


图 (3.7)

点 1:  $X$  坐标为 0,  $Y$  坐标绝对值为  $d$

点 2:  $X$  和  $Y$  坐标绝对值都为  $d$

点 3:  $X$  坐标绝对值为  $d$ ,  $Y$  坐标为 0

横坐标表示  $X$  的偏差, 纵坐标表示  $x_0$  的误差

表 (3.9)

X 的偏差 (mm)	x0 的误差 (点 1)	x0 的误差 (点 2)	x0 的误差 (点 3)
-0.500000	28.400000	9.384615	0.000000
-0.450000	25.058824	8.511628	0.000000
-0.400000	21.846154	7.625000	0.000000
-0.350000	18.754717	6.724409	0.000000
-0.300000	15.777778	5.809524	0.000000
-0.250000	12.909091	4.880000	0.000000
-0.200000	10.142857	3.935484	0.000000
-0.150000	7.473684	2.975610	0.000000
-0.100000	4.896552	2.000000	0.000000
-0.050000	2.406780	1.008264	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.050000	-2.327869	-1.025210	0.000000
0.100000	-4.580645	-2.067797	0.000000
0.150000	-6.761905	-3.128205	0.000000
0.200000	-8.875000	-4.206897	0.000000
0.250000	-10.923077	-5.304348	0.000000
0.300000	-12.909091	-6.421053	0.000000
0.350000	-14.835821	-7.557522	0.000000
0.400000	-16.705882	-8.714286	0.000000
0.450000	-18.521739	-9.891892	0.000000
0.500000	-20.285714	-11.090909	0.000000

立方体定标中不同的点的 X 的偏差对 x0 的影响

由以上的实验可以得出, X 对 x0 的影响虽然是接近线性的, 但并不像照片坐标点 x 对 x0 完全是线性的, 它可以用函数 $|\Delta x_0| = f(g(|X|, |Y|), |\Delta X|)$ 来表示, 其中  $g(|X|, |Y|)$ 是关于 $|X|$ 的递减函数, 关于 $|Y|$ 的递增函数; 而函数  $f$  是关于  $g$  和 $|\Delta X|$ 的递增函数。

当不只一个 X 值有偏差是, 两个 X 的偏差方向如果相同则造成误差叠加, 相反则造成误差相消, 具体数据见表 (3.10), 其中 x 的偏差是指计算时用的 X 值与标准值之间的差, 单位是像素; 标有点 1 和点 2 的是点单独对 x0 造成的影响, 标有同向的是两个点的 X 偏差都是朝着 X 轴正方向 / 反方向, 然后这两个偏差联合对 x0 造成的影响, 标有异向的是两个点的 X 偏差方向相反, 然后这两个偏差联合对 x0 造成的影响。

表 (3.10)

X 的偏差	x0 的误差 (点 1)	x0 的误差 (点 2)	x0 的误差 (同向)	x0 的误差 (异向)
-0.500000	9.384615	11.090909	20.333333	0.000000
-0.450000	8.511628	9.891892	18.300000	0.000000
-0.400000	7.625000	8.714286	16.266667	0.000000
-0.350000	6.724409	7.557522	14.233333	0.000000
-0.300000	5.809524	6.421053	12.200000	0.000000
-0.250000	4.880000	5.304348	10.166667	0.000000
-0.200000	3.935484	4.206897	8.133333	0.000000
-0.150000	2.975610	3.128205	6.100000	0.000000

-0.100000	2.000000	2.067797	4.066667	0.000000
-0.050000	1.008264	1.025210	2.033333	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.050000	-1.025210	-1.008264	-2.033333	0.000000
0.100000	-2.067797	-2.000000	-4.066667	0.000000
0.150000	-3.128205	-2.975610	-6.100000	0.000000
0.200000	-4.206897	-3.935484	-8.133333	0.000000
0.250000	-5.304348	-4.880000	-10.166667	0.000000
0.300000	-6.421053	-5.809524	-12.200000	0.000000
0.350000	-7.557522	-6.724409	-14.233333	0.000000
0.400000	-8.714286	-7.625000	-16.266667	0.000000
0.450000	-9.891892	-8.511628	-18.300000	0.000000
0.500000	-11.090909	-9.384615	-20.333333	0.000000

几个点偏差的联合对  $x_0$  造成的影响

总体来说， $m$  个点的  $X$  的偏差对  $x_0$  的影响可以表示成  $|\Delta x_0| = f(g(|X_1|, |Y_1|), |\Delta X_1|) + f(g(|X_2|, |Y_2|), |\Delta X_2|) + \dots + f(g(|X_m|, |Y_m|), |\Delta X_m|)$ 。

$X$  的偏差对  $y_0$  不造成任何影响。

### 1.2.2 三维坐标的偏差对相机中心参数 $y_0$ 的影响

计算坐标时， $Y$  的偏差对相机中心参数  $y_0$  的影响见图 (3.8)，和  $x_0$  类似的，三维坐标中的  $Y$  对  $y_0$  的影响方式和二维坐标中的  $y$  相似。具体数据可以参见表 (3.11)，表中的  $Y$  的偏差是指计算时用的  $Y$  值与标准值之间的差，单位是 mm； $y_0$  的值是指用有偏差的  $Y$  值计算出来的参数； $y_0$  的误差是指用有偏差的  $Y$  值计算出来的  $y_0$  值与用标准的  $Y$  值计算出来的  $y_0$  的差距；误差百分比是  $y_0$  的误差与标准  $y_0$  的比值。

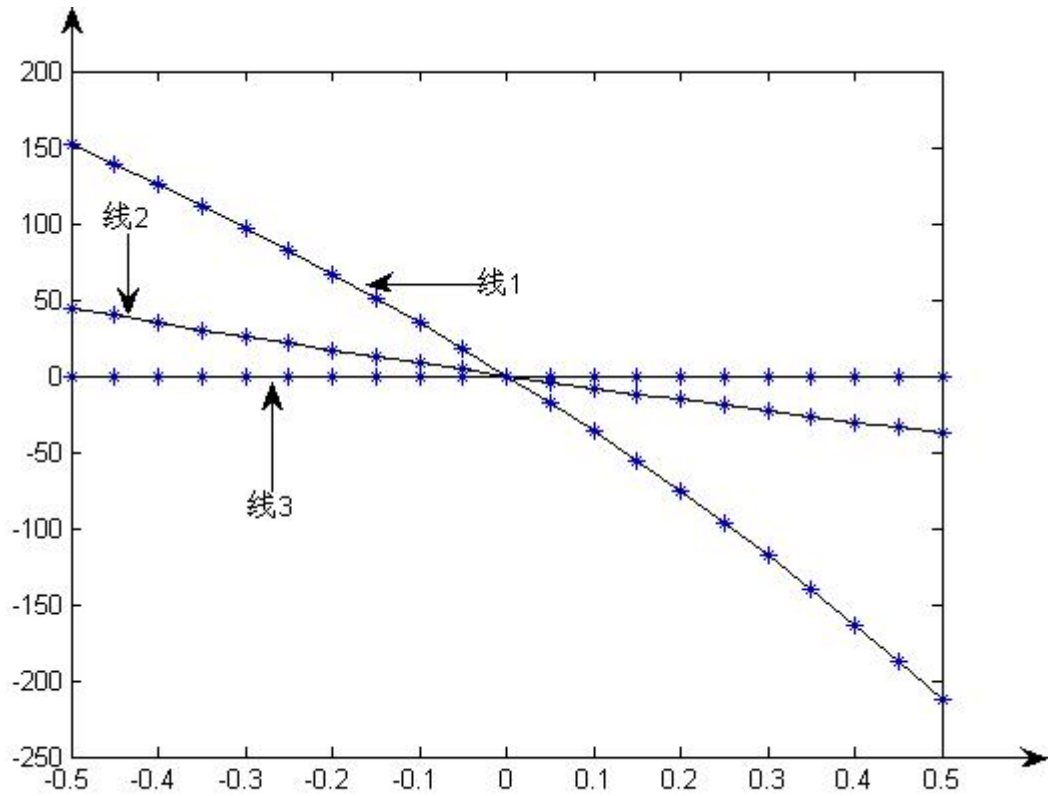


图 (3.8)

点 1: X 坐标绝对值为  $d$  , Y 坐标为 0

点 2: X 和 Y 坐标绝对值都为  $d$

点 3: X 坐标为 0, Y 坐标绝对值为  $d$

横坐标表示 Y 的偏差, 纵坐标表示  $y_0$  的误差

表 (3.11)

Y 的偏差 (mm)	$y_0$ 的误差 (点 1)	$y_0$ 的误差 (点 2)	$y_0$ 的误差 (点 3)
-0.500000	151.994038	44.389926	0.000000
-0.450000	138.777165	39.591016	0.000000
-0.400000	125.171561	34.877799	0.000000
-0.350000	111.159819	30.248003	0.000000
-0.300000	96.723479	25.699431	0.000000
-0.250000	81.842944	21.229965	0.000000
-0.200000	66.497392	16.837558	0.000000
-0.150000	50.664679	12.520236	0.000000
-0.100000	34.321234	8.276088	0.000000
-0.050000	17.441939	4.103271	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.050000	-18.033191	-4.035448	0.000000
0.100000	-36.688216	-8.004741	0.000000
0.150000	-55.997804	-11.909492	0.000000

0.200000	-75.997019	-15.751264	0.000000
0.250000	-96.723479	-19.531568	0.000000
0.300000	-118.217585	-23.251866	0.000000
0.350000	-140.522790	-26.913577	0.000000
0.400000	-163.685887	-30.518074	0.000000
0.450000	-187.757341	-34.066688	0.000000
0.500000	-212.791654	-37.560707	0.000000

不同的点的 Y 的偏差对 y0 的影响

由以上的实验可以得出，Y 对 y0 的影响虽然是接近线性的，但并不像照片坐标点 y 对 y0 完全是线性的，它可以用函数 $|\Delta y_0| = f(g(|X|, |Y|), |\Delta Y|)$ 来表示，其中  $g(|X|, |Y|)$ 是关于 $|X|$ 的递增函数，关于 $|Y|$ 的递减函数；而函数  $f$  是关于  $g$  和 $|\Delta Y|$ 的递增函数。

当不只一个 Y 值有偏差是，两个 Y 的偏差方向如果相同则造成误差叠加，相反则造成误差相消，具体数据见表（3.12），其中 Y 的偏差是指计算时用的 Y 值与标准值之间的差，单位是像素；标有点 1 和点 2 的是点单独对 y0 造成的影响，标有同向的是两个点的 Y 偏差都是朝着 Y 轴正方向 / 反方向，然后这两个偏差联合对 y0 造成的影响，标有异向的是两个点的 Y 偏差方向相反，然后这两个偏差联合对 y0 造成的影响。

表（3.12）

Y 的偏差	y0 的误差（点 1）	y0 的误差（点 2）	y0 的误差（同向）	y0 的误差（异向）
-0.500000	44.389926	37.560707	81.381532	0.000000
-0.450000	39.591016	34.066688	73.243379	0.000000
-0.400000	34.877799	30.518074	65.105226	0.000000
-0.350000	30.248003	26.913577	56.967072	0.000000
-0.300000	25.699431	23.251866	48.828919	0.000000
-0.250000	21.229965	19.531568	40.690766	0.000000
-0.200000	16.837558	15.751264	32.552613	0.000000
-0.150000	12.520236	11.909492	24.414460	0.000000
-0.100000	8.276088	8.004741	16.276306	0.000000
-0.050000	4.103271	4.035448	8.138153	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.050000	-4.035448	-4.103271	-8.138153	0.000000
0.100000	-8.004741	-8.276088	-16.276306	0.000000
0.150000	-11.909492	-12.520236	-24.414460	0.000000
0.200000	-15.751264	-16.837558	-32.552613	0.000000
0.250000	-19.531568	-21.229965	-40.690766	0.000000
0.300000	-23.251866	-25.699431	-48.828919	0.000000
0.350000	-26.913577	-30.248003	-56.967072	0.000000
0.400000	-30.518074	-34.877799	-65.105226	0.000000
0.450000	-34.066688	-39.591016	-73.243379	0.000000
0.500000	-37.560707	-44.389926	-81.381532	0.000000

几个点偏差的联合对 y0 造成的影响

总体来说，m 个点的 Y 的偏差对 y0 的影响可以表示成 $|\Delta y_0| = f(g(|X_1|, |Y_1|), |\Delta Y_1|) + f(g(|X_2|, |Y_2|), |\Delta Y_2|) + \dots + f(g(|X_m|, |Y_m|), |\Delta Y_m|)$ 。

Y 的偏差对 x0 不造成任何影响。

1.2.3 三维坐标的偏差对相机高度参数的影响

标准参数计算所得的 ycr 非常接近于 0，所以无法用百分比来衡量误差程度。

X 在一定程度上的偏差，对 ycr 不会产生什么影响。

Y 的偏差对 ycr 的影响可以见图 (3.9)，ycr 对于 Y 完全是线性的，这和 Y 对 y0 的影响不同，但和 y 对 ycr 的影响相似。具体数据见表 (3.13)

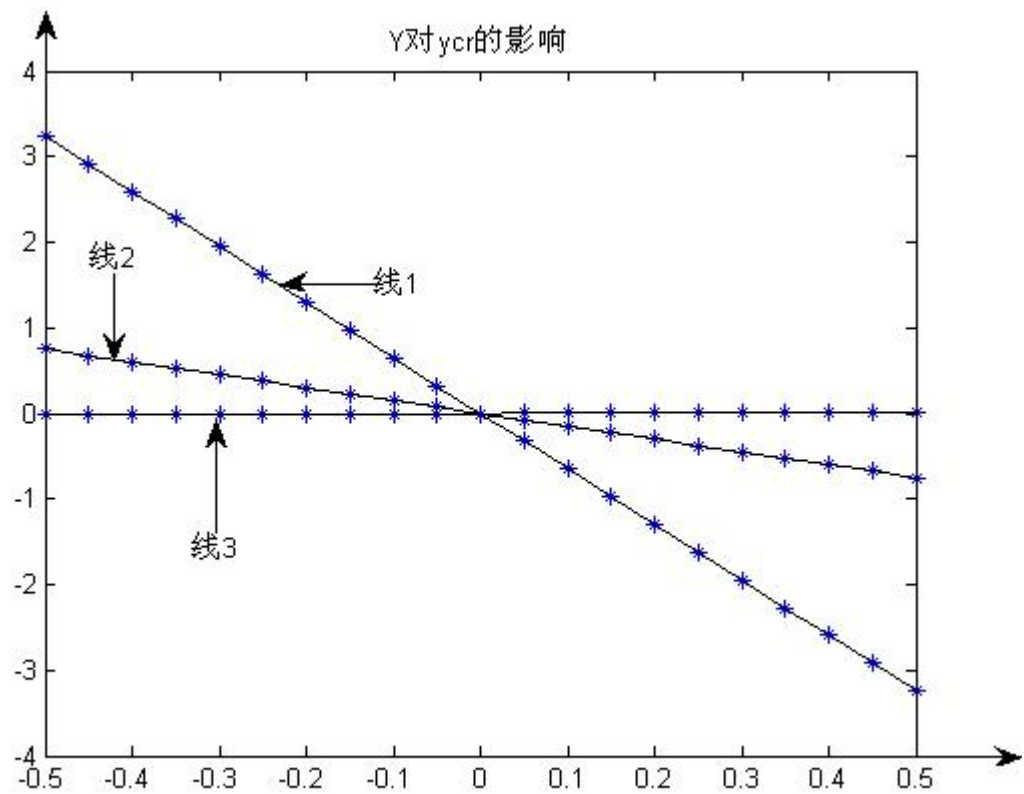


图 (3.9)

表 (3.13)

Y 的偏差 (mm)	ycr 的误差 (点 1)	ycr 的误差 (点 2)	ycr 的误差 (点 3)
-0.500000	3.242652	0.750593	-0.022518
-0.450000	2.918387	0.675533	-0.020267
-0.400000	2.594122	0.600474	-0.018015
-0.350000	2.269857	0.525415	-0.015763
-0.300000	1.945591	0.450356	-0.013511
-0.250000	1.621326	0.375296	-0.011259
-0.200000	1.297061	0.300237	-0.009007
-0.150000	0.972796	0.225178	-0.006756
-0.100000	0.648530	0.150119	-0.004504
-0.050000	0.324265	0.075059	-0.002252
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.050000	-0.324265	-0.075059	0.002252



0.100000	-0.648530	-0.150119	0.004504
0.150000	-0.972796	-0.225178	0.006756
0.200000	-1.297061	-0.300237	0.009007
0.250000	-1.621326	-0.375296	0.011259
0.300000	-1.945591	-0.450356	0.013511
0.350000	-2.269857	-0.525415	0.015763
0.400000	-2.594122	-0.600474	0.018015
0.450000	-2.918387	-0.675533	0.020267
0.500000	-3.242652	-0.750593	0.022518

Y 的偏差对 ycr 的影响

当不只一个 Y 值有偏差是，两个 Y 的偏差方向如果相同则造成误差叠加，相反则造成误差相消，具体数据见表（3.14），其中 Y 的偏差是指计算时用的 Y 值与标准值之间的差，单位是像素；标有点 1 和点 2 的是点单独对 ycr 造成的影响，标有同向的是两个点的 Y 偏差都是朝着 Y 轴正方向 / 反方向，然后这两个偏差联合对 ycr 造成的影响，标有异向的是两个点的 Y 偏差方向相反，然后这两个偏差联合对 ycr 造成的影响。

表（3.14）

Y 的偏差	ycr 的误差(点 1)	ycr 的误差(点 2)	ycr 的误差（同向）	ycr 的误差（异向）
-0.500000	0.750593	0.750593	1.501185	0.000000
-0.450000	0.675533	0.675533	1.351067	0.000000
-0.400000	0.600474	0.600474	1.200948	0.000000
-0.350000	0.525415	0.525415	1.050830	0.000000
-0.300000	0.450356	0.450356	0.900711	0.000000
-0.250000	0.375296	0.375296	0.750593	0.000000
-0.200000	0.300237	0.300237	0.600474	0.000000
-0.150000	0.225178	0.225178	0.450356	0.000000
-0.100000	0.150119	0.150119	0.300237	0.000000
-0.050000	0.075059	0.075059	0.150119	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.050000	-0.075059	-0.075059	-0.150119	0.000000
0.100000	-0.150119	-0.150119	-0.300237	0.000000
0.150000	-0.225178	-0.225178	-0.450356	0.000000
0.200000	-0.300237	-0.300237	-0.600474	0.000000
0.250000	-0.375296	-0.375296	-0.750593	0.000000
0.300000	-0.450356	-0.450356	-0.900711	0.000000
0.350000	-0.525415	-0.525415	-1.050830	0.000000
0.400000	-0.600474	-0.600474	-1.200948	0.000000
0.450000	-0.675533	-0.675533	-1.351067	0.000000
0.500000	-0.750593	-0.750593	-1.501185	0.000000

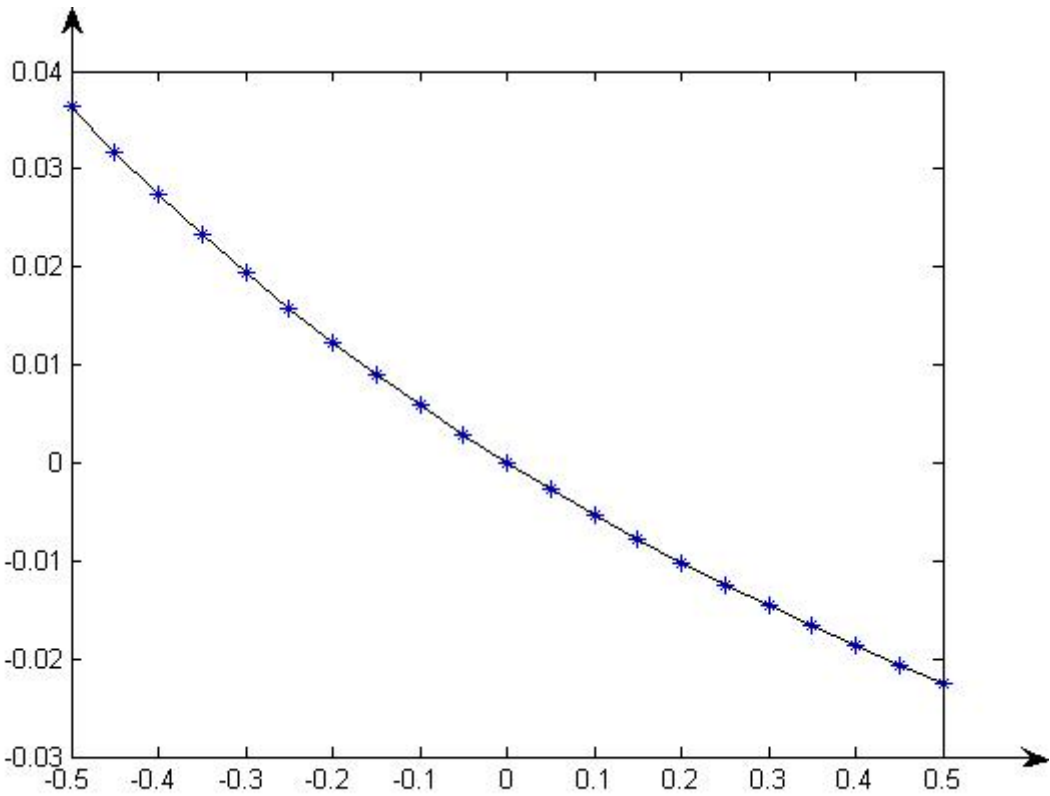
几个点偏差的联合对 y0 造成的影响

对相机宽高比和距离的影响和照片上的点的影响类似，这里不再赘述。

1.2.4 Z 坐标的偏差对相机参数影响

因为 Z 坐标是表示深度的坐标，在二维相片中对应的关系不容易找，为了保证参数计算的精确性，尽量取 Z 值为 0 的点参加计算。但是如果所有的点都取 Z 为 0，则 k 和 ycr 无法计算得出，所以至少要有一个点的 Z 值不为 0。

点 Z 的参数对 x0,y0 没有影响,虽然对 cx,cy 分别有影响，但对 cx/cy 没有影响，只对 k（距离的倒数）有影响，见图（3.10），横坐标代表 Z 的偏差，单位是 mm；纵坐标代表 K 的偏差。具体的数据见表（3.15）。



图（3.10）

横坐标代表 Z 的偏差，单位是 mm

纵坐标代表 K 的偏差

表（3.15）

z 的偏差	k 的值	k 的误差	误差百分比
-0.500000	0.154104	0.036323	30.839063%
-0.450000	0.149494	0.031712	26.924820%
-0.400000	0.145151	0.027370	23.237976%
-0.350000	0.141054	0.023273	19.759272%
-0.300000	0.137182	0.019400	16.471567%
-0.250000	0.133516	0.015735	13.359551%
-0.200000	0.130042	0.012260	10.409508%
-0.150000	0.126743	0.008962	7.609113%
-0.100000	0.123608	0.005827	4.947261%
-0.050000	0.120624	0.002843	2.413919%

0.000000	0.117781	0.000000	0.000000%
0.050000	0.115069	-0.002712	-2.302746%
0.100000	0.112479	-0.005302	-4.501827%
0.150000	0.110003	-0.007778	-6.604088%
0.200000	0.107634	-0.010148	-8.615786%
0.250000	0.105364	-0.012417	-10.542650%
0.300000	0.103188	-0.014593	-12.389934%
0.350000	0.101101	-0.016681	-14.162470%
0.400000	0.099096	-0.018686	-15.864704%
0.450000	0.097169	-0.020613	-17.500737%
0.500000	0.095315	-0.022466	-19.074357%

总结而言 Z 和 k 的关系应该为  $\Delta k = f(\Delta Z)$ , 函数递减。

## 1.2 DDD

## 2. 输入参数偏差对 DLT 参数的影响

物理参数对 DLT 参数的影响由公式 (3.1) 可以直观的看出来, 通过输入参数对物理参数的影响情况的分析。

$$\left\{ \begin{array}{l} L = A(\sin^2\beta - \cos^2\beta) \\ L_1 = (-x_0\sin\beta - c_x\cos\beta)/L \\ L_2 = 0 \\ L_3 = (x_0\cos\beta - c_x\sin\beta)/L \\ L_4 = A/L(x_0(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2c_x\sin\beta\cos\beta) = x_0 + 2\frac{c_x\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta - \cos^2\beta} \\ L_5 = -y_0\sin\beta/L \\ L_6 = -c_y/L \\ L_7 = y_0\cos\beta/L \\ L_8 = A/L(y_0(\sin^2\beta - \cos^2\beta)) + c_y y_{cr}/L = y_0 + c_y y_{cr}/L \\ L_9 = -\sin\beta/L \\ L_{10} = 0 \\ L_{11} = \cos\beta/L \end{array} \right.$$

公式 (3.1)

其中 A 为相机中心到转台中心的距离, 即物理参数 1/k,  $\beta$  是相机从起始位置转过的角度, 定标时  $\beta$  取 0 值。x0、y0、cx、cy 是对应的物理参数。

我们也可以得到输入参数对 DLT 参数的直接影响, 以和输入引起的物理误差相对照。由于初始条件的影响, L2,L5,L9,L10 和 xcr 始终被赋为 0 值, 也不会产生误差。以 x 的偏差引起的 DLT 参数的误差为例, 表 (3.16)

表 (3.16)

x 偏差	L1 误差	L3 误差	L4 误差	L7 误差	L11 误差	zcr 误差
-1.50	-1.0563%	14.3974%	-0.4702%	14.4887%	14.9378%	-12.9964%
-1.35	-0.9507%	12.9811%	-0.4231%	13.0565%	13.4612%	-11.8641%
-1.20	-0.8450%	11.5596%	-0.3761%	11.6206%	11.9808%	-10.6990%

-1.05	-0.7394%	10.1330%	-0.3291%	10.1810%	10.4967%	-9.4995%
-0.90	-0.6338%	8.7012%	-0.2821%	8.7378%	9.0087%	-8.2642%
-0.75	-0.5281%	7.2641%	-0.2351%	7.2908%	7.5169%	-6.9913%
-0.60	-0.4225%	5.8219%	-0.1880%	5.8402%	6.0212%	-5.6793%
-0.45	-0.3169%	4.3743%	-0.1410%	4.3858%	4.5217%	-4.3261%
-0.30	-0.2112%	2.9215%	-0.0940%	2.9276%	3.0184%	-2.9299%
-0.15	-0.1056%	1.4634%	-0.0470%	1.4657%	1.5111%	-1.4886%
0.00	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
0.15	0.1056%	-1.4688%	0.0470%	-1.4695%	-1.5150%	1.5383%
0.30	0.2112%	-2.9429%	0.0940%	-2.9428%	-3.0340%	3.1289%
0.45	0.3169%	-4.4223%	0.1410%	-4.4199%	-4.5569%	4.7745%
0.60	0.4225%	-5.9072%	0.1880%	-5.9009%	-6.0838%	6.4779%
0.75	0.5281%	-7.3975%	0.2351%	-7.3857%	-7.6147%	8.2423%
0.90	0.6338%	-8.8933%	0.2821%	-8.8744%	-9.1496%	10.0710%
1.05	0.7394%	-10.3945%	0.3291%	-10.3670%	-10.6884%	11.9676%
1.20	0.8450%	-11.9011%	0.3761%	-11.8635%	-12.2313%	13.9359%
1.35	0.9507%	-13.4133%	0.4231%	-13.3639%	-13.7782%	15.9800%
1.50	1.0563%	-14.9311%	0.4702%	-14.8683%	-15.3292%	18.1045%

x 的偏差对 DLT 参数的直接影响

## 四、 参数偏差对重构结果的影响

### 1 物理参数偏差对重构结果的影响

物理参数的偏差会对物体的重构造成直接的影响，图（4.1）是标准参数下重构所得的效果图：



图 4.1

图（4.2）是  $x_0$  偏差 10% 时重构得到的效果，已经看不出原有的形状，在偏差 30% 时，已经完全得不到相交的图形，图（4.3）是它光线相交的结果。



图 4.2

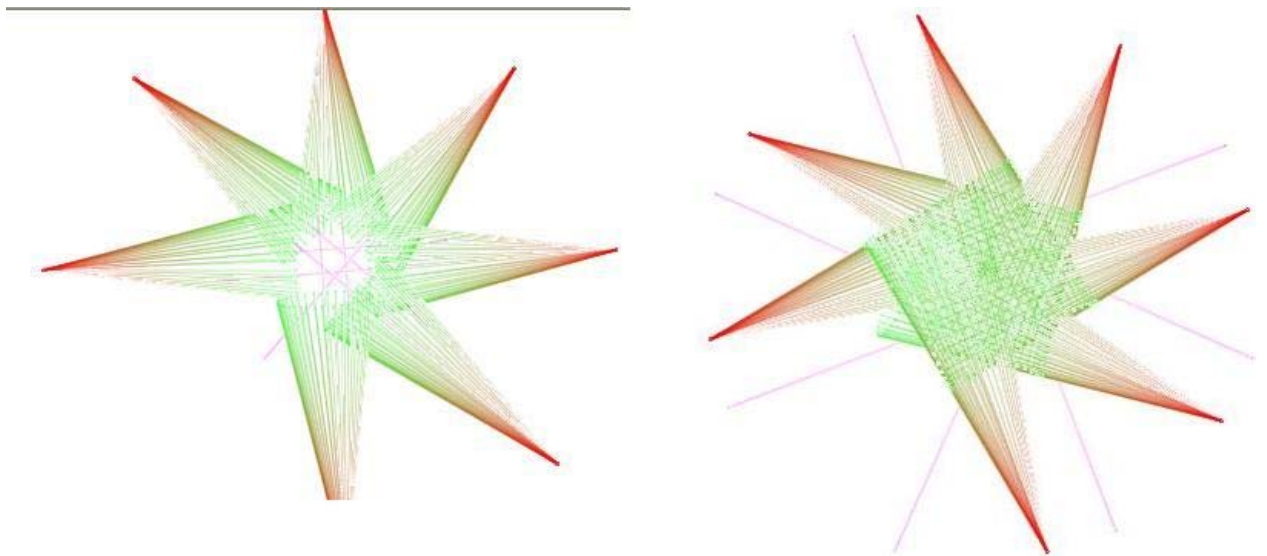
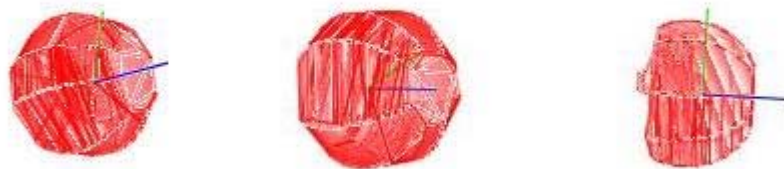


图 4.3

可见  $x_0$  的影响可以使得光柱沿水平方向旋转一个角度，而这种旋转对重构的结果影响非常大，小程度的旋转就可以使得相交部分迅速减小，效果如图（4.1）所示。

图（4.4）从左至右分别是  $y_0$  偏差 10%、30%、50% 的重构结果， $y_0$  的偏差对重构的影响较小，因为  $y_0$  的偏差主要的影响是使得光柱向上偏移一个角度同时范围增大，这两个呈互补的影响使得  $y_0$  的偏差在一定范围内影响较小，但当误差达到 50% 的时候，还是出现底部无法重构的情况。



图（4.4）

图（4.5）第一行从左至右分别是  $c_x$  增大 10%、30%、50% 的重构结果，第二行从左至右是  $c_y$  增大 10%、30%、50% 的重构结果，可以看出，在  $c_x$  增大的过程中整个圆在被压

扁，在  $c_y$  增大的过程中整个圆在被拉长，但圆的总体尺寸都在减小。

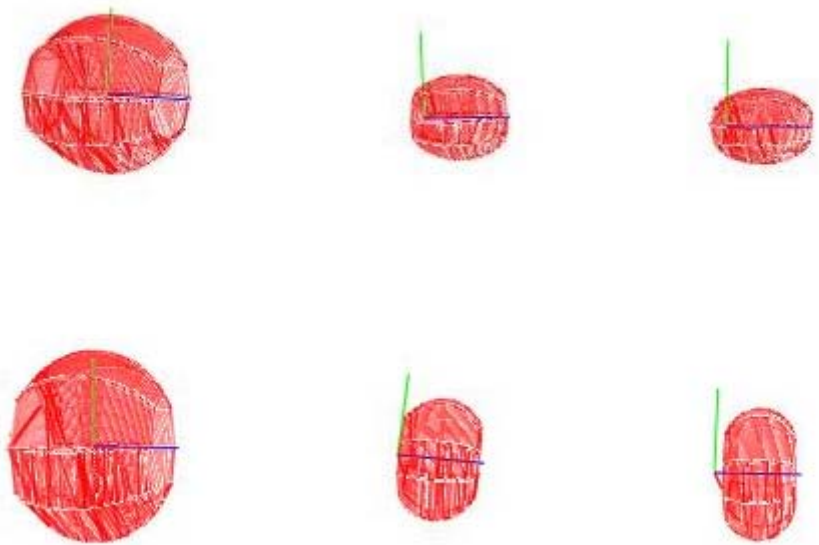


图 4.5

图（4.6）第一行从左至右分别是  $y_{cr}$  增大 10%、30%、50%的重构结果，第二行从左至右是  $k$  增大 10%、30%、50%的重构结果。由图可以看出  $k$  增大的效果是使得物体的整体比例缩小，和参数分析时得到的答案一致， $y_{cr}$  的增大虽然使得球体的尺寸变小，但是它的偏差程度和重构后物体尺寸的偏差程度并不是成比例的。

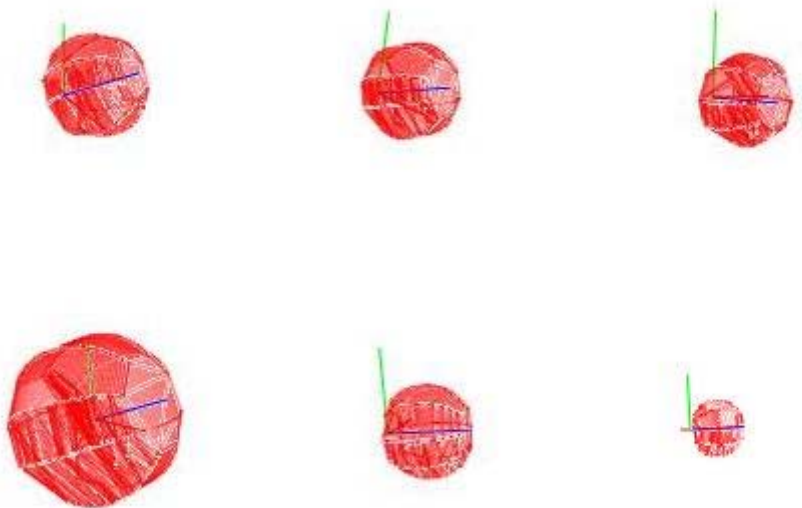


图 4.6

由以上的分析可以得到，在重构过程中，最敏感的物理参数是  $x_0$ ，在误差达到 15%的

时候就无法重构出物体。对物体大小较敏感的参数是  $k$ ，它的变化和重构的物体的大小有密切关系， $y_{cr}$ 、 $c_x$ 、 $c_y$  的偏差也会影响重构物体的大小，但  $c_x$  和  $c_y$  更主要的是影响物体的形态。 $y_0$  的偏差对整个重构过程来说相对要小一些。

## 2 DLT 参数偏差对重构结果的影响

十一个 DLT 参数中， $L_2, L_5, L_9, L_{10}$  和  $x_{cr}$  始终被赋为 0 值，相机参数中， $y_{cr}$  已经在物理参数中讨论过， $x_{cr}$  也是 0 值，所以这里只讨论剩下的 DLT 参数对重构的影响，影响效果图见图 (4.7)。图 (4.7) 中，从左至右分别是偏差 10%、30%、50% 的图，从上到下依次是  $L_1, L_3, L_4, L_6, L_7, L_8, L_{11}, z_{cr}$  偏差时重构的效果。其中  $L_4$  只有一张重构结果，那是当偏差达到 10% 时的重构效果，在 30% 和 50% 时，无法重构出任何结果。

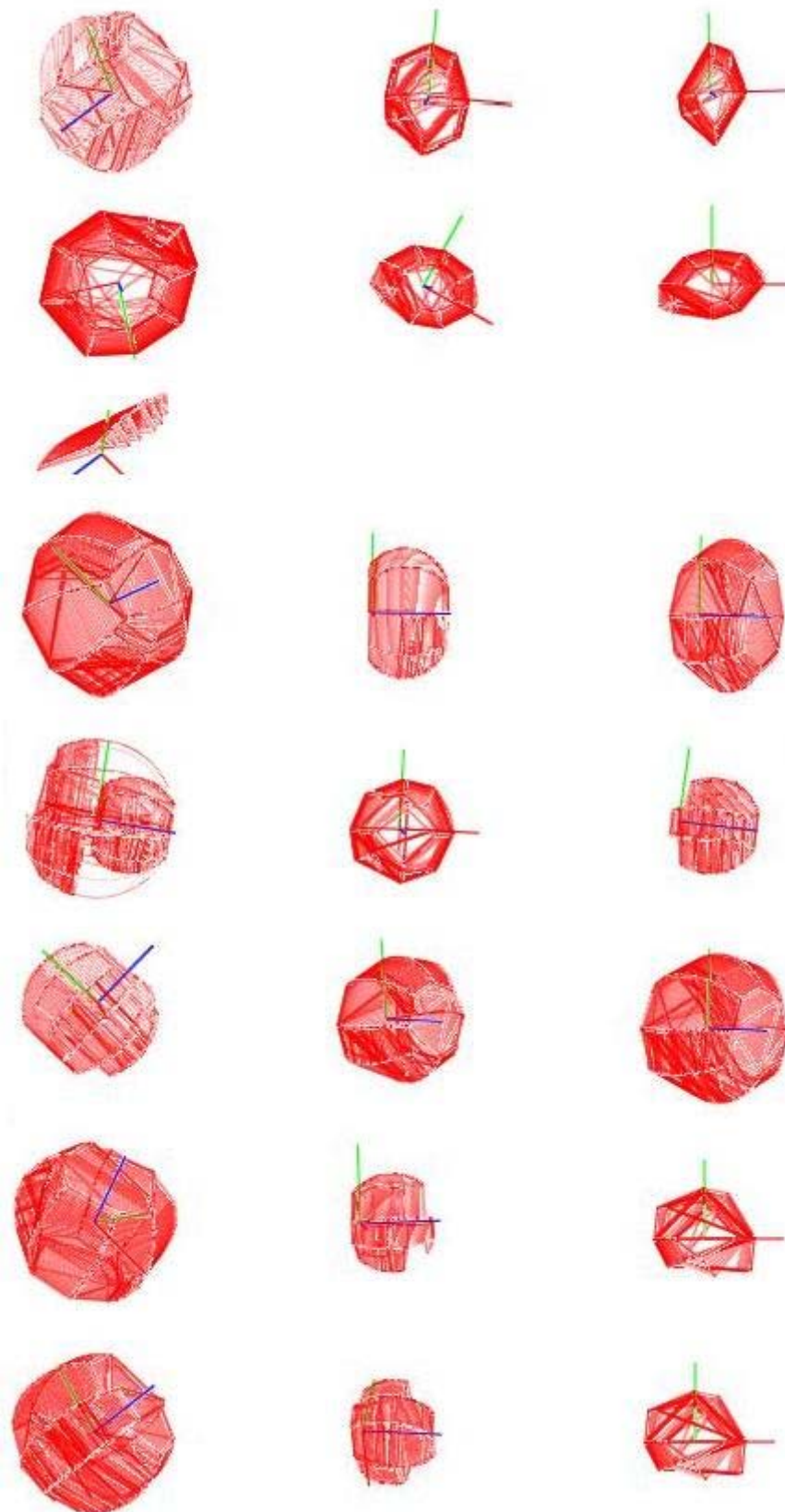


图 4.7

从重构的结果可以看出，虽然无法直接从物理角度推断，但 DLT 参数中对重构影响最大的参数是  $L4$ ，影响较小的是  $L8$ ，这也可能和  $L4$  的计算与  $x_0$  有密切联系，而  $L8$  的值很



大程度上取决于  $y_0$  的值有关，具体见公式（4.1）。

## 五、 误差组合分析程序

以上的分析是按照有规律的数据偏差得出的结论和规律，在实际情况中，不同的输入偏差的组合造成的误差的影响往往不能直接看出来，因此，我写了数据分析的小程序 DataAnalyse，界面如图（）

这个程序的解方程是调用了 matlab 中的算法进行计算，在绝大多数情况下能够进行较为精确地运算。

输入参数

第一个点

标准参数值：  $x_1 = 177, y_1 = 239, X_1 = -3, Y_1 = 0$

偏差值：  $x_1 =$  像素  $y_1 =$  像素

$X_1 =$  mm  $Y_1 =$  mm

第二个点

标准参数值：  $x_2 = 319, y_2 = 96, X_2 = 0, Y_2 = 3$

偏差值：  $x_2 =$  像素  $y_2 =$  像素

$X_2 =$  mm  $Y_2 =$  mm

第三个点

标准参数值：  $x_3 = 435, y_3 = 240, X_3 = 2.121, Y_3 = 0, Z_3 = 2.121$

偏差值：  $x_3 =$  像素  $y_3 =$  像素

$X_3 =$  mm  $Y_3 =$  mm

$Z_3 =$  mm

输出

参数	标准值	输出	偏差	百分比
$x_0$	0	0	0	0 %
$y_0$	0	0	0	0 %
$c_x$	0	0	0	0 %
$c_y$	0	0	0	0 %
$y_{cr}$	0	0	0	0 %
$k$	0	0	0	0 %
$c_x/c_y$	0	0	0	0 %
$L_1$	0	0	0	0 %
$L_3$	0	0	0	0 %
$L_4$	0	0	0	0 %
$L_6$	0	0	0	0 %
$L_7$	0	0	0	0 %
$L_8$	0	0	0	0 %
$L_{11}$	0	0	0	0 %
$z_{cr}$	0	0	0	0 %

编辑

计算

退出

在左边的编辑框中输入偏差值，点击“计算”按钮，就可以算出这些偏差所造成的误差和误差百分比，并且可以和标准值相对照点击编辑可以将输入设为可编辑状态，修改偏差的输入，进行下一次计算，单击退出可以退出整个程序。图（）



得部分误差相消，并且可以减少整个物体形变的可能性。

## 七、 ASCSD